

Relações

Antonio Alfredo Ferreira Loureiro

`loureiro@dcc.ufmg.br`

Olga Nikolaevna Goussevskiaia

`olgang@gmail.com`

Introdução

- O mundo está “povoado” por relações: família, emprego, governo, negócios, etc.
- Entidades em Matemática e Ciência da Computação também podem estar relacionadas entre si de diversas formas.
- Objetivo:
 - estudar relações em conjuntos;
 - estudar formas de representar relações;
 - estudar propriedades de relações.

Relações em conjuntos

Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$.

Suponha que um elemento x em A esteja relacionado com um elemento y em B sse $x < y$.

A notação xRy quer dizer que “ x está relacionado com y ”, onde R é o nome da relação (neste caso, $x < y$).

Logo, temos que:

$0R1$	porque	$0 < 1,$
$0R2$	porque	$0 < 2,$
$0R3$	porque	$0 < 3,$
$1R2$	porque	$1 < 2,$
$1R3$	porque	$1 < 3,$
$2R3$	porque	$2 < 3$

Por outro lado, a notação $x \not R y$ quer dizer que “ x não está relacionado com y .”

Relações em conjuntos

Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$.

Logo, temos que:

$1 \not\mathcal{R} 1$ porque $1 \not\leq 1$,

$2 \not\mathcal{R} 1$ porque $2 \not\leq 1$,

$2 \not\mathcal{R} 2$ porque $2 \not\leq 2$

Relações em conjuntos

- O produto cartesiano de A e B , é definido por

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$$

- Para este exemplo ($A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$), temos que:

$$A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

e os elementos que satisfazem a relação são

$$R = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}.$$

Relações em conjuntos

Definição (Relação (binária)):

- Sejam os conjuntos A e B .
- Uma relação binária de A para B é um subconjunto de $A \times B$.
- Dado um par ordenado (x, y) em $A \times B$, x está relacionado com y por R , escrito xRy , sse $(x, y) \in R$.
- O termo “binário” é usado para indicar uma relação entre dois conjuntos.

Notação:

- “ x está relacionado com y ”:

$$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$$

- “ x não está relacionado com y ”:

$$x \not R y \Leftrightarrow (x, y) \notin R$$

Relação binária num conjunto finito

Exemplo 1 Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ e a relação binária R de A para B como:

$$\forall (x, y) \in A \times B, (x, y) \in R \Leftrightarrow x - y \text{ é par}$$

Logo, temos que

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

e

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2)\}$$

Relação binária num conjunto infinito: Relação de congruência módulo 2

- A relação anterior pode ser generalizada para o conjunto de todos os inteiros \mathbb{Z} . Neste caso, a relação binária E de \mathbb{Z} para \mathbb{Z} pode ser definida como:

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, mEn \Leftrightarrow m - n \text{ é par}$$

- Os inteiros m e n são relacionados por E sse

$$m \bmod 2 = n \bmod 2,$$

ou seja, se os números m e n são pares ou ímpares.

- Quando essa relação é satisfeita, diz-se que m e n são congruentes módulo 2

$$m \equiv n \bmod 2$$

Exemplos de relações binárias

Exemplo 2 Seja a relação C de \mathbb{R} para \mathbb{R} definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \in C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

– $(1, 0) \in C?$

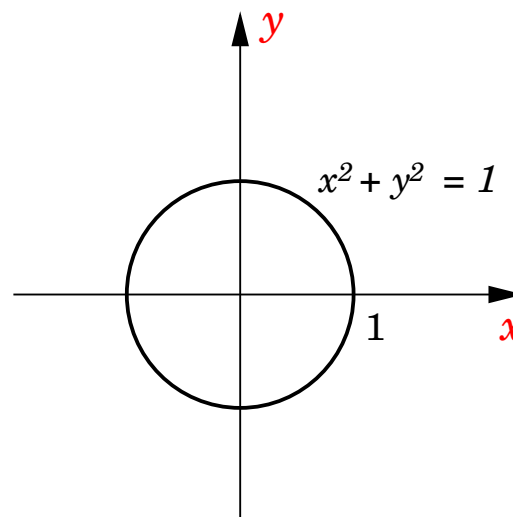
Sim.

– $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in C?$

Sim.

– $(-2, 0) \in C?$

Não.



Exemplos de relações binárias

Exemplo 3 Seja A o conjunto de todos os strings de tamanho 6 formados de x 's e y 's. O conjunto A é representado por Σ^6 onde $\Sigma = \{x, y\}$.

Seja a relação binária R de A para A definida como:

$$sRt \Leftrightarrow \text{substr}(s, 1, 4) = \text{substr}(t, 1, 4)$$

– $xyxyxRxxxyxy?$

Não.

– $xyyyxRxyxyxy?$

Sim.

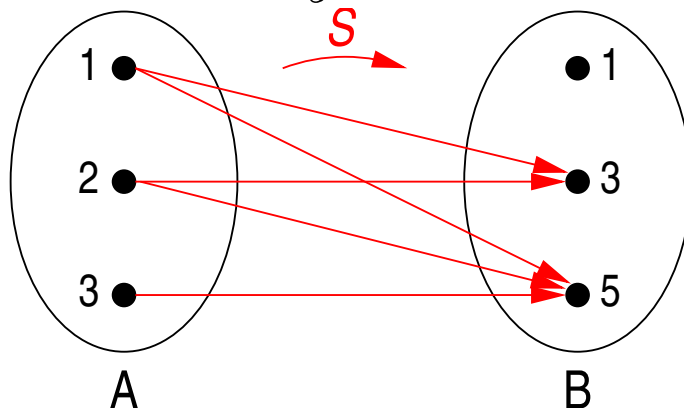
Diagrama de seta de uma relação

- Suponha que R é uma relação de um conjunto A para um conjunto B . O “diagrama de seta” para R é obtido da seguinte forma:
 1. Represente os elementos de A numa região e os elementos de B como pontos em outra região.
 2. Para cada x em A e y em B , desenhe uma seta de x para y sse x é relacionado com y por R . Simbolicamente:
 - Desenhe uma seta de x para $y \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

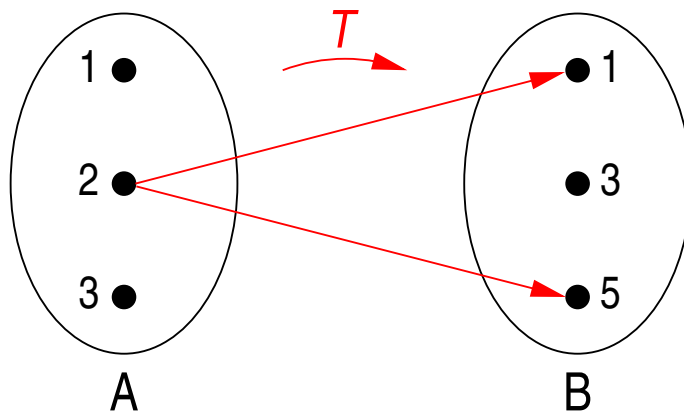
Exemplos de relações binárias

Exemplo 4 Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ e as relações:

– $\forall (x, y) \in A \times B, (x, y) \in S \Leftrightarrow x < y$



– $T = \{(2, 1), (2, 5)\}$



Relações e funções

Definição:

Uma função F de um conjunto A para um conjunto B é uma relação de A para B que satisfaz as duas propriedades abaixo:

1. Para cada elemento x em A , existe um elemento y em B tal que $(x, y) \in F$.

→ cada elemento de A é o primeiro elemento de um par ordenado de F .

2. Para todos elementos x em A e y e z em B ,

se $(x, y) \in F$ e $(x, z) \in F$, então $y = z$

→ não existem dois pares ordenados distintos cujo primeiro elemento seja o mesmo.

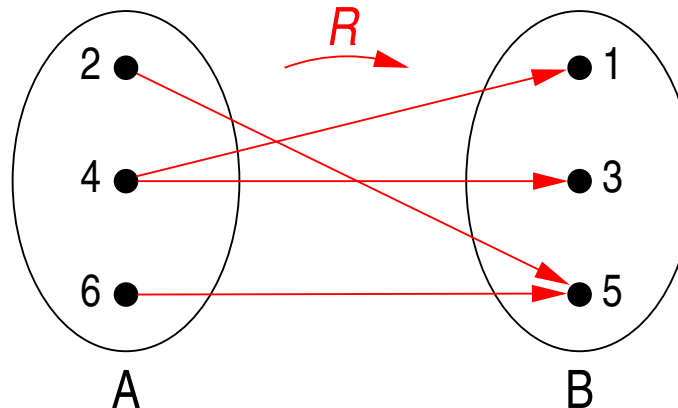
Se F é uma função de A para B , temos que

$$y = F(x) \Leftrightarrow (x, y) \in F$$

Relações e funções

Exemplo 5 Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ e a relação:

- $R = \{(2, 5), (4, 1), (4, 3), (6, 5)\}$. R é uma função?
Não, por causa dos pares $(4, 1)$ e $(4, 3)$.

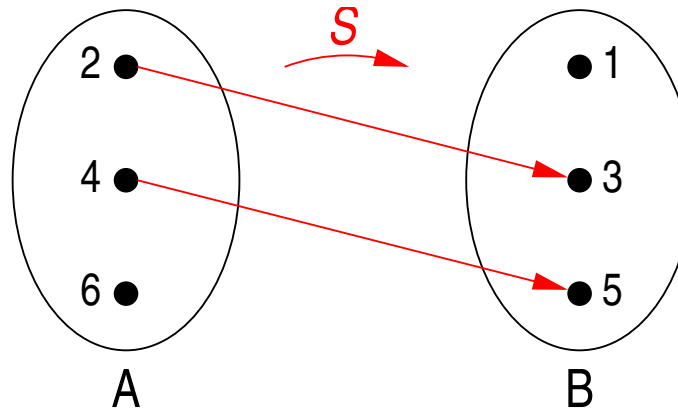


Relações e funções

Exemplo 6 Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ e a relação:

– $S : \forall (x, y) \in A \times B, (x, y) \in S \Leftrightarrow y = x + 1$. S é uma função?

