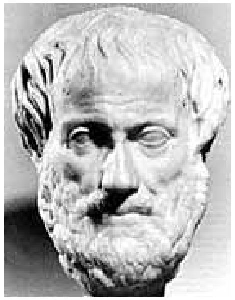
Fundamentos da Lógica
Lógica Proposicional

Antonio Alfredo Ferreira Loureiro
loureiro@dcc.ufmg.br

Olga Nikolaevna Goussevskaia
olgang@gmail.com

Fundamentos da lógica: Alguns fatos históricos



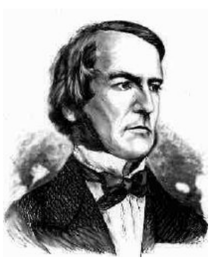
Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.), filósofo grego. Produziu uma obra rica e multifacetada. Nela encontramos uma exaustiva compilação dos conhecimentos do seu tempo, mas também, uma filosofia que ainda hoje influência a nossa maneira de pensar.

Responsável por escrever os primeiros grandes trabalhos de lógica:

- Coleção de regras para raciocínio dedutivo que pode ser usado em qualquer área do conhecimento.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), filósofo e matemático alemão, provavelmente mais conhecido por ter inventado o cálculo integral e diferencial independentemente de Isaac Newton.

Propõe o uso de símbolos para mecanizar o processo de raciocínio dedutivo.



George Boole (1815–1864), matemático e filósofo inglês.

Augustus De Morgan (1806–1871), matemático inglês.

Propõem as bases da lógica simbólica moderna usando as idéias de Leibniz.

Fundamentos da lógica: Atualidade

Pesquisa continua sendo aplicada em áreas como:

– inteligência artificial;
– projeto de circuito lógico;
– teoria de autômatos e computabilidade;
– teoria de bancos de dados relacionais;
– teoria de linguagens;
– teoria de sistemas distribuídos.

Forma de um Argumento $\times$ Seu Conteúdo

- Forma de um argumento: conceito central da lógica dedutiva.
- Argumento: sequência de afirmações para demonstrar a validade de uma asserção.
- Como saber que a conclusão obtida de um argumento é válida?
  ➜ As afirmações que compõem o argumento
  - são aceitas como válidas, ou
  - podem ser deduzidas de afirmações anteriores.
- Em lógica, forma de um argumento $\neq$ seu conteúdo.
- "Análise lógica" não determina a validade do conteúdo de um argumento.
- "Análise lógica" determina se a verdade de uma conclusão pode ser obtida da verdade de argumentos propostos.
- Lógica: Ciência do Raciocínio.

Forma de um Argumento $\times$ Seu Conteúdo

- $\boxed{\text{Exemplo 1:}}$

  se a sintaxe de um programa está errada **ou**

  se a execução do programa resulta em divisão por zero

  então o computador irá gerar uma mensagem de erro.

  $\therefore$ Computador não gera mensagem de erro

  $\Downarrow$

  Sintaxe do programa está correta **e**

  Execução do programa não resulta em divisão por zero.

- $\boxed{\text{Exemplo 2:}}$

  se $x \in \mathbb{R} \mid x < -2$ **ou** $x > 2$

  então $x^2 > 4$.

  $\therefore x^2 \leq 4$

  $\Downarrow$

  $x \geq -2$ **e** $x \leq 2$.

Forma de um Argumento $\times$ Seu Conteúdo

- Nos exemplos, temos que o conteúdo dos argumentos é diferente.
- No entanto, a “forma lógica” é a mesma:

  se p **ou** q
  então r.
  $\therefore$ **não** r

  $$\Downarrow$$

  não p **e** **não** q.

- Argumentos na forma lógica são normalmente representados por letras minúsculas do alfabeto.
  Exemplo: p, q, r.
- Em geral, as definições da lógica formal estão de acordo com a lógica natural ou intuitiva das pessoas de bom senso.
- O formalismo é introduzido para evitar ambiguidade e garantir consistência.

Proposições

- Em toda teoria matemática, usam-se termos já definidos na concepção de novas definições.

- Mas como fazer com os termos mais "primitivos"?
  - Termos "primitivos" ou iniciais não são definidos.
  - Em lógica, os termos *sentença*, *verdadeiro*, e *falso* são os termos iniciais não definidos.

- Definição: uma afirmação ou proposição é uma sentença que é verdadeira (V) ou falsa (F) mas não ambas.

- Exemplo 3:
  - $2 + 2 = 4$
  - $2 + 2 = 5$

  são proposições, onde a primeira é V e a segunda é F.

Proposições

- $\boxed{\text{Exemplo 4:}}$
  – Ele é um estudante universitário.

  não é uma proposição já que depende da referência ao pronome "ele."

- $\boxed{\text{Exemplo 5:}}$
  – $x + y > 0$.

  também não é uma proposição já que depende dos valores de x e y.

- É possível transformar uma sentença como nos exemplos 4 ou 5 numa proposição?
  – Sim, através de quantificadores, como será visto em lógica de predicados.

Proposições compostas

- Nos exemplos usados daqui para frente, usaremos as letras minúsculas (por exemplo, p, q, r) para representar afirmações.
- Os seguintes símbolos podem ser usados para definir expressões lógicas mais complexas a partir de expressões mais simples:
  - $\neg$ ou $\sim$ ou *"barra sobre a letra"* ou *"linha"*: **não**
    $\neg p$ é lido como "não p" e é chamado de negação de p.
    Outras formas: $\sim p$, $\overline{p}$, p'
  - $\wedge$: **e**
    $p \wedge q$ é lido como "p e q" e é chamado de conjunção de p e q.
  - $\vee$: **ou**
    $p \vee q$ é lido como "p ou q" e é chamado de disjunção de p e q.

Proposições compostas

- $\neg$ é um operador unário e $\wedge$ e $\vee$ são operadores binários.
- Avaliação na seguinte ordem:
  1. $\neg$ (negação);
  2. $\wedge, \vee$ (disjunção, conjunção).
- $\boxed{\text{Exemplo 6:}}$
  – $\neg p \vee q = (\neg p) \vee q$
  – $p \vee q \wedge r$ é ambíguo.
    Correto: $(p \vee q) \wedge r$ ou $p \vee (q \wedge r)$.

Proposições: Tradução de sentenças em linguagens natural e algébrica para símbolos

- Mas e Não/nem ... nem

  $p =$ Está quente.

  $q =$ Está ensolarado.

  $\boxed{\text{Exemplo 7:}}$

  (a) Não está quente mas está ensolarado.

  “Mas” = $\wedge \quad \rightsquigarrow \quad \neg p \wedge q$.

  (b) Não está quente nem ensolarado.

  “Nem A nem B” = $\neg A \wedge \neg B \quad \rightsquigarrow \quad \neg p \wedge \neg q$.

