Mathematik und Simulation

Grundlagen der Medientechnik und Bildverarbeitung (MIB)

4

Prof. Dr. Thomas Schneider

Stand: 25.05.2022

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Inhalt

Bemerkung

zum Foliensatz

Bemerkung zum Foliensatz

Der Foliensatz zu diesem Kapitel wurde in Zusammenarbeit zwischen Prof. Dr. R. Lasowski und Prof. Dr. T. Schneider erstellt.

Komplexe Vektorräume

Auch über die Menge der komplexen Zahlen können Vektorräume definiert werden.

Beispiel eines komplexen Vektors: $x = \begin{pmatrix} 4+2i \\ -2+i \\ 3-2i \\ i \end{pmatrix}, x \in \mathbb{C}^4$

Für ein $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\mathbb{C}^n$ ein n-dimensionaler komplexer Vektorraum mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation.

Sei $y = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1+i \\ -4-2i \\ -i \end{pmatrix}, y \in \mathbb{C}^4$

Komponentenweise Addition: $x + y = \ldots$

Komplexe Vektorräume
Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier komplexen N-Vektoren ist definiert als:

$$x \cdot \overline{y} = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + ... + x_N\overline{y}_N = \sum_{n=0}^{N} x_n \cdot \overline{y}_n \tag{1}$$

Ähnlich wie im Reellen, wird durch das Skalarprodukt des Vektors mit sich selber eine Norm definiert:

$$x \cdot \overline{x} = x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + ... + x_N\overline{x}_N = \sum_{n=0}^{N} |x_n|^2 = \|x\|^2 \tag{2}$$

Beispiel:

$x \cdot \overline{y} = ...$

$x \cdot \overline{x} = ...$

Anwendungen

- N-te Einheitswurzeln $z^N = 1$
  - Diskrete Fourriertransformation (DFT)
  - FFT (Fast Fourier Transformation)
- ...

Diskrete Fourier-Transformation – Frequenzanalyse

Agenda

- Ursprung der Fourier-Analyse
- Das menschliches Ohr als Analysator des Frequenzspektrums von Schall
- Definition
- Verständnis der Definition
- Beispiele

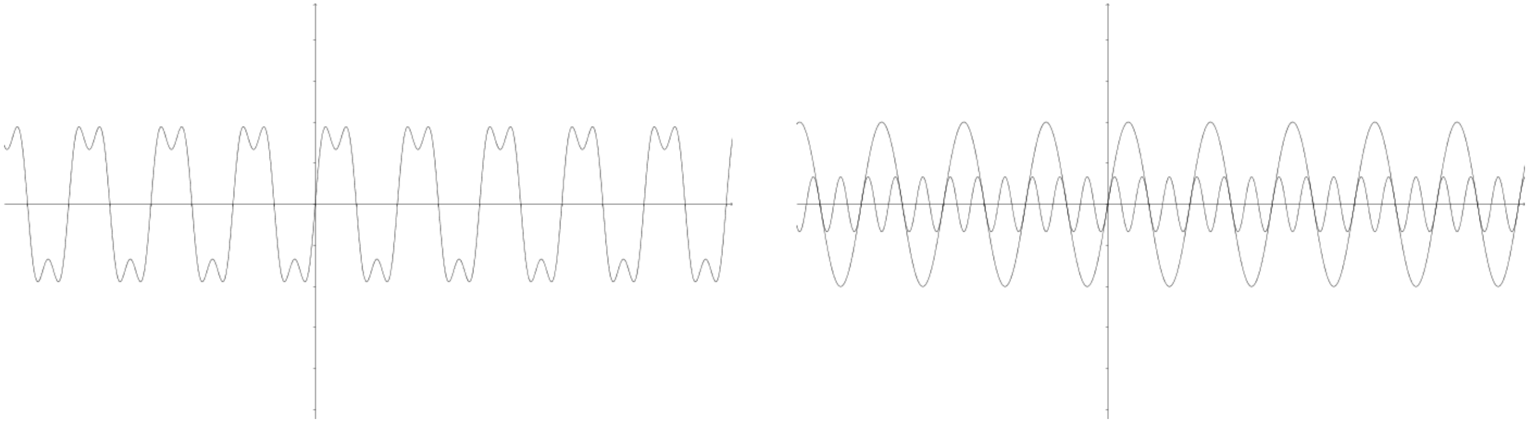
Diskrete Fourier-Transformation

Ursprung der Fourier-Analyse

- Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) hatte eine verrückte Idee (1807):
  Jede periodische Funktion kann als gewichtete Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenz dargestellt werden.
- Sie glauben es nicht?
- Dann geht es Ihnen wie Lagrange, Laplace, Poisson und anderen großen Mathematikern jener Zeit.
- Wurde nicht ins Englische übersetzt bis 1878!

Diskrete Fourier-Transformation

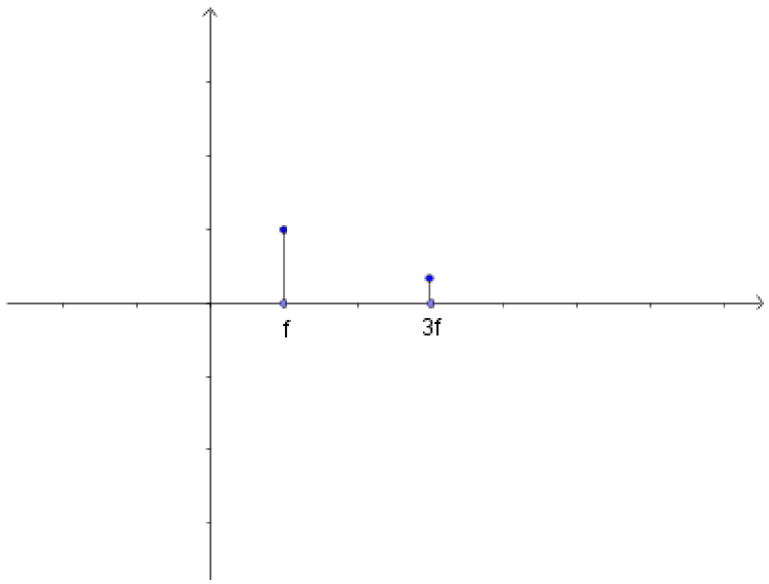
Beispiel: Überlagerung zweier Sinusschwingungen



Das Signal im linken Bild ergibt sich als die Addition der beiden Sinusschwingungen im rechten Bild.