Não, já que $6 \in A$ mas não existe $y \in B \mid y = 6 + 1 = 7$.



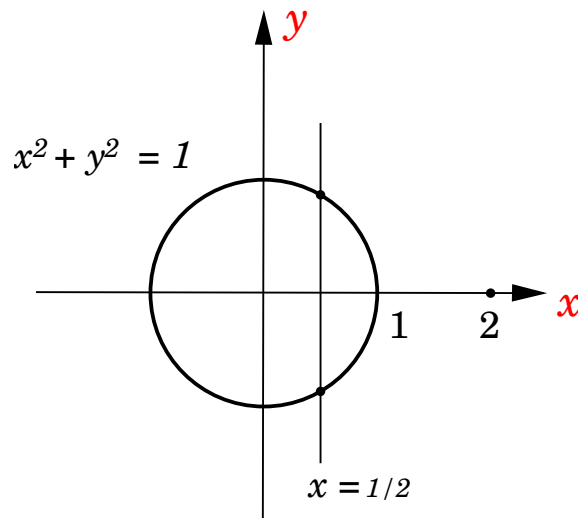
Funções e relações nos conjuntos dos reais

Exemplo 7 Seja a relação C de \mathbb{R} para \mathbb{R} definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \in C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

C é uma função?

Não, já que existem números reais $x \mid (x, y) \notin C$ para todo y . Por exemplo, $x = 2$.



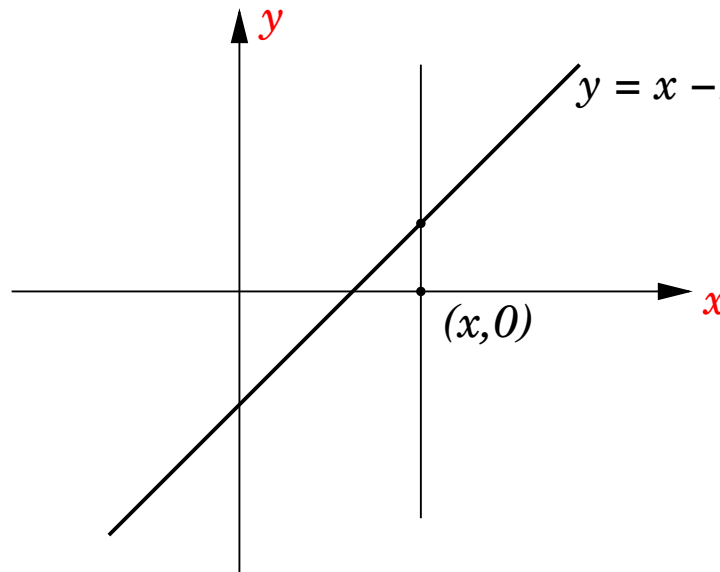
Funções e relações nos conjuntos dos reais

Exemplo 8 Seja a relação L de \mathbb{R} para \mathbb{R} definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \in L \Leftrightarrow y = x - 1$$

L é uma função?

Sim.



O inverso de uma relação

- Definição:

Seja R uma relação de A para B . A relação inversa R^{-1} de B para A é definida como:

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}.$$

- Essa definição pode ser re-escrita operacionalmente como

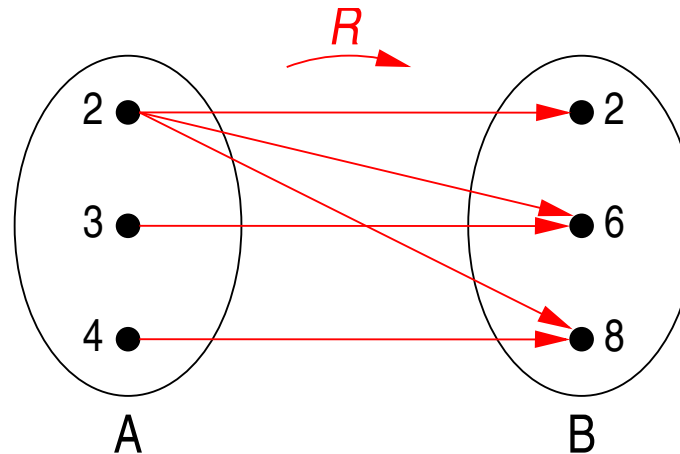
$$\forall x \in X, y \in Y, (y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$$

O inverso de uma relação

Exemplo 9 Sejam os conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 6, 8\}$ e seja R a relação “divide” de A para B :

$$\forall (x, y) \in A \times B, xRy \Leftrightarrow x|y$$

– $R = \{(2, 2), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\}$



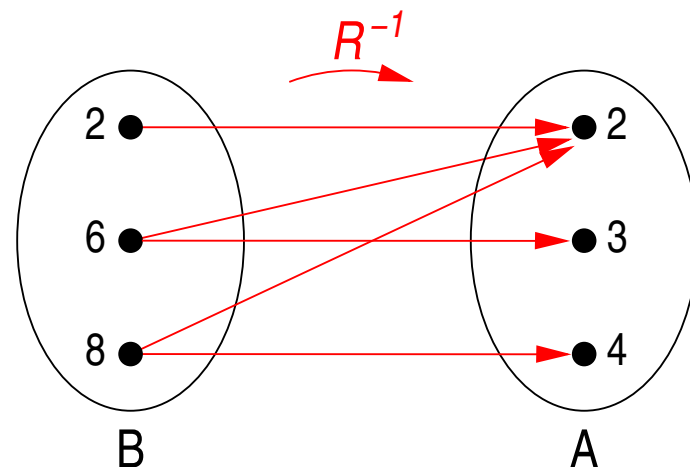
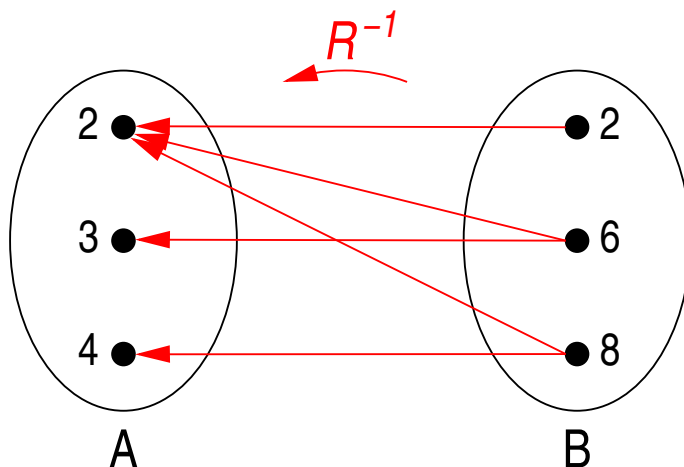
O inverso de uma relação

Exemplo 10 Sejam os conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 6, 8\}$ e seja R a relação “divide” de A para B :

$$\forall (x, y) \in A \times B, xRy \Leftrightarrow x|y$$

$$R = \{(2, 2), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\}$$

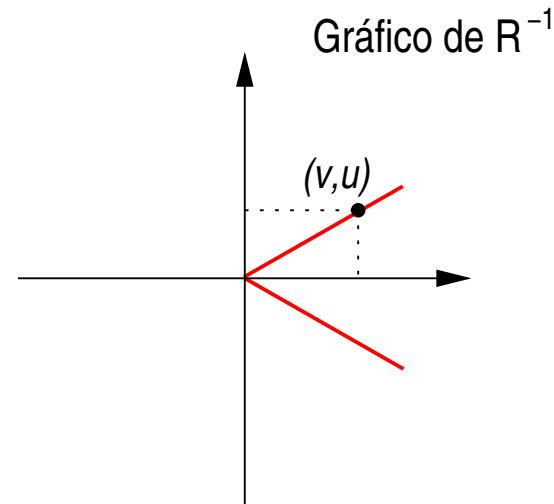
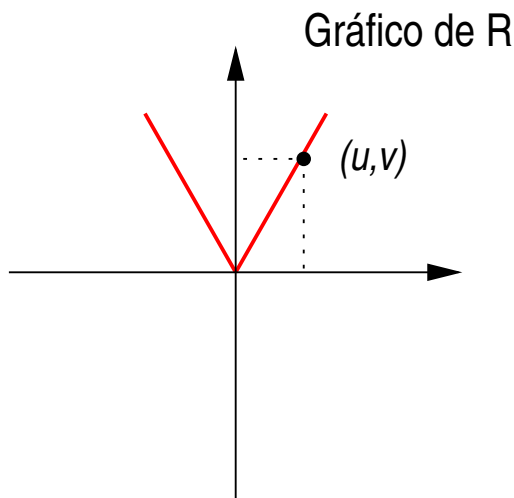
- $R^{-1} = \{(2, 2), (6, 2), (8, 2), (6, 3), (8, 4)\}$
- $R^{-1} : \forall (y, x) \in B \times A, yR^{-1}x \Leftrightarrow y \text{ é um múltiplo de } x.$



Inverso de uma relação infinita

Exemplo 11 Seja a relação R de \mathbb{R} para \mathbb{R} definida como:

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, uRv \Leftrightarrow v = 2 \cdot |u|$$



A relação R^{-1} é uma função?

Não, já que os pares $(2, 1)$ e $(2, -1)$ estão em R^{-1} .

