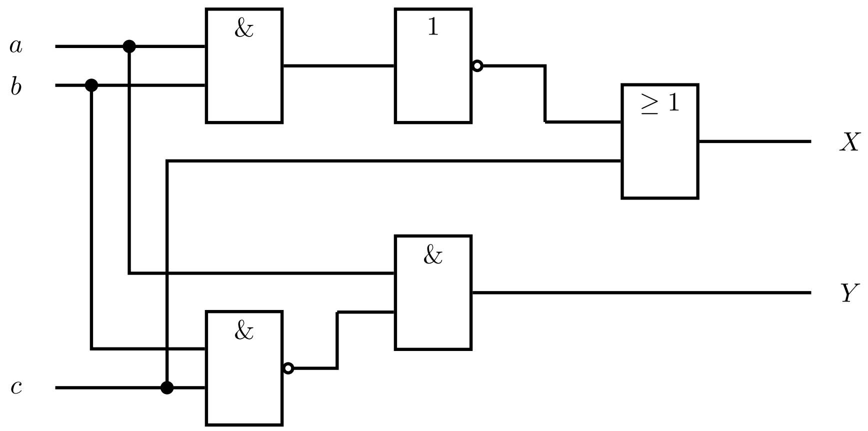
Aufgabe 1: Substitution mit NAND Gattern

Gegeben ist folgende Schaltung:



Formen Sie die gegebene Schaltung systematisch so um, dass diese nur noch **NAND Gatter** mit **2 Eingängen** enthält. Verwenden Sie dabei die logischen Konstanten 0 und 1 **nicht**. Vereinfachen Sie anschließend die Schaltung so weit wie möglich, um NAND Gatter einzusparen.

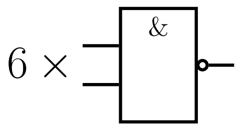
Aufgabe 2: Schaltnetz

Es soll eine *2-aus-3-Schaltung* entworfen werden. Dabei wird der Ausgang f genau dann logisch 1, wenn mindestens zwei der drei Eingänge a, b und c logisch 1 sind.

a) Stellen Sie die Funktion durch eine Wahrheitstabelle dar.

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

b) Geben Sie grafisch ein Schaltnetz für die Funktion f an, wobei Ihnen **nur 6 NAND-Gatter mit je zwei Eingängen** zur Verfügung stehen. Beschriften Sie die Ein- und Ausgänge.



Aufgabe 3: Induktive Definitionen

Wir betrachten eine Termdefinition, die sich von jener in der Vorlesung unterscheidet, und nennen die Terme entsprechend Übungsterme (UE-Terme), im Gegensatz zu den Vorlesungstermen (VO-Terme).

Ausgehend von gegebenen Symbolmengen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{G}$, die disjunkt und nicht leer sind, werden die UE-Terme über diesen beiden Mengen folgendermaßen induktiv definiert.

> UE-Term$(\mathcal{V}, \mathcal{G})$ ist die kleinste Menge mit folgenden Eigenschaften:
>
> 1. $\mathcal{V} \subseteq$ UE-Term$(\mathcal{V}, \mathcal{G})$
> 2. $\mathcal{G} \subseteq$ UE-Term$(\mathcal{V}, \mathcal{G})$
> 3. Wenn $n \geq 1, t_1, \ldots, t_n \in$ UE-Term$(\mathcal{V}, \mathcal{G})$ und $c \in \mathcal{G}$, dann ist auch $c(t_1, \ldots, t_n) \in$ UE-Term$(\mathcal{V}, \mathcal{G})$.
> 4. Wenn $t_1, t_2 \in$ UE-Term$(\mathcal{V}, \mathcal{G})$, dann ist $t_1 \odot t_2 \in$ UE-Term$(\mathcal{V}, \mathcal{G})$.

Vergleichen Sie UE-Term$(\mathcal{V}, \mathcal{G})$ mit den Vorlesungstermen $\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, indem Sie folgende Fragen beantworten. Legen Sie die Mengen $\mathcal{V} = \{x, y, z\}, \mathcal{G} = \{+, *\}$ und $\mathcal{F} = \{+/2, */2\}$ zugrunde.

a) Bilden Sie aus den in VO- und UE-Termen vorkommenden Zeichen mathematisch übliche Ausdrücke, die weder in UE-Term$(\mathcal{V}, \mathcal{G})$ noch in $\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ liegen.

b) Geben Sie zwei UE-Terme an, die keine VO-Terme sind, also Ausdrücke, die in UE-Term$(\mathcal{V}, \mathcal{G})$ aber nicht in $\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ liegen.

c) Geben Sie zwei Ausdrücke an, die sowohl UE- als auch VO-Terme sind, die also sowohl in UE-Term$(\mathcal{V}, \mathcal{G})$ als auch in $\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ liegen.

d) Warum gibt es keine VO-Terme, die keine UE-Terme sind, d.h., keine Ausdrücke, die in $\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ liegen, aber nicht in UE-Term$(\mathcal{V}, \mathcal{G})$?

