Bacharelado em Ciência da Computação
Matemática Discreta

Prof. Diego Mello da Silva

Instituto Federal de Minas Gerais - Campus Formiga

27 de fevereiro de 2013

Sumário

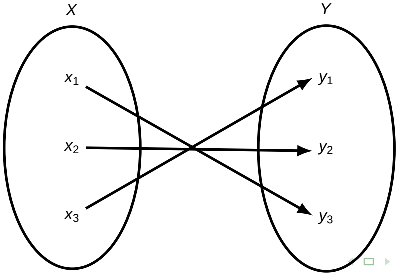
Funções

Funções

Definição (Funções)

*Sejam X e Y conjuntos não vazios. Uma **função** de X para Y é uma determinação de **exatamente** um elemento de X para cada elemento de Y.*

- Funções também são chamadas de **mapeamentos** ou **transformações**
- Se f é uma função de X para Y, escreve-se $f : X \rightarrow Y$
- $f(x) = y$ se y é o único elemento determinado por f para x

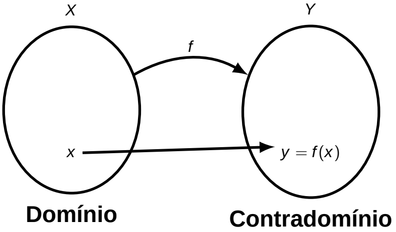


Terminologia

Definição (Domínio, Contradomínio, Pré-Imagem e Imagem)

*Se f é uma função de X para Y, dizemos que X é o **domínio** de f e Y é o **contradomínio** de f.*

*Se $f(x) = y$, dizemos que y é a **imagem** de x e que x é a **pré-imagem** de y. O conjunto imagem de f é o conjunto de todas as imagens dos elementos de X.*



A definição completa de uma função requer seu domínio, contradomínio e associação. A associação pode ser fornecida por meio de (i) descrição verbal, (ii) gráfico, (iii) equação ou (iv) coleção de pares ordenados.

Terminologia: Resumo

Sejam S e T conjuntos.

- Uma função de S em T é um subconjunto de $S \times T$ onde o elemento de S aparece uma única vez como primeiro elemento do par ordenado.
- Uma função f é uma relação de S para T que contém um, e apenas um, par ordenado (s, t) para cada $s \in S$
- Uma função f de S em T é denotada por $f : S \to T$
- Se (s, t) pertence à função, então t é denotado por $f(s)$.
- S é o **domínio** da função.
- T é o **contradomínio** da função.
- t é a **imagem** de t por f

Valores do domínio e contradomínio não são necessariamente números.

Relações **'vários-para-vários'** e **'um-para-vários'** não são funções. Porque?

Igualdade de Funções

Definição (Funções Iguais)

*Duas funções são ditas **iguais** se têm o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma associação de valores do contradomínio a valores do domínio.*

- Mostre que a associação é a mesma para um elemento **arbitrário** do domínio.
- **Exemplo**: $S = \{1, 2, 3\}$ e $T = \{1, 4, 9\}$, $f : S \to T$, $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$

  Seja $g : S \to T$ definida por $g(n) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n}(4k - 2)}{2}$. Mostre que $f = g$.

Igualdade de Funções

Definição (Funções Iguais)

*Duas funções são ditas **iguais** se têm o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma associação de valores do contradomínio a valores do domínio.*

- Mostre que a associação é a mesma para um elemento **arbitrário** do domínio.
- **Exemplo**: $S = \{1, 2, 3\}$ e $T = \{1, 4, 9\}$, $f : S \to T$, $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$

  Seja $g : S \to T$ definida por $g(n) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n}(4k - 2)}{2}$. Mostre que $f = g$.
- **Solução:** Seja n um elemento arbitrário do domínio. Logo,

$$g(n) = \frac{4(1) - 2}{2} + \frac{4(2) - 2}{2} + \cdots + \frac{4n - 2}{2} = g(n) = 1 + 3 + \cdots + \frac{4n - 2}{2}$$

$g(n)$ é a soma da **p. a.** de razão 2: $S_n = n\left(\dfrac{a_1 + a_n}{2}\right) = n\left(\dfrac{1 + \dfrac{4n - 2}{2}}{2}\right) = n^2$

Exercícios

1. Seja a função $f : S \to \mathbb{Z}$ onde $S = \{-1, -3, 2, 5, 10\}$ e $f(x) = x^2$. Liste os conjuntos domínio, contradomíno e imagem de f.