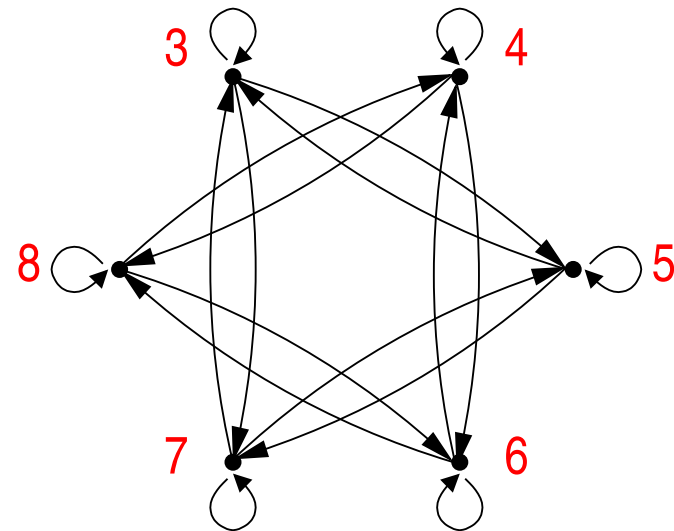
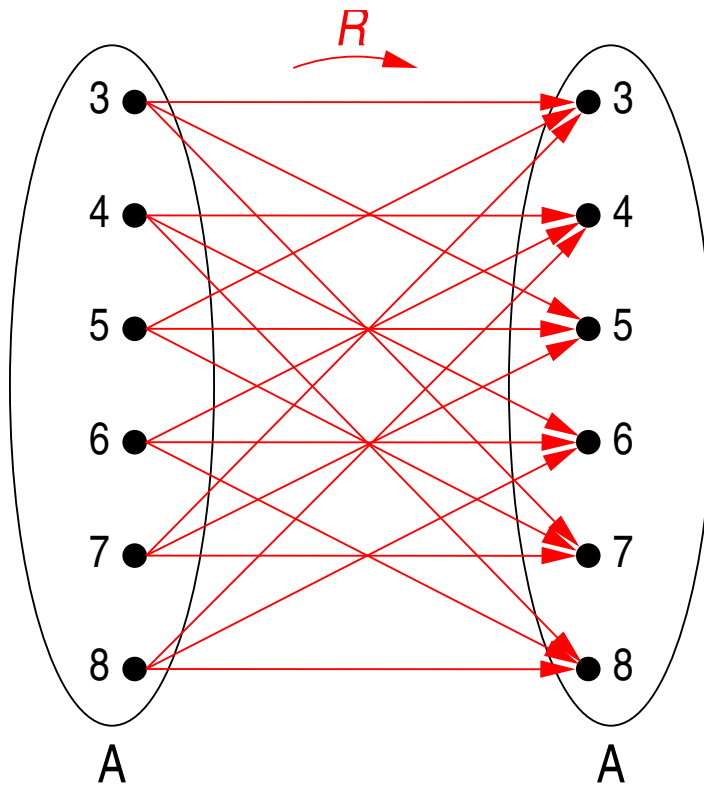
Grafo dirigido de uma relação

- Definição (relação binária): Uma relação binária no conjunto A é uma relação binária de A para A .
- Neste caso, o diagrama de seta é modificado e torna-se um “grafo dirigido,” ou seja, o conjunto A é desenhando somente uma vez e uma seta é desenhada para cada par de pontos relacionados entre si.

Grafo dirigido de uma relação

Exemplo 12 Seja $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e a relação binária R em A definida como

$$\forall (x, y) \in A \times A, xRy \Leftrightarrow 2 \mid (x - y)$$



Relações n -árias

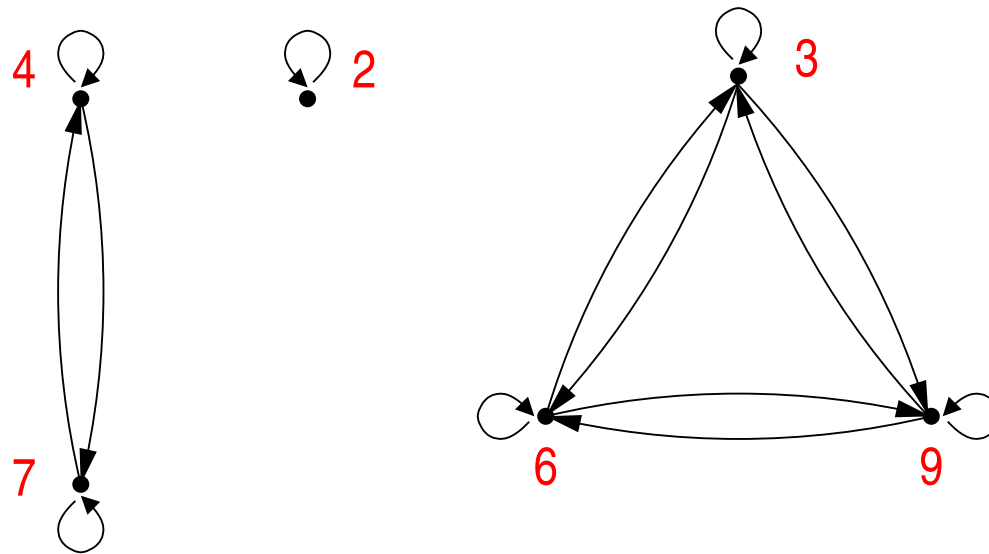
Definição: Dados os conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n , uma relação n -ária R em $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Relações envolvendo dois, três e quatro conjuntos são chamadas de binárias, ternárias e quaternárias, respectivamente.

Propriedades de relações

Exemplo 13 Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ e a relação binária R em A definida como

$$\forall (x, y) \in A \times A, xRy \Leftrightarrow 3 \mid (x - y)$$



Propriedades de relações

Exemplo 13 Este grafo tem três propriedades importantes:

1. Cada ponto do grafo tem uma seta para o próprio ponto.
 2. Em todos os casos onde existe uma seta indo de um ponto p para um ponto q , existe uma seta indo do ponto q para o ponto p .
 3. Em todos os casos onde existe uma seta indo de um ponto p para um ponto q e do ponto q para um ponto r , existe uma seta indo do ponto p para o ponto r .
- Essas propriedades correspondem a relações gerais chamadas de reflexiva, simétrica e transitiva.

Propriedades de relações

Seja R uma relação binária no conjunto A .

1. R é **reflexiva** sse, $\forall x \in A, xRx$.

→ Cada elemento é relacionado consigo mesmo.

2. R é **simétrica** sse, $\forall x, y \in A$, se xRy então yRx .

→ Cada elemento relacionado com um outro, o segundo é relacionado com o primeiro.

3. R é **transitiva** sse, $\forall x, y, z \in A$, se xRy e yRz então xRz .

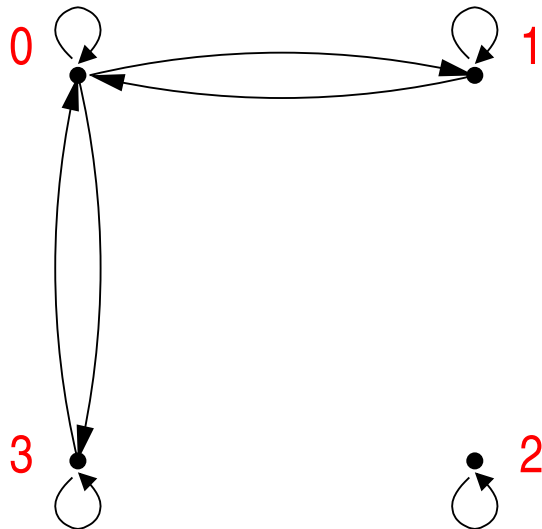
→ Cada elemento relacionado com um segundo, o segundo é relacionado com um terceiro, então o primeiro é relacionado com o terceiro.

Propriedades de relações

Exemplo 14 Seja o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e a relação binária R definida como:

$$R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 3)\}$$

Diga se a propriedade é reflexiva, simétrica e transitiva?



- Reflexiva (**V**): Existe um laço para cada nó do grafo o que significa que cada elemento de A é relacionado consigo mesmo.
- Simétrica (**V**): Para cada aresta de “ida” existe uma aresta de “volta”.
- Transitiva (**F**): Temos $1R0$ e $0R3$ mas não temos $1R3$, o que implica na não transitividade.

Propriedades de relações

Exemplo 15 Seja o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e a relação binária S definida como:

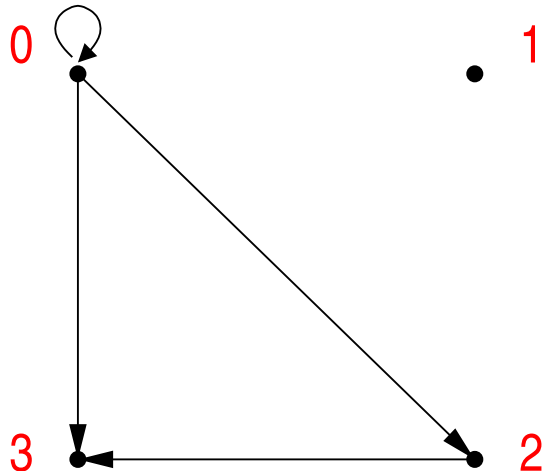
$$S = \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (2, 3)\}$$

A propriedade é reflexiva, simétrica e transitiva?

- Reflexiva (**F**): Não existe, por exemplo, $1R1$.
- Simétrica (**F**): Para cada aresta de “ida” não existe uma aresta de “volta”.
- Transitiva (**V**): Temos

Hipótese	Conclusão
$(0, 2)$ e $(2, 3)$	$(0, 3)$
$(0, 0)$ e $(0, 2)$	$(0, 2)$
$(0, 0)$ e $(0, 3)$	$(0, 3)$

→ Os elementos x , y e z não precisam ser distintos.



