

Lógica de Proposições Quantificadas Cálculo de Predicados

Antonio Alfredo Ferreira Loureiro

loureiro@dcc.ufmg.br

Olga Nikolaevna Goussevskaja

olgang@gmail.com

Introdução

- Já estudamos análise de proposições compostas, i.e., proposições simples ligadas por conectivos \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow .
- Este tipo de análise não é suficiente para determinar a validade da maioria das situações matemáticas e do dia-a-dia.
 - Todos seres humanos são mortais;
 - Sócrates é um ser humano;
 - \therefore Sócrates é mortal.
 - Argumento intuitivamente correto.
 - Validade não pode ser obtida usando os métodos já vistos.
 - Validade é determinada separando as proposições em partes.
 - Vocábulos que denotam quantidades (TODOS e ALGUNS) têm uma função especial na análise.
- Cálculo de predicados: área que trata da análise simbólica de predicados e proposições quantificadas.
- Cálculo de proposições ou cálculo proposicional: área que trata da análise de proposições compostas.

Predicados e proposições quantificadas

- Predicado [gramática]: parte da sentença que fornece informação sobre o sujeito.
- Predicado [lógica]: pode ser obtido removendo substantivos de uma proposição.

Sejam os seguintes predicados:

- P : “é um estudante na UFMG”
- Q : “é um estudante no(a)”

P e Q são símbolos de predicados.

que podem ser reescritos com variáveis:

- $P(x)$: “ x é um estudante na UFMG”
 - $Q(x, y)$: “ x é um estudante no(a) y ”
- x e y são variáveis dos predicados.

Predicados e proposições quantificadas

- Definição: Um **predicado** é uma sentença que contém um número finito de variáveis e se torna uma proposição quando as variáveis são substituídas por valores específicos.
- Os valores das variáveis de predicados são definidos por conjuntos chamados domínios. Por exemplo, \mathbb{R} , \mathbb{Z}^* , \mathbb{Q} .

*O uso da letra \mathbb{Z} vem do alemão *zahl*, que significa número.

Predicados e proposições quantificadas

- Definição: Se $P(x)$ é um predicado e x tem domínio D , o conjunto verdade de $P(x)$ é o conjunto de todos elementos de D que fazem $P(x)$ verdadeiro quando substituído por x . O conjunto verdade de $P(x)$ é denotado por

$$\{x \in D \mid P(x)\}$$

- Exemplo 1:

 - $P(x)$: “ x é um fator de 8” e o domínio de x é o conjunto de todos os inteiros positivos.
O conjunto verdade de $P(x)$ é $\{1, 2, 4, 8\}$.

Predicados e proposições quantificadas

- Notação: Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ predicados e suponha que o domínio comum de x é D .

- A notação

$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

significa que cada elemento no conjunto verdade de $P(x)$ está no conjunto verdade de $Q(x)$.

- A notação

$$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$$

significa que $P(x)$ e $Q(x)$ têm conjuntos verdade idênticos.

Predicados e proposições quantificadas

- Exemplo 2:

$P(x)$: x é um fator de 8;

$Q(x)$: x é um fator de 4;

$R(x)$: $x < 5$ e $x \neq 3$, e

o domínio de x é \mathbb{Z}^+ (inteiros positivos).

- Que relações podem ser expressas entre os três predicados?

- O conjunto verdade de $P(x)$ é $\{1, 2, 4, 8\}$;

- O conjunto verdade de $Q(x)$ é $\{1, 2, 4\}$;

- O conjunto verdade de $R(x)$ é $\{1, 2, 4\}$;

$\therefore Q(x) \Rightarrow P(x)$;

$\therefore R(x) \Rightarrow P(x)$;

$\therefore Q(x) \Leftrightarrow R(x)$;

Quantificadores: \forall e \exists

- Como transformar predicados em proposições?
 - Atribuir valores específicos para todas variáveis.
 - Usar quantificadores.
- Definição: Quantificadores são palavras/expressões que referem a quantidades tais como “todos” e “alguns” e indicam para quantos elementos do domínio um dado predicado é verdadeiro.