Proposições: Tradução de sentenças em linguagens natural e algébrica para símbolos

- **e** ($\wedge$), **ou** ($\vee$), e desigualdades
  Sejam três números reais representados por a, b, e x.
  - $x \leq a \equiv x < a \vee x = a$
  - $a \leq x \leq b \equiv x \geq a \wedge x \leq b$
  - $2 \leq x \leq 1 \equiv x \geq 2 \wedge x \leq 1$, que é F.

- Sejam os predicados:
  p: $x > 0$; q: $x < 3$; r: $x = 3$.
  (a) $x \leq 3 \equiv q \vee r$
  (b) $0 < x < 3 \equiv p \wedge q$
  (c) $0 < x \leq 3 \equiv p \wedge (q \vee r)$

Proposições e os "valores-verdade"

- Para uma sentença ser uma proposição é necessário ter um valor-verdade bem definido, i.e., V ou F.

- Negação ($\neg$) e sua tabela da verdade:

p	$\neg p$
V	F
F	V

- Conjunção ($\wedge$) e sua tabela da verdade:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Proposições e os “valores-verdade”

- Disjunção ($\vee$)

  Possíveis significados:

  ➜ **inclusive**: p ou q ou ambos (significado assumido para este operador), e

  – exclusivo: p ou q, mas não ambos.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Proposições mais complexas

- $\boxed{\text{Exemplo 8:}}$
  Construa a tabela da verdade para a expressão:

$$E = (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	E
V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F

$E = p \oplus q = p$ **xor** q (ou exclusivo)

- O ponto fundamental em assinalar “valores-verdade” para proposições compostas é que permite o uso da lógica para decidir a verdade de uma proposição usando somente o conhecimento das partes.

- A lógica não ajuda a determinar a verdade ou falsidade de uma afirmação em si, ou seja, seu conteúdo.

Equivalência lógica

- As proposições $p \wedge q$ e $q \wedge p$ possuem os mesmos valores-verdade.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

➜ Por essa razão, $p \wedge q$ e $q \wedge p$ são equivalentes logicamente.

- Definição: duas proposições P e Q são equivalentes logicamente se e somente se os valores-verdade obtidos forem idênticos para cada combinação possível das variáveis que formam as proposições.

Equivalência lógica

- Como verificar se duas proposições P e Q são equivalentes logicamente?
  1. Construa a tabela da verdade para P.
  2. Construa a tabela da verdade para Q usando os mesmos valores de variáveis para as afirmações que formam a proposição.
  3. Verifique se as tabelas da verdade de P e Q são idênticas para cada combinação de valores-verdade. Se forem, P e Q são equivalentes logicamente, caso contrário não.

- Exemplo 9:
  - $\neg(\neg p) \equiv p$
  - $\neg(p \wedge q) \not\equiv \neg p \wedge \neg q$

Equivalência lógica
Leis de "De Morgan"

- Negação de $\wedge$ e $\vee$: Leis de "De Morgan."

  Sejam as afirmações:
  - p = João é alto.
  - q = José é ruivo.

  A proposição $p \wedge q$ é verdadeira sse os componentes forem verdadeiros.

- Quando a proposição é falsa?

  Quando um dos componentes ou ambos forem falsos, i.e.,

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

- Mostre as seguintes equivalências:
  - $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
  - $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

  Essas duas equivalências são conhecidas como leis de "De Morgan" que foi o primeiro a expressá-las em termos matemáticos.

Leis de De Morgan: Exemplos

$\boxed{\text{Exemplo 10:}}$

$p =$ João tem 2 m de altura e ele pesa pelo menos 90 kg.

$\neg p =$ João não tem 2 m de altura ou ele pesa menos de 90 kg.

$\boxed{\text{Exemplo 11:}}$

$p = x < 2$

$\neg p = x \not< 2 \equiv x \geq 2$

$\boxed{\text{Exemplo 12:}}$

$p = -1 < x \leq 4$

$\neg p = \neg(-1 < x \leq 4) \equiv \neg(x > -1 \wedge x \leq 4) \equiv$

$x \not> -1 \vee x \not\leq 4 \equiv x \leq -1 \vee x > 4.$

$\boxed{\text{Exemplo 13:}}$

$p =$ João é alto e João é magro.

$\neg p =$ João não é alto ou João não é magro.

Leis de De Morgan: Exemplos

$\boxed{\text{Exemplo 14:}}$

$t =$ João é alto e magro.

$\neg t =$ João não é alto e magro.

Em lógica formal os vocábulos “e” e “ou” são permitidos somente entre afirmações completas e não entre partes de uma sentença.

- Apesar das leis da lógica serem extremamente úteis, elas devem ser usadas como uma ajuda ao raciocínio e não como um substituto mecânico a inteligência.

- Equivalência lógica é muito útil na construção de argumentos.

Tautologias e contradições

- Uma tautologia é uma proposição que é sempre verdadeira independente dos valores-verdade das afirmações que compõem a proposição.

- Uma contradição é uma proposição que é sempre falsa independente dos valores-verdade das afirmações que compõem a proposição.

➜ De acordo com essas definições, a verdade de uma tautologia ou falsidade de uma contradição se devem a estrutura lógica da proposição em si e são independentes dos significados das afirmações que compõem a proposição.

Tautologias e contradições

- Mostre que a proposição $p \vee \neg p$ é uma tautologia e que a proposição $p \wedge \neg p$ é uma contradição.

- Se t é uma tautologia e c uma contradição mostre que $p \wedge t \equiv p$ e $p \wedge c \equiv c$

Sumário da equivalência lógica

Comutatividade	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
Associatividade	$(p \wedge q) \wedge r \equiv$ $p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv$ $p \vee (q \vee r)$
Distributividade	$p \wedge (q \vee r) \equiv$ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv$ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Identidade	$p \wedge t \equiv p$	$p \vee c \equiv p$
Negação	$p \ \vee \neg p \equiv t$	$p \ \wedge \neg p \equiv c$
Dupla negação	$\neg(\neg p) \equiv p$	
Idempotência	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv$ $\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \equiv$ $\neg p \wedge \neg q$
Limite universal	$p \vee t \equiv t$	$p \wedge c \equiv c$
Absorção	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Negações	$\neg t \equiv c$	$\neg c \equiv t$

Equivalência lógica: Exemplo

Exemplo 15:

Mostre que

$$\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p$$

através dos axiomas acima.

Proposição condicional ou Implicação

- Sejam p e q proposições.
  - "Se p então q" (ou p implica q) é representado simbolicamente por
$$p \longrightarrow q.$$
  - p é chamado de hipótese e q de conclusão.
- Essa sentença é chamada de condicional.
- Sobre o "uso típico" de uma proposição condicional ou implicação:
  - Este tipo de sentença é usado tanto em linguagem natural quanto em raciocínio matemático para dizer que a verdade da proposição q (conclusão) está condicionada à verdade da proposição p (hipótese).
  - No entanto, uma proposição condicional (do ponto de vista matemático) é independente de uma relação causa-efeito entre hipótese e conclusão.
- Exemplo 16:
  - Se (48 é divisível por 6)$_{=[p]}$ então (48 é divisível por 3)$_{=[q]}$.

