Teoria dos Conjuntos

Antonio Alfredo Ferreira Loureiro

loureiro@dcc.ufmg.br

Olga Nikolaevna Goussevskaia

olgang@gmail.com

Introdução

- O que os seguintes objetos têm em comum?
  - um grupo de pessoas
  - um rebanho de animais
  - um buquê de flores
  - uma dúzia de ovos

- Conjunto: coleção de objetos bem definidos, denominados elementos ou membros do conjunto.
  - As palavras “conjunto” e “elementos” são termos indefinidos da teoria dos conjuntos.

- Teoria dos conjuntos: base do pensamento matemático.
  - **Todos** objetos matemáticos podem ser definidos em termos de conjuntos.

Introdução

- Notação:
  Seja S um conjunto e a um elemento de S.
  - $a \in S$: a pertence a S
  - $a \notin S$: a não pertence a S

- Axioma da extensão:
  - Um conjunto é completamente determinado pelos seus elementos.
  - A ordem na qual os elementos são listados é irrelevante.
  - Elementos podem aparecer mais de uma vez no conjunto.

Formas de definir um conjunto

- Listar seus elementos entre chaves:
  - {Ana, Roberto, Carlos}
  - {Roberto, Carlos, Ana}
  - {Roberto, Roberto, Ana, Carlos, Ana}

- Especificar uma propriedade que define um conjunto, como $S = \{x|P(x)\}$:
  - $\{x \in \mathbb{Z}| -2 < x < 5\}$
  - $\{x \in \mathbb{R}| -2 < x < 5\}$

  ➜ $P(x)$ não pode ser uma propriedade qualquer.
  Exemplo:
  $S = \{A|A$ é um conjunto e $A \notin A\}$; $S \in S$? [Paradoxo de Russel]

- Usar uma definição recursiva:
  - $\begin{cases} 1 \in A \\ \text{se } x \in A \text{ e } x+2 < 10, \text{ então } x+2 \in A \end{cases}$

Formas de definir um conjunto

- Usar operações sobre conjuntos para criar novos conjuntos:
  - $S = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup P$

- Especificar uma função característica:
  - $\mu_A(x) = \begin{cases} k & \text{para } x = 1, 3, 5, 7, 9 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

➜ Nem sempre é possível utilizar todos os tipos de definição:

Exemplo: $S = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$

Não é possível definir S listando os elementos.

Relações entre conjuntos: Subconjuntos

- Definição: Se A e B são conjuntos, A é chamado subconjunto de B, escrito $A \subseteq B$, sse cada elemento de A também é um elemento de B.

- Simbolicamente:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x, \text{ se } x \in A \text{ então } x \in B.$$

- As frases "A está contido em B" e "B contém A" são formas alternativas de dizer que A é um subconjunto de B.

Relações entre conjuntos: Subconjunto próprio

- Definição: Se A e B são conjuntos, A é subconjunto próprio de B sse cada elemento de A está em B mas existe pelo menos um elemento de B que não está em A.

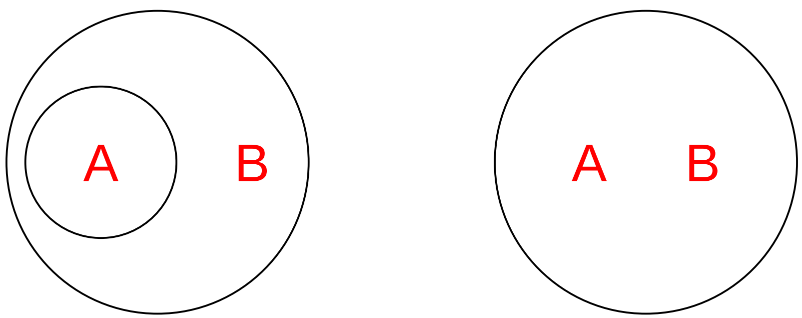
- Simbolicamente:

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } A \neq B.$$

Relações entre conjuntos: Diagramas de Venn

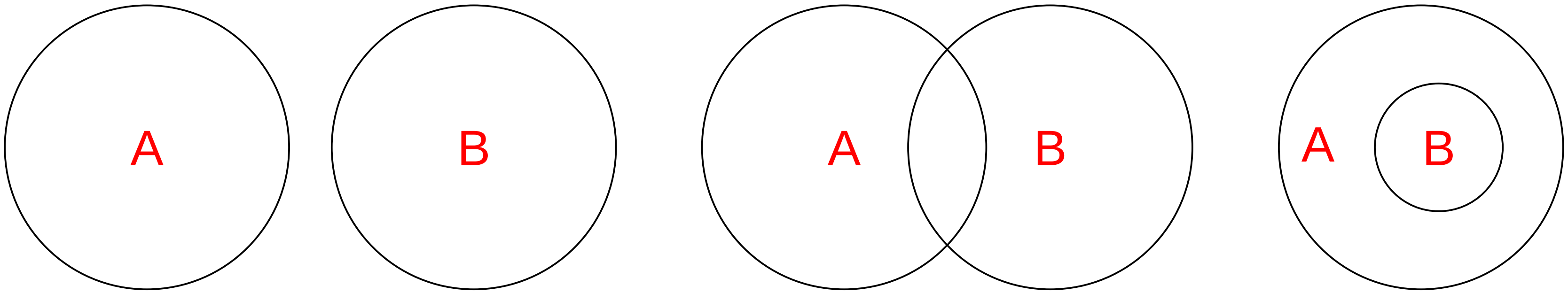
- Se os conjuntos A e B forem representados por regiões no plano, relações entre A e B podem ser representadas por desenhos chamados de **Diagramas de Venn**.

- $\boxed{\text{Exemplo 1:}}$ $A \subseteq B$.



Relações entre conjuntos: Diagramas de Venn

- $\boxed{\text{Exemplo 2:}}$ $A \not\subseteq B$.



Relações entre conjuntos: Igualdade

- Definição:
  Dados os conjuntos A e B, $A = B$ sse cada elemento de A está em B e cada elemento de B está em A.

- Simbolicamente:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Operações sobre conjuntos

Sejam A e B subconjuntos do conjunto universal U.

- União: $A \cup B = \{x \in U | x \in A \text{ ou } x \in B\}$

  Notação: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \cup_{i=1}^{n} A_i$

- Intersecção: $A \cap B = \{x \in U | x \in A \text{ e } x \in B\}$

  Notação: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \cap_{i=1}^{n} A_i$

- Diferença: $B - A = \{x \in U | x \in B \text{ e } x \notin A\}$

- Complemento: $A^c = \{x \in U | x \notin A\}$

Tuplas ordenadas

- Seja n um inteiro positivo e seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma sequência de elementos não necessariamente distintos.

- A n-tupla ordenada, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, consiste de:
  - elementos da sequência, i.e., $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e
  - a ordem desses elementos na sequência, i.e., x_1 é o primeiro elemento, x_2 o segundo, etc.

- Exemplos:
  - Uma 2-tupla ordenada é chamada de "par ordenado".
  - Uma 3-tupla ordenada é chamada de "tripla ordenada".

- Duas n-tuplas ordenadas $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ e $(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ são iguais sse $x_i = y_i$, para $i = 1 \ldots n$.

Produto Cartesiano

- Dado dois conjuntos A e B, o **produto cartesiano** de A e B, denotado $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$.
  - Notação: $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ e } b \in B\}$

- Dado os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, o produto cartesiano de $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotado $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, é o conjunto de todas n-tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, onde $a_i \in A_i$ para $i = 1 \ldots n$.
  - Notação:
    $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n =$
    $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i \text{ para } i = 1 \ldots n\}$

Propriedades de subconjuntos

- Inclusão da intersecção: para todos conjuntos A e B.
  - $A \cap B \subseteq A$
  - $A \cap B \subseteq B$

- Inclusão na união: para todos conjuntos A e B.
  - $A \subseteq A \cup B$
  - $B \subseteq A \cup B$

- Propriedade transitiva dos subconjuntos: para todos conjuntos A, B e C.
  - se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$

Identidades de conjuntos

Sejam todos os conjuntos abaixo subconjuntos do conjunto universal U.

- Comutatividade:

$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$

- Associatividade:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

- Distributividade:

$A \cup (B \cap C) =$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) =$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

- Intersecção com U:

$A \cap U = A$

- União com U:

$A \cup U = U$

Identidades de conjuntos

- Complemento duplo:

$(A^c)^c = A$

- Idempotência:

$A \cap A = A$	$A \cup A = A$

- De Morgan:

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$A - (B \cap C) =$ $(A - B) \cup (A - C)$	$A - (B \cup C) =$ $(A - B) \cap (A - C)$

- Absorção:

$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$

- Representação alternativa para diferença de conjuntos:

$A - B = A \cap B^c$

Teorema sobre conjunto vazio

Teorema: Um conjunto com nenhum elemento é um subconjunto de cada conjunto. Em outras palavras, se $\emptyset$ é um conjunto com nenhum elemento e A é um conjunto qualquer, então $\emptyset \subseteq A$.

Prova (por contradição):

- Suponha que não. Suponha que exista um conjunto $\emptyset$ com nenhum elemento e um conjunto A tal que $\emptyset \not\subseteq A$. [Deve-se deduzir uma contradição.]
- Neste caso, deve haver um elemento de $\emptyset$ que não é um elemento de A [pela definição de subconjunto]. Mas não pode haver tal elemento já que $\emptyset$ não tem nenhum elemento. Isto é uma contradição.

$\therefore$ A suposição que existem conjuntos $\emptyset$ e A, onde $\emptyset$ não tem nenhum elemento e $\emptyset \not\subseteq A$ é F e o teorema é V.

Teorema sobre conjunto vazio

- Corolário: Existe somente um conjunto com nenhum elemento.

  Prova:
  - Suponha que $\emptyset_1$ e $\emptyset_2$ são conjuntos com nenhum elemento. Pelo teorema acima, $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$ já que $\emptyset_1$ não tem nenhum elemento. Da mesma forma, $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$ já que $\emptyset_2$ não tem nenhum elemento. Logo, $\emptyset_1 = \emptyset_2$ pela definição de igualdade de conjuntos.