2. Qual é o conjunto domínio, contradomínio e imagem de uma função g que associa alunos cada aluno à uma nota de 0 a 10, onde $g = \{$ (Pedro, 8.0), (Tiago, 5.0), (Jacó, 3.7), (Elias, 7.5), (Salomão, 10) $\}$?

3. Quais dos itens a seguir são funções do domínio e contradomínio informado? Justifique a negativa.

   (a) $f : S \to T$, onde $S = T = \{1, 2, 3\}$ e $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1), (2, 1)\}$.

   (b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, onde $g(x)$ é definida por $g(x) = |x|$ (valor absoluto de x)

   (c) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, onde $h(x) = x - 4$

   (d) $f : S \to T$ onde S é o conjunto de todas as pessoas em uma cidade, T é o conjunto de todos os números de CPF e f associa cada pessoa à seu número de CPF.

   (e) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ onde h é definida por $h(x) = \begin{cases} x + 3, \text{ se } x \geq 5 \\ x, \text{ se } x \leq 5 \end{cases}$

Gráficos de Funções

Definição (Gráfico)

Seja f uma função do conjunto X para um conjunto Y. O gráfico da função f é o conjunto de todos os pares ordenados $\{(x, y) \mid x \in X \text{ e } y = f(x)\}$.

- São todos os pares (x, y) em que $x \in X$ e $y = f(x)$.
- É a relação entre os conjuntos X e Y cujos pares são determinados por f.
- **Exemplo**:

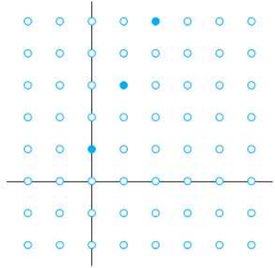


Figura: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = 2n + 1$

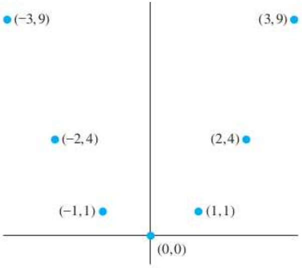


Figura: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = x^2$

Exercícios

- Trace o gráfico das seguintes funções:

  (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^3 - 2$

  (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$

  (c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$: $f(x) = {}^1\!/_x$

- Trace o gráfico das seguintes relações e diga se cada uma delas é ou não uma função. (Sugestão: desenhe o diagrama de conjuntos e setas)

  (a) $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x^2 = y^2\}$

  (b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $xRy \leftrightarrow y = x + 2$.

Soma e Produto de Funções em $\mathbb{R}$

Definição

Sejam f_1 e f_2 funções de X para $\mathbb{R}$. As funções $f_1 f_2$ e $f_1 + f_2$ também são funções de X para $\mathbb{R}$, definidas para todo $x \in X$ por:

$$\boxed{(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)}$$

$$\boxed{(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)}$$

Exemplo: Sejam f_1 e f_2 funções definidas de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ tais que $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x - x^2$. Defina as funções:

(a) $f_1 f_2$:
$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) = (x^2)(x - x^2) = x^3 - x^4$

(b) $f_1 + f_2$:
$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^2 + x - x^2 = x$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA MINAS GERAIS

Funções Importantes

Funções Piso e Teto

Definição (Função Piso)

*A função **piso** atribui a cada número real x o maior inteiro que é menor ou igual a x. É denotada por $\lfloor x \rfloor$.*

Definição (Função Teto)

*A função **teto** atribui a cada número real x o menor inteiro que é maior ou igual a x. É denotada por $\lceil x \rceil$.*

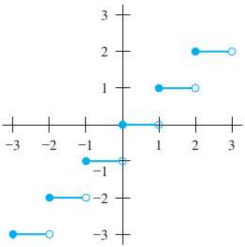


Figura: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$

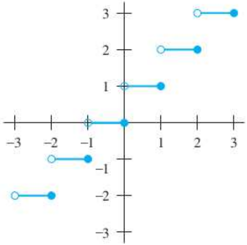


Figura: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(x) = \lceil x \rceil$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA MINAS GERAIS

Função Fatorial

Definição (Fatorial)

*A função **fatorial**, denotada por $f(n) = n!$, é a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^+$ cujo valor de $f(n)$ é o produto dos primeiros n inteiros positivos.*

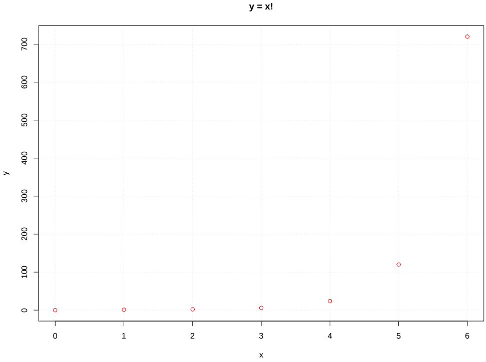


Figura: $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^+$, $f(x) = x!$

Exercícios

1. Dados armazenados em uma mídia ou transmitidos em uma rede são normalmente representados por uma string de bytes. Cada byte possui 8 bits. Quantos bytes são necessários para codificar 100 bits de dados?