Quantificadores: \forall e \exists

- \forall : denota “para todos” e é chamado de quantificador universal.

- Exemplo 3:

\forall seres humanos x , x é mortal.

$\forall x \in S$, x é mortal

onde S é o conjunto de todos seres humanos.

- \exists : denota “existe” e é chamado de quantificador existencial.

- Exemplo 4:

\exists uma pessoa s | s é um estudante de AEDS I.

$\exists s \in S$, | s é um estudante de AEDS I.

onde S é o conjunto de todas as pessoas.

Proposição universal

- Definição: Seja $Q(x)$ um predicado e D o domínio de x . Uma **proposição universal** é uma proposição da forma “ $\forall x \in D, Q(x)$.”
 - A proposição universal é verdadeira sse $Q(x)$ é verdadeiro para todo x em D .
 - A proposição universal é falsa sse $Q(x)$ é falso para pelo menos um x em D .
 - ➔ O valor de x para o qual $Q(x)$ é falso é chamado de **contra-exemplo** para a proposição universal.

Proposição universal

- Verifique se a proposição universal é verdadeira ou falsa:

(a) Seja $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e a proposição $\forall x \in D, x^2 \geq x$.

$$1^2 \geq 1, \quad 2^2 \geq 2, \quad 3^2 \geq 3, \quad 4^2 \geq 4, \quad 5^2 \geq 5$$

\therefore a proposição $\forall x \in D, x^2 \geq x$ é verdadeira.

→ Método da exaustão.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \not\geq \frac{1}{2}$$

\therefore a proposição é falsa.

Proposição existencial

- Definição: Seja $Q(x)$ um predicado e D o domínio de x . Uma **proposição existencial** é uma proposição da forma “ $\exists x \in D \mid Q(x)$.”
 - A proposição existencial é verdadeira sse $Q(x)$ é verdadeiro para pelo menos um x em D .
 - A proposição existencial é falsa sse $Q(x)$ é falso para todo x em D .

- Verifique se a proposição existencial é verdadeira ou falsa:

(a) $\exists m \in \mathbb{Z} \mid m^2 = m$.
 $1^2 = 1$.

$\therefore m^2 = m$ para pelo menos um inteiro m ; logo, a proposição $\exists m \in \mathbb{Z} \mid m^2 = m$ é verdadeira.

(b) Seja $E = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e a proposição
 $\exists m \in E \mid m^2 = m$.

$$5^2 = 25 \neq 5 \quad 6^2 = 36 \neq 6 \quad 7^2 = 49 \neq 7$$

$$8^2 = 64 \neq 8 \quad 9^2 = 81 \neq 9 \quad 10^2 = 100 \neq 10$$

\therefore a proposição $\exists m \in E \mid m^2 = m$ é falsa.

Tradução de linguagem formal para informal e vice-versa

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
 - Todos números reais têm quadrados não-negativos.
- $\exists m \in \mathbb{Z} \mid m^2 = m$.
 - Existe um número inteiro cujo quadrado é igual a ele mesmo.
- Todos os triângulos têm três lados.
 - \forall triângulos t , t tem três lados.
- Alguns programas são estruturados.
 - \exists programas p tal que p é estruturado.

Proposição condicional universal

- Considera-se que a forma de proposição mais importante em Matemática é a **proposição condicional universal**.

$$\forall x, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x)$$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ se } x > 2 \text{ então } x^2 > 4.$
 - Se um número real é maior que 2 então seu quadrado é maior que 4.
- Todos bytes têm oito bits.
 - $\forall x, \text{ se } x \text{ é um byte, então } x \text{ tem oito bits.}$
- Definição de um argumento válido como uma proposição condicional universal.
 - \forall todas combinações de valores verdade das variáveis de uma sentença
se as premissas são todas verdadeiras
então a conclusão também é verdadeira.

