

### Aufgabe 1: Grundlagen Endlicher Automaten I

- a) Kreuzen Sie in folgender Tabelle jene Automaten an, für die die jeweilige Aussage zutrifft. Überlegen Sie sich dazu auch eine Begründung, diese muss in der Übung erörtert werden.

Aussage	DEA	NEA	Transducer	Mealy-Automat	Moore-Automat	Det. Büchi-Automat	Nichtdet. Büchi-Automat	trifft bei keinem zu
1 Kann mehrere Startzustände besitzen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2 Kann eine unendliche Anzahl von Endzuständen besitzen.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3 Besitzt ein Ein- und Ausgabealphabet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4 Wird ohne dedizierte Endzustände spezifiziert.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5 Kann keine unendlichen Symbolfolgen verarbeiten.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6 Besitzt eine deterministische Übergangsrelation.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7 Ausgabe ist unabhängig vom aktuellen Zustand.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
8 Kann den Zustand auch ohne Eingabe wechseln.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9 Benötigt keine explizite Übergangsrelation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

???

- b) Gegeben ist der Automat  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A} = \langle \{q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1\}, \delta, \gamma, q_1 \rangle$$

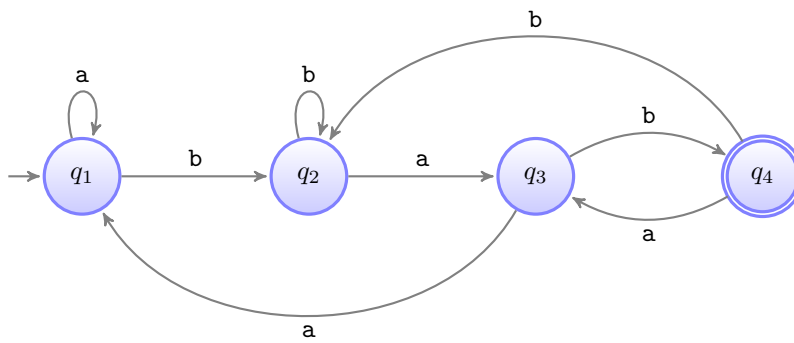
$\delta$	0	1	$\gamma$	
$q_1$	$q_1$	$q_2$	$q_1$	1
$q_2$	$q_1$	$q_2$	$q_2$	0

- (i) Um welchen Typ von Automaten handelt es sich? Woran können Sie das ablesen?

- (ii) Beschreiben Sie die Funktion des Automaten, also die Ausgabe in Abhängigkeit von der Eingabe.

## Aufgabe 2: Grundlagen Endlicher Automaten II

Der Automat  $\mathcal{A}$  ist graphisch spezifiziert als:



- a) Spezifizieren Sie  $\mathcal{A}$  als Tupel und geben Sie  $\delta$  in tabellarischer Form an. Handelt es sich bei  $\mathcal{A}$  um einen deterministischen oder nichtdeterministischen Automaten?
- b) Berechnen Sie schrittweise  $\delta^*(q_1, \text{aabbabb})$ . Zu welchem Zustand führt dieses Wort? Wird es von  $\mathcal{A}$  akzeptiert?

c) Geben Sie alle akzeptierten Wörter mit einer Länge bis zu fünf Zeichen an.

d) Welchem Muster folgen akzeptierte Wörter von  $\mathcal{A}$ ? Beschreiben Sie  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ , die Sprache des Automaten.

### **Aufgabe 3: Modellierung mit Deterministischen Endlichen Automaten**

Ein Getränkeautomat zeigt folgendes Verhalten.

- Der Getränkeautomat bietet Mineralwasser zum Preis von €2 und Soft Drinks zum Preis von €4 an.
- Der Käufer kann beliebig viele Ein- und Zweieuro Münzen einwerfen. Sobald die Kosten für ein spezifisches Getränk eingeworfen wurden, kann dieses Getränk per Tastendruck erworben werden. Im Fall eines Kaufs wird das überschüssig eingeworfene Geld mit dem Getränk ausgefolgt, sodass der Automat sich nach dem Getränkekauf wieder im Ausgangszustand befindet.
- Der Käufer kann den Kaufvorgang jederzeit mit einem Tastendruck abbrechen. Dabei wird das bisher eingeworfene Geld ausgefolgt und der Automat kehrt ohne einen Verkauf in den Ausgangszustand zurück.
- Zur Vereinfachung wird angenommen, dass der Automat einen unbeschränkten Vorrat an Getränken zur Verfügung hat.

Modellieren Sie den Getränkeautomaten mittels eines endlichen Automaten. Bearbeiten Sie dazu folgende Teilaufgaben:

- a) Identifizieren Sie die Zustände, in denen sich der Getränkeautomat im Verlauf eines Kaufvorgangs befinden kann. Wodurch sind diese Zustände charakterisiert? Finden Sie geeignete Bezeichnungen für diese Zustände. Wie viele Zustände werden benötigt, um den spezifizierten Automaten zu modellieren?
- b) Welche Aktionen gibt es, die einen Zustand in einen anderen überführen? Wählen Sie geeignete Symbole, um diese Aktionen zu repräsentieren.

- c) Spezifizieren Sie nun den Automaten  $\mathcal{A}$  sowohl graphisch als auch tabellarisch. Begründen Sie, warum Ihr Automat deterministisch ist.

- d) Geben Sie drei Wörter an, die Ihr Automat akzeptiert, und beschreiben Sie den dazugehörigen Kaufvorgang.

#### Aufgabe 4: Modellierung mit Nichtdeterministischen Endlichen Automaten I

Die Sprache  $\mathcal{L}_{do}$  besteht aus optional vorzeichenbehafteten Dezimalzahlen, deren ganzzahliger Anteil ungerade ist. Der Nachkommateil kann sowohl durch einen Punkt (".") als auch durch ein Komma (",") eingeleitet werden, wobei dem Punkt bzw. Komma immer eine Ziffer vorausgehen und eine folgen muss. Ganze Zahlen können ohne Nachkommateil angegeben werden. Folgende Beispiele verdeutlichen diese Anforderungen.

- $\{ "3.1415", "-23", "+19,007", "1,1", "3" \} \subset \mathcal{L}_{do}$
- $\{ "42.0", "-222,3", ".5", "11," \} \cap \mathcal{L}_{do} = \emptyset$

Modellieren Sie einen möglichst kleinen NEA (höchstens 5 Zustände), der  $\mathcal{L}_{do}$  akzeptiert. Nützen Sie dazu die Möglichkeiten von NEAs und gehen Sie in folgenden Schritten vor:

- Identifizieren Sie die für Ihre Lösung notwendigen Zustände, die der Automat einnehmen kann. Wie viele Zustände sind das?
- Identifizieren Sie das Eingabealphabet  $\Sigma$  des Automaten. Fassen Sie gleichartige Zeichen zu Gruppen zusammen und behandeln Sie jede Gruppe als ein Zeichen, um den Automaten übersichtlich zu halten.
- Bestimmen Sie die Übergangsrelation  $\delta$  und geben Sie diese tabellarisch an.

d) Geben Sie den Automaten als Graph an.

e) Prüfen Sie nun Ihren Automaten, indem Sie die Verarbeitung des Wortes **+47.11** durch schrittweise Anwendung von  $\delta$  nachprüfen. Wird das Wort von Ihrem Automaten akzeptiert?

### Aufgabe 5: Modellierung mit Nichtdeterministischen Automaten II

In dieser Aufgabe wird eine Binärzahl eine *BD-Zahl* genannt, wenn ihre Hexadezimaldarstellung die Hexziffer B oder D enthält. Beispielsweise ist 101011 eine BD-Zahl, da sie der Hexadezimalzahl 2B entspricht. Eine gespiegelte BD-Zahl ist eine BD-Zahl, die mit dem LSB beginnt und mit dem MSB endet. 110101 ist somit eine gespiegelte BD-Zahl.

- a) Entwerfen Sie einen nichtdeterministischen Automaten, der gespiegelte BD-Zahlen (und nur diese) akzeptiert, und geben Sie diesen als Graphen an. Nützen Sie die Ausdrucksmöglichkeiten von NEA, um den Automaten klein zu halten.



- b) Eine *BDF-Zahl* ist eine BD-Zahl, deren Hexdarstellung mit der Hexziffer **F** endet. Modifizieren Sie Ihren NEA aus der letzten Teilaufgabe, sodass er gespiegelte BDF-Zahlen (und nur diese) akzeptiert.

- c) Geben Sie ein Wort an, das beide Automaten akzeptieren, sowie eines, das der erste Automat akzeptiert aber nicht der zweite, sowie eines, das keiner der beiden Automaten akzeptiert.

- d) Zusatzaufgabe (optional): Lassen sich auch NEAs für die Sprachen der nicht-gespiegelten BD- bzw. BDF-Zahlen finden? Wenn ja, skizzieren Sie diese Automaten. Wenn nein, argumentieren Sie, warum das nicht geht.

### Aufgabe 6: Determinisierung eines Automaten

Gegeben ist der folgende nichtdeterministische endliche Automat  $\mathcal{A}$  in tabellarischer Form:

	$\delta$	x	y	z
SZ:	0	{ 1, 2 }	{ }	{ }
	1	{ }	{ 0, 1 }	{ }
EZ:	2	{ }	{ }	{ 0, 1, 2 }

Wandeln Sie diesen in einen deterministischen endlichen Automaten um, indem Sie folgende Teilaufgaben erfüllen:

a) Geben Sie den Automaten  $\mathcal{A}$  als Graph an.

b) Erzeugen Sie die Übergangsrelation  $\hat{\delta}$  für die Potenzmenge der Automatenzustände und geben Sie diese an. Sie dürfen unerreichbare Zustände schon beim Erstellen der Übergangsrelation eliminieren. Welche Zustände hat der so entwickelte DEA? Was ist der Startzustand, was sind die Endzustände?

c) Geben Sie Ihren DEA als Graph an.

- d) Überprüfen Sie Ihre Arbeit, indem Sie testen, ob das Wort `xxxxzyyx` sowohl vom NEA als auch von Ihrem DEA akzeptiert wird.

## Aufgabe 7: Modellierung mit Transducern I

Eine Folge von Ziffern wird *gerade Sequenz* genannt, wenn sie nur aus geraden Ziffern besteht, und eine *ungerade Sequenz*, wenn sie nur aus ungeraden Ziffern besteht. Gerade Sequenzen sollen in das Symbol **e** (even) für die erste Ziffer und in das Symbol **+** für jede weitere gerade Ziffer übersetzt werden. Analog sollen ungerade Sequenzen in das Symbol **o** (odd) gefolgt von **+**-Symbolen übersetzt werden.

*Beispiel:* Die Ziffernfolge „2423121“ übersetzt sich in „e++o+eo“, da sie aus der geraden Sequenz 242, der ungeraden Sequenz 31, der geraden Sequenz 2 und der ungeraden Sequenz 1 besteht. Die Sequenzen werden dabei so lang wie möglich gewählt.

Die Ziffer 0 hat eine Sonderfunktion. Sie zählt als gerade Ziffer, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist: (i) Sie tritt am Beginn der Ziffernfolge auf. (ii) Sie folgt auf eine ungerade Sequenz der Länge 1 (eine Sequenz mit nur einer Ziffer). (iii) Sie folgt auf eine gerade Sequenz mit mindestens zwei Ziffern. Andernfalls – die Null folgt auf eine ungerade Sequenz mit mehr als einer Ziffer oder auf eine gerade Sequenz mit nur einer Ziffer – zählt sie als ungerade Ziffer.

*Beispiel:* „0240310200“ übersetzt sich in „e+++o++eo e“. Die erste Null zählt als gerade Ziffer, da sie am Beginn steht, die zweite, weil sie auf eine gerade Sequenz der Länge 3 folgt. Die dritte Null folgt auf zwei ungerade Ziffern und gilt deshalb ebenfalls als ungerade. Die vierte Null folgt auf eine gerade Sequenz der Länge 1, sie startet daher eine ungerade Sequenz. Die letzte Null folgt einer ungeraden Sequenz mit einer einzigen Ziffer, daher startet sie eine gerade Sequenz.

Entwerfen Sie einen **Mealy-Automaten**, der Folgen der **Ziffern 0 bis 4** auf diese Weise übersetzt. Verwenden Sie so wenige Zustände wie möglich (fünf sollten genügen).

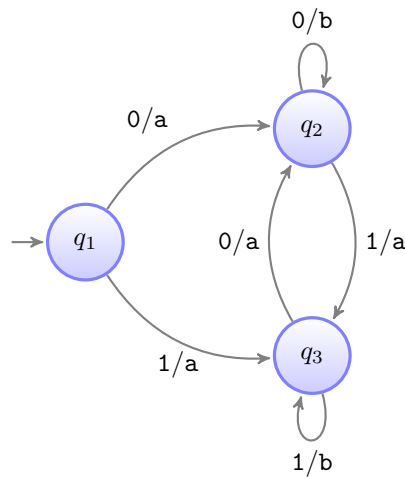
a) Geben Sie das Eingabealphabet  $\Sigma$  und das Ausgabealphabet  $\Gamma$  explizit als Menge an.

b) Geben Sie die erwartete Ausgabe des Automaten für die Eingabe **31040011030** an.

c) Geben Sie den Mealy-Automaten als Graph an.

### Aufgabe 8: Modellierung mit Transducern II

Gegeben ist folgender Mealy-Automat  $\mathcal{A}$  mit  $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ ,  $\Sigma = \{0, 1\}$  und  $\Gamma = \{a, b\}$ :



- a) Wählen Sie eine gültige Eingabesymbolfolge mit einer Mindestlänge von 5 und geben Sie die damit erzeugte Ausgabe an.
- b) Wandeln Sie  $\mathcal{A}$  in einen äquivalenten Moore-Automaten um. Eine erweiterte Definition von Moore-Automaten erlaubt, dass, wenn der Startzustand eines Moore-Automaten nach dem Start nie wieder erreicht wird, dessen Ausgabe leer bleiben darf. Sie dürfen diese Definition beim Entwurf Ihres Moore-Automaten nutzen, damit die Übersetzungsfunktionen des Moore- und des Mealy-Automaten genau übereinstimmen.
- (i) Geben Sie die grafische Darstellung des Moore-Automaten an. Erklären Sie kurz aber klar, wie Sie bei der Umwandlung vorgegangen sind.

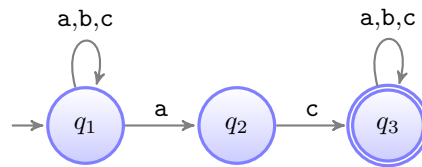
- (ii) Wie unterscheiden sich die Ausgaben Ihres Moore-Automaten von denen des Mealy-Automaten?
- c) Verwenden Sie die oben gewählte Eingabesymbolfolge und vergleichen Sie die vom gegebenen Mealy-Automaten erzeugte Ausgabe symbolweise mit der Ihres Moore-Automaten.

### Aufgabe 9: Büchi-Automaten

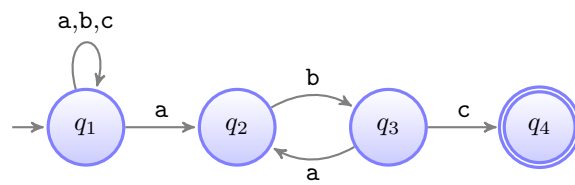
Betrachten Sie die Definitionen von deterministischen und nichtdeterministischen Büchi-Automaten aus der Vorlesung.

- a) Geben Sie zu den folgenden nichtdeterministischen Büchi-Automaten  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$  an, welche Sprache  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$  diese jeweils akzeptieren.

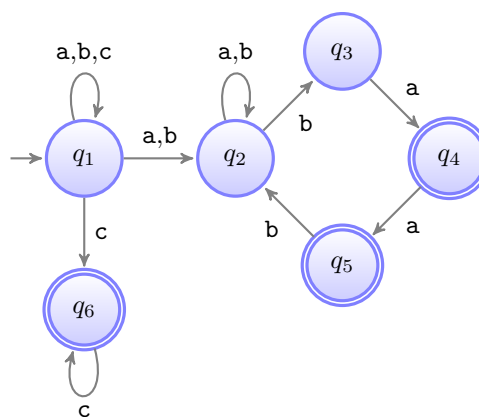
(i)  $\mathcal{A}_1$



(ii)  $\mathcal{A}_2$

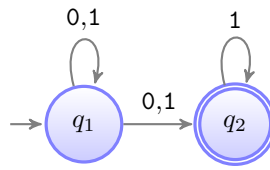


(iii)  $\mathcal{A}_3$





- b) Wandeln Sie den grafisch dargestellten, nichtdeterministische Büchi-Automaten  $\mathcal{A}_n$  naiv mit dem in der Vorlesung für NEA/DEA vorgestellten Verfahren der Potenzmengenkonstruktion in einen deterministischen Automaten  $\mathcal{A}_d$  um.



- (i) Geben Sie den konstruierten deterministischen Automaten  $\mathcal{A}_d$  als Graph an.
- (ii) Vergleichen Sie nun die von  $\mathcal{A}_n$  und  $\mathcal{A}_d$  akzeptierten Sprachen. Was können Sie feststellen? Was ist der Grund dafür?