- Definição: o conjunto único com nenhum elemento é chamado de conjunto vazio e é denotado pelo símbolo $\emptyset$.

Propriedades de conjuntos que envolvem $\emptyset$

Sejam todos os conjuntos abaixo subconjuntos do conjunto universal U.

- União com $\emptyset$:

$A \cup \emptyset = A$

- Intersecção e união com o complemento:

$A \cap A^c = \emptyset$	$A \cup A^c = U$

- Intersecção com $\emptyset$:

$A \cap \emptyset = \emptyset$

- Complementos de U e $\emptyset$:

$U^c = \emptyset$	$\emptyset^c = U$

Partições de conjuntos

- Definição: Dois conjuntos são chamados **disjuntos** sse eles não têm nenhum elemento em comum.

- Simbolicamente,

$$A \text{ e } B \text{ são disjuntos } \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

- Proposição: Dados dois conjuntos A e B, $(A - B)$ e B são disjuntos.

  Prova (por contradição):

  – Suponha que não. Suponha que existam conjuntos A e B tais que $(A - B)$ e B não sejam disjuntos. [Deve-se deduzir uma contradição.]

  – Neste caso, $(A - B) \cap B \neq \emptyset$ e, desta forma, existe um elemento x em $(A - B) \cap B$. Pela definição de intersecção, $x \in (A - B)$ e $x \in B$ e já que que $x \in (A - B)$, pela definição de diferença, $x \in A$ e $x \notin B$. Acabou-se de mostrar que $x \in B$ e $x \notin B$, o que é uma contradição.

  $\therefore$ A suposição que existem conjuntos A e B tais que $(A - B)$ e B não são disjuntos é F e a proposição é V.

Partições de conjuntos

- Definição (conjuntos mutuamente disjuntos): Conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são mutuamente disjuntos (ou disjuntos par-a-par ou sem sobreposição) sse $A_i \cap A_j$ para todos $i, j = 1, 2, \ldots, n$ e $i \neq j$, i.e., $A_i \cap B_i = \emptyset$.

- Definição (partição): Uma coleção de conjuntos não vazios $\{A_1$, A_2, ..., $A_n\}$ é uma partição do conjunto A sse
  1. $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$
  2. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são mutuamente disjuntos

Conjunto potência

- Definição (conjunto potência): Dado um conjunto A, o conjunto potência de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto de todos os subconjuntos de A.

- Ache o conjunto potência do conjunto $\{x, y\}$.

  $\mathcal{P}(\{x, y\}) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$.

- **Teorema**: Para todos conjuntos A e B, se $A \subseteq B$ então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

  Prova:

  – Suponha que A e B são conjuntos tais que $A \subseteq B$. [Deve-se mostrar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$].

  – Suponha que $X \subseteq \mathcal{P}(A)$. [Deve-se mostrar que $X \subseteq \mathcal{P}(B)$]. Já que $X \subseteq \mathcal{P}(A)$ então $X \subseteq A$ pela definição de conjunto potência. Mas como $A \subseteq B$, temos que $X \subseteq B$ pela propriedade transitiva dos subconjuntos. Conclui-se então que $X \subseteq \mathcal{P}(B)$ [o que devia ser mostrado].

  $\therefore$ $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ pela definição de subconjunto.

Conjunto potência

Teorema: Para todos inteiros $n \geq 0$, se um conjunto X tem n elementos então $\mathcal{P}(X)$ tem 2^n elementos.

Prova (por indução matemática): Considere a propriedade "Qualquer conjunto com n elementos tem 2^n elementos.

Passo base: Para $n = 0$ tem-se $2^0 = 1$ subconjunto. O único conjunto com zero elementos é o conjunto vazio que só tem um subconjunto que é ele próprio. Logo, a propriedade é verdadeira para $n = 0$.

Conjunto potência

Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.

(a) Seja $k \geq 0$ e suponha que qualquer conjunto com k elementos tem 2^k subconjuntos. [hipótese indutiva]

(b) Deve-se mostrar que qualquer conjunto com $k + 1$ elementos tem 2^{k+1} subconjuntos.

- Seja X um conjunto com $k + 1$ elementos e escolha um elemento z em X.
- Observe que qualquer subconjunto de X ou contém z ou não contém.
- Além disso, qualquer subconjunto de X que não contém z é um subconjunto de $X - \{z\}$.
- E qualquer subconjunto A de $X - \{z\}$ pode ser associado com um subconjunto B, igual a $A \cup \{z\}$, de X que contém z.
- Consequentemente, existem tantos subconjuntos de X que contém z como os que não contém, e assim existem duas vezes tantos subconjuntos de X quanto existem subconjuntos de $X - \{z\}$.
- Mas como $X - \{z\}$ tem k elementos e como o número de subconjuntos de $X - \{z\}$ é 2^k temos que o número de subconjuntos de X é duas vezes o número de subconjuntos de $X - \{z\}$, ou seja, $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$. [O que devia ser provado]