Proposição condicional

- $\rightarrow$ é um conectivo lógico binário para o qual podem ser definidos valores-verdade.

- Determinando a tabela da verdade para $\rightarrow$ (se–então).
  – A única combinação em que a sentença condicional é falsa é quando a hipótese é V e a conclusão é F (por definição).

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposição condicional

- Seja a seguinte sentença que descreve uma promessa:

  Se (você se apresentar para trabalhar na segunda-feira pela manhã)$_{=[p]}$ *então (você terá o emprego)*$_{=[q]}$.

- Em que situação o empregador não falou a verdade, ou seja, a promessa (sentença) é falsa?

$$p = \text{V} \wedge q = \text{F}.$$

- E se a afirmação p não for satisfeita?
  - Não é justo dizer que a promessa é falsa.

Proposição condicional e linguagem natural

- Seja a seguinte implicação:

  Se hoje estiver ensolarado então nós iremos à praia.

  ➜ Implicação "típica" de uma conversação já que há uma relação entre a hipótese e a conclusão.

- Implicação não é considerada válida quando o dia estiver ensolarado e nós não formos à praia.

Proposição condicional e linguagem natural

- Seja a seguinte implicação:

  Se hoje é sexta-feira então $2 + 3 = 5$.

  – Implicação que é sempre verdadeira pela definição (tabela da verdade) da proposição condicional.

- Por outro lado, a implicação:

  Se hoje é sexta-feira então $2 + 3 = 6$.

  – É verdadeira todos os dias da semana, exceto sexta-feira, apesar de $2 + 3 \neq 6$, ou seja, a conclusão ser sempre falsa.

➜ Nós não usaríamos essas implicações em linguagem natural já que não existe uma relação entre hipótese e conclusão.

➜ O conceito matemático de implicação está baseado na tabela-verdade, ou seja, nos valores que a hipótese e a conclusão podem assumir.

Proposição condicional

- Prioridade para o conectivo lógico $\rightarrow$:
  - Último a ser avaliado em expressões que contêm

$$\neg,\ \vee,\ \wedge.$$

- $\boxed{\text{Exemplo 17:}}$
  Construa a tabela da verdade para a sentença $p \vee \neg q \rightarrow \neg p$.

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg p$	$p \vee \neg q \rightarrow \neg p$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Proposição condicional

- Exemplo 18:
  Mostre que $p \vee q \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

p	q	r	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \vee q \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

➜ Para todas as combinações de valores-verdade de p, q e r, a expressão da esquerda tem o mesmo valor-verdade da direita.

Proposição condicional

- É possível representar $p \rightarrow q$ em termos dos conectivos $\neg$, $\vee$, $\wedge$?
  - Sim.

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

- Negação:

$$\begin{aligned} \neg(p \rightarrow q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) \\ &\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q \\ &\equiv p \wedge \neg q \end{aligned}$$

- $\boxed{\text{Exemplo 19:}}$

a: Se o (meu carro está na oficina)$_{=[p]}$ então (eu não posso ir à aula)$_{=[q]}$.
$\neg a$: (Meu carro está na oficina)$_{=[p]}$ e (eu posso ir à aula)$_{=[\neg q]}$.

Proposição condicional: Contrapositiva

- A proposição contrapositiva de $(p \rightarrow q)$ é $(\neg q \rightarrow \neg p)$.

$$p \rightarrow q \;\equiv\; \neg q \rightarrow \neg p$$

Exemplo 20:

$p \rightarrow q$: Se hoje é Páscoa então amanhã é segunda-feira.

$\neg q \rightarrow \neg p$: Se amanhã não é segunda-feira então hoje não é Páscoa.

Proposição condicional: *Converse**

- O termo *converse* é traduzido em
  - "Matemática Discreta e suas Aplicações, Kenneth H. Rosen, 6ª edição", por ***oposta***,
  - "Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação, Judith L. Gersting, 5ª edição", por ***recíproca***.
  - "Matemática Discreta, Seymour Lipschutz & Marc Lipson, 2ª edição", por ***conversa***.
  - ➜ Nesta disciplina, iremos usar a primeira tradução.

- A proposição <u>oposta</u> de $(p \rightarrow q)$ é $(q \rightarrow p)$.

$$p \rightarrow q \stackrel{?}{\equiv} q \rightarrow p$$

Não.

*A *converse* opinion or statement is one that is the opposite to the one that has just been stated.
— Collins Cobuild English Language Dictionary

Proposição condicional: Inversa

- A proposição <u>inversa</u> de $(p \longrightarrow q)$ é $(\neg p \longrightarrow \neg q)$.

$$p \longrightarrow q \overset{?}{\equiv} \neg p \longrightarrow \neg q$$

Não.

- $\boxed{\text{Exemplo 21:}}$

Original: Se hoje é Páscoa então amanhã é segunda-feira.
Oposta: Se amanhã é segunda-feira então hoje é Páscoa.
Inversa: Se hoje não é Páscoa então amanhã não é segunda-feira.

Proposição condicional e proposições derivadas: Sumário

$$
\begin{array}{rcll}
(p \rightarrow q) & \equiv & (\neg q \rightarrow \neg p) & \text{Proposição contrapositiva} \\
(p \rightarrow q) & \not\equiv & (q \rightarrow p) & \text{Proposição oposta} \\
(p \rightarrow q) & \not\equiv & (\neg p \rightarrow \neg q) & \text{Proposição inversa}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcll}
(q \rightarrow p) & \equiv & (\neg p \rightarrow \neg q) & \text{contrapositiva} \\
\text{oposta de } (p \rightarrow q) & & \text{inversa de } (p \rightarrow q) &
\end{array}
$$

Proposição condicional: Somente se

- A sentença "p somente se q" significa que (acrescentado verbos):

  p [pode ocorrer] **somente se** q [ocorre].

  $\therefore$ Se q não ocorre então p não pode ocorrer, i.e.,

  Se $\neg q$ então $\neg p \equiv$ Se p então q ou $p \rightarrow q$.

- Proposições condicionais:
  - p somente se $q \not\equiv p$ se q.
  - p somente se $q \equiv p \rightarrow q$.
  - p se $q \equiv q \rightarrow p$.

Proposição condicional: Somente se

- $\boxed{\text{Exemplo 22:}}$
  (48 é divisível por 6)$_{=[p]}$ somente se (48 é divisível por 3)$_{=[q]}$ $\equiv$
  Se (48 é divisível por 6)$_{=[p]}$ então (48 é divisível por 3)$_{=[q]}$.

- Neste caso, a proposição condicional $p \rightarrow q$ é sempre verdadeira já que p e q sempre assumem o valor verdadeiro.