Formas equivalentes de proposições universal e lógica

- As proposições

- \forall números reais x , se x é um inteiro, então x é racional.
- \forall inteiros x , x é racional.

significam a mesma coisa, que têm a seguinte tradução: “todos inteiros são racionais.”

- $\forall x \in U$ se $P(x)$ então $Q(x) \equiv \forall x \in D, Q(x)$.

- Se restringirmos o domínio U ao domínio D temos a seguinte equivalência.

- $\forall x \in D, Q(x) \equiv \forall x$, se x está em D então $Q(x)$

- Exemplo 5:

- \forall polígonos p , se p é um quadrado, então p é um retângulo \equiv
 \forall quadrados p , p é um retângulo.

- $\exists x \in U$ tal que $P(x)$ e $Q(x) \equiv$
 $\exists x \in D$ tal que $Q(x)$

Neste caso, D consiste de todos elementos de U que fazem $P(x)$ verdadeiro.

Negações de proposições quantificadas

- Exemplo 6:

P : Todos matemáticos usam óculos.

$\neg P$: Nenhum matemático usa óculos. (ERRADO)

→ Um ou mais matemáticos não usam óculos. (ou)
Alguns matemáticos não usam óculos.

- Teorema:**

A negação de uma proposição da forma

$$\forall x \in D, Q(x)$$

é equivalente logicamente a proposição da forma

$$\exists x \in D \mid \neg Q(x)$$

Simbolicamente temos:

$$\neg(\forall x \in D, Q(x)) \equiv \exists x \in D \mid \neg Q(x)$$

Negações de proposições quantificadas

- Exemplo 7:

$P: \forall \text{ primos } p, p \text{ é ímpar.}$

$\neg P: \exists \text{ um primo } p \mid p \text{ não é ímpar.}$

- Exemplo 8:

$P: \text{ Todos os programas de computador são finitos.}$

$\neg P: \text{ Alguns programas de computador não são finitos.}$

- Exemplo 9:

$P: \forall \text{ políticos } x, x \text{ não é honesto.}$

$\neg P: \text{ Alguns políticos são honestos.}$

Negações de proposições existenciais

- Exemplo 10:

P : Alguns peixes respiram ar.

$\neg P$: Alguns peixes não respiram ar. (ERRADO)

→ Nenhum peixe respira ar.

- Teorema:**

A negação de uma proposição da forma

$$\exists x \in D \mid Q(x)$$

é equivalente logicamente a proposição da forma

$$\forall x \in D, \neg Q(x)$$

Simbolicamente temos:

$$\neg(\exists x \in D \mid Q(x)) \equiv \forall x \in D, \neg Q(x)$$

Negações de proposições existenciais

- Exemplo 11:

P : \exists um triângulo tal que a soma dos ângulos de T é igual a 200 graus.

$\neg P$: \forall triângulos T , a soma dos ângulos de T não é igual a 200 graus.

- Exemplo 12:

P : Alguns hackers de computador têm mais de 40 anos.

$\neg P$: Todos os hackers de computador têm 40 anos ou menos.

Negações de proposições condicionais universais

- Pela definição da negação de uma proposição universal, temos:

$$\neg(\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \exists x \mid \neg(P(x) \rightarrow Q(x))$$

Sabe-se também que a negação de uma sentença condicional pode ser decomposta numa sentença conjuntiva:

$$\neg(P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv P(x) \wedge \neg Q(x)$$

Fazendo a substituição temos:

$$\neg(\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \exists x \mid (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

Negações de proposições condicionais universais

- Exemplo 13:

P : \forall pessoas p , se p é loura então p tem olhos azuis.

$\neg P$: \exists uma pessoa p tal que p é loura e p não tem olhos azuis.

- Exemplo 14:

P : Se um programa de computador tem mais de 100.000 linhas então o programa contém um erro.