Diskrete Fourier-Transformation

Frequenzspektrum



Durch die Fourierzerlegung würden die Frequenzanteile des Signals und die Amplitude der einzelnen Schwingungen, die zum Signal beigetragen haben, dargestellt.

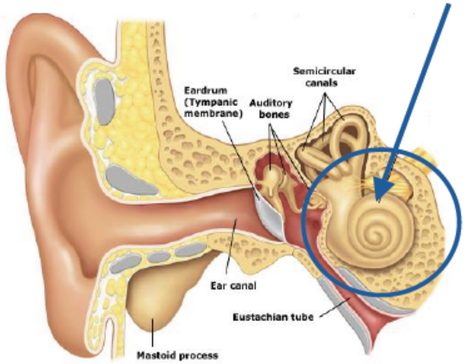
Diskrete Fourier-Transformation

Analogien: Prisma

Diskrete Fourier-Transformation

Ohr als Frequenzspektrums-Analysator

Die Cochlea des Innenohrs entnimmt dem Audiosignal die einzelnen harmonischen Bestandteile (Frequenzen) und leitet diese Information über den Gehörnerv zum Gehirn weiter.



Diskrete Fourier-Transformation

Praktische Bedeutung: Signalverarbeitung

Signalverarbeitung

Die Fourieranalyse ist unentbehrlich in der Signalverarbeitung.

- Filterentwurf durch Spezifikation im Frequenzbereich:
  - Tiefpassfilter:
    - dämpfen hohe Frequenzen
    - zur Elimination von Rauschen (das i.A. hochfrequent ist)
  - Hochpassfilter:
    - dämpfen tiefe Frequenzen (wie Brumm- oder Rumpelgeräusche)
  - Bandpassfilter:
    - lassen nur vorgegebenen Frequenzbereich passieren (z.B. mittlere Frequenzen zur Sprachübertragung)

Diskrete Fourier-Transformation
Praktische Bedeutung: Bildverarbeitung

Bildverarbeitung

- Ähnliche Rolle in der Bildverarbeitung:
  Grauwertbilder sind 2D-Signale
  Niedrige Frequenzen entsprechen großräumigen Bildstrukturen.
  Hohe Frequenzen verkörpern kleinskalige Details.

Aufgabenstellung

Es seien b_1 und b_2 zwei zueinander senkrechte Vektoren in der Ebene und v ein weiterer Vektor. Gesucht sind Zahlen v_1 und v_2 so, dass die Gleichung

$$v = v_1\, b_1 + v_2\, b_2$$

erfüllt ist.

Diskrete Fourier-Transformation

Erinnerung: Orthogonale Vektoren in der Ebene

Aufgabenstellung

Es seien b_1 und b_2 zwei zueinander senkrechte Vektoren in der Ebene und v ein weiterer Vektor. Gesucht sind Zahlen v_1 und v_2 so, dass die Gleichung

$$v = v_1\, b_1 + v_2\, b_2$$

erfüllt ist.

Lösungsansatz

Wir bilden zunächst das Skalarprodukt $v \cdot b_1$:

$$v \cdot b_1 = (v_1\, b_1 + v_2\, b_2) \cdot b_1 = v_1\, b_1 \cdot b_1 + v_2\, b_2 \cdot b_1\,.$$

Wegen $b_1 \perp b_2$ ist $b_2 \cdot b_1 = 0$, somit gilt $v \cdot b_1 = v_1\, b_1 \cdot b_1$, hieraus folgt

$$v_1 = \frac{v \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1}.$$

Eine analoge Rechnung ergibt

$$v_2 = \frac{v \cdot b_2}{b_2 \cdot b_2}.$$

Diskrete Fourier-Transformation

Erinnerung: Orthogonale Vektoren in der Ebene

Beispiel

Betrachte $b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sowie $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Dann gilt

$$v_1 = \frac{v \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$
$$v_2 = \frac{v \cdot b_2}{b_2 \cdot b_2} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

Beispiel

Betrachte $b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sowie $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{v \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \\
v_2 &= \frac{v \cdot b_2}{b_2 \cdot b_2} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

Probe

$$
\frac{3}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{4}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{25}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}
$$

Diskrete Fourier-Transformation

Kontext

Rahmendaten

- Wir betrachten abgetastete Signale f mit fester Anzahl N von (äquidistanten) Abtaststellen $\rightsquigarrow$ $f = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix}$.

Rahmendaten

- Wir betrachten abgetastete Signale f mit fester Anzahl N von (äquidistanten) Abtaststellen $\rightsquigarrow$ $f = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix}$.
- Wir verwenden die N-te Hauptseinheitswurzel $w_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$.