- Suponha que x seja um número inteiro e a seguinte proposição:
  (x é divisível por 6)$_{=[p]}$ somente se (x é divisível por 3)$_{=[q]}$ $\equiv$
  Se (x é divisível por 6)$_{=[p]}$ então (x é divisível por 3)$_{=[q]}$.
  ➜ Claramente existem valores para x que fazem com que a proposição seja verdadeira e outros que seja falsa.

Proposição condicional: Somente se

- $\boxed{\text{Exemplo 23:}}$

  A soma de 1 a n é $[\frac{n\cdot(n+1)}{2}]$ somente se a soma de 1 a $n+1$ é $[\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}]$
  $\equiv$
  Se a soma de 1 a n é $[\frac{n\cdot(n+1)}{2}]$ então a soma de 1 a $n+1$ é $[\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}]$

- $\boxed{\text{Exemplo 24:}}$

  Posso comprar o livro de MD somente se tenho dinheiro $\equiv$
  Se posso comprar o livro de MD então tenho dinheiro.

Proposição condicional: Bicondicional (se somente se)

- A sentença "bicondicional" entre p e q é expressa como

  $$p \text{ se e somente se } q$$

  e é representada por

  $$p \leftrightarrow q$$

  e tem a seguinte tabela da verdade:

p	q	p $\leftrightarrow$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Proposição condicional: Bicondicional (se somente se)

- O conectivo $\leftrightarrow$ tem a mesma prioridade do conectivo $\rightarrow$.

- $\boxed{\text{Exemplo 25:}}$
  Mostre que $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Proposição condicional: Bicondicional (se somente se)

- $\boxed{\text{Exemplo 26:}}$

  Este programa está correto se somente se ele produz a resposta correta para todos os possíveis valores de dados de entrada.

- Reescrevendo como uma conjunção de duas sentenças se–então:

  Se este programa está correto então ele produz a resposta correta para todos os possíveis valores de dados de entrada

  e

  se o programa produz a resposta correta para todos os possíveis valores de dados de entrada então ele está correto.

Proposição condicional: Bicondicional (se somente se)

- $p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(\neg p \vee q)$	$(\neg q \vee p)$	$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Proposição condicional: Condição necessária & Condição suficiente

Sejam r e s afirmações.

- r é uma condição suficiente para s:
  - se r então s.

  $\therefore$ A ocorrência de r é suficiente para garantir a ocorrência de s.

- r é uma condição necessária para s:
  - se não r então não s $\equiv$
    se s então r.

  $\therefore$ Se r não ocorrer então s também não pode ocorrer, i.e., a ocorrência de r é necessária para se ter a ocorrência de s.

- A frase

  r é uma condição necessária e suficiente para s significa "r se somente se s."

Proposição condicional: Condição necessária & Condição suficiente

- $\boxed{\text{Exemplo 27:}}$
  Considere a sentença condicional $p \to q$:

  Se João é elegível para votar então ele tem pelo menos 16 anos.

  p: João é elegível para votar.

  q: João tem pelo menos 16 anos.
  - A verdade de p é <u>suficiente</u> para garantir a verdade de q, ou seja, João ser elegível para votar é condição suficiente para que ele tenha pelo menos 16 anos.
  - A condição q é <u>necessária</u> para a condição p ser verdadeira, ou seja, João ter pelo menos 16 anos é condição necessária para que ele seja elegível para votar.

Proposição condicional: Condição necessária & Condição suficiente

- $\boxed{\text{Exemplo 28:}}$
  Converta uma condição suficiente para a forma se–então
  – O nascimento de João em solo brasileiro é uma condição suficiente para ele ser cidadão brasileiro.
  ➜ Se João nasceu em solo brasileiro então ele é um cidadão brasileiro.

- $\boxed{\text{Exemplo 29:}}$
  Converta uma condição necessária para a forma se–então
  – João ter 35 anos é uma condição necessária para ser presidente do Brasil.
  ➜ Se João não tem 35 anos então ele não pode ser presidente do Brasil.
  ➜ Se João pode ser o presidente do Brasil então ele já tem pelo menos 35 anos.

Argumentos válidos e inválidos

- Alguns fatos sobre argumentos do ponto de vista da matemática e da lógica:
  - Um argumento não é uma disputa.
  - Um argumento é uma sequência de comandos que termina numa conclusão.
  - Um argumento ser válido significa que a conclusão pode ser obtida <u>necessariamente</u> das afirmações que precedem.

- Argumento (definição):
  - Um argumento é uma sequência de afirmações.
  - Todas as afirmações, exceto a última, são chamadas de premissas ou suposições ou hipóteses.
  - A última afirmação é chamada de conclusão.
  - O símbolo $\therefore$, que é lido como "de onde se conclui" é normalmente colocado antes da conclusão.

Argumentos válidos e inválidos

- $\boxed{\text{Exemplo 30:}}$

  Se Sócrates é um ser humano então Sócrates é mortal;
  Sócrates é um ser humano;
  $\therefore$ Sócrates é mortal.

- Forma simbólica:

  Se p então q;
  p;
  $\therefore$ q.

  ➜ É conveniente pensar em p e q como variáveis que podem ser substituídas por argumentos.

- A forma de um argumento é <u>válida</u> sse
  para todas as combinações de argumentos que levam a premissas verdadeiras então a conclusão também é verdadeira.

  ➜ A verdade da conclusão é obtida analisando os valores-verdade da forma lógica em si.

Argumentos válidos e inválidos: Como analisar a validade

A validade da forma de um argumento pode ser feita seguindo os seguintes passos:

1. Identifique as premissas e conclusão do argumento.
2. Construa a tabela da verdade identificando as colunas das premissas e da conclusão.
3. Identifique as linhas onde todas as premissas são verdadeiras (linhas críticas).
4. Para cada linha crítica verifique se a conclusão do argumento é verdadeira.
   (a) Se for para todas as linhas críticas então a forma do argumento é válida.
   (b) Se existir pelo menos uma linha crítica com conclusão falsa então a forma do argumento é inválida.

Argumentos válidos e inválidos: Como analisar a validade

- Exemplo 31: Tabela da verdade:

$$p \vee (q \vee r);$$
$$\neg r;$$
$$\therefore\ p \vee q.$$

					Premissas		Conclusão
	p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$\neg r$	$p \vee q$
1.	V	V	V	V	V	F	
2. $\rightarrow$	V	V	F	V	V	V	V
3.	V	F	V	V	V	F	
4. $\rightarrow$	V	F	F	F	V	V	V
5.	F	V	V	V	V	F	
6. $\rightarrow$	F	V	F	V	V	V	V
7.	F	F	V	V	V	F	
8.	F	F	F	F	F	V	

➜ Para todas linhas críticas a conclusão é verdadeira. Logo, o argumento é válido.

- Todas as linhas exceto as linhas críticas são irrelevantes para verificar a validade de um argumento.

