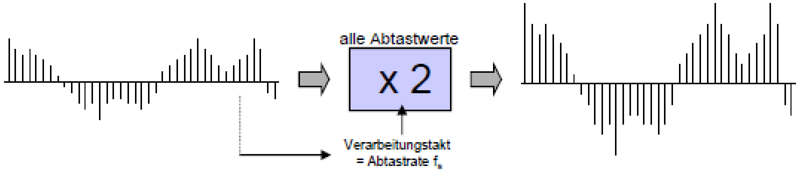
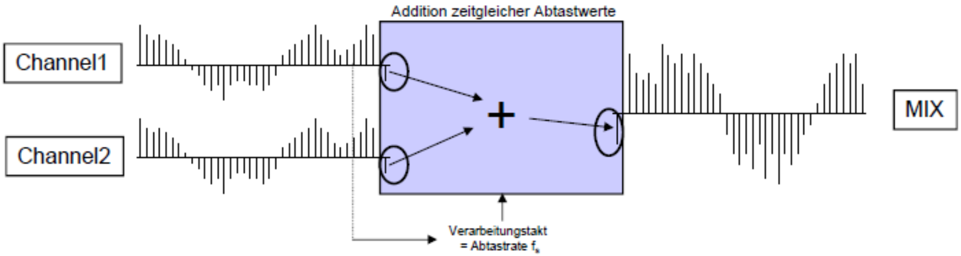
Prinzipien der digitalen ***Signalverarbeitung*** am Beispiel AUDIO

Einfache Signalverarbeitungs-Beispiele im Zeitbereich:

Beispiel: *digitale Verstärkung* (hier: Amplituden-Verdoppelung)



Beispiel: *digitaler Mix* (Summenbildung)



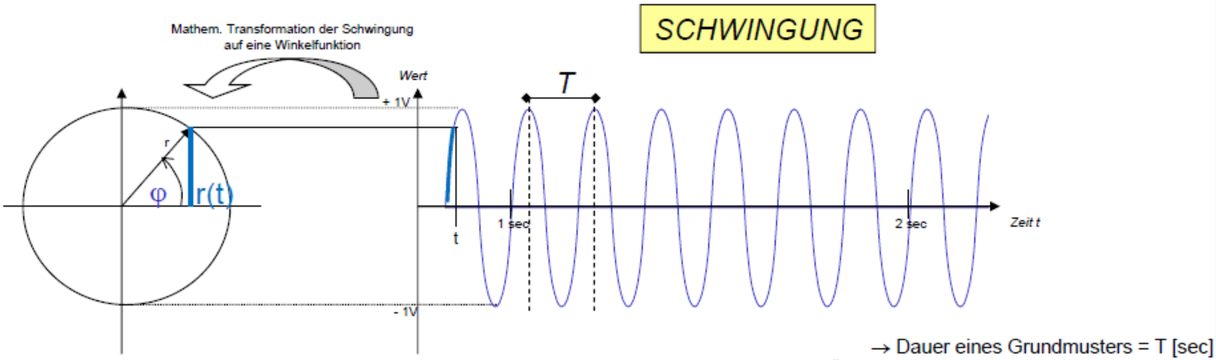
⇒ *Signalverarbeitung = getaktete (Bit-) Rechenoperationen*

Repetitorium:

Fourier

Fourier in a nutshell

Mathematische Beschreibung von schwingenden Phänomenen:



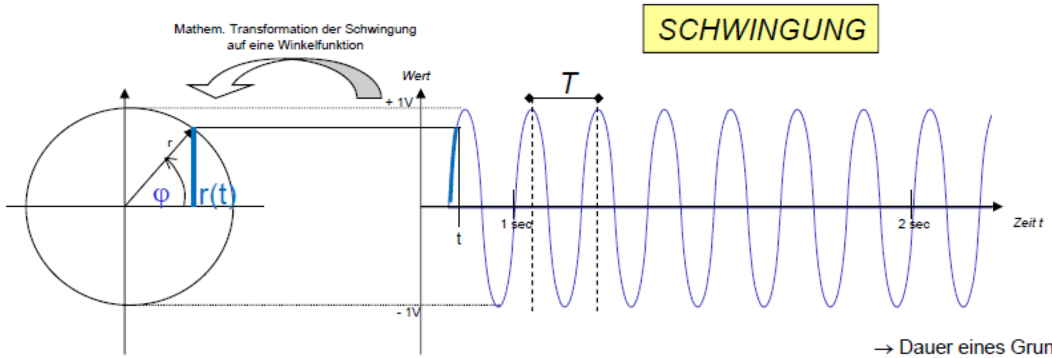
→ Dauer eines Grundmusters = T [sec]
→ FREQUENZ ***f*** = HÄUFIGKEIT des Musters = 1 x pro T = 1 / T
normierte *Einheit*: pro Sekunde = [sec^{-1}] = [Hz]

