ELE 0316 / ELE 0937– Eletrônica Básica

Departamento de Engenharia Elétrica
FEIS - UNESP

Capitulo 08 : Álgebra Booleana

Teoremas e Postulados

Operações lógicas básicas

AND Truth Table

A	B	A AND B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR Truth Table

A	B	A OR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NAND, NOR, XOR, XNOR Truth Table

A	B	A NAND B	A NOR B	A XOR B	A XNOR B
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1

Operações lógicas básicas

Representação simbólica padrão

Boolean Operation	Operators
AND	*, &
OR	+, |, #
XOR	$\oplus$, ^
NOT	!, ~, $\overline{A}$

$$Y = \overline{A \,\&\, B} = \,!(AB)$$

$$Y = \overline{A \oplus B}.$$

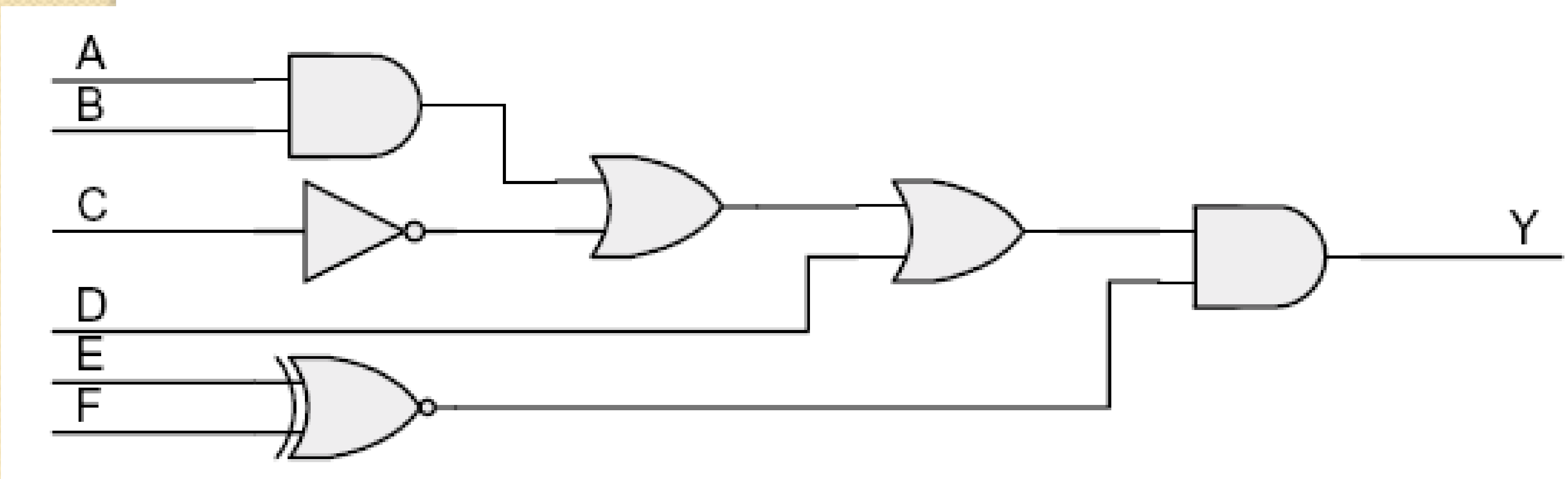
$$Y = (AB + \overline{C} + D) \& \overline{E \oplus F}$$

Obtenha o Circuito Digital que realiza a seguinte expressão:

$$Y = (AB + \overline{C} + D) \& \overline{E \oplus F}$$

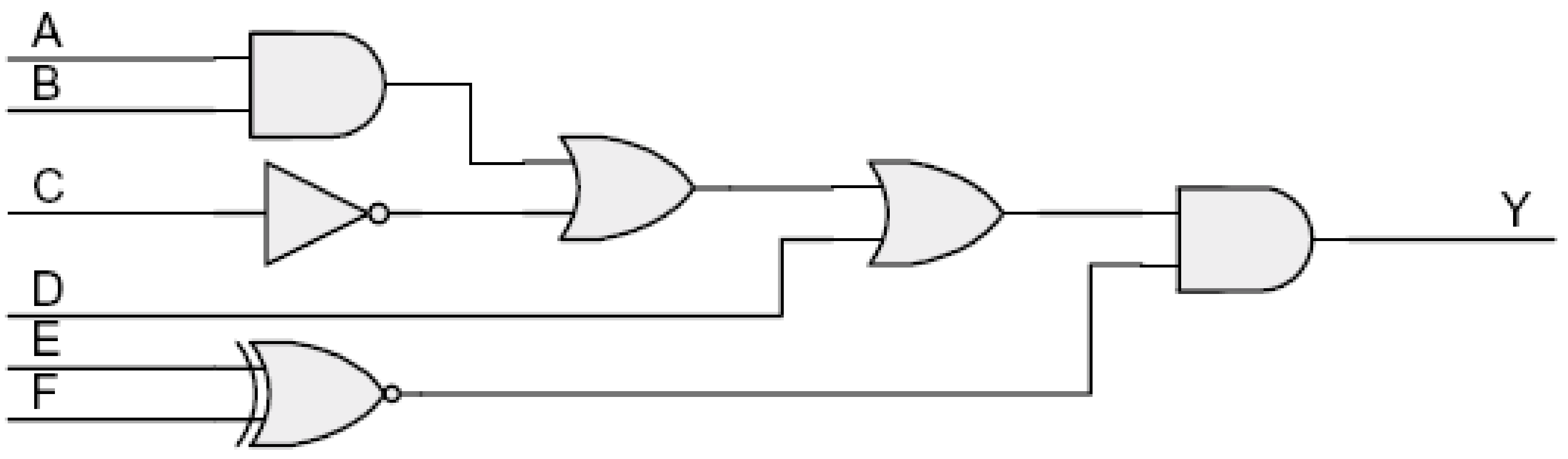
Obtenha o Circuito Digital que realiza a seguinte expressão:

$$Y = (AB + \overline{C} + D) \& \overline{E \oplus F}$$



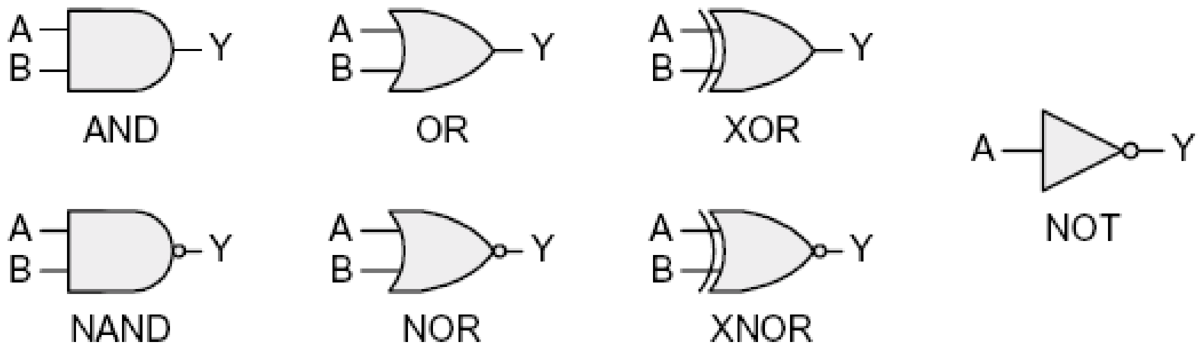
Obtenha o Circuito Digital que realiza a seguinte expressão:

$$Y = (AB + \overline{C} + D) \& \overline{E \oplus F}$$



Para cada circuito lógico existe uma expressão booleana correspondente e vice-versa.