Diskrete Fourier-Transformation
Kontext

Rahmendaten

- Wir betrachten abgetastete Signale f mit fester Anzahl N von (äquidistanten) Abtaststellen $\rightsquigarrow$ $f = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix}$.
- Wir verwenden die N-te Hauptseinheitswurzel $w_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$.
- Als Basisvektoren verwenden wir $s_0, s_1, \ldots, s_{N-1}$ mit

$$s_k = \begin{pmatrix} \left(w_N^k\right)^0 \\ \left(w_N^k\right)^1 \\ \vdots \\ \left(w_N^k\right)^{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(e^{i\frac{2\pi\cdot k}{N}}\right)^0 \\ \left(e^{i\frac{2\pi\cdot k}{N}}\right)^1 \\ \vdots \\ \left(e^{i\frac{2\pi\cdot k}{N}}\right)^{N-1} \end{pmatrix}.$$

Diskrete Fourier-Transformation

Kontext

Rahmendaten

- Wir betrachten abgetastete Signale f mit fester Anzahl N von (äquidistanten) Abtaststellen $\rightsquigarrow$ $f = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix}$.
- Wir verwenden die N-te Hauptseinheitswurzel $w_N = e^{i\,\frac{2\pi}{N}}$.
- Als Basisvektoren verwenden wir $s_0, s_1, \ldots, s_{N-1}$ mit

$$s_k = \begin{pmatrix} \left(w_N^k\right)^0 \\ \left(w_N^k\right)^1 \\ \vdots \\ \left(w_N^k\right)^{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(e^{i\,\frac{2\pi\cdot k}{N}}\right)^0 \\ \left(e^{i\,\frac{2\pi\cdot k}{N}}\right)^1 \\ \vdots \\ \left(e^{i\,\frac{2\pi\cdot k}{N}}\right)^{N-1} \end{pmatrix}.$$

- Für das Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^N$ verwenden wir auch die Bezeichnung $\langle\ \mid\ \rangle$ mit

$$\langle a \mid b \rangle = a_0\,\overline{b_0} + a_1\,\overline{b_1} + \ldots a_{N-1}\,\overline{b_{N-1}}.$$

Diskrete Fourier-Transformation

Kontext

DFT – Entwicklung nach Orthogonalbasis

- Die Basisvektoren $s_0,\ s_1, \ldots,\ s_{N-1}$ sind bezüglich des Skalarprodukts $\langle\ |\ \rangle$ paarweise orthogonal.

Diskrete Fourier-Transformation

Kontext

DFT – Entwicklung nach Orthogonalbasis

- Die Basisvektoren $s_0,\ s_1, \ldots,\ s_{N-1}$ sind bezüglich des Skalarprodukts $\langle \mid \rangle$ paarweise orthogonal.
- Für alle $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ gilt $\langle s_k \mid s_k \rangle = N$

Diskrete Fourier-Transformation

Kontext

DFT – Entwicklung nach Orthogonalbasis

- Die Basisvektoren $s_0,\ s_1, \ldots,\ s_{N-1}$ sind bezüglich des Skalarprodukts $\langle\ \big|\ \rangle$ paarweise orthogonal.
- Für alle $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ gilt $\langle s_k \ \big|\ s_k \rangle = N$
- Die DFT löst die Aufgabe, zu einem gegeben Wertevektor f komplexe Zahlen $\hat{f}(0),\ \hat{f}(1), \ldots,\ \hat{f}(N-1)$ zu finden mit

$$f = \hat{f}(0)\, s_0 + \hat{f}(1)\, s_1 + \ldots + \hat{f}(N-1)\, s_{N-1}.$$

Diskrete Fourier-Transformation

Kontext

DFT – Entwicklung nach Orthogonalbasis

- Die DFT löst die Aufgabe, zu einem gegeben Wertevektor f komplexe Zahlen $\hat{f}(0), \hat{f}(1), \ldots, \hat{f}(N-1)$ zu finden mit

$$f = \hat{f}(0)\, s_0 + \hat{f}(1)\, s_1 + \ldots + \hat{f}(N-1)\, s_{N-1}.$$

DFT – Entwicklung nach Orthogonalbasis

- Die DFT löst die Aufgabe, zu einem gegeben Wertevektor f komplexe Zahlen $\hat{f}(0), \hat{f}(1), \ldots, \hat{f}(N-1)$ zu finden mit

$$f = \hat{f}(0)\, s_0 + \hat{f}(1)\, s_1 + \ldots + \hat{f}(N-1)\, s_{N-1}.$$

- Analog zu den Formeln auf Folie 13 setzen wir

$$\begin{aligned}
\hat{f}(0) &= \frac{\langle f \mid s_0 \rangle}{\langle s_0 \mid s_0 \rangle} = \frac{1}{N} \langle f \mid s_0 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cdot e^{-i \frac{2\pi \cdot n \cdot 0}{N}} \\
\hat{f}(1) &= \frac{\langle f \mid s_1 \rangle}{\langle s_1 \mid s_1 \rangle} = \frac{1}{N} \langle f \mid s_1 \rangle == \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cdot e^{-i \frac{2\pi \cdot n \cdot 1}{N}} \\
\vdots &= \vdots \\
\hat{f}(N-1) &= \frac{\langle f \mid s_{N-1} \rangle}{\langle s_{N-1} \mid s_{N-1} \rangle} = \frac{1}{N} \langle f \mid s_{N-1} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cdot e^{-i \frac{2\pi \cdot n \cdot (N-1)}{N}}
\end{aligned}$$

Diskrete Fourier-Transformation

(DFT)

Definition

Die diskrete Fourier-Transformation (DFT) einer Folge $x(n)$ der Länge N mit $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ ist die Folge der DFT-Koeffizienten:

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-i\frac{2\pi nk}{N}}, k = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

$x(n)$ kann ein Signal sein, welches im Ortsbereich oder im Zeitbereich abgetastet wurde und somit als diskrete Folge vorliegt. Wir möchten den Frequenzgehalt dieses Signals ermitteln und repräsentieren das Signal in Abhängigkeit der Frequenz k als $X(k)$.
Alternative Notation: Wertevektor: f, Fouriertransformierte: $\hat{f}$.

Diskrete Fourier-Transformation

Zusammenhang mit N-ten Einheitswurzeln

Erläuterung

Wir betrachten $s_k(n) = (W_N^k)^n = e^{i\frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}}$:

Diskrete Fourier-Transformation

Zusammenhang mit N-ten Einheitswurzeln

Erläuterung

Wir betrachten $s_k(n) = (W_N^k)^n = e^{i\frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}}$:

- s_k ist ein Vektor mit N Einträgen. Jeder Eintrag in s_k ist eine Potenz der k-ten Einheitswurzel, die Exponenten nehmen hierbei die Werte $n = 0, 1 \ldots N - 1$ an.

