Präsenzübungen

Aufgabe P 4. *Zerlegung einer Drehung: Eulerwinkel*

(a) Wir betrachten die (schon in Übungseinheit 1 diskutierte) Drehung D_1 mit Abbildungsmatrix $[D_1] = \begin{bmatrix} 0&0&1\\1&0&0\\0&1&0 \end{bmatrix}$ und bestimmen hierzu die (Euler-)Winkel α, β und γ so, dass die Gleichung

$$D_1 \;=\; D_{\hat{\mathbf{z}},\,\gamma} \circ D_{\hat{\mathbf{y}},\,\beta} \circ D_{\hat{\mathbf{x}},\,\alpha}$$

erfüllt ist. Wir verwenden die Notation der Vorlesung und lesen an der Abbildungsmatrix ab: $\hat{\mathbf{x}} \mapsto \hat{\mathbf{y}} =: \mathbf{u}, \quad \hat{\mathbf{y}} \mapsto \hat{\mathbf{z}} =: \mathbf{v}, \quad \hat{\mathbf{z}} \mapsto \hat{\mathbf{x}} =: \mathbf{w}.$

Vorüberlegung 1: Wenn Sie sich anhand eines (Objekt-)Koordinatensystems mit farbig markiert Achsen eine Folge von Drehungen $D_{\hat{\mathbf{z}},\,\gamma} \circ D_{\hat{\mathbf{y}},\,\beta} \circ D_{\hat{\mathbf{x}},\,\alpha}$ veranschaulichen (wobei **Sie** bei dieser allgemeinen Betrachtung die Winkel selbst auswählen), sehen Sie, dass **das am Ende resultierende Bild** $\mathbf{u}$ des Vektors $\hat{\mathbf{x}}$ genau die Kugelkoordinaten $\varphi = \gamma$ und $\theta = -\beta$ besitzt. Wir werden diese Vorüberlegung nun „rückwärts“ nutzen.

Anwendung: Im vorliegenden Fall liegt $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{y}}$ in der x-y-Ebene, somit ist $\mathbf{u}'$, d.h. die Projektion von $\mathbf{u}$ in die x-y-Ebene, **gleich** $\mathbf{u}$, also gilt auch $\mathbf{u}' = \hat{\mathbf{y}}$. Die Kugelkoordinaten von $\mathbf{u}$ sind somit wie folgt:

$$\varphi_{\mathbf{u}} \;=\; \measuredangle(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}') \;=\; \measuredangle(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) \;=\; 90^\circ, \qquad \theta_{\mathbf{u}} \;=\; \measuredangle(\mathbf{u}', \mathbf{u}) \;=\; \measuredangle(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}}) \;=\; 0^\circ.$$

Mit der **Vorüberlegung 1** folgt $\gamma = \varphi_{\mathbf{u}} = 90^\circ$ und $\beta = -\theta_{\mathbf{u}} = 0^\circ$.

Vorüberlegung 2: Der Winkel α lässt sich leider nicht direkt an der gegebenen Matrix bzw. den Bildvektoren $(\mathbf{u} \;\; \mathbf{v} \;\; \mathbf{w})$ ablesen. Man muss hier einen Hilfsvektor einführen, den sogenannten **Knotenvektor** $\mathbf{k}$. Dieser Vektor steht senkrecht auf $\mathbf{u}$ und er liegt in der x-y-Ebene (steht also auch senkrecht auf dem Basisvektor $\hat{\mathbf{z}}$), wir setzen $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}$. Machen Sie sich wiederum anhand eines (Objekt-)Koordinatensystems klar, dass sich nach Ausführung einer Folge von Drehungen $D_{\hat{\mathbf{z}},\,\gamma} \circ D_{\hat{\mathbf{y}},\,\beta} \circ D_{\hat{\mathbf{x}},\,\alpha}$ der Winkel α genau als Winkel zwischen $\mathbf{k}$ und **dem am Ende resultierenden Bild** $\mathbf{v}$ des Vektors $\hat{\mathbf{y}}$ wiederfindet.

Anwendung: Im vorliegenden Fall ist $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{x}}$, mit der **Vorüberlegung 2** folgt somit

$$\alpha \;=\; \measuredangle(\mathbf{k}, \mathbf{v}) \;=\; \measuredangle(-\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}) \;=\; 90^\circ$$

Wir fassen zusammen: Aus $\gamma = 90^\circ$, $\beta = 0^\circ$ und $\alpha = 90^\circ$ folgt $D_1 = D_{\hat{\mathbf{z}},\,90^\circ} \circ D_{\hat{\mathbf{y}},\,0^\circ} \circ D_{\hat{\mathbf{x}},\,90^\circ}$.