$\neg P$: Existe pelo menos um programa de computador que tem mais de 100.000 linhas e o programa não contém um erro.

Verdade por “default” de proposições universais

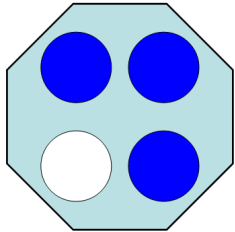
- Uma proposição da forma

$$\forall x \in D, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x)$$

é chamada de verdade por “default” sse $P(x)$ é falso para cada x em D .

Verdade por “default” de proposições universais

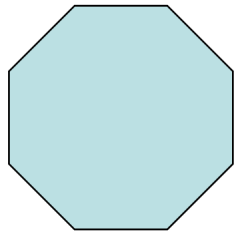
- Exemplo 15: Sejam cinco bolas azuis, cinco brancas e um prato.



Cenário 1: três bolas azuis e uma branca são colocadas no prato.

– P : Todas as bolas no prato são azuis.

→ P é falso, já que é possível identificar uma bola branca no prato.



Cenário 2: o prato está vazio.

– P : Todas as bolas no prato são azuis.

→ P é verdadeiro ou falso?

A proposição é falsa sse sua negação for verdadeira. A negação é:

$\neg P$: Existe pelo menos uma bola no prato que não é azul.

→ $\neg P$ só é verdadeiro se houver (existir) no prato uma bola que não seja azul. Como não existe, a negação é falsa e, assim, a proposição é verdadeira por “default.”

Proposições contendo múltiplos quantificadores

- Reescreva as sentenças abaixo formalmente usando quantificadores e variáveis:
 - (a) Todo mundo ama alguém.
 \forall pessoas x , \exists uma pessoa y tal que x ama y .
 - (b) Alguém ama todo mundo.
 \exists uma pessoa x tal que \forall pessoas y , x ama y .
- As sentenças (a) e (b) são equivalentes logicamente?

$$(a) \stackrel{?}{\equiv} (b)$$

Não. Em geral, ao se trocar a ordem dos quantificadores na sentença o sentido muda.

Proposições contendo múltiplos quantificadores

- Definição do limite de uma sequência a_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

sse os valores de a_n tornam-se “arbitrariamente” perto de L , i.e., convergem para L à medida que n cresce.

- $\forall \varepsilon > 0$, \exists um número inteiro n_0 tal que \forall inteiros n
se $n > n_0$ então

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

$$\begin{array}{c} \text{+-----+-----+} \\ L - \varepsilon \quad L \quad L + \varepsilon \end{array}$$

Negações de proposições quantificadas multiplicamente

- Exemplo 16: Qual é a negação da seguinte afirmação:

$P: \forall \text{ pessoas } x, \exists \text{ uma pessoa } y \text{ tal que } x \text{ ama } y.$

→ O que significa a sentença ser falsa?

A propriedade não ser válida para todas as pessoas.

$\neg P: \exists \text{ uma pessoa } x \text{ tal que}$

$\neg(\exists \text{ uma pessoa } y \text{ tal que } x \text{ ama } y) \equiv$

$\exists \text{ uma pessoa } x \text{ tal que}$

$\forall \text{ pessoas } y, x \text{ não ama } y$

Negações de proposições quantificadas multiplicamente

- Regra geral:

$P: \forall x, \exists y \text{ tal que } C(x, y).$

$\neg P: \exists x \text{ tal que } \forall y, \neg C(x, y).$

- Exemplo 17:

$P: \forall \text{ inteiros } n,$
 $\quad \exists \text{ um inteiro } k \text{ tal que } n = 2k.$

$\neg P: \exists \text{ um inteiro } n \text{ tal que}$
 $\quad \forall \text{ inteiro } k, n \neq 2k.$

Negações de proposições quantificadas multiplicamente

- Regra geral:

$P: \exists x \text{ tal que } \forall y, C(x, y).$

$\neg P: \forall x, \exists y \text{ tal que } \neg C(x, y).$

- Exemplo 18:

$P: \exists \text{ uma pessoa } x \text{ tal que}$
 $\forall \text{ pessoas } y, x \text{ ama } y.$

$\neg P: \forall \text{ pessoas } x$
 $\exists \text{ uma pessoa } y \text{ tal que } x \text{ não ama } y.$

- Sumário:

Quantificador	Negação
\forall	\exists
\exists	\forall

→ Análogo a “De Morgan.”