Exercícios

1. Dados armazenados em uma mídia ou transmitidos em uma rede são normalmente representados por uma string de bytes. Cada byte possui 8 bits. Quantos bytes são necessários para codificar 100 bits de dados?

   R: $\lceil 100/8 \rceil = \lceil 12,5 \rceil = 13$

2. Em uma transmissão ATM (asynchronous transfer mode) dados são organizados em células de 53 bytes. Quantas células ATM podem ser transmitidas em 1 minuto sobre uma conexão que transmite dados a uma taxa de 500 kbits/segundo?

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA MINAS GERAIS

Exercícios

1. Dados armazenados em uma mídia ou transmitidos em uma rede são normalmente representados por uma string de bytes. Cada byte possui 8 bits. Quantos bytes são necessários para codificar 100 bits de dados?

   R: $\lceil 100/8 \rceil = \lceil 12,5 \rceil = 13$

2. Em uma transmissão ATM (asynchronous transfer mode) dados são organizados em células de 53 bytes. Quantas células ATM podem ser transmitidas em 1 minuto sobre uma conexão que transmite dados a uma taxa de 500 kbits/segundo?

   R: $\lfloor (500.000 \cdot 60)/(53 \cdot 8) \rfloor = \lfloor 30.000.000/424 \rfloor = \lfloor 70.754,716 \rfloor = 70.754$

3. Prove ou disprove que $\lceil x + y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$, para $x, y \in \mathbb{R}$

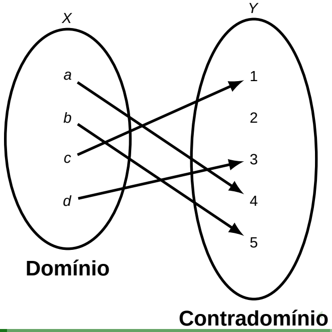
Propriedades de Funções

Funções Injetoras

Definição (Funções Injetoras)

*Uma função $f : X \to Y$ é **injetora** se e somente se $f(x_i) = f(x_j)$ implica que $x_i = x_j$ para todos os elementos do domínio de f.*

- Formalmente, $\boxed{\forall x_i \forall x_j \Big(f(x_i) = f(x_j) \to x_i = x_j \Big)}$
- **Exemplo**: $X = \{a, b, c, d\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



Exercícios

1. Determine se a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$ é uma função um-para-um (injetora)

2. Determine se a função $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$ é uma função um-para-um (injetora)

3. Determine se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ é uma função um-para-um (injetora)

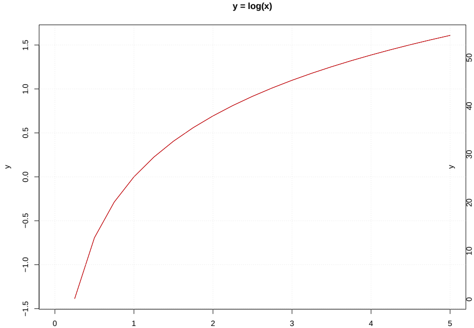
4. Suponha que a cada trabalhador em um grupo de empregados é atribuído um trabalho de um conjunto de possíveis trabalhos, cada trabalho sendo executado por um único trabalhador. A função f que atribui à cada trabalhador um trabalho é uma função injetora?

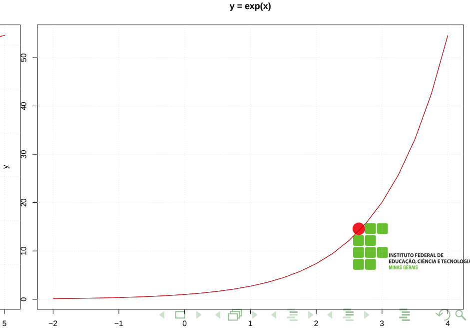
Funções Crescentes e Decrescentes

Definição (Função Crescente)

Uma função f cujos domínio X e contradomínio Y são subconjuntos de $\mathbb{R}$ *é chamada* ***crescente*** *se* $f(x_1) \leq f(x_2)$, *e* ***estritamente crescente*** *se* $f(x_1) < f(x_2)$ *quando* $x_1 < x_2$ *e* $x_1, x_2 \in X$.