(b) **Veranschaulichen Sie** die durch $D_{\hat{\mathbf{z}},\,90^\circ} \circ D_{\hat{\mathbf{y}},\,0^\circ} \circ D_{\hat{\mathbf{x}},\,90^\circ}$ gegebene Folge von Drehungen und **prüfen Sie nach**, ob sich tatsächlich D_1 ergibt.
Sie können dies durch Multiplikation der drei Drehmatrizen tun oder durch reale Ausführung der Drehungen an einem Objekt (mit markierten Achsen).

Wenn wir von *Pan-*, *Tilt-* und *Roll*-Bewegungen sprechen, meinen wir im Kontext dieser Lehreinheit das Folgende: **Zuerst** eine Drehung um die $\hat{\mathbf{z}}$-Achse (Pan), danach eine zweite Drehung um die bei der Pan-Bewegung enstandene (neue) $\hat{\mathbf{y}}'$-Achse (Tilt), schließlich eine dritte Drehung (Roll) um die nach der Pan- und Tilt-Bewegung entstandene $\hat{\mathbf{x}}''$-Achse.

(c) **Überlegen Sie sich**, welche Folge von Pan-, Tilt- und Roll-Bewegungen auf die gleiche Objektlage führt wie die Ausführung der Drehung D_1.

(d) **Betrachten Sie** nun die Drehung D_2 mit Drehmatrix

$$[D_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Veranschaulichen Sie die in der Matrix $[D_2] = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}$ enthaltenen Spaltenvektoren. *Hinweis:* $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 35°.$

(e) **Bestimmen Sie** die Eulerwinkel α_2, β_2 und γ_2 so, dass

$$D_2 = D_{\hat{\mathbf{z}},\gamma_2} \circ D_{\hat{\mathbf{y}},\beta_2} \circ D_{\hat{\mathbf{x}},\alpha_2} \text{ gilt.}$$

(f) **Führen Sie** eine Probe **durch**, indem Sie Sie das Matrixprodukt $[D_{\hat{\mathbf{z}},\gamma_2}] \cdot [D_{\hat{\mathbf{y}},\beta_2}] \cdot [D_{\hat{\mathbf{x}},\alpha_2}]$ berechnen und mit $[D_2]$ vergleichen.

(g) Veranschaulichen Sie die durch $D_{\hat{\mathbf{z}},\gamma_2} \circ D_{\hat{\mathbf{y}},\beta_2} \circ D_{\hat{\mathbf{x}},\alpha_2}$ gegebene Folge von Drehungen.

(h) **Überlegen Sie sich**, welche Folge von Pan-, Tilt- und Roll-Bewegungen auf die gleiche Objektlage führt wie die Ausführung der Drehung D_2.

Aufgabe P 5. *Drehungen um die Raumdiagonale*

Betrachten Sie den Einheitswürfel. In der Vorlesung haben wir die Kugelkoordinaten r, φ und θ des Punktes $G = (1,1,1)$ wie folgt bestimmt:

$$r = \sqrt{3}, \qquad \varphi = 45° \leftrightarrow \cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(\varphi), \qquad \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Wir wollen nun die Drehung $D_{\hat{\mathbf{g}},120°}$ mit dem Achsenvektor $\hat{\mathbf{g}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathsf{T}}$ und dem Drehwinkel $\delta = 120°$ beschreiben und verfolgen hierzu zwei alternative Ansätze:

(a) **Verwenden Sie** die in der Vorlesung behandelte Formel

$$\left[D_{\hat{a},\delta}\right] = \begin{bmatrix} a_1^2+\cos(\delta)\cdot\left(1-a_1^2\right) & a_1\cdot a_2\cdot(1-\cos(\delta))-a_3\cdot\sin(\delta) & a_1\cdot a_3\cdot(1-\cos(\delta))+a_2\cdot\sin(\delta) \\ a_1\cdot a_2\cdot(1-\cos(\delta))+a_3\cdot\sin(\delta) & a_2^2+\cos(\delta)\cdot\left(1-a_2^2\right) & a_2\cdot a_3\cdot(1-\cos(\delta))-a_1\cdot\sin(\delta) \\ a_1\cdot a_3\cdot(1-\cos(\delta))-a_2\cdot\sin(\delta) & a_2\cdot a_3\cdot(1-\cos(\delta))+a_1\cdot\sin(\delta) & a_3^2+\cos(\delta)\cdot\left(1-a_3^2\right) \end{bmatrix},$$

für die Matrix einer Drehung $D_{\hat{a},\delta}$ mit Achsenvektor $\hat{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ und Drehwinkel δ. Setzen Sie **arbeitsteilig** die Werte $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ und $120°$ für δ ein.