Begründen Sie jeweils, warum Terme in einer Menge liegen bzw. nicht liegen, indem Sie die Regeln zur Konstruktion des Terms angeben bzw. argumentieren, warum die Konstruktion nicht möglich ist.

e) Ändert sich etwas an den Antworten auf die vorigen Fragen, wenn $\mathcal{G} = \{\odot\}$ und $\mathcal{F} = \{\odot/2\}$ gilt?

Aufgabe 4: Interpretationen Prädikatenlogischer Formeln

Seien $R/1$, $S/1$, $T/2$, $V/3$ Prädikatensymbole und $f/1$, $g/1$, $h/2$, $d/0$ und $e/0$ Funktionssymbole. In jeder Unteraufgabe ist ein Wertebereich $\mathcal{U}$ und eine unvollständige Interpretation I über $\mathcal{U}$ gegeben. Die Aufgabe besteht darin, I wie jeweils angegeben zu erweitern.

a) $\mathcal{U} = \{1,2,3\}$
$I(T) = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(2,1)\}$

Erweitern Sie I so auf R und S, dass die folgende Formel zu 0 (*falsch*) auswertet.

$$\exists x \exists y\, \big((R(x) \wedge S(y)) \Rightarrow (T(x,y) \wedge \neg R(x)) \big)$$

$I(R) =$

$I(S) =$

b) $\mathcal{U} = \{\mathrm{m},\mathrm{n},\mathrm{o}\}$
$I(T) = \{(\mathrm{m},\mathrm{m}),(\mathrm{n},\mathrm{n}),(\mathrm{o},\mathrm{o})\}$
$I(S) = \{\mathrm{m},\mathrm{n},\mathrm{o}\}$
$I(V) = \{(\mathrm{m},\mathrm{o},\mathrm{n}),(\mathrm{o},\mathrm{n},\mathrm{m}),(\mathrm{n},\mathrm{m},\mathrm{o})\}$

Erweitern Sie I so auf f und g, dass die folgende Formel zu 1 (*wahr*) auswertet.

$$\forall x \forall y\, \big((T(x,y) \Leftrightarrow S(y)) \Rightarrow V(f(x),g(y),x) \big)$$

$u \in \mathcal{U}$	$I(f)(u)$
m	
n	
o	

$u \in \mathcal{U}$	$I(g)(u)$
m	
n	
o	

c) $\mathcal{U} = \{\alpha,\beta\}$
$I(R) = \{\alpha\}$
$I(S) = \{\beta\}$
$I(T) = \{(\alpha,\beta),(\beta,\alpha),(\beta,\beta)\}$
$I(d) = \alpha$
$I(e) = \beta$

Erweitern Sie I so auf h, dass die folgende Formel zu 1 (*wahr*) auswertet.

$$\forall x \forall y\, \big((R(x) \Leftrightarrow \neg S(y)) \Rightarrow T(h(d,e),x) \big)$$

$u \in \mathcal{U}$	$v \in \mathcal{U}$	$I(h)(u,v)$
α	α	
α	β	
β	α	
β	β	

Aufgabe 5: Modellieren mit PL

Seien $\mathit{BildetAus}/2$, $\mathit{Produkt}/1$, $\mathit{Verkäuferin}/1$, $\mathit{Beurteilt}/2$ und $\mathit{Managerin}/2$ Prädikatensymbole sowie fax und $\mathit{brieföffner}$ Konstantensymbole mit folgender Bedeutung:

$$
\begin{aligned}
\mathit{Verkäuferin}(x) &\ldots\ x \text{ ist eine Verkäuferin} \\
\mathit{Produkt}(x) &\ldots\ x \text{ ist ein Produkt} \\
\mathit{Managerin}(x,y) &\ldots\ x \text{ ist Managerin für } y \\
\mathit{BildetAus}(x,y) &\ldots\ x \text{ bildet } y \text{ aus}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mathit{Beurteilt}(x,y) &\ldots\ x \text{ beurteilt } y \\
\mathit{brieföffner} &\ldots\ \text{Brieföffner} \\
\mathit{fax} &\ldots\ \text{Faxgerät}
\end{aligned}
$$

Verwenden Sie diese Symbole, um die nachfolgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln zu übersetzen.