- $\boxed{\forall x_1 \forall x_2 \Big(x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\Big)}$ ou $\boxed{\forall x_1 \forall x_2 \Big(x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)\Big)}$



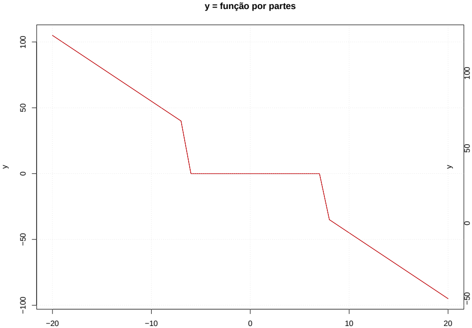


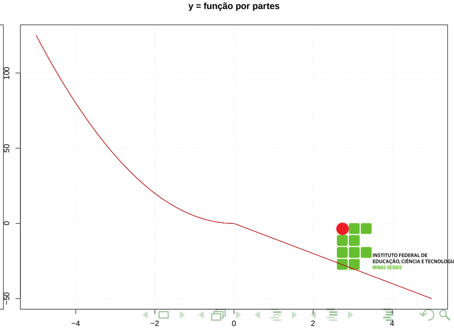
Funções Crescentes e Decrescentes

Definição (Função Decrescente)

Uma função f cujos domínio X e contradomínio Y são subconjuntos de $\mathbb{R}$ é chamada ***decrescente*** *se $f(x_1) \geq f(x_2)$, e* ***estritamente crescente*** *se $f(x_1) > f(x_2)$ com $x_1 < x_2$ e $x_1, x_2 \in X$.*

- $\boxed{\forall x_1 \forall x_2 \Big(x_1 > x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2) \Big)}$ ou $\boxed{\forall x_1 \forall x_2 \Big(x_1 > x_2 \to f(x_1) > f(x_2) \Big)}$





Exercícios

1. Uma função crescente é uma função injetora? Porque?

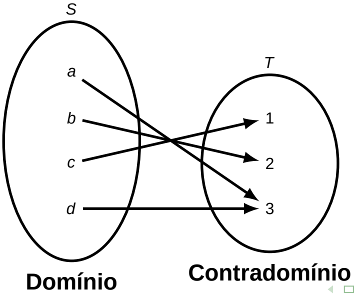
2. Uma função estritamente decrescente é uma função injetora? Porque?

Funções Sobrejetoras

Definição (Função Sobrejetora)

*Uma função $f : X \to Y$ é **sobrejetora** se e somente se para cada elemento $y \in Y$ existe um elemento $x \in X$ com $f(x) = y$.*

- Formalmente, $\boxed{\forall y \exists x (f(x) = y)}$
- O conjunto imagem **coincide** com o conjunto contradomínio
- **Exemplo**: $S = \{a, b, c, d\}$ e $T = \{1, 2, 3\}$



Exercícios

1. A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$ é uma função sobrejetora?

2. A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 1$ é uma função sobrejetora?

3. Seja o exemplo do problema apresentado na seção sobre funções injetoras, envolvendo a atribuição de trabalhadores à um trabalho no conjunto dos possíveis trabalhos a executar. Qual é a condição que devemos ter para que a função f que atribui estes trabalhos seja uma função sobrejetora?

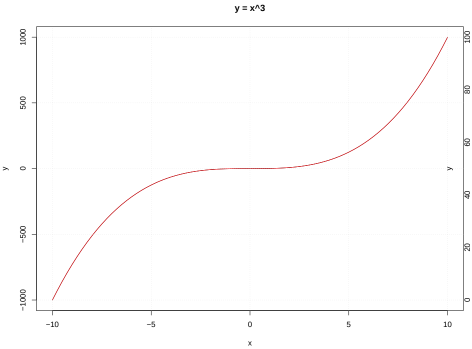
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA MINAS GERAIS

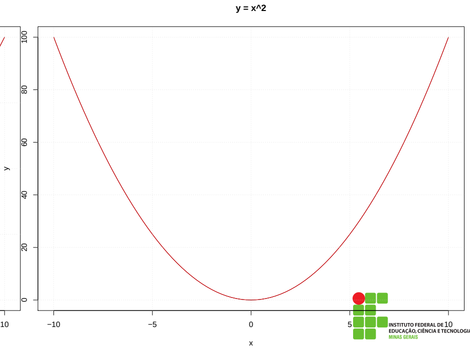
Funções Bijetoras

Definição (Função Bijetora)

*Uma função $f : X \to Y$ é **bijetora** se for, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora.*

Quais das funções abaixo são bijetoras?