Propriedades de relações

Exemplo 16 Seja o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e a relação binária T definida como:

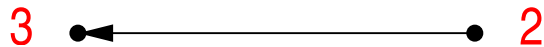
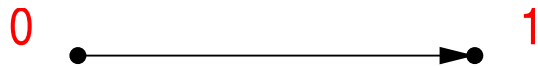
$$T = \{(0, 1), (2, 3)\}$$

Diga se a propriedade é reflexiva, simétrica e transitiva?

- Reflexiva (**F**): Não existe nenhum laço.
- Simétrica (**F**): Para cada aresta de “ida” não existe uma aresta de “volta”.
- Transitiva (**V**): Por *default*. A transitividade não é satisfeita quando a hipótese é verdadeira e a conclusão é falsa, ou seja,

$$(x, y) \in T \text{ e } (y, z) \in T \text{ e } (x, z) \notin T$$

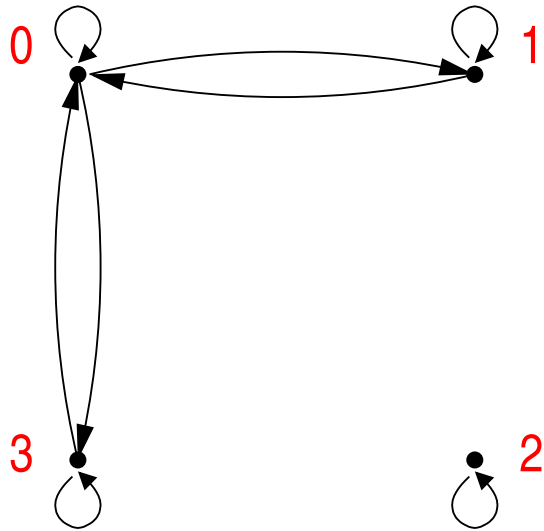
Como não existem pares (x, y) e (y, z) que satisfazem a hipótese a conclusão da afirmação é verdadeira.



Verificando propriedades de relações através de um programa

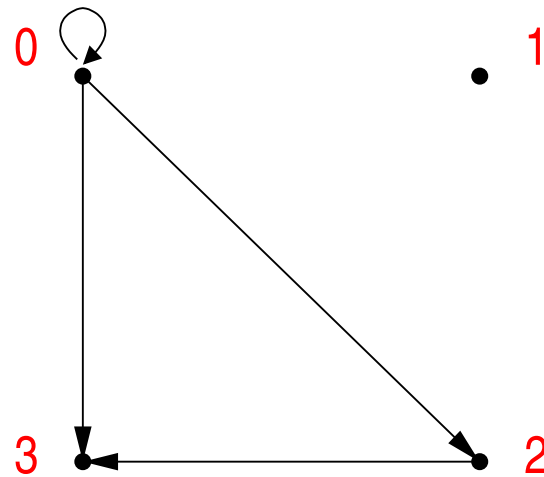
- Seja uma relação binária R definida num conjunto finito A com n elementos.
 - É possível verificar através de um programa se R é reflexiva, simétrica e transitiva.
- Possível implementação:
 - Representar R por uma matriz booleana quadrada de tamanho n .
 - A linha corresponde ao primeiro elemento do par ordenado e a coluna ao segundo elemento do par ordenado (consequentemente a matriz não é simétrica).

Verificando propriedades de relações através de um programa



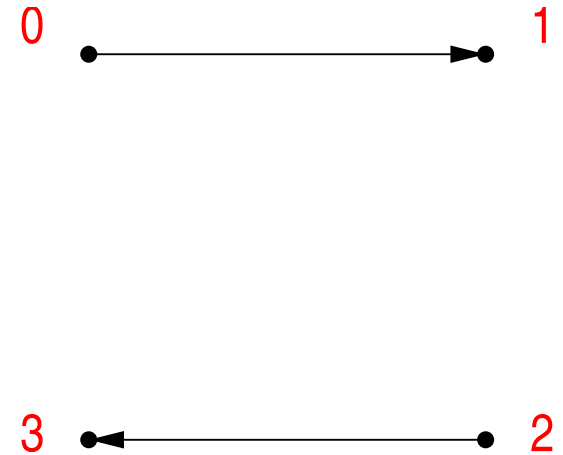
2º elemento

	0	1	2	3
<i>1º elemento</i> 0	V	V		V
1	V	V		
2			V	
3	V			V



2º elemento

	0	1	2	3
<i>1º elemento</i> 0	V		V	V
1				
2				V
3				



2º elemento

	0	1	2	3
<i>1º elemento</i> 0		V		
1				
2				V
3				

Fecho de uma relação

Se uma relação binária R definida em um conjunto A não possui uma determinada propriedade p , podemos “estender” R e obter uma nova relação R^* em A que tenha essa propriedade.

Estender significa que a nova relação R^* em A contém todos os pares de R e os pares adicionais necessários para que a propriedade p seja válida.

Definição [Fecho de uma relação]: Seja A um conjunto, R uma relação binária em A e uma propriedade p . O fecho de R é a relação binária R^* em A que possui a propriedade p e satisfaz as três condições abaixo:

1. R^* tem a propriedade p ;
2. $R \subseteq R^*$;
3. Se S é uma outra relação qualquer que contém R e satisfaz a propriedade p , então $R^* \subseteq S$.

Fecho de uma relação

Podemos definir os seguintes fechos:

- reflexivo;
- simétrico;
- transitivo

de uma relação em um conjunto.

Se uma relação binária R definida em um conjunto A já possui a propriedade p , ela já é seu próprio fecho que satisfaz a propriedade p .

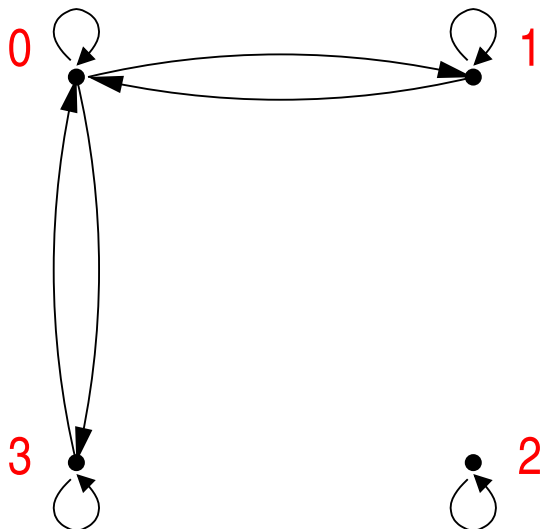
Fecho transitivo de uma relação

Definição [Fecho transitivo de uma relação]: Seja A um conjunto e R uma relação binária em A . O fecho transitivo (*transitive closure*) de R é a relação binária R^t em A que satisfaz as três condições abaixo:

1. R^t é transitiva;
2. $R \subseteq R^t$;
3. Se S é uma outra relação transitiva qualquer que contém R , então $R^t \subseteq S$.

Fecho transitivo de uma relação

Exemplo 17 Seja o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e a relação binária R definida como $R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 3)\}$.



Hipótese	Conclusão
$(0, 0) \text{ e } (0, 0)$	$(0, 0)$
$(0, 0) \text{ e } (0, 1)$	$(0, 1)$
$(0, 0) \text{ e } (0, 3)$	$(0, 3)$
$(1, 0) \text{ e } (0, 1)$	$(1, 1)$
$(1, 0) \text{ e } (0, 3)$	$(1, 3)^*$
$(1, 1) \text{ e } (1, 0)$	$(1, 0)$
$(1, 1) \text{ e } (1, 1)$	$(1, 1)$
$(2, 2) \text{ e } (2, 2)$	$(2, 2)$
$(3, 0) \text{ e } (0, 0)$	$(3, 0)$
$(3, 0) \text{ e } (0, 1)$	$(3, 1)^*$
$(3, 0) \text{ e } (0, 3)$	$(3, 3)$
$(3, 3) \text{ e } (3, 3)$	$(3, 3)$

* Não faz parte da relação original.

$$R^t = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 3)\}.$$

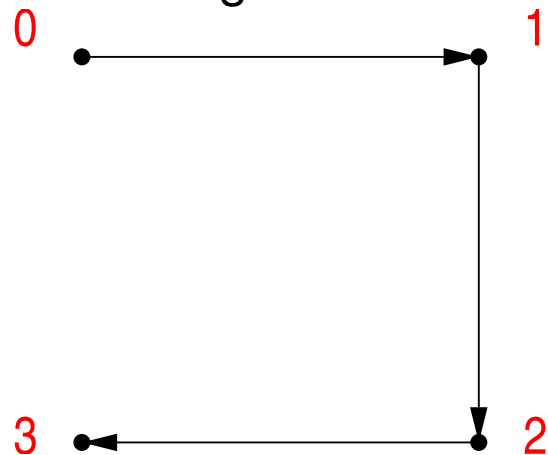
Fecho transitivo de uma relação

Exemplo 18 Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e considere a relação R definida em A como:

$$R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$$

Determine a relação de fecho transitivo de R .

Grafo dirigido de R :



Hipótese	Conclusão
$(0, 1)$ e $(1, 2)$	$(0, 2)^*$
$(1, 2)$ e $(2, 3)$	$(1, 3)^*$
$(0, 2)^*$ e $(2, 3)$	$(0, 3)^*$

* Não faz parte da relação original.

