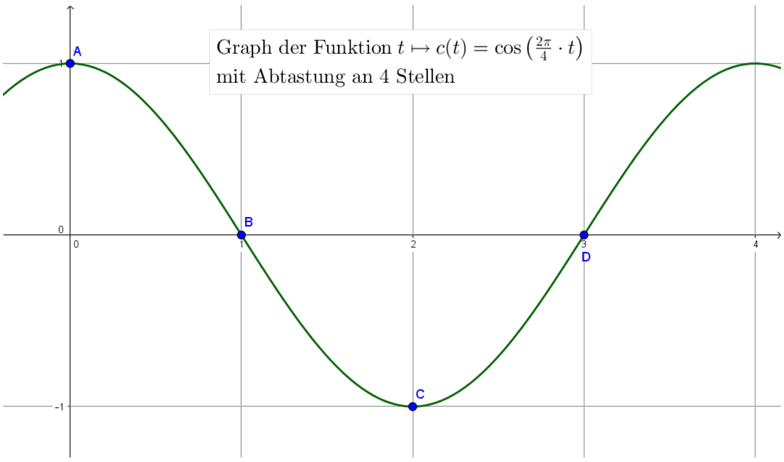
Präsenzübungen

Aufgabe P 12. *Diskrete Fouriertransformation (DFT)*

Wir betrachten in dieser Aufgabe Signale, deren Werte an 4 Abtaststellen vorliegen. Wir bezeichnen diese mit $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$ und $x(3)$ und fassen sie in einem Spaltenvektor zusammen: $x = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{pmatrix}$ bzw. in platzsparender Notation: $x = \big(x(0), x(1), x(2), x(3)\big)^{\mathsf{T}}$.

Als Beispiel betrachten wir die Funktion $c\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$, $c(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{4} \cdot t\right)$. Diese ist periodisch mit Periodendauer $T = 4$, ihre Frequenz ist also $f = \frac{1}{4}$. In der Grafik ist ein Ausschnitt des Funktionsgraphen gezeigt sowie Abtastpunkte $A = \big(0, c(0)\big) = (0,1)$, $B = \big(1, c(1)\big) = (1,0)$, $C = \big(2, c(2)\big) = (2,-1)$ und $D = \big(3, c(3)\big) = (3,0)$. Aus den vier Abtastwerten $c(0), c(1)$, $c(2)$ und $c(3)$ ergibt sich der Wertevektor $c = (1,0,-1,0)^{\mathsf{T}}$. Wir betrachten nun die vier (Basis-)Vektoren s_0, s_1, s_2 und s_3, deren



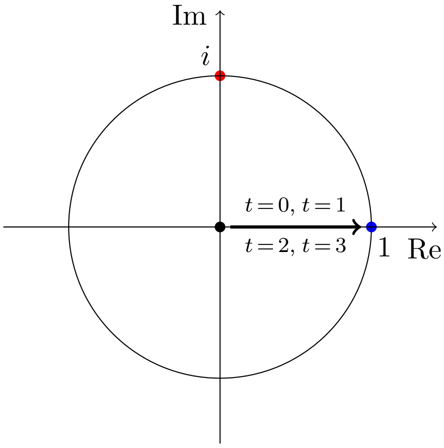
Komponenten jeweils Potenzen der vierten Haupteinheitswurzel $w_4 = e^{i \cdot \frac{2\pi}{4}}$ sind. Genau gilt

$$s_k(n) = e^{i \cdot \frac{2\pi \cdot k \cdot n}{4}} = \left(\left(e^{i \cdot \frac{2\pi}{4}}\right)^k\right)^n = \left(w_4^k\right)^n .$$

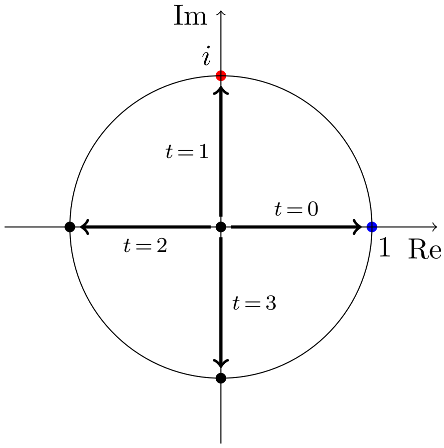
(a) Schreiben Sie die Vektoren s_0 bis s_3 in möglichst einfacher Form hin:

$$s_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad s_2 = \ldots$$

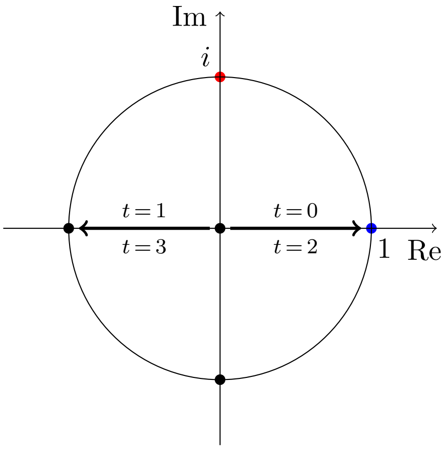
(b) Wir stellen Sie die (komplexen) Werte jedes Basisvektors jeweils in der komplexen Zahlenebene dar. Mit Blick darauf, dass sich alle Werte auf dem Einheitskreis befinden, wollen wir im Folgenden von **Drehzeigerdiagrammen** sprechen. **Vollziehen Sie** die folgenden Diagramme **nach**. In diesen sind die Drehzeigerstellungen mit dem Parameter t (anstelle von n) bezeichnet, um auf die **zeitliche** Veränderung hinzuweisen.



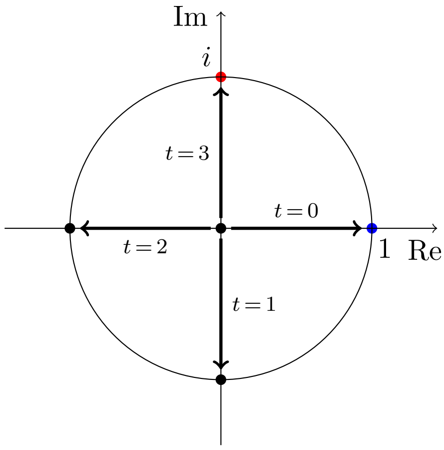
(a) Drehzeiger für s_0 mit Frequenz 0



(b) Drehzeiger für s_1 mit Frequenz $f_1 = \frac{1}{4}$.



(c) Drehzeiger für s_2 mit Frequenz $f_2 = 2 \cdot f_1$.



(d) Drehzeiger für s_3 mit Frequenz $f_3 = 3 \cdot f_1$.

Abbildung 2: Drehzeigerdarstellungen der Basisfunktionen bei 4 Abtastungen je Periode.

Die Ausführung der **diskreten Fouriertransformation** bedeutet einfach, dass man einen gegebenenen Wertevektor x als Linearkombination dieser Basisvektoren schreibt:

$$x = \hat{x}(0)\, s_0 + \hat{x}(1)\, s_1 + \hat{x}(2)\, s_2 + \hat{x}(3)\, s_3.$$

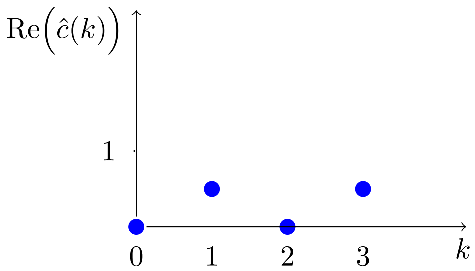
Man erhält die Vorfaktoren (auch *Koeffizienten* oder *Fourierkoeffizienten* genannt) unter Verwendung des Skalarprodukts[1] wie folgt:

$$\hat{x}(0) = \frac{\langle x \mid s_0 \rangle}{\langle s_0 \mid s_0 \rangle}, \quad \hat{x}(1) = \frac{\langle x \mid s_1 \rangle}{\langle s_1 \mid s_1 \rangle}, \quad \hat{x}(2) = \frac{\langle x \mid s_2 \rangle}{\langle s_2 \mid s_2 \rangle}, \quad \hat{x}(3) = \frac{\langle x \mid s_3 \rangle}{\langle s_3 \mid s_3 \rangle}.$$

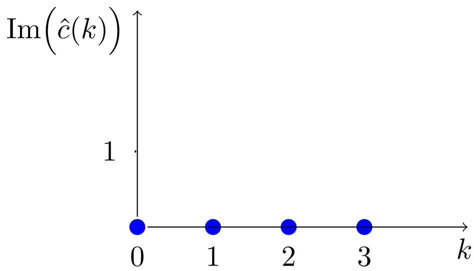
In der Vorlesung haben wir für den Vektor $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, der sich durch 4-Punkt-Abtastung der Kosinusfunktion ergibt, die Fourierkoeffizienten berechnet:

$$\hat{c}(0) = \frac{\langle c \mid s_0 \rangle}{\langle s_0 \mid s_0 \rangle} = \frac{0}{4}, \quad \hat{c}(1) = \frac{\langle c \mid s_1 \rangle}{\langle s_1 \mid s_1 \rangle} = \frac{2}{4}, \quad \hat{c}(2) = \frac{\langle c \mid s_2 \rangle}{\langle s_2 \mid s_2 \rangle} = \frac{0}{4}, \quad \hat{c}(3) = \frac{\langle c \mid s_3 \rangle}{\langle s_3 \mid s_3 \rangle} = \frac{2}{4}.$$

Wir fassen die Koeffizienten in einem Spaltenvektor zusammen und erhalten $\hat{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Dann ist $\hat{c}$ die (diskrete) Fouriertransformierte des diskreten Signals c. Die komplexen Zahlen $\hat{c}(0)$ bis $\hat{c}(3)$ bilden das sogenannte **Fourierspektrum** des Signals c. Man kann nun die Realteile und die Imaginärteile der einzelnen Komponenten des Spektrums grafisch darstellen.