Resumo: Propriedades de Funções

Suponha que $f : A \to B$. Para mostrar que f é:

Tipo de Função	O que devemos fazer
Injetora	Mostre que se $f(x) = f(y)$, para $x, y \in \mathbb{A}$, então $x = y$
Não-Injetora	Encontre elementos $x, y \in A$ particulares, com $x \neq y$, tal que $f(x) = f(y)$
Sobrejetora	Considere $y \in B$ arbitrário e encontre $x \in A$ tal que $f(x) = y$
Não-Sobrejetora	Encontre um $y \in B$ particular tal que $f(x) \neq y$ para todo $x \in A$
Bijetora	Mostre que f é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA MINAS GERAIS

Inversa e Composta

Inversa de Funções

Definição (Inversa)

*Seja f uma correspondência um-para-um de um conjunto X para um conjunto Y. A **função inversa** de f, denotada por f^{-1} é a função que atribui a um elemento $y \in Y$ o elemento único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. $f^{-1}(y) = x$ quando $f(x) = y$.*

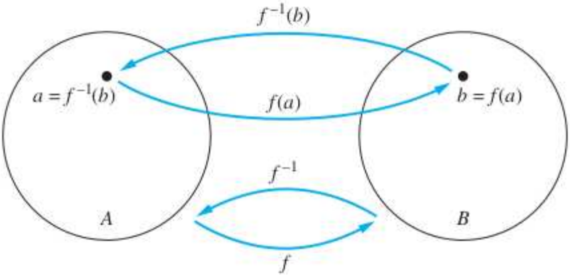


Figura: Função Inversa. Adaptado de [Rosen, K. H.]

Exercícios

1. Sejam $S = \{0, 2, 4, 6\}$ e $T = \{1, 3, 5, 7\}$. Determine se os pares ordenados a seguir são funções $f : S \to T$.
   (a) $\{(0, 2), (2, 4), (4, 6), (6, 0)\}$
   (b) $\{(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)\}$
   (c) $\{(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)\}$
   (d) $\{(2, 1), (4, 5), (6, 3)\}$
   (e) $\{(6, 1), (0, 3), (4, 1), (0, 7), (2, 5)\}$

2. Sobre as funções do exercício 1, responda se são injetoras e sobrejetoras.

3. Sobre as funções do exercício 1, descreva a função inversa correspondente.

Composição de Funções

Definição (Função Composta)

*Seja g uma função de um conjunto A para um conjunto B, e seja f uma função do conjunto B para um conjunto C. A **composição** das funções f e g, denotada para todo $a \in A$ por $f \circ g$, é a função definida por:*

$$(f \circ g)(a) = f\big(g(a)\big)$$

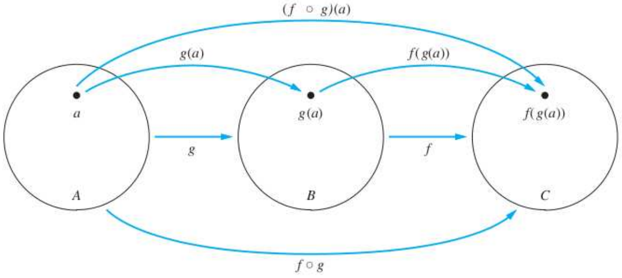


Figura: Função Composta. Adaptado de [Rosen, K. H.]

Exercícios

1. Sejam $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $U = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Sejam $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 6)\}$ uma função $S \rightarrow T$; e $g = \{(1, 7), (2, 6), (3, 9), (4, 7), (5, 8), (6, 9)\}$ uma função $T \rightarrow U$. Faça o diagrama de conjuntos e setas para expressar os relacionamentos de S, T e U.

2. Sobre o exercício anterior, escreva os pares ordenados da função $g \circ f$.

Função Parcial

Função Parcial

Definição (Função Parcial)

*Uma **função parcial** de X para Y é uma atribuição para cada elemento x em um subconjunto X', $X' \subseteq X$, de um único elemento $y \in Y$.*

- Chamamos X' de **domínio de definição** de X
- X e Y são os domínios e contradomínios de f
- f é **indefinida** para valores de $x \in X$ que não estão no domínio de definição de f
- Se o domínio de definição de f é o conjunto X, chamamos f de **função total**
- **Exemplo**: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, com $f(n) = \sqrt{(n)}$. Indefinida para inteiros negativos .