Argumentos válidos e inválidos: Como analisar a validade

- $\boxed{\text{Exemplo 32}}$ argumento inválido:

$$\begin{array}{ll} & p \rightarrow q \vee \neg r; \\ & q \rightarrow p \wedge r; \\ \therefore & p \rightarrow r; \end{array}$$

	p	q	r	$\neg r$	$q \vee \neg r$	$p \wedge r$	Premissas: $p \rightarrow q \vee \neg r$	Premissas: $q \rightarrow p \wedge r$	Conclusão: $p \rightarrow r$
1. $\rightarrow$	V	V	V	F	V	V	V	V	V
2.	V	V	F	V	V	F	V	F	
3.	V	F	V	F	F	V	F	V	
4. $\rightarrow$	V	F	F	V	V	F	V	V	**F**
5.	F	V	V	F	V	F	V	F	
6.	F	V	F	V	V	F	V	F	
7. $\rightarrow$	F	F	V	F	F	F	V	V	V
8. $\rightarrow$	F	F	F	V	V	F	V	V	V

➜ Para todas linhas críticas, exceto a 4, a conclusão é verdadeira. Logo, o argumento é inválido.

Argumentos válidos e inválidos: Como analisar a validade

- Exemplo 33: Tabela da verdade:

$$\begin{array}{ll} & p \to q; \\ & q \to r; \\ & r \to p; \\ \therefore & p \land q \land r. \end{array}$$

	Premissas						Conclusão
	p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$r \to p$	$p \land q \land r$
1. $\longrightarrow$	V	V	V	V	V	V	V
2.	V	V	F	V	F	V	
3.	V	F	V	F	V	V	
4.	V	F	F	F	V	V	
5.	F	V	V	V	V	F	
6.	F	V	F	V	F	V	
7.	F	F	V	V	V	F	
8. $\longrightarrow$	F	F	F	V	V	V	F

➜ Existem duas linhas críticas, uma delas com conclusão falsa. Logo, o argumento é inválido.

Argumentos válidos: Modus Ponens

- Seja o seguinte argumento:

  $p \rightarrow q$;

  p;

  $\therefore\ q$.

  e um exemplo dessa forma:

  Se o último dígito de um nº é 0 então este nº é divisível por 10.

  O último dígito deste nº é 0.

  $\therefore$ Este nº é divisível por 10.

- Um argumento válido que tem essa forma é chamado de **modus ponens** em Latim e que significa "método de afirmar."

Argumentos válidos: Modus Ponens

- **Exemplo 34:**

Forma do argumento:

$$p \longrightarrow q;$$

$$p;$$

$$\therefore \quad q.$$

			Premissas		Conclusão
	p	q	$p \longrightarrow q$	p	q
1. $\longrightarrow$	V	V	V	V	V
2.	V	F	F	V	
3.	F	V	V	F	
4.	F	F	V	F	

Argumentos válidos: Modus Tollens

- Seja o seguinte argumento:

$$p \rightarrow q;$$

$$\neg q;$$

$$\therefore \quad \neg p.$$

  e um exemplo dessa forma:

  Se Zeus é humano então Zeus é mortal. (1)

  Zeus não é mortal. (2)

  $\therefore$ Zeus não é humano.

- Suponha que as afirmações (1) e (2) sejam verdadeiras.
  - Zeus deve ser necessariamente não-humano?
  - Sim!
  - Porque se Zeus fosse humano então de acordo com (1) ele seria mortal.
  - Mas por (2) ele não é mortal.
  - Dessa forma, Zeus não pode ser humano.
- Um argumento válido que tem essa forma é chamado de **modus tollens** em Latim e que significa "método de negar."

Argumentos válidos: Exemplos

- $\boxed{\text{Exemplo 35:}}$

  Se existem mais pássaros que ninhos
  então dois pássaros terão que chocar no mesmo ninho;

  Existem mais pássaros que ninhos;

  $\therefore$ Dois pássaros chocam no mesmo ninho.

  $\rightsquigarrow$ De acordo com modus ponens.

- $\boxed{\text{Exemplo 36:}}$

  Se este nº é divisível por 6
  então o nº é divisível por 2;

  Este nº não é divisível por 2;

  $\therefore$ Este nº não é divisível por 6.

  $\rightsquigarrow$ De acordo com modus tollens.

Outras formas de argumentos válidos: Adição disjuntiva

- As formas de argumentos

(a) p;
$\therefore p \vee q$.

(b) q;
$\therefore p \vee q$.

são válidas.

Forma do argumento:
p;
$\therefore p \vee q$.

			Premissa	Conclusão
	p	q	p	$p \vee q$
1. $\rightarrow$	V	V	V	V
2. $\rightarrow$	V	F	V	V
3.	F	V	F	
4.	F	F	F	

- Essas duas formas servem para fazer generalizações, i.e., se p é verdadeiro — caso (a) — então mais genericamente $p \vee q$ é verdadeiro para qualquer afirmação q.

Outras formas de argumentos válidos: Simplificação conjuntiva

- As formas de argumentos

(a) $p \wedge q$;
$\therefore p$.

(b) $p \wedge q$;
$\therefore q$.

são válidas.

Forma do argumento:
$p \wedge q$;
$\therefore p$.

			Premissa	Conclusão
	p	q	$p \wedge q$	p
1. $\rightarrow$	V	V	V	V
2.	V	F	F	
3.	F	V	F	
4.	F	F	F	

- Essas duas formas servem para fazer particularizações, i.e., se p e q são verdadeiros então em particular p é verdadeiro—para o caso (a).

Outras formas de argumentos válidos: Silogismo disjuntivo

- Silogismo = dedução formal tal que, postas duas premissas, delas se tira uma conclusão, nelas logicamente implicada.
- As formas de argumentos

(a) $p \vee q$; $\neg q$; $\therefore p$. (b) $p \vee q$; $\neg p$; $\therefore q$.

são válidas.

Forma do argumento:

$p \vee q$;
$\neg q$;
$\therefore p$.

			Premissas		Conclusão
	p	q	$p \vee q$	$\neg q$	p
1.	V	V	V	F	
2. $\rightarrow$	V	F	V	V	V
3.	F	V	V	F	
4.	F	F	F	V	

- Essas formas de argumento expressam a situação onde existem somente duas possibilidades e uma pode ser excluída o que leva ao fato que a outra deve prevalecer.

Outras formas de argumentos válidos: Silogismo disjuntivo

- $\boxed{\text{Exemplo 37:}}$

  Seja x um número inteiro e os seguintes argumentos:

  p: $x - 3 = 0$

  q: $x + 2 = 0$

  $p \vee q$: Um dos argumentos pode ser eliminado.

  $\neg q$: $x \neq -2$. Sabe-se que x não é negativo e por essa razão é o argumento a ser eliminado.

  $\therefore$ p, de acordo com o silogismo disjuntivo.

Outras formas de argumentos válidos: Silogismo hipotético

Forma do argumento:

$p \rightarrow q;$

$q \rightarrow r;$

$\therefore\ p \rightarrow r.$

é válida.