Mathematische Beschreibung:

$$\boldsymbol{r(t)} = |\boldsymbol{r}| \ \mathbf{sin}\left[\left(\frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{T}}\right)\boldsymbol{t} + \boldsymbol{\varphi_0}\right]$$

$$= \mathbf{1}\,\boldsymbol{V} \cdot \sin\,[(2\pi f)\ t + \boldsymbol{\varphi_0}] = 1\ \mathrm{V} \cdot \sin\,[(2\pi\cdot 6\mathrm{Hz})\ t + \mathbf{0}^{\circ}]$$

Mathematische Beschreibung von schwingenden Phänomenen:



→ Dauer eines Grundmusters = T [sec]

→ FREQUENZ ***f*** = HÄUFIGKEIT des Musters = 1 x pro T = 1 / T

normierte *Einheit*: pro Sekunde = [sec^{-1}] = [Hz]

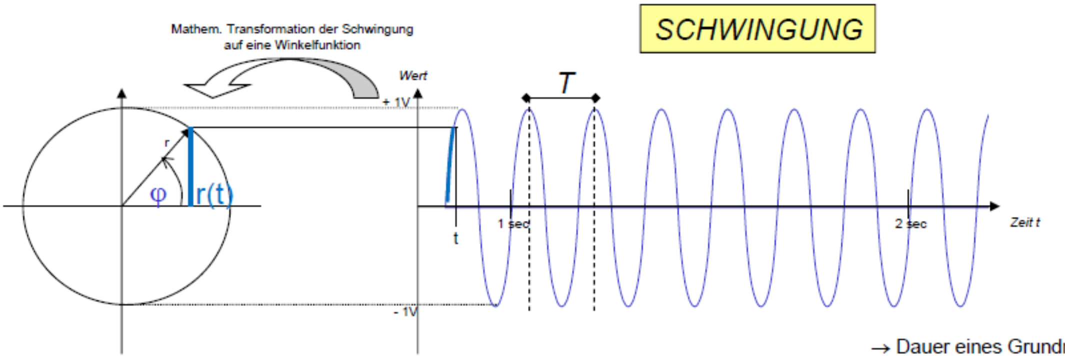
Mathematische Beschreibung:

$$\boldsymbol{r(t)} = \boldsymbol{|r|} \ \mathbf{sin}\left[\left(\frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{T}}\right)\boldsymbol{t} + \boldsymbol{\varphi_0}\right]$$

Amplitude

$$= \mathbf{1}\ \boldsymbol{V} \cdot \sin\left[(2\pi f)\ \mathrm{t} + \boldsymbol{\varphi_0}\right] = 1\ \mathrm{V} \cdot \sin\left[(2\pi \cdot 6\mathrm{Hz})\ \mathrm{t} + \mathbf{0}^{\circ}\right]$$

Mathematische Beschreibung von schwingenden Phänomenen:



→ Dauer eines Grundmusters = T [sec]
→ FREQUENZ ***f*** = HÄUFIGKEIT des Musters = 1 x pro T = 1 / T
normierte *Einheit*: pro Sekunde = [sec^{-1}] = [Hz]

Mathematische Beschreibung:

