Angleichungskurs Mathematik

Vorlesung mit Übung

2021 W

Andreas KÖRNER

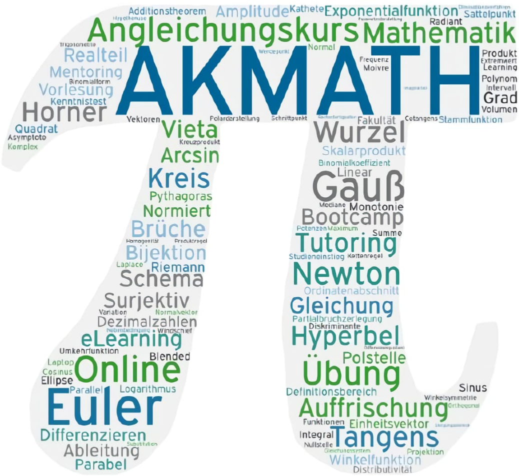
TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

eBook Version

TU Verlag
an der Technischen Universität Wien

AKMATH
Angleichungskurs Mathematik

Vorlesung mit Übung



Andreas KÖRNER

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Redaktionelles

Das vorliegende Skriptum bildet die inhaltliche Unterlage für die Lehrveranstaltungen:

- 101.748 VU Angleichungskurs Mathematik
- 101.744 VU Angleichungskurs Mathematik für INF und WINF

Seit Wintersemester 2020 wird ein gemeinsamer Angleichungskurs Mathematik für alle angesprochenen Studienrichtungen angeboten. Für die Studienrichtungen Informatik und Wirtschaftsinformatik ist dieser im September auf das PROLOG Informatik abgestimmt und stellt daher eine eigenständige Lehrveranstaltung dar.

Der Angleichungskurs Mathematik an der TU Wien – AKMATH TU Wien – wird in Form von Blended Learning abgehalten, d.h. klassisches Lehren und Lernen verbunden mit E–Learning. Genauere Informationen zu diesem Konzept finden sich auf

http://akmath.tuwien.ac.at/.

Auflage: September 2021

Andreas Körner
Institut für Analysis und Scientific Computing
Technische Universität Wien

Vorwort

Liebe Studierende,

Mathematik stellt für viele Studien an der Technischen Universität Wien eine wichtige Grundlage dar. Nicht nur in den Lehrveranstaltungen, welche sich selbst mit Mathematik beschäftigen, sondern insbesondere in den Lehrveranstaltungen, welche Mathematik als Werkzeug verwenden, wird klar, dass das mathematische Grundwissen unabdingbar für eine technisch-naturwissenschaftliche Ausbildung ist. Die Erfahrung der letzten Jahre zeigt, dass es zwei wesentliche Probleme zu Studienbeginn gibt. Studierende haben zu wenig ausgebildete Rechenfertigkeiten in den relevanten Themengebieten und Studierende aus unterschiedlichen Schulformen haben, bedingt durch die unterschiedlichen Lehrpläne, verschiedenes Vorwissen.

Der Angleichungskurs Mathematik – AKMATH – hat zum Ziel den Studierenden jene Inhalte und Fertigkeiten in einer Form zu vermitteln, sodass der Studieneinstieg an der TU Wien einfacher verläuft. Im Kurs werden ausgewählte Kapitel behandelt, die zu Studienbeginn von Interesse sind. Es werden die grundlegenden Begrifflichkeiten der diversen Themenbereiche eingeführt und die Rechenfertigkeiten mit Hilfe einer großen Vielfalt an Beispielen geschult. Dabei setzt die Kursstruktur in hohem Maße auf die Verknüpfung aus Präsenzlehre und eigenem Üben.

Das vorliegende Skriptum ist als Grundlage und Nachschlagewerk zum Angleichungskurs Mathematik gedacht, die zugehörigen Vorlesungen und Übungen ergänzen dieses inhaltlich. Das Skriptum hat sich über Jahre hinweg entwickelt und wurde immer wieder an die Bedürfnisse eines Kurses dieses Formates angepasst. Dabei haben sehr viele Kolleginnen und Kollegen in meinem Umfeld beigetragen, bei denen ich mich an dieser Stelle ganz herzlich bedanken möchte. Für Hinweise zu Fehlern und Ungereimtheiten bin ich immer dankbar.

In der Auflage 2019 des Skriptums wurde das Kapitel Vektorrechnung und analytische Geometrie strukturell neu aufgebaut. Auch die Kursstruktur wurde dahingehend angepasst. In der aktuellen Auflage des Skriptums wurden einige Tippfehler und Inkonsistenzen ausgebessert und inhaltliche Abschnitte komplettiert.

Das akademische Jahr 2021/2022 beginnt (wieder) unter speziellen Umständen und die Abhaltung der Lehrveranstaltungen wird in einem speziellen Setup passieren. Trotzdem wird der AKMATH nach bestem Wissen und im Rahmen aller Möglichkeiten seine Mission erfüllen und Ihnen eine möglichst gute Vorbereitung auf den Studienstart bieten.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg im Angleichungskurs Mathematik und darüber hinaus alles Gute für einen erfolgreichen Studienstart an der TU Wien!

Andreas Körner — Wien, im September 2021

Zum Geleit

Es ist nicht das Wissen,
sondern das Lernen,
nicht das Besitzen,
sondern das Erwerben,
nicht das Dasein,
sondern das Hinkommen,
was den größten Genuß gewährt.

Carl Friedrich Gauß

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Mathematische Zeichen und Symbole

Dieser Abschnitt soll eine Einführung in die Symbolik und Zeichen der Mathematik geben, um im folgenden Skriptum und im Laufe des Studiums mit den vorgestellten Schreibweisen zurecht zu kommen.

Es werden im Folgenden auch Begriffe aus der Mengenlehre vorgestellt. Die Mengenlehre ermöglicht es u.a. Aussagen nicht nur für ein konkretes Element, sondern für eine Gesamtheit an Elementen zu treffen.

Eine **Menge** ist die Zusammenfassung bestimmter, wohl unterscheidbarer Objekte. Von jedem dieser Objekte muss eindeutig feststehen, ob dieses zur Menge gehört oder nicht. Die Objekte der Menge heißen Elemente.

In Tabelle 1.1 sind einige Zeichen, die zugehörigen Benennungen und die Bedeutung aufgelistet. Weiters ist für kompakte Schreibweisen das **Summensymbol** Σ praktisch. Das Symbol beinhaltet kompakt die Information einer Summation, ohne viel Platz für das Aufschreiben zu verbrauchen. Wenn $a_1, a_2, \ldots, a_k$ beliebige Zahlen sind und $k \in \mathbb{N}$, so ist die Verwendung des Summensymbols erklärt durch

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Die Variable n wird hier als **Laufindex** bezeichnet, welcher eine natürliche oder ganze Zahl sein muss.

Beispiel 1.1. Einige Beispiele zur Verwendung des Summensymbols, $k, n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}$:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} 1 = 10$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} 1 = k$

(c) $\displaystyle\sum_{i=-2}^{1} x_i = x_{-2} + x_{-1} + x_0 + x_1$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i + c) = \sum_{i=1}^{n} a_i + nc$

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (ca_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} 3k^2 = 3\sum_{k=1}^{4} k^2 = 3(1^2+2^2+3^2+4^2) = 90$

Im Folgenden seien A und B Mengen, x ein Element, A_1 und A_2 logische Aussagen.

Zeichen	Bedeutung	Erklärung bzw. Resultat
$\{\} = \emptyset$	leere Menge	Menge ohne Elemente
$A \setminus B$	mengentheoretische Differenz	Aus der Menge A werden alle Elemente entfernt, die in der Menge B enthalten sind.
$A \cap B$	Durchschnitt	Resultat ist eine Menge, die jene Elemente enthält, die sowohl in A als auch in B liegen.
$A \cup B$	Vereinigung	Resultat ist eine Menge, die alle Elemente aus A und B enthält.
$A \subset B$	echte Teilmenge	A ist Teilmenge von B.
$A \subseteq B$	Teilmenge	A ist Teilmenge von B oder die beiden Mengen sind gleich.
$A \supset B$	echte Obermenge	A ist Obermenge von B.
$A \supseteq B$	Obermenge	A ist Obermenge von B oder die beiden Mengen sind gleich.
$x \in A$	Element von	x ist Element der Menge A.
$x \notin A$	nicht Element von	x ist kein Element der Menge A.
$\forall x \in A\colon A_1$	für alle, Allquantor	Für jedes Element x der Menge A gilt die Aussage A_1.
$\exists x \in A\colon A_1$	es existiert, Existenzquantor	Es existiert (mindestens) ein Element x der Menge A für welches die Aussage A_1 gilt.
$A_1 \vee A_2$	logisches oder, Disjunktion	Mindestens eine der beiden Aussagen A_1, A_2 muss erfüllt sein.
$A_1 \wedge A_2$	logisches und, Konjunktion	Beide Aussagen A_1, A_2 müssen gleichzeitig erfüllt sein.
$A_1 \Rightarrow A_2$	daraus folgt, Implikation	Aus Aussage A_1 folgt Aussage A_2.
$A_1 \Leftrightarrow A_2$	ist äquivalent, Äquivalenz	Aussage A_1 ist äquivalent zu Aussage A_2.

Tabelle 1.1: Zusammenstellung von Zeichen und Symbolen

1.2 Zahlenmengen und Rechenregeln

Die Zahlenbegriffe an und für sich haben sich über lange Zeit entwickelt und erlauben es eigene Vorlesungen damit zu füllen. Wir beschränken uns darauf grundlegende Tatsachen zusammenzutragen. Zu Beginn der Betrachtungen stehen die **natürlichen Zahlen**, welche gegeben sind durch die Mengen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \qquad \text{sowie} \qquad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}. \tag{1.1}$$

Die Addition $a + b$ und Multiplikation $a \cdot b$ von natürlichen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ sind zweifellos bekannt. Bereits die Subtraktion bereitet hier Probleme, denn das Resultat muss nicht immer eine natürliche Zahl sein. Es bedarf einer sogenannten Erweiterung auf die Menge der **ganzen Zahlen**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}. \tag{1.2}$$

Die Menge der ganzen Zahlen erlaubt es jede Subtraktion durchzuführen, hingegen ist für die Division $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ nicht sichergestellt, dass das Ergebnis wieder in $\mathbb{Z}$ liegt. Um auch diese Rechenoperation durchführen zu können, erweitert man abermals auf die Menge der **rationalen Zahlen**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.3}$$

Die rationalen Zahlen werden gelegentlich durch sogenannte **Dezimalzahlen** dargestellt, welche durch die Darstellung

$$z = \pm z_m\, z_{m-1}\, \dots\, z_2\, z_1\, z_0{,}z_{-1}\, z_{-2}\, \dots\, z_{-n}, \quad m, n \in \mathbb{N},\ z_i \in \{0, 1, \dots, 9\},\ i = -n, \dots, m \text{ und } z_m \neq 0,$$

definiert sind. Diese Darstellung ist zu verstehen als

$$z = \pm \sum_{i=-n}^{m} z_i\, 10^i.$$

Einen Sonderfall stellen die sogenannten *periodischen Dezimalzahlen* dar. Das sind Dezimalzahlen, die nach einer gewissen Anzahl an Ziffern nach dem Dezimalpunkt die Ziffernabfolge wiederholen, demnach unendlich viele Ziffern nach dem Komma aufweisen, trotzdem eine rationale Zahl darstellen.

Beispiel 1.2. Im Folgenden bezeichnet die Überstreichung von Zahlen die Periode der Wiederholung in der Dezimalzahl.

$$1{,}363636\ldots = 1{,}\overline{36} = 1 + \frac{36}{99} = 1 + \frac{4}{11} = \frac{15}{11} \tag{1.4}$$

Eine letzte Erweiterung ist jene um die sogenannten **irrationalen Zahlen** $\mathbb{I}$. Im Gegensatz zu rationalen Zahlen, die als endliche oder periodische Dezimalzahlen dargestellt werden können, sind irrationale Zahlen solche, deren Dezimaldarstellung nicht abbricht und nicht periodisch ist.
Es gibt zwei Typen von Irrationalzahlen:

- *irrationale algebraische Zahlen*: $\sqrt{2}$, $1 + \sqrt[3]{5}$, etc.
- *transzendente Zahlen*: π, e, etc.

Werden die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit den irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$ vereinigt, so gelangt man zur Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Diese Erklärung ist sehr rudimentär, für das Umfeld aber ausreichend. Für genauere Untersuchungen dieser Thematik sei auf die Literatur oder entsprechende Vorlesungen verwiesen.

Zahlenmengen können auch mit zusätzlichen Zeichen belegt werden, um eine gewisse Teilmenge zu kennzeichnen. Hier verwendet man die Zeichen $+$,$-$ und 0. Mit Hilfe dieser Zusätzen kann man beispielsweise die Zusammenhänge

$$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}, \qquad \mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{N}_0$$

ausdrücken, oder auch *positive reellen Zahlen* $\mathbb{R}^+$, bzw. *negative reellen Zahlen* $\mathbb{R}^-$. Wird die 0 inkludiert, so handelt es sich um die *nichtnegativen reellen Zahlen* $\mathbb{R}_0^+$ bzw. die *nichtpositiven reellen Zahlen* $\mathbb{R}_0^-$.

Im Folgenden werden einige wichtige Eigenschaften bzw. Rechenregeln der reellen Zahlen betrachtet.

Das **Assoziativgesetz** der Addition und Multiplikation reeller Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ lautet

$$(a + b) + c = a + (b + c), \tag{1.5}$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c). \tag{1.6}$$

Das **Kommutativgesetz** lautet

$$a + b = b + a, \tag{1.7}$$
$$a \cdot b = b \cdot a, \tag{1.8}$$

und das **Distributivgesetz** (bezüglich Addition und Multiplikation)

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c. \tag{1.9}$$

Die Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ erlauben es Ordnungsrelationen anzugeben. Hiervon gibt es fünf mögliche, formuliert für $a, b \in \mathbb{R}$ lauten diese:

- $a < b$: a ist kleiner als b
- $a = b$: a ist gleich b
- $a \neq b$: a ist ungleich b
- $a > b$: a ist größer als b
- $a \leq b$: a ist kleiner oder gleich b
- $a \geq b$: a ist größer oder gleich b

Diese Ordnungsrelationen können natürlich auch geometrisch auf der Zahlengerade interpretiert werden, haben aber den Zweck mathematische Zusammenhänge, welche auch durchaus komplexer sein können, formal mathematisch anzugeben. Die Ordnungsrelationen erlauben es einge Äquivalenzumformungen anzugeben, welche im Folgenden für Zahlen aus $\mathbb{R}$ formuliert werden.

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ so gilt

$$x \leq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + z \leq y + z,$$

und analog

$$x \geq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + z \geq y + z.$$

Diese Beziehungen gelten natürlich auch für die Subtraktion, welche wegen $x - y = x + (-y)$ als Addition aufgefasst werden kann. Für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 0$ gilt

$$x \leq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad sx \leq sy,$$

sowie für $s \in \mathbb{R}$ mit $s < 0$

$$x \leq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad sx \geq sy.$$

Bei der Multiplikation, und damit auch bei der Division, mit negativen Zahlen dreht sich die Ordnungsrelation um.

Eine mögliche Verwendung dieser Ordnungsrelation ist die mathematische Beschreibung von Teilmengen der reellen Zahlen. **Intervalle.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Das **abgeschlossene Intervall** $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}.$$

Das **offene Intervall** $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\},$$

manchmal auch mit $]a, b[$ notiert. Die **halboffenen Intervalle** sind definiert durch

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\} \quad \text{und} \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leq b\}.$$

1.3 Terme, binomischen Formeln und Polynomdivision

Ein Term bezeichnet einen mathematisch sinnvollen Ausdruck, der Zahlen, Variablen, Symbole für mathematische Verknüpfungen und Klammern enthalten kann. Für genauere Definition und Theorie zu Termen sei auf die Literatur verwiesen. Hier werden Ausdrücke wie beispielsweise der Form $2(ab)^3 + c$ oder $\frac{xy}{4}$ betrachtet. Da für $x, y \in \mathbb{R}$ auch beispielsweise $4x^2 + 3y \in \mathbb{R}$ gilt, können die Rechenregeln und Rechengesetze der reellen Zahlen für Terme übernommen werden.

Beispiel 1.3. Das Ausmultiplizieren von Termen erfolgt mit den bekannten Rechenregeln für reelle Zahlen, beispielsweise wie

$$\begin{aligned}(a+b)(4x-5y)-(a-b)(5x+3y) &= 4ax-5ay+4bx-5by-(5ax+3ay-5bx-3by)\\ &= 4ax-5ay+4bx-5by-5ax-3ay+5bx+3by\\ &= -ax-8ay+9bx-2by.\end{aligned}$$

Eine Umkehrung zum Ausmultiplizieren ist das sogenannte **Herausheben**, wie beispielsweise

$$a(x+y)-x-y=a(x+y)-(x+y)=(x+y)(a-1).$$

Bei der Arbeit mit Termen sind die **binomischen Formeln** von unschätzbarer Bedeutung. Sie werden für Vereinfachungen von diversen Termen verwendet und sind im Umgang mit vielen Typen von Funktionen sehr zweckmäßig.

Binomische Formeln. Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \tag{1.10}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2 \tag{1.11}$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \tag{1.12}$$

Beispiel 1.4. Als Beispiele zu den binomischen Formeln dienen die folgenden:

(a) $(4x+3y)^2 = 16x^2+24xy+9y^2$

(b) $(2b-\frac{c}{2})^2 = 4b^2-2bc+\frac{c^2}{4}$

(c) $(-2u+4v)^2 = 4u^2-16uv+16v^2 = (2u-4v)^2$

Werden Terme dividiert, so gelangt man zwangsläufig auf die sogenannte **Polynomdivision**. Es werden in diesem Abschnitt einige plakative Beispiele gezeigt und die grundsätzliche Herangehensweise dargestellt.

Beispiel 1.5. Ein Bruchterm der Form $\frac{a^3+5a^2+9a+5}{a+1}$, mit $a \neq -1$ entspricht der Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\big(\ \ a^3+5a^2+9a+5\big) : \big(a+1\big) = a^2+4a+5\\
\underline{-a^3\ \ -a^2}\\
\qquad\ \ 4a^2+9a\\
\qquad\ \underline{-4a^2-4a}\\
\qquad\qquad\quad 5a+5\\
\qquad\qquad\ \underline{-5a-5}\\
\qquad\qquad\qquad\ \ 0
\end{array}$$

Hier stellt sich also

$$\frac{a^3+5a^2+9a+5}{a+1} = a^2+4a+5$$

heraus. Es könnten jedoch auch Divisionen mit Rest auftreten, die wie folgt verstanden werden.

Mit $x \neq \pm 1$ gilt:

$$
\begin{array}{l}
\big(\;2x^4 + x^3 \qquad\qquad\quad + 5\big) : \big(x^2 - 1\big) = 2x^2 + x + 2 + \dfrac{x+7}{x^2-1} \\
\underline{-\,2x^4 \qquad + 2x^2} \\
\qquad\quad x^3 + 2x^2 \\
\qquad\underline{-\,x^3 \qquad\quad + x} \\
\qquad\qquad\quad 2x^2 + x + 5 \\
\qquad\qquad\underline{-\,2x^2 \qquad + 2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x + 7
\end{array}
$$

Es sei erwähnt, dass die Rechenregeln für einen **Doppelbruch** bei Termen erhalten bleiben. Dies und die Verwendung der binomischen Formeln wird im folgenden Beispiel gezeigt.

Beispiel 1.6.

$$\frac{\frac{x-y}{4a^2-b^2}}{\frac{2x^2-4xy+2y^2}{2a+b}} = \frac{(x-y)(2a+b)}{(4a^2-b^2)(2x^2-4xy+2y^2)} = \frac{(x-y)(2a+b)}{(2a+b)(2a-b)\cdot 2(x-y)^2} = \frac{1}{2(2a-b)(x-y)}$$

1.4 Lineare Gleichungssysteme

Eine in unterschiedlichsten Situation auftretende Methode ist die Untersuchung und Lösung von linearen Gleichungssystemen.

Eingangs die Definitionen von notwendigen Begriffen:

(a) Eine Gleichung der Form
$$ax + by = c \tag{1.13}$$
mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, a und b nicht zugleich Null, heißt eine **lineare Gleichung** in zwei Variablen. Im Fall $c = 0$ heißt die Gleichung **homogen**, im Fall $c \neq 0$ heißt sie **inhomogen**.

(b) Zwei lineare Gleichungen in zwei Variablen heißen ein **lineares Gleichungssystem** zweier Gleichungen mit zwei Variablen.

Bemerkung. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten werden als 2×2 lineare Gleichungssysteme bezeichnet.

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen. Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten $x, y \in \mathbb{R}$ ist genau dann

(a) **eindeutig lösbar**, wenn die homogenen Gleichungen nicht proportional[1] sind.

(b) **unlösbar**, wenn die homogenen, aber nicht die inhomogenen Gleichungen proportional sind.

(c) **mehrdeutig lösbar**, wenn die inhomogenen Gleichungen proportional sind.

Im Folgenden werden drei Lösungsverfahren für Gleichungssysteme vorgestellt. Diese werden anhand eines Beispiels gezeigt. Betrachtet wird das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 24, \\ -7x + y &= -33. \end{aligned}$$

[1]Proportionale Gleichungen: Die Gleichungen sind ein Vielfaches voneinander.

Das erste Verfahren ist das sogenannte **Gleichsetzverfahren**. Im ersten Schritt werden beide Gleichungen nach der gleichen Variable aufgelöst. Anschließend werden die beiden Ausdrücke gemäß $y = y$ gleichgesetzt, das ergibt

$$12 - 2x = -33 + 7x.$$

Durch Äquivalenzumformungen erhält man $x = 5$. Dies eingesetzt in eine der beiden Gleichungen führt auf $y = 2$.

Ein verwandtes Verfahren stellt das **Einsetzverfahren** dar. Bei diesem drückt man aus einer der beiden Gleichungen eine Variable aus und setzt diese in die andere Gleichung ein. Für das oben angeführte Beispiel wird $y = 12 - 2x$ in die zweite Gleichung eingesetzt, das ergibt

$$-7x + (12 - 2x) = -33.$$

Äquivalenzumformungen liefern hier ebenfalls $x = 5$. Einsetzen in den Ausdruck für y liefert $y = 2$. Das letzte Verfahren, das vorgestellt wird, ist das sogenannte **Additionsverfahren**. Hierbei werden die Gleichungen mit Zahlen multipliziert und anschließend so addiert, dass eine Variable eliminiert wird. Für das Beispiel bedeutet das, wenn die zweite Gleichung mit (-2) multipliziert wird, erhält man

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 24 \\ 14x - 2y &= 66. \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen führt auf

$$18x = 90,$$

und dies wieder auf $x = 5$. Dies in eine der beiden Gleichungen eingesetzt und nach y aufgelöst, ergibt $y = 2$.

Analog zu den 2×2 Gleichungssystemen müssen lineare Gleichungssysteme mit drei Gleichungen und drei Unbekannten studiert werden.

Bemerkung. Lineare Gleichungssysteme mit drei Gleichungen und drei Unbekannten werden als 3×3 Gleichungssysteme bezeichnet.

Als Beispiel zur Behandlung von 3×3 Gleichungssystemen betrachten wir

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I:} & 3x & - & 2y & + & 4z & = & 11, \\ \text{II:} & 2x & - & y & - & 3z & = & -9, \\ \text{III:} & -x & + & 3y & + & 2z & = & 11. \end{array}$$

Zur Lösung müssen zwei mal zwei Gleichungen separat behandelt werden, um schließlich auf ein Gleichungssystem in zwei Variablen zu kommen. Es folgt

$$\begin{array}{rrcrcrcr} 2 \cdot \text{I:} & 6x & - & 4y & + & 8z & = & 22, \\ -3 \cdot \text{II:} & -6x & + & 3y & + & 9z & = & 27, \\ \hline & & & -y & + & 17z & = & 49, \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{II:} & 2x & - & y & - & 3z & = & -9, \\ 2 \cdot \text{III:} & -2x & + & 6y & + & 4z & = & 22, \\ \hline & & & 5y & + & z & = & 13. \end{array}$$

Die beiden resultierenden linearen Gleichungen in zwei Variablen

$$\begin{aligned} -y + 17z &= 49, \\ 5y + z &= 13, \end{aligned}$$

können nach einem der vorgestellten Verfahren für 2×2 Gleichungssysteme behandelt werden. Die Lösungen für y und z werden in eine der drei linearen Gleichungen der Angabe eingesetzt und nach x gelöst. Insgesamt führt dies auf die Lösung $z = 3$, $y = 2$ und $x = 1$.

Bemerkung. Es muss beachtet werden, dass beim Additionsverfahren für ein Gleichungssystem in drei Variablen in den ersten beiden Schritten immer dieselbe Variable eliminiert wird und nicht verschiedene.
Das Gleichsetz– und Einsetzverfahren für Gleichungssysteme in drei Variablen ist ebenfalls analog anzuwenden, wobei hier ebenfalls die Reihenfolge des Einsetzens beachtet werden muss.

Kapitel 2

Elementare Funktionen, Gleichungen und Ungleichungen

In diesem Kapitel werden die Grundbegriffe und Eigenschaften von **reellen Funktionen** betrachtet sowie einige elementare Vertreter herausgegriffen und untersucht. Eng verbunden mit Funktionen sind Gleichungen, die beispielsweise schon bei der Suche nach Nullstellen oder ähnlichen Aufgabenstellungen eine Rolle spielen. In den korrespondierenden Unterkapiteln werden daher elementare Funktionen gemeinsam mit dem zugehörigen Gleichungstyp betrachtet.

2.1 Allgemeine Definitionen zu Funktionen

Dieser Abschnitt befasst sich mit grundlegenden Eigenschaften reeller Funktionen. Dabei handelt es sich um Funktionen, die auf Teilmengen der reellen Zahlen operieren, d.h. es werden reelle Zahlen auf reelle Zahlen abgebildet.

Definition einer Funktion. Sei $D, W \subseteq \mathbb{R}$. Eine Zuordnung f, die jedem $x \in D$ genau ein $y \in W$ zuweist, heißt eine (reelle) **Funktion**[1]. Die Notation $y = f(x)$ bezeichnet die Funktionsvorschrift, die Funktion wird angegeben durch den Ausdruck

$$f\colon D \to W,\ x \mapsto y = f(x).$$

Dabei heißt D der **Definitionsbereich** und W der **Wertebereich** der Funktion f.

Die zugehörige Funktionsvorschrift $y = f(x)$ gibt den Zusammenhang zwischen x und y an. Dabei ist es im Allgemeinen möglich, dass verschiedene Werte $x_1, x_2 \in D$ auf dasselbe Element $y \in W$ abbilden. Einer speziellen Eigenschaft von Funktionen kommt hierbei aber besondere Bedeutung zu.

Eine mögliche zusätzliche Eigenschaft einer Funktion heißt **umkehrbar** oder **bijektiv**, wenn jedem Wert $y \in W$ genau ein Wert $x \in D$ zugeordnet ist.

Die Eigenschaft der Bijektivität ist die Bedingung für die Existenz der sogenannten Umkehrfunktionen.

Umkehrfunktion. Sei $f\colon D \to W$ eine bijektive Funktion, dann bezeichnet

$$f^{-1}\colon W \to D, y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

die **Umkehrfunktion** f^{-1} der Funktion f.

[1] Anstatt des Wortes Funktion wird auch **Abbildung** verwendet.

Bemerkung. Die Umkehrfunktion der Funktion f wird mit dem *Symbol* f^{-1} bezeichnet. Dies steht nicht in Zusammenhang mit dem Kehrwert sondern ist nur als Symbol zu verstehen.

Satz 2.1. Sei $f\colon D \to W$ eine bijektive Funktion und f^{-1} die zugehörige Umkehrfunktion. Es gilt

$$f\big(f^{-1}(x)\big) = x \qquad \text{und} \qquad f^{-1}\big(f(x)\big) = x.$$

Beispiel 2.2. Einige Beispiele im Zusammenhang mit Bijektivität:

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2$. Diese Funktion ist nicht bijektiv, da $f(x) = 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x+1$ ist bijektiv. Daher existiert die Umkehrfunktion, welche durch $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x-1$ gegeben ist. Es gilt

$$f\big(f^{-1}(x)\big) = f^{-1}(x) + 1 = (x-1) + 1 = x, \quad \text{sowie} \quad f^{-1}\big(f(x)\big) = x.$$

Für die graphische Veranschaulichung einer Funktion $f\colon D \to W$, gegeben durch $y = f(x)$, wird die Menge

$$\operatorname{graph}(f) = \big\{\big(x, f(x)\big) : x \in D\big\}$$

definiert, welche mathematisch als der **Graph** der Funktion f bezeichnet wird. Bei reellen Funktionen ist diese Menge von Punkten sehr groß und kaum vorstellbar. Werden gedanklich diese Punkte graphisch veranschaulicht, dann erhält man die Illustration der Funktion f. Daher wird umgangssprachlich häufig diese Illustration mit dem Graphen gleichgesetzt.

Die Skizze einer Funktion ist die graphische Darstellung ausgewählter Punktepaare $\big(x, f(x)\big)$ in einem kartesischen[2] Koordinatensystem. Genau genommen werden also ausgewählte Elemente des Graphen der Funktion skizziert. Zur Konstruktion der Skizze wird eine *Wertetabelle* herangezogen, darunter versteht man eine Liste von ausgewählten Elementen des Graphen, welche für die Skizze herangezogen wird.

Beispiel 2.3. Sei $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto y = -x$. Die Wertetabelle dieser Funktion konstruiert man für (selbst ausgewählte) x.

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	3	2	1	0	-1	-2

Beispiel 2.4. Die Funktion $f\colon \{1,2,3\} \to \{2,3,4,5\}$ definiert durch $f(x) = x+1$ erfüllt:

(a) $\operatorname{graph} f = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

(b) streng monoton steigend

(c) nicht bijektiv, denn es existiert kein $x \in W$ mit $f(x) = 5$

Der Graph der Funktion ist in Abbildung 2.1 zu sehen und veranschaulicht den Sachverhalt.

Eine Beschränkung des Wertebereichs W verändert den Sachverhalt. Wird mit $\tilde{W} = \{2,3,4\} \subset \mathbb{N}$ die Funktion

$$\tilde{f}\colon D \to \tilde{W},\ x \mapsto x+1$$

definiert, so ist wegen

$$1 \mapsto 2, \qquad 2 \mapsto 3, \qquad 3 \mapsto 4$$

die Funktion bijektiv (eindeutig umkehrbar). Die zugehörige Umkehrfunktion lautet

$$\tilde{f}^{-1}\colon \tilde{W} \to D,\ x \mapsto x-1.$$

[2]Cartesius lat. für René Descartes (1596 – 1650), französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschafter

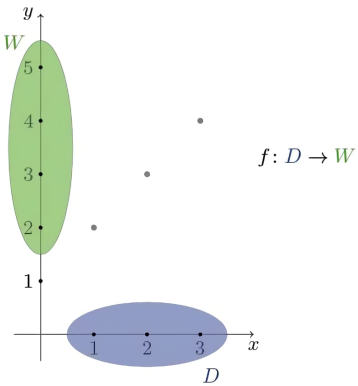


Abbildung 2.1: Illustration des Graphen der Funktion f.

Der Graph der Funktion $\tilde{f}$ ist in Abbildung 2.2 illustriert, in dem die eindeutig umkehrbare Zuordnung dargestellt ist. Die Funktion $\tilde{f}$ ist also bijektiv.

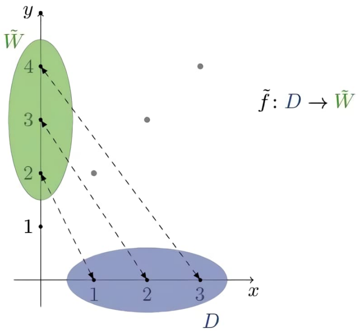


Abbildung 2.2: Graph der Funktion $\tilde{f}$ mit eingeschränktem Wertebereich $\tilde{W}$.

Wird eine Erweiterung auf einen reellen Definitions– und Wertebereich vorgenommen, so erhält man eine Funktion

$$\hat{f}\colon [1,3] \to [2,4],\ \ x \mapsto x+1.$$

Diese Funktion hat nun als Graph eine Menge von Punktepaaren, welche durch reelle Zahlen erzeugt werden und diese stellen sich im Graphen als Linie dar.

Weiters widmet sich dieser Abschnitt einigen Begriffsdefinitionen im Zusammenhang mit Funktionen, die es erlauben spezielle Charakteristika und das Verhalten von Funktionen zu beschreiben.

Der größte bzw. kleinste Wert der Wertemenge W heißt **Maximum** bzw. **Minimum** der Funktion.

Funktionen können über gewissen Teilintervallen $I \subseteq D$ des Definitionsbereichs D ein unterschiedliches Verhalten hinsichtlich der Größenordnungen der abgebildeten Werte haben.

Monotonie. Sei $f\colon D \to W$ gegeben durch $y = f(x)$. Gilt für alle $x_1, x_2 \in I \subseteq D$

$x_1 < x_2$	$\Longrightarrow$	$f(x_1) < f(x_2)$	so ist f in I **streng monoton steigend**
$x_1 < x_2$	$\Longrightarrow$	$f(x_1) \leq f(x_2)$	so ist f in I **monoton steigend**
$x_1 < x_2$	$\Longrightarrow$	$f(x_1) = f(x_2)$	so ist f in I **konstant**
$x_1 < x_2$	$\Longrightarrow$	$f(x_1) \geq f(x_2)$	so ist f in I **monoton fallend**
$x_1 < x_2$	$\Longrightarrow$	$f(x_1) > f(x_2)$	so ist f in I **streng monoton fallend**

Nullstellen. Alle $x \in D$, für die $f(x) = 0$ gilt, heißen **Nullstellen** der Funktion.

Bemerkung. Es gilt, dass die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ die Nullstellen der Funktion f sind. Der Umgang mit den so entstehenden Gleichungen ist von Fall zu Fall unterschiedlich und wird in den folgenden Unterkapiteln für jeden elementaren Funktionstyp gesondert betrachtet.

Schnitt von Funktionen. Seien $f\colon D_f \to W_f,\ x \mapsto f(x)$ und $g\colon D_g \to W_g,\ x \mapsto g(x)$ zwei Funktionen. Die reellen Lösungen der Gleichung $f(x) = g(x)$ sind die x–Koordinaten der **Schnittpunkte** der zugehörigen Funktionsgraphen der Funktionen f und g.

Symmetrieeigenschaften. Eine Funktion $f\colon D \to W$ heißt **gerade Funktion** oder **achsialsymmetrisch** bezüglich der y–Achse, wenn für alle $x \in D$

$$f(x) = f(-x) \tag{2.1}$$

erfüllt ist, und sie heißt **ungerade Funktion** oder **punktsymmetrisch** bezüglich $(0, 0)$, wenn für alle $x \in D$

$$f(x) = -f(-x) \tag{2.2}$$

gilt.

2.2 Lineare und quadratische Funktionen und Gleichungen

2.2.1 Lineare Funktionen und Gleichungen

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung

$$y = kx + d \tag{2.3}$$

mit $k,\ d \in \mathbb{R}$ heißt **lineare Funktion.**

Die lineare Funktion ist wie folgt klassifiziert:

(a) Für $d = 0$, spricht man von einer **homogenen linearen Funktion.**

(b) Für $d \neq 0$, spricht man von einer **inhomogenen linearen Funktion.**

(c) Für $k = 0$, spricht man von einer **konstanten Funktion.**

Den beiden Konstanten k und d kommen spezielle geometrische Interpretationen zu. Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade. Der Anstieg dieser Geraden wird durch die Konstante k dargestellt, daher wird k als die Steigung der Geraden bezeichnet. Betrachtet man die Differenz von $f(x+1)$ und $f(x)$ so erhält man

$$f(x+1) - f(x) = k(x+1) + d - (kx + d) = k.$$

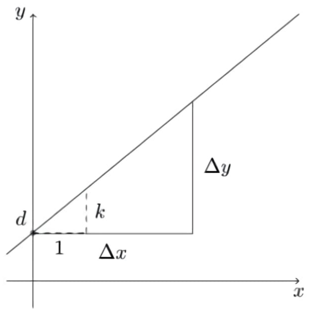


Abbildung 2.3: Steigungsdreieck und Ordinatenabschnitt einer Geraden.

Wenn also eine Differenz von 1 in Richtung der x–Achse betrachtet wird, so hat man eine Differenz von k in Richtung der y–Achse zu verzeichnen.

Allgemein lässt sich die **Steigung** k über das sogenannte *Steigungsdreieck* deuten,

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2.4}$$

Den Wert der Konstanten d erhält man, indem man $x = 0$ in die Funktionsgleichung einsetzt. Man erhält

$$f(0) = d.$$

Die Konstante d wird als **Ordinatenabschnitt**[3] bezeichnet, der Punkt $(0, d)$ ist jener, an dem die Gerade die y–Achse schneidet. Zur geometrischen Veranschaulichung der Steigung k und des Ordinatenabschnitts d siehe Abbildung 2.3.

Lineare Gleichungen. Im Zusammenhang mit linearen Funktionen stehen die linearen Gleichungen der Form $ax + b = 0$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, sowie $a \neq 0$. Diese treten beispielsweise bei der Nullstellensuche oder bei der Suche nach dem Schnittpunkt zweier linearer Funktionen auf. Der Schnittpunkt zweier Geraden f und g ist ein Punkt $S = (x_S, y_S)$, der sowohl auf der Geraden f, als auch auf der Geraden g liegt.

Beispiel 2.5. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -2x + 1$. Die Nullstelle dieser Funktion findet man als Lösung der Gleichung

$$-2x + 1 = 0,$$

also $x = \frac{1}{2}$. Ist man am Schnittpunkt von f mit der linearen Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}x - 1$ interessiert, so führt das auf die Gleichung

$$-2x + 1 = \tfrac{1}{2}x - 1.$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet $x = \frac{4}{5}$. Die y–Koordinate des Schnittpunktes ergibt sich durch Einsetzen in f oder g zu $y = -\frac{3}{5}$. Der Schnittpunkt lautet demnach $S = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$.

An dieser Stelle lohnt sich die Betrachtung der rationalen Darstellung einer periodischen Dezimalzahl. Diese Darstellung kann elegant durch Lösung einer Gleichung erledigt werden.

[3] Die x–Achse heißt *Abszisse*, die y–Achse *Ordinate*.

Beispiel 2.6. Betrachtet wird noch einmal die periodische Dezimalzahl

$$1{,}\overline{36} = \frac{15}{11}$$

aus Beispiel 1.2. Die Dezimalbruchentwicklung soll nun nicht anhand der „Regel“ sondern unter Verwendung von Gleichungen gefunden werden. Sei

$$a = 1{,}\overline{36},$$

so gilt

$$100a = 136{,}\overline{36}.$$

Subtrahiert man die erste Gleichung von der zweiten Gleichung, so erhält man

$$99a = 135$$

und damit

$$a = \frac{135}{99} = \frac{15}{11}.$$

Dies ist dasselbe Ergebnis wie in Beispiel 1.2 und kann für jedes andere Beispiel sinngemäß übersetzt werden.

Das *Auffinden eines Schnittpunkts von zwei Geraden*, wie in Beispiel 2.5, führt auf das Gleichungssystem der besonderen Gestalt

$$\begin{aligned} y &= k_1 x + d_1, \\ y &= k_2 x + d_2, \end{aligned}$$

wobei k_i die Steigungen und d_i die Ordinatenabschnitte mit $i = 1, 2$ der beiden Geraden f und g bezeichnen.

Rekapituliert man den Satz über die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen, so lassen sich die Aussagen (a) – (c) für zwei Geraden geometrisch wie folgt interpretieren:

(a) Die Geraden haben nicht dieselbe Steigung, es muss ein Schnittpunkt vorliegen.

(b) Die Geraden haben dieselbe Steigung, aber verschiedene Ordinatenabschnitte, sie liegen parallel zueinander.

(c) Die Geradengleichungen sind ein Vielfaches voneinander, also insbesondere $k_1 = k_2$ und $d_1 = d_2$ und beschreiben daher dieselbe Gerade. Lösungsmenge sind alle Punkte dieser Geraden.

Die graphische Veranschaulichung der drei Lösungsfälle ist in Abbildung 2.4 dargestellt.

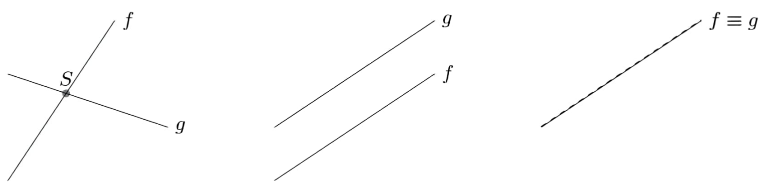


Abbildung 2.4: Lösungsfälle eines linearen 2×2 Gleichungssystems als geometrische Interpretation von Geraden.

2.2.2 Quadratische Funktionen und Gleichungen

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung

$$y = ax^2 + bx + c \tag{2.5}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ heißt **quadratische Funktion.**

Ein wichtiger Spezialfall, auf den später viele Betrachtungen zurückgeführt werden können, ist der Fall $b = c = 0$. Bei der Funktion $y = ax^2$ spricht man von einer **Parabel**, wie beispielsweise in Abbildung 2.5 dargestellt.

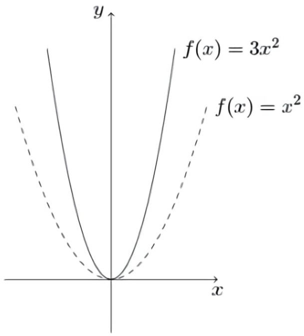


Abbildung 2.5: Graph der Parabel $y = 3x^2$ im Vergleich zu $y = x^2$.

Die Parabel der Form $y = ax^2$ hat für $a > 0$ das Minimum bei $(0, 0)$, für $a < 0$ dort das Maximum. Dieser Punkt wird als *Scheitelpunkt* bezeichnet, da dort der kleinste bzw. größte y–Wert liegt. Auch eine allgemeine quadratische Funktion der Form $y = ax^2 + bx + c$ hat die selben Eigenschaften wie diese Parabel, nur die Lage ist verschoben. Dies kann man durch die Rechnung

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},}$$

der sogenannten ***Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat***, einsehen. Die x–Koordinate des Scheitelpunkts der quadratischen Funktion ist durch $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ festgelegt, da hierfür der Klammerausdruck minimal bzw. maximal wird. Die y–Koordinate des Scheitelpunkts ergibt sich durch Einsetzen.

Der **Scheitelpunkt** der quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ liegt bei

$$\boxed{S = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).} \tag{2.6}$$

Beispiel 2.7. Beispiele zur Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat:

(a) Betrachten wir die quadratische Funktion $f(x) = x^2 - 10x + 24$. Wegen $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$ gilt

$$f(x) = x^2 - 10x + 24 = (x - 5)^2 - 1$$

und $f(5) = -1$. Der Scheitelpunkt liegt demnach bei $S = (5, -1)$.

(b) Betrachten wir die quadratische Funktion $f(x) = 4x^2 + 11x - 3$. Es gilt

$$4x^2 + 11x - 3 = 4\left(x^2 + \tfrac{11}{4}x - \tfrac{3}{4}\right)$$

und weiters

$$x^2 + \tfrac{11}{4}x - \tfrac{3}{4} = (x + \tfrac{11}{8})^2 - \tfrac{169}{64}.$$

Damit erhält man

$$f(x) = 4\,(x + \tfrac{11}{8})^2 - \tfrac{169}{16}$$

und somit einen Scheitelpunkt von $S = (-\frac{11}{8}, -\frac{169}{16})$.

Quadratische Gleichungen. Eng verbunden mit der quadratischen Funktion ist die quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$. Zu diesem Zwecke werden quadratische Gleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{2.7}$$

die sogenannte **große quadratische Gleichung** mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, und

$$x^2 + px + q = 0, \tag{2.8}$$

die sogenannte **kleine quadratische Gleichung** mit $p, q \in \mathbb{R}$, untersucht. Gleichung (2.7) kann durch Division durch a und der Substitution $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ auf Gleichung (2.8) zurückgeführt werden. Aus diesem Grund wird die Lösungsformel für die kleine quadratische Gleichung entwickelt. Die Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q \tag{2.9}$$

führt auf die Gleichung

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0. \tag{2.10}$$

Durch Umformung und unter Berücksichtigung der doppelten Lösung, verursacht durch die Quadratwurzel, erhält man die *kleine Lösungsformel*

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.} \tag{2.11}$$

Dabei bezeichnet das Symbol $\sqrt{\cdot}$ immer die positive Lösung der Wurzel, die negative ist durch „±" in der Formel berücksichtigt. Mit der oben genannten Substitution $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ und einigen Umformungen erhält man die *große Lösungsformel*

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.} \tag{2.12}$$

In dieser Lösungsformel wird die Forderung $a \neq 0$ deutlich, für $a = 0$ wird ohnedies die quadratische Gleichung auf eine lineare Gleichung reduziert. Die Terme unter der Wurzel der kleinen und großen Lösungsformel werden jeweils als **Diskriminante**[4] bezeichnet. Diese ist für die Nullstellensuche der quadratischen Funktion wesentlich. Im Folgenden wird die Diskriminante der großen Lösungsformel betrachtet um Rückschlüsse für eine allgemeine quadratische Funktion zu erlauben, für die kleine Lösungsformel sind die Überlegungen analog.

$$D = b^2 - 4ac \tag{2.13}$$

[4] discriminare (lat.) für unterscheiden

Für D sind drei verschiedene Fälle möglich, welche die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung bestimmen.

$$D = b^2 - 4ac \begin{cases} > 0, & 2 \text{ Lösungen} \\ = 0, & 1 \text{ Lösung} \\ < 0, & \text{keine Lösung} \end{cases} \tag{2.14}$$

Dies hat für das Aufsuchen der Nullstellen und der Lage des Graphen der zugehörigen quadratischen Funktion eine direkte Konsequenz. Die Anzahl der Nullstellen gemeinsam mit dem Scheitelpunkt und dem Vorzeichen von a verrät die Lage der quadratischen Funktion im Koordinatensystem. Folgendes Beispiel soll diesen Zusammenhang illustrieren.

Beispiel 2.8. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x^2 + 16x - 36$. Die Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat $-2x^2 + 16x - 36 = -2(x-4)^2 - 4$ ergibt den Scheitelpunkt $S = (4, -4)$. Wegen $a = -2 < 0$ ist die Parabel in Richtung der negativen y–Achse hin geöffnet. Die Nullstellen von f erhält man durch Lösen der Gleichung

$$-2x^2 + 16x - 36 = 0,$$

die jedoch eine negative Diskriminante $D = b^2 - 4ac = 16^2 - 4(-2)(-36) = -32$ und damit keine Lösung besitzt. Insgesamt lässt sich aus diesen Überlegungen folgern, dass f unterhalb der x–Achse verläuft, in Richtung negativer y–Werte hin geöffnet ist und den Scheitel bei $S = (4, -4)$ hat. Der Graph ist in Abbildung 2.6 dargestellt.

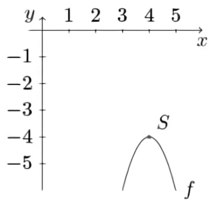


Abbildung 2.6: Graph der quadratischen Funktion $f(x) = -2x^2 + 16x - 36$.

Eng verbunden mit den quadratischen Gleichungen ist der **Satz von Vieta**[5]. Dieser stellt die beiden Lösungen x_1 und x_2 mit den Koeffizienten p und q der kleinen quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ in Beziehung.

Satz von Vieta. Seien x_1 und x_2 die beiden Lösungen der kleinen quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$. Dann gilt:

(a) $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ Zerlegung in Linearfaktoren

(b) $x_1 + x_2 = -p$ (c) $x_1 \cdot x_2 = q$

Beweis. Der Beweis setzt sich aus dem Nachrechnen einzelner Behauptungen zusammen. Die Lösungen $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$, mit $D = \frac{p^2}{4} - q$ eingesetzt in $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ ergeben folgende Äquivalenzum-

[5]Franziscus Vieta (1540-1603), französischer Advokat und Mathematiker

formungskette.

$$\begin{aligned}
0 &= (x - x_1)(x - x_2) \\
&= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 \\
&= x^2 - \left(\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right)\right)x + \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right) \\
&= x^2 - (-p)x + q
\end{aligned}$$

Aus dieser Rechnung ergeben sich direkt die Zusammenhänge

$$x_1 + x_2 = -p \qquad \text{und} \qquad x_1 \cdot x_2 = q.$$

□

Beispiel 2.9. Die Gleichung $x^2 + 2x + q = 0$ habe eine Lösung $x_1 = 1$. Aus dem Satz von Vieta folgt

$$1 + x_2 = -2, \qquad \text{sowie} \qquad x_2 = q$$

und daraus $x_2 = q = -3$. Die Gleichung lautet damit $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Bemerkung. Im Satz von Vieta ist der Fall $D < 0$, also der Fall keiner Lösungen der kleinen quadratischen Gleichung, nicht enthalten. x_1 und x_2 müssen existieren, wobei Gleichheit nicht ausgeschlossen ist.

Abschließend noch eine Betrachtung zur Linearfaktorisierung

$$0 = x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Das Produkt $(x - x_1)(x - x_2)$ verschwindet, wenn mindestens einer der beiden Faktoren Null ist, also wenn $x - x_1 = 0$ oder[6] $x - x_2 = 0$ gilt. Dieser Umstand, dass ganz allgemein für ein Produkt $ab = 0$ gilt, wenn $a = 0$ oder $b = 0$ oder beides eintritt, wird als **Produkt–Null–Satz**, oder auch als **Satz von der Nullteilerfreiheit** bezeichnet und spielt in der Mathematik an vielen Stellen eine wichtige Rolle.

Satz von der Nullteilerfreiheit. Ein Produkt reeller Terme ist genau dann Null, wenn mindestens einer der beiden Faktoren Null ist.

2.3 Lineare und quadratische Ungleichungen

Neben den linearen und quadratischen Funktionen und den damit verbundenen Gleichungen, sind auch die linearen und quadratischen Ungleichungen von Interesse. Dabei wird die grundsätzliche Herangehensweise der Lösung von Ungleichungen untersucht. In diesem Abschnitt wird dies exemplarisch an linearen und quadratischen Ungleichungen besprochen.

2.3.1 Lineare Ungleichungen

Eine **linearen Ungleichung** hat für $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, die Form

$$ax + b \ltimes 0,$$

[6] *einschließendes* oder: eine Bedingung ist erfüllt, die andere ist erfüllt oder beide Bedingungen sind erfüllt

wobei $\ltimes$ eines der Vergleichssymbole $<, >, \leq, \geq$ darstellt. Für $a > 0$ ist die Lösung gegeben durch

$$x \ltimes -\frac{b}{a},$$

hingegen für $a < 0$ durch

$$x \rtimes -\frac{b}{a}.$$

Dabei bezeichnet $\rtimes$ das genau umgekehrte Vergleichszeichen zu $\ltimes$. Diese umgeformte Aussage erlaubt es eine Menge für $x \in \mathbb{R}$ anzugeben, welche die Lösungsmenge der Ungleichung darstellt. Typisch wird diese Lösungsmenge durch Intervalle dargestellt. Zur Verdeutlichung der Vorgehensweise das folgende

Beispiel 2.10. Betrachtet wird eine Ungleichung der Form

$$-2x + 5 < 9.$$

Zur Bestimmung der Lösungsmenge wird die Umformung

$$-2x < 4$$

durchgeführt und man erhält

$$x > -2.$$

Dies entspricht der Darstellung mit Hilfe der Lösungsmenge gemäß

$$x \in \{x \in \mathbb{R} \colon x > -2\} = (-2, \infty).$$

Die linearen Ungleichungen erlauben eine geometrische Interpretation. Die Umformung der Ungleichung ergibt

$$-2x - 4 < 0,$$

was geometrisch mit der Fragestellung übereinstimmt, wann die lineare Funktion $y = -2x - 4$ kleiner als Null ist. Dies kann im Koordinatensystem nachvollzogen werden.

2.3.2 Quadratische Ungleichungen

Auch quadratische Ungleichungen können analytisch untersucht werden und eine Lösungsmenge für diese ermittelt werden. Hier spielt die quadratische Gleichung eine wesentliche Rolle um die Ungleichungen lösen zu können.

Eine **quadratische Ungleichung** hat für $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, die Form

$$ax^2 + bx + c \ltimes 0,$$

wobei $\ltimes$ eines der Vergleichssymbole $<, >, \leq, \geq$ darstellt. Im Falle dieser quadratischen Ungleichung ist die Lösung nicht so einfach wie im linearen Fall darstellbar. Der konkrete Lösungsweg hängt vom konkreten Vergleichssymbol $<, >, \leq, \geq$ ab.

Beispiel 2.11.

(a) Es wird die quadratische Ungleichung $6x^2 - 9x - 6 \leq 0$ betrachtet. Hier kann die geometrische Interpretation helfen, d.h. es wird untersucht, wann die quadratische Funktion $f(x) = 6x^2-9x-6$ kleiner oder gleich Null ist. Aus der Untersuchung der quadratischen Funktion ist bekannt, dass hierfür die Nullstellen zu bestimmen sind. Es ergibt

$$6x^2 - 9x - 6 = 0$$

die Lösungen $x_1 = -\frac{1}{2}$ und $x_2 = 2$. Da für den führenden Koeffizienten $a = 6 > 0$ gilt ist die Parabel nach oben geöffnet und die Funktion ist zwischen den Nullstellen, diese eingeschlossen, kleiner oder gleich Null. Man erhält als Lösung der Ungleichung also

$$x \in [-\tfrac{1}{2}, 2].$$

(b) Es wird die quadratische Ungleichung

$$6x^2 - 9x - 6 > 0$$

betrachtet. Die Vorgehensweise ist hier ähnlich, doch stellt sich die Frage, wann die quadratische Funktion $f(x) = 6x^2 - 9x - 6$ größer als Null ist. Aufgrund der Lage der Parabel kann dies auch mit den Nullstellen beantwortet werden zu

$$x \in (-\infty, -\tfrac{1}{2}) \cup (2, \infty).$$

Bemerkenswert ist, dass die Lösungsmenge aus (a) und die Lösungsmenge aus (b) gemeinsam alle reellen Zahlen ergeben. Das ist darauf zurückzuführen, dass eine der beiden Aussagen $\leq$ bzw. $>$ zutreffen muss.

Die Bestimmung der Lösungsmenge ist also davon abhängig, welche Lage die zugehörige quadratische Funktion hat, aber auch welches Vergleichssymbol beteiligt ist. Die grundsätzliche Herangehensweise ist jedoch an den Nullstellen der quadratischen Funktion orientiert.

2.4 Winkelfunktionen und trigonometrische Gleichungen

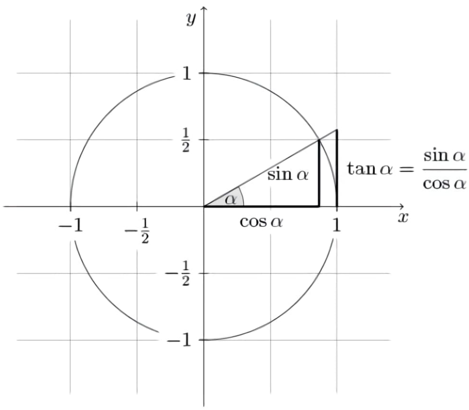


Abbildung 2.7: Geometrische Definition der Winkelfunktionen am Einheitskreis.

Für die geometrische Deutung wird der Winkel α als fest angenommen. Wird dieser Winkel über die Zeit variiert, so entsteht bei konstanter Änderungsrate des Winkels α ein Verlauf für die **Sinus**–

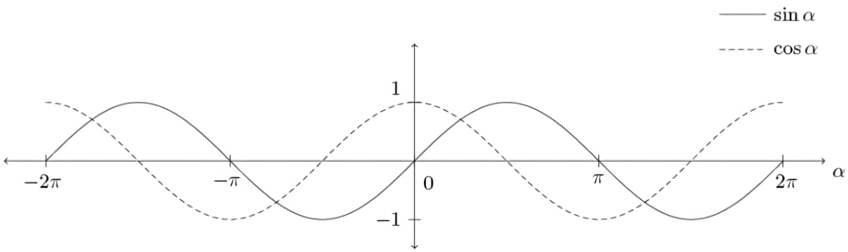


Abbildung 2.8: Funktionsgraphen von Sinus und Cosinus.

und Cosinusfunktion. Wird auf der Abszisse der Winkel α aufgetragen, so gelangt man zu den Funktionsgraphen der Sinus– und Cosinusfunktion, siehe Abbildung 2.8.

Die folgenden **Eigenschaften der Sinusfunktion** sind hier, für $k \in \mathbb{Z}$, zusammengestellt:

(a) Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

(b) Wertebereich: $[-1, 1]$, dies kann auch durch $|\sin(\alpha)| \leq 1 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ ausgedrückt werden

(c) Nullstellen: $x_k = k\pi$

(d) Periode: $p = 2\pi$

(e) Monotonie: streng monoton steigend in den Intervallen $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ und streng monoton fallend in den Intervallen $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$

(f) Symmetrie: achsiale Symmetrie bezüglich den Ordinatenlinien[7] $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ und Punktsymmetrie bezüglich $(k\pi, 0)$

(g) Die Bereiche, in denen die Funktion bijektiv ist, stimmen mit den Monotoniebereichen überein.

Bei der Konstruktion des Verlaufs der Sinusfunktion ist auch denkbar, dass die Änderung des Winkels nicht aus der Ruhelage, also bei $\alpha = 0$, startet, sondern bei einem $\alpha_0 \in \mathbb{R}^+$. Weiters soll die Betrachtung des Verlaufs der Sinusfunktion über der Zeit t erfolgen, dazu wird die Variablentransformation

$$\alpha = \omega t + \alpha_0 \tag{2.15}$$

durchgeführt. Dabei ist $\omega \in \mathbb{R}^+$ die **Kreisfrequenz**, welche mit der **Frequenz** $f \in \mathbb{R}^+$ über

$$\omega = 2\pi f \tag{2.16}$$

zusammenhängt. α_0 wird als **Nullphasenwinkel** bezeichnet und die Frequenz ist gekoppelt mit der **Periodendauer** T über

$$T = \frac{1}{f}. \tag{2.17}$$

Mit $t_0 \in \mathbb{R}^+$ und $\alpha_0 = \omega t_0$ ist wegen

$$\omega t + \alpha_0 = \omega t + \omega t_0 = \omega(t + t_0) = 0$$

[7]Ordinatenlinien sind Geradenstücke, die parallel zur Ordinate liegen.

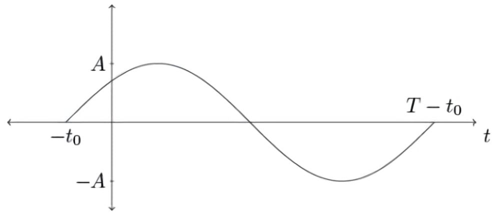


Abbildung 2.9: Graph der Sinusfunktion über der Zeit t betrachtet.

$t = -t_0$ die „verschobene" (erste) Nullstelle auf der t–Achse. Die komplette Funktionsvorschrift für eine extremale Auslenkung $A \in \mathbb{R}^+$, der sogenannten **Amplitude**, der zeitabhängigen Sinusfunktion lautet

$$\boxed{f(t) = A\sin(\omega t + \alpha_0).} \tag{2.18}$$

Der Funktionsverlauf ist in Abbildung 2.9 dargestellt. Ähnliche Überlegungen können analog für die Cosinusfunktion angestellt werden.

Eine weitere Funktion, die sogenannte **Cotangensfunktion**, ist durch die Definition

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.19}$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$, die $\sin\alpha \neq 0$ erfüllen, gegeben. Die Graphen der **Tangens– und Cotangensfunktion** sind in Abbildung 2.10 zu sehen.

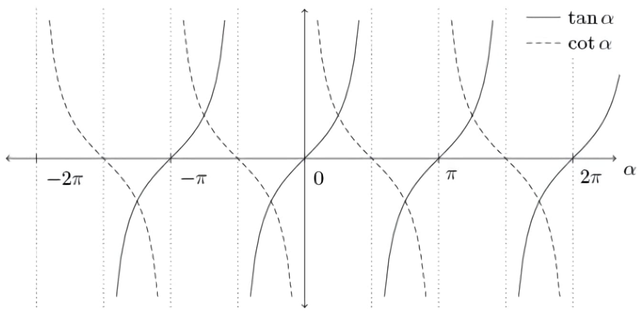


Abbildung 2.10: Funktionsgraphen von Tangens und Cotangens.

Überlegungen zum Thema Bijektivität können auch bei den Winkelfunktionen angestellt werden. Es stellt sich heraus, dass diese nur auf Teilbereichen bijektiv sein können. Auf diesen Bijektivitätsbereichen können Umkehrfunktionen angegeben werden. Dazu werden die sogenannten **Arcusfunktionen** definiert, die als Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen zu verstehen sind. Es werden die Graphen der Winkelfunktionen an der ersten Mediane $y = x$ gespiegelt um die Graphen der Arcusfunktionen angeben zu können, siehe Abbildung 2.11 und 2.12.

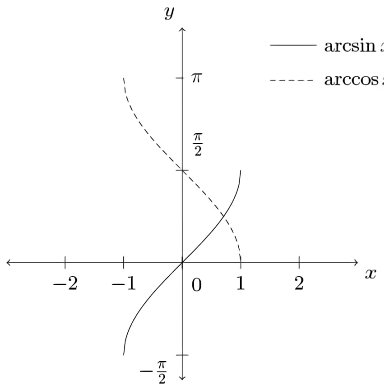


Abbildung 2.11: Graphen der Arcussinus– und Arcuscosinusfunktion.

Bei den Arcusfunktionen muss die Notation angepasst werden. Die Umkehroperation ist so zu verstehen, dass beispielsweise die Gleichung

$$\sin\alpha = a$$

nach α zu lösen ist. Die Lösung wird geschrieben als

$$\alpha = \arcsin a.$$

Da α zur Bezeichnung eines Winkels verwendet wird, die Funktionen aber nicht immer im geometrischen Zusammenhang verwendet werden, wird die Notation im Folgenden auf x und y umgestellt, um der Darstellung als Funktionen näher zu kommen.

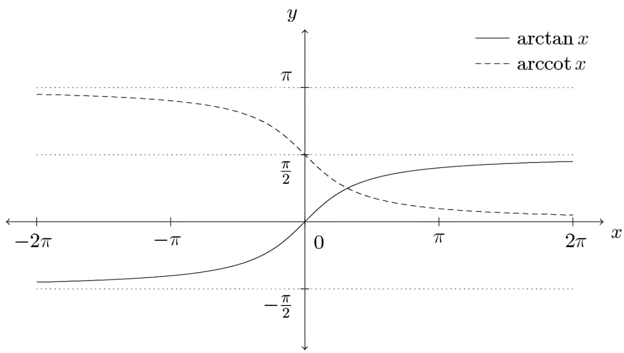


Abbildung 2.12: Graphen des Arcustangens und Arcuscotangens.

Die Verwendung von Winkelfunktionen führt auf Gleichungen, in denen Winkelfunktionen beteiligt sind. Um diese untersuchen zu können, müssen noch einige Rechenregeln für Winkelfunktionen angegeben werden, die sogenannten **Additionstheoreme**.

Erstes Additionstheorem. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{2.20}$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \tag{2.21}$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{2.22}$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \tag{2.23}$$

Dieser Satz erlaubt es, die Formeln für zwei sehr wichtige Ausdrücke zu entwickeln, die in Technik und Naturwissenschaft ausgesprochen häufig auftreten.

$$\boxed{\sin(2x) = 2\sin x \cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x}$$

Zweites Additionstheorem. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x-y}{2}\right) \tag{2.24}$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right) \tag{2.25}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x-y}{2}\right) \tag{2.26}$$
$$\cos x - \cos y = -\,2\sin\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right) \tag{2.27}$$

Der folgende Satz ermöglicht es, die Sinus– und Cosinusfunktion zueinander in Beziehung zu setzen.

Hauptsatz der Trigonometrie. Es gilt $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{2.28}$$

Dieser Zusammenhang kann über den Satz des Pythagoras in Abbildung 2.7 geometrisch eingesehen werden.

Bemerkung. Eine Zusammenstellung wichtiger Zusammenhänge der Winkelfunktionen ist im Anhang nachzulesen, sowie die Definition und Umrechnung verschiedener Winkelmaße.

Trigonometrische Gleichungen. Ausgestattet mit diesem Wissen können Gleichungen mit Beteiligung von Kreisfunktionen untersucht werden, sogenannte trigonometrische Gleichungen. Die Behandlung dieser Gleichungen wird anhand eines Beispiels erläutert, zur Vertiefung des Wissens sei auf die Übungen verwiesen.

Betrachtet wird die Gleichung auf dem Intervall $[0, 2\pi]$

$$\sin(2\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Darauf die Arcussinusfunktion angewandt ergibt zwei Lösungen

$$(2\varphi)_1 = \tfrac{\pi}{4}, \qquad (2\varphi)_2 = \pi - \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{3\pi}{4}.$$

Zwei Lösungen können dadurch erklärt werden, dass eine gedachte Linie bei $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ zwei Schnittpunkte mit dem Graphen der Sinusfunktion ergibt (vgl. Abb. 2.8). Diese beiden Lösungen führen auf zwei Lösungen für die ursprüngliche Gleichung

$$\varphi_1 = \tfrac{\pi}{8}, \qquad \varphi_2 = \tfrac{3\pi}{8}.$$

Da jedoch diese Gleichung über $[0, 2\pi]$ zu lösen ist, müssen weitere Lösungen betrachtet werden, denn

$$(2\varphi)_3 = \tfrac{\pi}{4} + 2\pi = \tfrac{9\pi}{4}, \qquad (2\varphi)_4 = \tfrac{3\pi}{4} + 2\pi = \tfrac{11\pi}{4}$$

liefern die Lösungen

$$\varphi_3 = \tfrac{9\pi}{8}, \qquad \varphi_4 = \tfrac{11\pi}{8}.$$

Alle weiteren Lösungen liegen nicht in $[0, 2\pi]$.

Winkelfunktionen und Geometrie. Abschließend werden noch geometrische Überlegungen an einem *allgemeinen Dreieck*, wie in Abbildung 2.13 dargestellt, angestellt.

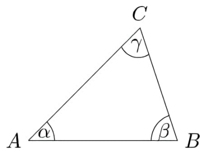


Abbildung 2.13: Illustration eines allgemeinen Dreiecks.

Mit den Bezeichnungen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ gelten die folgenden Sätze.

Sinussatz. In einem allgemeinen Dreieck gilt

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{2.29}$$

Cosinussatz. In einem allgemeinen Dreieck gilt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos\alpha, \tag{2.30}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,\cos\beta, \tag{2.31}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\cos\gamma. \tag{2.32}$$

Bemerkung. Für $\gamma = \frac{\pi}{2}$ liegt ein *rechtwinkeliges Dreieck* vor. Es gilt $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und aus dem Cosinussatz 2.4 folgt damit

$$c^2 = a^2 + b^2, \tag{2.33}$$

der **Satz von Pythagoras**[8].

2.5 Potenz- und Wurzelfunktionen, Wurzelgleichungen

Eingangs werden die Definitionen der Potenz und Wurzel gegeben sowie Sätze über die Rechenregeln formuliert.

Die n–te **Potenz** einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist die n–fache Multiplikation der *Basis* a, wobei der *Exponent* $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Faktoren angibt.

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{mal}},} \qquad a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \tag{2.34}$$

[8]Pythagoras von Samos (ca. 570 v. Chr. – 510 v. Chr.), griechischer Philosoph

Mit der Festsetzung $a^0 = 1$ ist die Definition der Potenz auch für $n \in \mathbb{N}_0$ sinnvoll. Um eine Erweiterung auf ganzzahlige Exponenten zu erhalten wird die Definition

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n},} \qquad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \tag{2.35}$$

ergänzt. Mit diesen Festsetzungen ist in der Definition der Potenz dann auch $n \in \mathbb{Z}$ für $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ zugelassen.

Rechenregeln für Potenzen. Für $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned} &a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m} \\ &\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \end{aligned} \tag{2.36}$$

Die Definition der n–ten Wurzel einer reellen Zahl erfolgt durch Zuhilfenahme der Potenz.

Die n–te **Wurzel** $\sqrt[n]{a}$ einer Zahl $a \in \mathbb{R}_0^+$ ist jene Zahl aus $\mathbb{R}_0^+$, welche die Gleichung

$$\boxed{(\sqrt[n]{a})^n = a,} \tag{2.37}$$

mit dem *Wurzelexponenten* $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Außerdem gilt

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.}$$

Bemerkung. Bei der Wurzel einer reellen Zahl müssen einige Punkte berücksichtigt werden:

(a) Bei Quadratwurzeln wird der Wurzelexponent weggelassen und das Wurzelsymbol immer als positive Zahl definiert, d.h. es gilt $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a} \in \mathbb{R}_0^+$.

(b) Für ungerade Wurzelexponenten n kann auch aus negativen Zahlen die Wurzel gezogen werden, beispielsweise $\sqrt[3]{-8} = -2$, denn es gilt $(-2)^3 = -8$. Dieser Gedanke wird bei den Wurzelfunktionen vertieft.

(c) Die Definition der Wurzel lässt schnell einsehen, dass beim Wurzelziehen Vorsicht geboten ist. Betrachtet man die Gleichung $x^2 = 9$ so ist wegen $3^2 = 9$ und $(-3)^2 = 9$ sowohl 3 als auch -3 Lösung. Die Umformung $x = \sqrt{9}$ wäre falsch, hingegen $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ richtig.

(d) Nicht alle reellen Zahlen müssen eine Wurzel besitzen. Beispielsweise -2 besitzt keine Wurzel, da die Gleichung $x^2 = -2$ in $\mathbb{R}$ nicht erfüllt werden kann. Dies führt auf komplexe Zahlen, siehe Kapitel 4.

Rechenregeln für Wurzeln. Für $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned} &\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, \quad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, \qquad a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}, \\ &\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \end{aligned} \tag{2.38}$$

Beispiel 2.12. Zu den Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln die folgenden Beispiele:

(a) $2^6 + 4^3 = 2^6 + (2^2)^3 = 2^6 + 2^6 = 2 \cdot 2^6 = 2^7$

(b) $x^{4+s} \cdot x^{2s-7} = x^{3s-3} = \frac{x^{3s}}{x^3} = \left(\frac{x^s}{x}\right)^3 = x^{3(s-1)} = x^{3s-3}$

(c) $\sqrt{18}+\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2\cdot 2^2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

(d) $\sqrt{\dfrac{a^{2t-3}}{a^{1-2t}}}=\sqrt{\dfrac{a^{4t}}{a^4}}=\left(\dfrac{a^t}{a}\right)^2=a^{2t-2}$

Anschließend an die Rechenoperationen und deren Rechenregeln nun im Folgenden die Betrachtungen der zugehörigen Funktionen.

Eine Funktion $f\colon D\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^a$, mit $D=\mathbb{R}$ bzw. $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $a\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ heißt **Potenzfunktion.**

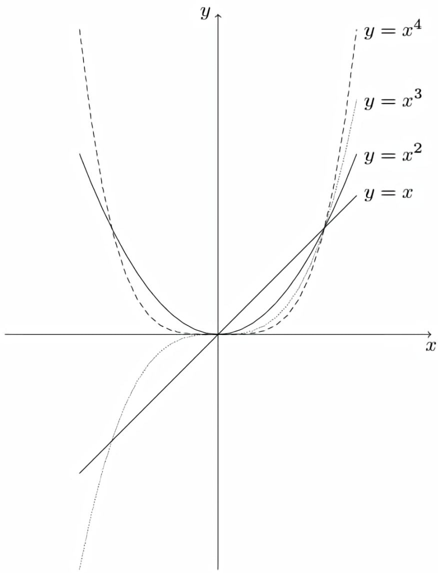


Abbildung 2.14: Graph von Potenzfunktionen mit positiven Exponenten.

In Abbildung 2.14 sind drei Potenzfunktionen mit positiven Exponenten in einem gemeinsamen Koordinatensystem zum qualitativen Vergleich dargestellt.

Bemerkung. Die bereits untersuchte lineare Funktion, Parabel und quadratische Funktion sind spezielle Potenzfunktionen bzw. sind Summen und Differenzen von Potenzfunktionen.

Es sei darauf hingewiesen, dass Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten geschrieben werden können als

$$x^{-a}=\frac{1}{x^a},\qquad a\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\ x\neq 0.$$

In Abbildung 2.15 sind zwei Potenzfunktionen mit negativen Exponenten in einem gemeinsamen Koordinatensystem zum qualitativen Vergleich dargestellt. Hier ist die Stelle $x=0$ besonders zu erwähnen, da die Funktionen an dieser Stelle nicht definiert sind. Das ist auch der Grund, warum in der Definition einmal $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ gefordert wird. Genaueres zu Nullstellen des Nenners, den sogenannten Polstellen, in Kapitel 2.6.

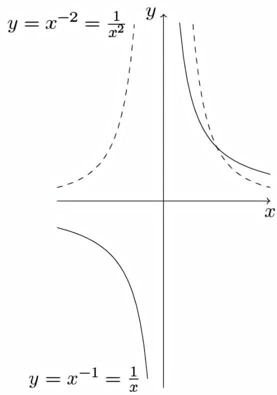


Abbildung 2.15: Graph von Potenzfunktionen mit negativen Exponenten.

In den Abbildungen 2.14 und 2.15 ist weiters zu erkennen, dass die Funktionscharakteristik für gerade bzw. ungerade Exponenten jeweils ähnlich ist, lediglich die Steigung verändert sich, vergleiche beispielsweise x^2 und x^4. Desweiteren verlaufen alle Potenzfunktionen durch den Punkt $(1, 1)$.

Mit der Definition der Wurzel werden im Folgenden Wurzelfunktionen definiert und der Zusammenhang zu Potenzfunktionen untersucht.

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto y = \sqrt[n]{x}$, mit $n \in \mathbb{N}$ heißt **Wurzelfunktion**.

Wurzelfunktionen sind die **Umkehrfunktionen** von Potenzfunktionen im Sinne von

$$(\sqrt[n]{x})^n = x, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Geometrisch ergibt sich dieser Zusammenhang daraus, dass die Funktion an der **ersten Mediane** $y = x$ gespiegelt wird. Dies setzt jedoch voraus, dass die Funktion bijektiv ist, dazu müssen die Definitionsbereiche der jeweiligen Funktionen passen bzw. angepasst werden. Beispielsweise für ist $y = x^2$ die Umkehrfunktion $y = \sqrt{x}$, wobei der Definitionsbereich als $\mathbb{R}_0^+$ gewählt werden muss, wie in Abbildung 2.16 dargestellt.

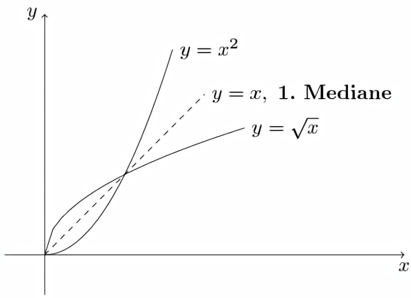


Abbildung 2.16: Beispielhafter Zusammenhang zwischen Potenz– und Wurzelfunktion.

Wurzelgleichungen. Wurzelfunktionen führen, beispielsweise bei der Frage nach dem Schnittpunkt der Funktionen $f\colon y = \sqrt{x-2}$ und $g\colon y = 3\sqrt{2-3x}$ auf Wurzelgleichungen, in diesem Fall auf

$$\sqrt{x-2} = 3\sqrt{2-3x}.$$

Bei diesen Gleichungen sind die Definitionsbereiche besonders wichtig, da diese für das Auffinden der Lösungen wesentlich sind. Die prinzipielle Herangehensweise an Wurzelgleichungen wird anhand eines Beispiels dargestellt.

Beispiel 2.13. Die Gleichung

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{x+7} = \sqrt{x+2}$$

hat aufgrund der auftretenden Wurzeln die einzelnen Definitionsbereiche $x \geq 1$, $x \geq -7$ und $x \geq -2$. Die Definitionsbereiche sind konjunkt (gemeinsam) zu betrachten, daher gilt insgesamt $x \geq 1$. Die Gleichung ansich wird auf beiden Seiten quadriert, um die Wurzeln zu entfernen, da es sich um Summen handelt, sind die binomischen Formeln hier anzuwenden. Es folgt daraus

$$x - 1 - 2\sqrt{x-1}\sqrt{x+7} + x + 7 = x + 2.$$

Diese Gleichung umgeformt ergibt

$$2\sqrt{(x-1)(x+7)} = x + 4,$$

welche wieder quadriert werden muss und zu

$$4(x-1)(x+7) = x^2 + 8x + 16$$

führt. Daraus folgt $x_{1,2} = -\frac{16}{6} \pm \sqrt{\frac{256}{36} + \frac{528}{36}} = -\frac{16}{6} \pm \frac{28}{6}$ und somit $x_1 = 2$ und $x_2 = -\frac{22}{3}$. Die Überprüfung dieser Lösungen, durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung, zeigt, dass x_1 falsch ist, und die Definitionsmenge zeigt, dass x_2 unzulässig ist. Diese Gleichung ist über $\mathbb{R}$ nicht lösbar, die Lösungsmenge ist also leer.

Die Vorgehensweise für andere Wurzelgleichungen ist im Wesentlichen analog zu dieser Rechnung. Wichtig ist eine Überprüfung des Ergebnisses und das Aufsuchen der Definitionsmenge.

2.6 Polynomfunktionen und rationale Funktionen

2.6.1 Polynomfunktionen

Polynomfunktionen repräsentieren eine der wichtigsten Klasse von Funktionen in der Mathematik. Dieses Kapitel widmet sich dieser Klasse von Funktionen, stellt Rechenoperationen vor und geht auf die bedeutenden Spezialfälle der linearen und quadratischen Funktionen sehr detailliert ein.

Eine **Polynomfunktion** ist eine Funktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \tag{2.39}$$

mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 0, \ldots, n$. Die höchste auftretende Potenz n wird als der **Grad** der Polynomfunktion bezeichnet, $\operatorname{Grad} p = n$.

Rechenoperationen mit Polynomfunktionen orientieren sich an den Rechenmethoden der reellen Zahlen. So werden die Grundrechenarten unter Berücksichtigung der Potenzen durchgeführt. Zur Illustration des Sachverhalts ein kurzes

Beispiel 2.14. Die Berechnung des Produkts

$$(x^3 - 2x^2 + x - 1)(x^2 + 2x + 1)$$

ergibt $x^5 - 2x^3 - x^2 - x - 1$.

Im Zusammenhang mit Polynomfunktionen ist die sogenannte **Polynomdivision** ein wichtiges Werkzeug. Der Name suggeriert bereits, dass diese Methode das Dividieren von Polynomfunktionen erlaubt. Auch die Behandlung von Bruchtermen wird hiermit ermöglicht, was an dieser Stelle anhand einiger plakativer Beispiele gezeigt wird.

Beispiel 2.15. Beispiele zu Polynomdivisionen:

(a) Die Polynomdivision von $a^3 + 5a^2 + 9a + 5$ durch $a + 1$ entspricht dem (sogenannten) Bruchterm der Form $\frac{a^3+5a^2+9a+5}{a+1}$, mit $a \neq -1$. Die Berechnung der Polynomdivision lautet wie folgt.

$$\begin{array}{l}
\big(\;\; a^3 + 5a^2 + 9a + 5\big) : \big(a + 1\big) = a^2 + 4a + 5 \\
\underline{-\,a^3 \;\; -\,a^2} \\
\qquad\quad 4a^2 + 9a \\
\qquad \underline{-\,4a^2 - 4a} \\
\qquad\qquad\quad 5a + 5 \\
\qquad\qquad \underline{-\,5a - 5} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Hier stellt sich also $\frac{a^3+5a^2+9a+5}{a+1} = a^2 + 4a + 5$ heraus. Es können jedoch auch Divisionen mit Rest auftreten, wie das folgende Beispiel zeigt.

(b) Mit $x \neq \pm 1$ gilt die folgende Rechnung.

$$\begin{array}{l}
\big(\;\; 2x^4 + x^3 \qquad\qquad\quad + 5\big) : \big(x^2 - 1\big) = 2x^2 + x + 2 + \dfrac{x+7}{x^2-1} \\
\underline{-\,2x^4 \qquad + 2x^2} \\
\qquad\quad x^3 + 2x^2 \\
\qquad \underline{-\,x^3 \qquad\quad + x} \\
\qquad\qquad\quad 2x^2 + x + 5 \\
\qquad\qquad \underline{-\,2x^2 \qquad + 2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad x + 7
\end{array}$$

Damit gilt für den entsprechenden Bruchterm

$$\frac{2x^4 + x^3 + 5}{x^2 - 1} = 2x^2 + x + 2 + \frac{x + 7}{x^2 - 1}.$$

Dieser Sachverhalt wird später bei den rationalen Funktionen an Bedeutung gewinnen.

In den folgenden Unterkapitel werden zwei Spezialfälle besprochen, welche für den Umgang mit Polynomfunktionen im Allgemeinen von großer Bedeutung sind. Daran schließt ein Unterkapitel an, welches diese Sonderfälle dann verknüpft, um Polynomfunktionen allgemein zu charakterisieren.

Nullstellen und deren Vielfachheit. Sei p eine Polynomfunktion wie in (2.39) und x_0 eine Nullstelle von p. Existiert eine Polynomfunktion g mit $g(x_0) \neq 0$ und $m \in \mathbb{N}$ so, dass

$$p(x) = (x - x_0)^m g(x) \tag{2.40}$$

so heißt m die **Vielfachheit** der Nullstelle der Polynomfunktion p.

Das folgende Beispiel zeigt die Vorgehensweise beim Auffinden von Nullstellen eines Polynoms dessen Grad größer als zwei ist.

Beispiel 2.16. Die Funktion $p(x) = x^3 - 3x + 2$ hat an der Stelle $x = 1$ eine Nullstelle, d.h. es gilt $p(1) = 0$. Mit Hilfe der Polynomdivision kann der Linearfaktor $x - 1$ abgespaltet werden, man erhält damit

$$
\begin{array}{l}
\big(\;x^3 \qquad - 3x + 2\big) : \big(x - 1\big) = x^2 + x - 2. \\
\underline{-\,x^3 + x^2} \\
\qquad\; x^2 - 3x \\
\qquad \underline{-\,x^2 \;+ x} \\
\qquad\qquad -\,2x + 2 \\
\qquad\qquad\; \underline{\;2x - 2\;} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Die Funktion p kann also als $p(x) = (x-1)(x^2+x-2)$ geschrieben werden. Die Funktion $g(x) = x^2+x-2$ hat ihrerseits die Nullstellen $x = 1$ und $x = -2$, damit gilt $g(x) = (x - 1)(x + 2)$. Daher kann p geschrieben werden als $p(x) = (x - 1)^2(x + 2)$ und hat die Nullstellen $x = 1$ der Vielfachheit 2 und $x = -2$ der Vielfachheit 1.

2.6.2 Gebrochen rationale Funktionen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ der Form

$$
f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \tag{2.41}
$$

mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 0, \ldots, n$ und $b_j \in \mathbb{R}$ für $j = 0, \ldots, m$, heißt eine **rationale Funktion**. Für $\operatorname{Grad} p < \operatorname{Grad} q$ heißt f eine **echt** *gebrochenrationale Funktion*, andernfalls eine **unecht** *gebrochenrationale Funktion.*

Eine rationale Funktion ist als Quotient zweier Polynomfunktionen definiert. Die Nullstellen der Funktion p stimmen mit den Nullstellen der Funktion f überein. Die Definitionsmenge D der rationalen Funktion ist lediglich durch die Nullstellen der Funktion q eingeschränkt

$$
D = \{x \in \mathbb{R}\colon q(x) \neq 0\}. \tag{2.42}
$$

Die Nullstellen der Funktion q werden als **Polstellen** der rationalen Funktion f bezeichnet. Die **Ordnung** der Polstelle stimmt mit der Vielfachheit der Nullstelle von q überein.

Bezeichnet $N_q = \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$ die Nullstellenmenge der Funktion q, so heißen die Geraden $x = u$ mit $u \in N_q$ **vertikale Asymptoten** der rationalen Funktion f.

Polstellen sind also jene Stellen, welche in der Definitionsmenge der rationalen Funktion ausgenommen werden müssen.

Beispiel 2.17. Eine der einfachsten rationalen Funktionen ist $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$. Die Polstelle liegt bei $x = 0$, welche im Definitionsbereich ausgenommen wurde.

Bemerkung. Ein Sonderfall liegt vor, wenn es eine Stelle $x^* \in \mathbb{R}$ gibt, bei der sowohl p als auch q eine Nullstelle besitzt. Eine derartige Stelle wird als *Definitionslücke* bezeichnet und erfordert zusätzliches Studium. Hierfür sei auf die Mathematik Grundvorlesungen verwiesen.

Abgesehen von den vertikalen Asymptoten können noch Asymptoten[9] schlechthin auftreten.

[9] *asymptotos*: altgriechisch für nicht übereinstimmend

Bestimmung von Asymptoten. Sei f eine rationale Funktion der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $\operatorname{Grad} p \geq \operatorname{Grad} q$, so ist f darstellbar als

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \tag{2.43}$$

mit zwei Polynomfunktionen g und r, wobei $\operatorname{Grad} r < \operatorname{Grad} q$ gilt. Die Polynomfunktion g wird als **Asymptote** von f bezeichnet.

Dieser Sachverhalt erinnert an die Polynomdivision, speziell an Beispiel 2.15 (b). Dort wurde der Algorithmus vorgestellt, wie man die rationale Funktion f in die Darstellung (2.43) umformt.

Beispiel 2.18. Betrachtet man die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^4 + x^3 + 5}{x^2 - 1},$$

so lauten die Polstellen $x = \pm 1$. Damit ist die Definitionsmenge durch $D = \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq \pm 1\}$ gegeben. Die Polynomdivision ergibt

$$\begin{array}{rrrrrl}
\big(& 2x^4 + x^3 & & & +5 \big) & : \big(x^2 - 1\big) = 2x^2 + x + 2 + \dfrac{x+7}{x^2-1}. \\
 & -2x^4 & +2x^2 & & & \\
\hline
 & x^3 & +2x^2 & & & \\
 & -x^3 & & +x & & \\
\hline
 & & 2x^2 & +x & +5 & \\
 & & -2x^2 & & +2 & \\
\hline
 & & & x & +7 &
\end{array}$$

Dies bedeutet, dass die Darstellung (2.43) mit $g(x) = 2x^2 + x + 2$ und $r(x) = x + 7$ gilt.

2.7 Exponential– und Logarithmusfunktionen und Gleichungen

Eine Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ heißt **Exponentialfunktion** *zur Basis a*.

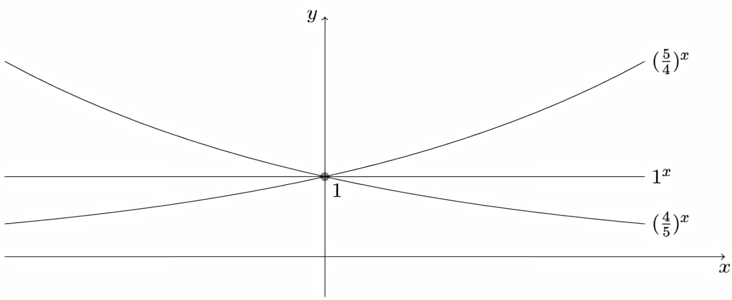


Abbildung 2.17: Verlauf der Exponentialfunktion zur Basis $a = \frac{5}{4} > 1$, $a = 1$ und $a = \frac{4}{5} < 1$.

Eigenschaften der Exponentialfunktion:

(a) Die Exponentialfunktion ist nach unten durch die x–Achse beschränkt, d.h. alle Funktionswerte sind positiv.

(b) Die Exponentialfunktion ist nach oben unbeschränkt, außer für $a = 1$.

(c) Der Punkt $(0, 1)$ ist für alle $a \in \mathbb{R}^+$ immer Element des Graphen der Exponentialfunktion.

(d) Für $a > 1$ ist die Funktion streng monoton wachsend, für $a < 1$ ist sie streng monoton fallend und für $a = 1$ ist sie konstant.

(e) Die Graphen a^x und $a^{-x} = (\frac{1}{a})^x$ sind bezüglich der y–Achse zueinander symmetrisch.

In Technik und Naturwissenschaft kommt der Exponentialfunktion zu einer speziellen Basis, der Eulerschen Zahl, besondere Bedeutung zu. Die **Eulersche Zahl**[10] ist definiert durch

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{2.44}$$

Eine Exponentialfunktion zur Basis $a = \mathrm{e}$ wird als **natürliche Exponentialfunktion** bezeichnet. Es stellt sich nun wieder die Frage nach der Umkehrung der Exponentialfunktion. Wird beispielsweise das Urbild x eines Funktionswerts y gesucht

$$a^x = y,$$

so muss die Umkehrung gefunden werden. Dies führt auf den sogenannten Logarithmus.

Die reelle Lösung x der Gleichung $a^x = b$, mit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus\{1\}$ und $b \in \mathbb{R}^+$, nennt man den **Logarithmus** des **Numerus** b zur Basis a.

$$a^x = b \quad\Longleftrightarrow\quad x = \log_a b \tag{2.45}$$

In Worten:

$$\text{Basis}^{\text{Logarithmus}} = \text{Numerus}$$

Die Definition des Logarithmus führt unmittelbar zur Definition der zugehörigen Funktion.

Die Funktion $\log_a\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ y = \log_a x$ heißt **Logarithmusfunktion** zur Basis $a \in \mathbb{R}^+ \setminus\{1\}$.

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, jeweils zur selben Basis a. Dieser Zusammenhang wird in Abbildung 2.18 veranschaulicht.

Die Definition des Logarithmus erlaubt es, Rechenregeln für Logarithmen zu entwickeln.

Rechenregeln für Logarithmen. Für $u, v \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{R}^+ \setminus\{1\}$ gilt:

(a) $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$

(b) $\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a u - \log_a v$

(c) $\log_a(u^r) = r \cdot \log_a u, \qquad r \in \mathbb{R}$

(d) $\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \cdot \log_a u, \qquad n \in \mathbb{N}$

Als Merkregel gilt hier, dass eine Rechenoperation im Argument des Logarithmus erniedrigt wird, wenn der Logarithmus „aufgeteilt“ wird.

Auch beim Logarithmus gibt es für spezielle Basen eigene Namensgebungen. Für $a = 10$ spricht man vom **dekadischen Logarithmus** lg (Zehnerlogarithmus), für $a = \mathrm{e}$ vom **natürlichen Logarithmus**

[10] Leonhard Euler (1707 – 1783), schweizer Mathematiker

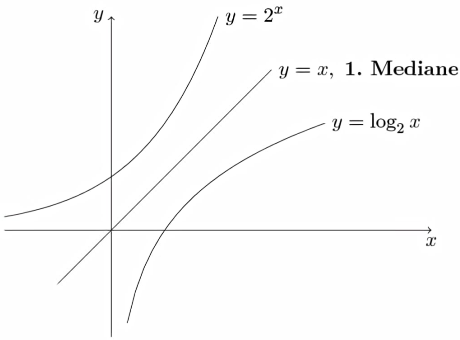


Abbildung 2.18: Zusammenhang zwischen Exponentialfunktion $f\colon x \mapsto y = 2^x$ und Logarithmusfunktion $g\colon x \mapsto y = \log_2 x$.

ln (Logarithmus naturalis) und für $a = 2$ spricht man vom **binären Logarithmus** ld (Logarithmus dualis). Logarithmen zu verschiedenen Basen können ineinander übergeführt werden, wie folgender Satz zeigt.

Umrechnung von Logarithmen. Für $x \in \mathbb{R}^+$ und $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ gilt

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}. \tag{2.46}$$

Bemerkung. Dies ist beispielsweise am Taschenrechner nützlich, da dort üblicherweise nur zwei Logarithmen zur Verfügung stehen.

Exponential– und Logarithmusgleichungen. An die Funktionen anschließend sollen Exponential– und Logarithmusgleichungen behandelt werden. Dazu wird von jedem Typ ein Beispiel durchgerechnet und auf Besonderheiten hingewiesen.

Eine **Exponentialgleichung** der Form $3^x = 2$ kann durch Anwendung des Logarithmus zur Basis 3 aufgelöst werden. Hinsichtlich des praktischen Rechnens ist dies jedoch nicht sinnvoll, da auf einem Taschenrechner meist nur der dekadische oder der natürliche Logarithmus zur Verfügung steht. Die Gleichung wird also mit dem natürlichen Logarithmus beaufschlagt

$$\ln(3^x) = \ln(2)$$

und gemäß den Rechenregeln für Logarithmen erhält man

$$x \cdot \ln 3 = \ln 2$$

und damit

$$x = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Eine etwas schwierigere Aufgabe stellt die Exponentialgleichung

$$8 \cdot 9^{x-3} + 4^{x+1} = 3^{2x-4}$$

dar. Bei diesem Typ sind mehrere Umformungen und Rechenschritte notwendig. Die Gleichung

$$8 \cdot (3^2)^{x-3} + 4^{x+1} = 3^{2x-4}$$

wird derart umgeformt, dass alle Exponenten gleicher Basis auf einer Seite der Gleichung zu stehen kommen und anschließend wird herausgehoben.

$$\begin{aligned} 8 \cdot 3^{2x-6} + 4^{x+1} &= 3^{2x-4} \\ 4^{x+1} &= 3^{2x-4} - 8 \cdot 3^{2x-6} \\ 4^{x+1} &= 3^{2x}(3^{-4} - 8 \cdot 3^{-6}) \end{aligned}$$

Logarithmieren ergibt

$$(x+1)\ln 4 = 2x \ln 3 + \ln(3^{-6}),$$

durch Umformen erhält man

$$x = \frac{6\ln 3 + \ln 4}{2\ln 3 - \ln 4}.$$

Logarithmische Gleichungen werden auch unter Anwendung der Rechenregeln für Logarithmen behandelt. Beispielsweise führt die Gleichung

$$\log_2 (x+1) + \log_2 (x-1) = 3$$

auf

$$\log_2 (x+1)(x-1) = 3,$$

was durch Anwenden der Exponentialfunktion zur Basis 2

$$x^2 - 1 = 8$$

ergibt. Diese Gleichung hat als Lösungen $x_{1,2} = \pm 3$, die Definitionsmenge der logarithmischen Gleichung lässt jedoch nur $x = 3$ zu.

Ein anderer Typ von logarithmischen Gleichungen wie

$$6 \cdot (\lg x)^2 + 2 = \lg(x^7)$$

führt mit Hilfe der Substitution $u = \lg x$ auf eine quadratische Gleichung

$$6u^2 - 7u + 2 = 0,$$

mit den Lösungen $u_1 = \frac{2}{3}$ und $u_2 = \frac{1}{2}$. Rückeinsetzen in die Substitutionsvorschrift führt auf $x_1 = \sqrt[3]{100}$ und $x_2 = \sqrt{10}$.

Abschließend sei noch das **exponentielle Wachstum** bzw. der **exponentielle Zerfall** erwähnt. Dieser hat in Technik und Naturwissenschaft besondere Bedeutung. Im Wesentlichen ist die verantwortliche Funktion von der Form

$$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t},$$

wobei das Vorzeichen von λ aussagt, ob Wachstum oder Zerfall vorliegt. Für Details zu diesem Thema sei auf Kapitel 2.10 verwiesen.

2.8 Hyperbelfunktionen

Die Exponentialfunktion erlaubt es weitere Funktionen zu definieren, die ähnliche Rechenregeln aufweisen wie Winkelfunktionen, die sogenannten **Hyperbelfunktionen**.

Der **Sinus Hyperbolicus** ist definiert durch

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \tag{2.47}$$

der **Cosinus Hyperbolicus** ist definiert durch

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \tag{2.48}$$

der **Tangens Hyperbolicus** durch

$$\tanh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \tag{2.49}$$

und der **Cotangens Hyperbolicus** durch

$$\coth x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}. \tag{2.50}$$

Der Graph von Sinus und Cosinus Hyperbolicus ist in Abbildung 2.19 dargestellt.

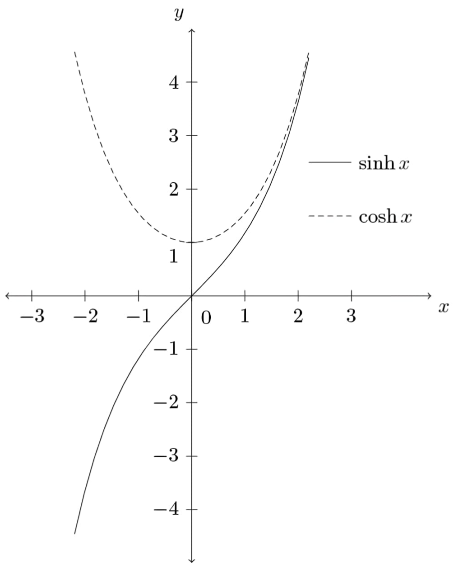


Abbildung 2.19: Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus.

Es ist in der Abbildung zu erkennen, dass der Sinus Hyperbolicus eine ungerade Funktion und der der Cosinus Hyperbolicus eine gerade Funktion darstellt. Er gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sinh x = -\sinh(-x), \qquad \cosh x = \cosh(-x).$$

Für Hyperbelfunktionen gibt es, ähnlich zu den Winkelfunktionen, Additionstheoreme und Umrechnungsbeziehungen. Für die meisten dieser Beziehungen sei auf den Anhang B.2 verwiesen, der Hauptsatz lautet wie folgt.

Hauptsatz der Hyperbelfunktionen. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \tag{2.51}$$

Beweis.

$$\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x} - \left(\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}\right)\right) = 1$$

□

In Analogie zu den Winkelfunktionen gibt es auch Additionstheoreme, die ebenfalls nur aufgrund der ähnlichen Formeln zu den Winkelfunktionen so bezeichnet werden.

Erstes Additionstheorem für Hyperbelfunktionen. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten:

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \tag{2.52}$$
$$\cos(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \tag{2.53}$$
$$\tag{2.54}$$

Zweites Additionstheorem für Hyperbelfunktionen. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten:

$$\sinh x + \sinh y = 2\sinh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{2.55}$$
$$\cosh x + \cosh y = 2\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{2.56}$$

Eine Ausführliche Ergänzung an weitern Formeln und Additionstheoremen findet sich im Anhang in Abschnitt B.2.

2.9 Betragsfunktion

Eine Funktion, welche an späterer Stelle von Bedeutung sein wird, ist die Betragsfunktion.

Die **Betragsfunktion** $|\,.\,|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ ist definiert durch

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0. \end{cases} \tag{2.57}$$

Die Definition der Betragsfunktion zeigt, dass die zwei Geradenstücke $y = -x$ für $x < 0$ und $y = x$ für $x > 0$ im Punkt $(0, 0)$ aufeinandertreffen. Die Betragsfunktion ist eine gerade Funktion, wie in Abbildung 2.20 dargestellt und auch leicht gemäß $f(x) = f(-x)$ nachzurechnen ist.

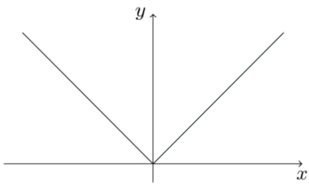


Abbildung 2.20: Graph der Betragsfunktion $f(x) = |x|$.

Um Missverständnisse hinsichtlich der Definition der Betragsfunktion zu vermeiden, hier ein

Beispiel 2.19. Es gilt

$$|3| = 3, \qquad |0| = 0 \qquad \text{und} \qquad |-5| = -(-5) = 5.$$

2.10 Beispiele aus den Anwendungen

Der lotrechte Wurf. Ein Körper wird zum Zeitpunkt $t = 0$ lotrecht mit einer Abwurfgeschwindigkeit $v_0 = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nach oben geschossen. Für die Steighöhe h gilt

$$h(t) = v_0 t - \frac{g}{2}t^2,$$

mit der Fallbeschleunigung[11] $g = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Um die maximale Wurfhöhe zu berechnen, muss die quadratische Funktion h untersucht werden, im Speziellen muss der Scheitel bestimmt werden. Dazu dient die Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat

$$v_0 t - \tfrac{g}{2}t^2 = -\tfrac{g}{2}\left(t^2 - \tfrac{2v_0}{g}t\right) = -\tfrac{g}{2}\left(\left(t - \tfrac{v_0}{g}\right)^2 - \tfrac{v_0^2}{g^2}\right) = -\tfrac{g}{2}\left(t - \tfrac{v_0}{g}\right)^2 + \tfrac{v_0^2}{2g}.$$

Der Scheitelpunkt liegt also bei

$$S = \big(t, h(t)\big) = \left(\frac{v_0}{g}, \frac{v_0^2}{2g}\right).$$

Die Flugzeit bis der Körper am Boden aufprallt, also $h(t) = 0$ gilt, berechnet sich über die Nullstellen der Funktion h.

$$0 = v_0 t - \frac{g}{2}t^2 = t\left(v_0 - \frac{g}{2}t\right)$$

Nach dem Produkt–Null–Satz folgen als Lösungen $t_1 = 0$ und $t_2 = \frac{2v_0}{g}$, der Zeitpunkt des Abwurfes und des Aufpralls.

Radioaktiver Zerfall. Die Atomkerne einiger Elemente wie beispielsweise Uran, Radium, Plutonium etc. sind instabil, d.h. sie zerfallen spontan. Die Zeit τ, in der von einer vorhandenen Stoffmenge die Hälfte zerfällt, heißt **Halbwertszeit**. Obwohl für keinen einzigen instabilen Atomkern der Zeitpunkt seines Zerfalls vorausgesagt werden kann, gilt näherungsweise für eine genügend große Anzahl solcher Kerne ein exponentielles Zerfallsgesetz

$$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

$N(t)$ ist die Anzahl der zum Zeitpunkt t noch vorhandenen Kerne des Elements, N_0 die Anzahl der ursprünglich (zum Zeitpunkt $t = 0$) vorhandenen Kerne und λ ist die sogenannte **Zeitkonstante**. Der Zusammenhang zwischen Halbwertszeit und Zeitkonstante berechnet sich wie folgt.

$$N(\tau) = \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot \mathrm{e}^{\lambda\tau} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} = \mathrm{e}^{\lambda\tau}$$

Durch Logarithmieren, zweckmäßig mit ln, erhält man

$$\lambda \cdot \tau = -\ln 2.$$

Stellt man sich beispielsweise die Frage, wann 10% der ursprünglichen Stoffmenge vorhanden sind, so ist der Rechengang analog, mit der ausgehenden Gleichung

$$\frac{N_0}{10} = N_0 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t},$$

die nach t gelöst werden muss und

$$t = -\frac{\ln 10}{\lambda}$$

ergibt.

[11] Mittelwert an der Erdoberfläche

Kapitel 3

Vektorrechnung und lineare analytische Geometrie

Dieses Kapitel widmet sich der Vektorrechnung und der analytischen Geometrie in zwei und drei Dimensionen. Zu Beginn wird die *Vektorrechnung* im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ behandelt, welche daran anschließend verwendet wird um analytische Geometrie zu betreiben. Im Abschnitt der Vektorrechnung werden grundlegende Rechenoperationen angesprochen, sowie Vektorprodukte. Dabei werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ deutlich gemacht. Der Abschnitt über die analytische Geometrie spricht insbesondere die mathematische Beschreibung von Geraden im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, sowie Ebenen im $\mathbb{R}^3$ an und behandelt damit verbundene geometrische Fragestellungen.

3.1 Elementare Rechenoperationen

In diesem Abschnitt werden die Vektoren als mathematische Objekte definiert und die zugehörigen Begriffe sowie Rechenoperationen definiert und untersucht.

Die Mengen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind definiert durch

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \text{sowie} \qquad \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}. \tag{3.1}$$

Bemerkung. Einige Bemerkungen zur Notation:

(a) Um Platz zu sparen werden Vektoren auch gelegentlich durch Zeilen (x, y), bzw. (x, y, z) beschrieben, was eine etwas schlampige Schreibweise ist. Mathematisch korrekt muss die *Transposition* hierzu verwendet werden, welche einen Tausch von Zeilen und Spalten zum Ausdruck bringt, d.h. es werden Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ durch $(x, y)^T$, bzw. $(x, y, z)^T$ angeschrieben.

(b) Die Bezeichnungen der Komponenten des Vektors als x, y und z leiten sich aus geometrischen Interpretationen ab. Es eignet sich aber oft die Komponenten mit Zahlen zu indizieren, d.h.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Die Komponenten der Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ erlauben eine geometrische Interpretation. Für einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ ist in Abbildung 3.1 eine geometrische Interpretation in der Ebene visualisiert, dabei wird der Vektorpfeil immer im Ursprung $\mathcal{O}$ verankert.

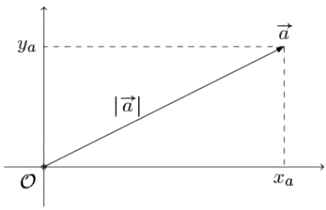


Abbildung 3.1: Geometrische Visualisierung eines Vektors $\vec{v}$.

An die Definition der Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ schließt sich nun das Studium der Begriffe und Rechenoperationen an.

Der **Betrag** eines Vektors $\vec{a} = \binom{x_a}{y_a} \in \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}, \tag{3.2}$$

der eines Vektors $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)^T \in \mathbb{R}^3$ durch

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}. \tag{3.3}$$

Der Betrag stellt geometrisch interpretiert die Länge des Vektors dar, dies ist für den $\mathbb{R}^2$ ebenfalls in Abbildung 3.1 illustriert. Nach Einführung des Betrags als ersten Begriff, schließt nun die erste Rechenoperation mit Vektoren an. Die **Vektoraddition und Vektorsubtraktion** ist für Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ gleich definiert.

Seien $\vec{a} = \binom{x_a}{y_a}, \vec{b} = \binom{x_b}{y_b} \in \mathbb{R}^2$ so gilt

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \pm x_b \\ y_a \pm y_b \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Seien $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a), \vec{b} = (x_b, y_b, z_b) \in \mathbb{R}^3$ so gilt

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \pm x_b \\ y_a \pm y_b \\ z_a \pm z_b \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Bemerkung. Die Vektorsubtraktion ist eine Vektoraddition mit dem entgegengesetzten Vektor.

Der Vektor $\vec{0} = \binom{0}{0}$ heißt der **Nullvektor**, welcher für die Rechenregeln der Vektoraddition eine gewisse Rolle spielt. In Abbildung 3.2 ist die Vektoraddition für Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ in der Ebene illustriert.

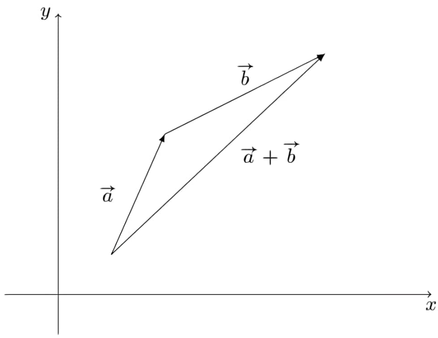


Abbildung 3.2: Die Vektoraddition grafisch veranschaulicht.

Rechenregeln. Es gilt für Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{0}$ aus $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \qquad \text{Kommutativgesetz der Vektoraddition} \tag{3.6}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \qquad \text{Assoziativgesetz der Vektoraddition} \tag{3.7}$$

$$\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c}) \tag{3.8}$$

$$\vec{a}\pm\vec{0}=\vec{a} \tag{3.9}$$

Die Vektoraddition kann nun auch hinsichtlich des Betrages untersucht werden und so erhält man eine fundamentale Ungleichung, welche auch über die Vektorrechnung hinaus von entscheidender Bedeutung ist. Eine grafische Veranschaulichung kann einfach in Abbildung 3.2 nachvollzogen werden, wenn die Beträge der dargestellten Vektoren betrachtet werden.

Dreiecksungleichung. Es gilt für die Vektoraddition die sogenannte *Dreiecksungleichung*

$$|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|. \tag{3.10}$$

Auch für die Vektorsubtraktion gilt eine analoge Ungleichung

$$|\vec{a}-\vec{b}|\geq|\vec{a}|-|\vec{b}|. \tag{3.11}$$

Beispiel 3.1. Zur Illustration der bisher besprochenen Begriffe, seien die Vektoren

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$ betrachtet. Es gilt

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\vec{b}+\vec{a},$$

sowie für die Beträge

$$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}, \qquad |\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}.$$

Darüber hinaus berechnet sich

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

und illustriert damit die Gültigkeit der Dreiecksungleichung

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5} \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| = \sqrt{10} + \sqrt{5}.$$

Nach der Betrachtung von Betrag und Addition von Vektoren wird die Multiplikation eines Vektors mit einer (reellen) Zahl betrachtet. In diesem Zusammenhang werden die Zahlen als **Skalare**[1] bezeichnet.

Sei $s \in \mathbb{R}$ ein Skalar.

(a) Die **Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar** ist für $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ definiert als

$$s\,\vec{v} = s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\,v_1 \\ s\,v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1\,s \\ v_2\,s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} s = \vec{v}\,s. \tag{3.12}$$

(b) Analog ist für $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ definiert

$$s\,\vec{v} = s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\,v_1 \\ s\,v_2 \\ s\,v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1\,s \\ v_2\,s \\ v_3\,s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} s = \vec{v}\,s. \tag{3.13}$$

(c) **Parallelitätskriterium**: Zwei Vektoren heißen *genau dann* zueinander **parallel**, wenn ein Vektor $\vec{a}$ ein skalares Vielfaches s des anderen Vektors $\vec{b}$ ist, also

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = s\,\vec{a}. \tag{3.14}$$

Die Multiplikation eines Vektors aus $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ mit einem Skalar erfüllt ebenfalls einige Rechneregeln, die im Folgenden zusammengefasst sind.

Rechenregeln. Seien $s, t \in \mathbb{R}$ und $\vec{a}, \vec{b}$ aus $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Es gilt:

$$\text{Kommutativität:}\quad s\,\vec{a} = \vec{a}\,s \tag{3.15}$$

$$\text{Assoziativität:}\quad s\,(t\,\vec{a}) = (s\,t)\,\vec{a} \tag{3.16}$$

$$\text{Erste Distributivität:}\quad (s+t)\,\vec{a} = s\,\vec{a} + t\,\vec{a} \tag{3.17}$$

$$\text{Zweite Distributivität:}\quad s\,(\vec{a} + \vec{b}) = s\,\vec{a} + s\,\vec{b} \tag{3.18}$$

$$\text{Homogenität:}\quad |s\,\vec{a}| = |s|\,|\vec{a}| \tag{3.19}$$

Geometrisch erlaubt die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar die folgende Interpretation:

(a) Für $s > 0$ gilt , dass $s\,\vec{a}$ und $\vec{a}$ *parallel und gleich orientiert* sind,

(b) für $s < 0$ gilt, dass $s\,\vec{a}$ und $\vec{a}$ *parallel und entgegengesetzt orientiert* sind. Dies wird als **antiparallel** bezeichnet.

Mit den bisher kennengelernten Methoden kann ein spezieller Vektor konstruiert werden, der eine Eigenschaft aufweist, welche im folgenden Abschnitt von Interesse sein wird.

Der Vektor $\vec{a_0}$, der zum ursprünglichen Vektor $\vec{a}$ parallel ist und die Länge 1 besitzt, heißt **Einheitsvektor**. Er berechnet sich zu

$$\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|}\,\vec{a}. \tag{3.20}$$

[1] Ein Skalar beschreibt eine mathematische Größe, die allein durch die Angabe eines Zahlenwertes charakterisiert wird.

Beweis. Der Nachweis erfolgt mit Hilfe der Rechenregel der Homogenität (3.19), wobei für $s = \frac{1}{|\vec{a}|}$ gilt und demnach

$$|\vec{a_0}| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \right| |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = 1.$$

□

Abschließend werden die zuletzt eingeführten Operationen und Begriffe noch mit einem Beispiel deutlich gemacht.

Beispiel 3.2. Es werden zwei Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ betrachtet, welche gegeben sind als

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt die Rechnung

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und wegen

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

berechnet sich der Einheitsvektor zu $\vec{a}$ zu

$$\vec{a_0} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3.2 Vektorprodukte, Winkelmaß und Projektion

Die Vektorrechnung hat die Besonderheit, dass mehr als nur ein Produkt definiert wird. Die Multiplikation mit einem Skalar aus dem letzten Abschnitt zählt hier zu den elementaren Rechenoperationen, während die folgenden Produkte für höhere Aufgaben herangezogen werden können. Dieser Abschnitt widmet sich den Produkten von Vektoren und den damit verbundenen Aufgaben in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.

Das **Skalarprodukt**, **skalare Produkt** oder **innere Produkt** zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ ist definiert wie folgt:

(a) Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2. \tag{3.21}$$

(b) Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3. \tag{3.22}$$

Orthogonalitätskriterium. Zwei Vektoren sind *genau dann* zueinander **orthogonal**, wenn ihr Skalarprodukt gleich Null ist, also

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \bullet \vec{b} = 0. \tag{3.23}$$

An die Definition des Skalarprodukts anschließend, wie schon in den Abschnitten zuvor, werden Rechenregeln und Eigenschaften des Skalarprodukts angegeben.

Rechenregeln und Eigenschaften. Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ drei Vektoren und $v \in \mathbb{R}$.

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a} \qquad \text{Symmetrie} \tag{3.24}$$

$$v\,(\vec{a} \bullet \vec{b}) = (v\,\vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (v\,\vec{b}) \qquad \text{Homogenität} \tag{3.25}$$

$$\vec{a} \bullet (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} \pm \vec{a} \bullet \vec{c} \qquad \text{Distributivität} \tag{3.26}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}|^2 \tag{3.27}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{0} = 0 \tag{3.28}$$

Das Orthogonalitätskriterium stellt sich im $\mathbb{R}^2$ als besonders heraus. Angenommen ein Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ ist bekannt und gegeben als

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Nun wird ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ gesucht, der orthogonal zu $\vec{a}$ steht, also $\vec{a} \perp \vec{v}$, und demnach gilt

$$\vec{a} \bullet \vec{v} = 0.$$

Damit folgt

$$0 = \vec{a} \bullet \vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = a_1 v_1 + a_2 v_2.$$

Wählt man nun $v_1 = a_2$ und $v_2 = -a_1$ oder $v_1 = -a_2$ und $v_2 = a_1$, dann ist die Gleichung erfüllt. Aus diesem Umstand folgen die sogenannten

Kipp–Regeln im $\mathbb{R}^2$.
Links–Kipp–Regel. Der im $\mathbb{R}^2$ geometrisch um $\frac{\pi}{2}$ nach links, d.h. mathematisch positiv gedrehte, gekippte Vektor zum Vektor $\vec{a} = \binom{x_a}{y_a}$ ist gegeben durch

$$\vec{a_l} = \begin{pmatrix} -y_a \\ x_a \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

Rechts–Kipp–Regel. Der im $\mathbb{R}^2$ geometrisch um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts, d.h. mathematisch negativ gedrehte, gekippte Vektor zum Vektor $\vec{a} = \binom{x_a}{y_a}$ ist gegeben durch

$$\vec{a_r} = \begin{pmatrix} y_a \\ -x_a \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

Bemerkung. Die Kipp–Regeln sind ausschließlich im $\mathbb{R}^2$ gültig und geben Vektoren an, die in die beiden einzig möglichen orthogonalen Richtungen weisen. Zusätzlich sind die gekippten Vektoren von gleicher Länge wie der Ausgangsvektor, was den Umstand erklärt, warum es nur zwei gibt. Wenn diese Einschränkung aufgegeben wird, dann gibt es natürlich unendlich viele orthogonale Vektoren, wobei all diese parallel zu den beiden der Kipp-Regeln sind.

Die Orthogonalität, welche geometrisch einen Winkel von $\frac{\pi}{2}$ ausdrückt, lässt die Frage nach anderen Winkelwerte zwischen Vektoren aufkommen. Dies wird beantwortet durch das sogenannte **Winkelmaß.**

Der **Winkel** $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert durch die Gleichung des Winkelmaßes

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \vec{a_0} \bullet \vec{b_0}. \tag{3.31}$$

Bemerkung. Elementargeometrisch kann die Formel des Winkelmaßes mit Hilfe des Cosinussatzes hergeleitet werden.

Orthogonale Projektion eines Vektors. Die Bedeutung der orthogonalen Projektion wird in Abbildung 3.3 veranschaulicht. Ein Vektor definiert die Richtung der Projektion, der zweite Vektor gibt den Betrag der Länge der Projektion.

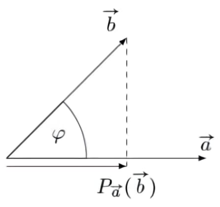


Abbildung 3.3: Projektion eines Vektors

Seien $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ und $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$. Die **orientierte Länge** ist definiert durch

$$b_a = |\vec{b}| \cos\varphi = \vec{b} \bullet \vec{a_0} \tag{3.32}$$

und die **orthogonale Projektion** $P_{\vec{a}}(\vec{b})$ ist gegeben als

$$P_{\vec{a}}(\vec{b}) = b_a \vec{a_0} = (\vec{b} \bullet \vec{a_0})\, \vec{a_0}. \tag{3.33}$$

Die Notation $P_{\vec{a}}(\vec{b})$ gibt an, dass die Richtung der Projektion durch den Vektor $\vec{a}$ im Index von P angegeben wird und der Vektor $\vec{b}$ im Argument von P wird projiziert, vgl. Abbildung 3.3.

Bemerkung. Folgende Umstände seinen angemerkt:

(a) Wird der Vektor $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$ projiziert so gilt

$$\left(\vec{b} - P_{\vec{a}}(\vec{b})\right) \perp \vec{a},$$

wie Abbildung 3.3 anschaulich darstellt.

(b) Das Vorzeichen der orientierten Länge gibt hierbei an, ob die Projektion in Richtung $\vec{a}$ oder antiparallel zu $\vec{a}$ steht.

(c) Es gilt weiters

$$\left|P_{\vec{a}}(\vec{b})\right| = |b_a|.$$

Hierbei ist bemerkenswert, dass in der Gleichung der Betrag von Vektoren links und der von reellen Zahlen rechts auftritt.

Die Definition der Orthogonalität ist für den $\mathbb{R}^2$ und den $\mathbb{R}^3$ identisch, doch zeichnet sich der $\mathbb{R}^2$ durch die Kipp-Regeln im Besonderen aus. Im $\mathbb{R}^3$ ist dieser Sachverhalt etwas schwieriger, es gibt hierfür keine analogen Regeln. Dafür wird im $\mathbb{R}^3$ ein weiteres Produkt definiert, welches unter anderem für diesen Zweck herangezogen werden kann.

Das **Vektorprodukt**, **vektorielle Produkt**, **äußere Produkt** oder auch **Kreuzprodukt** zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ist ein Vektor $\vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}, \vec{b}$

(b) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist die Fläche des aufgespannten Parallelogramms zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$

(c) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ bildet ein sogenanntes *Rechtssystem*, wenn $\vec{a}, \vec{b}$ nicht parallel sind

Das **vektorielle Produkt** von $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ berechnet sich zu

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_a & y_b \\ z_a & z_b \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_a & x_b \\ z_a & z_b \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} \end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

wobei die dabei auftretende 2×2 **Determinante** definiert ist durch

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc. \tag{3.35}$$

Beispiel 3.3. Für die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

berechnet sich das Kreuzprodukt wegen

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

zu

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\vec{a} \bullet \vec{c} = 0$ und $\vec{b} \bullet \vec{c} = 0$, so wie die Definition fordert.

Rechenregeln und Eigenschaften. Für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ sowie $v, w \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

(b) $\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0}$

(c) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

(d) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\varphi)$

(e) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

(f) $\vec{a} \times (\vec{b} \pm \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \pm (\vec{a} \times \vec{c})$

(g) $v(\vec{a} \times \vec{b}) = (v\,\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (v\,\vec{b})$

(h) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{b} + v\,\vec{a}) = (\vec{a} + w\,\vec{b}) \times \vec{b}$

Die Bedeutung der Rechenregeln und Eigenschaften verdeutlicht das folgende

Beispiel 3.4. Es soll das Kreuzprodukt der beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Da die Berechnung des Kreuzprodukts aufwändig ist, lohnt es sich auch für die Rechnung über die Rechenregeln und Eigenschaften nachzudenken und man erhält damit

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (-2\,\vec{a}) = -2\,\vec{a} \times \vec{a} = 0.$$

Natürlich gilt auch

$$\vec{b} \times \vec{a} = (-2\,\vec{a}) \times \vec{a} = -2\,\vec{a} \times \vec{a} = 0,$$

was der Definition Rechnung trägt, da der Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms von parallelen Vektoren Null ist.

3.3 Analytische Geometrie

Unter analytischer Geometrie versteht man, dass elementare geometrische Aufgaben nicht konstruktiv bearbeitet werden, sondern mathematisch berechnet werden. Dazu muss eine mathematische Beschreibung der Geometrie gefunden werden. Traditionell werden hier zunächst Punkte im kartesischen Koordinatensystem betrachtet, was im Folgenden im $\mathbb{R}^2$ durchgeführt wird.

Ausgehend von einem Punkt $P = (x_P, y_P)$ ist ein **Ortspfeil** $\overrightarrow{\mathcal{O}P}$ ist die Beschreibung des Punktes bezüglich des Ursprung $\mathcal{O}$ zum Punkt P. Ein **Pfeil** $\overrightarrow{AE}$ zwischen den Punkten $A = (x_A, y_A)$ und $E = (x_E, y_E)$ ist definiert durch

$$\overrightarrow{\mathcal{O}E} = \overrightarrow{\mathcal{O}A} + \overrightarrow{AE} \tag{3.36}$$

und besitzt die Koordinatisierung $\overrightarrow{AE} = \left(\begin{smallmatrix} x_{AE} \\ y_{AE} \end{smallmatrix}\right)$ gemäß

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{\mathcal{O}E} - \overrightarrow{\mathcal{O}A}. \tag{3.37}$$

Gleichung (3.36) wird als *Spitze minus Schaft* Regel bezeichnet und Gleichung (3.37) die *APPEnd*-Regel (engl. anhängen und als Merkregel **A**nfangspunkt **P**lus **P**feil = **E**ndpunkt).

Bemerkung. Der Pfeil $\overrightarrow{\mathcal{O}P}$ und der Punkt P haben aufgrund der Koordinatisierung von Pfeilen offensichtlich dieselbe Koordinatisierung.

Mit dieser Definition der Pfeile kann die Überlegung angestellt werden, dass zu verschiedenen Paaren von Punkten gleiche Koordinatisierungen von Pfeilen erhalten wird. In Abbildung 3.4 wird dieser Umstand illustriert, zu sehen sind zwei unterschiedliche Pfeile, welche die gleiche Koordinaten aufweisen, also $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ gilt.

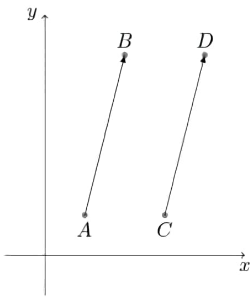


Abbildung 3.4: Unterschiedliche Pfeile, welche gleiche Koordinatisierung aufweisen.

Basierend auf dieser Überlegung kann man Pfeile mit gleicher Koordinatisierung und Vektoren gleich setzen. Ein Vektor kann also zu den geometrischen Pfeilen wie folgt in Verbindung gesetzt werden.

Die Menge aller Pfeile mit gleicher Koordinatisierung, werden durch einen **Vektor** dargestellt.

Durch diese Beziehung zwischen Pfeilen und Vektoren können einige Begriffe aus der Vektorrechnung in die analytische Geometrie übertragen und auf geometrische Fragestellungen angewandt werden. So ist etwa die **Länge eines Pfeiles**, welche der geometrischen Distanz zwischen dem Anfangs– und dem Endpunkt entspricht, gegeben durch

$$\left|\overrightarrow{AE}\right| = \sqrt{x_{AE}^2 + y_{AE}^2} = d(A, E) \tag{3.38}$$

Bemerkung. Einige Anmerkungen zu Pfeilen und Vektoren:

(a) Verschiedene Pfeile können die selbe Koordinatisierung besitzen, dies erlaubt die Einbeziehung von Vektoren in der analytischen Geometrie. Umgekehrt ist aber durch eine Koordinatisierung nicht nur ein einziger Pfeil, sondern eine ganze Menge von Pfeilen festgelegt. Damit wird durch Vektoren die Parallelverschiebung der Geometrie abgebildet.

(b) Es ist für die Distanz neben der Schreibweise $d(A, E)$ auch die Länge $\overline{AE}$ für die Strecke zwischen A und E gebräuchlich.

(c) Der oftmals grafisch dargestellte Vektors ist im Grunde ein Pfeil und dient in Illustrationen als Repräsentant für einen Vektor.

Im Lichte der bisherigen Überlegungn kann auch der Vektoraddition eine geometrische Bedeutung beigemessen werden. Die **Vektoraddition** kann als *geometrische Addition* der zugehörigen Pfeile interpretiert werden. Damit gilt

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \tag{3.39}$$

was als *Parallelogrammregel* bezeichnet wird, da der Summenvektor $\overrightarrow{AC}$ die Diagonale eines gedachten Parallelogramms darstellt, siehe Abbildung 3.5. Die Verträglichkeit der Definition der Vektoraddition mit der geometrischen Definition kann durch

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{\mathcal{O}C} - \overrightarrow{\mathcal{O}A} \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{\mathcal{O}B} - \overrightarrow{\mathcal{O}A} + \overrightarrow{\mathcal{O}C} - \overrightarrow{\mathcal{O}B} = \overrightarrow{\mathcal{O}C} - \overrightarrow{\mathcal{O}A} \end{aligned}$$

nachgewiesen werden.

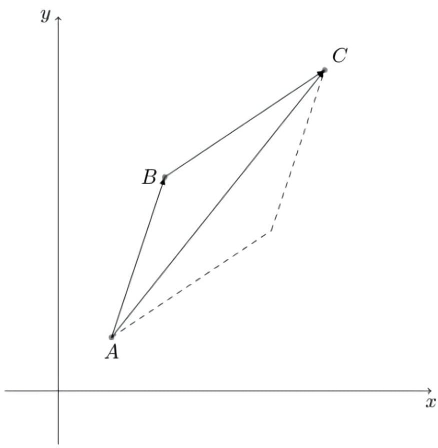


Abbildung 3.5: Die Vektoraddition als geometrische Addition von Pfeilen veranschaulicht.

Ein weiteres Thema im Zusammenhang mit der Vektorrechnung, sowie der analytische Geometrie, ist die analytische Darstellung von Geraden im $\mathbb{R}^2$ sowie $\mathbb{R}^3$ und Ebenen im $\mathbb{R}^3$. Eingangs wird die Darstellung einer Geraden diskutiert.

(a) Die **Parameterdarstellung einer Geraden** g lautet

$$\boxed{g : X = A + t\,\overrightarrow{AB}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.} \tag{3.40}$$

Es sind dabei A, B feste vorgegebene Punkte auf der Geraden g, $\overrightarrow{AB}$ berechnet sich als der Richtungsvektor der Geraden g, X ist ein beliebiger Punkt auf g und $t \in \mathbb{R}$ der Parameter.

(b) Die **Punkt–Richtungsform einer Parameterdarstellung** einer Geraden g lautet

$$\boxed{g : X = A + t\,\vec{g}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.} \tag{3.41}$$

Hier ist ebenfalls A der feste Punkt auf der Geraden g, $\vec{g}$ ist der vorgegebene Richtungsvektor der Geraden g, X ein variable Punkt auf g und $t \in \mathbb{R}$ der Parameter.

Bemerkung. Aus der Paramterdarstellung einer Geraden, erhält man auf einfache Weise auch die **Parameterdarstellung einer Strecke** vom Punkt A zum Punkt B, welche gegeben ist durch

$$X = A + t\,\overrightarrow{AB}, \qquad t \in [0,1]\,. \tag{3.42}$$

Jedem Punkt $X \in \overline{AB}$ ist genau ein Parameterwert $t \in [0,1]$ zugeordnet. Insbesondere erhält man für $t = \frac{1}{2}$ den **Halbierungspunkt**, oder **Mittelpunkt** M der Strecke $\overline{AB}$, welcher sich berechnet zu

$$M = \frac{1}{2}\,(A + B)\,.$$

Eine Visualisierung der Parameterdarstellung einer Strecke zwischen zwei Punkten, sowie einer Geraden durch zwei Punkten ist in Abbildung 3.6 zu sehen.

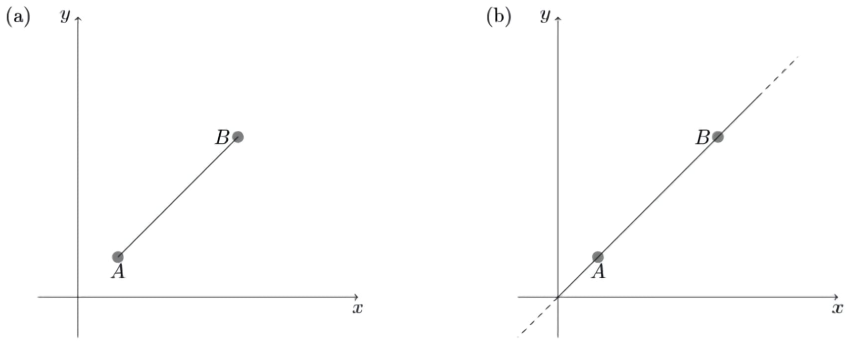


Abbildung 3.6: Parameterdarstellung (a) einer Strecke und (b) einer Geraden.

Hessesche Abstandsformel. Der Abstand zwischen einem Punkt P und der Geraden $g\colon X = A + t\,\vec{g}$ berechnet sich mit Hilfe eines auf g orthogonalen Vektors $\vec{n}$ und unter Zuhilfenahme der orthogonalen Projektion zu

$$\boxed{d(P,g) = \left|\overrightarrow{AP} \bullet \vec{n_0}\right|,} \qquad A \in g,\ \vec{n_0} \perp g. \tag{3.43}$$

Bemerkung. Der Abstand $d(P,g)$ aus (3.43) wird als **Normalabstand** bezeichnet, der Vektor $\vec{n}$ als **Normalvektor**.

Unterschiedliche Formen von Geradengleichungen. Die Gerade im $\mathbb{R}^2$ trat bereits in Kapitel 2.2 auf. Die oben angegebene Parameterdarstellung wirft nun die Frage auf, wie diese Darstellungen in Beziehung zueinander stehen. Hierzu wird eine weitere Darstellung eingeführt und dann der Zusammenhang hergestellt.

Die **Normalvektorform einer Geradengleichung** ist gegeben durch

$$g : \vec{n} \bullet X = c, \qquad c \in \mathbb{R}. \tag{3.44}$$

Dabei bezeichnet $\vec{n}$ einen Normalvektor von g und X den laufenden Punkt auf der Geraden g.

Die verschiedenen Darstellungsformen einer Geraden im $\mathbb{R}^2$ lauten zusammengefasst wie folgt:

Parameterdarstellung	$X = A + t\,\vec{a}$
Allgemeine Geradengleichung	$ax + by = c$
Hauptform	$y = kx + d$
Normalvektorform	$\vec{n} \bullet X = \vec{n} \bullet A = c$

Die Umrechnung erfolgt durch zwei fundamentale Zusammenhänge, welche es in der Folge erlauben, die Geadendarstellungen im $\mathbb{R}^2$ in Beziehung zu setzen.

Normalvektorsatz. Die Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ der allgemeinen Geradengleichung $ax + by = c$ sind die Koordinaten eines zugehörigen Normalvektors $\vec{n}$.
Steigungs-Richtungs-Regel. Zwischen der Steigung k der Hauptform $y = kx + d$ einer Geraden g und dem Richtungsvektor $\vec{a}$ der Parameterdarstellung $X = A + t\,\vec{a}$ der Geraden g besteht der Zusammenhang

$$\vec{g} = v \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{3.45}$$

Der Nachweis des Normalvektorsatzes ist relativ einfach, denn für $X = (x, y)^T$ gilt

$$\vec{n} \bullet X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by.$$

Die Steigungs-Richtungs-Regel geht aus der geometrischen Definition der Steigung und eines Pfeiles hervor. Zur Illustration das folgende

Beispiel 3.5 (Umrechnung von Geradendarstellungen).

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad 3x + 4y = 11, \qquad y = -\frac{3}{4}\,x + \frac{11}{4}, \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet X = 11$$

Der Richtungsvektor der Parameterdarstellung ergibt gekippt den Normalvektor und die Rechnung

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

zeigt die Anwendung der Steigungs-Richtungs-Regel und führt mit dem Punkt $A = (1, 2)$ zur Hauptform.

Im $\mathbb{R}^3$ ist der Sachverhalt grundsätzlich anders. Es kann für eine Gerade kein Normalvektor definiert werden und damit entfällt die Normalvektorform dort komplett. Es wird nur die Paramterdarstellung für Geraden im $\mathbb{R}^3$ herangezogen.

Lagebeziehungen zweier Geraden. Im $\mathbb{R}^2$ gibt es drei verschiedene Möglichkeiten der Lage zweier Geraden zueinander. Sie können *ident* sein, *parallel* oder *schneidend* liegen.

Seien $g : X = G + t\,\vec{g}$ und $h : X = H + s\,\vec{h}$ die zu untersuchenden Geraden für $s, t \in \mathbb{R}$. Es lassen sich die folgenden Kriterien bezüglich der Lage der Geraden zueinander formulieren.

$$g \text{ und } h \text{ sind } \textbf{ident:} \qquad g \cap h = g = h, \quad G \in h, \quad H \in g, \quad \exists v \in \mathbb{R} : \vec{g} = v\,\vec{h} \tag{3.46}$$

$$g \text{ und } h \text{ sind } \textbf{parallel:} \qquad g \cap h = \emptyset, \quad G \notin h, \quad H \notin g, \quad \exists v \in \mathbb{R} : \vec{g} = v\,\vec{h} \tag{3.47}$$

$$g \text{ und } h \text{ sind } \textbf{schneidend:} \qquad g \cap h = \{S\}, \quad \forall v \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : \vec{g} \neq v\,\vec{h} \tag{3.48}$$

Im Fall schneidender Geraden g und h wird der **Schnittwinkel** zwischen den Geraden im **Schnittpunkt** S als $\sphericalangle(g, h) := \sphericalangle(\vec{g}, \vec{h})$ definiert.

Im $\mathbb{R}^3$ ist es, im Unterschied zum $\mathbb{R}^2$, möglich, dass zwei nicht idente, nicht parallele Geraden g_1, g_2 aneinander vorbeilaufen ohne einander zu schneiden, $g_1 \cap g_2 = \emptyset$. Dieser Fall wird als **windschief** bezeichnet. Tritt dieser Fall nicht ein, so sind die Geraden ident, parallel oder schneiden einander im Schnittpunkt S, $g_1 \cap g_2 = \{S\}$.

Beispiel 3.6. Betrachtet werden die Gerade g_1 und die Gerade g_2, gegeben durch

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der speziellen Struktur der Angabe kann abgelesen werden, dass die beiden Geraden g_1 und g_2 einander im Punkt $S = (1, 4, 3)$ schneiden.

Parameterdarstellung einer Ebene. Durch Angabe von drei nicht **kollinearen**[2] Punkten ist nicht nur ein Dreieck, sondern auch dessen Trägerebene ε festgelegt. Zur Definition kann natürlich ach ein fester Punkt und die zugehörigen Richtungsvektoren herangezogen werden.

Die **Parameterdarstellung einer Ebene**, aufgespannt von zwei nicht parallelen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und einem festen Punkt A ist gegeben durch

$$\varepsilon : X = A + s\,\vec{a} + t\,\vec{b}, \qquad s, t \in \mathbb{R}, \tag{3.49}$$

jene, aufgespannt durch die nicht kollinearen Punkte A, B, C, ist gegeben durch

$$\varepsilon : X = A + s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AC}, \qquad s, t \in \mathbb{R}\,. \tag{3.50}$$

Es ist dabei X ein beliebiger Punkt der Ebene und für $s, t \in [0, 1]$ werden alle Punkte des Dreiecks ABC erfasst.

Für die Ebenen im $\mathbb{R}^3$ gilt ein ähnlicher Zusammenhang, wie für Geraden im $\mathbb{R}^2$. Es ist möglich eine Normalvektorform anzugeben, da es möglich ist orthogonale Vektoren einer definierten Richtung auf eine Ebene anzugeben.

Die **Normalvektorform einer Ebene** ist durch

$$\varepsilon : \vec{n} \bullet X = \vec{n} \bullet A \tag{3.51}$$

gegeben. X bezeichnet dabei den laufenden Punkt, A einen festen, beliebigen Punkt der Ebene und $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ einen Normalvektor der Ebene ε.

[2] *Kollineare Punkte* sind Punkte, die auf einer Geraden liegen.

Es ist hier schnell einzusehen, dass für die Normalvektorform in Koordinaten wieder auf eine lineare Gleichung führt, die sogenannte allgemeine Gleichung einer Ebene.

Eine Gleichung der Form

$$ax + by + cz = d \tag{3.52}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ heißt eine **lineare Gleichung in drei Variablen**. Im Fall $d = 0$ heißt die Gleichung **homogen**, im Fall $d \neq 0$ heißt sie **inhomogen**.

Bemerkung. Es gilt:

(a) Jede Ebene kann, bis auf multiplikative Konstanten, eindeutig durch eine lineare Gleichung in drei Variablen festgelegt werden. Ebenso gilt die Umkehrung.

(b) Das sogenannte **Spurdreieck** gibt die Lage einer Ebene an, die durch eine inhomogene lineare Gleichung in drei Variablen beschrieben wird. Es werden dazu die Punkte der Ebene ermittelt, welche auf den Koordinatenachsen liegen. Das durch diese drei Punkte aufgespannte Dreieck ist das Spurdreieck.

3.4 Beispiele aus den Anwendungen

Superposition von Kräften. Als Beispiel für die Anwendung der Vektorrechnung wird der *Lageplan von Kräften* in einer Ebene herangezogen. In Abbildung 3.7 ist dieser zu sehen, so wie der Kräfteplan, welcher die Addition der einzelnen Vektoren zeigt, bis zur resultierenden Kraft F_R.

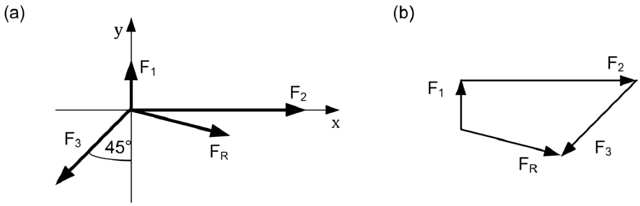


Abbildung 3.7: (a) Lageplan und (b) Kräfteplan von Kraftvektoren.

Die Rechenschritte, welche im Lageplan grafisch korrespondieren, sind wie folgt. Für $|\overrightarrow{F_1}| = F$ und $|\overrightarrow{F_2}| = 3\,F$ sowie $|\overrightarrow{F_3}| = 2\,F$, wobei $F \in \mathbb{R}^+$, sieht der Lösungsweg wie folgt aus.

Für den analytischen Lösungsweg müssen die Vektoren bezüglich des skizzierten Koordinatensystems dargestellt werden. Es gilt

$$\overrightarrow{F_1} = F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{F_2} = 3\,F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und gemäß des Lehrsatzes des Pythagoras wegen des eingeschlossenen Winkels von 45°

$$\overrightarrow{F_3} = -\sqrt{2}\,F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sqrt{2}\,F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der resultierende Kraftvektor $\overrightarrow{F_R}$ ergibt sich als vektorielle Summe der Einzelkraftvektoren zu

$$\overrightarrow{F_R} = \sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{F_i} \approx 1{,}59\,F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0{,}41\,F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 1{,}59 \\ -0{,}41 \end{pmatrix}.$$

Zusätzlich lässt sich daraus der Winkel α_R der resultierenden Kraft bezüglich der x–Achse bestimmen.

$$\tan(\alpha_R) \approx -0{,}261 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_R \approx -14{,}6°$$

Coulomb–Gesetz, elektrische Felder und elektrische Flussdichte. Das Coulomb[3]–Gesetz beschreibt elektrisch geladene Körper, welche aufeinander Kräfte ausüben. Seien Q_1 und Q_2 die elektrischen Ladungen zweier Körper, deren Abstand r zueinander orientiert ist und durch einen Vektor $\vec{r}$ beschrieben wird, wobei $\vec{r_0}$ der zugehörige Einheitsvektor ist und $|\vec{r}| = r$ gilt. Die beiden Körper sind dabei als Punktladungen angenommen, d.h., ihre Abmessungen sind viel kleiner als der Abstand r. Die elektrische Feldkonstante ist festgelegt als $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$, damit ergibt sich die elektrische Kraft $\vec{F}$, welche die beiden Körper aufeinander ausüben, über das **Coulomb–Gesetz** zu

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r_0}.$$

Mit diesem Kraftgesetz kann nun die elektrische Feldstärke eingeführt werden. Man stelle sich den ersten Ladungsträger mit Ladung Q_1 festgehalten vor und messe mit dem zweiten, mit der Ladung Q_2, diesen als Testkörper aus. Wenn die jeweils gemessene Kraft auf die Ladung des Testkörpers bezogen wird, so erhält man die **elektrische Feldstärke** $\vec{E}$ als

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \vec{r_0}.$$

Dies bedeutet, wenn ein Körper mit der Ladung Q in ein elektrisches Feld $\vec{E}$ gebracht wird, so erfährt er dort die Kraft

$$\vec{F} = Q\vec{E}.$$

Für die Definition einer Flussdichte stelle man sich vor, dass in einen Bereich der elektrischen Feldstärke ein Doppelscheibchen, also zwei parallele Scheibchen, mit dem Flächeninhalt A in ein elektrisches Feld eingebracht wird. Auf diesem Doppelscheibchen wird eine Flächenladungsdichte σ influenziert[4], wobei auf dem einen Scheibchen σ, auf dem anderen $-\sigma$ aufgebracht sei, um insgesamt ladungsneutral zu bleiben. Der Flächeninhalt des Doppelscheibchens ist dabei so klein anzunehmen, dass der Quotient $\sigma = \frac{Q}{A}$ unabhängig von A wird, wobei Q die Gesamtladung des Scheibchens bezeichnet. Damit wird die **elektrische Flussdichte** als

$$\vec{D} = \frac{Q}{A} \vec{e}$$

definiert, wobei $\vec{e}$ den Normaleneinheitsvektor auf das Doppelscheibchen bezeichnet. Der Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke $\vec{E}$ und elektrischer Flussdichte $\vec{D}$ im leeren Raum ist durch

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

gegeben.

[3] Charles Augustin de Coulomb (1736 – 1806), französischer Physiker

[4] Influenz beschreibt die Beeinflussung elektrischer Ladungen durch ein elektrisches Feld, influenzieren die Beeinflussung eines elektrisch ungeladenen Körpers durch Annäherung eines geladenen Körpers.

Kapitel 4

Komplexe Zahlen

Dieses Kapitel führt eine weitere Erweiterung der Zahlenmengen ein, die komplexen Zahlen. Gewisse Gleichungen stellen ein Problem hinsichtlich der Lösung in der Menge der reellen Zahlen dar. Eine solche ist die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0.$$

Dies motiviert die Erweiterung der reellen Zahlen zu den sogenannten **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$.

Das Umformen der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ liefert den Ausdruck $x = \pm\sqrt{-1}$. Da $D = \mathbb{R}_0^+$ der Definitionsbereich der Funktion $\sqrt{\cdot}$ ist, existiert der Ausdruck $\sqrt{-1}$ in $\mathbb{R}$ nicht. Setzt man sich formal über diese Tatsache hinweg und bedient sich der formalen Identität $(\sqrt{x})^2 = x$, so erweist sich die folgende Rechnung als richtig

$$(\pm\sqrt{-1})^2 + 1 = 0.$$

Um mathematisch korrekt vorzugehen, definiert man die **imaginäre Einheit** i durch

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Offensichtlich löst $x = \pm\,\mathrm{i}$ die Gleichung $x^2 + 1 = 0$.

4.1 Definition und Rechenregeln

Die **imaginäre Einheit** i ist definiert durch

$$\mathrm{i}^2 = -1, \tag{4.1}$$

eine **komplexe Zahl** $z \in \mathbb{C}$ als

$$z = a + \mathrm{i}\, b, \qquad a, b \in \mathbb{R}\,. \tag{4.2}$$

$a = \operatorname{Re} z$ heißt der **Realteil** und $b = \operatorname{Im} z$ der **Imaginärteil** der komplexen Zahl z.

Bemerkung. In einigen Zusammenhängen, insbesondere in der Elektrotechnik, wird die imaginäre Einheit auch mit j bezeichnet.

Beispiel 4.1. Die Gleichung $x^2 + 4 = 0$ kann über $\mathbb{C}$ gelöst werden. Es gilt

$$x^2 = -4 \quad \text{und damit folgt} \quad x = \pm\,\mathrm{i}\,2.$$

Die Darstellung $z = a + \mathrm{i}\, b$ wird als **kartesische Binomialform** bezeichnet. Zur geometrischen Veranschaulichung einer komplexen Zahl betrachtet man die sogenannte **Gaußsche Zahlenebene**[1], siehe Abbildung 4.1.

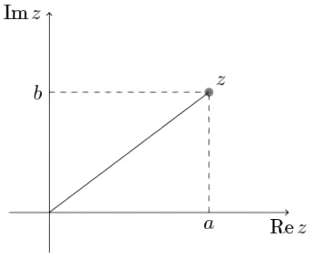


Abbildung 4.1: Gaußschen Zahlenebene zur Darstellung komplexer Zahlen.

Wie schon für die anderen Zahlenmengen müssen auch hier die Grundrechnungsarten definiert werden.

Für $z_1 = a_1 + \mathrm{i}\, b_1$ und $z_2 = a_2 + \mathrm{i}\, b_2 \neq 0$ mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) *Addition* und *Subtraktion*:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + \mathrm{i}\, b_1) \pm (a_2 + \mathrm{i}\, b_2) = (a_1 \pm a_2) + \mathrm{i}(b_1 \pm b_2) \tag{4.3}$$

(b) *Multiplikation*:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + \mathrm{i}\, b_1) \cdot (a_2 + \mathrm{i}\, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathrm{i}(b_1 a_2 + a_1 b_2) \tag{4.4}$$

(c) *Division*:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + \mathrm{i}\, b_1}{a_2 + \mathrm{i}\, b_2} = \frac{a_1 + \mathrm{i}\, b_1}{a_2 + \mathrm{i}\, b_2} \cdot \frac{a_2 - \mathrm{i}\, b_2}{a_2 - \mathrm{i}\, b_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + \mathrm{i}(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \tag{4.5}$$

Beispiel 4.2. Sei $z_1 = -1 + \mathrm{i}\, 3$ und $z_2 = 3 - \mathrm{i}\, 2$.

(a) $z_1 + z_2 = 2 + \mathrm{i}$

(b) $z_1 - z_2 = -1 + \mathrm{i}\, 3 - (3 - \mathrm{i}\, 2) = -4 + \mathrm{i}\, 5$

(c) $z_2 - z_1 = 3 - \mathrm{i}\, 2 - (-1 + \mathrm{i}\, 3) = 4 - \mathrm{i}\, 5$

(d) $z_1 \cdot z_2 = (-1 + \mathrm{i}\, 3) \cdot (3 - \mathrm{i}\, 2) = -3 + \mathrm{i}\, 2 + \mathrm{i}\, 9 - 6\, \mathrm{i}^2 = 3 + \mathrm{i}\, 11$

(e) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+\mathrm{i}\,3}{3-\mathrm{i}\,2} \cdot \frac{3+\mathrm{i}\,2}{3+\mathrm{i}\,2} = \frac{-3-\mathrm{i}\,2+\mathrm{i}\,9+6\,\mathrm{i}^2}{9+4} = \frac{-9+\mathrm{i}\,7}{13} = -\frac{9}{13} + \mathrm{i}\,\frac{7}{13}$

Die Addition und Subtraktion erlauben, ähnlich der Vektorrechnung im $\mathbb{R}^2$, eine geometrische Interpretation. Zum Vergleich zieht man Abbildung 3.5 heran. Es sei aber ausdrücklich darauf hingewiesen, dass hier Zahlen betrachtet werden, die lediglich geometrisch interpretiert werden.

Eine weitere Beobachtung, die man auch geometrisch einsieht, ist, dass es keine Ordnung in der komplexen Zahlenebene gibt. Das Symbol $\leq$ oder $<$, welches aus den reellen Zahlen bekannt ist, verliert in $\mathbb{C}$ seine Bedeutung.

Sei $z = a + \mathrm{i}\, b$. Die Zahl $\overline{z} = a - \mathrm{i}\, b$ heißt die zu z **konjugiert komplexe Zahl**.

[1] Johann Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855), deutscher Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker

Satz von Vieta. Die Lösungsformeln der quadratischen Gleichung und der Satz von Vieta gelten auch für komplexe Lösungen $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.

Nützlich sind auch Faktorisierungen, die in den komplexen Zahlen möglich werden. Die Faktorisierung

$$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$$

ist bekannt, in $\mathbb{C}$ gilt nun aber auch

$$\boxed{a^2 + b^2 = (a + \mathrm{i}\, b) \cdot (a - \mathrm{i}\, b).} \tag{4.6}$$

Satz 4.3. Besitzt eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ eine echt[2] komplexe Lösung x_1, so ist die zweite Lösung die konjugiert komplexe Zahl zur ersten Lösung, also $x_2 = \overline{x_1}$.

4.2 Polardarstellung

Die komplexen Zahlen erlauben neben der Darstellung $z = a + \mathrm{i}\, b$ noch eine weitere Darstellung. Diese wird geometrisch in Abbildung 4.2 motiviert.

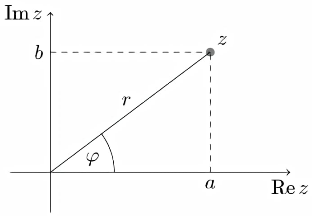


Abbildung 4.2: Zur Polardarstellung komplexer Zahlen.

Die Darstellung

$$z = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi) \tag{4.7}$$

einer komplexen Zahl z heißt **Polardarstellung**, gelegentlich auch mit (r, φ) abgekürzt. Der (geometrische) Abstand r der komplexen Zahl zum Ursprung 0 heißt der **Betrag** $|z|$ und der Winkel φ heißt das **Argument** $\arg z$ der komplexen Zahl z.

Die **Umrechnung zwischen der kartesischen Binomialform** $z = a + \mathrm{i}\, b$ **und der Polardarstellung** $z = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi)$ einer komplexen Zahl z lautet

$$a = r \cdot \cos\varphi, \qquad b = r \cdot \sin\varphi \tag{4.8}$$

und

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \tan\varphi = \frac{b}{a} \tag{4.9}$$

mit $0 \le \varphi < 2\pi$.

[2]Eine *echt* komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ erfüllt $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Beispiel 4.4. Gegeben sei die komplexe Zahl $z = 1 - \mathrm{i}$. Der Betrag berechnet sich zu

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

das Argument zu

$$\tan\varphi = -1 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = -\tfrac{\pi}{4}.$$

Damit lautet die Polardarstellung

$$z = 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos(-\tfrac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{\pi}{4})\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos(\tfrac{\pi}{4}) - \mathrm{i}\sin(\tfrac{\pi}{4})\right).$$

Multiplikation und Division komplexer Zahlen in Polardarstellung. Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_2 \neq 0$, $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi_2)$ gilt:

(a) *Multiplikation*:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \tag{4.10}$$

(b) *Division*:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big) \tag{4.11}$$

Beispiel 4.5. Sei $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ und $z_2 = 1 + \mathrm{i}$. Damit lauten die Polardarstellungen

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos(-\tfrac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{\pi}{4})\right) \quad \text{und} \quad z_2 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{\pi}{4})\right).$$

Damit gilt

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\cos(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{4})\right) = 2.$$

Die Division ergibt

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos(-\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{4})\right) = \cos(-\tfrac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{\pi}{2}) = -\,\mathrm{i}\,.$$

Die Polardarstellung eignet sich besonders, um **Teilmengen der Gaußschen Zahlenebene** kompakt anzugeben. Beispielsweise die Punktmenge komplexer Zahlen, welche im Einheitskreis liegen, kann durch die Zahlenmenge

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

angegeben werden, wenn die Kreislinie nicht enthalten sein soll, oder durch

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\},$$

wenn die Kreislinie selbst enthalten sein soll, letztere wird in Abbildung 4.3 illustriert.

Abschließend in diesem Kapitel wird das Potenzieren und Wurzelziehen von komplexen Zahlen besprochen. Potenzieren wird im folgenden Satz erklärt.

Satz von Moivre. Für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $z = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi)$ gilt:

$$z^n = (r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi))^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(n \cdot \varphi)) \tag{4.12}$$

Diesen Satz zu beweisen ist relativ einfach, denn man muss nur konsequent das Potenzieren auf die Multiplikation komplexer Zahlen zurückführen. Hier sei auf die Mathematik Grundvorlesungen verwiesen.

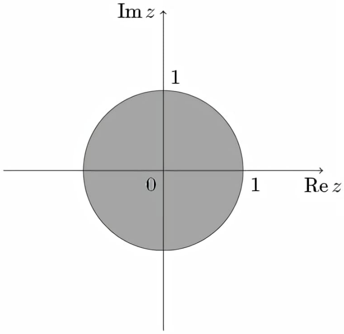


Abbildung 4.3: Die Teilmenge $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ der Gaußschen Zahlenebene.

Bei Wurzeln komplexer Zahlen ist der Sachverhalt schwieriger. Im Reellen hat man schon Schwierigkeiten mit der Eindeutigkeit von Wurzeln beobachtet, es sei an $x^2 - 4 = 0$ erinnert, im Komplexen ist dies noch schwieriger.

Eine komplexe Zahl ζ heißt eine n–**te Wurzel** einer komplexen Zahl z, wenn

$$\zeta^n = z \tag{4.13}$$

erfüllt ist. Mit anderen Worten heißt das $x = \zeta$ eine Lösung der Gleichung $x^n - z = 0$ ist.

Mit dieser Definition ist man in der Lage die n–ten Wurzeln komplexer Zahlen anzugeben.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $z = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi)$.

$$\zeta_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right)\right) \tag{4.14}$$

liefert für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ alle n–ten Wurzeln von z.

Bemerkung. Wegen der Definition einer Wurzel in $\mathbb{C}$ und der Berechnung nach obiger Formel sollte im Komplexen auf das Symbol $\sqrt[n]{z}$ verzichtet werden. Dies ist nicht eindeutig und kann zu Verwirrungen führen, da man versucht sein könnte die bekannten Rechenregeln für Wurzeln anzuwenden.

Beispiel 4.6. In diesem Beispiel sollen die dritten Wurzeln aus der Zahl $z = -8$ berechnet werden. Dazu schreibt man $z = 8 \cdot (\cos\pi + \mathrm{i} \cdot \sin\pi)$. Man erhält

$$\zeta_k = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi + k \cdot 2\pi}{3}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{\pi + k \cdot 2\pi}{3}\right)\right),$$

mit $k = 0, 1, 2$. Das ergibt die Lösungen

$$\begin{aligned}
\zeta_0 &= 2 \cdot \left(\cos\tfrac{\pi}{3} + \mathrm{i} \cdot \sin\tfrac{\pi}{3}\right) = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \\
\zeta_1 &= 2 \cdot (\cos\pi + \mathrm{i} \cdot \sin\pi) = -2, \\
\zeta_2 &= 2 \cdot \left(\cos\tfrac{5\pi}{3} + \mathrm{i} \cdot \sin\tfrac{5\pi}{3}\right) = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Graphisch veranschaulicht liegen diese drei Lösungen auf einem Kreis mit dem Radius 2. Verbindet man diese drei komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene, so ergibt sich ein gleichseitiges Dreieck, siehe Abbildung 4.4.

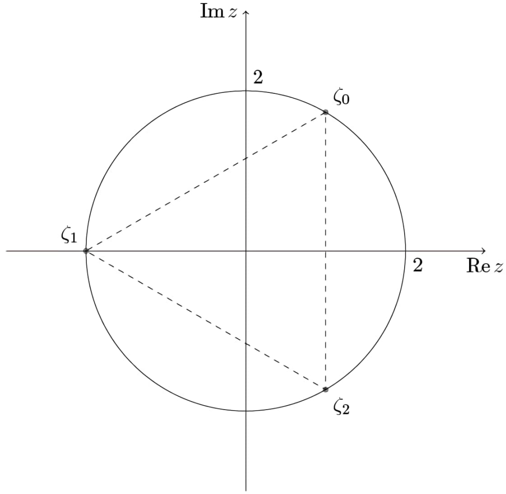


Abbildung 4.4: Darstellung der drei Lösungen aus Beispiel 4.6 in der Gaußschen Zahlenebene.

Bemerkung. Die geometrische Darstellung aller n–ten Wurzeln einer komplexen Zahl z ergibt immer ein regelmäßiges n–Eck. Die Eckpunkte liegen auf einem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{|z|}$.

4.3 Beispiele aus den Anwendungen

Komplexe Wechselstromrechnung. Die Widerstände in der Wechselstromtechnik können nicht wie in der Gleichstromtechnik als reelle Zahlen dargestellt werden, da die Phasenverschiebungen zwischen Strom und Spannung gleicher Frequenz f respektiert werden muss. Dazu werden komplexe Zahlen herangezogen.

Das **ohmsche**[3] **Gesetz** der Gleichstromtechnik für eine elektrische Spannung U und einen elektrischen Strom I behält für ohmsche Widerstände R Gültigkeit

$$U = R \cdot I.$$

Für ideale Kondensatoren mit der Kapazität C wird der Wechselstromwiderstand, die sogenannte Impedanz

$$Z_C = \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega C},$$

mit $\omega = 2\pi f$ definiert. Analog verhält es sich bei einer Spule mit der Induktivität L, deren Impedanz lautet

$$Z_L = \mathrm{i}\,\omega L.$$

Mit diesen Impedanzen gilt das **komplexe ohmsche Gesetz**

$$U = Z \cdot I$$

auch für Wechselstromwiderstände $Z = Z_C$, $Z = Z_L$ oder $Z = R$.

Schaltungstopologien, also serielle oder parallele Schaltungen von Impedanzen, können damit analog wie in der Gleichstromtechnik behandelt werden, mit dem Unterschied, dass die Rechnungen in $\mathbb{C}$ durchzuführen sind.

Schwingungen. In der Physik und Technik treten häufig Schwingungen auf, wie beispielsweise beim Pendel und beim Wechselstrom. All diese Phänomene lassen sich durch harmonische Schwingungen der Form

$$y(t) = A \sin(\omega t)$$

beschreiben. Statt Berechnungen solcher Schwingungen im Zeitbereich durchzuführen, hierfür würde eine Vielzahl an Additionstheoremen benötigt, kann mit der komplexen Rechnung Abhilfe geschaffen werden. Betrachtet man eine komplexe Zahl $\hat{y}$ mit $|\hat{y}| = A$ und $\arg \hat{y} = \omega t$, so kann y dargestellt werden als

$$y(t) = \operatorname{Im} \hat{y}.$$

$\hat{y}$ hat die Gestalt

$$\hat{y}(t) = A\left(\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)\right).$$

Zu jedem Zeitpunkt t korrespondiert die harmonische Schwingung y mit der komplexen Zahl $\hat{y}$.

[3] Georg Simon Ohm (1789–1854), deutscher Physiker

Kapitel 5

Differentialrechnung

5.1 Das Tangentenproblem

Der Begriff der Tangente tritt erstmals bei der Betrachtung eines Kreises auf. Dort versteht man unter einer **Tangente eines Kreises** jene Gerade, die mit dem Kreis genau einen Punkt, den Berührpunkt, gemeinsam hat.

Diese Idee soll im Folgenden auf den Graphen jeder beliebigen Funktion f erweitert werden. Ausgangspunkt dabei ist die **Sekante** an eine Kurve, siehe Abbildung 5.1.

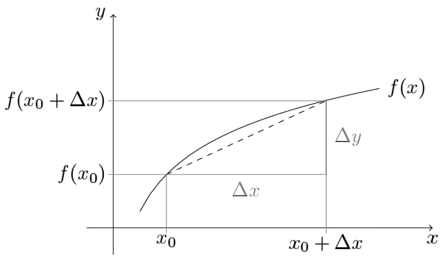


Abbildung 5.1: Steigung einer Sekante an die Funktion f.

Die **Steigung der Sekante**, gemäß Abbildung 5.1, berechnet sich zu

$$\boxed{k_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.} \tag{5.1}$$

Dieser Quotient wird als **Differenzenquotient** bezeichnet.

Von der Steigung der Sekante in den Punkten $\big(x_0, f(x_0)\big)$ und $\big(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)\big)$ soll nun zur Steigung der Tangente im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ übergegangen werden. Dies gelingt mit dem Grenzübergang $\Delta x \to 0$.

Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Als **Tangente** an den Graphen von f im Punkt $P = \big(x_0, f(x_0)\big)$ bezeichnet man jene Gerade durch den Punkt P mit der **Tangentensteigung**

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{5.2}$$

Die Steigung im Punkt P wird mit $f'(x_0)$ oder $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ bezeichnet und **erste Ableitung** der Funktion f an der Stelle x_0 genannt, der Quotient heißt **Differentialquotient**.

Bemerkung. Durch die Definition der Tangente bzw. der Ableitung ist sichergestellt, dass in P höchstens eine Tangente existiert, jedoch nicht, ob überhaupt eine existiert. Als Beispiel hierfür sei die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ aus Abschnitt 2.9 genannt.

Beispiel 5.1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben durch $f(x) = 2x^2$. Ziel ist es die Ableitung an $x_0 = 1$ zu bestimmen. Dazu bestimmt man in einem ersten Schritt den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \frac{2(x_0 + \Delta x)^2 - 2x_0^2}{\Delta x} = \frac{2(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) - 2x_0^2}{\Delta x} = \frac{4x_0\Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{(4x_0 + 2\Delta x)\cdot \Delta x}{\Delta x} = 4x_0 + 2\Delta x.\end{aligned}$$

Der Differentialquotient ergibt sich damit zu

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 4x_0 + 2\Delta x = 4x_0,$$

und eingesetzt für $x_0 = 1$ erhält man $f'(x_0) = f'(1) = 4$.

Differenzierbarkeit. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, mit einem offenen Intervall D. Existiert an einer Stelle $x_0 \in D$ der Differentialquotient, so heißt f **differenzierbar** an x_0. Ist f an allen Stellen $x_0 \in D$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar auf D. Die Funktion $f'\colon D \to \mathbb{R},\ y = f'(x)$ nennt man die **Ableitungsfunktion** von f. In diesem Zusammenhang heißt die Funktion f die **Stammfunktion** von f'.

Bemerkung. Hierbei sei angemerkt, dass die Ableitungsfunktion f' eventuell auch nur auf einer Untermenge $D' \subset D$ existieren kann.

Im Folgenden werden die Ableitungen der elementaren Funktionen untersucht. Auf die Herleitung aller Ableitungen wird verzichtet, es wird nur eine Tabelle der wichtigsten Ableitungen angegeben, siehe Tabelle 5.1.

Die Ableitungsfunktion f' kann, sofern sie selbst wieder differenzierbar ist, differenziert werden. Das führt auf die Definition höherer Ableitungen.

Höhere Ableitungen. Ist f' differenzierbar auf D, so heißt $f'' = (f')'$ die **zweite Ableitung** von f auf D. Ist $f^{(n-1)}$ auf D differenzierbar, so heißt $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ die n–**te Ableitung** von f auf D, für $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 5.2. Die höheren Ableitungen der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin x$ lauten wie folgt.

$$\begin{array}{llll} f'(x) = \cos x & f''(x) = -\sin x & f'''(x) = -\cos x & f^{(4)} = \sin x \\ f^{(5)} = \cos x & f^{(6)} = -\sin x & f^{(7)} = -\cos x & f^{(8)} = \sin x \end{array}$$

Definitionsbereich f	Stammfunktion f	Definitionsbereich f'	Ableitungsfunktion f'
$\mathbb{R}$	x^n mit $n \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$n \cdot x^{n-1}$
$\mathbb{R}$	c mit $c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\tan x$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$
$\mathbb{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\cot x$	$\mathbb{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1-\cot^2 x$
$[-1,1]$	$\arcsin x$	$(-1,1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$[-1,1]$	$\arccos x$	$(-1,1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathbb{R}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathbb{R}^+$	$\ln x$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}^+$	$\log_a x$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}$	a^x mit $a \in \mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a$
$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$
$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$

Tabelle 5.1: Ableitungen der elementaren Funktionen

5.2 Die Ableitungsregeln

Differenzieren von zusammengesetzten und verketteten Funktionen wird mit den sogenannten *Ableitungsregeln* bewerkstelligt. Das Anwenden der jeweiligen Regel für ein Problem ist eine Fertigkeit, die durch viel Übung erlernt werden muss. Im Folgenden werden die einzelnen Regeln mit jeweils einem exemplarischen Beispiel vorgestellt.

Summen– und Differenzenregel. Für alle x, für die sowohl f_1 als auch f_2 differenzierbar ist, ist auch $f = f_1 \pm f_2$ differenzierbar, und es gilt

$$(f_1 \pm f_2)'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x). \tag{5.3}$$

Konstantenregel. Sei f an x eine differenzierbare Funktion.

(a) *Multiplikative Konstanten* $a \in \mathbb{R}$ bleiben beim Differenzieren unverändert erhalten

$$(a \cdot f)'(x) = a \cdot f'(x). \tag{5.4}$$

(b) *Additive Konstanten* $c \in \mathbb{R}$ verschwinden beim Differenzieren

$$(f + c)'(x) = f'(x). \tag{5.5}$$

Beispiel 5.3. Sei $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$. Die Ableitung von f berechnet sich nach der Summen–, Differenzen– und Konstantenregel zu $f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x + 1 = 6x^2 - 6x + 1$.

Produktregel. Für alle x, für die sowohl f_1 als auch f_2 differenzierbar ist, ist auch $f = f_1 \cdot f_2$ differenzierbar, und es gilt

$$(f_1 \cdot f_2)'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x). \tag{5.6}$$

Beispiel 5.4. Sei $f(x) = x \cdot \sin x$. Die Ableitung von f berechnet sich nach der Produktregel zu $f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cdot \cos x$.

Quotientenregel. Für alle x, für die sowohl f_1 als auch f_2 differenzierbar ist, gilt unter der Voraussetzung $f_2(x) \neq 0$, dass auch $f = \frac{f_1}{f_2}$ differenzierbar ist, und es gilt

$$f'(x) = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(x) = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{f_2^2(x)}. \tag{5.7}$$

Beispiel 5.5. Sei $f(x) = \frac{\sin x}{3x^2}$. Die Ableitung von f berechnet sich nach der Quotientenregel zu

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot 3x^2 - \sin x \cdot 3 \cdot 2x}{(3x^2)^2} = \frac{3x^2 \cos x - 6x \sin x}{9x^4}.$$

Kettenregel. Sei die Funktion f_1 an x, die Funktion f_2 an der Stelle $f_1(x)$ differenzierbar. Dann ist die *verkettete* Funktion $f(x) = f_2(f_1(x))$ an der Stelle x differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x). \tag{5.8}$$

Bemerkung (Allgemeine Kettenregel). Die Ableitung einer verketteten Funktion ist, unter entsprechenden Voraussetzungen an die Differenzierbarkeit der beteiligten Funktionen, das Produkt aller Ableitungen, wobei man von *außen nach innen* fortschreitet. Es berechnet sich die Ableitung von n verketteten Funktionen der Form $f(x) = f_n(f_{n-1}(\dots(f_2(f_1(x)))))(x)$ zu

$$f'(x) = f_n'(f_{n-1}(\dots(f_2(f_1(x))))) \cdot f_{n-1}'(\dots(f_2(f_1(x)))) \cdot \ldots \cdot f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x). \tag{5.9}$$

Beispiel 5.6. Einige Beispiele zur einfachen und mehrfachen Kettenregel:

(a) Sei $f(x) = \sin(x^2)$.

$$f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x\cos(x^2)$$

(b) Sei $f(x) = \sin^2 x$.

$$f'(x) = 2\sin x \cos x$$

(c) Sei $f(x) = (1 - 2x^3)^{100}$.

$$f'(x) = 100(1 - 2x^3)^{99}(-2 \cdot 3x^2) = -600x^2(1 - 2x^3)^{99}$$

(d) Sei $f(x) = \ln\big(\sin(\sqrt{x})\big)$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sin(\sqrt{x})} \cos(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cot(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

5.3 Kurvendiskussion

Unter dem Begriff **Kurvendiskussion** versteht man im Wesentlichen die qualitative Beschreibung von Funktionen mit Hilfe der Werkzeuge der Differentialrechnung. In diesem Kapitel werden die notwendigen Werkzeuge aufbereitet und anhand von Beispielen erklärt und dargestellt.

Eigenschaften wie Monotonie, lokales Maximum, lokales Minimum, Krümmungsverhalten, Symmetrie, etc. einer Funktion spiegeln sich in den Ableitungen einer Funktion wider.

Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Ein Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit $x_0 \in D$ heißt **lokales Maximum** oder **Hochpunkt**, wenn es eine Umgebung $U \subset D$ gibt so, dass für alle $x \in U$, $x \neq x_0$ gilt:

$$f(x) < f(x_0) \tag{5.10}$$

(b) Ein Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit $x_0 \in D$ heißt **lokales Minimum** oder **Tiefpunkt**, wenn es eine Umgebung $U \subset D$ gibt so, dass für alle $x \in U$, $x \neq x_0$ gilt:

$$f(x) > f(x_0) \tag{5.11}$$

(c) Lokale Minima und lokale Maxima gemeinsam werden als **lokale Extrema** oder **lokale Extremwerte** bezeichnet.

(d) Existiert ein $x_0 \in D$ so, dass für alle $x \in D$ mit $x \neq x_0$

$$f(x_0) > f(x)$$

gilt, so heißt $(x_0, f(x_0))$ **globales Maximum**.

(e) Existiert ein $x_0 \in D$ so, dass für alle $x \in D$ mit $x \neq x_0$

$$f(x_0) < f(x)$$

gilt, so heißt $(x_0, f(x_0))$ **globales Minimum**.

(f) Globale Minima und globale Maxima gemeinsam werden als **globale Extrema** oder **globale Extremwerte** bezeichnet. Diese müssen nicht mit den lokalen Extrema übereinstimmen.

Bemerkung. Einige Bemerkungen zu Extremwerten und Monotonie:

(a) Ein globaler Extremwert muss nicht mit den lokalen Extremwerten übereinstimmen, da beispielsweise am Rand von D der Funktionswert kleiner oder größer als alle auftretenden lokalen Minima oder Maxima sein kann.

(b) Für Polynomfunktionen, wie später zu sehen ist auch für trigonometrische Funktionen, gilt, dass zwischen einem lokalen Minimum und einem lokalen Maximum die Funktion (streng) monoton steigend, analog zwischen einem lokalen Maximum und einem lokalen Minimum die Funktion (streng) monoton fallend ist.

Beispiel 5.7. Die Funktion $f(x) = x^3 - x - 1$ untersucht auf dem Intervall $I = [-1, 2]$ besitzt die erste Ableitung

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

$f'(x) = 0$ ergibt $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ als lokale Extremstelle, siehe Abbildung 5.2.

Wegen des Funktionswerts $f(2) = 5$ ist $(2, 5)$ das globale Maximum der Funktion f auf I, hingegen stimmt das lokale Minimum mit dem globalen Minimum überein.

Dieses Beispiel zeigt sehr anschaulich, dass man mit den derzeit bekannten Hilfsmitteln nur graphisch lokale Minima und Maxima unterscheiden kann. Dies macht auf die Notwendigkeit zusätzlicher Kriterien aufmerksam.

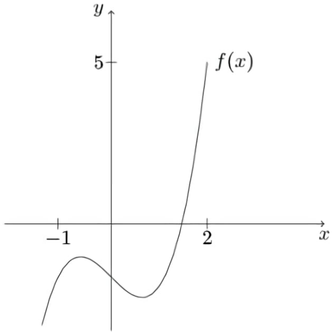


Abbildung 5.2: Verlauf der Polynomfunktion $f(x) = x^3 - x - 1$ auf $[-1, 2]$

Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema. Sei f eine auf D zweimal differenzierbare reelle Funktion und $x_0 \in D$.
(a) Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so besitzt f an x_0 ein lokales Maximum.
(b) Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so besitzt f an x_0 ein lokales Minimum.

Lokale Extrema bezeichnen für Funktionen, welche auf dem betrachteten Intervall differenzierbar sind, die Randpunkte der Monotonieintervalle, vergleiche dazu Abbildung 5.2. Zwischen einem lokalen Maximum und einem lokalen Minimum ist die Funktion (streng) monoton fallend, analog umgekehrt. Ähnlich verhält es sich mit der Krümmung von Funktionen.

Krümmung. Eine Funktion heißt auf einem Intervall I **konkav**, wenn die Funktion

$$f''(x) < 0 \qquad \forall x \in I$$

erfüllt. Geometrisch verläuft die Funktion oberhalb der Geraden durch die Randpunkte von I. Analog heißt die Funktion **konvex**, wenn die Funktion

$$f''(x) > 0 \qquad \forall x \in I$$

erfüllt. Geometrisch verläuft die Funktion unterhalb der Geraden durch die Randpunkte von I.

Ein Punkt W des Graphen der Funktion f heißt **Wendepunkt**, wenn der Graph dort sein Krümmungsverhalten ändert.

Hinreichende Bedingungen für Wendepunkte. Sei f eine auf D hinreichend oft differenzierbare Funktion und gilt für $x_0 \in D$

$$f''(x_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'''(x_0) \neq 0, \tag{5.12}$$

so ist $\big(x_0, f(x_0)\big)$ ein Wendepunkt von f.

Ein Punkt $P = (x_P, y_P)$ heißt **Sattelpunkt**, wenn $f'(x_P) = 0$, $f''(x_P) = 0$ und $f'''(x_P) \neq 0$ gilt.

Beispiel 5.8. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3$. Es gilt $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ und $f'''(x) = 6$. f hat an der Stelle $x = 0$ wegen $f'(0) = f''(0) = 0$ und $f'''(0) \neq 0$ einen Sattelpunkt.

Kurvendiskussionen für Polynomfunktionen kommen mit dem oben genannten aus. Anders verhält es sich bei rationalen Funktionen und Winkelfunktionen. Bei diesen Funktionen müssen mehr Eigenschaften untersucht werden. Im Folgenden werden verschiedene Funktionenklassen genauer beleuchtet und anhand von Beispielen das Vorgehen demonstriert.

5.3.1 Rationale Funktionen

Die vorbereitenden Überlegungen in Abschnitt 2.6.2, kombiniert mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung, erlauben es die Kurvendiskussion von gebrochen rationalen Funktionen zu betrachten.

Beispiel 5.9. Betrachte die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

An der Stelle $x_p = 1$ besitzt f eine Polstelle 2. Ordnung. Der Definitionsbereich von f ist demnach

$$D = \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq 1\}.$$

Die Nullstellen der Funktion f werden durch die Nullstellen des Zählerpolynoms bestimmt, welches $x = 0$ mit der Vielfachheit 3 aufweist. Für die weiteren Rechnungen werden die Ableitungen von f benötigt, diese lauten

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}, \qquad f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}, \qquad f'''(x) = \frac{-18x - 6}{(x-1)^5}.$$

Für die Extremwerte muss $f'(x) = 0$ erfüllt sein, was für

$$x^3 - 3x^2 = x^2(x-3) = 0$$

von $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ erfüllt wird. x_1 hat die Vielfachheit 2, ist jedoch kein Extremwert, denn es gilt $f''(x_1) = 0$, hingegen ist $f''(x_2) > 0$ und damit $\big(x_2, f(x_2)\big)$ ein lokales Minimum.

Für die Wendestellen ist die zweite Ableitung zu untersuchen und es muss $f''(x) = 0$ gelten, was für $6x = 0$ nur von $x_1 = 0$ erfüllt wird. Wegen $f'''(x_1) \neq 0$ ist x_1 eine Wendestelle und $\big(x_0, f(x_0)\big) = (0,0)$ der (einzige) Wendepunkt und Sattelpunkt.

Für das asymptotische Verhalten der Funktion muss wegen $\mathrm{Grad}(x^3) = 3 > \mathrm{Grad}((x-1)^2) = 2$ die Asymptote aufgesucht werden. Dies erfolgt mit Hilfe der Polynomdivision.

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3\big) : \big(x^2 - 2x + 1\big) = x + 2 + \dfrac{3x-2}{x^2-2x+1} \\
\underline{-\,x^3 + 2x^2 \;\; - x} \\
\qquad 2x^2 \;\; - x \\
\quad \underline{-\,2x^2 + 4x - 2} \\
\qquad\qquad 3x - 2
\end{array}$$

Die Asymptote lautet demnach $g(x) = x + 2$. In diesem Beispiel ist eine Besonderheit zu bemerken, denn die *Asymptote hat einen Schnittpunkt mit der Funktion* f. Das Restpolynom $r(x) = 3x - 2$ hat bei $x^* = \frac{2}{3}$ eine Nullstelle und damit gilt $f(x^*) = g(x^*)$, d.h. im Punkt $A = (x^*, f(x^*))$ schneidet die Funktion f also die Asymptote g.

Der Graph der Funktion f ist in Abbildung 5.3 zu sehen. In dieser sind auch die senkrechte Asymptote und die Asymptote g eingezeichnet. Man erkennt qualitativ gut das Grenzverhalten der Funktion f für betragsmäßig große Werte von x.

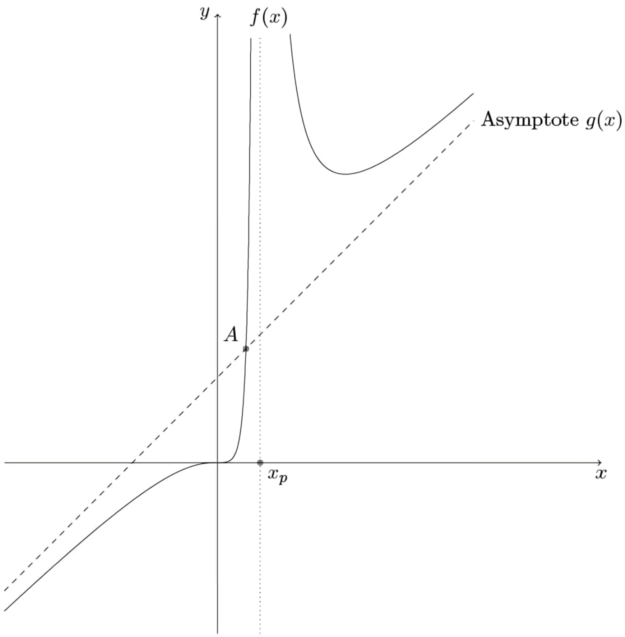


Abbildung 5.3: Graph der rationalen Funktion $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

Die Diskussion der Monotonie– und Krümmungsbereiche ist für jede Funktion unterschiedlich. Diese werden von der Lage der Polstelle(n) und der Asymptote(n), sowie der Extremwerte und Wendepunkte bestimmt.

Für die Monotoniebereiche der untersuchten Funktion f gilt das Folgende.

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f'(x)$	> 0	unbeschränkt	< 0	$= 0$	> 0
f	monoton wachsend	Pol	monoton fallend	Tiefpunkt	monoton wachsend

Für die Krümmungsbereiche der untersuchten Funktion f gilt Nachfolgendes.

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f''(x)$	< 0	$= 0$	> 0	unbeschränkt	> 0
f	konkav	Wendepunkt	konvex	Pol	konvex

5.3.2 Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen sind periodische Funktionen, d.h. ein gewisser Funktionsverlauf kehrt periodisch wieder. Demzufolge ist es im Fall von periodischen Funktionen notwendig diesen Funktionsverlauf zu untersuchen und dann periodisch fortzusetzen. Ein ähnlicher Zugang wurde schon bei den Winkelfunktionen und trigonometrischen Gleichungen in Abschnitt 2.4 gewählt. Im Folgenden die Definition für periodische Funktionen und daran anschließend ein Beispiel um die Vorgehensweise hier zu illustrieren.

Definition 5.10. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine nicht konstante reelle Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt **periodisch** mit der Periode p, wenn $p \in \mathbb{R}^+$ die kleinste Zahl ist, für die

$$f(x+p) = f(x), \tag{5.13}$$

für alle $x \in D$ mit $(x+p) \in D$ gilt.

Beispiel 5.11. Sei

$$f(x) = \sin^2 x.$$

Der Definitionsbereich ist nicht eingeschränkt, also ist $D = \mathbb{R}$. Die Nullstellen stimmen mit denen der Sinusfunktion überein und lauten $x_0 = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Im Folgenden werden die Ableitungsfunktionen benötigt, welche berechnet werden zu

$$f'(x) = 2\sin x \cos x, \qquad f''(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos(2x),$$

$$f'''(x) = -4\sin(2x) = -8\sin x \cos x.$$

Für die Extremwerte muss $f'(x) = 0$ erfüllt sein, was hier auf

$$\sin x = 0 \qquad \text{oder} \qquad \cos x = 0$$

führt. Diese Gleichungen haben die Lösungen $x_1 = k\pi$ und $x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $f''(k\pi) > 0$ und $f''(\frac{\pi}{2} + k\pi) < 0$ liegen bei x_1 lokale Minima und bei x_2 lokale Maxima vor. Für die Wendestellen muss $f''(x) = 0$ erfüllt sein, was auf die Gleichung $\cos(2x) = 0$ führt, welche für $2x_3 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ oder $x_3 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ erfüllt ist. Wegen $f'''(x_3) \neq 0$ liegen Wendepunkte vor.

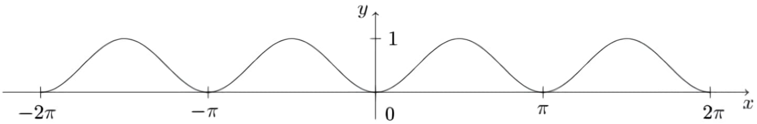


Abbildung 5.4: Graph der trigonometrischen Funktion $f(x) = \sin^2 x$

Die Funktion ist periodisch mit der Periode $p = \pi$. Für das Monotonieverhalten, betrachtet innerhalb einer Periode, gilt das Folgende.

	$x = 0$	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$x = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$x = \pi$
$f'(x)$	$= 0$	> 0	$= 0$	< 0	$= 0$
f	lok. Minimum	monoton wachsend	lok. Maximum	monoton fallend	lok. Minimum

Für das Krümmungsverhalten, betrachtet innerhalb einer Periode, gilt das Folgende.

	$x = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$	$x = \frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$	$x = \frac{5\pi}{4}$
$f''(x)$	$= 0$	< 0	$= 0$	> 0	$= 0$
f	Wendepunkt	konkav	Wendepunkt	konvex	Wendepunkt

5.3.3 Umkehraufgaben zur Kurvendiskussion

Die Vorgehensweise einer Kurvendiskussion kann auch umgekehrt werden. Die sogenannten Umkehraufgaben haben als Ausgangspunkt einige charakteristische Werte einer Funktion, wie beispielsweise Extremwerte, Nullstellen oder Steigungen von Tangenten an gewissen Stellen, und man sucht die Funktion, welche diese Anforderungen erfüllt.

Im Folgenden werden einige Beispiele vorgestellt, um den Umgang mit den Umkehraufgaben zur Kurvendiskussion zu veranschaulichen.

Beispiel 5.12. Der Graph einer Polynomfunktion der Form $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + px + q$ für $p, q \in \mathbb{R}$ hat eine Wendetangente $t_W\colon 3x + 2y = 4$. Um die Funktionsgleichung zu ermitteln, genauer um p und q zu bestimmen, muss zuerst der Wendepunkt untersucht werden. Die zweite Ableitung lautet $f''(x) = 6x$ und somit liegt der Wendepunkt bei $W = (0, y_W)$. y_W kann aus der Gleichung der Tangente bestimmt werden, da diese im Wendepunkt mit der Funktion übereinstimmt, daher $y_W = 2$. Die Steigung der Wendetangente beträgt $k_W = -\frac{3}{2}$, also $f'(0) = -\frac{3}{2}$. Daraus resultieren die beiden Gleichungen

$$f(0) = q = 2, \qquad \text{und} \qquad f'(0) = p = -\tfrac{3}{2}.$$

Dies ergibt $p = -\frac{3}{2}$, $q = 2$ und somit insgesamt $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x + 2$.

Beispiel 5.13. Sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - ax}{x - b}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben, welche einen Extremwert $E = (4, 1)$ besitzt. Wegen der Angabe des Extremwerts wird die erste Ableitung berechnet zu

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2bx + ab}{(x - b)^2}.$$

Es muss gelten $f'(4) = 0$ sowie $f(4) = 1$ und damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &= 16 - 8b + ab, \\ 4 - b &= 16 - 4a. \end{aligned}$$

Aus diesem Gleichungssystem erhält man aus der zweiten Gleichung $a = \frac{12+b}{4}$, eingesetzt in die erste Gleichung erhält man $b^2 - 20b + 64 = 0$. Diese quadratische Gleichung gibt zwei Lösungspaare

$$b_1 = 16,\ a_1 = 7 \qquad \text{und} \qquad b_2 = 4,\ a_2 = 4.$$

Man erhält den Eindruck, dass es zwei Funktionsvorschriften gibt, welche die Angabe erfüllen

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 7x}{x - 16} \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 4} = x\frac{x - 4}{x - 4}.$$

Die Funktionsvorschrift f_2 besitzt jedoch bei $x = 4$ eine Definitionslücke und scheidet aus, da die „gekürzte“ Version $f_2^*(x) = x$ nicht die Angabe erfüllt. Diese wäre von vornherein durch $a \neq b$ in der Angabe vermieden worden.

Der Definitionsbereich für die Lösungsfunktion f_1 lautet

$$D = \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq 16\}.$$

Diese beiden beispielhaften Umkehraufgaben sollen die Strategie zur Bestimmung der Funktionsvorschrift ansatzweise zeigen. Für weitere Beispiele wird auf die Übungen verwiesen.

5.4 Schnittwinkel zweier Kurven

Der **Schnittwinkel** φ **zweier Kurven** in deren Schnittpunkt S ist definiert als der Winkel zwischen den zugehörigen Tangenten an die beiden Kurven in S. Für $\varphi = 0$ spricht man von *berührenden Kurven.*

Im Folgenden wird die Differentialrechnung herangezogen, um die Tangenten in den Schnittpunkten zu bestimmen.

Seien f und g die beiden hinreichend oft differenzierbaren Funktionen und $S = (x_S, y_S)$ der Schnittpunkt der beiden Kurven. Die Tangenten in S an f bzw. g werden durch die beiden Geradengleichungen $t_f \colon x \mapsto k_f x + d_f$ und $t_g \colon x \mapsto k_g x + d_g$ beschrieben. Die Steigungen in diesen Tangentengleichungen berechnen sich mit Hilfe der ersten Ableitung zu

$$k_f = f'(x_S) \qquad \text{und} \qquad k_g = g'(x_S).$$

Aufgrund des Zusammenhangs der Steigung einer Geraden mit deren Richtungsvektor, können mit Hilfe der Steigungen zugehörige Richtungsvektoren

$$\vec{a}_f = \begin{pmatrix} 1 \\ k_f \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{a}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ k_g \end{pmatrix}$$

bestimmt werden. Die Berechnung des Winkels zwischen diesen Vektoren kann mit (3.31) erfolgen, welcher der Schnittwinkel der beiden Kurven f und g in S ist.

Beispiel 5.14. Seien $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^2$ und $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ die beiden zu schneidenden Kurven. Die Schnittpunkte ergeben sich aus $x^2 = x$ zu $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.

Die Winkelberechnung für $S_1 = (0, 0)$ benötigt die Ableitungen $f'(x) = 2x$ und $g'(x) = 1$. Es folgt damit $k_f = 0$ und $k_g = 1$ und der resultierende Steigungswinkel berechnet sich damit zu $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$.

Für $S_2 = (1, 1)$ folgt $k_f = 2$ und $k_g = 1$ und damit $\varphi_2 \approx 18{,}43°$.

Bemerkung. Analog zu den Betrachtungen des Schnittwinkels kann auch der *Steigungswinkel einer Kurve* über den Steigungswinkel der zugehörigen Tangente in einem Punkt definiert werden.

Zur Veranschaulichung sei folgendes Beispiel genannt.

Beispiel 5.15. Sei

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

mit $D = \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Aufgabe ist es, jene Stelle zu finden, an welcher der Steigungswinkel $-\frac{\pi}{4}$ beträgt. Dazu betrachtet man die Gleichung

$$\tan \alpha = k = f'(x)$$

und erhält mit $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ daraus

$$-1 = -\frac{1}{x^2}.$$

Als Lösungen erhält man die Stellen $x = \pm 1$.

Zu beachten ist, dass nicht jede Funktion jeden Steigungswinkel aufweisen muss. Entsprechend dem Funktionsverlauf sind manche Steigungswinkel nicht möglich. In diesem Beispiel würde die Frage nach dem Steigungswinkel von $\frac{\pi}{4}$ auf die Gleichung $x^2 = -1$ führen, welche in $\mathbb{R}$ nicht lösbar ist, vergleiche Abbildung 2.15.

5.5 Extremwertaufgaben

Die bisher kennengelernten Methoden der Differentialrechnung können adaptiert werden, um sogenannte Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen zu lösen. Hierbei ist keine neue Theorie zu erarbeiten, es ist leidlich notwendig den Sachverhalt, oft aus geometrischen Sachverhalten, derart zu formulieren, dass die Methoden aus der Kurvendiskussion zur Anwendung gebracht werden können. In diesem Abschnitt sollen einige Ideen vermittelt werden, wie man solche Aufgaben berechnen kann. Zur Motivation der Vorgehensweise ein

Beispiel 5.16. Von einer gegebenen Funktion

$$f(x) = -x^2 + 5$$

wird ein Punkt $P = (x, y)$ betrachtet, welcher auf dem Graphen der Funktion f zu liegen kommt. Nun soll untersucht werden, ob es einen oder mehrere Punkte gibt, welche auf dem Graphen von f liegen und deren Abstand zum Ursprung $\mathcal{O}$ minimal ist. Die Funktion, welche in dieser Aufgabe minimiert werden muss ist einfach der geometrische Abstand des Punktes P zum Ursprung $\mathcal{O}$, welcher gegeben ist durch

$$d(P, \mathcal{O}) = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{5.14}$$

Gleichzeitig muss der Punkt P aber auf dem Graphen von f liegen, d.h. es muss für $P = (x, y)$ gelten

$$y = -x^2 + 5. \tag{5.15}$$

Nun sind in der Aufgabe noch zwei Variablen enthalten, die Methoden der Differentialrechnung kennen aber nur eine Unbekannte. Hierzu wird Gleichung (5.15) in Gleichung (5.14) eingesetzt, das ergibt

$$d(P, \mathcal{O}) = \sqrt{x^2 + (-x^2 + 5)^2} = \sqrt{x^2 + x^4 - 10x^2 + 25} = \sqrt{x^4 - 9x^2 + 25} = d(x),$$

eine Funktion d nur von der Variablen x abhängig. Diese Funktion wird nun abgeleitet zu

$$d'(x) = \frac{4x^3 - 18x}{2\sqrt{x^4 - 9x^2 + 25}} = \frac{2x^3 - 9x}{\sqrt{x^4 - 9x^2 + 25}},$$

anschließendes auffinden der Nullstellen von d' liefert die Gleichung

$$2x^3 - 9x = x(2x^2 - 9) = 0.$$

Man erhält daraus drei Lösungen, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}$ und $x_3 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$. Nun muss das Minimum gefunden werden. Hierzu kann die zu den x-Werten gehörige Distanz berechnet werden $d(x_1) = 5$, $d(x_2) = \frac{19}{4}$, $d(x_3) = \frac{343}{4}$ und anhand dieser das Minimum entschieden werden, was sich als $d(x_2)$ herausstellt.

Die beiden im oberen Beispiel involvierten Funktionen und Gleichungen, werden mit Namen versehen. Die zu minimierende Funktion (5.14), welche im Allgemeinen bei einem anderen Beispiel auch maximiert werden könnte, wird als **Hauptbedingung** bezeichnet. Die Gleichung, welche bei der Minimierung respektive Maximierung zu erfüllen ist, im Beispiel oben Gleichung (5.15), bezeichnet man als **Nebenbedingung**. Bei komplizierteren Aufgaben können auch mehrere Nebenbedingungen auftreten, doch hier stößt man schnell an Grenzen. Praktisch bedeutet dies, dass man bei mehreren Variablen in der Hauptbedingung diese durch einsetzen der Nebenbedingungen auf eine verbleibende Variable reduzieren muss. Genau hier liegt oft das Problem, wenn die Gleichungen viele Nichtlinearitäten enthalten, dann ist das oft nicht so einfach möglich.

Es wurde schon eingangs erwähnt, dass oft geometrische Sachverhalte in derartigen Extremwertaufgaben eine Rolle spielen. Dies wird illustriert durch das folgende

Beispiel 5.17. Eine der einfachsten Aufgaben ist, ein Rechteck mit der Länge l und der Breite b zu betrachten, welches gegebenen Umfang hat, und jener Flächeninhalt gesucht wird, der maximal ist.

Es wird also das Maximum des Flächeninhalts gesucht, dies stellt die **Zielfunktion** dar, bei gegebenem Umfang, was die **Nebenbedingung** darstellt. Für $u \in \mathbb{R}^+$ gegeben gilt

$$A(l, b) = lb, \qquad u = 2(l + b).$$

Die Funktion A ist von zwei Variablen abhängig, was mit Hilfe der Differentialrechnung noch nicht gelöst werden kann. Es kann aber aus der Nebenbedingung eine Unbekannte, beispielsweise $l = \frac{u}{2} - b$, ausgedrückt und in die Zielfunktion eingesetzt werden.

$$A(b) = \left(\frac{u}{2} - b\right) b = \frac{u}{2}\, b - b^2$$

Streng genommen muss zwischen der Funktion $A(l, b)$ und der Funktion $A(b)$ unterschieden werden, da es sich um andere Abbildungen handelt. Darauf sei hier jedoch verzichtet. Um Extrema der Funktion zu finden, muss die Ableitung gebildet und diese gleich Null gesetzt werden. Mit

$$A'(b) = \frac{u}{2} - 2b$$

erhält man für $A'(b) = 0$ die Lösung $b = \frac{u}{4}$ und damit aus der Gleichung der Nebenbedingung $l = \frac{u}{4}$. Das flächengrößte Rechteck bei gegebenem Umfang ist also ein Quadrat.

Unterschiedliche geometrische Sachverhalte können Fragestellungen der Extremwertaufgaben ergeben. Ein weiteres Beispiel stammt aus der räumlichen Geometrie.

Beispiel 5.18. Einer Halbkugel mit gegebenem Radius R wird ein Drehzylinder mit Radius r und Höhe h eingeschrieben, sodass der Mittelpunkt der Kreisfläche des Drehzylinders im Mittelpunkt der Grundfläche der Halbkugel zu liegen kommt. Es soll jener Drehzylinder bestimmt werden, der größtes Volumen aufweist.

Das Volumen des Drehzylinders ist gegeben durch

$$V = r^2 \pi h.$$

Aufgrund der Konstruktion gilt als Nebenbedingung

$$R^2 = r^2 + h^2.$$

Damit kann die Zielfunktion formuliert werden zu

$$V(h) = (R^2 - h^2)\pi h = R^2 \pi h - h^3 \pi.$$

Die Ableitung der Funktion lautet

$$V'(h) = R^2 \pi - 3h^2 \pi.$$

$V'(h) = 0$ liefert als Lösung $h = \pm\frac{R}{\sqrt{3}}$, wobei die negative Lösung aufgrund der dahinterstehenden Geometrie ausgeschlossen werden kann. Es folgt aus der Nebenbedingung

$$r^2 = \frac{2R^2}{3} \qquad \text{und aus der Zielfunktion} \qquad V = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} R^3$$

für das Volumen.

Im abschließenden Beispiel wird der sogenannte **Strahlensatz** verwendet. Dieser besagt, vereinfacht formuliert und auf das folgende Beispiel zugeschnitten, dass rechtwinkelige Dreiecke mit gemeinsamer Hypotenuse und i.A. verschieden langen Katheten gleiches Verhältnis der Katheten aufweisen.

Beispiel 5.19. Es soll einem Rechteck mit gegebener Länge l und Breite b ein gleichschenkeliges Dreieck mit Basis c und Höhe h so umschrieben werden, dass die Fläche minimal wird. Dabei kommt die Länge l auf der Basis c zu liegen.

Die Zielfunktion lautet

$$A = \frac{ch}{2}$$

und die Nebenbedingung kann aus dem Strahlensatz gewonnen werden zu

$$\frac{h-b}{\frac{l}{2}} = \frac{h}{\frac{c}{2}}.$$

Eingesetzt ergibt das die zu minimierende Funktion

$$A(h) = \frac{h^2 l}{2(h-b)}.$$

Es folgt

$$A'(h) = \frac{h^2 l - 2hlb}{2(h-b)^2}$$

und $A'(h) = 0$ liefert $h_1 = 0$ und $h_2 = 2b$. Die erste Lösung kann aus geometrischen Gründen ausgeschlossen werden und für die zweite Lösung folgt $c = 2l$ und damit

$$A = 2lb.$$

5.6 Beispiele aus den Anwendungen

Problem der Momentangeschwindigkeit. Der Weg eines Fahrzeuges wird durch das Weg–Zeit–Gesetz $s(t) = 5t^2$, wobei s den Weg und t die Zeit bezeichnet, für $t \geq 0$ beschrieben. Nach 2 Zeiteinheiten wurde der Weg $s(2) = 20$, nach 3 Zeiteinheiten ein Weg von $s(3) = 45$ zurückgelegt, also hat das Fahrzeug bis $t = 2$ eine **mittlere Geschwindigkeit** von

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20}{2} = 10$$

und bis $t = 3$ eine mittlere Geschwindigkeit von

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{45}{3} = 15.$$

Dieses Geschwindigkeitsmaß ist nicht befriedigend, daher ist eine **Momentangeschwindigkeit** von Interesse. Diese ergibt sich zu

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t_0),$$

da die Geschwindigkeit in einem Punkt von Interesse ist. Die Herleitung erfolgt analog zum Tangentenproblem, nur im st–Diagramm. Die Momentangeschwindigkeit berechnet sich also aus der Ableitung $s'(t) = 10t$ und ist $s'(2) = 20$ bzw. $s'(3) = 30$. Da der Weg monoton steigt ist die Momentangeschwindigkeit nicht negativ.

Induktivität und Kapazität für allgemeine Spannungsverläufe. Das Verhalten einer Spule und eines Kondensators bei allgemeinen Zeitverläufen der elektrischen Spannung u und des elektrischen Stroms i wird durch Verknüpfungen zwischen u und i mit Hilfe der Differentialrechnung angegeben. Das Verhalten einer Spule und eines Kondensators bei sinusförmigen elektrischen Größen wurde im Kapitel 4.3 betrachtet.

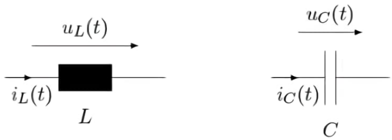


Abbildung 5.5: Konfiguration von Strom– und Spannungsverlauf an einer Induktivität L und einer Kapazität C

Es gelten für die Konfiguration von Strom und Spannung nach Abbildung 5.5 die Verknüpfungsbeziehungen

$$u_L(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}(t) \qquad \text{und} \qquad i_C(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t).$$

Für sinusförmige Anregungen, also $u(t) = U \cos(\omega t)$ mit $U > 0$ und $\omega = 2\pi f$, gelangt man zur Theorie der komplexen Wechselstromrechnung unter Verwendung der Einbettung harmonischer Schwingungen in komplexe Zahlen, wie in Kapitel 4.3 dargestellt.

Kapitel 6

Integralrechnung

6.1 Das Flächeninhaltsproblem

Die Bestimmung des Flächeninhalts ebener Figuren ist seit der Antike ein Thema. Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b lautet $A = ab$, für den Kreis mit Radius r ist der Flächeninhalt $A = r^2\pi$. Nun stellt sich die Frage wie der Flächeninhalt, der vom Graphen einer beliebigen Funktion f und einem Teil der x–Achse berandet wird, bestimmt wird.
Man greift hier auf eine Zerlegung in Rechtecke zurück. Die Idee ist, dass das Intervall I auf der x–Achse unterteilt wird und Rechtecke konstruiert werden, die durch diese sogenannte Zerlegung und ensprechend gewählter Funktionswerte definiert sind, siehe Abbildung 6.1.

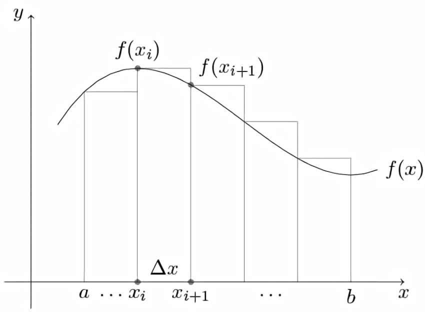


Abbildung 6.1: Zur Annäherung der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und dem Teil der x–Achse, der durch das Intervall $I = [a, b]$ gegeben ist.

Das Intervall $I = [a, b]$ wird zerlegt durch die Stützstellen $\{a = x_0, x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n = b\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $i = 0, \ldots, n$ im Abstand $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. An diesen Stützstellen werden Rechtecke konstruiert, das i–te Rechteck besitzt dabei den Flächeninhalt $f(x_i) \cdot \Delta x$. Wird über diese Rechtecksflächen summiert, so ergibt sich

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x. \tag{6.1}$$

Nun wird ein ähnliches Argument wie beim Tangentenproblem am Anfang der Differentialrechnung bemüht. Es geht $\Delta x \to 0$ und die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke nähert sich so dem

Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion und der x–Achse.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) \, dx \tag{6.2}$$

Diese geometrische Argumentation des Integrals ist sehr anschaulich, mathematisch jedoch stark vereinfacht. Für eine genauere Definition sei auf die mathematischen Grundvorlesungen verwiesen, im Folgenden nur einige Anmerkungen.

Bemerkung. Einige Bemerkungen zur geometrischen Herleitung des Integrals:

(a) In Abbildung 6.1 wurde die Höhe des konstruierten Rechtecks als der Funktionswert des kleineren x–Wertes gewählt. Dies muss nicht so sein, es können auch andere Konstruktionen vorliegen.

(b) Es wurde eine konstante Rechtecksbreite Δx angenommen. Die Zerlegungen können aber auch so gewählt werden, dass die Stützstellen nicht äquidistant sind.

(c) Die Wahl der Rechteckshöhen ist durch die Festsetzung $f(x_i)$ willkürlich getroffen. Für den Integralbegriff müssen sogenannten *Ober–* und *Untersummen* betrachtet werden. Dafür muss das Maximum bzw. das Minimum des Funktionswerts im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ zur Flächeninhaltsberechnung jedes i–ten Rechtecks in der Summe verwendet werden.

(d) Die Funktion f heißt dann *integrierbar*, wenn für alle möglichen Zerlegungen der Grenzwert der Ober– und Untersumme existiert und gleich ist, welcher dann als Riemann-Integral[1] bezeichnet wird.

6.2 Stammfunktionen und das unbestimmte Integral

Das Integral kann auch als Umkehrung des Differenzierens verstanden werden. Ähnlich wie je zwei der vier Grundrechnungsarten paarweise Umkehrungen zueinander bilden, sind diese beiden Operationen ebenso aufzufassen.

Stammfunktion. Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $y = f(x)$. Eine Funktion F heißt eine **Stammfunktion** der Funktion f, wenn

$$F'(x) = f(x) \tag{6.3}$$

für alle $x \in D$ gilt. Das Aufsuchen einer Stammfunktion heißt **Integrieren**.

Beispiel 6.1. Die Funktion $f(x) = 4x^3$ hat $F(x) = x^4$ als Stammfunktion, denn es gilt

$$F'(x) = 4x^3 = f(x).$$

Ebenso ist die Funktion $F_1(x) = x^4 + 2$ und die Funktion $F_2(x) = x^4 - 7$ eine Stammfunktion.

Die Integrationskonstante. Mit jeder Stammfunktion F einer gegebenen Funktion f ist auch jede Funktion

$$F(x) + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Umgekehrt gilt, dass es außer $F(x) + c$ keine weitere Stammfunktion von f gibt. Das bedeutet, dass sich zwei verschiedene Stammfunktionen F_1 und F_2 einer gegebenen Funktion f nur um eine additive Konstante c unterscheiden können.

[1] Bernhard Riemann (1826 – 1866), deutscher Mathematiker

Das unbestimmte Integral. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $y = f(x)$. Wenn f eine Stammfunktion F besitzt, bezeichnet man die Menge aller Stammfunktionen $y = F(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ als das **unbestimmte Integral** der Funktion f und schreibt dies als

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x. \tag{6.4}$$

$f(x)$ heißt in diesem Zusammenhang der **Integrand** und c die **Integrationskonstante.**

In Tabelle 6.1 sind Stammfunktionen der elementaren Funktionen aufgelistet. Zum Beweis muss lediglich $F'(x) = f(x)$ nachgerechnet werden.

Definitionsbereich f	Funktion f	Stammfunktion F
$\mathbb{R}$	0	a mit $a \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	1	x
$\mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$ mit $n \in \mathbb{N}$	x^n
$\mathbb{R}$	x^a mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}),\ k \in \mathbb{Z}$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$(k\pi, k\pi + \pi),\ k \in \mathbb{Z}$	$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}$	a^x mit $a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\mathbb{R}^+$	$\ln x$	$x \cdot \ln x - x$
$\mathbb{R}^+$	$\log_a x$ mit $a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$	$\frac{1}{\ln a}(x \cdot \ln x - x)$

Tabelle 6.1: Stammfunktionen der elementaren Funktionen

6.3 Die Integrationsregeln

Summen– und Differenzenregel. Das Integral der Summe bzw. der Differenz zweier Funktionen ist gleich der Summe bzw. der Differenz der beiden Integrale. Hat jeweils f und g eine Stammfunktion, so gilt

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x \pm \int g(x)\ \mathrm{d}x. \tag{6.5}$$

Kurz gefasst heißt das, Summen und Differenzen von Funktionen werden gliedweise integriert.

Konstantenregel. Ein konstanter Faktor im Integranden des unbestimmten Integrals kann mit dem Integral vertauscht werden. Hat f eine Stammfunktion und sei $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, so gilt

$$\int k \cdot f(x)\ \mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\ \mathrm{d}x. \tag{6.6}$$

Beispiel 6.2. Zu den Integrationsregeln werden die folgenden Beispiele angegeben.

(a)

$$\int (3+x)\ \mathrm{d}x = \int 3\ \mathrm{d}x + \int x\ \mathrm{d}x = 3x + \frac{x^2}{2} + c$$

(b)

$$\int 3x^2\ \mathrm{d}x = 3\int x^2\ \mathrm{d}x = 3\cdot\left(\frac{x^3}{3}+c\right) = x^3 + c$$

(c)

$$\begin{aligned}\int (1-x)^2\ \mathrm{d}x &= \int \left(1-2x+x^2\right)\ \mathrm{d}x\\ &= \int 1\ \mathrm{d}x - 2\int x\ \mathrm{d}x + \int x^2\ \mathrm{d}x\\ &= x - 2\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^3}{3} + c\\ &= x - x^2 + \frac{x^3}{3} + c\end{aligned}$$

6.4 Die Integrationsmethoden

Die Methoden zur Integration werden im Folgenden beispielorientiert vorgestellt. Für die formale Definition der Methoden sei auf die mathematischen Grundvorlesungen verwiesen.

6.4.1 Substitutionsmethode

Einige Integrale lassen sich durch Substitution[2] auf bekannte Grundintegrale zurückführen, dies bezeichnet man als die **Substitutionsmethode** der Integration. Zwei Punkte müssen beachtet werden, zum Einen, dass bei der Substitution auch das Differential $\mathrm{d}x$ mitsubstituiert wird, zum Anderen, dass die Substitution nach der Integration rückgängig gemacht werden muss.

Beispiel 6.3. Das Integral

$$\int (3x+5)^{17}\ \mathrm{d}x$$

kann entweder durch langwieriges und fehleranfälliges Potenzieren und anschließend gliedweises Integrieren berechnet werden oder durch die Substitutionsmethode, wie folgt.
Mit der Substitution $z = 3x+5$ muss noch die Substitution der Differentiale berechnet werden. Dazu wird die Ableitung von $z = z(x)$ nach x gebildet

$$z' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 3$$

und dies als Gleichung der Differentiale aufgefasst. Mathematisch ist dies nicht wie eine Gleichung mit Variablen aufzufassen, sondern als Gleichung für Differentiale, die hier nicht besprochen werden. Damit erhält man $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}z$ und das (substituierte) Integral

$$\int z^{17}\frac{1}{3}\,\mathrm{d}z.$$

[2]Ersetzen eines Terms durch einen anderen Term.

Dies wird gelöst und rücksubstituiert

$$\frac{1}{3}\int z^{17}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\frac{z^{18}}{18} + c = \frac{(3x+5)^{18}}{54} + c.$$

In ähnlicher Weise wird die Substitution auch für die Integration anderer Funktionen eingesetzt.

Beispiel 6.4. Typische Beispiele sind:

(a)

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$$

Die Substitution lautet $z = \sin x$, woraus $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{\cos x}$ folgt. Damit erhält man

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{z}}\frac{\mathrm{d}z}{\cos x} = \int z^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\cdot\sqrt{\sin x} + c.$$

(b)

$$\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Die Substitution lautet $z = ax$, woraus $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{a}$ folgt. Damit erhält man

$$\int \mathrm{e}^{z}\,\frac{\mathrm{d}z}{a} = \frac{1}{a}\int \mathrm{e}^{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax} + c.$$

6.4.2 Partielle Integration

Die partielle Integration oder auch Produktintegration geht aus der Produktregel der Differentialrechnung hervor. Betrachtet man die Beziehung

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x),$$

erhält man durch Umformung die Gleichung

$$f'(x)\cdot g(x) = (f\cdot g)'(x) - f(x)\cdot g'(x).$$

Von $f'(x)\cdot g(x)$ sucht man nun eine Stammfunktion auf, d.h. man ermittelt

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \int (f\cdot g)'(x)\,\mathrm{d}x - \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

und erhält die Formel der **partiellen Integration** als

$$\boxed{\int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x.} \tag{6.7}$$

Beispiel 6.5. Zur partiellen Integration seien folgende Beispiele angegeben.

(a) Ein Integral, das schon in Tabelle 6.1 aufgelistet wurde, kann erst mit partieller Integration bewiesen werden.

$$\int \ln x \; \mathrm{d}x$$

Hier ist es notwendig den Integranden als $1 \cdot \ln x$ aufzufassen und somit $f'(x) = 1$ und $g(x) = \ln x$. Damit erhält man $f(x) = x$ und $g'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\int \ln x \; \mathrm{d}x = x \; \ln x - \int x \; \frac{1}{x} \; \mathrm{d}x = x \; \ln x - x + c$$

Hier wird die Integration auf Differentiation des Integranden zurückgeführt.

(b)

$$\int x^n \; \ln x \; \mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Hier ist es sinnvoll, $\ln x$ zu differenzieren, damit erhält man $g'(x) = \frac{1}{x}$ und $f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Eingesetzt in die Formel der partiellen Integration folgt daraus

$$\int x^n \; \ln x \; \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \; \ln x - \int \frac{1}{x} \; \frac{x^{n+1}}{n+1} \; \mathrm{d}x.$$

Vereinfachung und nochmalige Integration liefert das Ergebnis

$$\int x^n \; \ln x \; \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \; \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c.$$

(c)

$$\int x \; \mathrm{e}^{ax} \; \mathrm{d}x, \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Mit $g'(x) = 1$ und $f(x) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$ erhält man

$$\int x \; \mathrm{e}^{ax} \; \mathrm{d}x = \frac{x}{a} \; \mathrm{e}^{ax} - \int \left(\frac{1}{a} \; \mathrm{e}^{ax} \right) \; \mathrm{d}x = \frac{x}{a} \; \mathrm{e}^{ax} - \frac{1}{a^2} \; \mathrm{e}^{ax} + c.$$

Bemerkung. Hier sei angemerkt, dass die Integration von e^{ax} mit Hilfe der Substitutionsmethode erfolgt.

(d)

$$\int \sin x \cos x \; \mathrm{d}x$$

Mit $f(x) = \sin x$ und $g'(x) = \cos x$ erhält man

$$\int \sin x \cos x \; \mathrm{d}x = \sin x \sin x - \int \cos x \sin x \; \mathrm{d}x = \sin^2 x - \int \sin x \cos x \; \mathrm{d}x.$$

Dies führt man auf eine *Rekursion*, indem man die Beziehung als Gleichung auffasst und diese umformt zu

$$2 \int \sin x \cos x \; \mathrm{d}x = \sin^2 x.$$

Damit erhält man

$$\int \sin x \cos x \; \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sin^2 x + c.$$

Bemerkung. Die Wahl von f' und g ist willkürlich, vertauscht man die beiden Funktionen, so erhält man, durch trigonometrische Umformungen, dasselbe Ergebnis.

6.4.3 Integration mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

Die rationalen Funktionen stellen auch bei der Integralrechnung eine Besonderheit dar. Die bisherigen Methoden haben nur besonders strukturierte rationale Funktionen behandelt. Dieser Abschnitt widmet sich der Frage, was zu tun ist, wenn eine beliebige rationale Funktion integriert werden soll, d.h. Integrale der allgemeinen Form

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

untersucht werden. Die Vorgehensweise ist hier, dass die rationale Funktion im Integranden umgeformt werden muss um dann die bisher bekannten Methoden darauf anzuwenden. Diese Umformung wird als Partialbruchzerlegung bezeichnet und in diesem Abschnitt betrachtet.

Die **Partialbruchzerlegung** ist eng verbunden mit der Aufgabe des Auffindens eines Hauptnenners bei Bruchtermen. Zur Motivation und grundlegenden Idee werden die folgenden Beispiele betrachtet.

Beispiel 6.6. Es gilt die Rechnung

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x^2-1} - \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{-2}{x^2-1}.$$

Für die Frage nach der Umkehrung sei anhand dieses Beispiels wie folgt argumentiert. Für das Auffinden der sogenannten *Partialbrüche*, das sind die minimal zerlegbaren Teilbrüche, ist eine Faktorisierung des Nenners notwendig. In obigem Beispiel gilt $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$. Diese Faktorisierung ist für Polynome höheren Grades schwierig, dazu sei auf die Polynomdivision verwiesen. In diesem Abschnitt gehen wir davon aus, dass diese Faktorisierung vorliegt oder berechnet werden kann. Einen weiteren Aspekt für die Entwicklung der Partialbruchzerlegung soll das nächste Beispiel liefern.

Beispiel 6.7.

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

Hier zeigt sich, dass in einem linearen Term mit Potenz im Nenner der Form $(x-a)^n$, bei geeignetem Zähler, schon eine Addition oder Subtraktion verborgen sein kann. Weiters seien die nicht faktorisierbaren quadratischen Terme angesprochen, jene quadratischen Nennerpolynomfunktionen mit einer Diskriminante $D < 0$. Diese müssen in einer Partialbruchzerlegung auch respektiert werden, sowie Potenzen dieser nicht faktorisierbaren quadratischen Ausdrücke. Dieser Sachverhalt soll durch das folgende Beispiel illustriert werden.

Beispiel 6.8.

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2+1} = \frac{x^2+2x+1}{x^3+x}$$

Diese grundsätzlichen Überlegungen sollen die Struktur des Ansatzes für die Partialbruchzerlegung plausibel machen. Man hat entweder eine rationale Funktion mit einer Polstelle a der Ordnung n oder ein quadratisches Polynom $x^2 + bx + c$ ohne reelle Nullstellen der Potenz m vorliegen. Für die beiden Fälle werden die folgenden Ansätze getroffen:

(a) $\displaystyle \frac{p(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$

(b) $\displaystyle \frac{p(x)}{(x^2-bx+c)^m} = \frac{B_1x+C_1}{x^2-bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2-bx+c)^2} + \ldots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2-bx+c)^m}$

Hierbei wird immer angenommen, dass Grad p hinreichend klein ist, also eine echt gebrochenrationale Funktion vorliegt. Treten mehrfache Polstellen und mehrfache quadratische Polynome ohne reelle Nullstellen auf, dann werden die Ansätze gemeinsam, durch eine Summe verbunden, verwendet.

Diese analytische Methode der Partialbruchzerlegung erlaubt die **Integration von rationalen Funktionen**, wie in den folgenden Beispielen gezeigt wird.

Beispiel 6.9. Das Integral der Gestalt

$$\int \frac{3x}{x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x$$

hat als Integrand die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 - x - 2}.$$

Die Faktorisierung des Nenners ergibt $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. Daraus resultiert der Ansatz für die Partialbruchzerlegung gemäß

$$\frac{3x}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Hier werden, da das Beispiel einfach genug ist und der Übersichtlichkeit wegen, nur Großbuchstaben als Unbekannte verwendet. Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt

$$3x = A(x-2) + B(x+1).$$

Hier gibt es zwei unterschiedliche Möglichkeiten. Ausmultiplizieren und nach den auftretenden Potenzen des Polynoms ordnen und so Gleichheit auf der linken und rechten Seite herstellen (Koeffizientenvergleich), dies führt auf ein lineares Gleichungssystem. Eine andere Möglichkeit ist, dass man die Polstellen einsetzt und so die Unbekannten berechnet. Letzteres ist im Falle von Polstellen 1. Ordnung immer die schnellere Methode. Hier folgt $A = 1$ und $B = 2$. Mit der Partialbruchzerlegung

$$\frac{3x}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}$$

und den Rechenregeln für Integrale folgt demnach

$$\int \frac{3x}{x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x.$$

Nun müssen die beiden Integrale auf der rechten Seite der letzten Rechnung berechnet werden, was mit der Substitutionsmethode zu bewerkstelligen ist. Mit der Substitution $u = x+1$ und $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ gilt

$$\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + c_1 = \ln|x+1| + c_1.$$

Analog folgt mit der Substitution $z = x - 2$ und $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$

$$\int \frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\ln|z| + c_2 = 2\ln|x-2| + c_2 = \ln(x-2)^2 + c_2.$$

Insgesamt erhält man damit

$$\int \frac{3x}{x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x = \ln|x+1| + \ln(x-2)^2 + c = \ln\left(|x+1|(x-2)^2\right) + c.$$

Bemerkung. In Beispiel 6.9 ist besonders darauf zu achten, dass die Partialbruchzerlegung keine Methode zur Integration ist. Lediglich der Integrand wird derart umgeformt, dass Teilbrüche entstehen, welche dann mit Hilfe schon bekannter Methoden untersucht werden können.

Analog zum vorangegangenen Beispiel können auch die Partialbruchzerlegungen anderer rationaler Funktionen betrachtet werden um das zugehörige Integral zu lösen. Abhängig von der Gestalt der Partialbrüche müssen die folgenden Substitutionen entsprechend gewählt werden.

Beispiel 6.10. Das Integral

$$\int \frac{x^2 - 2x + 6}{(x+1)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$$

wird mit Hilfe der Partialbruchzerlegung gelöst. Hierbei handelt es sich um Polstellen höherer Ordnung. Die Faktorisierung von

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 6}{(x+1)(x-2)^2}$$

ist hier schon bekannt, der Pol $x = 2$ hat hier jedoch die Ordnung 2. Der Ansatz der Partialbruchzerlegung lautet in diesem Fall

$$\frac{x^2 - 2x + 6}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}.$$

Die weitere Vorgehensweise ist analog zu Beispiel 6.9

$$x^2 - 2x + 6 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1),$$

nur führt hier lediglich Einsetzen der Polstellen nicht zum Ziel. Eine gemischte Strategie aus Einsetzen der Polstellen und Koeffizientenvergleich ist ratsam und führt hier zu $A = 1$, $B = 0$ und $C = 2$. Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2 - 2x + 6}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

vereinfacht sich das Integral zu

$$\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Die Lösung des ersten Integrals ist vollständig aus dem letzten Beispiel 6.9 bekannt. Die Berechnung des zweiten Integrals erfolgt wieder mit der Substitution $z = x - 2$

$$\int \frac{2}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int 2z^{-2}\,\mathrm{d}z = 2\,\frac{z^{-1}}{-1} + c^* = -2\,\frac{1}{x-2} + c^*.$$

Insgesamt erhält man damit

$$\int \frac{x^2 - 2x + 6}{(x+1)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \ln|x+1| - \frac{2}{x-2} + c.$$

Andersartige Substitutionen sind bei Auftreten von quadratischen Nennerpolynomen notwendig. Zur Illustration das folgende Beispiel.

Beispiel 6.11. Der Integrand des Integrals

$$\int \frac{x^2 - x - 1}{(x+1)(x^2 + x + 1)}\,\mathrm{d}x$$

stellt eine rationale Funktion dar, welche einen quadratischen nicht faktorisierbaren Term involviert. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet für diesen Fall

$$\frac{x^2-x-1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich liefert $A = 1$, $B = 0$ und $C = -2$. Mit dieser Partialbruchzerlegung folgt

$$\int \frac{x^2-x-1}{(x+1)(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Die Lösung des ersten Integrals ist hinlänglich bekannt, die Berechnung von

$$\int \frac{2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

erfordert die Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat des Nennerpolynoms

$$x^2+x+1 = (x+\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}.$$

Damit ist das Integral

$$\int \frac{2}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x$$

zu lösen. Die Vereinfachung

$$(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{4}\big(\tfrac{4}{3}(x+\tfrac{1}{2})^2+1\big) = \tfrac{3}{4}\Big(\big(\sqrt{\tfrac{4}{3}}\,x+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\big)^2+1\Big)$$

liefert mit der Substitution $u = \sqrt{\frac{4}{3}}\,x + \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x$ das Integral

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u.$$

Wegen $\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \arctan u + c$ folgt

$$\int \frac{2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan u + c^* = \frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\sqrt{\tfrac{4}{3}}\,x+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + c^*$$

Insgesamt folgt

$$\int \frac{x^2-x-1}{(x+1)(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = \ln|x+1| - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

6.5 Das bestimmte Integral

Das Integral, welches über das Flächeninhaltsproblem motiviert wurde, kann zur **Berechnung von Flächeninhalten** zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x–Achse herangezogen werden.

Das bestimmte Integral. Sei f auf $[a, b]$ integrierbar mit einer Stammfunktion F. Das **bestimmte Integral** der Funktion f ordnet dieser über dem Intervall $[a, b]$ den reellen Zahlenwert

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{6.8}$$

zu.

Bemerkung. Die Motivation des bestimmten Integrals wurde eingangs durch das Flächeninhaltsproblem gegeben. Die Berechnung des bestimmten Integrals als $F(b) - F(a)$ ist als **Hauptsatz der Differential–und Integralrechnung** bekannt, hierfür sei auf die mathematischen Grundvorlesungen verwiesen.

Bemerkung. Einige Bemerkungen zu bestimmten Integralen:

(a) Das bestimmte Integral ermittelt den Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer Funktion und der x–Achse, wobei Flächen unterhalb der x–Achse negativ gezählt werden.

(b) Bei der Berechnung des Flächeninhaltes darf nicht über Nullstellen der Funktion f hinweg integriert werden, da sonst negative und positive Flächeninhalte addiert werden und man nur eine Art Mittelwert der Flächen erhält. Das bestimmte Integral muss daher an diesen Nullstellen aufgetrennt werden.

(c) Bei der bestimmten Integration muss darauf geachtet werden, dass das Integrationsintervall im Definitionsbereich der Funktion liegt.

Beispiel 6.12. Einige Beispiele zum bestimmten Integral:

(a) Die Fläche der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $[0, 1]$ berechnet sich zu

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(b)

$$\int_1^3 \sqrt{2x+1} \, \mathrm{d}x$$

Die Integration von $\sqrt{2x+1}$ macht die Substitutionsmethode notwendig. $z = 2x + 1$ gibt $\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \, \mathrm{d}z$. Hier ist jedoch darauf zu achten, dass bei bestimmten Integralen auch die Grenzen mitsubstituiert werden müssen, oder dass die Substitution und Rücksubstitution als „Nebenrechnung“ vollzogen werden muss.

$$\int_1^3 \sqrt{2x+1} \, \mathrm{d}x = \int_3^7 \frac{1}{2} \sqrt{z} \, \mathrm{d}z = \left.\frac{1}{3}\sqrt{z^3}\right|_3^7 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{343} - \sqrt{27}\right) = \frac{7}{3}\sqrt{7} - \sqrt{3}.$$

(c) Für $\displaystyle\int_0^1 x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$ erhält man mit partieller Integration

$$\int_0^1 x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = x \, \mathrm{e}^x\big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = [x \, \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x]_0^1 = 1.$$

(d) Bei

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, \mathrm{d}x$$

muss eine Aufteilung an den Nullstellen erfolgen. Für den geometrischen Flächeninhalt unter der Kurve im Intervall $[0, 2\pi]$ erhält man

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, \mathrm{d}x \right| = 2 \int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = 4,$$

für das bestimmte Integral hingegen

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = 2 - 2 = 0.$$

Sei f über $[a, b]$ integrierbar, so gilt

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x. \tag{6.9}$$

Anschließend an das bestimmte Integral und dessen Eigenschaften, wird das Bestimmen des Flächeninhalts, der von zwei Funktionsgraphen eingeschlossen wird, besprochen. Die **Fläche A zwischen den Graphen der beiden Funktionen** f und g berechnet sich zu

$$\boxed{A = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)|\ \mathrm{d}x.} \tag{6.10}$$

Dabei wird das Flächenstück durch die Schnittpunkte (x_i, y_i) mit $y_i = f(x_i) = g(x_i)$ für $i = 1, 2$ begrenzt.

Beispiel 6.13. Der Flächeninhalt des zwischen den Graphen von f und g liegenden Flächenstücks mit

$$f\colon y = 3x - x^2, \qquad \text{und} \qquad g\colon y = \frac{x}{2}$$

soll bestimmt werden. Die Schnittstellen der Funktionen liefern die Integrationsgrenzen.

$$3x - x^2 = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = \frac{5}{2}$$

Der Flächeninhalt berechnet sich zu

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)|\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{5}{2}} \left(\frac{5}{2}x - x^2\right)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{5}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{5}{2}} = \frac{125}{48}.$$

Das bestimmte Integral lässt sich auch zur **Berechnung von Rauminhalten** heranziehen.

Drehkörpervolumen mit der Abszisse als Rotationsachse. Der bei Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, um die Abszisse (x–Achse) entstehende Drehkörper hat das Volumen

$$\boxed{V = \pi \int_a^b y^2\ \mathrm{d}x = \pi \int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x.} \tag{6.11}$$

Beispiel 6.14. Ein Drehkörper, der durch Rotation des Parabelstücks $y^2 = 2px$ mit $0 \leq x \leq b$ und $b, p \in \mathbb{R}^+$ um die x–Achse hervorgeht, besitzt das Volumen

$$V = \pi \int_0^b y^2\ \mathrm{d}x = \pi \int_0^b 2px\ \mathrm{d}x = b^2 p\pi.$$

Analog kann auch die Rotation um die Ordinate (y–Achse) betrachtet werden.

Drehkörpervolumen mit der Ordinate als Rotationsachse. Der bei Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$, $c \leq y \leq d$, um die Ordinate (y–Achse) entstehende Drehkörper hat das Volumen

$$\boxed{V = \pi \int_c^d x^2\,\mathrm{d}y = \pi \int_c^d (f^{-1}(y))^2\,\mathrm{d}y.} \tag{6.12}$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf $I = [c, d]$ eindeutig nach x auflösbar ist, d.h., die Funktion ist auf dem Intervall I bijektiv und es existiert die Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon I = [c, d] \to \mathbb{R},\ x = f^{-1}(y).$$

Beispiel 6.15. Wird die Rotation aus Beispiel 6.14 um die Ordinate durchgeführt, so muss man zur Bestimmung des Volumens die Umkehrfunktion aufsuchen. Aus $y^2 = 2px$ folgt mit $c = 0$ und $d = 1$ als Umkehrfunktion

$$f^{-1} = x\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ y \mapsto \frac{1}{2p}y^2.$$

Damit erhält man das Volumen des durch Rotation entstehenden Rauminhalts

$$V = \pi \int_c^d x^2 \,\mathrm{d}y = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{2p}y^2\right)^2 \mathrm{d}y = \frac{\pi}{4p^2}\frac{y^5}{5}\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{20p^2}.$$

Ähnlich dem Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen kann auch der **Rauminhalt zwischen Drehkörpern, erzeugt von zwei Funktionsgraphen**, bestimmt werden. Hier wird im Folgenden nur die Rotation um die Abszisse betrachtet.

Ringkörpervolumen mit Abszisse als Rotationsachse. Rotiert das von den Graphen der beiden Funktionen $k_1\colon y = f(x)$ und $k_2\colon y = g(x)$ und den Ordinatenlinien bei a und b begrenzte Flächenstück um die Abszisse (x–Achse), so entsteht ein „hohler" Drehkörper mit dem Volumen

$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right| \,\mathrm{d}x.} \tag{6.13}$$

6.6 Beispiele aus den Anwendungen

Berechnung der Lage von Schwerpunkten. Schwerpunkte von Flächen ebener Figuren werden seit dem Altertum untersucht. Beispielsweise ist der Schwerpunkt einer dünnen Platte mit einem Kreis als Grundfläche der Mittelpunkt des Kreises. Anschaulich gesprochen kann die Platte an diesem Punkt balanciert werden.
Wird eine beliebige Fläche eingeschlossen vom Graphen einer Funktion f, wie etwa in Abbildung 6.1 dargestellt, so bedarf es der Integralrechnung.

Satz 6.16 (Schwerpunkt einer Fläche)**.** Für den Schwerpunkt $S = (x_S, y_S)$ der Fläche, eingeschlossen vom nichtnegativen Graphen der Funktion f zwischen $a \le x \le b$, und der Abszisse (x–Achse) gilt

$$x_S = \frac{\int_a^b x\, f(x)\, \mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x} \qquad \text{und} \qquad y_S = \frac{1}{2}\, \frac{\int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x}. \tag{6.14}$$

Dehnungsarbeit beim Dehnen einer Schraubfeder. Wird eine Schraubfeder mit der Federkonstante k aus der Ruhelage $x = 0$ auf $x = \lambda \in \mathbb{R}^+$ gedehnt, so muss dafür Arbeit verrichtet werden, die sogenannte *Dehnungsarbeit*. Das Hookesche[3] Gesetz besagt, dass die mechanische Spannung ρ zur Dehnung l proportional ist, wobei die Proportionalitätskonstante k ist. Es gilt demnach $\rho(l) = k\, l$.
Die gesuchte Dehnungsarbeit ist nach Definition zu berechnen als

$$W = \int_0^\lambda \rho(l)\, \mathrm{d}l = \int_0^\lambda k\, l\, \mathrm{d}l = k \int_0^\lambda l\, \mathrm{d}l = k\, \frac{l^2}{2}\bigg|_0^\lambda = \frac{k\, \lambda^2}{2}.$$

Ladungsmenge bei einem zeitlich veränderlichen elektrischen Strom. Die Stromstärke eines zeitlich konstanten Stromes ist definiert durch

$$I = \frac{Q}{t},$$

wobei Q die elektrische Ladung und t die betrachtete Zeit ist. Daher ist die von einem zeitlich veränderlichen Strom i transportierte Ladung ΔQ während des Zeitintervalls Δt gegeben durch

$$\Delta Q = i(t)\, \Delta t.$$

Die während der Zeit $[0, T]$ transportierte Ladungsmenge berechnet sich zu

$$Q = \int_0^T i(t)\, \mathrm{d}t.$$

[3]Robert Hooke (1635 – 1703), englischer Physiker, Mathematiker und Erfinder

Anhang A

Ausgewählte Grundlagen

A.1 Teilbarkeitsregeln

In diesem Abschnitt werden einige wichtige Teilbarkeitsregeln zusammengestellt, die u.a. für das Auffinden von Primfaktorzerlegungen sehr hilfreich sind.

Eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ heißt durch eine Zahl $b \in \mathbb{N}$ **teilbar**, wenn die Division von a durch b ohne Rest möglich ist. Es heißt b **Teiler** von a, in Zeichen $b \mid a$, und a **Vielfaches** von b, also $a = n \cdot b$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Sei $z \in \mathbb{Z}$ mit der Darstellung

$$z = \pm z_m\ z_{m-1}\ \ldots\ z_2\ z_1\ z_0, \quad m \in \mathbb{N},\ z_i \in \{0, 1, \ldots, 9\} \text{ für } i = 0, \ldots, m \text{ und } z_m \neq 0, \tag{A.1}$$

wobei z_i die **Ziffern** der Zahl z heißen. Die **Ziffernsumme** oder **Quersumme** der Zahl z ist definiert als die Summe der Ziffern z_i,

$$z_0 + z_1 + \ldots + z_{m-1} + z_m. \tag{A.2}$$

Teilbarkeitsregeln ganzer Zahlen. Sei $z \in \mathbb{N}$.

(a) Eine Zahl z ist genau dann durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer gerade ist, $z_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

(b) Eine Zahl z ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 teilbar ist.

(c) Eine Zahl z ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist, also $z_0 \in \{0, 5\}$.

(d) Eine Zahl z ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und 3 teilbar ist.

(e) Eine Zahl z ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 9 teilbar ist.

(f) Eine Zahl z ist genau dann durch 10 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 0 ist, also $z_0 = 0$.

A.2 Winkelmaße

Der **Winkel** α im **Bogenmaß** ist definiert als das Verhältnis der Länge des Kreisbogens b zum Radius r,

$$\alpha = \frac{b}{r}. \tag{A.3}$$

Das Bogenmaß ist einheitenlos, da es über ein Verhältnis von Längen definiert ist, zur Unterscheidung von anderen Winkelmaßen wird die Bezeichnung rad für Radiant beigefügt.

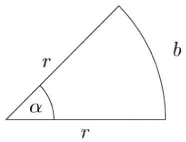


Abbildung A.1: Geometrische Definition des Winkels α am Kreisbogen mit Radius r.

Bemerkung. Im Falle $r = 1$, also dann wenn ein Einheitskreis vorliegt, ist der Wert der Bogenlänge gleich dem Wert des Winkels im Bogenmaß.

Die sogenannte **Kreiszahl** π ist definiert als das Verhältnis von Umfang u zu Durchmesser $d = 2r$ eines Kreises, also

$$\pi = \frac{u}{d} = \frac{u}{2r}. \tag{A.4}$$

Ein voller Winkel, d.h. der Winkel einer vollen Kreisdrehung, ist 2π, verträglich mit der Definition des Bogenmaßes.

Das **Gradmaß** ist ein Hilfsmaß für die Größe eines ebenen Winkels. Ein **Grad**, in Zeichen °, ist definiert als der 360–te Teil einer vollen Kreisdrehung.

Mit diesen Definitionen kann die Umrechnung zwischen Bogenmaß und Gradmaß angegeben werden.

Umrechnung von Winkeln. Sei α_{rad} der Winkel α gemessen in Radiant und $\alpha_\circ$ der Winkel α gemessen in Grad. Es gilt

$$\frac{\alpha_{rad}}{\alpha_\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}. \tag{A.5}$$

Die letzte Formel ermöglicht es, die beiden Winkelmaße ineinander umzurechnen.

Beispiel A.1. Sei α_{rad} der Winkel α gemessen in Radiant und $\alpha_\circ$ der Winkel α gemessen in Grad.

(a) $\alpha_{rad} = \frac{2}{3}\pi$ rad,

$$\alpha_\circ = \frac{\alpha_{rad}}{\pi} \cdot 180^\circ = 120^\circ$$

(b) $\alpha_\circ = 270^\circ$,

$$\alpha_{rad} = \frac{\alpha_\circ}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{3}{2}\pi \,\mathrm{rad}$$

Bemerkung. Im Vermessungswesen ist auch das Neugrad als Hilfsmaß für die Größe eines ebenen Winkels gebräuchlich. Ein **Neugrad**, in Zeichen gon, ist definiert als der 400–te Teil einer vollen Kreisdrehung. Sei α_{gon} der Winkel gemessen in Neugrad, so gilt

$$\frac{\alpha_{\mathrm{gon}}}{\alpha_{\mathrm{rad}}} = \frac{200}{\pi}. \tag{A.6}$$

Anhang B

Erweiterte Formelsammlung

B.1 Winkelfunktionen

In der folgenden Tabelle werden Werte für wichtige Winkel aller Winkelfunktionen angegeben. Werte, die nicht definiert sind, werden mit „–“ gekennzeichnet. Die Tabelle kann mit Überlegungen bezüglich der Symmetrie für Werte $\alpha > \frac{\pi}{2}$ fortgesetzt werden.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\cot\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Es gilt $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sin(-x) = -\sin x \tag{B.1}$$
$$\cos(-x) = \cos x, \tag{B.2}$$

für $x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\tan(-x) = -\tan x \tag{B.3}$$

und für $x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$$\cot(-x) = -\cot x. \tag{B.4}$$

Für x angegeben in Grad gilt:

(a)
$$\sin x = \sin(180° - x) = -\sin(180° + x) = -\sin(360° - x) = \sin(x + 360°) \tag{B.5}$$

(b)
$$\cos x = -\cos(180° - x) = -\cos(180° + x) = \cos(360° - x) = \cos(x + 360°) \tag{B.6}$$

(c)
$$\tan x = -\tan(180° - x) = \tan(180° + x) = -\tan(360° - x) = \tan(x + 360°) \tag{B.7}$$

Es gilt für $x \pm y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ so, dass $\tan x \tan y \neq \pm 1$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}. \tag{B.8}$$

Es gelten für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big) \tag{B.9}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big) \tag{B.10}$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big) \tag{B.11}$$

Weiters gelten:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big) \tag{B.12}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big) \tag{B.13}$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}\big(3\sin x - \sin(3x)\big) \tag{B.14}$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\big(3\cos x + \cos(3x)\big) \tag{B.15}$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}\big(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3\big) \tag{B.16}$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}\big(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 4\big) \tag{B.17}$$

B.2 Hyperbelfunktionen

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten:

$$
\begin{aligned}
\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1}{2}(\cosh x + 1) && && \text{(B.18)}\\
\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1}{2}(\cosh x - 1) && && \text{(B.19)}\\
\tanh\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x}, && x \neq 0 && \text{(B.20)}\\
\coth\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{\sinh x}{\cosh x - 1} = \frac{\cosh x + 1}{\sinh x}, && x \neq 0 && \text{(B.21)}
\end{aligned}
$$

Für $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt

$$\tanh x \coth x = 1 \qquad \text{und} \qquad \cosh x \pm \sinh x = \mathrm{e}^{\pm x}. \tag{B.22}$$

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Es gelten:

$$
\begin{aligned}
\sinh x - \sinh y &= 2\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right) && && \text{(B.23)}\\
\cosh x - \cosh y &= 2\sinh\left(\frac{x+y}{2}\right)\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right) && && \text{(B.24)}\\
\tanh x \pm \tanh y &= \frac{\sinh(x \pm y)}{\cosh x \cosh y} && && \text{(B.25)}\\
\coth x \pm \coth y &= \pm\frac{\sinh(x \pm y)}{\sinh x \sinh y}, && x \neq 0, y \neq 0 && \text{(B.26)}
\end{aligned}
$$

Es gelten für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
\sinh x \sinh y &= \frac{1}{2}\big(\cosh(x+y) - \cosh(x-y)\big) && && \text{(B.27)}\\
\cosh x \cosh y &= \frac{1}{2}\big(\cosh(x+y) + \cosh(x-y)\big) && && \text{(B.28)}\\
\sinh x \cosh y &= \frac{1}{2}\big(\sinh(x+y) + \sinh(x-y)\big) && && \text{(B.29)}\\
\tanh x \tanh y &= \frac{\tanh x + \tanh y}{\coth x + \coth y} && && \text{(B.30)}\\
\coth x \coth y &= \frac{\coth x + \coth y}{\tanh x + \tanh y}, && x \neq 0, y \neq 0, \tanh x \neq -\tanh y && \text{(B.31)}
\end{aligned}
$$

Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh(nx) \pm \sinh(nx). \tag{B.32}$$

Anhang C

Inhaltliche Ergänzungen

C.1 Steigungs- und Schnittwinkel von Geraden

In diesem Abschnitt werden einige Ergänzungen zum Thema Steigungs– und Schnittwinkel der linearen Funktion bzw. von linearen Funktionen vorgestellt. Die Darstellung ist ergänzend zu Abschnitt 2.2.1 zu sehen und kommt ohne Vektorrechnung aus.

Der **Steigungswinkel** α einer Geraden ist das Winkelmaß des geometrischen Anstiegs einer Geraden. Es gilt

$$\tan \alpha = k, \tag{C.1}$$

für $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

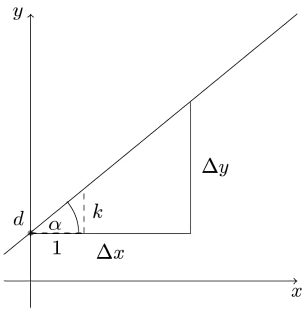


Abbildung C.1: Steigungswinkel einer Geraden

Im Falle der Existenz eines Schnittpunktes S zweier Geraden f und g stellt sich die Frage nach dem eingeschlossenen Winkel der beiden Geraden im Schnittpunkt.

Der **Schnittwinkel** φ **zweier**, nicht paralleler, **Geraden** am Schnittpunkt S ist das Winkelmaß zwischen den beiden Geraden, wobei $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ gilt.

Zusammenhang Steigung und Steigungswinkel. Seien $f\colon x \mapsto k_1x + d_1$ und $g\colon x \mapsto k_2x + d_2$ zwei Geraden, die einander im Schnittpunkt $S = (x_S, y_S)$ schneiden. Für den Schnittwinkel φ gilt

$$\tan \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|. \tag{C.2}$$

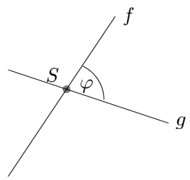


Abbildung C.2: Schnittwinkel zweier Geraden f und g

Beweis. Die Beweisidee folgt dem Zerlegen in zwei Steigungswinkel. Angelehnt an Abbildung C.2 wäre ein Steigungswinkel negativ, dieser muss betragsmäßig gerechnet werden. Um den Beweis vollständig korrekt abwickeln zu können muss eine Fallunterscheidung durchgeführt werden. Hier soll nur der einfachste Fall betrachtet werden.

Mit $\tan\alpha_1 = k_1$, $\tan\alpha_2 = k_2$ und unter der Verwendung des Additionstheorems für die Tangensfunktion B.8 folgt

$$\tan\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Die Betragsstriche resultieren aus der Fallunterscheidung. □

C.2 Die Eulersche Zahl

Um den Limes in Definition 2.44 zu definieren, müssen Zahlenfolgen definiert und untersucht werden.

Eine Abfolge von reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ heißt eine unendliche **Zahlenfolge** (a_n) mit $n \in \mathbb{N}$, kurz geschrieben als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder lediglich (a_n). Wenn ein sogenanntes *Bildungsgesetz* für a_n bekannt ist, so kann zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ das zugehörige Folgenglied a_n direkt berechnet werden.

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) kann also als Abbildung $a\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \mapsto a_n$ interpretiert werden.

Beispiel C.1. Die Folge (x_n) mit

$$x_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

lautet in aufzählender Schreibweise

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \ldots.$$

Dieses Beispiel legt die Frage nahe, wie sich die Zahlenfolge für $n \to \infty$ verhält. Es ist von Interesse, ob sich die Folge für $n \to \infty$ einer reellen Zahl nähert, dem Unendlichen nähert oder unbestimmt ist.

Existiert zu einer Zahlenfolge (a_n) eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, dass

$$|a_n - a| = 0 \qquad \text{für} \qquad n \to \infty \tag{C.3}$$

gilt, so heißt die Folge **konvergent** gegen a. Man schreibt hierfür symbolisch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Folgen, welche keinen Grenzwert besitzen, heißen **divergent**.

Die Charakterisierung des Grenzwerts ist hier sehr intuitiv vorgenommen, für eine mathematisch exakte Definition ist der Begriff einer ε–Umgebung notwendig. Dies übersteigt den Rahmen des Angleichungskurses, es sei hier auf die Mathematik Grundlagenvorlesungen verwiesen.

Anhang D

Elementare Kombinatorik

Unter elementarer Kombinatorik versteht man die Lehre des Abzählens endlicher Mengen. Im Folgenden werden also immer Mengen M betrachtet, deren Anzahl an Elementen endlich ist.

Definition D.1. Sei M eine endliche Menge. Die Anzahl der Elemente der Menge M wird mit $|M|$ oder $\#M$ bezeichnet. Es gilt $|M| \in \mathbb{N}_0$, bzw. $\#M \in \mathbb{N}_0$ und $\#\emptyset = 0$.

D.1 Mathematische Werkzeuge

Dieser Abschnitt ist den mathematischen Grundlagen gewidmet, die man benötigt, um die elementare Kombinatorik zu bestreiten.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist die **Fakultät** von n definiert durch $0! = 1$ und

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \qquad \text{für } n \geq 1. \tag{D.1}$$

Die Fakultät lässt sich auch rekursiv durch

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n(n-1)!, & n > 0 \end{cases}$$

definieren.

Sei $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$. Der **Binomialkoeffizient** ist definiert durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{D.2}$$

Bemerkung. Der Binomialkoeffizient gibt Antwort auf die Frage nach der Anzahl an Möglichkeiten k Elemente aus einer Menge von n Elementen auszuwählen.

Beispiel D.2.

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10$$

Eigenschaften des Binomialkoeffizienten. Es gilt für $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

Additionstheorem des Binomialkoeffizienten. Für $n, k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}. \tag{D.3}$$

Als Erweiterung des Binomialkoeffizienten wird die folgende Definition eingeführt.

Für $n, k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ heißt

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!} \tag{D.4}$$

der **Multinomialkoeffizient**.

Eigenschaften des Multinomialkoeffizienten. Für $n, k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$, $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ gilt

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \binom{k_1}{k_1} \cdot \binom{k_1+k_2}{k_2} \cdot \ldots \cdot \binom{k_1+k_2+\ldots+k_m}{k_m} = \prod_{i=1}^{m} \binom{\sum_{l=1}^{i} k_l}{k_i}. \tag{D.5}$$

Nun werden diese Werkzeuge für Berechnungen der **abzählbaren Kombinatorik** herangezogen. Der Teilbereich abzählende Kombinatorik befasst sich mit dem Bestimmen der Anzahl möglicher Anordnungen oder einer Auswahl. Hierbei müssen die diversen Varianten der Auswahl unterschieden werden, d.h. ob die beteiligten Objekte unterscheidbar sind (mit und ohne Wiederholung), sowie die Bedeutung der Reihenfolge (geordnet oder ungeordnet).

Es bezeichnet im Folgenden $[n] := \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$ eine **diskrete Menge**.

D.2 Permutationen

Unter **Permutationen**[1] versteht man die Vertauschung von Elementen. Die Frage nach der Unterscheidbarkeit ist bei diesen Überlegungen von zentraler Bedeutung.

Sei $M = \{1, 2, \ldots, n\} = [n]$, $n \in \mathbb{N}$, eine endliche Menge. Eine bijektive Abbildung $\sigma\colon [n] \to [n]$ heißt eine **Permutation** oder **Anordnung** (ohne Wiederholung) der Menge M.

Diese Erklärung einer Permutation wirft nun die Frage nach der Anzahl solcher Permutationen auf.

Die Anzahl an Permutationen P_n der Menge $M = \{1, 2, \ldots, n\} = [n]$, $n \in \mathbb{N}$ lautet

$$P_n = n!. \tag{D.6}$$

Beispiel D.3. Ein einführendes Beispiel ist die Anordnung einer Menge an Personen, welche alle unterscheidbar sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es 10 Personen in einer Reihe aufzustellen? Da es wegen der Unterscheidbarkeit der Personen keine Wiederholung gibt ist die Lösung $P_{10} = 10!$.

[1] permutare (lat.) für (ver)tauschen

Da Permutationen auf endlichen Mengen operieren, können diese durch ein Schema dargestellt werden, man bedient sich hierfür der Darstellung mit Hilfe einer Matrix. Die Abbildung σ bildet ein Element $i \in [n]$ ab, dies kann man in der Matrix der Permutation spaltenweise darstellen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Nun soll der Fall untersucht werden, dass Wiederholungen zugelassen werden. Darunter versteht man, dass man in der Menge $M = \{1, 2, \dots, n\} = [n]$ Objekte zu m Klassen zusammenziehen kann. Es gibt dann $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ gleiche Objekte und es gilt

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n.$$

Die Anzahl an Permutationen mit Wiederholung $P_n^{k_1,k_2,\dots,k_m}$ von n Elementen mit m Klassen zu je $k_1, k_2, \dots, k_m$ gleichen Objekten berechnet sich zu

$$P_n^{k_1,k_2,\dots,k_m} = \binom{n}{k_1, \dots, k_m}. \tag{D.7}$$

Beispiel D.4. 16 Personen, davon 7 Frauen, 4 Männer und 5 Kinder sollen in einer Reihe aufgestellt werden, wobei als Unterscheidungsmerkmale nur „Frau", „Mann" und „Kind" zugelassen werden. Dies bildet die Klasseneinteilung und es gilt $k_1 = 7$, $k_2 = 4$, $k_3 = 5$ und $n = 16$. Würde man zwischen den einzelnen Personen auch noch unterscheiden, wäre die Frage nach der Anzahl an Permutationen ohne Wiederholung mit $P_{16} = 16!$ beantwortet. Mit der oben genannten Klasseneinteilung erhält man als Anzahl von Permutationen mit Wiederholung

$$P_{16}^{7,4,5} = \binom{16}{7,4,5} = \frac{16!}{7! \cdot 4! \cdot 5!} = 1441440.$$

Bemerkung. Ein wichtiger Sonderfall sind Permutationen mit Wiederholung mit zwei Klassen. Die Anzahl dieser lautet

$$P_n^{k,n-k} = \binom{n}{k}. \tag{D.8}$$

Abschließend seien noch einige Beobachtungen für das Arbeiten mit Permutationen zusammengefasst:

(a) Aus der Menge M mit $\#M = n$ Elementen werden alle n Elemente miteinbezogen.

(b) Die Reihenfolge der Anordnung der n Elemente ist entscheidend.

(c) Abhängig vom Auftreten von Klassen gibt es Permutationen mit und ohne Wiederholung.

D.3 Kombinationen

Bei einer Permutation ist die Reihenfolge der ausgewählten Objekte relevant, da es sich um eine Bijektion handelt. Wird die Reihenfolge nicht mehr berücksichtigt und eine Auswahl der Objekte getroffen, so spricht man von einer Kombination.

Sei $M = \{1, 2, \dots, n\} = [n]$ eine endliche Menge mit n Elementen und $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$. Eine **Kombination** von k Elementen aus M ist eine k–elementige Teilmenge der Menge M.

Bemerkung. Eine Kombination kann hier aus Sicht der Mengenlehre betrachtet werden. Da hier die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird, bedeutet das, dass bei einer Auswahl von k Elementen der Menge M beispielsweise zwischen der Auswahl $\{4,5,6\}$ und $\{5,4,6\}$ nicht unterschieden wird. In der Mengenlehre ist dieser Sachverhalt ident, denn Mengen werden als gleich behandelt, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Im Unterschied zu Folgen ist bei Mengen die Reihenfolge unerheblich.

Die Anzahl K_n^k an Kombinationen von k Elementen aus der n–elementigen Menge M lautet

$$K_n^k = \binom{n}{k}. \tag{D.9}$$

Bemerkung. Vergleiche (D.9) mit (D.8) und die entsprechenden Interpretationen.

Beispiel D.5. 6 Personen sitzen an einem Tisch und möchten mit Gläsern anstoßen. Die Frage, wie oft die Gläser klingen, lässt sich mit Hilfe von Kombinationen beantworten. Es werden aus $n = 6$ immer Auswahlen zu $k = 2$ getroffen und es wird zwischen „Person 1 stoßt mit Person 2 an" nicht zu „Person 2 stoßt mit Person 1 an" unterschieden. Deshalb handelt es sich um Kombinationen, deren Anzahl lautet

$$K_6^2 = \binom{6}{2} = 15.$$

Dieses Beispiel erlaubt auch eine noch elementarere Betrachtung. Man kann aufgrund der überblickbaren Aufgabenstellung auch die Anzahl abzählen. Person 1 hat 5 andere Personen zum Anstoßen zur Verfügung, Person 2 hat mit Person 1 dann schon angestoßen und hat nur noch 4 Personen zur Verfügung, usw. Damit ergibt sich die Rechnung $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

Nun wird die Erweiterung vorgenommen, dass man mehrmals eine Kombination durchführen kann, also immer wieder aus demselben Ausgangszustand eine Kombination bildet. Dieser Prozess wird als „mit Zurücklegen" bezeichnet, da immer wieder alle n Elemente zur Verfügung stehen, „gezogene" Elemente also immer wieder zurückgelegt werden müssen, um zur Verfügung zu stehen.

Wird aus einer Grundgesamtheit von n Elementen k–mal mit Zurücklegen ausgewählt, so muss $(k-1)$–mal (gedanklich) zurückgelegt werden, um die Grundgesamtheit wieder herzustellen.

Die Anzahl $\overline{K}_n^k$ der Kombinationen von k Elementen aus n Elementen mit Wiederholung lautet

$$\overline{K}_n^k = \binom{n+k-1}{k}. \tag{D.10}$$

Beispiel D.6. Ein einfaches Beispiel, das die Struktur der Wiederholung bei Kombinationen verdeutlichen soll, ist das Würfeln mit zwei gleichartigen Würfeln. Die Frage nach der Anzahl von Wurfkombinationen führt auf die Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung. Es ist also $n = 6$ und $k = 2$ bei dieser Fragestellung und damit ergibt dies eine Anzahl an Kombinationen mit Wiederholung von

$$\overline{K}_6^2 = \binom{7}{2} = 21.$$

Abschließend seien noch einige Beobachtungen für das Arbeiten mit Kombinationen zusammengefasst:

(a) Aus der Menge M mit $\#M = n$ Elementen werden k Elemente miteinbezogen.

(b) Die Reihenfolge der Anordnung der k Elemente ist nicht entscheidend.

(c) Abhängig von der Möglichkeit des mehrmaligen Auftretens der Elemente gibt es Kombinationen mit und ohne Wiederholung.

D.4 Variationen

Werden aus einer Gesamtheit von n verschiedenen Elementen k Elemente unter Berücksichtigung der Reihenfolge entnommen, so spricht man von einer **Variation**[2].

Sei $M = \{1, 2, \dots, n\} = [n]$ eine endliche Menge mit n Elementen, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ und $K \subset M$. Eine **Variation** ist eine Permutation der Teilmenge K, also eine bijektive Abbildung der Teilmenge K auf sich selbst.

Auch hier schließt sich wieder die Frage der Anzahl dieser Variationen an.

Die Anzahl V_n^k an Variationen von k Elementen aus der n–elementigen Menge M lautet

$$V_n^k = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{D.11}$$

Beispiel D.7. In einer Personengruppe mit 20 Personen sollen vier Funktionen vergeben werden. Die Frage nach der Anzahl an Möglichkeiten diese Funktionen zu vergeben, ist die nach einer Variation für $n = 20$ und $k = 4$, da die Reihenfolge der vier Ämter signifikant ist. Die Anzahl der Variationen lautet demnach

$$V_{20}^4 = \binom{20}{4} \cdot 4! = 116280.$$

Nun wird bei den Variationen die Wiederholung hinzugenommen, in dem Sinne, dass aus n verschiedenen Elementen k–mal hintereinander ausgewählt und vor der nächsten Auswahl die Grundmenge wiederhergestellt wird.

Die Anzahl $\overline{V}_n^k$ der Variationen von k Elementen aus n Elementen mit Wiederholung lautet

$$\overline{V}_n^k = n^k. \tag{D.12}$$

Beispiel D.8. In einer Personengruppe mit 20 Personen sollen vier Funktionen vergeben werden, wobei es zulässig ist, dass einzelne Personen auch mehr als ein Amt ausüben. Dies ist eine Anwendung einer Variation mit Wiederholung, denn für jeden Wahldurchgang eines Amts stehen immer alle 20 Personen zur Verfügung. Die Frage nach der Anzahl an Möglichkeiten führt auf

$$\overline{V}_{20}^4 = 20^4 = 160000.$$

Abschließend seien noch einige Beobachtungen für das Arbeiten mit Variationen zusammengefasst:

(a) Aus der Menge M mit $\#M = n$ Elementen werden k Elemente miteinbezogen.

(b) Die Reihenfolge der Anordnung der k Elemente ist entscheidend.

(c) Abhängig von der Möglichkeit des mehrmaligen Auftretens der Elemente gibt es Variationen mit und ohne Wiederholung.

[2] variatio (lat.) für Veränderung

D.5 Stichproben

Abschließend im Kapitel Abzählende Kombinatorik sei noch der Bezug der kombinatorischen Begriffe Permutation, Kombination und Variation zu sogenannten Stichproben hergestellt.
Aus einer Menge $M = \{1, 2, \dots, n\} = [n]$ können auf verschiedene Weisen Stichproben vom Umfang k entnommen werden. Es werden also aus den $1, \dots, n$ Elementen $1, \dots, k$ Elemente ausgewählt, mit $k \leq n$. Dies verdeutlicht den Bezug zur Frage wie viele Abbildungen der Form $f\colon [k] \to [n]$ existieren. Im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik bezeichnet man die Menge M gelegentlich als **Urne** in Hinblick auf das Standardmodell, dass Kugeln aus einer Urne gezogen werden, welche die Grundgesamtheit beherbergt. Beim Bilden der Stichprobe unterscheidet man, ob es auf die Reihenfolge ankommt oder nicht und ob nach dem Auswählen eines Elements, oder mehrerer Elemente, die Grundgesamtheit wieder hergestellt wird oder nicht.

Es werden vier Fälle unterschieden:

(a) **Geordnete Stichprobe ohne Wiederholung:** Dabei handelt es sich um k–maliges Auswählen aus der Urne ohne Zurücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge.

(b) **Geordnete Stichprobe mit Wiederholung:** Dabei handelt es sich um k–maliges Auswählen aus der Urne mit Zurücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge.

(c) **Ungeordnete Stichprobe ohne Wiederholung:** Dabei handelt es sich um k-maliges Auswählen aus der Urne ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

(d) **Ungeordnete Stichprobe mit Wiederholung:** Dabei handelt es sich um k-maliges Auswählen aus der Urne mit Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

Die Stichprobenanzahl berechnet sich nun entsprechend den vier oben angeführten Fällen wie in Tabelle D.1 dargestellt.

Stichprobe vom Umfang k aus $M = [n]$	ohne Wiederholung	mit Wiederholung
geordnete Stichprobe	$\binom{n}{k} \cdot k!$	n^k
ungeordnete Stichprobe	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Tabelle D.1: Stichprobenanzahl der vier Bildungsmöglichkeiten.

Anhang E

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ausgehend von den Zusammenhängen der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Kapitel der Kombinatorik, werden in diesem Abschnitt die kennengelernten Begriffe vertieft und weitere Zufallsexperimente und deren Wahrscheinlichkeiten berechnet. Abschließend wird der Komplex der Statistik besprochen.

E.1 Laplacesche Wahrscheinlichkeit und Stichproben

E.1.1 Laplacesche Wahrscheinlichkeit

Definition E.1. Ein Zufallsexperiment, bei dem jedes der $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ möglichen Versuchsergebnisse ω mit der gleichen Wahrscheinlichkeit, demnach mit $P(\omega) = \frac{1}{n}$, auftritt, heißt ein **Laplacesches Zufallsexperiment**.

Bezeichnet A das Ereignis und Ω die Ergebnismenge ($A \subseteq \Omega$), so gilt

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Typische Beispiele hierfür sind der Münzwurf, das Würfeln mit einem idealen Würfel, die Geschlechterverteilung bei der Geburt, etc.

Beispiel E.2. Welche Wahrscheinlichkeit haben die folgenden Ereignisse beim Würfeln eines idealen Würfels? Die Augenzahl ist

(a) gerade,

(b) kleiner gleich 5,

(c) größer 5,

(d) negativ,

(e) ein Teiler von 60.

Das vorherige Beispiel zeigt, dass es einander ausschließende Ereignisse gibt, die gemeinsam aber den gesamten Ergebnisraum Ω ergeben, also $A \cup B = \Omega$ mit $A \cap B = \emptyset$. Das Ereignis B heißt das **Gegenereignis** zum Ereignis A, in Zeichen A^c.

Satz E.3. Es gilt

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

E.1.2 Ziehen von Stichproben

Beispiel E.4. Man schreibe alle geordneten Stichproben vom Umfang 2 aus der Menge $\{a, b, c, d\}$ auf.

Mit Zurücklegen			
(a, a)	(a, b)	(a, c)	(a, d)
(b, a)	(b, b)	(b, c)	(b, d)
(c, a)	(c, b)	(c, c)	(c, d)
(d, a)	(d, b)	(d, c)	(d, d)

Ohne Zurücklegen		
(a, b)	(a, c)	(a, d)
(b, b)	(b, c)	(b, d)
(c, a)	(c, b)	(c, d)
(d, a)	(d, b)	(d, c)

Ziehen geordneter Stichproben – 1. Pfadregel.

Ziehen geordneter Stichproben mit Zurücklegen: Als Beispiel ist das Ziehen von verschiedenfarbigen Kugeln (4 rote, 6 blaue) aus einer Urne anzuführen. Wird zurückgelegt, so ist die Laplacesche Wahrscheinlichkeit immer die selbe.

Ziehen geordneter Stichproben ohne Zurücklegen: Für das gleiche Beispiel würde sich pro Zug einer Kugel die Gesamtzahl immer um eine Kugel reduzieren, was Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit in jeder Ebene hat.

Die Baumstruktur der Ereignisse führt zur sogenannten 1. Pfadregel.

Satz E.5 (1. Pfadregel)**.** Die Wahrscheinlichkeit einer geordneten Stichprobe ist das Produkt aller Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm.

Ziehen ungeordneter Stichproben – 2. Pfadregel.

Ziehen ungeordneter Stichproben ohne Zurücklegen: In diesem Fall wird die Reihenfolge nicht berücksichtigt und es liegt kein Zurücklegen vor. Beispielsweise die Frage nach der Wahrscheinlichkeit von bestimmten Ereignissen, wobei nur die Auswahl von Interesse ist, nicht aber die Reihenfolge, wäre ein geeignetes Beispiel.

Beispiel E.6. Ein Schüler hat sich für die Stundenwiederholung nicht ausreichend vorbereitet. Es ist bekannt, dass die Lehrkraft jede Stunde 2 Personen auswählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zur Stundenwiederholung aufgerufen zu werden, wenn noch 14 andere Schülerinnen und Schüler anwesend sind?

$$P = \frac{1}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{1}{14} = \frac{2}{15}$$

Satz E.7 (2. Pfadregel)**.** Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

Ziehen ungeordneter Stichproben mit Zurücklegen: Im obigen Beispiel ist es nicht möglich den Schüler doppelt zur Wiederholung zu prüfen. Wird das Beispiel aber erweitert auf ein zweites Fach, ist dies sehr wohl möglich.

Abschließend wird ein Beispiel als Überblick und Zusammenfassung angeführt.

Beispiel E.8. Aus einer Urne mit $n = 3$ Kugeln (1 weiße, 1 graue, 1 schwarze) werden $k = 2$ Kugeln unter verschiedenen Bedingungen gezogen.

Die unterschiedlichen Varianten von Stichproben ergibt für geordnete Stichproben mit Zurücklegen

$$n^k = 3^2 = 9$$

und für jene ohne Zurücklegen

$$n! = 3! = 6.$$

Ungeordnete Stichproben ergeben mit Zurücklegen

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{4}{2} = 6$$

und ohne Zurücklegen

$$\binom{n}{k} = \binom{3}{2} = 3.$$

E.2 Die Binomialverteilung

Definition E.9. Ein aus einer Folge von n Versuchen bestehendes Experiment, bei dem

(a) jeder Versuch genau zwei mögliche Versuchsausgänge besitzt und

(b) jeder Versuch unter genau den gleichen Voraussetzungen abläuft,

heißt ein **Bernoulli–Experiment**.

Ein klassisches Bernoulli–Experiment ist das mehrfache Ziehen von Kugeln. Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten kann hier mit Hilfe der Baumdiagramme des letzten Kapitels erfolgen, wobei Folgendes betrachtet wird. Der Versuch läuft mit Zurücklegen, d.h. die Wahrscheinlichkeiten sind pro Ebene unverändert und die Experimente können (formal) unendlich lange ablaufen. Des Weiteren ist die Reihenfolge unerheblich, es wird also zwischen Versuchsausgängen, welche die gleiche Anzahl von Elementen in der Abfolge haben, nicht unterschieden. Dies führt zur

Definition E.10 (Verteilungsgesetz der Binomialverteilung)**.** Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Bernoulli–Experiment mit der Auftrittswahrscheinlichkeit p, mit $0 < p < 1$, die Anzahl der Ergebnisse genau k ist, für $k = 1, 2, \dots, n$, ist gegeben durch

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Beispiel E.11. Es wird die Geburt eines Kindes als Zufallsexperiment betrachtet. Sei angenommen, dass die Geburt eines Mädchens mit der Auftrittswahrscheinlichkeit $p = 0.6$ eintritt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Familie mit 5 Kindern

(a) weniger als 2,

(b) genau 2,

(c) mehr als 2,

(d) höchstens 2,

(e) mindestens 2 und

(f) keine

Töchter auftreten. Die Zufallsvariable X soll dabei die Anzahl der Töchter bezeichnen.

(a) $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{5}{0} p^0(1-p)^5 + \binom{5}{1} p^1(1-p)^4 = 0.08704$

(b) $P(X = 2) = \binom{5}{2} p^2(1-p)^3 = 0.2304$

(c) $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0.68256$

(d) $P(X \leq 2) = P(X < 2) + P(X = 2) = 0.31744$

(e) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 0.91296$

(f) $P(X = 0) = (1 - p)^5 = 0.01024$

E.3 Die Normalverteilung

Die Normalverteilung hat im Unterschied zu den vorangegangenen Verteilungen keine diskreten Zufallsexperimente, der Ausgang dieser Zufallsexperimente ist kontinuierlich. Das heißt die Zufallsvariable ist eine reelle Zahl und wird daher unterschiedlich behandelt. Als typische Beispiele kann man sich die Länge von Nägeln, die Brenndauer einer Glühbirne, oder etwa die Körpergröße vorstellen.

Die **Normalverteilung** wird durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

definiert. Diese Funktion hat die Eigenschaften:

(a) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(b) die Gesamtfläche unter der Funktion f ist 1,

(c) für $x \to \pm\infty$ ist $f(x) = 0$.

Die Parameter μ und σ spielen hier eine beschreibende Rolle und die Zufallsvariable wird dabei notiert als $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, siehe Abbildung E.3.

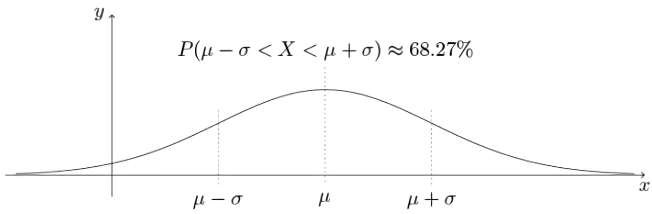


Abbildung E.1: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion kann man Wahrscheinlichkeiten der folgenden Form berechnen

$$P(-\infty \leq X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Diese Berechnung ist nicht über das Integral durchzuführen sondern kann mit Hilfe von Tabellen durchgeführt werden. Ist diese Wahrscheinlichkeit bekannt, so kann daraus der Schluss

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(-\infty \leq X \leq x_2) - P(-\infty \leq X \leq x_1)$$

gezogen werden und damit die Berechnung der Wahrscheinlichkeit beantwortet werden, die in einem gewissen Intervall $[x_1, x_2]$ von Interesse ist.

Die tatsächliche Berechnung erfolgt über die Transformation

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

In der Normalverteilung kommt μ die Rolle des Mittelwerts oder Erwartungswerts und σ die Rolle der Standardabweichung zu. Es wird davon ausgegangen, dass die sogenannte **Standardnormalverteilung** $\mathcal{N}(0,1)$ in tabellarischer Form bekannt ist.

Der Wert $P(Z \leq z)$ wird in der Tabelle als $\Phi(z)$ abgelesen, damit gilt

$$\Phi(z) = P(-\infty < Z < z).$$

Mit Hilfe dieser Transformation können Fragestellungen zur Normalverteilung beantwortet werden. Hilfreich ist manchmal folgender

Satz E.12.

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

Beispiel E.13. Gegeben sei eine Normalverteilung $\mathcal{N}(3, 2^2)$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

(a) $P(X \leq 5)$, (b) $P(X < 2.4)$ und (c) $P(4.2 \leq X \leq 5.1)$.

(a) Es gilt für $x = 5$ die Transformation

$$z = \frac{5-3}{2} = 1$$

und damit die Rechnung

$$P(X \leq 5) = P(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0.84134.$$

(b) Mit $x = 2.4$ gilt $z = -0.3$. Da x kleiner als der Mittelwert $\mu = 3$ ist, muss z negativ sein. Damit folgt

$$P(X < 2.4) = P(Z < -0.3) = \Phi(-0.3) = 1 - \Phi(0.3) = 0.38209.$$

(c) Mit $x_1 = 4.2$ und $x_2 = 5.1$ folgt $z_1 = 0.6$ und $z_2 = 1.05$. Damit gilt

$$P(4.2 \leq X \leq 5.1) = P(0.6 \leq Z \leq 1.05) = \Phi(1.05) - \Phi(0.6) = 0.12739.$$

Literaturverzeichnis

[1] Reichel M., Müller R., *Lehrbuch der Mathematik 5–8*, öbv&hpt, Wien, 2002

[2] Bürger H. et al., *Mathematik Oberstufe 4*, öbv&hpt, Wien, 2004

[3] Walz G., Zeilfelder F., Rießinger Th., *Brückenkurs Mathematik für Studieneinsteiger aller Disziplinen*, Spektrum, Berlin Heidelberg, 2007

[4] Merziger G., Mühlbach G., Wille D., Wirth T., *Formeln + Hilfen zur höheren Mathematik*, Binomi, Hannover, 4. Auflage, 2001

[5] Bürger H., Unfried H., Haschkovitz F., *Mathematische Formelsammlung*, öbv&hpt, Wien, 8. Auflage, 1999

[6] Prechtl A., *Vorlesungen über die Grundlagen der Elektrotechnik, Band 1*, Springer, 2. Auflage, 2006

[7] Schranz-Kirlinger G., *MATHEMATIK 1 für Vermessung und Geoinformation*, Technische Universität Wien, September 2011

[8] Fulmek M., Krattenthaler C., *Diskrete Mathematik*, Universität Wien, September 2008

Index