				Premissas		Conclusão
	p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
1. $\rightarrow$	V	V	V	V	V	V
2.	V	V	F	V	F	
3.	V	F	V	F	V	
4.	V	F	F	F	V	
5. $\rightarrow$	F	V	V	V	V	V
6.	F	V	F	V	F	
7. $\rightarrow$	F	F	V	V	V	V
8. $\rightarrow$	F	F	F	V	V	V

➜ Muitos argumentos em matemática são definidos por cadeias de sentenças se–então, onde o primeiro implica no último.

Outras formas de argumentos válidos: Silogismo hipotético

- Exemplo 38:

  Se 18.486 é divisível por 18
  então 18.486 é divisível por 9;

  Se 18.486 é divisível por 9
  então a soma dos dígitos de 18.486 é divisível por 9;

  $\therefore$ Se 18.486 é divisível por 18
  então a soma dos dígitos de 18.486 é divisível por 9.

Outras formas de argumentos válidos: Dilema: Prova por divisão em casos

- Dilema = raciocínio cuja premissa é alternativa, de tal forma que qualquer dos seus termos conduz à mesma consequência.

Forma do argumento:

$$p \vee q;$$
$$p \rightarrow r;$$
$$q \rightarrow r;$$
$$\therefore \; r.$$

é válida.

				Premissas			Conclusão
	p	q	r	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	r
1. $\rightarrow$	V	V	V	V	V	V	V
2.	V	V	F	V	F	F	
3. $\rightarrow$	V	F	V	V	V	V	V
4.	V	F	F	V	F	V	
5. $\rightarrow$	F	V	V	V	V	V	V
6.	F	V	F	V	V	F	
7.	F	F	V	F	V	V	
8.	F	F	F	F	V	V	

Outras formas de argumentos válidos: Dilema: Prova por divisão em casos

- $\boxed{\text{Exemplo 39:}}$

  x é positivo ou x é negativo;

  Se x é positivo então $x^2 > 0$;

  Se x é negativo então $x^2 > 0$;

  $\therefore \quad x^2 > 0$.

- Neste caso já foi mostrado que existe uma dicotomia dos números reais: positivos, negativos ou zero. Por silogismo disjuntivo sabe-se x é positivo ou x é negativo e chega-se à conclusão acima.

Dedução mais complexa

Exemplo 40:

Você está saindo para a escola de manhã e percebe que não está usando os óculos. Ao tentar descobrir onde estão os óculos você começa a pensar sobre os seguintes fatos que são verdadeiros:

(a) Se os meus óculos estão na mesa da cozinha então eu os vi no café da manhã;
(b) Eu estava lendo o jornal na sala de estar ou eu estava lendo o jornal na cozinha;
(c) Se eu estava lendo o jornal na sala de estar então meus óculos estão na mesa do café;
(d) Eu não vi meus óculos no café da manhã;
(e) Se eu estava lendo um livro na cama então meus óculos estão no criado-mudo;
(f) Se eu estava lendo o jornal na cozinha então meus óculos estão na mesa da cozinha;

Sejam os seguintes argumentos:

$p =$ Os meus óculos estão na mesa da cozinha.
$q =$ Eu vi meus óculos no café da manhã.
$r =$ Eu estava lendo o jornal na sala de estar.
$s =$ Eu estava lendo o jornal na cozinha.
$t =$ Meus óculos estão na mesa do café.
$u =$ Eu estava lendo um livro na cama.
$v =$ Meus óculos estão no criado-mudo.

Tradução dos fatos para as proposições:

(a) $p \rightarrow q$	(b) $r \vee s$	(c) $r \rightarrow t$
(d) $\neg q$	(e) $u \rightarrow v$	(f) $s \rightarrow p$

Dedução mais complexa

Tradução dos fatos para as proposições:

(a) $p \rightarrow q$	(b) $r \vee s$	(c) $r \rightarrow t$
(d) $\neg q$	(e) $u \rightarrow v$	(f) $s \rightarrow p$

As seguintes deduções podem ser feitas:

1.

	$p \rightarrow q$;	(a)
	$\neg q$	(d)
$\therefore$	$\neg p$	Modus Tollens

2.

	$s \rightarrow p$;	(f)
	$\neg p$	Conclusão de 1.
$\therefore$	$\neg s$	Modus Tollens

3.

	$r \vee s$;	(b)
	$\neg s$	Conclusão de 2.
$\therefore$	r	Silogismo disjuntivo

4.

	$r \rightarrow t$;	(c)
	r	Conclusão de 3.
$\therefore$	t	Modus Ponens

$\therefore$ t é verdadeiro e os óculos estão na mesa do café.

Uso de proposições em especificações

- Traduzir sentenças numa linguagem natural, como o português, em expressões lógicas é uma parte importante da especificação de sistemas computacionais (hardware e software).

- Profissionais que fazem a especificação de tais sistemas computacionais devem traduzir requisitos expressos numa linguagem natural em uma especificação precisa e não ambígua.

- Essa especificação pode ser usada como base para o desenvolvimento do sistema.

Uso de proposições em especificações

Exemplo 41:

- Requisito:

  (a) Uma resposta automática não pode ser enviada se o sistema de arquivos está cheio.

- Proposições:

  $a =$ Uma resposta automática não pode ser enviada.

  $b =$ O sistema de arquivos está cheio.

- Tradução do requisito para a proposição:

  (a) $b \rightarrow a$

Uso de proposições em especificações

Exemplo 42:

- Requisitos:
  (a) A mensagem de diagnóstico é armazenada no buffer ou a mensagem de diagnóstico é retransmitida.
  (b) A mensagem de diagnóstico não é armazenada no buffer.
  (c) Se a mensagem de diagnóstico é armazenada no buffer então a mensagem de diagnóstico é retransmitida.

- Proposições:
  $p =$ A mensagem de diagnóstico é armazenada no buffer.
  $q =$ A mensagem de diagnóstico é retransmitida.

- Tradução dos requisitos para as proposições:
  (a) $p \vee q$
  (b) $\neg p$
  (c) $p \rightarrow q$

Uso de proposições em especificações

- Deduções:

	$p \vee q$;	(a)
	$\neg p$	(b)
$\therefore$	q	Silogismo disjuntivo

	q	Conclusão acima
	$\neg p$	(b)
	$p \rightarrow q$	(c)
$\therefore$	$\neg p \wedge q$	$p =$ F e $q =$ V

➜ Os requisitos são consistentes para $p =$ F e $q =$ V

➜ O que acontece com a especificação se o requisito "A mensagem de diagnóstico não é retransmitida" é acrescentada?

Falácias

- Falácia = erro no raciocínio que resulta num argumento inválido.

- Falácias comuns:
  - Usar uma premissa vaga ou ambígua;
  - Assumir como verdadeiro o que deve ser provado;
  - Concluir uma premissa sem uma argumentação adequada;
  - Erro oposto;
  - Erro inverso.