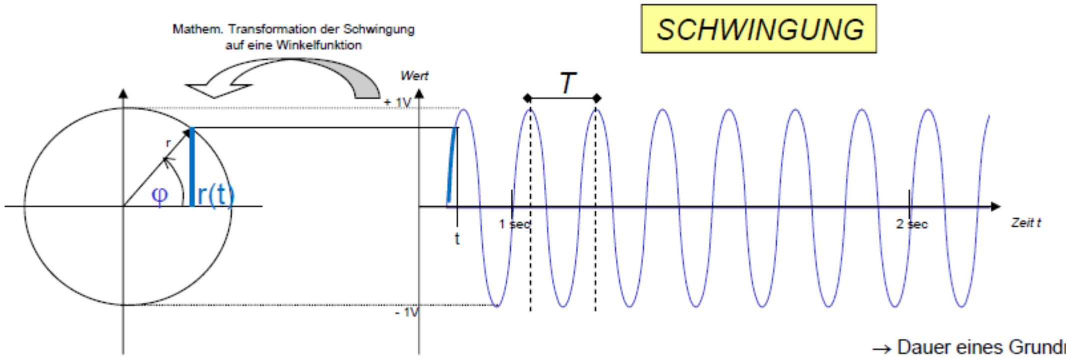
$$\boldsymbol{r(t)} = |\boldsymbol{r}|\ \mathbf{sin}\left[\left(\frac{2\pi}{T}\right)\boldsymbol{t} + \boldsymbol{\varphi_0}\right]$$

Frequenz

$$= \mathbf{1}\,\boldsymbol{V} \cdot \sin\left[(2\pi f)\ t + \boldsymbol{\varphi_0}\right] = 1\ \mathrm{V} \cdot \sin\left[(2\pi\cdot 6\mathrm{Hz})\ t + \mathbf{0}^{\circ}\right]$$

Abk. „Kreisfrequenz“

Mathematische Beschreibung von schwingenden Phänomenen:



→ Dauer eines Grundmusters = T [sec]

→ FREQUENZ ***f*** = HÄUFIGKEIT des Musters = 1 x pro T = 1 / T

normierte *Einheit*: pro Sekunde = [sec^{-1}] = [Hz]

Mathematische Beschreibung:

$$\boldsymbol{r(t)} = |\boldsymbol{r}| \ \mathbf{sin}\left[\left(\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{T}}\right)\boldsymbol{t} + \boldsymbol{\varphi_0}\right]$$

(Start-)Phase = Winkel zum Zeitpunkt t = 0

$$= \ \mathbf{1}\,\boldsymbol{V} \ \cdot \sin\left[(2\pi f)\ \mathrm{t}+ \boldsymbol{\varphi_0}\right] = 1\ \mathrm{V} \cdot \sin\left[(2\pi\cdot 6\mathrm{Hz})\ \mathrm{t}+ \mathbf{0}^{\circ}\right]$$

Abstraktion:

Jede Grundschwingung ist eindeutig Charakterisiert durch ...

- ihre Amplitude X
- ihre Frequenz (f)
  bzw. Kreisfrequenz ($\omega = 2\pi f$)
- ihre Phasenlage φ

<u>Die geniale Entdeckung von J-B. J. Fourier</u> (1768-1830)

Der französische Mathematiker und Physiker ***Jean-Baptiste Joseph Fourier*** behauptete 1807, daß…

<u>***jeder****</u> **periodische Vorgang** ***f(t)*** mit der Periode ***T*** [* also auch extrem nicht-harmonische] als ***Summe von harmonischen Schwingungen*** interpretiert werden kann !

<u>Anm.:</u>

Fourier formulierte 1807 seine Behauptung verbal. Im Jahre 1913 stellte der russische Mathematiker *Nikolai Lusin* die entsprechende mathematische Formulierung auf. Erst 1966 gelang dem schwedischen Mathematiker *Lennart Carleson* die vollständige Induktion zur Fourier-Behauptung und damit der Beweis, daß sie allgemeingültig ist (wofür er 2006 den mit 755.000,00 € dotierten Abel-Preis erhielt).

Die geniale Entdeckung von J-B. J. Fourier (1768-1830)

Mathematische Formel (Reihenentwicklung):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(a_i \cos\frac{i2\pi t}{T} + b_i \sin\frac{i2\pi t}{T}\right)$$

Mit der komplexen Umformung:

$$\cos(i2\pi t/T) + \mathrm{j}\sin(i2\pi t/T) = \mathrm{e}^{\,\mathrm{j}(i2\pi t/T)}$$

Erhält man:

$$f(t) = c_0 + \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(i2\pi t/T)}$$

Die Koeffizienten **(a_i , b_i)** bzw. die zusammengefasste, komplexe Koeffizienten **c_i** werden dabei als die *Schwingungs*- oder FREQUENZKOEFFIZIENTEN bezeichnet.