A relação entre \forall , \exists , \wedge , \vee

- Seja o predicado $Q(x)$,
onde x tem domínio $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
- Proposição universal é uma generalização da conjunção (\wedge):

$$\forall x \in D, Q(x) \equiv Q(x_1) \wedge Q(x_2) \wedge \dots \wedge Q(x_n)$$

- **Exemplo 19:** $Q(x) : x \cdot x, D = \{0, 1\}$
 $\forall x \in D, Q(x) \equiv Q(0) \wedge Q(1)$

- Proposição existencial é uma generalização da disjunção (\vee):

$$\exists x \in D \text{ tal que } Q(x) \equiv Q(x_1) \vee Q(x_2) \vee \dots \vee Q(x_n)$$

- **Exemplo 20:** $Q(x) : x + x, D = \{0, 1\}$
 $\exists x \in D \text{ tal que } Q(x) \equiv Q(0) \vee Q(1)$

Variações de proposições condicionais universais

- Seja a proposição condicional universal (PCU):

$$\forall x \in D, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x)$$

Exemplo 21: $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ se } x > 2 \text{ então } x^2 > 4$

- As seguintes proposições podem ser definidas:

- Contrapositivo: $\forall x \in D, \text{ se } \neg Q(x) \text{ então } \neg P(x) \equiv \text{PCU}$

Exemplo 22: $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ se } x^2 \leq 4 \text{ então } x \leq 2$

- Recíproca: $\forall x \in D, \text{ se } Q(x) \text{ então } P(x) \not\equiv \text{PCU}$

Exemplo 23: $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ se } x^2 > 4 \text{ então } x > 2$

- Inverso: $\forall x \in D, \text{ se } \neg P(x) \text{ então } \neg Q(x) \not\equiv \text{PCU}$

Exemplo 24: $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ se } x \leq 2 \text{ então } x^2 \leq 4$

Condições suficiente e necessária

- $\forall x, R(x)$ é uma condição suficiente para $S(x) \equiv \forall x, \text{ se } R(x) \text{ então } S(x)$.

Exemplo 25:

- Ser quadrado é uma condição suficiente para ser retangular.
- $\forall x, \text{ se } x \text{ é quadrado então } x \text{ é retangular.}$

- $\forall x, R(x)$ é uma condição necessária para $S(x) \equiv \forall x, \text{ se } \neg R(x) \text{ então } \neg S(x) \equiv \forall x, \text{ se } S(x) \text{ então } R(x)$.

Exemplo 26:

- Ter 35 anos é uma condição necessária para ser presidente do Brasil.
- $\forall x, \text{ se } x \text{ não tem 35 anos então } x \text{ não pode ser presidente do Brasil.}$
- $\forall x, \text{ se } x \text{ é presidente do Brasil então } x \text{ tem 35 anos.}$

Condição somente se

- $\forall x, R(x)$ somente se $S(x) \equiv$
 $\forall x, \text{ se } \neg S(x) \text{ então } \neg R(x) \equiv$
 $\forall x, \text{ se } R(x) \text{ então } S(x).$
- Exemplo 27:
 - O produto de dois números é zero somente se um dos números é zero.
 - $\forall x$, se os dois números são diferentes de zero então o produto dos dois números é diferente de zero.
 - $\forall x$, se o produto de dois números é zero então um dos números é zero.