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA MINAS GERAIS

Exercícios

1. Responda porque f não é uma função de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ quando:

   (a) $f(x) = {}^{1}/_{x}$

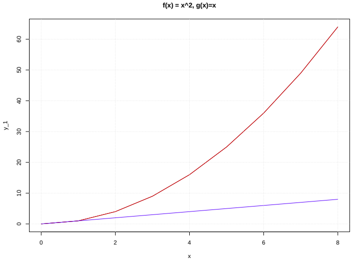
   (b) $f(x) = \pm\sqrt{(x^2 + 1)}$

2. Para os itens (a) e (b) do exercício anterior, responda qual é o subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ que determina o domínio de definição de f.

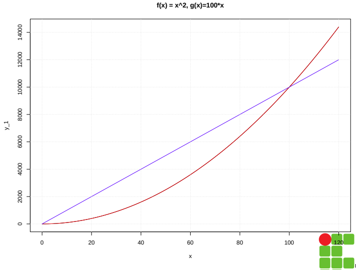
Ordem de Crescimento

Ordem de Crescimento

- Conceito importante, usado em **Complexidade de Algoritmos**
- Compara a ‘taxa de crescimento’ de diferentes funções. Exemplo:
  - Sejam as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$.
  - Qual é maior quando computamos $f(x)$ e $g(x)$ para valores cada vez maiores de x?
- Mesmo multiplicando $g(x)$ por uma constante grande, sua taxa de crescimento sempre será superada por $f(x)$ em algum momento (n_0). Veja os gráficos:



$f(x) = x^2, g(x) = x$



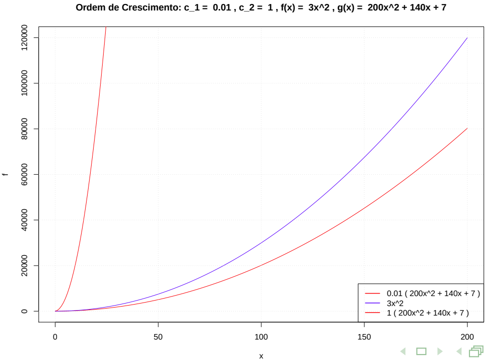
$f(x) = x^2, g(x) = 100x$

Ordem de Crescimento

- Seja S o conjunto de todas as funções cujos domínios e contradomínios são $\mathbb{R}^+$.
- Seja a relação R sobre $S \times S$:

$$(f, g) \in R \leftrightarrow \exists\, n_0,\ c_1 \text{ e } c_2 \text{ tais que, } \forall\, x \geq n_0,\ c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x).$$

- **Ex**: $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 200x^2 + 140x + 7$, $n_0 = 2$, $c_1 = {}^1/_{100}$ e $c_2 = 1$



Ordem de Crescimento

A relação

$$\boxed{(f,g) \in R \leftrightarrow \exists\, n_0, c_1 \text{ e } c_2 \text{ tais que}, \forall\, x \geq n_0, c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x).}$$

é uma **relação reflexiva.**

Sejam $c_1 = 1$ e $c_2 = 1$. Temos

$$(1)f(x) \leq f(x) \leq (1)f(x)$$

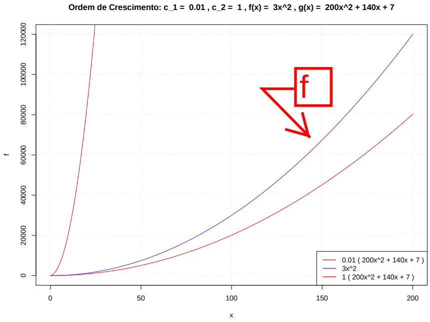
Pela definição de R, $\boxed{(f,f) \in R}$

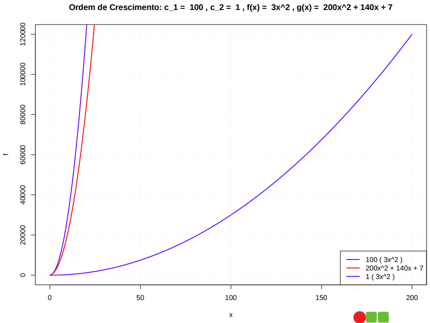
Ordem de Crescimento

A relação

$$\boxed{(f,g) \in R \leftrightarrow \exists\, n_0,\, c_1 \text{ e } c_2 \text{ tais que, } \forall\, x \geq n_0,\, c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x).}$$

é uma **relação simétrica**.





$\boxed{(f,g) \in R}$ $\boxed{(g,f) \in R}$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA MINAS GERAIS

Ordem de Crescimento

A relação

$$\boxed{(f,g) \in R \leftrightarrow \exists\, n_0,\, c_1 \text{ e } c_2 \text{ tais que, } \forall\, x \geq n_0,\, c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x).}$$

é uma **relação transitiva**.