- Como mostrar que um argumento é inválido?
  - Construir a tabela da verdade e achar uma linha crítica com a conclusão falsa.
  - Achar um argumento com premissas verdadeiras e conclusão falsa.

➜ Para um argumento ser válido, qualquer argumento da mesma forma que tem premissas verdadeiras deve ter uma conclusão verdadeira.

Erro oposto

- $\boxed{\text{Exemplo 43:}}$

Se Zeca é um gênio
então Zeca senta na primeira carteira na sala de aula;
Zeca senta na primeira carteira na sala de aula;
$\therefore$ Zeca é um gênio.

- A forma geral do argumento acima é:

$p \longrightarrow q$;
q;
$\therefore$ p.

Erro oposto

Forma do argumento é:

$$p \to q;$$
$$q;$$
$$\therefore\ p.$$

	Premissas				Conclusão
	p	q	$p \to q$	q	p
1. $\to$	V	V	V	V	V
2.	V	F	F	F	
3. $\to$	F	V	V	V	F
4.	F	F	V	F	

- Este argumento lembra a forma geral do argumento "Modus ponens."
- Forma deste argumento é inválida.

Erro inverso

- $\boxed{\text{Exemplo 44:}}$

  Se as taxas de juro subirem
  então os preços das ações irão cair;
  As taxas de juro não estão subindo;
  $\therefore$ Os preços das ações não irão cair.

- A forma geral do argumento acima é:

  $p \rightarrow q$;
  $\neg p$;
  $\therefore$ $\neg q$.

Erro inverso

Forma do argumento é:

$$p \longrightarrow q;$$
$$\neg p;$$
$$\therefore \quad \neg q.$$

			Premissas		Conclusão
	p	q	$p \longrightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$
1.	V	V	V	F	
2.	V	F	F	F	
3. $\longrightarrow$	F	V	V	V	F
4. $\longrightarrow$	F	F	V	V	V

- Este argumento lembra a forma geral do argumento “Modus tollens.”
- Forma deste argumento é inválida.

Validade × Verdade

- Validade é uma propriedade da forma de um argumento.
  ➜ Se um argumento é válido
  então também é todo argumento que tem a mesma forma.

- $\boxed{\text{Exemplo 45}}$ Argumento válido com uma conclusão falsa:

  Se John Lennon era uma estrela do rock
  então ele tinha cabelo ruivo;

  John Lennon era uma estrela do rock;

  ∴ John Lennon tinha cabelo ruivo.

  ➜ Argumento válido de acordo com modus ponens. No entanto, a primeira premissa é falsa assim como a conclusão.

- $\boxed{\text{Exemplo 46}}$ Argumento inválido com uma conclusão verdadeira:

  Se Nova York é uma cidade grande
  então Nova York tem edifícios altos;

  Nova York tem edifícios altos;

  ∴ Nova York é uma cidade grande.

  ➜ Argumento inválido (erro oposto) mas com a conclusão verdadeira.

Contradições e argumentos válidos

- Regra da contradição:

  Se pode ser mostrado que a suposição da afirmação "p = F" leva logicamente a uma contradição, então pode-se concluir que "p = V."

- $\neg p \rightarrow c$, onde c é uma contradição

  $\therefore\ p$.

- Tabela da verdade:

				Premissa	Conclusão
	p	$\neg p$	c	$\neg p \rightarrow c$	p
1. $\longrightarrow$	V	F	F	V	V
2.	F	V	F	F	

Honestos $\times$ Desonestos

$\boxed{\text{Exemplo 47}}$ Uma ilha possui um de dois tipos de pessoas:

– A diz: B é honesto.
– B diz: A e eu somos de tipos opostos.

Suponha que A é honesto.
$\therefore$ O que A diz é verdade;
$\therefore$ B também é honesto;
$\therefore$ O que B diz é verdade;
$\therefore$ A e B são de tipos honestos;
$\therefore$ Chegou-se a uma contradição:
➜ A e B são honestos e A e B são desonestos.
$\therefore$ A suposição é falsa;
$\therefore$ A não é honesto;
$\therefore$ A é desonesto;
$\therefore$ O que A diz é falso;
$\therefore$ B não é honesto;
$\therefore$ B também é desonesto.

Regras de inferência: Sumário

Modus Ponens

$$\begin{array}{ll} & p \rightarrow q; \\ & p; \\ \therefore & q. \end{array}$$

Modus Tollens

$$\begin{array}{ll} & p \rightarrow q; \\ & \neg q; \\ \therefore & \neg p. \end{array}$$

Adição disjuntiva

$$\begin{array}{ll} & p; \\ \therefore & p \lor q. \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & q; \\ \therefore & p \lor q. \end{array}$$

Simplificação conjuntiva

$$\begin{array}{ll} & p \land q; \\ \therefore & p. \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & p \land q; \\ \therefore & q. \end{array}$$

Adição conjuntiva

$$\begin{array}{ll} & p; \\ & q; \\ \therefore & p \land q. \end{array}$$

Silogismo disjuntivo

$$\begin{array}{ll} & p \lor q; \\ & \neg q; \\ \therefore & p. \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & p \lor q; \\ & \neg p; \\ \therefore & q. \end{array}$$

Silogismo hipotético

$$\begin{array}{ll} & p \rightarrow q; \\ & q \rightarrow r; \\ \therefore & p \rightarrow r. \end{array}$$

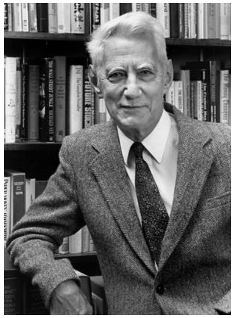
Dilema

$$\begin{array}{ll} & p \lor q; \\ & p \rightarrow r; \\ & q \rightarrow r; \\ \therefore & r. \end{array}$$

Contradição

$$\begin{array}{ll} & \neg p \rightarrow c; \\ \therefore & p. \end{array}$$

Aplicação: Circuito lógico

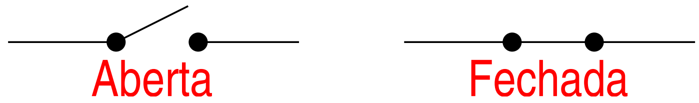


Claude Shannon (1916–2001), matemático americano, é considerado o cientista que estabeleceu os fundamentos da teoria da informação moderna, com a publicação em 1948 do trabalho intitulado "*Mathematical Theory of Communication*". Nesse trabalho ele observa que "*the fundamental problem of communication is that of reproducing at one point either exactly or approximately a message selected at another point*". Os fundamentos propostos nesse trabalho são usados integralmente hoje em dia em áreas como redes de computadores e recuperação da informação.

Antes disso, Shannon observa a analogia entre operações de dispositivos de "chaveamento" (por exemplo, chaves ou interruptores) e operações de conectivos lógicos. Ele usa essa analogia com muito sucesso para resolver problemas de projetos de circuitos lógicos e apresenta os resultados na sua dissertação de mestrado (*A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*) do MIT em 1938.