Argumentos com afirmações quantificadas

- Regra da “Instanciação Universal”:
Se uma propriedade é verdadeira para cada objeto no domínio
Então a propriedade é verdadeira para um objeto em particular do domínio.
→ A propriedade pode ser definida, por exemplo, em termos de uma fórmula matemática, definição ou teorema.
- Exemplo famoso de instanciação universal:
Todos seres humanos são mortais;
Sócrates é um ser humano;
∴ Sócrates é mortal.
- Instanciação universal é a ferramenta fundamental do raciocínio dedutivo.

Modus Ponens Universal

- Regra de instanciação universal + modus ponens
 - Versão informal:

Se x faz com que $P(x)$ seja verdadeiro
então x faz com que $Q(x)$ seja verdadeiro.
 a faz com que $P(a)$ seja verdadeiro;
 $\therefore a$ faz com que $Q(a)$ seja verdadeiro;
 - Versão formal:

$\forall x$, se $P(x)$ então $Q(x)$;
 $P(a)$ para a em particular;
 $\therefore Q(a)$.
- Silogismo: duas premissas (uma quantificada) e uma conclusão:
 - 1ª premissa é chamada de maior ('major')
 - 2ª premissa é chamada de menor ('minor')

Modus Ponens Universal

- Exemplo 28:

Se um [número é par] = $E(x)$

então [seu quadrado é par] = $S(x)$;

k é um número que é par;

$\therefore k^2$ é par.

- Reescrevendo com quantificadores, variáveis e predicados:

$\forall x$, se $E(x)$ então $S(x)$;

$E(k)$ para k em particular;

$\therefore S(k)$.

Modus Tollens Universal

- Regra de instanciação universal + modus tollens
 - Versão informal:

Se x faz com que $P(x)$ seja verdadeiro
então x faz com que $Q(x)$ seja verdadeiro.
 a não faz com que $Q(a)$ seja verdadeiro;
 $\therefore a$ não faz com que $P(a)$ seja verdadeiro;
 - Versão formal:

$\forall x$, se $P(x)$ então $Q(x)$;
 $\neg Q(a)$ para a em particular;
 $\therefore \neg P(a)$.

Modus Tollens Universal

- Exemplo 29:

Todos seres humanos são mortais;

Zeus não é mortal;

\therefore Zeus não é humano.

Reescrevendo com quantificadores, variáveis e predicados e supondo:

$H(x)$: x é humano, e $M(x)$: x é mortal.

$\forall x$, se $H(x)$ então $M(x)$;

$\neg M(z)$ para z em particular;

$\therefore \neg H(z)$ para z em particular.

Provando validade de argumentos com proposições quantificadas

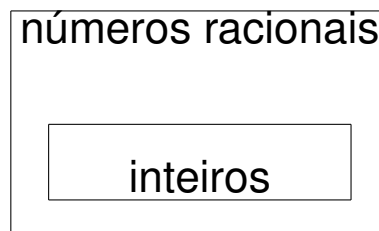
- Definição (forma de um argumento): A forma de um argumento é válida quando os símbolos dos predicados nas premissas forem substituídos por quaisquer predicados em particular, se as premissas resultantes forem verdadeiras então a conclusão também é verdadeira.
→ Um argumento é válido sse sua forma é válida.
- Prova de validade da regra do Modus Ponens Universal:
 $\forall x, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x);$
 $P(a)$ para a em particular;
 $\therefore Q(a).$
 - Suponha que as premissas maior e menor são V.
 - Mostre que $Q(a)$ é V (o que deve ser provado).
 - Pela premissa menor $P(a)$ é V.
 - Pela premissa maior e a regra de instanciação universal a afirmação “se $P(a)$ então $Q(a)$ ” é V para o valor de a em particular.
 - Se as proposições $P(a) \rightarrow Q(a)$ e $P(a)$ são V, então por modus ponens a proposição $Q(a)$ também é V (o que devia ser provado).

Usando diagramas para mostrar a validade de proposições

- Idéia:
 - Represente a validade das premissas com diagramas.
 - Analise os diagramas para saber se eles representam também a verdade da conclusão.