Álgebra de Boole => Teoremas e Postulados



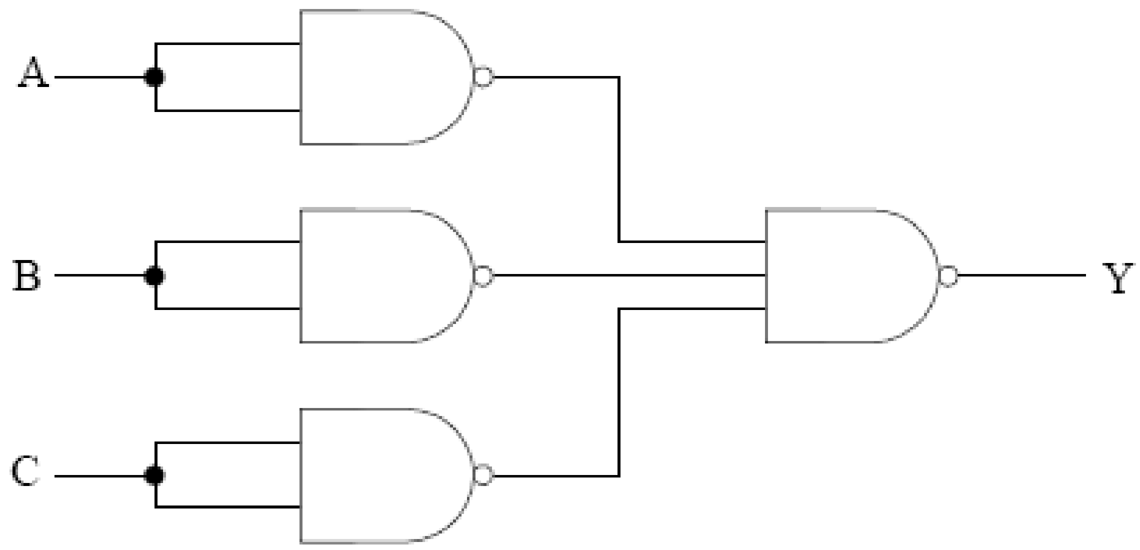
Teoremas de DeMorgan

$$\overline{A.B} = \overline{A}+\overline{B}$$

$$\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$$

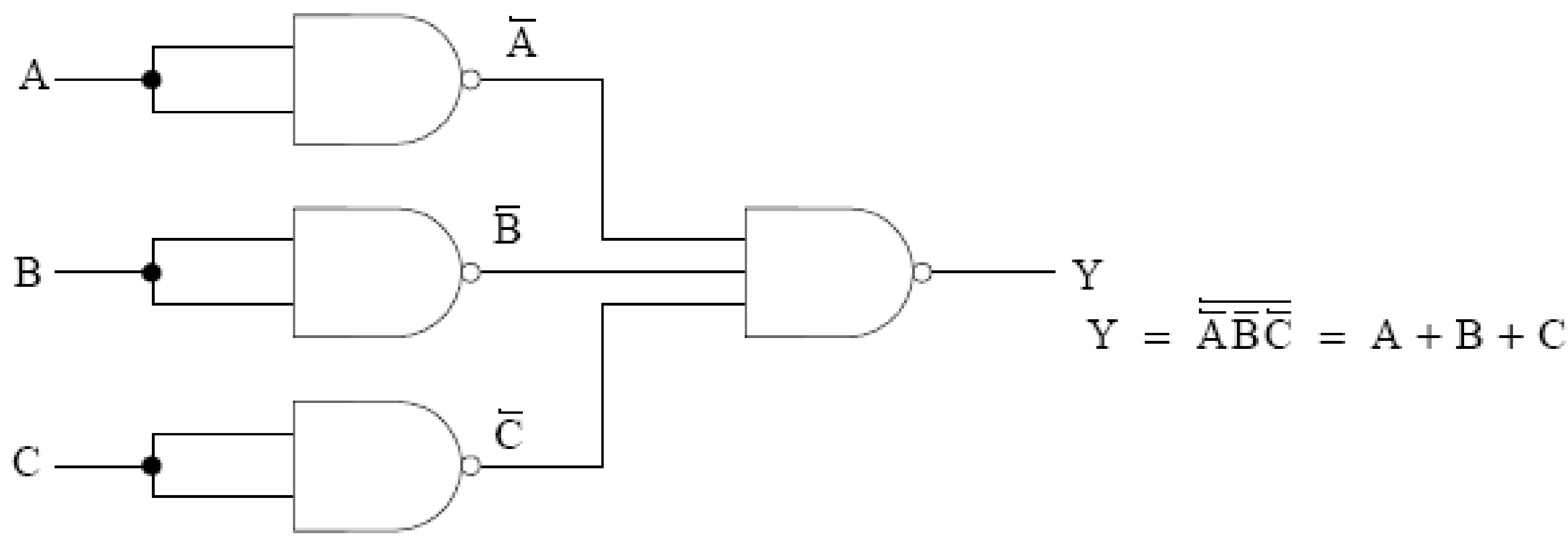
Álgebra de Boole - Teoremas e Postulados

Dado o circuito, obter a expressão booleana.

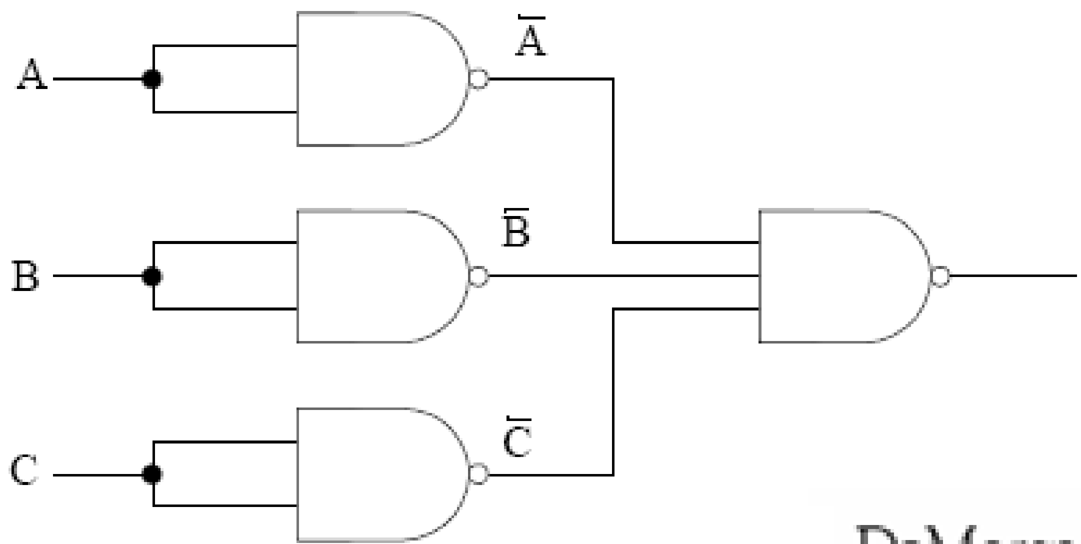


Álgebra de Boole - Teoremas e Postulados

- **Dado o circuito obter a expressão booleana.**



Álgebra de Boole - Teoremas e Postulados



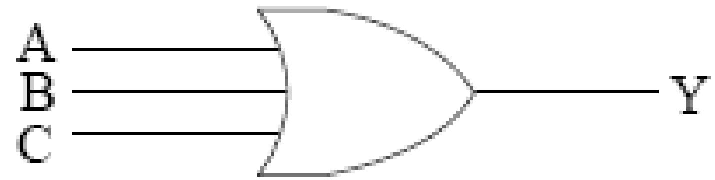
$$Y = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = A + B + C$$