Hinweise zur weiteren Vorgehensweise:

Um am konkreten Beispiel zu nachzuvollziehen, wie die obige Formel hergeleitet wird, zerlegen wir $D_{\hat{\mathbf{g}},120°}$ nach dem Dreischrittverfahren:

$$D_{\hat{\mathbf{g}},120°} = \underbrace{\left(D_{\hat{\mathbf{z}},45°} \circ D_{\hat{\mathbf{y}},-\theta}\right)}_{L} \circ D_{\hat{\mathbf{x}},120°} \circ \underbrace{\left(D_{\hat{\mathbf{y}},+\theta} \circ D_{\hat{\mathbf{z}},-45°}\right)}_{R}.$$

Die Matrix zur Abbildung $L := D_{\hat{\mathbf{z}},\,45^\circ} \circ D_{\hat{\mathbf{y}},\,-\theta}$ haben wir in der Vorlesung bestimmt, es ist

$$\big[L\big] \;=\; [D_{\hat{\mathbf{z}},\,45^\circ} \circ D_{\hat{\mathbf{y}},\,-\theta}] \;=\; \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Die Matrix zur Abbildung $R := D_{\hat{\mathbf{y}},\,+\theta} \circ D_{\hat{\mathbf{z}},\,-45^\circ}$ ist hierzu invers, wegen der Orthogonalität von Drehmatrizen brauchen wir lediglich zu transponieren, somit ist

$$\big[R\big] \;=\; [D_{\hat{\mathbf{y}},\,+\theta} \circ D_{\hat{\mathbf{z}},\,-45^\circ}] \;=\; \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

(b) **Stellen Sie** $[D_{\hat{\mathbf{x}},\,120^\circ}]$ auf und rechnen Sie nach, dass

$$[D_{\hat{\mathbf{x}},\,120^\circ}] \cdot \big[R\big] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad \text{ergibt.}$$

(c) **Führen Sie** nun die Berechnung des Matrixproduktes $\big[L\big] \cdot [D_{\hat{\mathbf{x}},\,120^\circ}] \cdot \big[R\big]$ zu Ende und überzeugen Sie sich davon, dass sich das gleiche Ergebnis ergibt wie in Aufgabe **(a)**.

Für Schnelle sogleich, für alle anderen zuhause:

Aufgabe P 6. *Ermittlung von Drehachse und Drehwinkel*

Bearbeiten Sie die Aufgabe H 5.

Hausübungen

Aufgabe H 6. *Drehungen um beliebige Drehachsen*

In der Vorlesung haben wir die Abbildungsmatrix für Drehungen $D_{\hat{\mathbf{a}},\,\delta}$ mit dem Drehachsenvektor $\hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\,\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\,\sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ und dem Drehwinkel δ mit dem Dreischrittverfahren abgeleitet:

$$\underbrace{[D_{\hat{\mathbf{a}},\,\delta}]}_{D} = \underbrace{[D_{\hat{\mathbf{z}},\,\varphi} \circ D_{\hat{\mathbf{y}},\,-\theta}]}_{L} \cdot \underbrace{[D_{\hat{\mathbf{x}},\,+\delta}] \cdot [D_{\hat{\mathbf{y}},\,+\theta} \circ D_{\hat{\mathbf{z}},\,-\varphi}]}_{P}$$