Die geniale Entdeckung von J-B. J. Fourier (1768-1830)

Die Ermittlung der *Stärke (Amplitude)* der einzelnen harmonischen Anteile in ***f(t)*** erfolgt durch die sogenannte **Fourier-Analyse** (→ Mathematik Grundstudium):

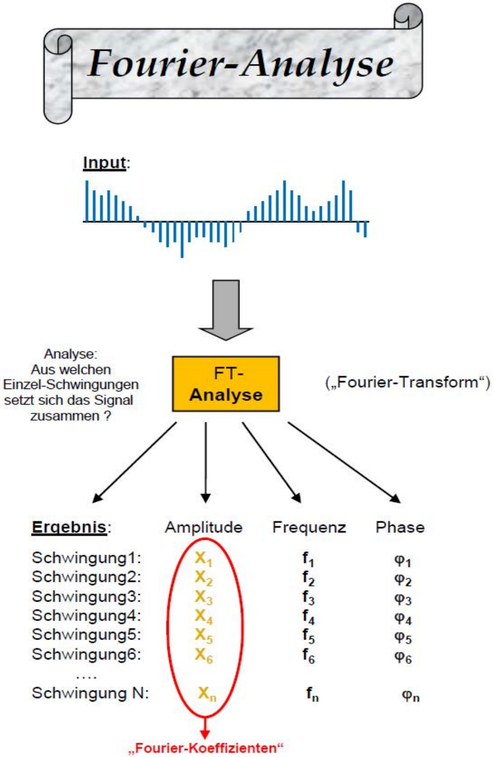
$$c_i = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \mathrm{f(t)} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(i 2\pi t/T)}\, dt$$

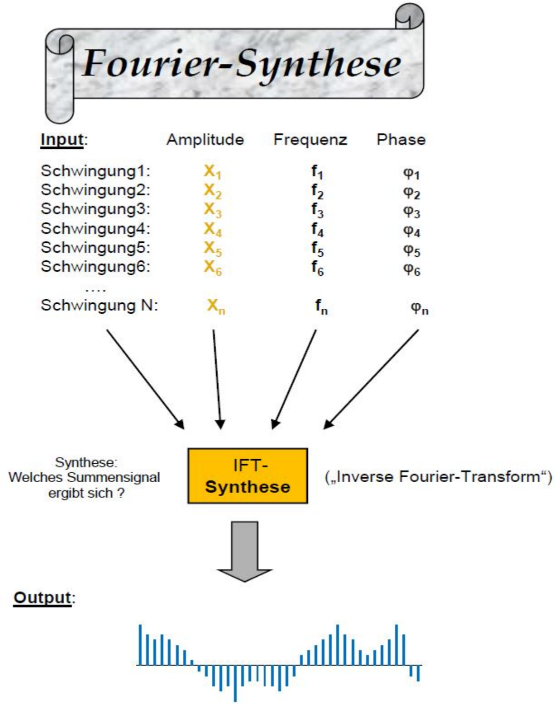
mit i = 0, ±1, ±2, ±3, ±4, …

Die Fourier-Analyse ist eine vollständig reversible Operation.