DeMorgan's theorems

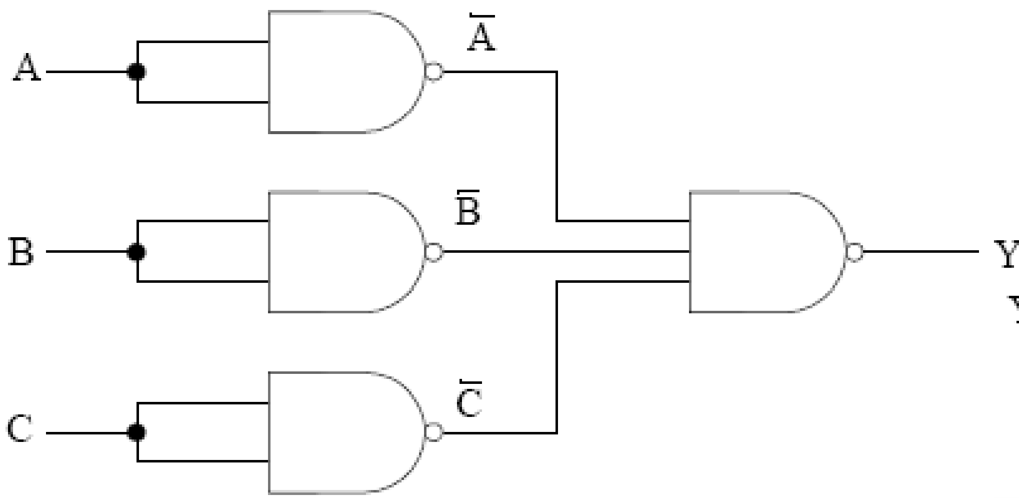
$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Álgebra de Boole - Teoremas e Postulados



$$Y = A + B + C$$



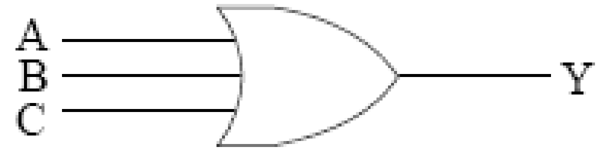
$$Y = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = A + B + C$$

DeMorgan's theorems

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

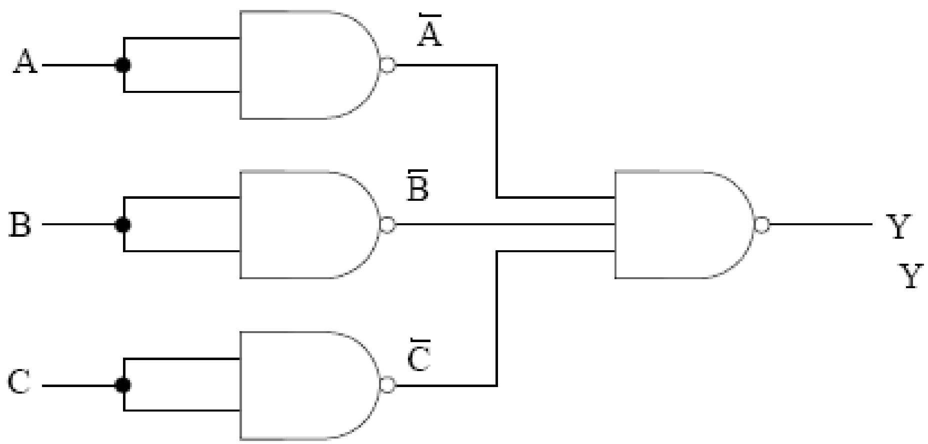
$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Álgebra de Boole - Teoremas e Postulados



$$Y = A + B + C$$

Custo = 3



$$Y = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = A + B + C$$

Custo = 12

DeMorgan's theorems

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Álgebra de Boole - Teoremas e Postulados

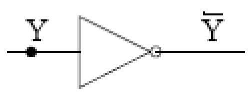
Dada a seguinte expressão booleana, obter o circuito.

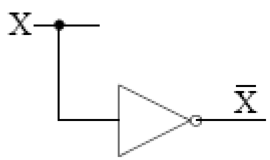
$$W = X(\overline{Y} + Z) + \overline{X}Y$$