Assim,

$$R^t = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

Fecho transitivo de uma relação

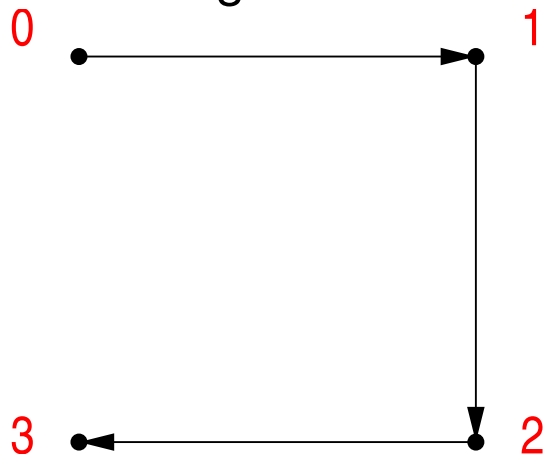
Exemplo 18 Dado $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e a relação R definida em A como:

$$R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$$

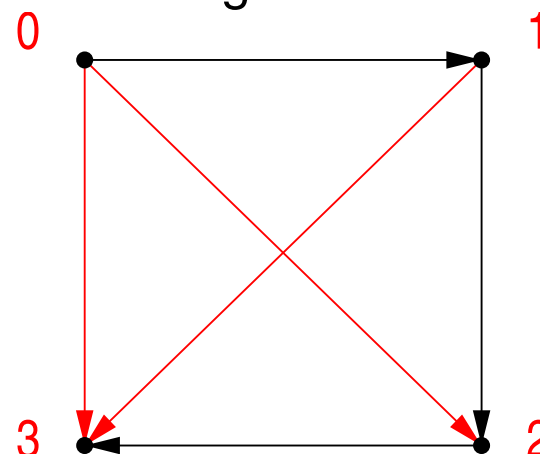
temos

$$R^t = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

Grafo dirigido de R :



Grafo dirigido de R^t :



Propriedades de relações em conjuntos infinitos

- Suponha uma relação binária é definida em um conjunto infinito A .

- Para provar que a relação é reflexiva, simétrica e transitiva:

- Escreva o que deve ser provado. Por exemplo, para simetria:

$$\forall x, y \in A, \text{ se } xRy \text{ então } yRx$$

- Use as definições do conjunto A e da relação R para reescrever a propriedade. Para a relação de “igualdade” no conjunto dos números reais, temos:

$$\forall x, y \in A, \text{ se } x = y \text{ então } y = x$$

Propriedades de relações em conjuntos infinitos

Exemplo 19 Seja S uma relação no conjunto \mathbb{R} tal que para todos

$$x, y \in \mathbb{R}, xSy \Leftrightarrow x < y$$

A propriedade é reflexiva, simétrica e transitiva?

Propriedades de relações em conjuntos infinitos

Exemplo 19

Reflexiva (**F**): S é reflexiva sse

$$\forall x \in \mathbb{R}, xSx.$$

Pela definição de S , isto significa

$$\forall x \in \mathbb{R}, x < x.$$

Para provar que essa afirmação é falsa, basta achar um contra-exemplo. Neste caso, a afirmação é falsa para todos os números reais já que $x \not< x$.

Propriedades de relações em conjuntos infinitos

Exemplo 19

Simétrica (**F**): S é simétrica sse

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ se } xSy \text{ então } ySx.$$

Pela definição de S , isto significa

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ se } x < y \text{ então } y < x.$$

Para provar que essa afirmação é falsa, basta achar um contra-exemplo. Neste caso, a afirmação é falsa para todos os números reais já que se $x < y$, então $y \not< x$.

Propriedades de relações em conjuntos infinitos

Exemplo 19

Transitiva (**V**): S é transitiva sse

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \text{ se } xSy \text{ e } ySz \text{ então } xSz.$$

Pela definição de S , isto significa

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \text{ se } x < y \text{ e } y < z \text{ então } x < z.$$

Essa afirmação é verdadeira pela lei transitiva da ordem dos números reais.

Propriedades de relações em conjuntos infinitos

Exemplo 20 Seja T uma relação no conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros tal que para todos

$$m, n \in \mathbb{Z}, mTn \Leftrightarrow 3|(m - n)$$

A propriedade é reflexiva, simétrica e transitiva?

Propriedades de relações em conjuntos infinitos

Exemplo 20

Reflexiva (**V**): T é reflexiva sse

$$\forall m \in \mathbb{Z}, mTm.$$

Pela definição de T , isto significa

$$\forall m \in \mathbb{Z}, 3|(m - m),$$

ou ainda,

$$\forall m \in \mathbb{Z}, 3|0.$$

Essa afirmação é verdadeira já que $0 = 3 \cdot 0$.

Propriedades de relações em conjuntos infinitos

Exemplo 20

Simétrica (**V**): T é simétrica sse

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \text{ se } mTn \text{ então } nTm.$$

Pela definição de T , isto significa

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \text{ se } 3|(m - n) \text{ então } 3|(n - m).$$

Suponha que m e n sejam inteiros específicos mas escolhidos aleatoriamente tais que $3|(m - n)$. Deve-se mostrar que $3|(n - m)$. Pela definição de “divide” temos que $3|(m - n)$ e $m - n = 3k$ e $n - m = 3 \cdot -k$, para algum inteiro k . Logo, $3|(n - m)$.

Propriedades de relações em conjuntos infinitos

Exemplo 20

Transitiva (**V**): T é transitiva sse

$$\forall m, n, o \in \mathbb{Z}, \text{ se } mTn \text{ e } nTo \text{ então } mTo.$$

Pela definição de T , isto significa

$$\forall m, n, o \in \mathbb{Z}, \text{ se } 3|(m - n) \text{ e } 3|(n - o) \text{ então } 3|(m - o).$$

Suponha que m, n e o sejam inteiros específicos mas escolhidos aleatoriamente tais que $3|(m - n)$ e $3|(n - o)$. Deve-se mostrar que $3|(m - o)$. Pela definição de “divide” temos que: $3|(m - n)$ e $m - n = 3r$; e $3|(n - o)$ e $n - o = 3s$, para inteiros r e s , respectivamente. Sabemos que:

$$\begin{aligned}(m - n) + (n - o) &= 3r + 3s \\ m - o &= 3 \cdot (r + s)\end{aligned}$$

O que mostra que $3|(m - o)$.

Propriedades de relações

Exemplo 21 Seja C o conjunto de todos os circuitos lógicos com um número fixo n de entradas. Seja E uma relação binária no conjunto C definida como:

Para todos os circuitos $c_1 \in C$ e $c_2 \in C$

$$c_1 E c_2 \Leftrightarrow$$

c_1 tem a mesma tabela de entrada e saída que c_2 .

A propriedade é reflexiva, simétrica e transitiva?

Propriedades de relações

Exemplo 21

Reflexiva (**V**): E é reflexiva sse

$$\forall c \in C, cEc.$$

Pela definição de E , isto significa

$$\forall c \in C, \left(\begin{array}{l} c \text{ tem a mesma tabela de} \\ \text{entrada e saída que } c \end{array} \right).$$

O que é obviamente verdade.

Propriedades de relações

Exemplo 21

Simétrica (**V**): E é simétrica sse

$$\forall c_1, c_2 \in C, \text{ se } c_1 E c_2 \text{ então } c_2 E c_1.$$

Pela definição de E , isto significa

$$\forall c_1, c_2 \in C,$$

$$\text{se } \left(\begin{array}{l} c_1 \text{ tem a mesma tabela de} \\ \text{entrada e saída que } c_2 \end{array} \right) \text{ então } \left(\begin{array}{l} c_2 \text{ tem a mesma tabela de} \\ \text{entrada e saída que } c_1 \end{array} \right).$$

Considerando a hipótese verdadeira, a conclusão é obviamente verdadeira.

Propriedades de relações

Exemplo 21

Transitiva (**V**): E é transitiva sse

$$\forall c_1, c_2, c_3 \in C, \text{ se } c_1 E c_2 \text{ e } c_2 E c_3 \text{ então } c_1 E c_3.$$

Pela definição de E , isto significa

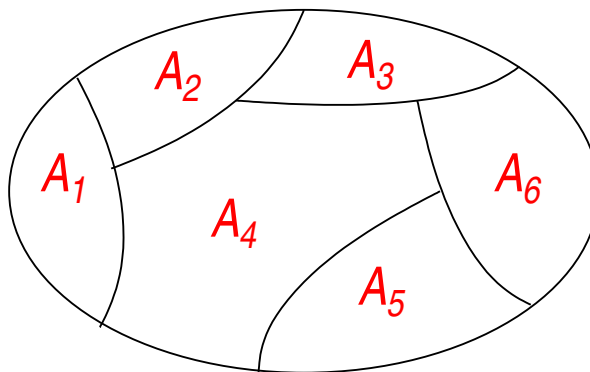
$$\begin{array}{l} \text{se} \left(\begin{array}{l} c_1 \text{ tem a mesma tabela de} \\ \text{entrada e saída que } c_2 \end{array} \right) \text{ e } \left(\begin{array}{l} c_2 \text{ tem a mesma tabela de} \\ \text{entrada e saída que } c_3 \end{array} \right) \\ \text{então} \left(\begin{array}{l} c_1 \text{ tem a mesma tabela de} \\ \text{entrada e saída que } c_3 \end{array} \right). \end{array}$$

Considerando a hipótese verdadeira, a conclusão é obviamente verdadeira.

Relação de equivalência

- Idéia central de relação de equivalência:
 - Agrupar pares ordenados de uma relação que estão relacionados entre si.
- Partição de um conjunto A :
 - Coleção de subconjuntos não-vazios mutuamente disjuntos cuja união é o conjunto A .