Diskrete Fourier-Transformation

Zusammenhang mit N-ten Einheitswurzeln

Erläuterung

Wir betrachten $s_k(n) = (W_N^k)^n = e^{i\frac{2\pi\cdot k\cdot n}{N}}$:

- s_k ist ein Vektor mit N Einträgen. Jeder Eintrag in s_k ist eine Potenz der k-ten Einheitswurzel, die Exponenten nehmen hierbei die Werte $n = 0, 1 \dots N-1$ an.
- Der Parameter k gibt physikalisch die **Frequenz** an: z.B. ergibt sich für $k = 1$ der Ausdruck $e^{i\frac{2\pi\cdot 1\cdot n}{N}}$. Die Funktion $n \mapsto e^{i\frac{2\pi\cdot 1\cdot n}{N}}$ ist periodisch mit Periodenlänge $T_1 = N$, denn
$$s_1(n+N) = e^{i\frac{2\pi\cdot 1\cdot(n+N=}{N}} = s_1(n).$$
Die zugehörige Frequenz ist $f_1 = \frac{1}{N}$.
Für $k = 2$ ergibt sich die Funktion $n \mapsto e^{i\frac{2\pi\cdot 2\cdot n}{N}}$. Diese hat Periodenlänge $T_2 = \frac{N}{2}$, die Frequenz ist $f_2 = \frac{1}{T_2} = 2f_1$ etc.

Diskrete Fourier-Transformation

Zusammenhang mit N-ten Einheitswurzeln

Erläuterung

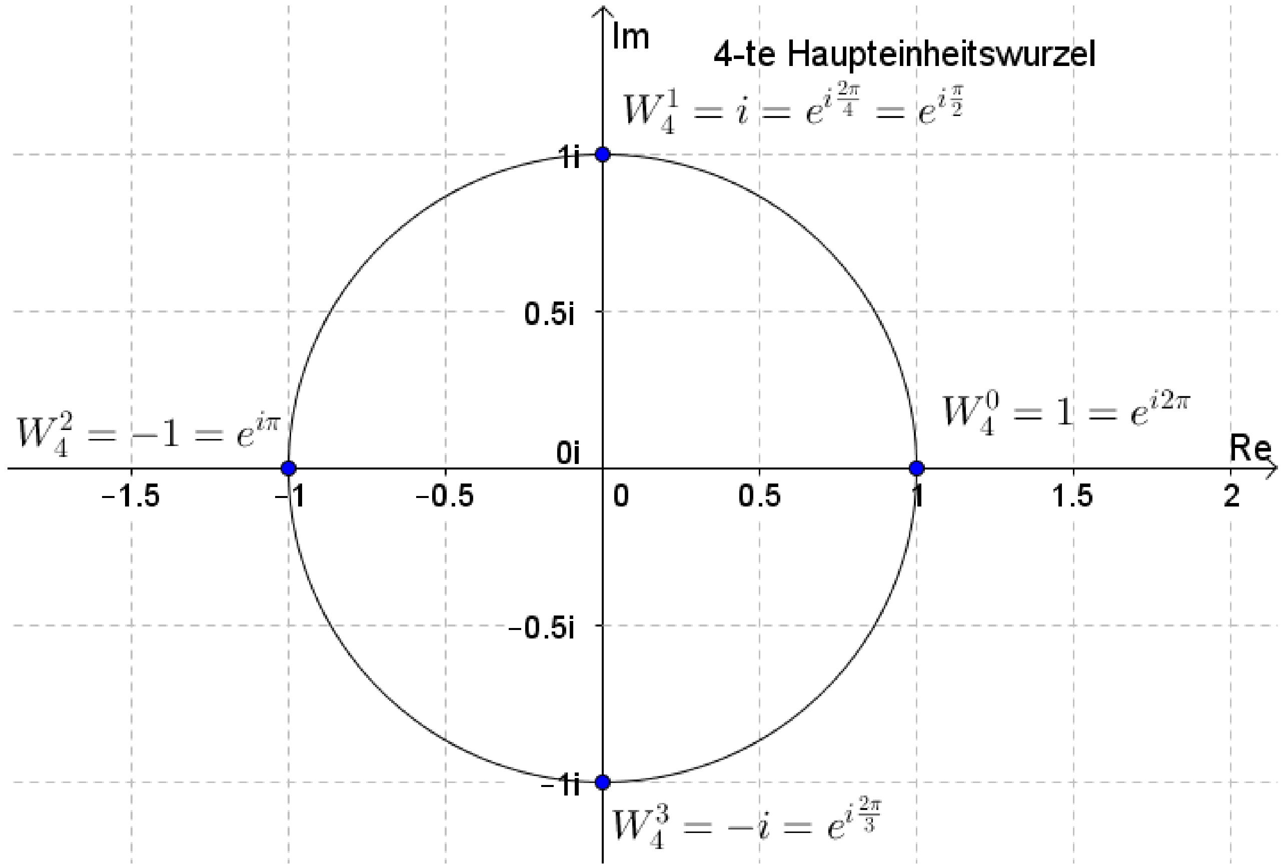
Wir betrachten $s_k(n) = (W_N^k)^n = e^{i\frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}}$:

- s_k ist ein Vektor mit N Einträgen. Jeder Eintrag in s_k ist eine Potenz der k-ten Einheitswurzel, die Exponenten nehmen hierbei die Werte $n = 0, 1 \ldots N - 1$ an.
- Der Parameter k gibt physikalisch die **Frequenz** an: z.B. ergibt sich für $k = 1$ der Ausdruck $e^{i\frac{2\pi \cdot 1 \cdot n}{N}}$. Die Funktion $n \mapsto e^{i\frac{2\pi \cdot 1 \cdot n}{N}}$ ist periodisch mit Periodenlänge $T_1 = N$, denn
$$s_1(n + N) = e^{i\frac{2\pi \cdot 1 \cdot (n+N=}{N}} = s_1(n).$$
Die zugehörige Frequenz ist $f_1 = \frac{1}{N}$.
Für $k = 2$ ergibt sich die Funktion $n \mapsto e^{i\frac{2\pi \cdot 2 \cdot n}{N}}$. Diese hat Periodenlänge $T_2 = \frac{N}{2}$, die Frequenz ist $f_2 = \frac{1}{T_2} = 2f_1$ etc.
- Man kann für jeden Vektor s_k bzw. (jede Frequenz k) die diskreten Werte $s_k(0)$, $s_k(1), \ldots, s_k(N - 1)$ getrennt nach Realteil und ihren Imaginärteil betrachten.
- Beispiele für $N = 4$ und $N = 8$ auf den nächsten Folien.

Diskrete Fourier-Transformation

Visualisierung der Basisfunktionen für $N = 4$

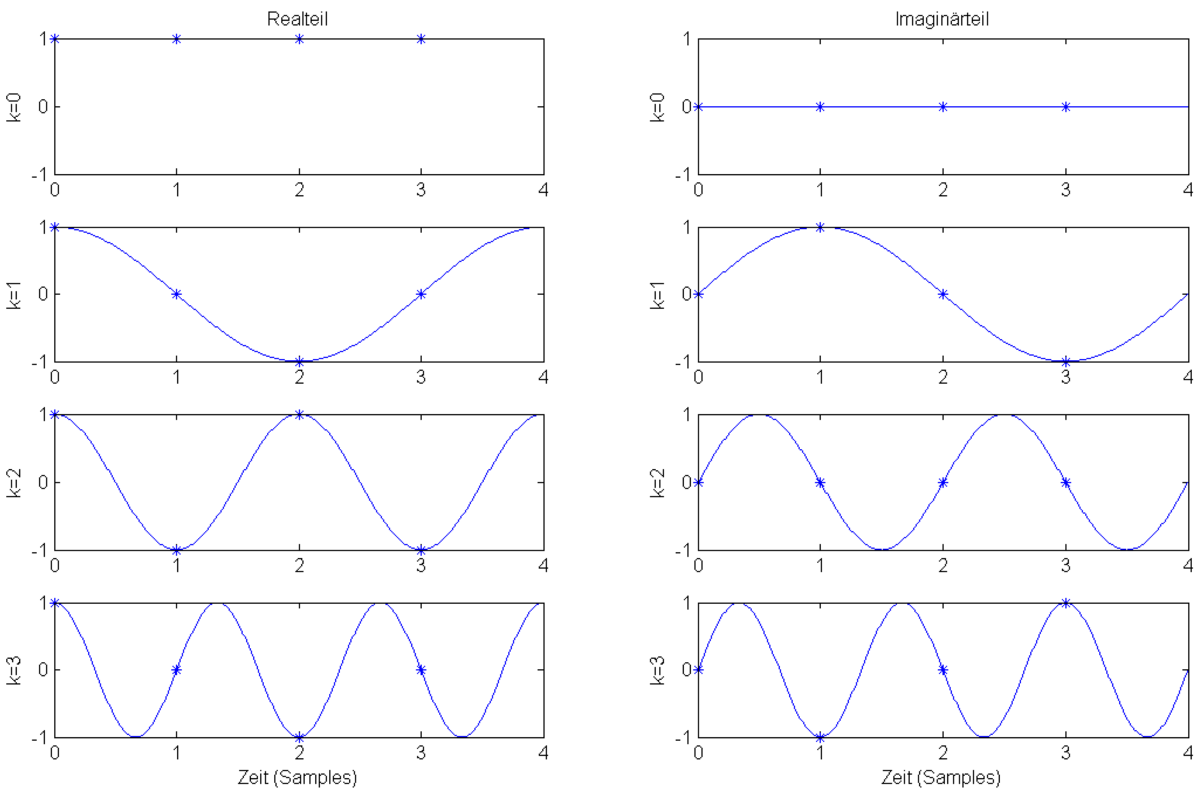
Die 4-ten Einheitswurzeln repräsentieren Basisfunktionen mit Frequenzen $k = 0, 1, 2, 3$:



Diskrete Fourier-Transformation

Visualisierung der Basisfunktionen für $N = 4$

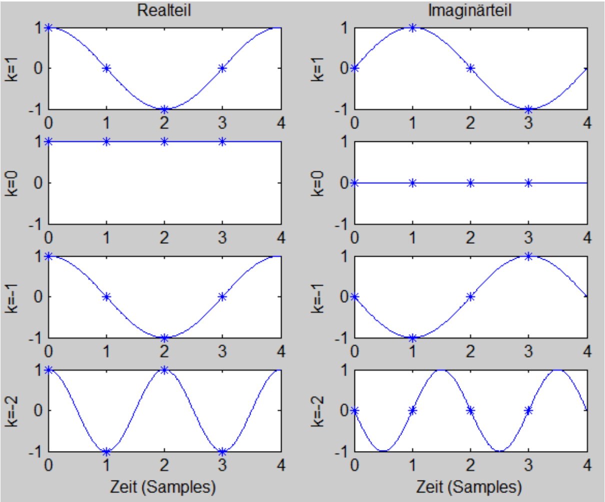
Die 4-ten Einheitswurzeln werden in Real- und Imaginärteil aufgeteilt und an vier Punkten abgetastet. Die Berechnung der Vier-Punkt-DFT-Vektoren wird in der übernächste Folie gezeigt.