Hinweis: Verwenden Sie in dieser Aufgabe bitte die Prädikaten- und Funktionssymbole so wie angegeben und keine Abkürzungen.

a) Keine Verkäuferin ist ein Produkt.

b) Für jedes Produkt gibt es (mindestens) eine Verkäuferin, die Managerin dafür ist.

c) Es gibt (mindestens eine) Managerin für Faxgeräte, aber keine für Brieföffner.

d) Verkäuferinnen, die keine Managerinnen sind, werden von (mindestens) einer Managerin ausgebildet.

e) Verkäuferinnen, die ein Produkt beurteilen, sind keine Managerinnen für dieses Produkt.

Aufgabe 6: Modellieren mit PL

Seien $\mathit{NaheZu}/2$, $\mathit{Cafe}/1$, $\mathit{Restaurant}/1$, $\mathit{Lernraum}/1$, $\mathit{Ruhig}(x)$ Prädikatensymbole und $\mathit{hauptgebaeude}/0$ Konstanten mit folgender Bedeutung:

$\mathit{NaheZu}(x,y)$	… x liegt nahe bei y	$\mathit{Cafe}(x)$	… bei x gibt es ein Café
$\mathit{Restaurant}(x)$	… bei x gibt es ein *Restaurant*	$\mathit{Lernraum}(x)$	… bei x gibt es einen *Lernraum*
$\mathit{Ruhig}(x)$	… bei x ist es ruhig	$\mathit{hauptgebaeude}$	… das Hauptgebäude

a) Beschreiben Sie die folgenden Formeln in natürlicher Sprache:

(i) $\forall x\, \mathit{NaheZu}(x,x)$

(ii) $\exists x\, (\mathit{NaheZu}(x, \mathit{hauptgebaeude}) \land \mathit{Ruhig}(x) \land \mathit{Lernraum}(x))$

(iii) $\forall x\, (\mathit{Lernraum}(x) \land \exists y\, \mathit{NaheZu}(x,y) \Rightarrow \exists z\, (\mathit{Cafe}(z) \lor \mathit{Restaurant}(z)))$

(iv) $\forall x\, (\mathit{Cafe}(x) \Rightarrow \neg \mathit{Ruhig}(x)) \land \neg \exists x\, (\mathit{Restaurant}(x) \land \mathit{Ruhig}(x))$

Sie können dabei davon ausgehen, dass das Universum ausschließlich Orte enthält.

b) Gegeben sei das Universum $\mathcal{U}_1 = \{Hauptgebaeude, Freihaus, Getreidemarkt\}$.

Gibt es eine Interpretation I_1, sodass die Formeln (i) – (iv) erfüllt sind. Falls ja, geben Sie diese an. Falls nein, geben Sie eine Begründung an.

c) Gegeben sei das Universum $\mathcal{U}_2 = \{Freihaus\}$.

Gibt es eine Interpretation I_2, sodass die Formeln (i) – (iv) erfüllt sind. Falls ja, geben Sie diese an. Falls nein, geben Sie eine Begründung an.

Aufgabe 7: Quantoren auswerten

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit Interpretation in der Prädiaktenlogik, den dazugehörigen Funktionen val_I, und den Quantoren $\exists, \forall$.

a) Gegeben ist die folgende prädikatenlogische Formel über der Variablen x, dem einstelligen Funktionssymbol f, den einstelligen Prädikatensymbolen R und S sowie dem zweistelligen Prädikatensymbol T.

$$\Big(\exists x\big(T(x, f(x)) \land \neg S(x)\big) \Rightarrow \forall x \forall y\big(T(x,y) \Rightarrow R(y)\big)\Big)$$

Überprüfen Sie, ob die Interpretation I ein Modell dieser Formel ist.
Sie können hier gerne mehrere Schritte zusammenfassen aber seien Sie darauf vorbereitet, die Auswertung der Formel Schritt für Schritt zu erklären.

$\mathcal{U} = \{1,2,3\}$
$I(R) = \{2,3\}$
$I(S) = \{1,3\}$
$I(T) = \{(1,1),(1,3),(2,1),(3,1)\}$
$I(f) = \{(1,2),(2,1),(3,2)\}$

b) Betrachten Sie die beiden prädikatenlogischen Formeln

(i) $\exists y \forall x\, (R(y) \land T(x,y))$
(ii) $\forall x \exists y\, (R(y) \land T(x,y))$

über der selben Signatur wie in Aufgabe a). Geben Sie eine Interpretation I über dem Wertebereich $\mathcal{U} = \{1,2,3\}$ an, welche ein Modell für (ii), jedoch nicht für (i) ist.

c) Gegeben sind die folgenden prädikatenlogischen Formeln über der Variablen x, dem Konstantensymbol $k/0$ sowie dem Prädikatensymbol $Contains/2$.

(i) $\exists x\, (Contains(x,k) \land (Contains(k,x) \land \neg Contains(x,x)))$
(ii) $\exists x\, (Contains(x,k) \Rightarrow (Contains(k,x) \land \neg Contains(x,x)))$

Überprüfen Sie für beide Formeln, ob die folgende Interpretation ein Modell der Formel ist.

$\mathcal{U} = \{1,2,3\}$
$I(k) = 2$
$I(Contains) = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$

Geben Sie für jede Formel, für die die Interpretation kein Modell ist, eine Erweiterung der Interpretation an, sodass die Erweiterung ein Modell der Formel darstellt.

Aufgabe 8: Signatur einer Modellierung

Gegeben sind zwei Situationsbeschreibungen und jeweils ein dazu passender Wertebereich $\mathcal{U}$.

(i) Jessie und James fahren nach Venedig und haben ein Ticket für den Railjet 133, der aus zwei Wagen besteht, gekauft. Jessie hat eine Reservierung für einen Fensterplatz in Wagen 23, Sitz 3. James hat keine Reservierung.

$\mathcal{U} = \{\text{RJ133}, \text{Jessie}, \text{James}, \text{Wagen22}, \text{Wagen23}, \text{Sitz1}, \text{Sitz2}, \text{Sitz3}, \text{Sitz4}\}$

(ii) Misty fährt nach Graz und hat ein Ticket für den Railjet 736. Sie sitzt auf einem Gangplatz.

$\mathcal{U} = \{\text{RJ736}, \text{Misty}, \text{Wagen11}, \text{Wagen12}, \text{Wagen13}, \text{Sitz1}, \text{Sitz2}\}$

Führen Sie folgende Schritte durch:

a) Stellen Sie fest, welche Beziehungen zwischen den Elementen der Universen (also zwischen Personen, Zügen, Wägen und Sitzen) bestehen. Wählen Sie geeignete Bezeichnungen (= Prädikatensymbole) samt Aritäten (Stelligkeiten) und geben Sie ihre natürlichsprachige Bedeutung an. Das Ziel ist, beide Situationen mit denselben Symbolen zu beschreiben.

Geben Sie anschließend für jede der beiden Situationen eine Interpretation dieser Symbole über dem jeweiligen Universum $\mathcal{U}$ an, die die Situation so gut wie möglich widerspiegelt.

b) Überlegen Sie, welche der Beziehungen als Funktion aufgefasst werden kann. Identifizieren Sie mindestens eine solche Beziehung und ersetzen Sie das entsprechende Prädikatensymbol durch ein Funktionssymbol. Passen Sie die Interpretationen aus der vorigen Teilaufgabe entsprechend an.

Aufgabe 9: Inferenzregeln als prädikatenlogische Konsequenzbeziehungen

Inferenzen können mittels Prädikatenlogik formal untersucht werden. Beispielsweise wird die Inferenz

$$\frac{\forall x \forall y P(x,y)}{\exists x P(x,x)}$$

als Konsequenz $\forall x \forall y P(x,y) \models \exists x P(x,x)$ aufgefasst. Zeigen Sie die Korrektheit dieser Inferenz, indem Sie die Konsequenz mittels Betrachtung aller möglichen Interpretationen nachweisen.

Anleitung:

- Die Formeln enthalten nur ein Prädikatensymbol $P/2$. Wir sind nur an Interpretationen über dieser Signatur interessiert.
- Im allgemeinen Fall wissen wir nur, dass das Universum $\mathcal{U}$ eine möglicherweise unendliche, nicht-leere Menge ist.
- Eine logische Konsequenz $F \models G$ gilt, falls für beliebige Interpretationen I und Variablenbelegungen σ gilt: wenn $\mathsf{val}_{I,\sigma}(F)$ wahr ist, dann ist auch $\mathsf{val}_{I,\sigma}(G)$ wahr.
- In unserem Fall haben die Formeln keine freien Variablen, d.h. wir können uns für die leere Belegung $\{\}$ als initiale Belegung von σ beschränken.
- Sie wissen also nicht genau, wie die Interpretation für P aussieht, aber Sie wissen, dass $\mathsf{val}_{I,\{\}}(\forall x \forall y P(x,y))$ wahr ist.
- Zeigen Sie mit diesem Wissen, dass $\mathsf{val}_{I,\{\}}(\exists x P(x,y))$ wahr ist.