Exemplo 22 Para $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, ou ainda $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_6 = A$



Relação de equivalência

Definição: Dada uma partição de um conjunto A , a relação binária R induzida pela partição é definida em A como:

$\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow$ Existe um subconjunto A da partição tal que ambos x e y estão em A .

Exemplo 23 Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e considere a seguinte partição de A :

$$\{0, 3, 4\}, \{1\}, \{2\}$$

Determine a relação R induzida por essa partição.

$$R = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0), (0, 3), (0, 4), (3, 0), (3, 3), (3, 4), (4, 0), (4, 3), (4, 4), \\ (1, 1), \\ (2, 2) \end{array} \right\}$$

Observação importante:

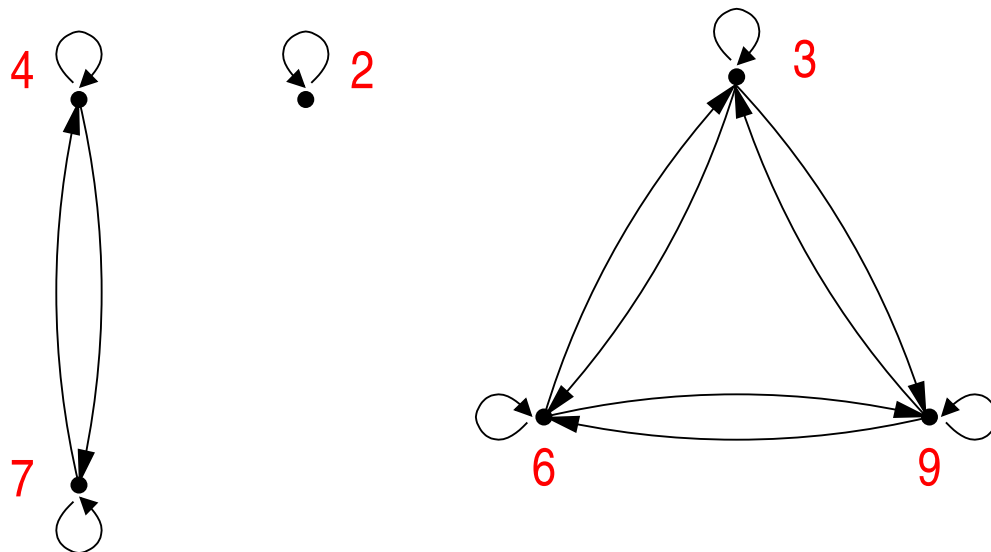
→ Uma relação induzida por uma partição de um conjunto satisfaz as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade.

Relação de equivalência

Definição: Seja A um conjunto não-vazio e R uma relação binária em A . R é uma relação de equivalência sse R é reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo 24 Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ e a relação binária R em A definida como

$$\forall (x, y) \in A \times A, xRy \Leftrightarrow 3|(x - y)$$



A partição de A correspondente à relação R é:

$$\{4, 7\}, \{2\}, \{3, 6, 9\}$$

Classes de equivalência de uma relação equivalência

- Suponha que exista uma relação de equivalência de um dado conjunto. Seja a um elemento particular do conjunto. O subconjunto de todos os elementos que estão relacionados com a é chamado de classe de equivalência de a .
- Definição: Seja A um conjunto e R uma relação de equivalência em A . Para cada elemento $a \in A$, a classe de equivalência de a , representada por $[a]$ e chamada de a é o conjunto de todos os elementos $x \in A$ tal que x está relacionado com a através de R .

Simbolicamente, temos:

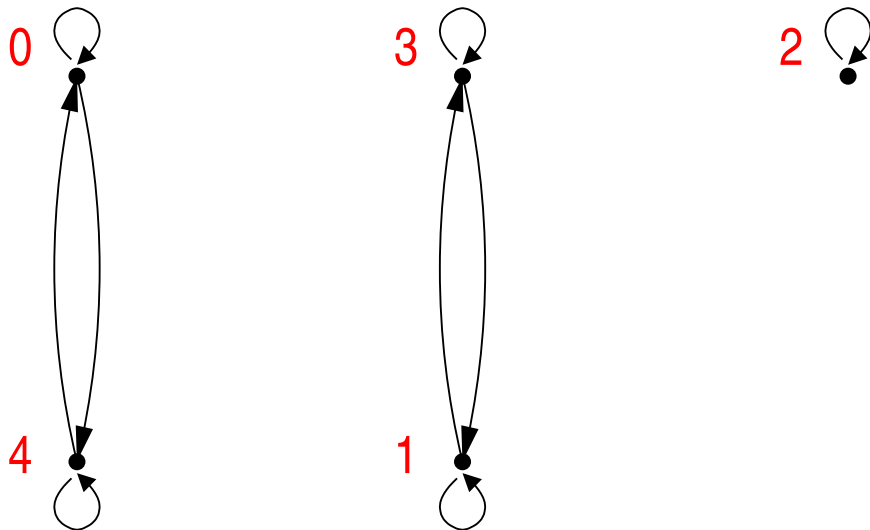
$$[a] = \{x \in A | xRa\}$$

Classes de equivalência de uma relação definida num conjunto finito

Exemplo 25 Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e R uma relação binária em A definida como:

$$\{(0, 0), (0, 4), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 0), (4, 4)\}$$

R é uma relação de equivalência em A :



As classes de equivalência de R são:

$$[0] = \{x \in A | xR0\} = \{0, 4\}$$

$$[1] = \{x \in A | xR1\} = \{1, 3\}$$

$$[2] = \{x \in A | xR2\} = \{2\}$$

$$[3] = \{x \in A | xR3\} = \{1, 3\}$$

$$[4] = \{x \in A | xR4\} = \{0, 4\}$$

Assim, as classes distintas de equivalência da relação são:

$$\{0, 4\}, \{1, 3\}, \{2\}$$

Propriedades das classes de equivalência

- Seja A um conjunto e R uma relação de equivalência em A e a e b elementos de A :
 1. Se aRb , então $[a] = [b]$
 2. $[a] \cap [b] = \emptyset \quad \vee \quad [a] = [b]$
- Se A é um conjunto não vazio e R é uma relação de equivalência em A , então as classes de equivalência distintas de A formam uma partição de A ,
ou seja,
a união das classes de equivalência é todo o conjunto A e a intersecção de quaisquer duas classes distintas é o conjunto vazio.

Propriedades das classes de equivalência

Exemplo 26 Seja R a relação de congruência módulo 3 no conjunto \mathbb{Z} de todos os números inteiros. Isto significa que para todos inteiros m e n ,

$$mRn \Leftrightarrow 3|(m - n) \Leftrightarrow m \equiv n \pmod{3}$$

Descreva as classes de equivalência distintas de R .

Para cada inteiro a ,

$$\begin{aligned} [a] &= \{x \in \mathbb{Z} | xRa\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} | 3|(x - a)\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} | x - a = 3 \cdot k, \text{ para algum inteiro } k\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} | x = 3 \cdot k + a, \text{ para algum inteiro } k\}. \end{aligned}$$

Propriedades das classes de equivalência

Exemplo 26

Assim,

$$\begin{aligned}[0] &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3 \cdot k + 0, \text{ para algum inteiro } k\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3 \cdot k, \text{ para algum inteiro } k\} \\ &= \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}, \\ [1] &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3 \cdot k + 1, \text{ para algum inteiro } k\} \\ &= \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}, \\ [2] &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3 \cdot k + 2, \text{ para algum inteiro } k\} \\ &= \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}.\end{aligned}$$

Propriedades das classes de equivalência

Exemplo 26

Pelas propriedades das classes de equivalência, temos:

$$[0] = [3] = [-3] = [6] = [-6] = \dots$$

$$[1] = [4] = [-2] = [7] = [-5] = \dots$$

$$[2] = [5] = [-1] = [8] = [-4] = \dots$$

→ Cada inteiro está em uma das três classes $[0]$, $[1]$ ou $[2]$.

Isto significa que uma classe de equivalência pode ter diferentes “nomes”. Neste exemplo, a classe do 0 ($[0]$) pode ser “chamada” pela classe do 3 ($[3]$) ou pela classe do -6 ($[-6]$), e assim por diante.

Mas o que a classe $[0]$ ou $[3]$ ou $[-6]$ significa é o conjunto

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3 \cdot k, \text{ para algum inteiro } k\}.$$

Propriedades das classes de equivalência

Exemplo 26

As três classes de equivalência são:

1. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3 \cdot k, \text{ para algum inteiro } k\}$
→ Conjunto dos inteiros divisíveis por 3.
2. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3 \cdot k + 1, \text{ para algum inteiro } k\}$
→ Conjunto dos inteiros que deixam resto 1 quando divididos por 3.
3. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3 \cdot k + 2, \text{ para algum inteiro } k\}$
→ Conjunto dos inteiros que deixam resto 2 quando divididos por 3.

Propriedades das classes de equivalência

Definição: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A e S uma classe de equivalência de R . Um *representante* da classe S é qualquer elemento a tal que $[a] = S$.

No exemplo anterior, temos que -6 é um representante da classe $[-6]$ que por sua vez gera o conjunto

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3 \cdot k, \text{ para algum inteiro } k\}$$

→ Conjunto de todos os inteiros divisíveis por 3.

Classes de equivalência de uma relação

No exemplo 21 foi mostrado que dado um conjunto C de todos os circuitos lógicos com um número fixo n de entradas, a relação E é uma relação de equivalência.

A relação E foi definida como:

Para todos os circuitos $c_1 \in C$ e $c_2 \in C$

$$c_1 E c_2 \Leftrightarrow$$

c_1 tem a mesma tabela de entrada e saída que c_2 .