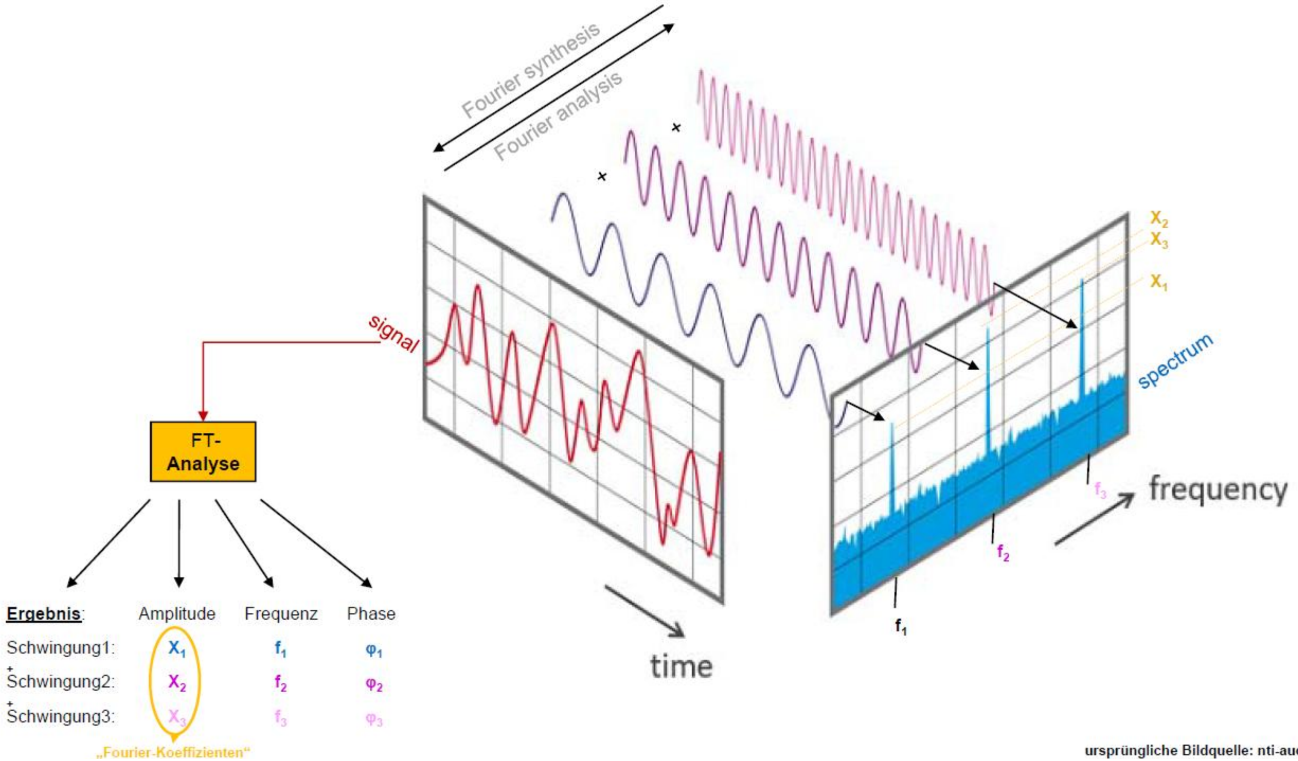
Sprich: für bekannte Frequenzkoeffizienten c_i kann jederzeit und ohne Verlust die zugrunde liegende Zeitfunktion ***f(t)*** wieder rekonstruiert werden!

Fourier-Analyse und Fourier-Synthese





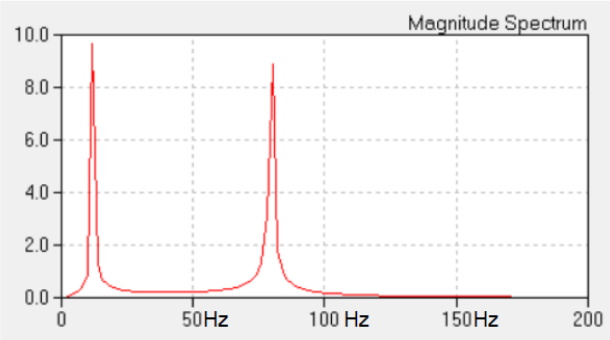
Visuelle Verdeutlichung Fourier-Analyse ↔ Fourier-Synthese



ursprüngliche Bildquelle: nti-audio.com

Verständnistest (typische Klausuraufgabe):

Gegeben ist folgende FT-Analyse eines Audiosignals:

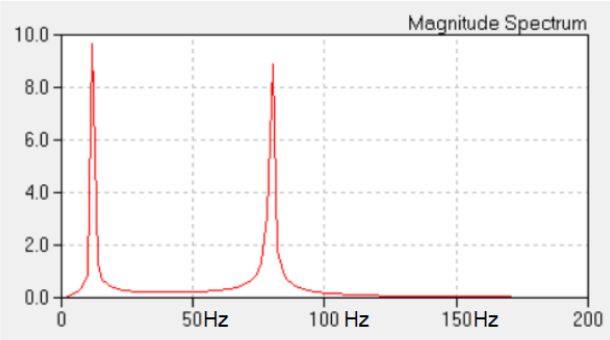


Bildquellen: lohninger.com, foursynth.exe

Beschreiben Sie das analysierte Audio-Signal im Zeitbereich (durch „Ablesen“ des Spektrums) mit Worten!

Verständnistest (typische Klausuraufgabe):

Gegeben ist folgende FT-Analyse eines Audiosignals:



Bildquellen: lohninger.com, foursynth.exe

Beschreiben Sie das analysierte Audio-Signal im Zeitbereich (durch „Ablesen“ des Spektrums) mit Worten!

Ergebnis: