Aufgabe 1: Normalformen

a) Kreuzen Sie an, in welchen Normalformen über den Variablen $\{A, B, C, D\}$ sich die angegebenen Formeln befinden.

	NNF	DNF	KNF	KDNF	KKNF	keine
$A \wedge (B \vee \neg C) \wedge D$	☒	☐	☒	☐	☐	☐
$\neg B \wedge \neg(C \wedge D)$	☐	☐	☐	☐	☐	☒
$\neg D$	☒	☒	☒	☒	☒	☐
$A \vee \neg B \vee \neg C \vee D$	☒	☒	☒	☐	☒	☐
$(\neg A \wedge B) \vee C \vee (A \wedge \neg D)$	☒	☒	☐	☐	☐	☐
$\bigwedge\{\neg A, \neg B, C, D\}$	☒	☒	☒	☒	☐	☐

NNF . . . Negationsnormalform
DNF . . . disjunktive Normalform
KNF . . . konjunktive Normalform
KDNF . . . kanonische DNF
KKNF . . . kanonische KNF
keine . . . in keiner dieser Normalformen

Notation: $\bigwedge$ und $\bigvee$ stehen für die Konjunktion bzw. Disjunktion mehrerer Formeln (ähnlich wie $\sum$ für die Summe und $\prod$ für das Produkt mehrerer Zahlen). Die Konjunktion bzw. Disjunktion der Formeln $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$ kann in einer der folgenden Formen geschrieben werden.

$$\bigwedge \mathcal{F} = \bigwedge_{F \in \mathcal{F}} F = \bigwedge_{i=1}^{n} F_i = F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \qquad \bigvee \mathcal{F} = \bigvee_{F \in \mathcal{F}} F = \bigvee_{i=1}^{n} F_i = F_1 \vee \cdots \vee F_n$$

Zusätzlich vereinbart man $\bigwedge\{\} = \top$ und $\bigvee\{\} = \bot$.

b) Gegeben ist die aussagenlogische Formel $F = (A \wedge \neg B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg C)$. Geben Sie Formeln in KNF, DNF, KKNF und KDNF (über den Variablen A, B, C) an, die zu F äquivalent sind.

(i) Verwenden Sie die semantische Methode (Auslesen aus der Wahrheitstabelle), um KNF, DNF, KKNF und KDNF zu berechnen.

(ii) Verwenden Sie die algebraische Methode (Umformen mittels der Gesetze der Booleschen Algebra), um KNF und DNF zu berechnen.

(a∧¬b)→(¬a∧¬c)
(¬a∨b)∨(¬a∧¬c)
¬a∨b∨(¬a∧¬c) <=> DNF

¬a∨b∨(¬a∧¬c)
¬a∨ (¬a∨b)∧(b∨¬c)
(¬a∨b)∧(¬a∨b∨¬c) <=> KNF

Aufgabe 2: Semantik der Aussagenlogik

a) Betrachten Sie die folgenden Formeln. Sind diese unerfüllbar, widerlegbar, erfüllbar und/oder gültig? Geben Sie geeignete Interpretationen an, um Ihre Antworten zu begründen.

Übersetzen Sie weiters die Formeln unter Verwendung der folgenden atomaren Aussagen in deutsche Sätze.

S	Ein Eissalon hat offen.	O	Die Flasche ist offen.
H	Es ist heiß draußen.	L	Die Flasche ist leer.
E	Ich habe Lust auf ein Eis.	A	Ich habe die Flasche ausgetrunken.
G	Ich gehe ein Eis essen.	D	Ich habe Durst.

(i) $(S \wedge E) \Rightarrow G$

Wenn ein Eissalon offen hat und ich Lust auf ein Eis habe, dann gehe ich ein Eis kaufen.
erfüllbar, was ist wenn ich kein geld habe

(ii) $(S \wedge H) \Rightarrow E$

Wenn ein Eissalon offen hat und es draußen heiß ist, dann habe ich Lust auf ein Eis.
gültig

(iii) $L \Leftrightarrow (O \wedge A)$

Genau dann wenn die Flasche leer ist, ist die Flasche offen und ich habse sie ausgetrunken
erfüllbar, ich kann sie auch ausgeleert haben

(iv) $(D \wedge A) \Rightarrow (L \wedge O)$

Wenn ich Durst habe und die Flasche ausgetrunken habe, dann ist die Flasche offen und die Flasche ist leer.
erfüllbar, man kann die flasche wieder anfüllen

b) Formalisieren Sie die folgenden drei Aussagen und überprüfen Sie, ob der Schluss von (a) und (b) auf (c) korrekt ist. Führen Sie dabei die Fragestellung auf das Erfüllbarkeitsproblem einer Formel zurück.

(a) Wenn ich mein Lieblingslied höre, dann singe ich.

(b) Ich tanze nur, wenn ich mein Lieblingslied höre.

(c) Ich singe oder ich tanze.

a, L => S
b, T => L
c, S xor T   (könnte auch or sein, sprachlich nicht eindeutig)
nicht korrekt/erfüllbar, da T=1 => L=1 => S=1   => Widerspruch, aber S=1
= T=0 möglich=>erfüllbar

Aufgabe 3: Aussagenlogische Modellierung

Hicksi, die Hexe, braut einen Zaubertrank. Damit dieser auch wirkt, hat sie in ihrem Rezeptbuch folgende Notizen gemacht.

- Spinnenbein ist keine gute Idee, das lasse ich immer weg.
- Eine einzelne Zutat reicht nicht aus, da muss schon mehr hinein.
- Krötenschleim ist nur dabei, wenn weder Spinnenbein noch Drachenasche dabei sind.
- Entweder Hexenhaar oder Krötenschleim muss in den Topf!
- Andere wirksame Zutaten habe ich noch nicht gefunden.

a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der Aussagenvariablen an.

b) Kann Hicksi die Zutaten so wählen, dass alle Notizen erfüllt sind? Geben Sie alle Kombinationen von Zutaten an, die sämtliche Kriterien erfüllen. Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung und einer Wahrheitstabelle. Falls Sie Spalten oder Zeilen in der Tabelle auslassen, geben Sie den Grund dafür an.

Aufgabe 4: Gierige BDDs

Aus einer Wahrheitstabelle mit der Variablenreihenfolge x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 wurde folgender Bead mit Don't-Cares ausgelesen:

`1XX0 1X00 000X 110X 1X00 1X0X 0X0X 1X00`

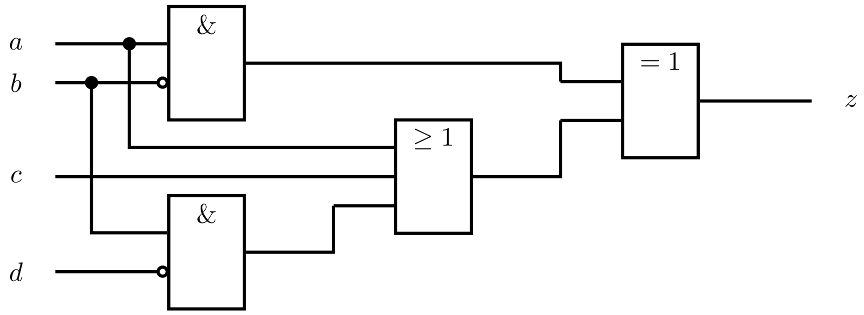
a) Erstellen Sie das minimale BDD mittels der **gierigen** Variante von Beads.

b) Stellen Sie das BDD aus Unteraufgabe (a) mit dem `ITE`-Operator und als `if`-Ausdruck dar.

Aufgabe 5: Schaltnetzumwandlung

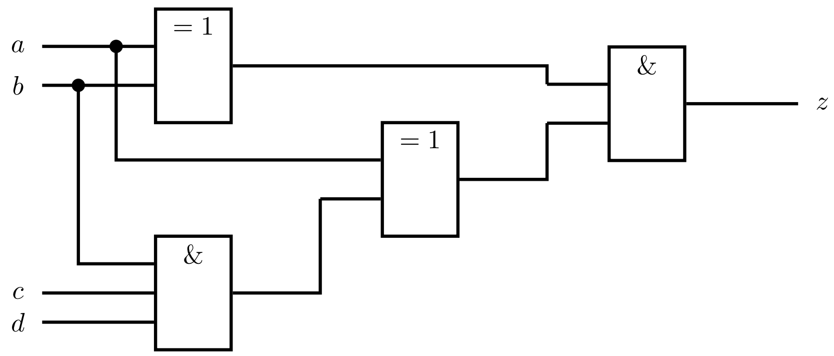
Gegeben ist das folgende Schaltnetz. Transformieren Sie diese Schaltung so, dass nur Grundgatter (AND, OR und NOT) mit nicht mehr als zwei Eingängen verwendet werden und geben Sie das entsprechende Schaltnetz an. Wann immer passend, können Sie NOT Gatter auch kompakter als Negationsring beim Eingang eines darauffolgenden Gatters einzeichnen.

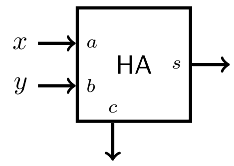
Aus wie vielen Gattern besteht Ihr Schaltnetz?



Aufgabe 6: Gatter und Standardbaugruppen

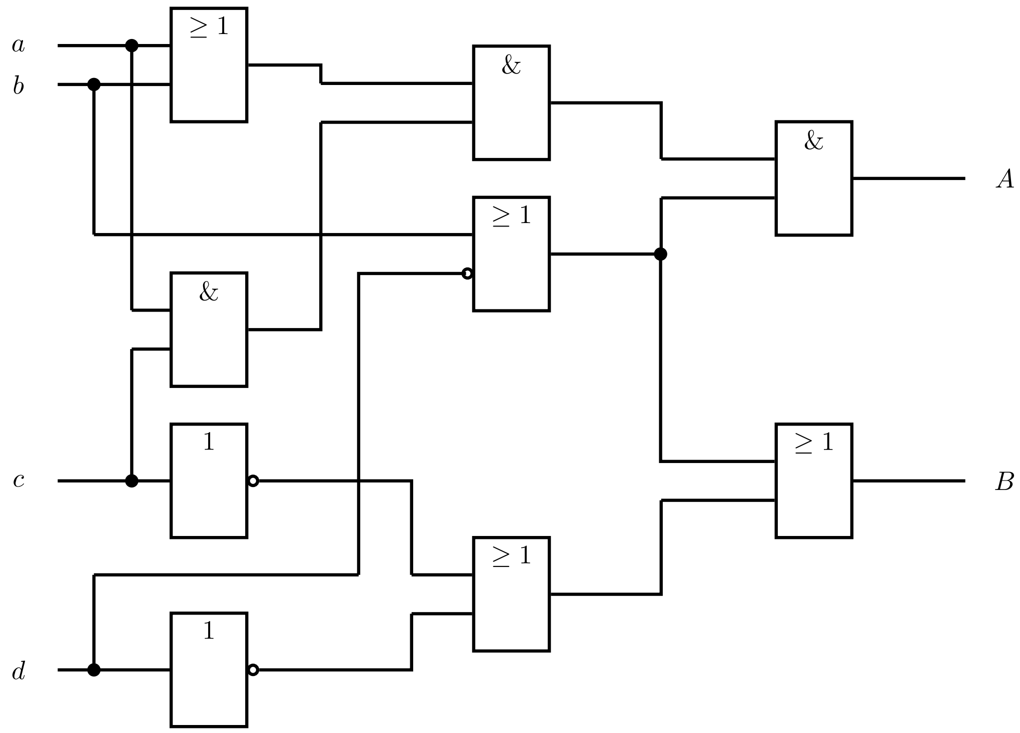
Transformieren Sie das folgende Schaltnetz (links) so, dass Sie nur 1-Bit-Halbaddierer (Abbildung rechts) benötigen. Andere Bauteile wie AND-, OR-, oder NOT-Gatter stehen *nicht* zur Verfügung. Sie können beliebig viele Halbaddierer verwenden. Beschriften Sie die verwendeten Ein- und Ausgänge. Es müssen nicht immer alle Ausgänge der Halbaddierer werden.





Aufgabe 7: Optimieren eines Schaltnetzes

Gegeben sei das folgende Schaltnetz.



