UFMG/ICEx/DCC — DCC111 – Matemática Discreta

Lista de Exercícios 5
Teoria dos Conjuntos

Ciências Exatas & Engenharias — 1º Semestre de 2014

1. Escreva uma negação para a seguinte afirmação: $\forall$ conjuntos A, se $A \subseteq \mathbb{R}$ então $A \subseteq \mathbb{Z}$. O que é verdadeira: a afirmação ou sua negação? Justifique a sua resposta.

2. Sejam os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{m \in \mathbb{Z} | m = 2i - 1, \text{ para algum inteiro } i\} \\ B &= \{n \in \mathbb{Z} | n = 3j + 2, \text{ para algum inteiro } j\} \end{aligned}$$

   Prove se $A = B$.

3. Seja $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{u, v\}$ e $C = \{m, n\}$. Liste os elementos do conjunto $A \times (B \times C)$.

4. Prove que para todos os conjuntos A e B, $B - A = B \cap A^c$.

5. Prove por indução matemática que para todo inteiro $n \geq 1$ e todos os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e B,

$$(A_1 - B) \cup (A_2 - B) \cup \ldots \cup (A_n - B) = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) - B$$

6. Prove que para todos os conjuntos A, B e C, $(A - B) - (B - C) = A - B$.

7. Dados dois conjuntos A e B, defina a "diferença simétrica" de A e B, representada por $A \oplus B$, como

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

   Prove se $A \oplus B = B \oplus A$.

8. Prove se para todos os conjuntos A, B e C, $(A - B)$ e $(C - B)$ são necessariamente disjuntos.

9. Sejam os conjuntos $A = \{1\}$ e $B = \{u, v\}$. Determine o conjunto potência de $A \times B$, i.e., $\mathcal{P}(A \times B)$.

10. Determine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

11. Seja $A = \{x, y\}$. Determine:
    (a) $A \cap \mathcal{P}(A)$
    (b) $(\mathcal{P}(A) - A) \cap A$
    (c) $\mathcal{P}(\{\mathcal{P}(A) - \{x\}\} - \emptyset)$

12. Prove que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ usando apenas as propriedades de conjuntos (sem usar diagrama de Venn). (Lembre-se que dados dois conjuntos A e B, $A = B$ sse $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, ou seja, a prova deve ser feita em duas partes.)

13. Simplifique as seguintes expressões usando apenas as propriedades de conjuntos:
    (a) $(((A \cap (B \cup C)) \cap (A - B)) \cap (B \cup C^c)$
    (b) $(A - (A \cap B)) \cap (B - (A \cap B))$

14. Sejam os conjuntos A, B e C. Sabe-se que $A \subseteq B$ e os conjuntos B e C são disjuntos, mas A e C têm elementos em comum. Esboce, se for possível, o diagrama de Venn desses conjuntos.