- Exemplo 30:

P: \forall inteiros n , n é um número racional.



\therefore A forma do argumento é válida.

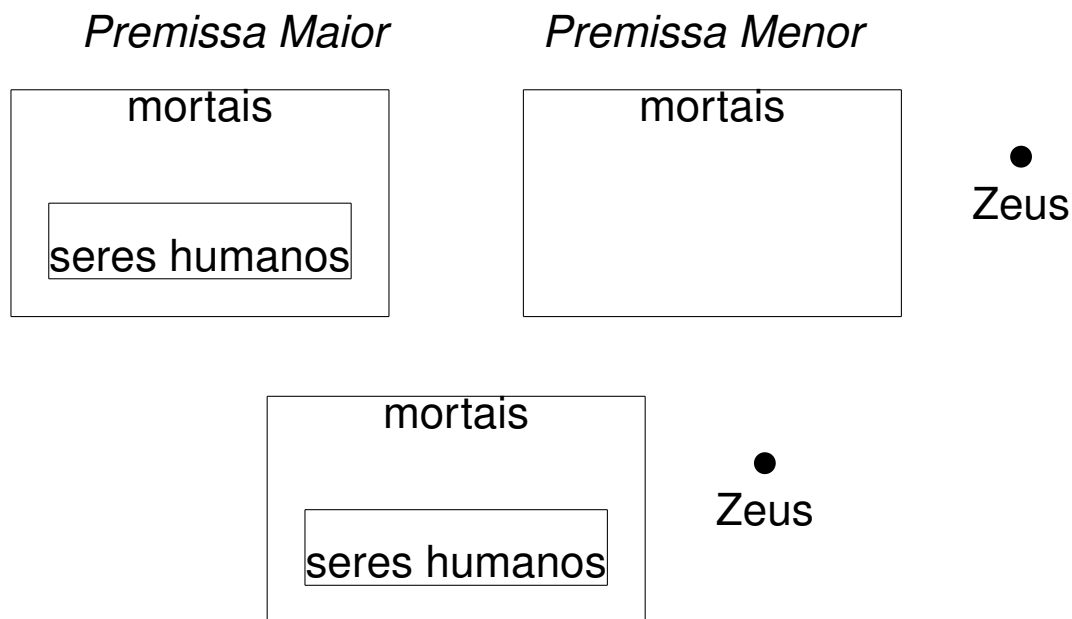
Usando diagramas para mostrar a validade de proposições

- Exemplo 31:

Todos seres humanos são mortais;

Zeus não é mortal;

∴ Zeus não é humano.

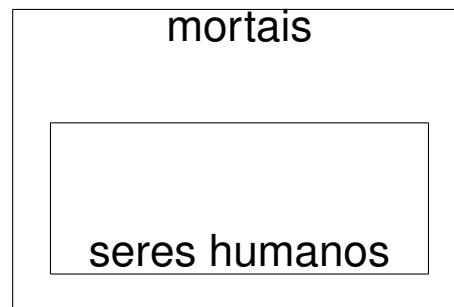


∴ A forma do argumento é válida.

Usando diagramas para mostrar a validade de proposições

- Exemplo 32:
Todos seres humanos são mortais;
Felix é mortal;
 \therefore Felix é um ser humano.

Premissa Maior

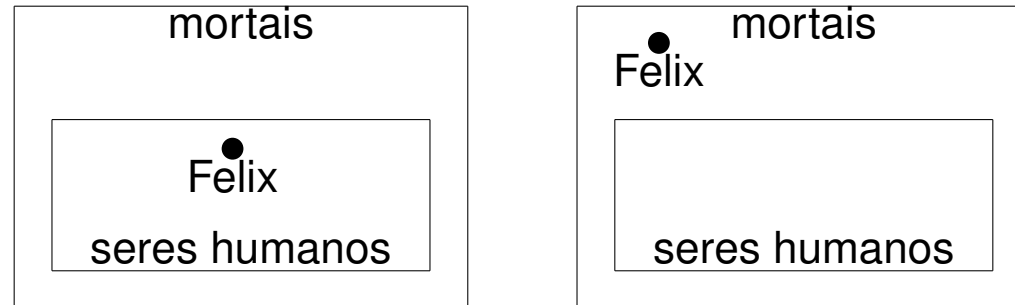


Premissa Menor



Usando diagramas para mostrar a validade de proposições

Possíveis situações



∴ A forma do argumento é inválida.