Assuma que $\boxed{(f,g) \in R}$ e $\boxed{(g,h) \in R}$. Logo,

- existem constantes c_1 e c_2 tais que $c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)$
- existem constantes c_1' e c_2' tais que $c_1' h(x) \leq g(x) \leq c_2' h(x)$

$$\underbrace{c_1' h(x) \leq \underbrace{c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)}_{(f,g) \in R} \leq c_2' h(x)}_{(g,h) \in R}$$

Logo, $f(x)$ está 'entre' $c_1' h(x)$ e $c_2' h(x)$: $\boxed{(f,h) \in R}$.

Ordem de Crescimento

A relação

$$\boxed{(f,g) \in R \leftrightarrow \exists\, n_0,\, c_1 \text{ e } c_2 \text{ tais que, } \forall\, x \geq n_0,\, c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x).}$$

é uma **relação de equivalência**.

- **Reflexiva**
- **Simétrica**
- **Transitiva**:

R particiona o conjunto S de funções em **classes de equivalência.** Logo,

- f e g estão na mesma classe de equivalência: $f \in [g]$ e $g \in [f]$
- $f \in [g]$
- $g \in [f]$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA MINAS GERAIS

Ordem de Crescimento

Definição (Ordem de Crescimento)

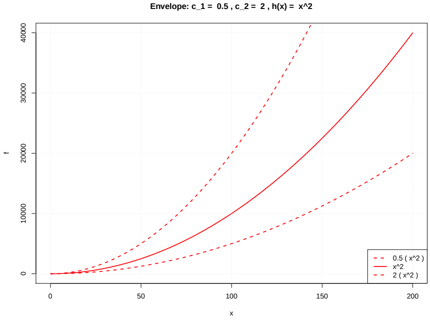
Sejam f e g funções de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Então f tem a mesma ***ordem de crescimento*** *que g se existirem constantes positivas n_0, c_1 e c_2 tais que $c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)$ para $x \geq n_0$.*

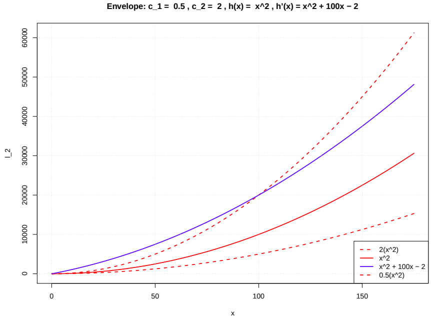
- f tem a mesma ordem de grandeza de g se houver um **envelope** ao redor de f
- As constantes c_1 e c_2 definem o envelope
- Mudar o valor das constantes altera a largura do envelope...
- ... mas não altera sua forma!
- Se f está contida, a partir de n_0, em um envelope definido por g
  - f e g tem a mesma ordem de grandeza
  - $f = \Theta(g)$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA MINAS GERAIS

Ordem de Crescimento: Exemplo

- Seja $h(x) = x^2$, $c_1 = 1/2$ e $c_2 = 2$, com $h'(x) = x^2 + 100x - 2$



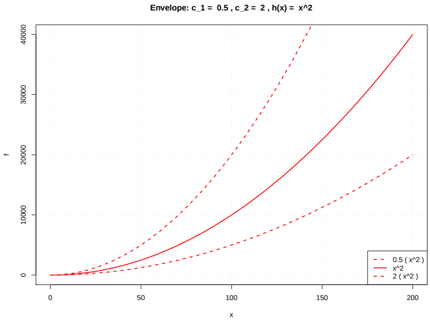


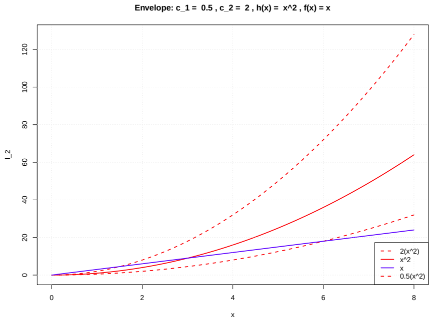
- As linhas tracejadas formam um **envelope** ao redor de $h(x)$
- c_1 e c_2 mudam a largura do envelope, mas não a forma básica.
- $h'(x) = x^2 + 100x - 2$; $\boxed{h'(x) = \Theta(n^2)}$.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA MINAS GERAIS

