Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Drehungen im Raum um Koordinatenachsen*

Gegeben sei ein kartesisches Koordinatensystem $K := (O; \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ und der Einheitswürfel W mit einer Ecke im Ursprung O und der gegenüberliegenden Ecke im Punkte G mit Koordinaten $(G)_K = (1, 1, 1)$.

(a) Skizzieren Sie das Koordinatensystem und den Würfel W in einer geeigneten Parallelprojektion (die y-Achse zeige horizontal nach rechts, die z-Achse vertikal nach oben).

(b) Betrachten Sie Drehungen $D_{\hat{y},\,90°}$ sowie $D_{\hat{z},\,90°}$ und schreiben Sie die zugehörige Abbildungsmatrizen auf.

Sie können hierzu die in der Vorlesung erarbeiteten allgemeinen Ausdrücke für $[D_{\hat{y},\,\beta}]$ und $[D_{\hat{z},\,\gamma}]$ verwenden oder aber für die konkreten Winkelwerte dieser Aufgabe jeweils die Bilder der drei Basisvektoren ermitteln und hieraus die Abbildungsmatrizen $[D_{\hat{y},\,90°}]$ und $[D_{\hat{z},\,90°}]$ bilden.*

(c) Berechnen Sie die Produktmatrix $R := [D_{\hat{y},\,90°}] \cdot [D_{\hat{z},\,90°}]$.

(d) Lesen Sie an der Matrix R ab, wie die drei Basisvektoren $\hat{x}$, $\hat{y}$ und $\hat{z}$ abgebildet werden.

(e) Skizzieren Sie das Koordinatendreibein K', das sich ergibt, wenn Sie K mit $D_{\hat{z},\,90°}$ drehen und danach das Dreibein K'', das sich ergibt, wenn Sie K' mit $D_{\hat{y},\,90°}$ abbilden.

(f) Verifizieren Sie, dass die berechnete Matrix R und das Bild des Dreibeins K'' „zueinander passen".

Zusatzfrage: Man kann zu jeder Drehmatrix eine Drehachsenvektor und den zugehörigen Drehwinkel bestimmen. Können Sie diese Parameter für die Matrix R „erraten"? Vgl. auch Aufgabe H 1.

Aufgabe P 2. *Drehung um eine Achse – Dreischrittverfahren*

Betrachten Sie weiterhin den Würfel W der vorigen Aufgabe.

(a) Verifizieren Sie, dass die Kugelkoordinaten θ_B und φ_B des Punktes $B = (1, 1, 0)$ bzw. des zugehörigen Ortsvektors $\vec{b}$ wie folgt sind: $\theta_B = 0°$ und $\varphi_B = 45°$.

(b) Wir wollen nun eine Drehung $D_{\hat{b},\,180°}$ um die Drehachse durchführen, die durch den Vektor $\vec{b}$ bzw. den entsprechenden Einheitsvektor $\hat{b}$ aufgespannt wird. **Zeichnen Sie** den Würfel W in seiner Endlage nach Durchführung der Drehung $D_{\hat{b},\,180°}$. Entnehmen Sie Ihrer Skizze die Bilder der drei Basisvektoren $\hat{x}$, $\hat{y}$ und $\hat{z}$ und stellen Sie hieraus die Abbildungsmatrix auf.

Um die Abbildung $D_{\hat{b},\,180°}$ rechnerisch zu beschreiben, verwenden wir das **Dreischrittverfahren**, das Ihnen aus dem ersten Semester geläufig ist.

* $[D_{\hat{x},\,\alpha}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$, $[D_{\hat{y},\,\beta}] = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$, $[D_{\hat{z},\,\gamma}] = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Vollziehen Sie anhand Ihrer Skizzen nach, dass die folgende Zerlegung gültig ist:

$$D_{\hat{b},\,180^\circ} = D_{\hat{z},\,\varphi_B} \circ D_{\hat{x},\,180^\circ} \circ D_{\hat{z},\,-\varphi_B}\,.$$

(d) Berechnen Sie das Produkt der drei zugehörigen Abbildungsmatrizen in der obigen Gleichung und verifizieren Sie, dass die Drehung $D_{\hat{b},\,180^\circ}$ durch die folgende Abbildungsmatrix dargestellt wird: $\left[\,D_{\hat{b},\,180^\circ}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Aufgabe P 3. *Für Schnelle sogleich, für alle Übrigen zuhause:*

Wenn Sie mit den beiden obigen Aufgaben schnell vorangekommen sind, bearbeiten Sie bitte die folgende Aufgabe. Beschreiten Sie denjenigen der beiden Lösungswege, den Sie in der Vorlesungssitzung **nicht** verwendet haben.

Anfänglich sei das Kamerakoordinatensystem am Weltkoordinatensystem ausgerichtet, d.h.

$$\hat{x}_K = \hat{x}, \qquad \hat{y}_K = \hat{y}, \qquad \hat{z}_K = \hat{z}.$$

Gesucht ist nun eine Drehung D, welche die Kamera in die folgende Orientierung überführt:

(a) $D\left(\hat{x}_K\right) = D\left(\hat{x}\right)$ zeige in die Richtung des Vektors $\tilde{u} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$.

(b) $D\left(\hat{y}_K\right) = D\left(\hat{y}\right)$ liege in der x-y-Ebene.

(c) $D\left(\hat{z}_K\right) = D\left(\hat{z}\right)$ habe eine positive z-Komponente.

Die letzten beiden Bedingungen bedeuten, dass die Kamera **nicht** um ihre Längsachse gedreht werden soll (keine *Roll*-Bewegung).

Es gibt (mindestens) zwei Lösungswege für diese Aufgabe:

- Direkte Bestimmung der Drehmatrix $[D\,] = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}$ unter Beachtung der Bedingungen, die für die Spalten von Drehmatrizen gelten (Länge 1, paarweise orthogonal, $w = u \times v$).
- Zerlegung von D in zwei Drehungen, jeweils um Koordinatenachsen des Weltkoordinatensystems: $D = D_{\hat{z},\,\varphi} \circ D_{\hat{y},\,-\theta}$. Die Winkel θ und φ gehören hierbei zu geografischen Kugelkoordinaten des Vektors $\tilde{u} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$.

Hausübungen

Aufgabe H 1. *Drehungen um die Raumdiagonale*

Wir verwenden weiterhin die Bezeichnungen der Aufgaben P 1 und P 2.

(a) Betrachten Sie den Punkt $G = (1,1,1)$. Verifizieren Sie, dass dessen Ortsvektor $\vec{g}$ die Länge $r := \|\vec{g}\| = \sqrt{3}$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie den Azimutwinkel φ_G von G.

(c) Anstatt den Latitudinalwinkel (Breitengrad) θ_G zu bestimmen, begnügen wir uns damit, aus der Würfelgeometrie die Werte von $\cos(\theta_G)$ und $\sin(\theta_G)$ zu ermitteln.

(d) Verifizieren Sie, dass die folgende Gleichung richtig ist:

$$\begin{pmatrix} r\,\cos(\theta_G)\,\cos(\varphi_G) \\ r\,\cos(\theta_G)\,\sin(\varphi_G) \\ r\,\sin(\theta_G) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen versuchen, die Drehung $D_{\vec{g},\,120^\circ}$ um die $\vec{g}$-Achse auch rechnerisch zu beschreiben:

(e) Eine Möglichkeit hierfür ist, dass Sie sich von der im ersten Semester des Öfteren praktizierten Vorgehensweise (Stichwort: Dreischrittverfahren) inspirieren lassen und die gewünschte Transformation in fünf Einzeltransformationen zerlegen. Am Ende sind dann fünf Matrizen zu multiplizieren:

$$D_{\vec{g},\,120^\circ} = D_{\hat{z},\,\varphi_B} \circ D_{\hat{y},\,-\theta_G} \circ D_{\hat{x},\,120^\circ} \circ D_{\hat{y},\,\theta_G} \circ D_{\hat{z},\,-\varphi_G}.$$

(f) Alternativ hierzu verwenden Sie die in Aufgabe P 1 bestimmte Matrix R und berechnen das Matrix-Vektor-Produkt

$$R \cdot \vec{g} \;=\; R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Können Sie das (vielleicht für Sie überraschende) Ergebnis deuten?

Aufgabe H 2. *Kugelkoordinaten*

Rechnen Sie nach, dass der Vektor

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta)\,\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\,\sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

für alle Werte von θ und φ die Länge 1 besitzt. *Verwenden Sie hierfür die Additionstheoreme*

Es sei $r > 0$. Zeigen Sie, dass der Vektor

$$\begin{pmatrix} r\,\cos(\theta)\,\cos(\varphi) \\ r\,\cos(\theta)\,\sin(\varphi) \\ r\,\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

die Länge r besitzt.

Aufgabe H 3. *Berechnung von Kugelkoordinaten*

Es sei ein Vektor $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \neq 0$ gegeben. Wir bezeichnen die **Projektion von u in die x-y-Ebene** mit u'. Es ist also $u' = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Außer im Sonderfall $u' = 0$

- ist der Latitudinalwinkel θ der Winkel zwischen u' und u: $\theta = \measuredangle\,(u', u)$,
- ist der Azimutwinkel φ der Winkel zwischen $\hat{x}$ und u': $\varphi = \measuredangle\,(\hat{x}, u')$,

vgl. Abbildung 1.

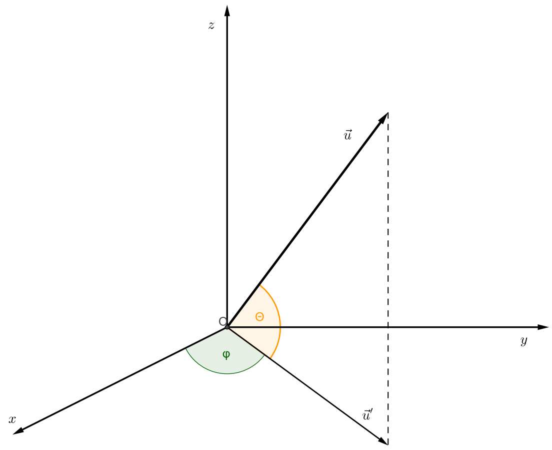


Abbildung 1: Konstruktion zur Ermittlung der Kugelkoordinaten eines Vektors u.

Rechnerisches Verfahren zur Ermittlung von Kugelkoordinaten:

Die Kugelkoordinaten θ und φ eines vorgelegten Vektors $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \neq 0$ sind wie folgt:

- Wir berechnen zunächst den **Polarwinkel** $\Psi = \measuredangle\,(u, \widehat{z})$ zwischen u und der positiven z-Achse mit der (im ersten Semester behandelten) Formel

$$\cos(\Psi) \;=\; \frac{u \cdot \widehat{z}}{\|u\| \; \|\widehat{z}\|} \;=\; \frac{u_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

  und setzen $\theta := 90^\circ - \Psi$.

  Bemerkung: Falls $u_1 = u_2 = 0$ gilt, so zeigt u in die positive oder negative z-Richtung, der Winkel φ ist dann nicht eindeutig bestimmt, man kann z.B. $\varphi = 0^\circ$ wählen. Für $u_3 > 0$ ergibt sich $\cos(\Psi) = 1$, also $\Psi = 0$ und $\theta = +90^\circ$; für $u_3 < 0$ folgt entsprechend $\cos(\Psi) = -1$, also $\Psi = 180^\circ$ und $\theta = -90^\circ$.

- Für $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$ ist

$$\varphi = \measuredangle\left(u', \hat{x}\right) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{u' \cdot \hat{x}}{\|u'\| \, \|\hat{x}\|}\right) = \arccos\left(\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}\right), & \text{falls } u_2 \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{u' \cdot \hat{x}}{\|u'\| \, \|\hat{x}\|}\right) = -\arccos\left(\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}\right), & \text{falls } u_2 < 0, \end{cases}$$

  (für negative Werte von u_2 vergeben wir also negative Azimutwinkel).

(a) Vollziehen Sie die vorstehenden Definitionen nach.

(b) Zeichnen Sie den Einheitswürfel in Parallelprojektion. Bestimmen Sie die Werte der Kugelkoordinaten r, θ und φ für jeden der folgenden Würfeleckpunkte:

$$A = (1,0,1),\ B = (1,1,0),\ C = (0,1,1),\ D = (0,0,1),\ G = (1,1,1).$$

Aufgabe H 4. *Drehungen im Raum*

Diese Aufgabe stellt eine Verallgemeinerung der Aufgabe T 4 dar. Es sei φ der Azimutwinkel eines Ortsvektors im Raum, θ sein Latitudinalwinkel und r seine Länge. Machen Sie sich anschaulich klar, was sich ergibt, wenn Sie den Vektor $r\,\hat{x}$ zunächst um die y-Achse mit Drehwinkel $-\theta$ und dann um die z-Achse mit Drehwinkel φ drehen. Führen Sie dann auch noch die zugehörige Rechnung aus:

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & 0 & \sin(-\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\theta) & 0 & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

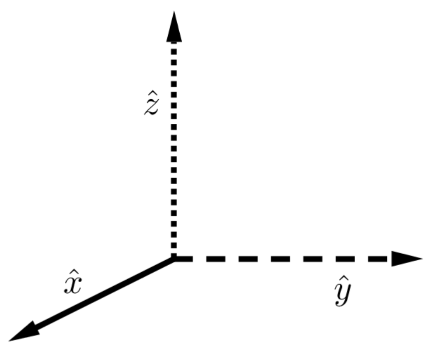
Aufgabe H 5. *Räumliche Drehungen – Klausuraufgabe aus dem Sommersemester 2015*

Der Begriff „Weltkoordinatensystem“ bezeichne ein fest gewähltes kartesisches Koordinatensystem. Dessen Achsen sollen mit den Achsen des unten dargestellten Dreibeins $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ übereinstimmen.

(a) Betrachten Sie die Abbildung $D_{\hat{y},90^\circ} \circ D_{\hat{z},90^\circ}$, das ist eine 90-Grad-Drehung um die z-Achse des Weltkoordinatensystems ($D_{\hat{z},90^\circ}$), gefolgt von einer 90-Grad-Drehung um die y-Achse des Weltkoordinatensystems ($D_{\hat{y},90^\circ}$).

(i) Skizzieren Sie das (Bild-)Dreibein, das sich ergibt, wenn das dargestellte Dreibein $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ der Drehung $D_{\hat{z},90^\circ}$ unterworfen wird.

(ii) Skizzieren Sie das (Bild-)Dreibein, das sich ergibt, wenn das dargestellte Dreibein $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ mit der Drehung $D_{\hat{y},90^\circ} \circ D_{\hat{z},90^\circ}$ abgebildet wird.



Hinweis: In Ermangelung von Farben wurden die Achsen durch unterschiedliche Stricharten gekennzeichnet.

(b) Berechnen Sie das Matrixprodukt

$$[\,D_{\hat{y},\,90^\circ} \circ D_{\hat{z},\,90^\circ}\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Erläutern Sie klar und präzise den Zusammenhang zwischen den drei Spalten Ihrer Ergebnismatrix aus Teilaufgabe **(b)** und Ihrem Bild-Dreibein aus Teilaufgabe **(a)** (ii).

(d) Welche Lage des Dreibeins ergibt sich, wenn zuerst eine „90-Grad-Pan-Bewegung“ (Drehung um die z-Achse des Dreibeins, die anfänglich mit der z-Achse des Weltkoordinatensystems übereinstimmt) und danach eine „90-Grad-Tilt-Bewegung“ (Drehung um die (neue) y-Achse des Dreibeins, die sich nach Durchführung der Pan-Bewegung ergeben hat). Erläutern Sie dies zeichnerisch (analog zu Teilaufgabe **(a)**) und rechnerisch (analog zu Teilaufgabe **(b)**).

Tutoriumsübungen

Aufgabe T 1. *Räumliche Drehungen – Klausuraufgabe aus dem Sommersemester 2016*

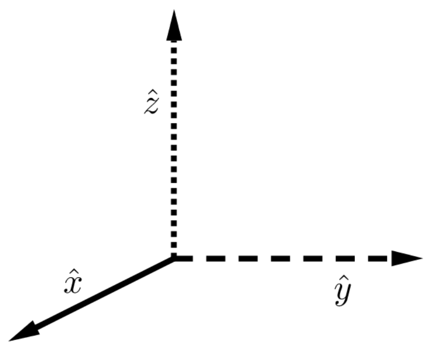
Der Begriff „Weltkoordinatensystem" bezeichne ein fest im Raum gewähltes kartesisches Koordinatensystem. Dessen Achsen sollen mit den Achsen des unten dargestellten Dreibeins $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ übereinstimmen.

(a) Betrachten Sie die Abbildung $D_{\hat{x},90^\circ} \circ D_{\hat{z},90^\circ}$, das ist eine 90-Grad-Drehung um die z-Achse des Weltkoordinatensystems ($D_{\hat{z},90^\circ}$), **gefolgt von** einer 90-Grad-Drehung um die x-Achse des Weltkoordinatensystems ($D_{\hat{x},90^\circ}$).

(i) Skizzieren Sie das (Bild-)Dreibein, das sich ergibt, wenn das dargestellte Dreibein $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ der Drehung $D_{\hat{z},90^\circ}$ unterworfen wird.

(ii) Skizzieren Sie das (Bild-)Dreibein, das sich ergibt, wenn das dargestellte Dreibein $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ mit der Drehung $D_{\hat{x},90^\circ} \circ D_{\hat{z},90^\circ}$ abgebildet wird.

Wichtig: Wählen Sie die Bezeichungen gedrehter (Basis-)Vektoren so, dass Namenskonflikte vermieden werden.



Hinweis: In Ermangelung von Farben wurden die Achsen durch unterschiedliche Stricharten gekennzeichnet.

(b) Stellen Sie die Drehmatrizen $[D_{\hat{x},90^\circ}]$ und $[D_{\hat{z},90^\circ}]$ auf und berechnen Sie das Matrixprodukt

$$[D_{\hat{x},90^\circ}] \cdot [D_{\hat{z},90^\circ}]\,.$$

(c) Prüfen und erläutern Sie, ob und inwiefern Ihr Rechenergebnis von Teilaufgabe **(b)** zu Ihrem Bild-Dreibein aus Teilaufgabe **(a)** (ii) passt.

(d) Betrachten Sie nun den Fall, dass zuerst eine „90-Grad-Pan-Bewegung" (Drehung um die z-Achse des Dreibeins, die anfänglich mit der z-Achse des Weltkoordinatensystems übereinstimmt) ausgeführt wird und danach eine „90-Grad-Roll-Bewegung" (Drehung um die (neue) x'-Achse des Dreibeins, die sich nach Durchführung der Pan-Bewegung ergeben hat). Durch welche Kombination(en) von Drehungen **um Weltkoordinatenachsen** lässt sich diese Abbildung beschreiben?

Aufgabe T 2. *Drehungen im Raum um Koordinatenachsen*

Gegeben sei ein kartesisches Koordinatensystem $(O; \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ und der Einheitswürfel W mit einer Ecke im Ursprung O und der gegenüberliegenden Ecke im Punkte G mit Koordinaten $(1, 1, 1)$.

(a) Skizzieren Sie den Würfel W in einer geeigneten Parallelprojektion. Die x-Achse zeige nach vorne, die z-Achse nach oben.

(b) Betrachten Sie Drehungen $D_1 := D_{\hat{x}, 90°}$ und $D_2 := D_{\hat{z}, 45°}$ und und schreiben Sie deren Abbildungsmatrizen $[D_1]$ bzw. $[D_2]$ auf.

Sie können hierzu die in der Vorlesung erarbeiteten Ausdrücke für $[D_{\hat{x}, \alpha}]$ und $[D_{\hat{z}, \gamma}]$ verwenden oder aber jeweils die Bilder der drei Basisvektoren ermitteln und hieraus die Abbildungsmatrizen bilden.