Classes de equivalência de uma relação

Exemplo 27 Dado o exemplo 21 e considerando circuitos lógicos com duas entradas e uma saída:

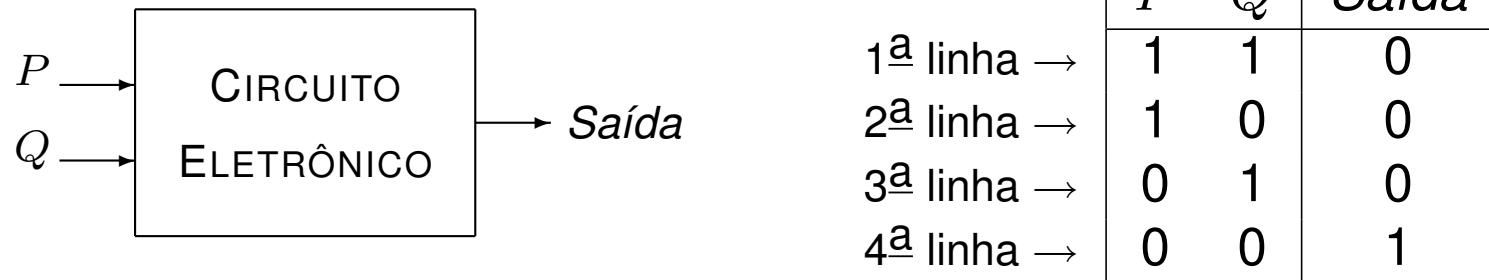
- (a) Descreva as classes de equivalência da relação E .
- (b) Identifique quantas classes de equivalência distintas existem.
- (c) Mostre circuitos que representam uma das classes.

Classes de equivalência de uma relação

Exemplo 27

Dado um circuito c_1 , a classe de equivalência de c_1 é o conjunto de todos os circuitos com duas entradas e uma saída que têm a mesma tabela de entrada e saída de c_1 .

Esquema de um circuito e uma possível tabela de entrada e saída:



Pelo princípio da multiplicação temos,

$$\underbrace{2}_{1^a \text{ linha}} \cdot \underbrace{2}_{2^a \text{ linha}} \cdot \underbrace{2}_{3^a \text{ linha}} \cdot \underbrace{2}_{4^a \text{ linha}} = 16$$

tabelas da verdade distintas.

Classes de equivalência de uma relação

Exemplo 27

(a) Descreva as classes de equivalência da relação E .

Existem 16 classes de equivalência distintas, uma para cada tabela de entrada e saída distinta.

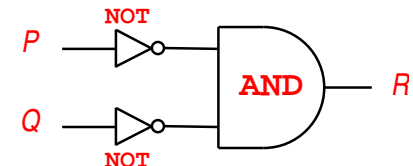
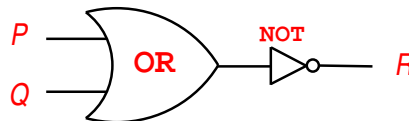
(b) Identifique quantas classes de equivalência distintas existem.

Existem infinitamente muitos circuitos para cada uma das tabelas.

(c) Mostre circuitos que representam uma das classes.

Para a tabela de entrada e saída abaixo, dois possíveis circuitos são:

P	Q	Saída
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1



Relação anti-simétrica

- Já foram vistas três propriedades de relações:
 1. Reflexividade
 2. Simetria
 3. Transitividade
- Definição: Seja R uma relação num conjunto A . R é uma relação anti-simétrica sse,

$$\forall a, b \in A, \text{ se } aRb \wedge bRa \text{ então } a = b.$$

- Informalmente, uma relação é anti-simétrica se para cada aresta de “ida” não existe uma aresta de “volta”.
- Tomando a negação dessa definição temos que uma relação R não é anti-simétrica sse,

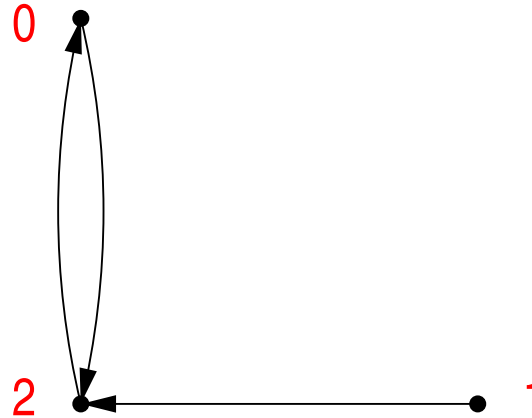
$$\exists a, b \in A | aRb \wedge bRa \wedge a \neq b.$$

Relação anti-simétrica

Exemplo 28 Seja R uma relação no conjunto $\{0, 1, 2\}$ definida como

$$R = \{(0, 2), (1, 2), (2, 0)\}$$

A propriedade é anti-simétrica?



Anti-simétrica (**F**): R é uma relação anti-simétrica sse,

$$\forall a, b \in A, \text{ se } aRb \wedge bRa \text{ então } a = b.$$

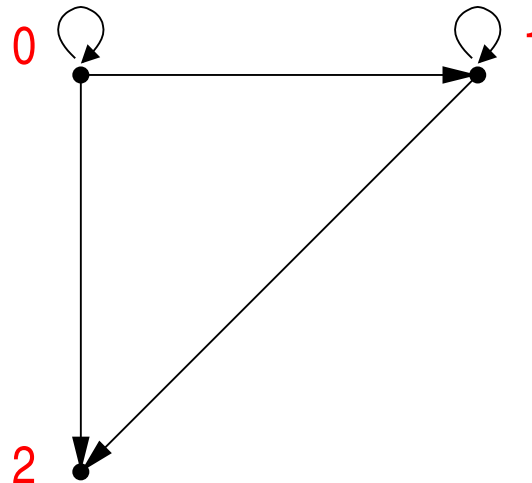
Como $0R2$ e $2R0$ e $0 \neq 2$, R não é anti-simétrica.

Relação anti-simétrica

Exemplo 29 Seja R uma relação no conjunto $\{0, 1, 2\}$ definida como

$$R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$$

A propriedade é anti-simétrica?



Anti-simétrica (**V**): R é uma relação anti-simétrica sse,

$$\forall a, b \in A, \text{ se } aRb \wedge bRa \text{ então } a = b.$$

Como não existem arestas de ida e de volta para o mesmo par de nós, a relação é anti-simétrica.

Relação de ordem parcial

Definição: Seja R uma relação binária definida no conjunto A . R é uma relação de ordem parcial sse R é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Exemplos de relações de ordem parcial:

1. Relação “menor ou igual a” no conjunto dos números reais;
2. Relação “subconjunto” num conjunto de conjuntos.

Relação de ordem parcial

Exemplo 30 Seja D a relação divide em \mathbb{Z}^+ (inteiros positivos) definida como:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+, a|b \Leftrightarrow b = k \cdot a, \text{ para algum inteiro } k.$$

- Reflexiva (**V**): D é reflexiva sse $\forall a \in \mathbb{Z}^+, a|a$.
Suponha $a \in \mathbb{Z}^+$. Temos que $a = 1 \cdot a$ e assim $a|a$ pela definição da divisibilidade.
- Anti-simétrica (**V**): D é anti-simétrica sse $\forall a, b \in \mathbb{Z}^+$, se $a|b \wedge b|a$ então $a = b$.
Suponha $a, b \in \mathbb{Z}^+$ e aRb e bRa . Pela definição de R , $a|b$ e $b|a$. Pela definição de divide existem inteiros k_1 e k_2 tais que $b = k_1 \cdot a$ e $a = k_2 \cdot b$.
Temos que

$$b = k_1 \cdot a = k_1 \cdot (k_2 \cdot b) = (k_1 \cdot k_2) \cdot b$$

Ou seja, $k_1 \cdot k_2 = 1$. Temos que k_1 e k_2 são inteiros positivos. Mas o único produto de dois inteiros positivos que é igual 1 é $1 \cdot 1$. Assim, $k_1 = k_2 = 1$. Assim, $a = k_2 \cdot b = 1 \cdot b = b$.

- Transitividade (**V**): D é transitiva sse $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, se $a|b$ e $b|c$ então $a|c$.
Prova para o leitor.

Relação de ordem parcial

Exemplo 31 Seja \leq a relação “menor ou igual a” em \mathbb{R} definida como:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y).$$

Mostre que \leq é uma relação em \mathbb{R} .

- Reflexiva (**V**): Para \leq ser reflexiva significa que $x \leq x$ para todos números reais. Mas $x \leq x$ significa que $(x < x) \vee (x = x)$ e $x = x$ é sempre verdadeiro.
- Anti-simétrica (**V**): Para \leq ser anti-simétrica significa que para todos números reais x e y , se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$. Isto é consequência imediata da definição de \leq e a propriedade de tricotomia que diz que dados quaisquer números reais x e y exatamente uma das afirmações é verdadeira: $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$.
- Transitividade (**V**): Para \leq ser transitiva significa que para todos os reais x, y e z , se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$. Isto é verdade pela definição de \leq e pela propriedade transitiva da ordem dos números reais que diz que dados quaisquer números reais x, y e z , se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.

Ordem lexicográfica

- Seja Σ um conjunto com uma relação de ordem parcial.
- Pode-se, então, definir uma ordem lexicográfica ou ordem de “dicionário” no conjunto Σ^* .
- Seja R uma relação em Σ^* . Para quaisquer inteiros positivos m e n , e $a_1a_2\dots a_m$ e $b_1b_2\dots b_n$ em Σ^* , temos:
 1. Se $m \leq n$ e $a_i = b_i$ para todos $i = 1, 2, \dots, m$, então

$$a_1a_2\dots a_m \preceq b_1b_2\dots b_n.$$

2. Para algum inteiro k , $k \leq m$, $k \leq n$, e $k \geq 1$, $a_i = b_i$ para todos $i = 1, 2, \dots, k - 1$, e $a_k R b_k$ mas $a_k \neq b_k$, então

$$a_1a_2\dots a_m \preceq b_1b_2\dots b_n.$$

3. Se ϵ é o string nulo e s é um string em Σ^* , então $\epsilon \preceq s$.

O símbolo \preceq é usado para referenciar uma relação de ordem parcial genérica e é lido como “menor ou igual a”.

Ordem lexicográfica

Exemplo 32 Seja $\Sigma = \{\perp, \top\}$ e R a seguinte relação de ordem parcial em Σ :

$$R = \{(\perp, \perp), (\perp, \top), (\top, \top)\}.$$

Diga se os seguintes strings definem uma ordem lexicográfica em Σ^* :

(a) $\top\perp\top\perp\perp\top\top \preceq \top\perp\top\perp\top?$

Sim, caso 2.

(b) $\perp\perp\top\perp\top\top\top \preceq \perp\perp\top\perp\perp\top\top?$

Não, já que $a_5 \not\preceq b_5$.

(c) $\top\top\perp\perp \preceq \top\top\perp\perp\perp?$

Sim, caso 1.

(d) $\epsilon \preceq \perp\perp\top?$

Sim, caso 3.

Diagrama de Hasse

Exemplo 33 Seja $A = \{1, 2, 3, 9, 18\}$ e considere a relação D “divide” no conjunto como:

$$\forall a, b \in A, a|b \Leftrightarrow b = a \cdot k, \text{ para algum inteiro } k.$$

O grafo dirigido da relação D é:

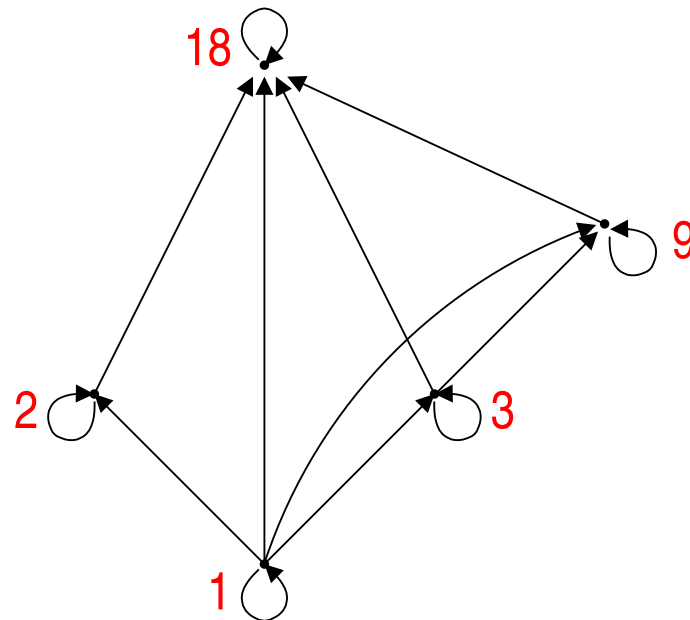
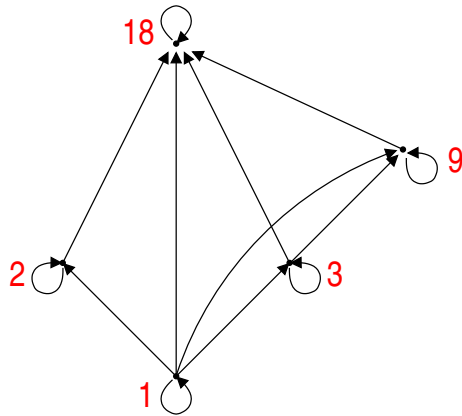


Diagrama de Hasse

Note que:

- Existe um laço (“loop”) em cada vértice;
- Todas as arestas apontam para a mesma direção, ou seja, para cima;
- Toda vez que há uma aresta de um vértice para um segundo e de um segundo para um terceiro, então há uma aresta do primeiro vértice para o terceiro vértice.



- É possível associar um grafo mais simples com uma relação de ordem parcial num conjunto finito chamado Diagrama de Hasse.

Algoritmo para obter o Diagrama de Hasse

Elimine:

1. Os laços em todos os vértices;
2. Todas as arestas que existem por causa da propriedade de transitividade;
3. A direção em todas as arestas.

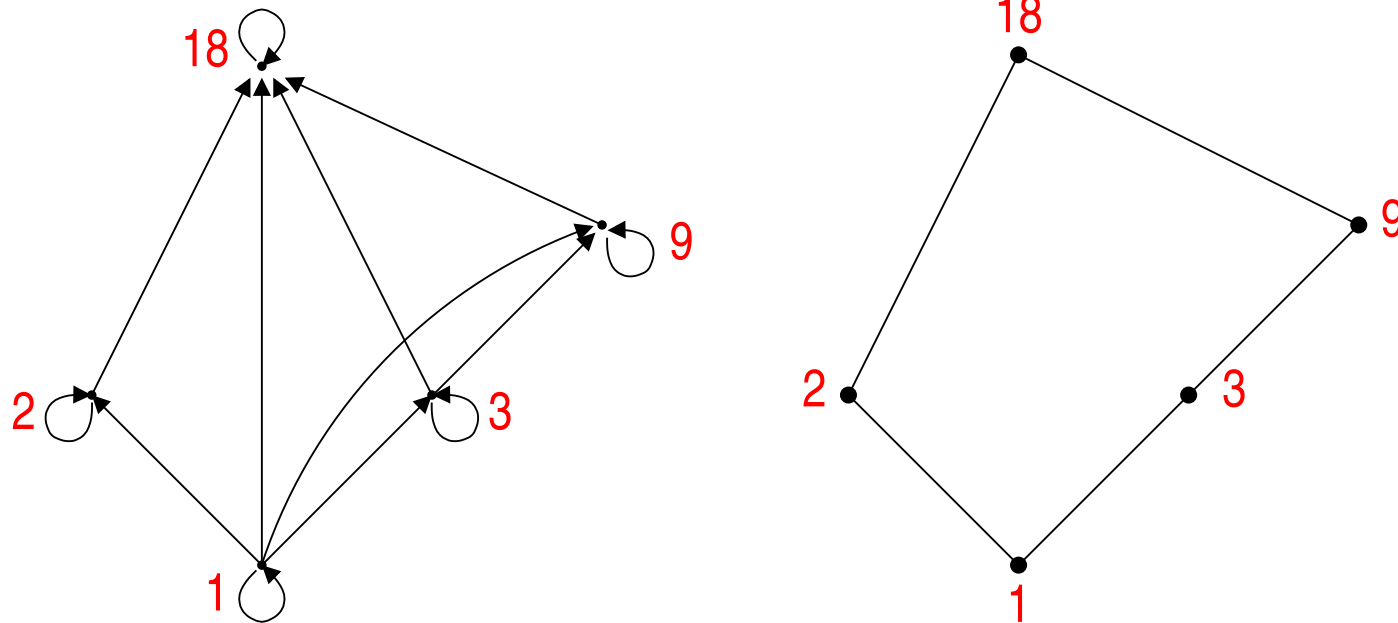
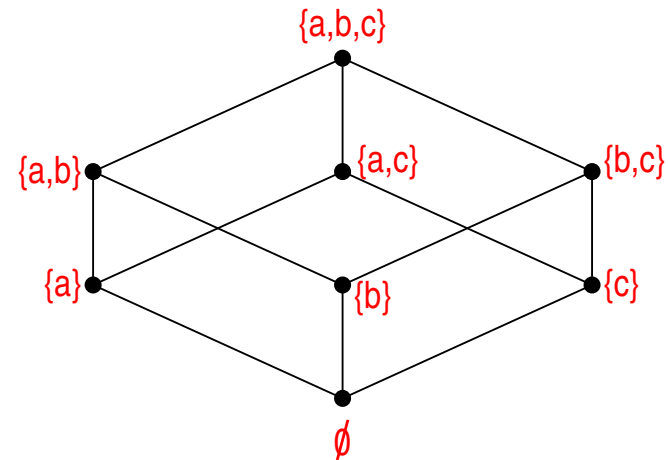
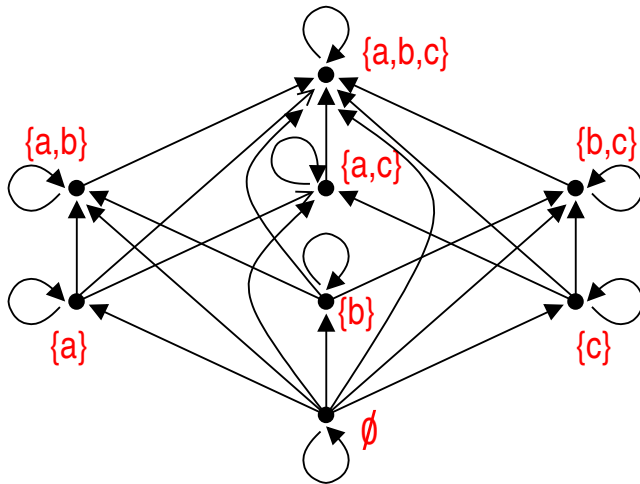


Diagrama de Hasse

Exemplo 34 Considere a relação subconjunto, \subseteq , no conjunto potência $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$. Para todos os conjuntos U e V em $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$,

$$U \subseteq V \Leftrightarrow \forall x, \text{ se } x \in U \text{ então } x \in V.$$

Construa o Diagrama de Hasse dessa relação.



Grafo original do Diagrama de Hasse

Para obter o grafo original a partir do Diagrama de Hasse basta reverter os passos do algoritmo anterior.