Das Produkt P der mittleren und der rechten Matrix haben wir in der Vorlesung berechnet. Die linke Matrix L muss nun noch mit P multipliziert werden:

$$\begin{aligned} D &= L \cdot P \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & -\sin(\varphi) & -\sin(\theta)\,\cos(\varphi) \\ a_2 & \cos(\varphi) & -\sin(\theta)\,\sin(\varphi) \\ a_3 & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -\cos(\delta)\,\sin(\varphi) + \sin(\delta)\,\sin(\theta)\,\cos(\varphi) & \cos(\delta)\,\cos(\varphi) + \sin(\delta)\,\sin(\theta)\,\sin(\varphi) & -\sin(\delta)\,\cos(\theta) \\ -\sin(\delta)\,\sin(\varphi) - \cos(\delta)\,\sin(\theta)\,\cos(\varphi) & \sin(\delta)\,\cos(\varphi) - \cos(\delta)\,\sin(\theta)\,\sin(\varphi) & \cos(\delta)\,\cos(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Behauptet wird, dass sich das folgende Ergebnis ergibt:

$$D = \begin{bmatrix} a_1^2+\cos(\delta)\cdot\left(1-a_1^2\right) & a_1\cdot a_2\cdot(1-\cos(\delta))-a_3\cdot\sin(\delta) & a_1\cdot a_3\cdot(1-\cos(\delta))+a_2\cdot\sin(\delta) \\ a_1\cdot a_2\cdot(1-\cos(\delta))+a_3\cdot\sin(\delta) & a_2^2+\cos(\delta)\cdot\left(1-a_2^2\right) & a_2\cdot a_3\cdot(1-\cos(\delta))-a_1\cdot\sin(\delta) \\ a_1\cdot a_3\cdot(1-\cos(\delta))-a_2\cdot\sin(\delta) & a_2\cdot a_3\cdot(1-\cos(\delta))+a_1\cdot\sin(\delta) & a_3^2+\cos(\delta)\cdot\left(1-a_3^2\right) \end{bmatrix}$$

Prüfen Sie den Eintrag D_{11} in der ersten Zeile und ersten Spalte der Ergebnismatrix D **nach**. Vervollständigen Sie hierzu den mit Auslassungspunkten markierten Teil der folgenden Rechnung, vollziehen Sie den Rest nach.

$$\begin{aligned} D_{11} &= \begin{bmatrix} a_1 & -\sin(\varphi) & -\sin(\theta)\,\cos(\varphi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ -\cos(\delta)\,\sin(\varphi) + \sin(\delta)\,\sin(\theta)\,\cos(\varphi) \\ -\sin(\delta)\,\sin(\varphi) - \cos(\delta)\,\sin(\theta)\,\cos(\varphi) \end{bmatrix} \\ &= a_1^2 + \ldots \\ &\ \ \vdots \\ &= a_1^2 + \cos(\delta)\,\sin^2(\varphi) + \cos(\delta)\,\sin^2(\theta)\,\cos^2(\varphi) \\ &= a_1^2 + \cos(\delta)\cdot\left(\sin^2(\varphi) + \sin^2(\theta)\,\cos^2(\varphi)\right) \\ &= a_1^2 + \cos(\delta)\cdot\left(1-\cos^2(\varphi) + \sin^2(\theta)\,\cos^2(\varphi)\right) \\ &= a_1^2 + \cos(\delta)\cdot\left(1-\cos^2(\varphi)\cdot\underbrace{\left(1-\sin^2(\theta)\right)}_{\cos^2(\theta)}\right) \\ &= a_1^2 + \cos(\delta)\cdot\left(1-\cos^2(\varphi)\cdot\cos^2(\theta)\right) \end{aligned}$$

Wegen $a_1 = \cos(\varphi)\cdot\cos(\theta)$ folgt aus der letzten Gleichung die behauptete Identität

$$D_{11} = a_1^2 \ + \ \cos(\delta)\cdot\left(1-a_1^2\right).$$

Aufgabe H 7. *Drehung um beliebige Drehachse – Fortsetzung*

Setzen Sie die Bearbeitung der Aufgabe H 1 fort. Prüfen Sie möglichst viele weitere Matrixeinträge nach.

Aufgabe H 8. *Etüden*

Berechnen Sie die folgenden Skalarprodukte von Vektoren bzw. Matrixprodukte von Zeilen- und Spaltenvektoren:

(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \; -\frac{1}{\sqrt{2}} \; -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ **(b)** $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \; \frac{1}{\sqrt{2}} \; -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

(c) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \; \frac{1}{\sqrt{2}} \; -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ **(d)** $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \; 0 \; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

Aufgabe H 9. *Drehung bei gegebener Ausgangslage und Ziellage*

Eine Kamera befinde sich anfangs in einer durch die Produktionsbedingungen vorgegebenen Orientierung. Die Lage der Kameraachsenvektoren bezüglich des Weltkoordinatensystems sei wie folgt:

$$\hat{x}_K = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =: u \qquad \hat{y}_K = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = v : \qquad \hat{z}_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: w.$$

Gesucht ist nun eine Drehung D, welche die Kamera in die „Normallage“ ohne *Tilt* und *Roll* zurückführt, dabei ist ein *Pan*-Winkel von 45° gewünscht. In Formeln:

- $u' := D(\hat{x}_K) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $w' := D(\hat{z}_K) = \hat{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $v' := D(\hat{y}_K)$, indem Sie das hierfür geeignete Kreuzprodukt ausrechnen.

(b) Bestimmen Sie die Matrix $[D]$ der Drehung D durch direkte Verwendung von Ausgangs- und Ziellage der drei Kameraachsenvektoren.
Hinweis: $[D] \cdot [\, u \; v \; w \,] = [\, u' \; v' \; w' \,]$.

(c) Können Sie eine Folge von Drehungen um die Weltkoordinatenachsen angeben, durch welche die Kamera von der Ausgangslage in die Ziellage gebracht wird?

Aufgabe H 10. *Ermittlung von Drehachse und Drehwinkel*

Wenn eine orthogonale Drehmatrix $[D] = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}$ gegeben ist, so lässt sich die Drehachse und der Drehwinkel der zugehörigen Drehung D bestimmen. Wenn $\vec{a}$ Achsenvektor der Drehung D ist, so bedeutet dies $D \cdot \vec{a} = \vec{a}$, denn der Achsenvektor wird von der Drehung nicht bewegt. Wir schreiben diese Gleichung skuzessive um:

$$D \cdot \vec{a} = \vec{a} \leftrightarrow D \cdot \vec{a} - \vec{a} = 0 \leftrightarrow D \cdot \vec{a} - E_3 \cdot \vec{a} = 0 \leftrightarrow (D - E_3) \cdot \vec{a} = 0$$

Wenn wir nun Elemente der Matrizen und Vektoren explizit bezeichnen, so lautet die letzte Gleichung wie folgt:

$$\left(\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0 \leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1-1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2-1 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0.$$

(a) Vollziehen Sie die folgende Argumentation nach:

- Die obige Gleichung bedeutet, dass ein Vektor $\vec{a}$ gesucht wird, der auf allen drei **Zeilen** der Matrix $(D - E_3)$ senkrecht steht.
- Überlegen Sie sich, in welchen Fällen eine oder mehrere Zeilen der Matrix $(D - E_3)$ nur Nullen enthalten. *Hinweis: Wenn D eine Drehung um die x-Achse beschreibt, so stehen in der obersten Zeile der Matrix D die Einträge $1 \quad 0 \quad 0$; in der obersten Zeile der Matrix $(D - E_3)$ stehen dann die Einträge $0 \quad 0 \quad 0$.*
- Wir betrachten nun alle anderen Fälle: Dann ist es so, dass sich $\vec{a}$ durch das Kreuzprodukt zweier beliebiger Zeilen der Matrix $(D - E_3)$ errechnen lässt. Zum Beispiel gilt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - 1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 - 1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie auf Grundlage des hier Gesagten die Achse der Drehungen mit den Drehmatrizen $D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ und $D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Zur Bestimmung des **Drehwinkels** δ einer orthogonalen Matrix $D = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$ setzen wir

$$\mathrm{Sp}(D) := u_1 + v_2 + w_3$$

und nennen $\mathrm{Sp}(D)$ die **Spur** der Matrix D. Den Drehwinkel δ erhalten wir mit der folgenden Formel (vgl. Vorlesungsfolien).

$$\cos(\delta) = \frac{\mathrm{Sp}(D) - 1}{2} \qquad \rightsquigarrow \qquad |\delta| = \arccos\left(\tfrac{\mathrm{Sp}(D)-1}{2}\right).$$

Wenn man einen Achsenvektor $\vec{a}$ gewählt hat, so lässt sich dem Drehwinkel δ einer orthogonalen Matrix D, sofern Sie nicht gerade eine Drehung um die x-Achse beschreibt, ein Vorzeichen im Sinne der Rechte-Hand-Regel wie folgt zuordnen:

Man betrachtet das Kreuzprodukt $\hat{x} \times \hat{u}$. Zeigt dieses Kreuzprodukt in den gleichen Halbraum wie $\vec{a}$, ist also $(\hat{x} \times \hat{u}) \cdot \vec{a}$ **positiv**, so setzen wir $\delta = +\arccos\left(\tfrac{\mathrm{Sp}(D)-1}{2}\right)$. Ist dagegen $(\hat{x} \times \hat{u}) \cdot \vec{a}$ **negativ**, so ist $\delta = -\arccos\left(\tfrac{\mathrm{Sp}(D)-1}{2}\right)$.