Ordem de Crescimento: Exemplo

- Seja $h(x) = x^2$, $c_1 = {}^1\!/_2$ e $c_2 = 2$, com $f(x) = x$





- Não importa os valores de c_1 e c_2, $f(x)$ sempre estará fora do envelope
- Suponha $f(x) = \Theta(x^2)$. $c_1 h(x) \leq f(x) \Rightarrow c_1 x^2 \leq x \Rightarrow c_1 x \leq 1 \Rightarrow \boxed{x \leq {}^1\!/_{c_1}}$
- Contradição: se c_1 é fixo, podemos escolher x tal que $x > {}^1\!/_{c_1}$
- $f(x) = x$; $f(x)$ **não é da mesma ordem de crescimento** de $h(x)$.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA MINAS GERAIS

Análise de Complexidade

- Aplicação: **Análise de Algoritmos**
- Funções mapeiam o 'esforço' de um algoritmo em função do tamanho da entrada *n*
  - Quais são as instruções importantes que ele realiza?
  - Qual é o número de vezes que tais instruções são executadas?
- Esforço é função do tamanho da entrada *n*
- Quanto **menor** a ordem de crescimento de um algoritmo, **mais eficiente** ele é.
- **Exemplo**: Suponha 3 algoritmos que resolvem o mesmo problema e que cada instrução consuma 0.0001 segundos.

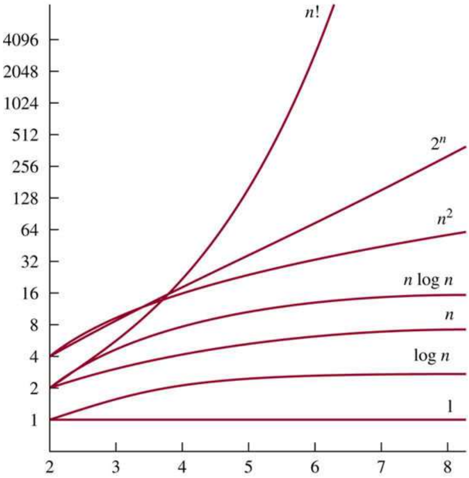
Algoritmo	Ordem	$n = 10$	$n = 50$	$n = 100$
Alg. 1	n	0.001 seg	0.005 seg	0.01 seg
Alg. 2	n^2	0.01 seg	0.25 seg	1 seg
Alg. 3	2^n	0.1024 seg	3570 anos	4×10^{16} séculos

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA MINAS GERAIS

- Algoritmo 1 é o **mais eficiente**, Algoritmo 3 é o **menos eficiente**.

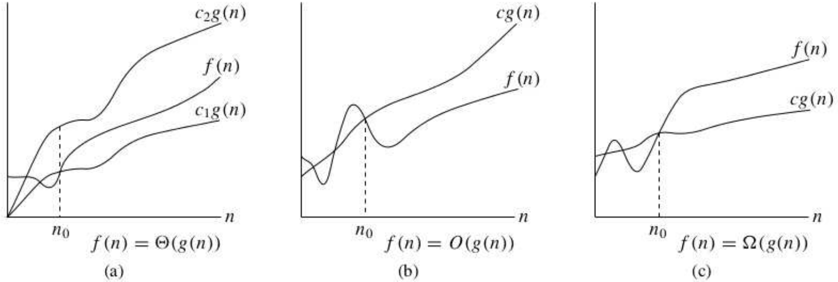
Análise de Complexidade

- Ordens de crescimento comuns em algoritmos



Análise de Complexidade

- Notação O, Θ e Ω



- Algoritmos que são **não-polinomiais** são **ineficientes**.
  - Alguns podem ter bom desempenho no **caso médio**. Ex: simplex.
- **Problemas intratáveis**: não existem algoritmos polinomiais
- Ex: Caixeiro viajante, 3SAT, caminho hamiltoniano, etc

Atividades Sugeridas

Atividades Sugeridas

- Leitura da seção 4.4 ([Gersting, J. L.])

- Leitura da seção 2.3 ([Rosen, K. H.])

- Leitura da seção 3.2 ([Rosen, K. H.])

- Resolver os exercícios de [Gersting, J. L.]:
  - Pág 251: ex1, ex2, ex3, ex4, ex5, ex6, ex8, ex9, ex15, ex16, ex17, ex20, ex28, ex29, ex59, ex60, ex61, ex62, ex63.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA MINAS GERAIS

Referências Bibliográficas

Rosen, K. H.
Matemática Discreta e suas Aplicações, Tradução da 6a. Edição em Inglês.
Editora Mc-Graw Hill Brasil, ISBN 978-85-7726-036-2, 2009.

Gersting, J. L.
Fundamentos Matemáticos para Ciência da Computação, 5a. edição.
Editora LTC, ISBN 978-85-2161-422-7, 1995.