Álgebra de Boole - Teoremas e Postulados

- **Dada a seguinte expressão booleana, obter o circuito.**

$$W = X(\overline{Y} + Z) + \overline{X}Y$$

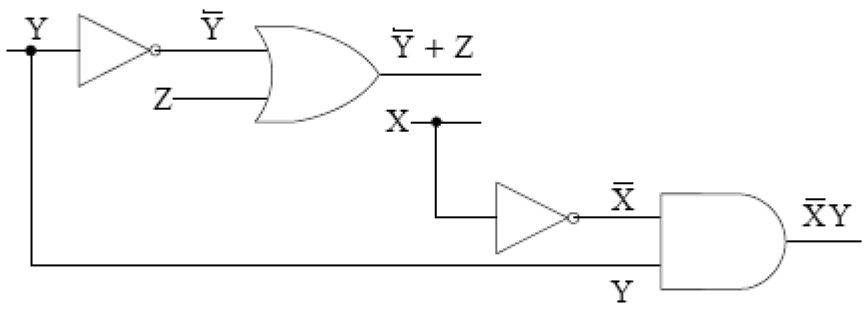




Álgebra de Boole - Teoremas e Postulados

- **Dado o circuito obter a expressão booleana.**

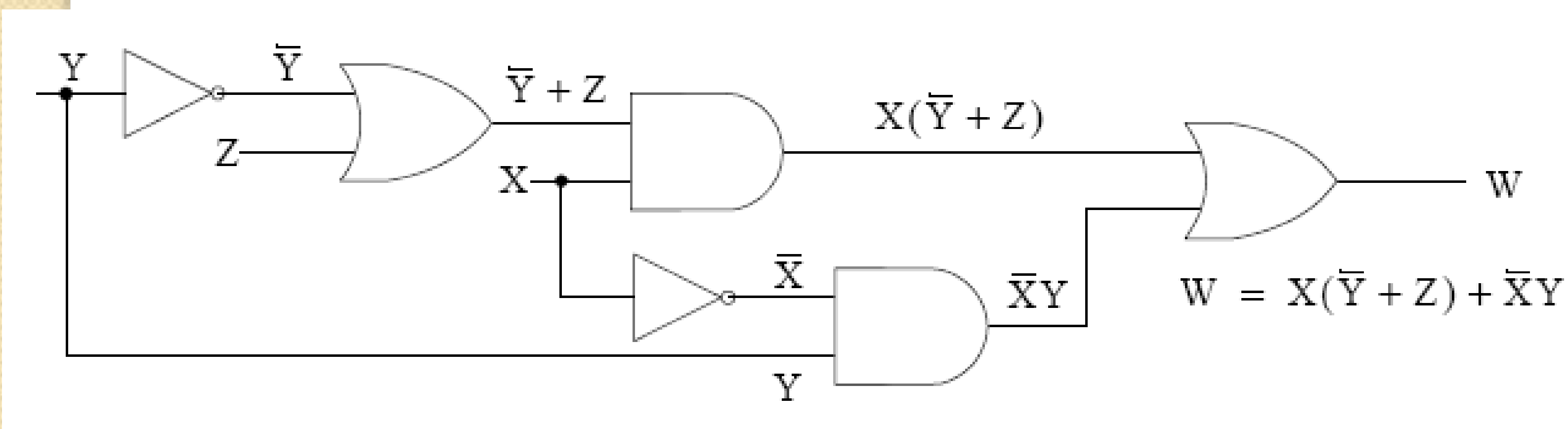
$$W = X(\overline{Y} + Z) + \overline{X}Y$$



Álgebra de Boole - Teoremas e Postulados

- **Dado o circuito obter a expressão booleana.**

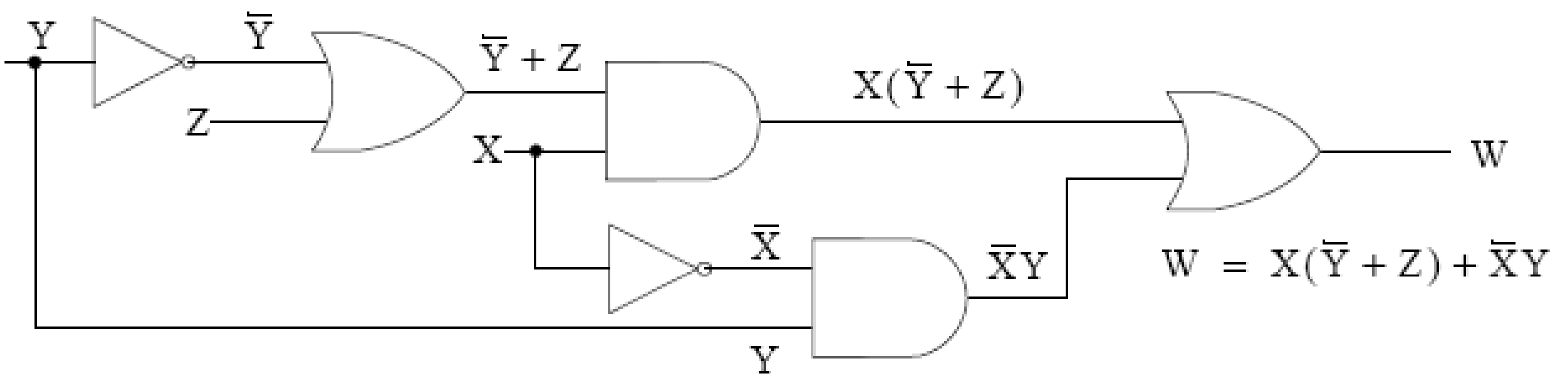
$$W = X(\overline{Y} + Z) + \overline{X}Y$$



Álgebra de Boole - Teoremas e Postulados

Dado o circuito obter a expressão booleana.

$$W = X(\overline{Y} + Z) + \overline{X}Y$$



$$\mathbf{W = X(\overline{Y} + Z) + \overline{X}.Y}$$

$$\mathbf{W = X.\overline{Y} + X.Z + \overline{X}.Y}$$

Álgebra de Boole => Teoremas e Postulados

A Álgebra de Boole permite manipular (transformar) e simplificar expressão booleanas

Trata-se do formalismo matemático para dar suporte à Teoria dos Circuitos Lógicos Digitais

Álgebra de Boole => Teoremas e Postulados

Fundamentos da Álgebra de Boole

Postulados (Axiomas):

São proposição assumidas como verdade. Não necessita de provas.

“ a menor distâncias entre dois pontos é a linha reta “

Uma proposição é uma afirmação (declaração) que pode ser Verdadeira ou Falsa.

Cálculo de Proposições

Álgebra de Boole => Teoremas e Postulados

Postulados (Axiomas):

1. Seja X uma variável booleana.

   Então $X = 0$ ou $X = 1$.

   Se $X = 0$ então $\overline{X} = 1$ e vice-versa.

2. $0 \cdot 0 = 0$

3. $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$

4. $1 \cdot 1 = 1$

5. $0 + 0 = 0$

6. $0 + 1 = 1 + 0 = 1$

7. $1 + 1 = 1$

Álgebra de Boole => Teoremas e Postulados

Teoremas:

1. Leis Comutativa.
   a. $A \cdot B = B \cdot A$
   b. $A + B = B + A$
2. Leis Associativa.
   a. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
   b. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. Leis Distributiva.
   a. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
   b. $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
4. Leis Identidade.
   a. $A \cdot A = A$
   b. $A + A = A$

Álgebra de Boole => Teoremas e Postulados

Teoremas:

5. Leis da Negação.

a. $\overline{(A)} = \overline{A}$

b. $\overline{(\overline{A})} = \overline{\overline{A}} = A$

6. Leis da Redundância.

a. $A \cdot (A + B) = A$

b. $A + (A \cdot B) = A$

7.

a. $0 \cdot A = 0$

b. $1 \cdot A = A$

c. $0 + A = A$

d. $1 + A = 1$

Álgebra de Boole => Teoremas e Postulados

Teoremas:

8.

a. $A \cdot \overline{A} = 0$

b. $A + \overline{A} = 1$

9.

a. $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$

b. $A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$

10. DeMorgan's theorems

a. $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

b. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Álgebra de Boole => Teoremas e Postulados

Exemplo 02.

Simplifique e Implemente a seguinte expressão booleana $D = \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC + B\overline{C}$.

Álgebra de Boole => Teoremas e Postulados

Exemplo 02.

Simplifique e Implemente a seguinte expressão booleana $D = \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC + B\overline{C}$.