(c) Bestimmen Sie für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die orientierten (also mit Vorzeichen versehenen) Winkel der Drehungen mit den Drehmatrizen $[D_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ und $[D_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) Bestimmen Sie Drehachsenvektor und Drehwinkel für die Drehmatrix $[D_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Aufgabe H 11. *Klausuraufgabe aus dem Sommersemester 2017*

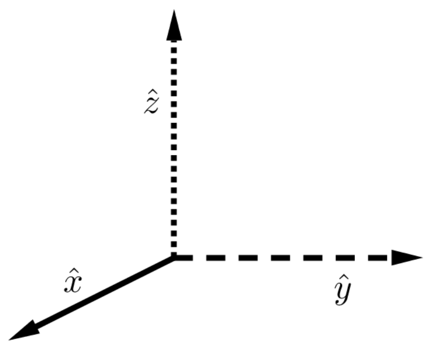
Der Begriff „Weltkoordinatensystem" bezeichne ein fest im Raum gewähltes kartesisches Koordinatensystem. Dessen Achsen sollen mit den Achsen des unten dargestellten Dreibeins $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ übereinstimmen.

(a) **Betrachten Sie** die Abbildung $D_{\hat{y},90^\circ} \circ D_{\hat{z},90^\circ}$, das ist eine 90-Grad-Drehung um die z-Achse des Weltkoordinatensystems ($D_{\hat{z},90^\circ}$), **gefolgt von** einer 90-Grad-Drehung um die y-Achse des Weltkoordinatensystems ($D_{\hat{y},90^\circ}$).

(i) **Skizzieren Sie** das (Bild-)Dreibein, das sich ergibt, wenn das dargestellte Dreibein $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ der Drehung $D_{\hat{z},90^\circ}$ unterworfen wird. (2)

(ii) **Skizzieren Sie** das (Bild-)Dreibein, das sich ergibt, wenn das dargestellte Dreibein $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ mit der Drehung $D_{\hat{y},90^\circ} \circ D_{\hat{z},90^\circ}$ abgebildet wird.

Wichtig: Wählen Sie die Bezeichungen gedrehter (Basis-)Vektoren so, dass Namenskonflikte vermieden werden. Hinweis: In Ermangelung von Farben wurden die Achsen durch unterschied-



liche Stricharten gekennzeichnet.

(b) **Stellen Sie** die Drehmatrizen $[D_{\hat{y},90^\circ}]$ und $[D_{\hat{z},90^\circ}]$ **auf** und **berechnen Sie** das Matrixprodukt

$$[D_{\hat{y},90^\circ}] \cdot [D_{\hat{z},90^\circ}] \,.$$

(c) **Prüfen und erläutern Sie**, ob und inwiefern Ihr Rechenergebnis von Teilaufgabe **(b)** zu Ihrem Bild-Dreibein aus Teilaufgabe **(a)** (ii) passt.

Stellen Sie sich einen starren Körper (z.B. eine Kamera oder ein Flugzeug) vor, dessen (veränderliche) Lage bzgl. des Weltkoordinatensystems beschrieben werden soll. Zu diesem Zweck führen wir in dem Körper ein lokales kartesisches Koordinatensystem $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ ein.

Die **Ausgangslage** des Körpers sei durch die Gleichungen

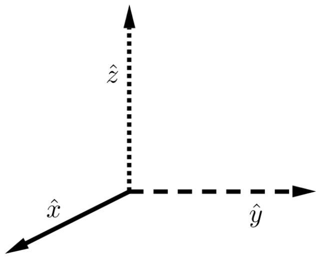
$$\hat{u}_1 = 0\,\hat{x} + 0\,\hat{y} + 1\,\hat{z}, \qquad \hat{v}_1 = 1\,\hat{x} + 0\,\hat{y} + 0\,\hat{z}, \qquad \hat{w}_1 = 0\,\hat{x} + 1\,\hat{y} + 0\,\hat{z}$$