Diskrete Fourier-Transformation

Visualisierung der Basisfunktionen für $N = 4$

Wie man in der vorherigen Folie sieht, entsteht ein **„Aliasing“** für die Frequenz $k = 3$. Wenn Sie die abgetasteten Punkte verbinden, dann entspricht der Kosinus und Sinus der Frequenz $k = -1$, d.h. einer Bewegung im Uhrzeigersinn (und nicht einer Schwingung die 3-mal so viele Wellen enthält wie für $k = 1$). Die Frequenzabtastung erfolgt tatsächlich von $-2, -1, 0, 1$. In den Übungen werden wir sehen, dass sich Sinus und Kosinus als Überlagerung von Schwingungen mit positiven und negativen Frequenzen darstellen lassen.



Diskrete Fourier-Transformation

Bestimmung der abgetasteten komplexen Basisfunktionen für $N = 4$

$$s_0(n) = e^{i\frac{2\pi \cdot n \cdot 0}{4}} = \cos\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot 0}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot 0}{4}\right)$$

$$s_1(n) = e^{i\frac{2\pi \cdot n \cdot 1}{4}} = \cos\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot 1}{4}\right) + + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot 1}{4}\right)$$

$$s_2(n) = e^{i\frac{2\pi \cdot n \cdot 2}{4}} = \cos\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot 2}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot 2}{4}\right)$$

$$s_3(n) = e^{i\frac{2\pi \cdot n \cdot 3}{4}} = \cos\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot 3}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot 3}{4}\right)$$

für $n = 0, 1, 2, 3$

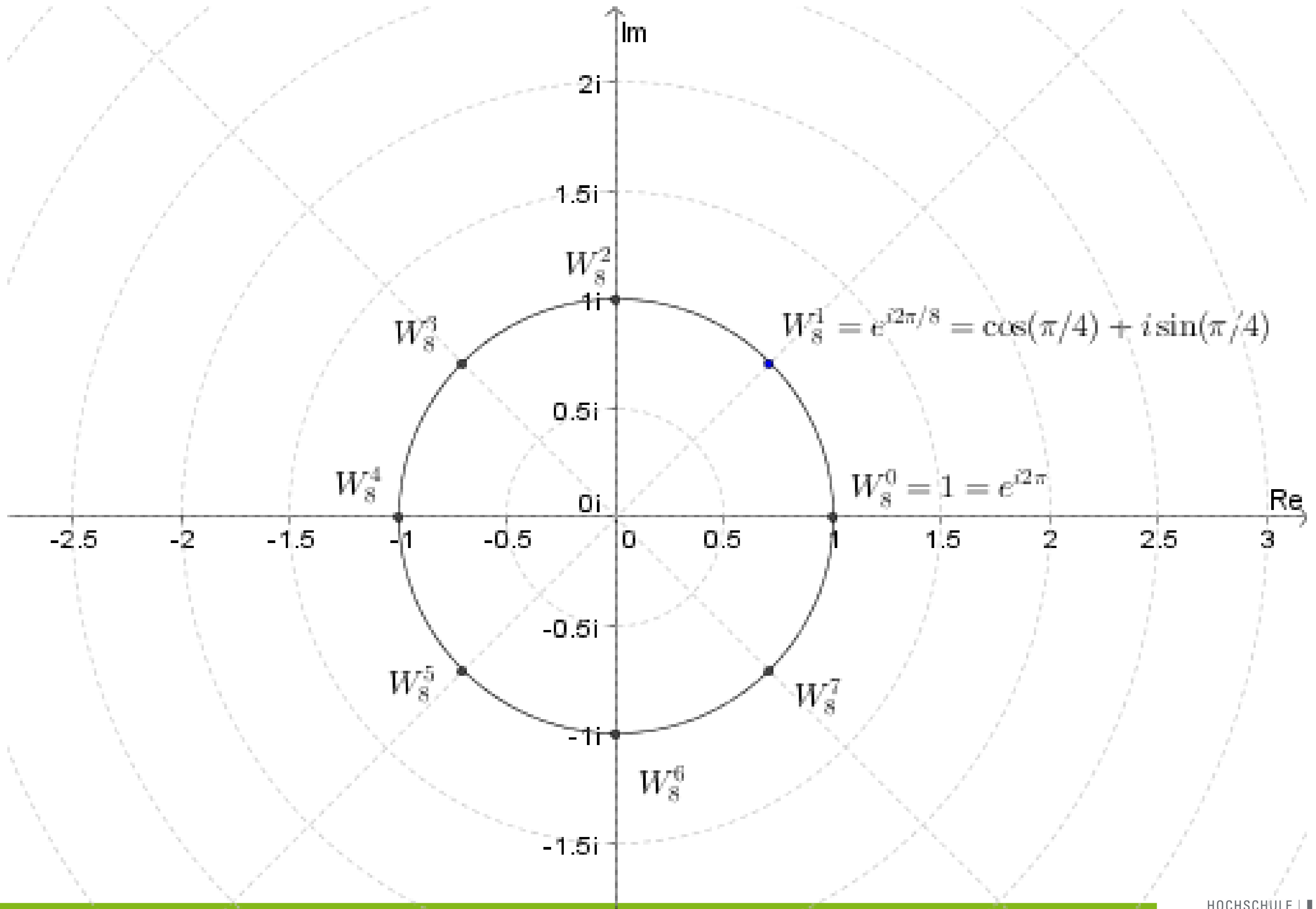
Damit ergeben sich die 4-Punkt-DFT-Vektoren:

$$s_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix},$$

Diskrete Fourier-Transformation

Visualisierung der komplexen Basisfunktionen für $N = 8$

Achte Einheitswurzeln:

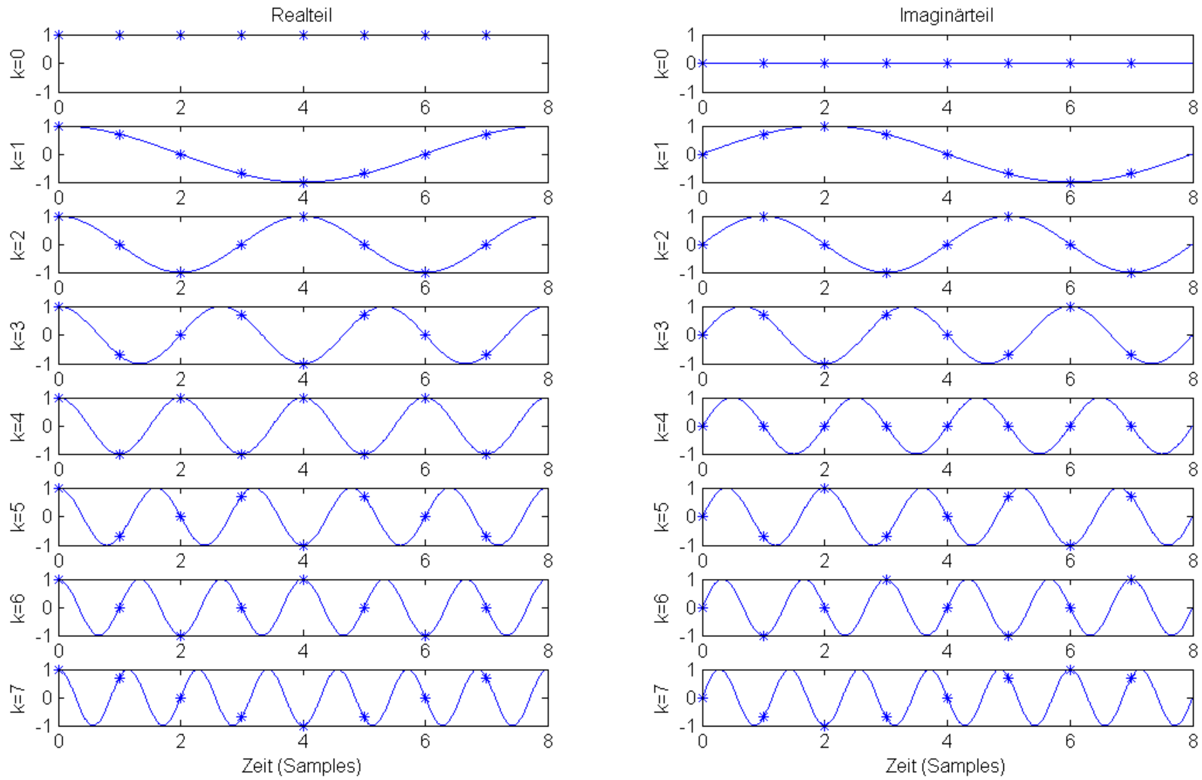


HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Diskrete Fourier-Transformation

Visualisierung der komplexen Basisfunktionen für $N = 8$

Acht-Punkt-DFT:



Einführendes Beispiel: Signal mit zwei Werten

Projektion auf den 2-Punkt DFT Basis-Vektoren.

$$s_0(n) = e^{i\frac{2\pi \cdot n \cdot 0}{2}},$$
$$s_1(n) = e^{i\frac{2\pi \cdot n \cdot 1}{2}},$$

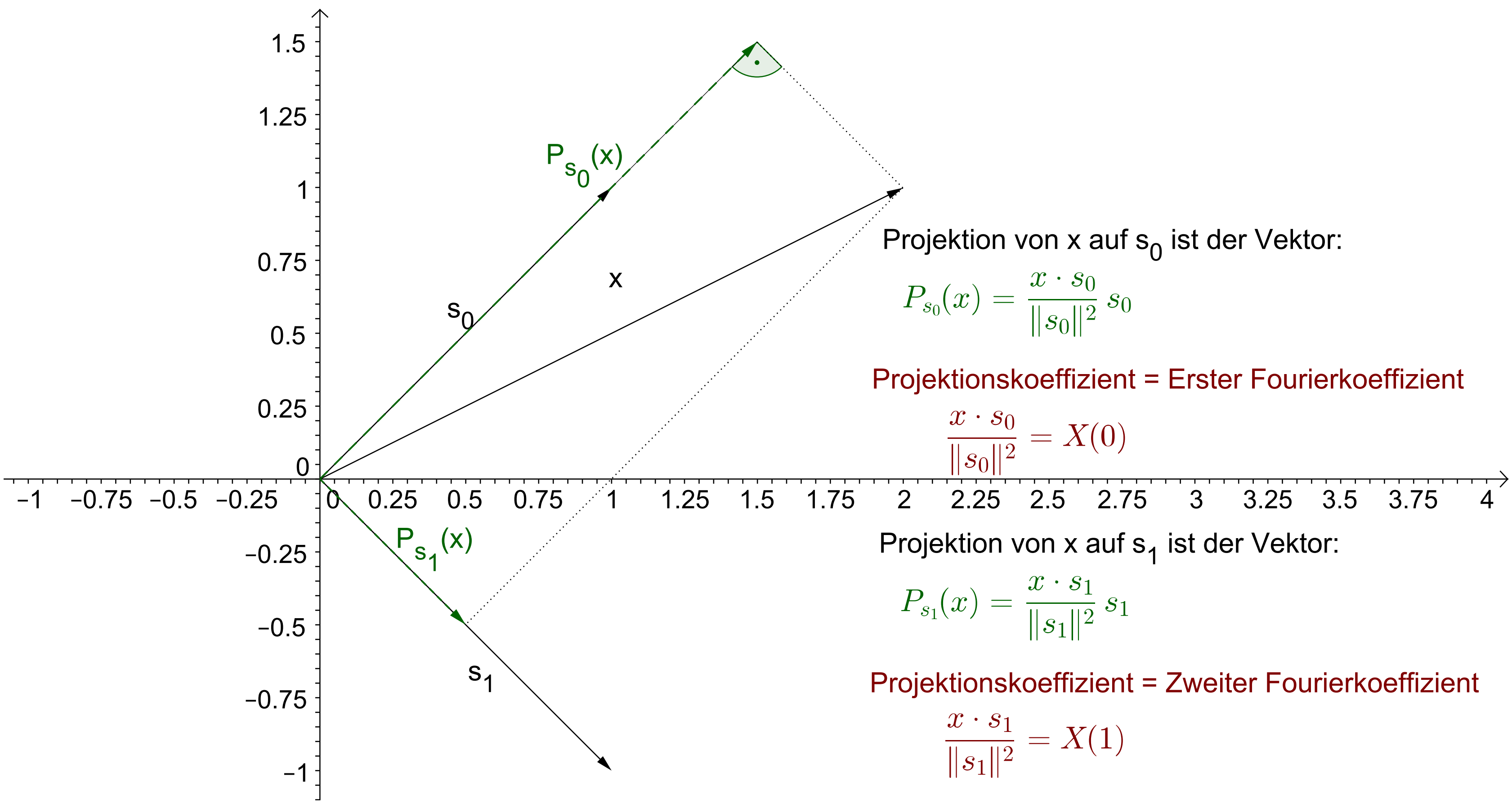
für $n = 0, 1$.