Solução:

Pode-se adicionar o termo ABC pois $X + X = X$

$$D = \overline{A}BC + ABC + A\overline{B}C + ABC + B\overline{C}$$

Pode-se por os termos BC e AC em evidência -> associatividade

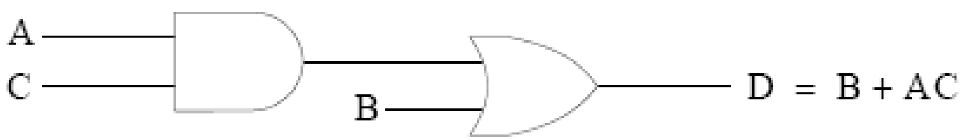
$$= BC(A + \overline{A}) + AC(B + \overline{B}) + B\overline{C}$$

sabe-se que $A + \overline{A} = 1$

$$= BC + AC + B\overline{C}$$

$$= B(C + \overline{C}) + AC$$

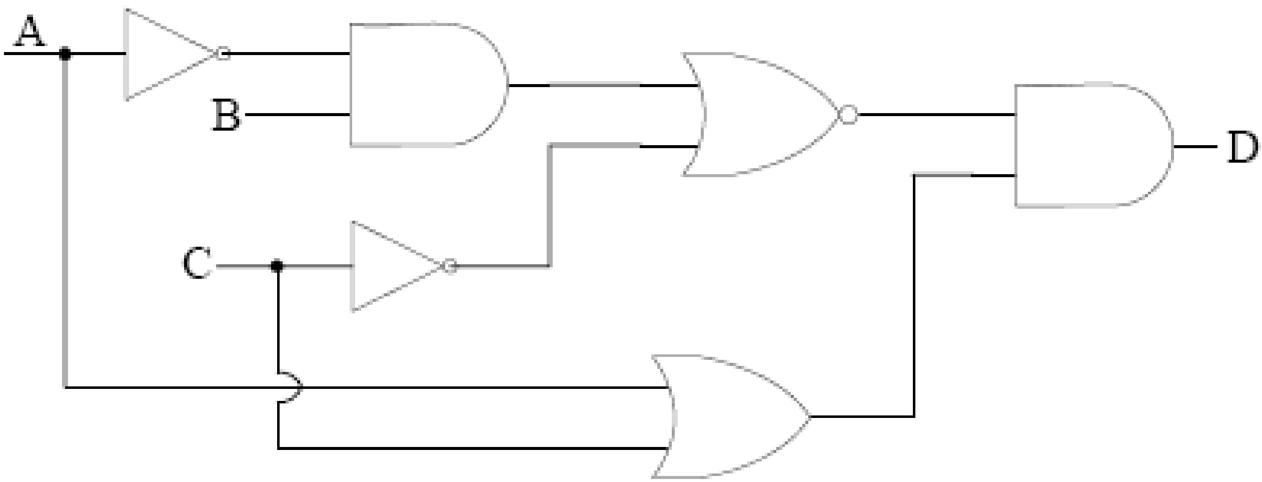
$$= B + AC$$



Álgebra de Boole => Teoremas e Postulados

Exemplo 03.

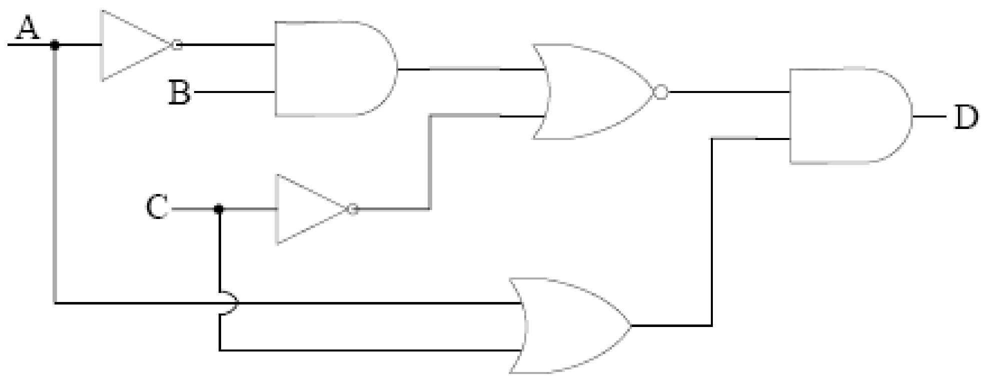
Obtenha a expressão para a função D e simplifique o circuito.



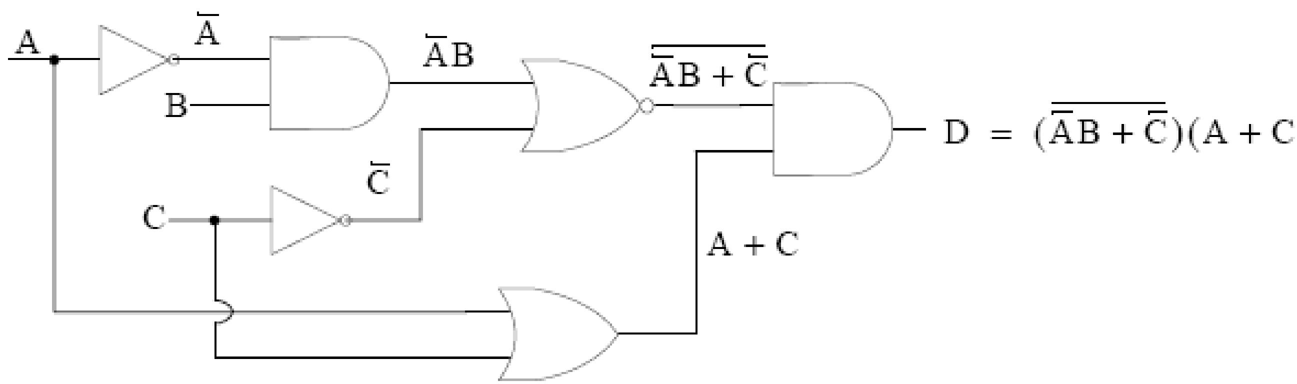
Álgebra de Boole => Teoremas e Postulados

Exemplo 03.

Obtenha a expressão para a função D e simplifique o circuito.

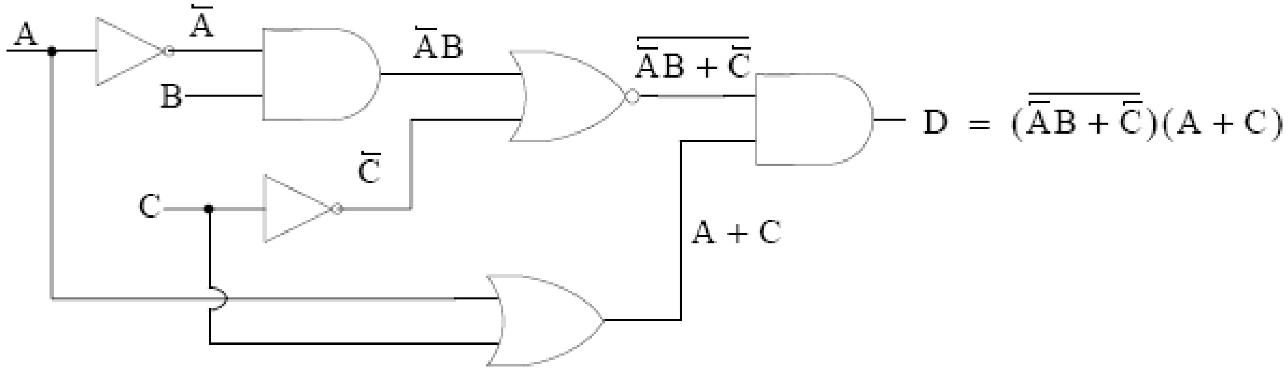


Solução:



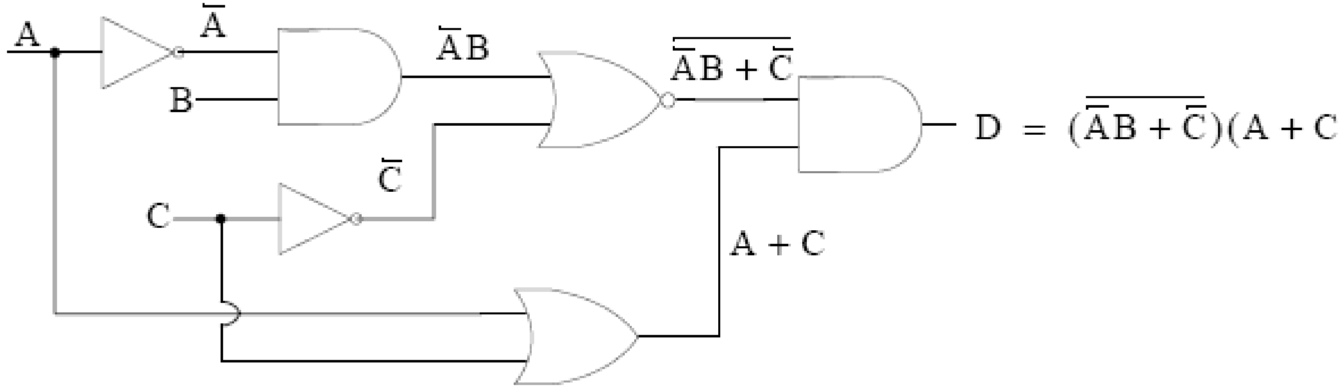
Álgebra de Boole => Teoremas e Postulados

Solução:



Álgebra de Boole => Teoremas e Postulados

Solução:

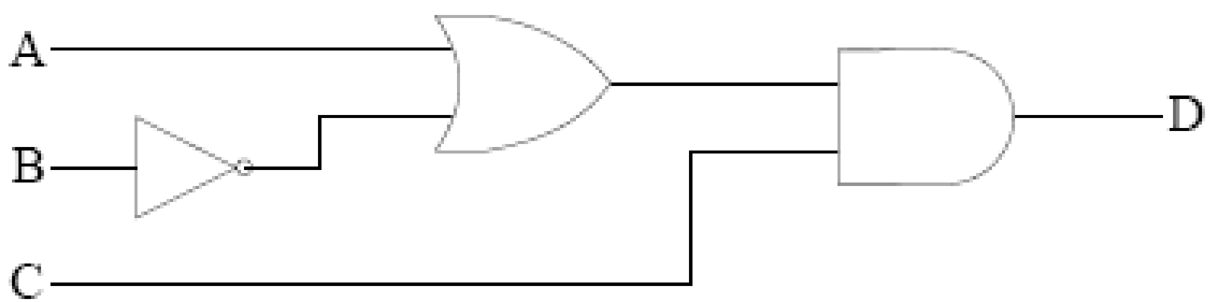


$$D = (\overline{\bar{A}B + \bar{C}})(A + C) = (\overline{\bar{A}B}C)(A + C) = [(A + \bar{B})C](A + C)$$

$$= (A + \bar{B})(AC + CC) = (A + \bar{B})(AC + C) = AAC + AC + A\bar{B}C + \bar{B}C$$

$$= AC + AC + \bar{B}C(A + 1) = AC + \bar{B}C(1) = AC + \bar{B}C$$

$$= (A + \bar{B})C$$



Álgebra de Boole => Teoremas e Postulados

1) Exercícios: Prove a igualdade entre as seguintes expressões:

1. $A + AB = A$
2. $A + \overline{A}B = A + B$
3. $A(A + B) = A$
4. $A(\overline{A} + B) = AB$
5. $\left(\overline{AB + \overline{A}.\overline{B}}\right) = A\overline{B} + \overline{A}B$
6. $(A\overline{B} + \overline{A}B\,) = (A + B) + (\overline{A.B})$
7. $(A + B\,).(A + \overline{B}) = A$

2) Simplifique a expressão numa forma mínima: $\mathbf{A + \overline{A}B + \overline{A}BC}$
Mostre que os dois circuitos (expressão original e expressão simplificada) são equivalentes.

Álgebra de Boole => Teoremas e Postulados

3 Simplifique as expressões

a) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C}$

b) $ABCD + (\overline{ABCD})$

c) $(\overline{\overline{A} + B + C + D}) + (A\overline{B}\,\overline{C}D)$

Circuitos Aritméticos

- Somadores: soma 2 valores binários

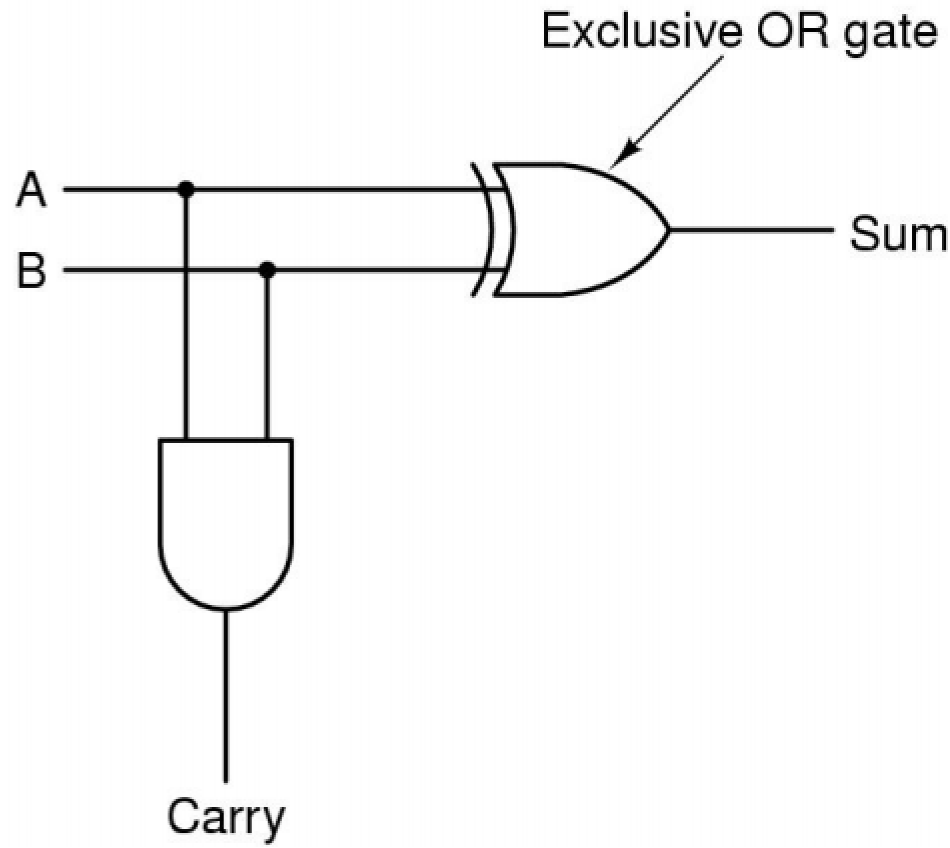
- ● 0 + 0 = 0
- ● 0 + 1 = 1
- ● 1 + 0 = 1
- ● 1 + 1 = 1 0

Somadores: meio somador

A	B	Sum	Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

- Somadores: meio somador

A	B	Sum	Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

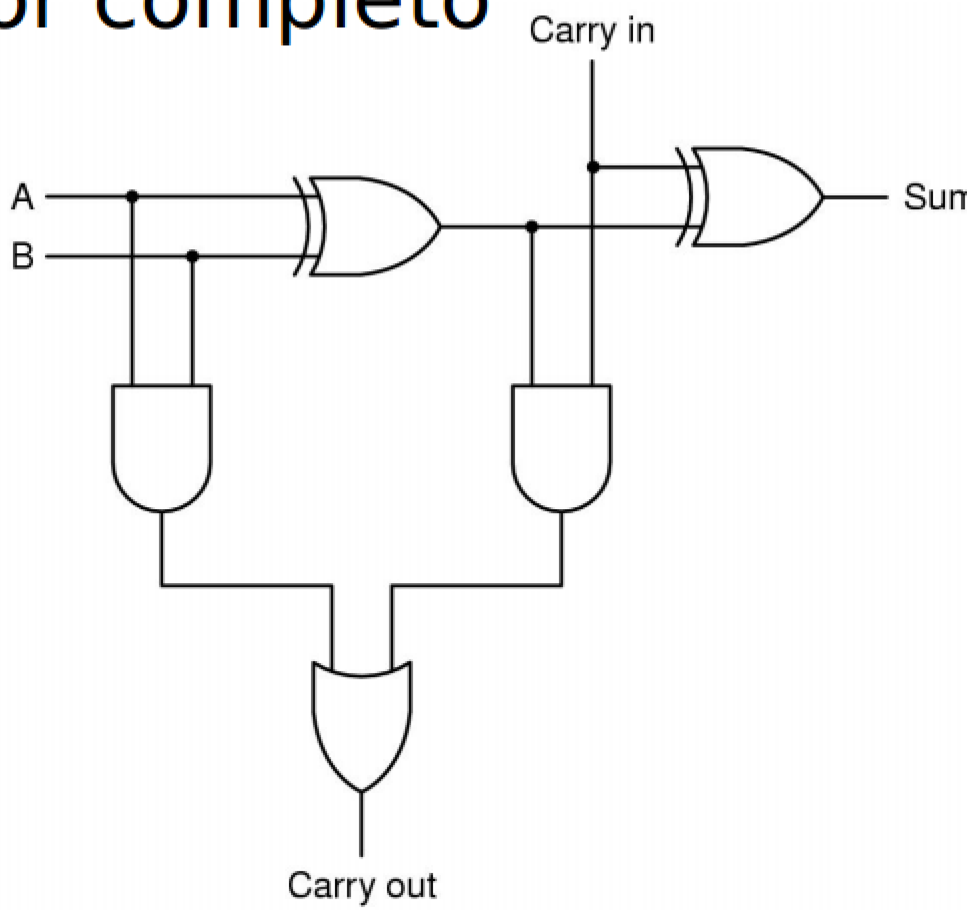


Somadores: somador completo

A	B	Carry in	Sum	Carry out
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

- Somadores: somador completo

A	B	Carry in	Sum	Carry out
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1



Lista 04 – Portas Lógicas

Livro: Sistemas Digitais, Ronald Tocci, 10ª. Edição,

Capítulo 3 - 1, 2, 6, 12, 15, 16, 17, 19, 21, 26, 28

2 alunos – Data:

3.1 Desenhe a forma de onda de saída para a porta OR da Figura 3.52.

3.2 Suponha que a entrada *A* na Figura 3.52 seja, não intencionalmente, curto-circuitada para o terra (isto é, $A = 0$). Desenhe a forma de onda de saída resultante.

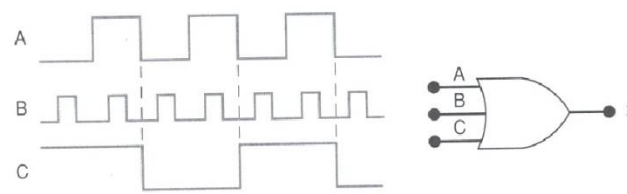


FIGURA 3.52

3.3 Suponha que a entrada *A* na Figura 3.52 seja, não intencionalmente, curto-circuitada para a linha de alimentação +5 V (isto é, $A = 1$). Desenhe a forma de onda de saída resultante.

3.6 Troque a porta OR na Figura 3.52 por uma porta AND.

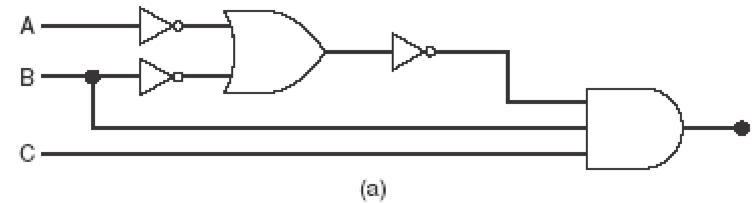
(a)* Desenhe a forma de onda de saída.

(b) Desenhe a forma de onda de saída se a entrada *A* for permanentemente curto-circuitada para o terra.

(c) Desenhe a forma de onda de saída se a entrada *A* for permanentemente curto-circuitada para +5 V.

3.12 (a)* Escreva a expressão booleana para a saída *x* na Figura 3.53(a). Determine o valor de *x* para todas as condições possíveis de entrada e relacione os resultados em uma tabela-verdade.

(b) Repita para o circuito da Figura 3.53(b).



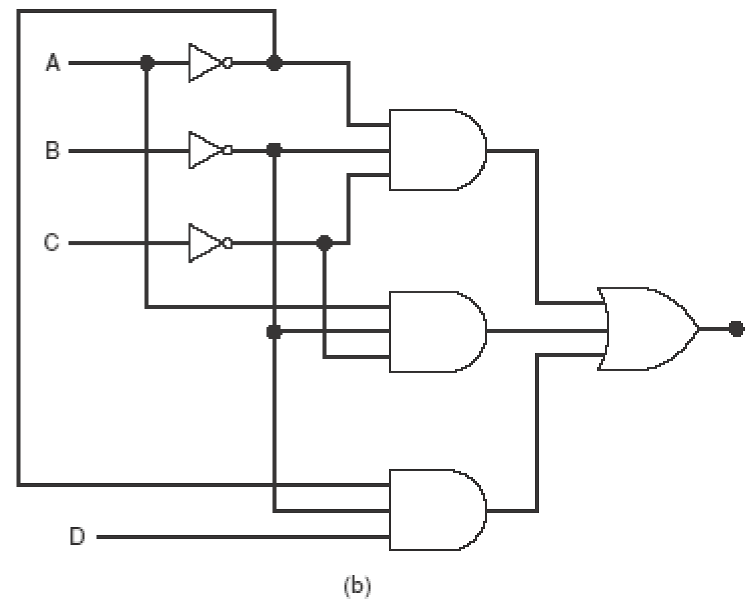


FIGURA 3.53

3.15 Determine a tabela-verdade dos circuitos seguintes.

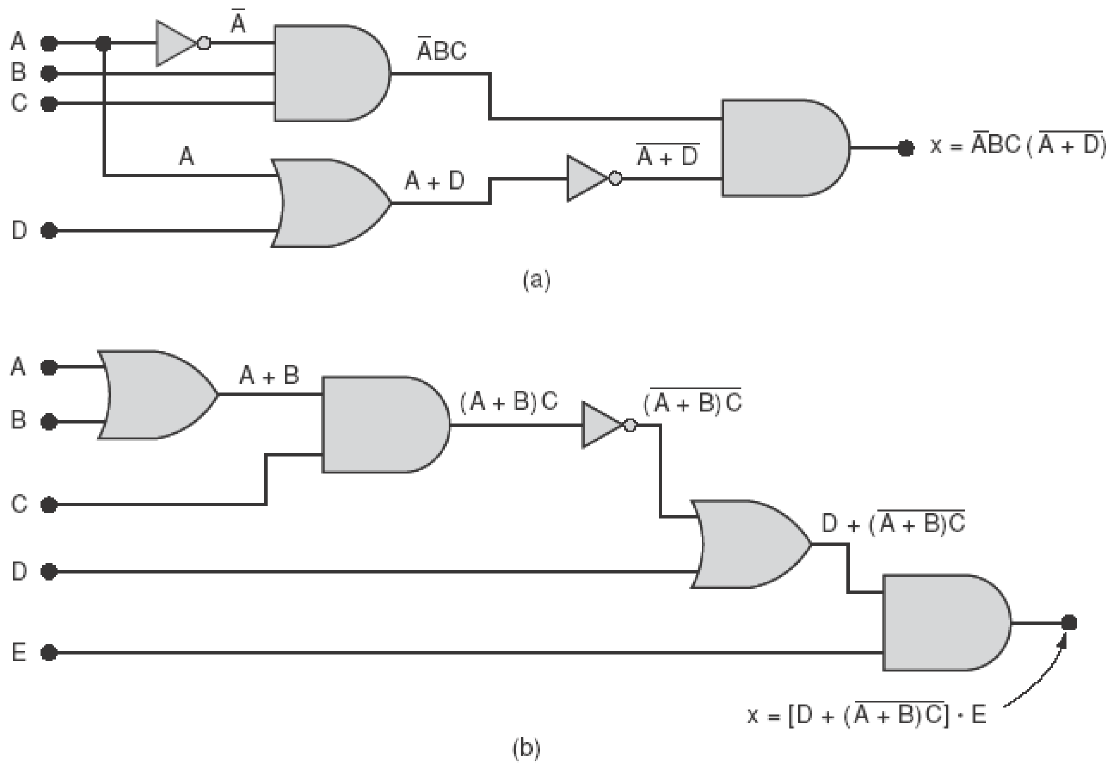


FIGURA 3.15
Mais exemplos.

3.16 Para cada uma das expressões a seguir, desenhe o circuito lógico correspondente usando portas AND, OR e INVERSORES.

(a)* $x = \overline{AB(C + D)}$

(b)* $z = \overline{A + B + \overline{C}D\overline{E})} + \overline{B}C\overline{D}$

(c) $y = (\overline{M + N} + \overline{P}Q)$

(d) $x = \overline{W + P\overline{Q}}$

(e) $z = MN(P + \overline{N})$

(f) $x = (A + B)(\overline{A} + \overline{B})$

3.21 Modifique os circuitos construídos no Problema 3.16 para usar as portas NAND e NOR onde for apropriado.

3.19* Escreva a expressão para a saída do circuito da Figura 3.55 e use-a para determinar a tabela-verdade completa. Em seguida, aplique as formas de onda mostradas na Figura 3.54 às entradas do circuito e desenhe a forma de onda de saída resultante.

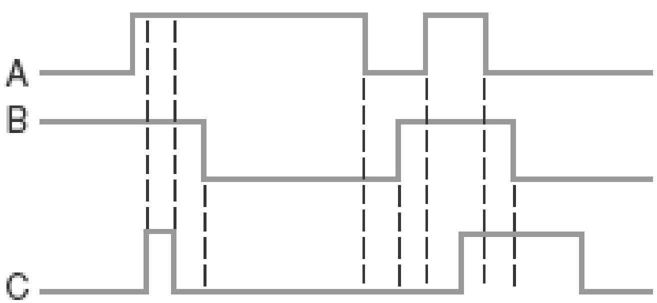


FIGURA 3.54

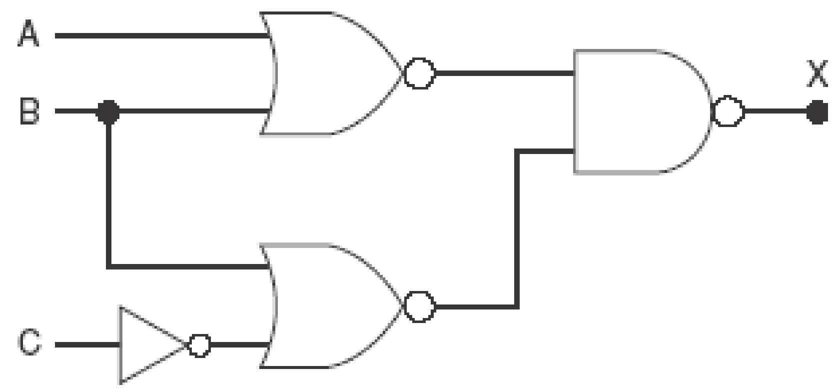


FIGURA 3.55

3.20 Determine a tabela-verdade para o circuito da Figura 3.24.

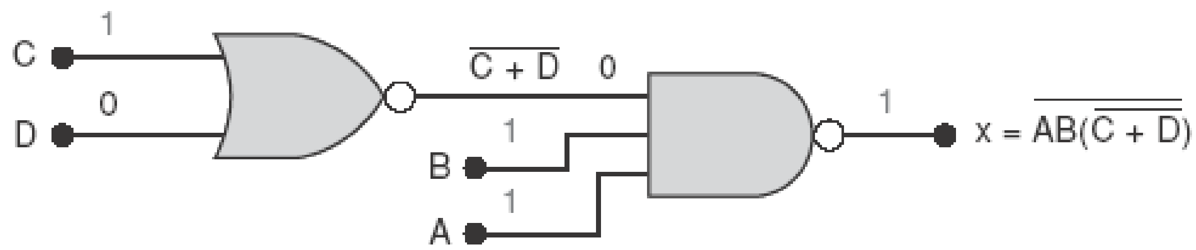


FIGURA 3.24

3.26 Simplifique cada uma das seguintes expressões usando os teoremas de DeMorgan.

(a)* $\overline{\overline{A}B\overline{C}}$

(b) $\overline{\overline{A}+\overline{B}C}$

(c)* $\overline{AB\overline{CD}}$

(d) $\overline{A+\overline{B}}$

(e)* $\overline{\overline{AB}}$

(f) $\overline{\overline{A}+\overline{C}+\overline{D}}$

(g)* $\overline{A(\overline{B+\overline{C}})D}$

(h) $\overline{(M+\overline{N})(\overline{M}+N)}$

(i) $\overline{\overline{\overline{AB}C}D}$

3.27* Use os teoremas de DeMorgan para simplificar a expressão de saída do circuito da Figura 3.55.

3.28 Converta o circuito da Figura 3.53(b) para um circuito que use apenas portas NAND. Em seguida, escreva a expressão de saída para o novo circuito, simplifique-a usando os teoremas de DeMorgan e compare-a com a expressão do circuito original.