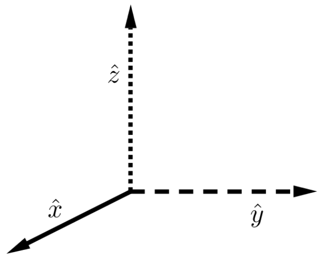
bzw. durch die Matrix $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ gegeben, seine **Endlage** durch die Gleichungen

$$\hat{u}_2 = 1\,\hat{x} + 0\,\hat{y} + 0\,\hat{z}, \qquad \hat{v}_2 = 0\,\hat{x} + 1\,\hat{y} + 0\,\hat{z}, \qquad \hat{w}_2 = 0\,\hat{x} + 0\,\hat{y} + 1\,\hat{z}$$

bzw. durch die Matrix $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) **Zeichnen Sie** jeweils mit geeigneter Beschriftung **im Diagramm links** die **Ausgangslage** der Körperachsen relativ zum Weltkoordinatensystem und **im Diagramm rechts** die **Endlage** der Körperachsen ein.





(e) Es gibt eine lineare Transformation D, welche den Körper von seiner Ausgangslage in die Endlage bringt. **Weisen Sie nach**, dass für die Matrix $[D]$ dieser Transformation die Beziehung $[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ gilt.

(f) **Begründen Sie**, dass die Matrix $[D]$ eine Drehung beschreibt (Stichworte: Ist die Matrix orthogonal, bilden ihre Spalten ein Rechtssystem?).

Im Folgenden analysieren Sie die Drehung D:

(g) **Drücken Sie** die Abbildung D als Hintereinanderausführung von Drehungen um Weltkoordinatenachsen der folgenden Form **aus**: $D = D_{\hat{z},\gamma} \circ D_{\hat{y},\beta} \circ D_{\hat{x},\alpha}$. Anders ausgedrückt: **Bestimmen Sie** die (Euler-)Winkel α, β und γ so, dass die obige Gleichung erfüllt ist.

*Hinweis: Sie brauchen die Eulerwinkel **nicht** unbedingt (mit den in der Vorlesung bereitgestellten Formeln) auszurechnen. Ein Lösungsweg, der auf Ihrer Anschauung bzw. auf Ihren Überlegungen zur Teilaufgabe **(a)** basiert, führt hier u.U. schneller ans Ziel.*

(h) **Bestimmen Sie** den zu D gehörigen Drehwinkel δ. Lösen Sie hierzu die Gleichung

$$\text{Sp}(D) = 2\cos(\delta) + 1$$

nach δ auf.

Hinweis: Für die hier zu untersuchende Abbildung D gilt Sp$(D) = 0$, denn die Summe der drei Diagonalelement der Matrix $[D]$ ergibt Null.

Tutoriumsübungen

Aufgabe T 5. *Kreuzprodukte schnell bestimmen*

(a) Wiederholen Sie die Eigenschaften des Kreuzproduktes. Machen Sie sich insbesondere Folgendes klar: Wenn $\vec{u} \neq 0$ und $\vec{v} \neq 0$ zwei Vektoren im Raum sind,

- so steht der Vektor $\vec{u} \times \vec{v} \neq 0$ **senkrecht** auf $\vec{u}$ und auf $\vec{v}$,
- so gilt für die Länge des Kreuzprodukt-Vektors $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \; \|\vec{v}\| \sin(\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}))$.
- Für die Richtung von $\vec{u} \times \vec{v}$ gilt die Rechte-Hand-Regel.

(b) Verifizieren Sie, die folgende Konsequenz der Eigenschaften des Kreuzproduktes:
Haben zwei aufeinander senkrecht stehende Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ jeweils die Länge 1, so ist auch die Länge des Kreuzprodukt-Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ gleich 1.

(c) Bestimmen Sie (möglichst ohne Rechnung) die folgenden Kreuzprodukte:
$\hat{x} \times \hat{y}, \quad \hat{y} \times \hat{x}, \quad \hat{x} \times \hat{z}, \quad \hat{z} \times \hat{y}, \quad -\hat{x} \times \hat{z}, \quad -\hat{x} \times \hat{y}$.

Aufgabe T 6. *In Ergänzung einer Präsenzaufgabe*

Schreiben Sie die einzelnen Matrizen der Drehungen in den folgenden Ausdrücken auf und multiplizieren Sie die Matrizen jeweils aus:

(a) $D_1 = D_{\hat{\mathbf{z}}, 90^\circ} \circ D_{\hat{\mathbf{y}}, 0^\circ} \circ D_{\hat{\mathbf{x}}, 90^\circ}$.

(b) $D_2 = D_{\hat{\mathbf{z}}, 90^\circ} \circ D_{\hat{\mathbf{y}}, 0^\circ} \circ D_{\hat{\mathbf{x}}, 180^\circ}$.