$$s_0(n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s_1(n) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wie stehen s_0 und s_1 zueinander? Was ist $\|s_0(n)\|^2$ und $\|s_1(n)\|^2$?
$X(0) = ..$
$X(1) = ..$

Orthogonale Projektion

2 Punkt DFT: Projektion auf die Komplex Exponentiellen für N=2



Projektion von x auf s_0 ist der Vektor:

$$P_{s_0}(x) = \frac{x \cdot s_0}{\|s_0\|^2}\, s_0$$

Projektionskoeffizient = Erster Fourierkoeffizient

$$\frac{x \cdot s_0}{\|s_0\|^2} = X(0)$$

Projektion von x auf s_1 ist der Vektor:

$$P_{s_1}(x) = \frac{x \cdot s_1}{\|s_1\|^2}\, s_1$$

Projektionskoeffizient = Zweiter Fourierkoeffizient

$$\frac{x \cdot s_1}{\|s_1\|^2} = X(1)$$

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Verständnis der DFT-Definition

Orthogonalität der komplexen Basisfunktionen

DFT

- Die Basisvektoren $s_0, s_1, \ldots, s_{N-1}$ sind bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot \mid \rangle$ paarweise orthogonal.

Verständnis der DFT-Definition

Orthogonalität der komplexen Basisfunktionen

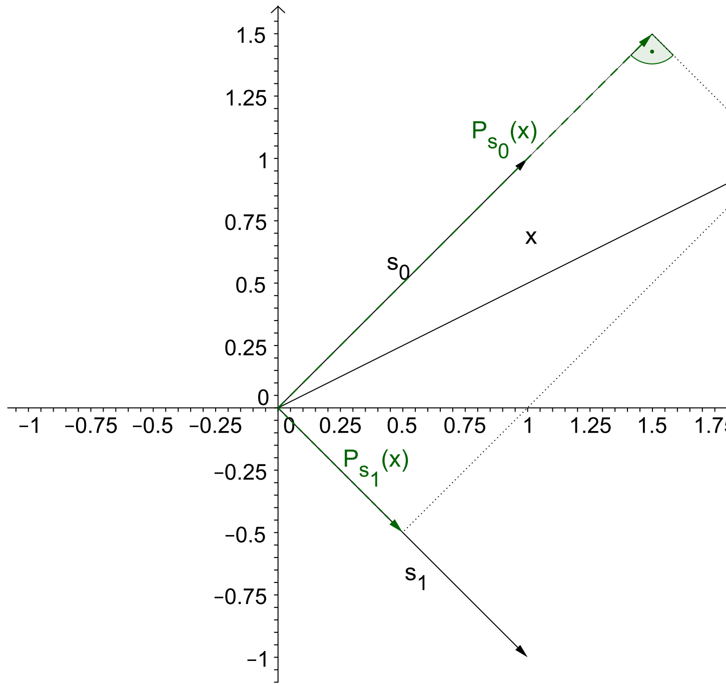
DFT

- Die Basisvektoren $s_0, s_1, \ldots, s_{N-1}$ sind bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot \mid \rangle$ paarweise orthogonal.
- Für alle $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle s_k \mid s_k \rangle &= \|s_k\|^2 \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi nk}{N}} e^{-i\frac{2\pi nk}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} e^0 \\
&= \underbrace{e^0 + e^0 + \ldots + e^0}_{N-mal} \\
&= \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{N-mal} = N
\end{aligned}$$

Wie gewinnt man die ursprüngliche Folge $x(n)$ aus $X(k)$ zurücl

Beispiel 2 Punkt DFT



Projektion von x auf s_0 ist der Vektor:

$$P_{s_0}(x) = \frac{x \cdot s_0}{\|s_0\|^2}\, s_0$$

Projektionskoeffizient = Erster Fourierkoeffizient

$$\frac{x \cdot s_0}{\|s_0\|^2} = X(0)$$

Projektion von x auf s_1 ist der Vektor:

$$P_{s_1}(x) = \frac{x \cdot s_1}{\|s_1\|^2}\, s_1$$

Projektionskoeffizient = Zweiter Fourierkoeffizient

$$\frac{x \cdot s_1}{\|s_1\|^2} = X(1)$$

Wie man in der Graphik sieht ist $x = P_{s_0}(x) + P_{s_1}(x) = X(0)s_0 + X(1)s_1$.

Allgemeine Definition
Inverse Diskrete Fourier Transformation (IDFT)

Wir gewinnen die ursprüngliche Folge $x(n)$ aus den DFT - Koeffizienten zurück, indem wir die Projektionen von x auf die Basisvektoren s_k aufsummieren :

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, s_k(n), n = 0, 1, 2..., N - 1 \tag{3}$$

mit $s_k(n) = e^{i\frac{2\pi nk}{N}}$.