Stellen Sie die durch das Schaltnetz berechneten Funktionen algebraisch oder als Wahrheitstabelle dar. Überlegen Sie anschließend, wie das Schaltnetz vereinfacht werden kann, wobei nur die Grundgatter AND, OR und NOT mit nicht mehr als zwei Eingängen verwendet werden sollen. Geben Sie dieses vereinfachte Schaltnetz an.

a	b	c	d	A	B
0	0	0	0		
0	0	0	1		
0	0	1	0		
0	0	1	1		
0	1	0	0		
0	1	0	1		
0	1	1	0		
0	1	1	1		
1	0	0	0		
1	0	0	1		
1	0	1	0		
1	0	1	1		
1	1	0	0		
1	1	0	1		
1	1	1	0		
1	1	1	1		

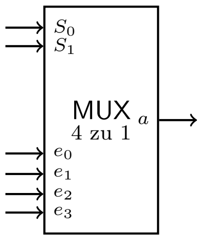
Aufgabe 8: Multiplexer

Die Formel $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C)$ stellt eine dreistellige boolesche Funktion f dar, wobei die Variablen A, B, C in dieser Reihenfolge den drei Argumenten von f entsprechen.

a) Stellen Sie f als Wahrheitstabelle dar.

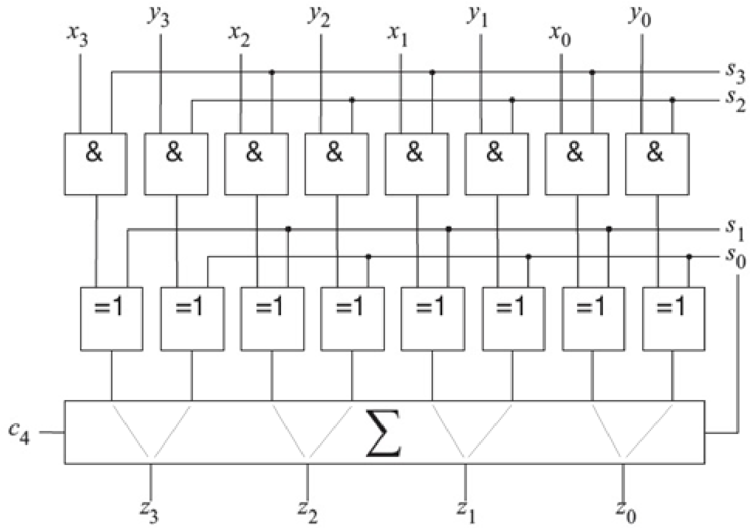
A	B	C	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

b) Erstellen Sie ein Schaltnetz für die Funktion f, das ausschließlich aus einem oder mehreren *Multiplexern* (siehe unten) besteht. Es sollen *keine zusätzlichen Gatterbausteine* verwenden werden, die logischen Konstanten *log. 0* und *log. 1* sowie das direkte Verbinden mit den Eingängen sind aber erlaubt.



Aufgabe 9: ALU - Schaltnetz

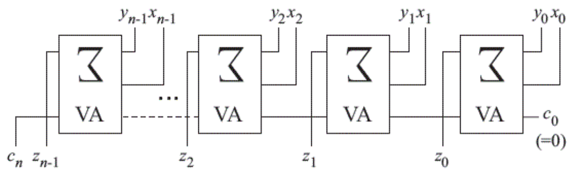
Sie haben folgendes Schaltnetz (spezielle ALU) gegeben.



Dieses Schaltnetz verarbeitet als Eingabe zwei Zweierkomplementzahlen $x = x_3x_2x_1x_0$ und $y = y_3y_2y_1y_0$ mit jeweils vier Bit. Abhängig von den Steuersignalen s_0, s_1, s_2 und s_3 wird durch den 4-Bit Addierer (Block mit Summenzeichen) die Zweierkomplementzahl $z = z_3z_2z_1z_0$ berechnet.

Beispiel: Für $s_0 = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ und $s_3 = 1$ berechnet dieses Schaltnetz $x + y$ (für beliebige Belegungen von x und y).

Der interne Aufbau des hier verwendeten n-Bit Addierers sieht folgendermaßen aus.



Beachten Sie, dass c_0 bei dieser speziellen ALU durch s_0 bestimmt wird und nicht immer 0 ist.

Welche Berechnungen werden durch folgende Kombinationen der Steuersignale realisiert?

a) $s_0 = 1$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ und $s_3 = 0$

b) $s_0 = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = 0$ und $s_3 = 1$

c) $s_0 = 1$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ und $s_3 = 1$

d) $s_0 = 1$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ und $s_3 = 1$

e) Mit welcher Kombinationen der Steuersignale kann die Operation $z = -y$ realisiert werden?

f) Bonusaufgabe: Wie lässt sich die Wirkung der Steuersignale beschreiben?