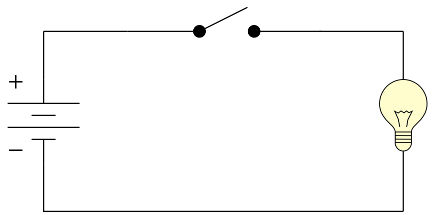
Aplicação: Circuito lógico

- Uma chave pode estar em uma de duas possíveis posições:



  – Chave fechada: corrente pode passar.
  – Chave aberta: há interrupção de corrente.

- Exemplo de uma chave num circuito:



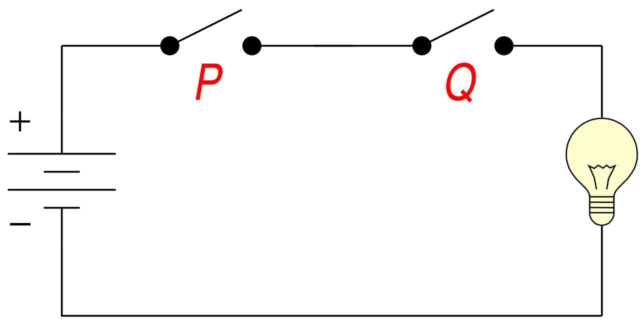
  – Lâmpada acende sse corrente passa por ela.
  – Isto acontece, sse a chave está fechada.

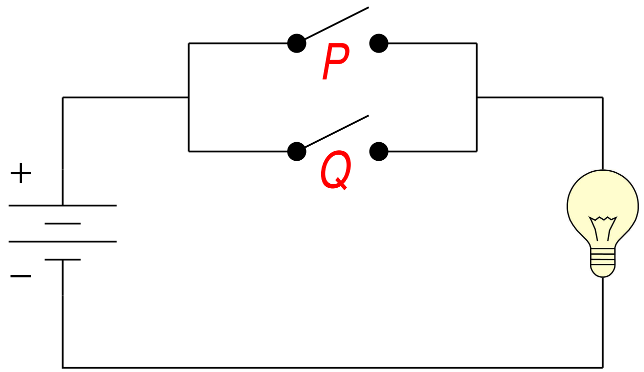
- Observe que nesse modelo está sendo assumido que a bateria tem sempre energia e a chave e a lâmpada nunca falham.

  ➜ Considerações como essas são importantes sempre que um modelo é proposto.

Aplicação: Circuito lógico

Sejam os circuitos abaixo e os possíveis comportamentos:





Chaves		Lâmpada
P	*Q*	***Estado***
Fechada	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Apagada
Aberta	Fechada	Apagada
Aberta	Aberta	Apagada

Chaves		Lâmpada
P	*Q*	***Estado***
Fechada	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Acesa
Aberta	Fechada	Acesa
Aberta	Aberta	Apagada

Aplicação: Circuito lógico

Chaves		Lâmpada
P	Q	*Estado*
Fechada	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Apagada
Aberta	Fechada	Apagada
Aberta	Aberta	Apagada

Chaves		Lâmpada
P	Q	*Estado*
Fechada	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Acesa
Aberta	Fechada	Acesa
Aberta	Aberta	Apagada

Observe que se as expressões “fechada” e “acesa” forem substituídas pelo valor-verdade **V** e “aberta” e “apagada” forem substituídas pelo valor-verdade **F**, então as tabelas da esquerda e da direita correspondem, respectivamente, às expressões lógicas:

- $P \wedge Q$ (conjunção);
- $P \vee Q$ (disjunção).

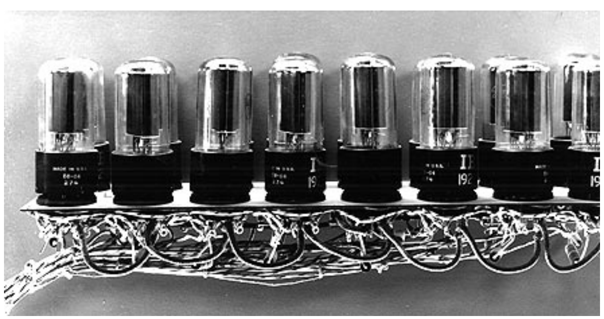
Aplicação: Circuito lógico

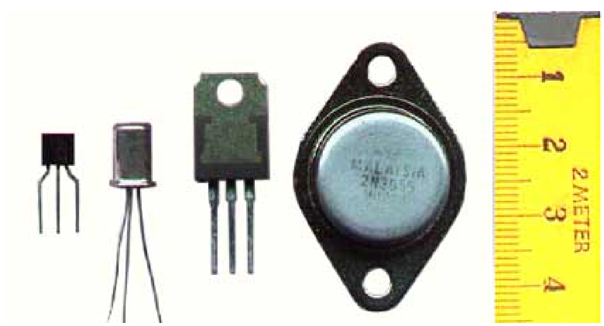
A partir da década de 1940, relés eletro-mecânicos (chaves) foram substituídos por dispositivos eletrônicos como válvulas, transistores e circuitos integrados.

Válvula. *O computador "moderno" (primeira geração) surgiu a partir da válvula, que permitiu executar uma operação muito mais rápida que os sistemas de relé eletro-mecânicos. Abaixo está um sistema de válvulas da IBM de 1946 que podia multiplicar dois números de 10 algarismos em $\frac{1}{40}$s.*

Transistor. *Dispositivo semicondutor de estado sólido que passou a ser usado largamente na segunda geração de computadores a partir do início da década de 1960.*

Circuito integrado. *Também chamado de "microchip" ou "chip" é uma miniaturização de dispositivos semicondutores e componentes passivos manufaturados na superfície de um substrato extremamente fino de um material semicondutor. Abaixo, uma imagem do processador Intel Core Duo otimizado para aplicações multi-threaded e multitarefa.*





Aplicação: Circuito lógico

- Os estados (fechado e aberto) foram substituídos por outras representações apropriadas para os novos dispositivos.
  - Por exemplo, diferentes valores de tensão.
  - ➜ Ponto importante: modelagem anterior continua válida!

- No projeto de circuitos digitais, os valores lógicos **verdadeiro** e **falso** são normalmente substituídos pelos símbolos **1** e **0**.
  - ➜ Estes símbolos são chamados de *bits* (*binary digits*).

Aplicação: Circuito lógico

- A partir do surgimento dos computadores digitais, uma questão fundamental passa a ser a representação (codificação) da informação usando bits.

- Por exemplo, como bits são representados/codificados quando estão em:
  - Memória de ferrite?
  - Memória eletrônica?
  - Disco magnético?
  - Disco óptico?
  - Cabo coaxial?
  - Cabo metálico?
  - Cabo de fibra óptica?
  - Canal de comunicação sem fio?