(c) $D_3 = D_{\hat{\mathbf{z}}, -90^\circ} \circ D_{\hat{\mathbf{y}}, 180^\circ} \circ D_{\hat{\mathbf{x}}, 0^\circ}$.

Aufgabe T 7. *Eigenschaften von Drehmatrizen*

Gegeben sei die Matrix $R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$. Wir bezeichnen die drei Spaltenvektoren mit u, v und w.

(a) Berechnen Sie die Länge jedes Spaltenvektors der Matrix R.

(b) Zeigen Sie, dass die drei Spaltenvektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen. Berechnen Sie hierzu die Skalarprodukte $u \cdot v$, $u \cdot w$ und $v \cdot w$.

(c) Ist die Gleichung $w = u \times v$ erfüllt?

Aufgabe T 8. *Drehung bei gegebener Ausgangs- und Ziellage 1*

Es sei $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix R der Drehung, welche das Vektoren-Tripel (u, v, w) auf das Vektoren-Tripel (u', v', w') abbildet.

Aufgabe T 9. *Drehung bei gegebener Ausgangs- und Ziellage 2*

Lösen Sie die Aufgabe H 4.

Aufgabe T 10. *Drehungen um beliebige Drehachsen*

In der Vorlesung wurde eine Formel für die Abbildungsmatrix der Drehung $D_{\hat{\mathbf{a}},\,\delta}$ mit Achsenvektor $\hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und Drehwinkel δ hergeleitet:

$$[D_{\hat{\mathbf{a}},\,\delta}] = \begin{bmatrix} a_1^2+\cos(\delta)\cdot\left(1-a_1^2\right) & a_1\cdot a_2\cdot(1-\cos(\delta))-a_3\cdot\sin(\delta) & a_1\cdot a_3\cdot(1-\cos(\delta))+a_2\cdot\sin(\delta) \\ a_1\cdot a_2\cdot(1-\cos(\delta))+a_3\cdot\sin(\delta) & a_2^2+\cos(\delta)\cdot\left(1-a_2^2\right) & a_2\cdot a_3\cdot(1-\cos(\delta))-a_1\cdot\sin(\delta) \\ a_1\cdot a_3\cdot(1-\cos(\delta))-a_2\cdot\sin(\delta) & a_2\cdot a_3\cdot(1-\cos(\delta))+a_1\cdot\sin(\delta) & a_3^2+\cos(\delta)\cdot\left(1-a_3^2\right) \end{bmatrix}$$

(a) Testen Sie diese Formel auf Plausibilität, indem Sie die Werte $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{x}}$, $\delta = \alpha$, $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{y}}$, $\delta = \beta$ und $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{z}}$, $\delta = \gamma$ einsetzen.

(b) Betrachten Sie den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und stellen Sie mithilfe der Formel die Abbildungsmatrix der Drehung $D_{\hat{\mathbf{b}},\,180^\circ}$ auf.

Aufgabe T 11. *Zerlegung einer Drehung: Eulerwinkel*

(a) Betrachten Sie Sie die Drehung D mit Drehmatrix $[D] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ und **bestimmen Sie** die Eulerwinkel α, β und γ so, dass $D = D_{\hat{\mathbf{z}},\,\gamma} \circ D_{\hat{\mathbf{y}},\,\beta} \circ D_{\hat{\mathbf{x}},\,\alpha}$ gilt.

(b) Veranschaulichen Sie die durch $D_{\hat{\mathbf{z}},\,\gamma} \circ D_{\hat{\mathbf{y}},\,\beta} \circ D_{\hat{\mathbf{x}},\,\alpha}$ gegebene Folge von Drehungen.

Wenn wir von *Pan*-, *Tilt*- und *Roll*-Bewegungen sprechen, meinen wir im Kontext dieser Lehreinheit das Folgende: **Zuerst** eine Drehung um die $\hat{\mathbf{z}}$-Achse (Pan), danach eine zweite Drehung um die bei der Pan-Bewegung enstandene (neue) $\hat{\mathbf{y}}'$-Achse (Tilt), schließlich eine dritte Drehung (Roll) um die nach der Pan- und Tilt-Bewegung entstandene $\hat{\mathbf{x}}''$-Achse.

(c) Überlegen Sie sich, welche Folge von Pan-, Tilt- und Roll-Bewegungen jeweils auf die gleiche Objektlage führt wie die Ausführung der Drehung D.