Argumentos com proposições quantificadas: Formas inválidas

- Erro oposto:

- Versão informal:

Se x faz com que $P(x)$ seja verdadeiro
então x faz com que $Q(x)$ seja verdadeiro;

a faz com que $Q(a)$ seja verdadeiro;

$\therefore a$ faz com que $P(a)$ seja verdadeiro.

- Versão formal:

$\forall x$, se $P(x)$ então $Q(x)$;

$Q(a)$ para a em particular;

$\therefore P(a)$.

Argumentos com proposições quantificadas: Formas inválidas

- Erro inverso:

- Versão informal:

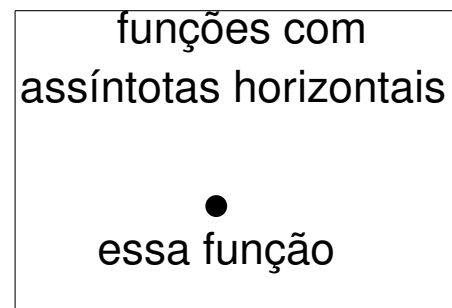
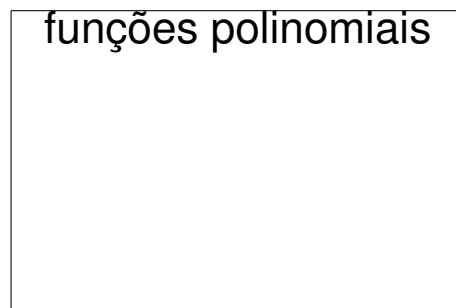
Se x faz com que $P(x)$ seja verdadeiro
então x faz com que $Q(x)$ seja verdadeiro;
 a não faz com que $P(a)$ seja verdadeiro;
 $\therefore a$ não faz com que $Q(a)$ seja verdadeiro.

- Versão formal:

$\forall x$, se $P(x)$ então $Q(x)$;
 $\neg P(a)$ para a em particular;
 $\therefore \neg Q(a)$.

Argumentos com proposições quantificadas: Argumentos com nenhum(a)/não

- Testando a validade de um argumento com diagramas:
Nenhuma função polinomial tem assíntota horizontal;
Essa função tem assíntota horizontal;
 \therefore Essa função não é polinomial.



\therefore A forma do argumento é válida.

Argumentos com proposições quantificadas: Argumentos com nenhum(a)/não

- Outra alternativa:

$P(x)$: x é uma função polinomial.

$Q(x)$: x não tem assíntota horizontal.

$\forall x$, se $P(x)$ então $Q(x)$;

$\neg Q(a)$ para a em particular;

$\therefore \neg P(a)$.

Comentários sobre erros oposto e inverso

- Erro comum porque as pessoas assumem a premissa maior como bicondicional ao invés de uma sentença condicional simples.
- Variação do erro oposto pode ser uma ferramenta útil se usada com critério.

$\forall x$, se $P(x)$ então $Q(x)$; (V)
 $Q(a)$; (V) para a em particular
Verifique se $P(a)$ também é V.

- Exemplo 33:

$\forall x$, se x tem pneumonia
então [x tem febre e calafrios, tosse forte e sente cansado].

- Se o médico sabe sobre [...] então existe uma forte possibilidade (mas não certeza) que a pessoa tem pneumonia.
- Forma de raciocínio chamada de abdução ('abduction') em IA e é muito usada em sistemas especialistas.