(c) Zeichnen Sie den Würfel W_1, der sich ergibt, wenn man die Drehung D_1 auf den Würfel W anwendet.

(d) Bestimmen Sie für jeden der Würfeleckpunkte $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (0, 1, 1)$, $D = (0, 0, 1)$ und $G = (1, 1, 1)$ das Bild unter der Drehung D_1. Multiplizieren Sie hierzu die Abbildungsmatrix $[D_1]$ mit den entsprechenden Ortsvektoren, z.B. $A_1 := [D_1] \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Stimmen Ihre Ergebnisse mit Ihrer Zeichnung aus Aufgabe **(c)** überein?

(e) Zeichnen Sie den Würfel W_{21}, der sich ergibt, wenn man die Drehung $D_{21} := D_2 \circ D_1$ auf den Würfel W anwendet.

(f) Berechnen Sie das Matrixprodukt $[D_{21}] = [D_2] \cdot [D_1]$. Multiplizieren Sie die Matrix $[D_{21}]$ mit einigen der Ortsvektoren der Würfelecken. Stimmen Ihre Ergebnisse mit Ihrer Zeichnung aus Aufgabe **(e)** überein?

(g) Berechnen Sie nun auch das Matrixprodukt $[D_{12}] := [D_1] \cdot [D_2]$ und verifizieren Sie dass

$$[D_1] \cdot [D_2] \neq [D_2] \cdot [D_1]$$

gilt.

Überzeugen Sie sich hiervon auch geometrisch mit einem Hilfskoordinatensystem: Welche Würfellage ergibt sich, wenn D_{12} auf W angewandt wird?

Aufgabe T 3. *Kugelkoordinaten*

In der Vorlesung haben Sie die Kugelkoordinaten u.a. für die Punkte $B = (1, 1, 0)$ und $C = (0, 1, 1)$ bestimmt, nämlich

$$\theta_B = 0°, \quad \varphi_B = 45°;$$
$$\theta_C = 45°, \quad \varphi_A = 90°.$$

Für den Abstand r dieser beiden Punkte zum Ursprung ergibt sich jeweils der Wert $\sqrt{2}$, denn

$$r_B = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \qquad r_C = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Setzen Sie diese Kugelkoordinaten jeweils in die rechte Seite der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,\cos(\theta)\,\cos(\varphi) \\ r\,\cos(\theta)\,\sin(\varphi) \\ r\,\sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ein.}$$

Aufgabe T 4. *Kugelkoordinaten und Drehung in vorgegebene Richtung*

Wir verwenden weiterhin die Bezeichnungen der vorigen Aufgabe.

(a) Betrachten Sie den Punkt $C = (0,1,1)$. Verifizieren Sie, dass dessen Ortsvektor $\vec{c}$ die Länge $r_C := \|\vec{c}\| = \sqrt{2}$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie den Azimutwinkel φ_C und den Latitudinalwinkel (Breitengrad) θ_C des Punktes C.

(c) Verifizieren Sie, dass die folgende Gleichung richtig ist:

$$\begin{pmatrix} r_C\,\cos(\theta_C)\,\cos(\varphi_C) \\ r_C\,\cos(\theta_C)\,\sin(\varphi_C) \\ r_C\,\sin(\theta_C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Berechnen Sie das folgende Matrixprodukt:

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi_C) & -\sin(\varphi_C) & 0 \\ \sin(\varphi_C) & \cos(\varphi_C) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-\theta_C) & 0 & \sin(-\theta_C) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\theta_C) & 0 & \cos(-\theta_C) \end{bmatrix}.$$

Was kommt heraus, wenn man die Produktmatrix auf den Vektor $\hat{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ bzw. auf den Vektor $r_C\,\hat{x} = \left(\begin{smallmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ anwendet?

(e) Verfahren Sie analog mit den Punkten $A = (1,0,1)$, $E = (0,1,0)$ und $G = (1,1,1)$. *Anstatt den Latitudinalwinkel (Breitengrad) θ_G von G zu bestimmen, begnügen wir uns damit, aus der Würfelgeometrie die Werte von $\cos(\theta_G)$ und $\sin(\theta_G)$ zu ermitteln.*