(a) Realteile von $\hat{c}(k)$ über k.



(b) Imaginärteile von $\hat{c}(k)$ über k.

Abbildung 3: Real- bzw. Imaginärteile des Spektrums der an vier Stellen abgetasteten Kosinusfunktion c.

(c) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{s}$ des Signals $s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(d) Stellen Sie das Spektrum $\hat{s}$ grafisch dar, zeichnen Sie je ein Schaubild für die Real- und die Imaginärteile.

[1] Das Skalarprodukt zweier komplexer Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{C}^4$ ist so erklärt: $\langle x \mid y \rangle = \sum_{n=0}^{3} x_n \cdot \overline{y_n} = x_0 \cdot \overline{y_0} + x_1 \cdot \overline{y_1} + x_2 \cdot \overline{y_2} + x_3 \cdot \overline{y_3}$.

(e) Verifzieren Sie durch **Addition der entsprechenden Drehzeiger**, dass die Linearkombination

$$0\, s_0 \;+\; \tfrac{1}{2}\, s_1 \;+\; 0\, s_2 \;+\; \tfrac{1}{2}\, s_3$$

in der Tat das Signal c ergibt.

(f) Verfahren Sie analog mit dem Signal s. Verfizieren Sie also durch Drehzeigeraddition, dass für die von Ihnen in der vorletzten Teilaufgabe berechneten Fourierkoeffizienten $\hat{s}(k)$ die Gleichung

$$\hat{s}(0)\, s_0 \;+\; \hat{s}(1)\, s_1 \;+\; \hat{s}(2)\, s_2 \;+\; \hat{s}(3)\, s_3 \;=\; s$$

erfüllt ist.

(g) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{d}$ des Dreieckssignals $d = \big(0,\, 1,\, 2,\, 1\big)^{\mathsf{T}}$. Stellen Sie das Spektrum grafisch dar und verifizieren Sie wiederum, dass die Linearkombination

$$\hat{d}(0)\, s_0 \;+\; \hat{d}(1)\, s_1 \;+\; \hat{d}(2)\, s_2 \;+\; \hat{d}(3)\, s_3$$

gleich dem Signal d ist.

Hausübungen

Aufgabe H 24. *Vergleich mit der Formel für allgemeine Abstastzahl N.*

Verifizieren Sie, dass die in Aufgabe P 1 durchgeführten Berechnungen übereinstimmen mit der in der Vorlesung eingeführten allgemeinen Formel[2] für die DFT eines an N Stellen abgetasteten Signals:

$$\hat{x}(k) := X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-i\,\frac{2\,\pi \cdot n \cdot k}{N}},\ k = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Aufgabe H 25. *Orthogonalität der Basisvektoren*

Betrachten Sie die vier Vektoren s_0, s_1, s_2 und s_3 aus Aufgabe P 1.

(a) Halten Sie noch einmal für sich fest, dass sich für die Skalarprodukte $\langle s_0 \mid s_0 \rangle$, $\langle s_1 \mid s_1 \rangle$, $\langle s_2 \mid s_2 \rangle$ und $\langle s_3 \mid s_3 \rangle$ jeweils der Wert 4 ergibt.

(b) Zeigen Sie mithilfe der entsprechenden Skalarprodukte, dass die Vektoren s_0, s_1, s_2 und s_3 paarweise orthogonal sind.

Aufgabe H 26. *Zusammenhang von Sinus-, Kosinus- und Exponentialfunktion*

Benutzen Sie die Euler'sche Formel $e^{ix} = \cos(x) + i\,\sin(x)$, um die folgenden Identitäten nachzuweisen:

(a) $\cos(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$.

(b) $\sin(x) = \frac{1}{2\,i} \cdot \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$.

Aufgabe H 27. *Inverse diskrete Fouriertransformation (IDFT)*

Man erhält ein Signal x aus der Fouriertransformierten $\hat{x}$ durch Anwendung der inversen Fouriertransformation zurück:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}(k) \cdot e^{i\,\frac{2\,\pi \cdot nk}{N}},\ k = 0, 1, 2, ..., N-1.$$

(a) Berechnen Sie das Signal x aus der Fourier-Transformierten $\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(b) Berechnen Sie das Signal y aus $\hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\,i \\ 0 \\ \frac{1}{2}\,i \end{pmatrix}$.

(c) Nutzen Sie die in Aufgabe H 3 angegebenen Identitäten, um sich davon zu überzeugen, dass Sie die Signale c bzw. s aus Aufgabe P 1 rekonstruiert haben.

[2] Neben dem Symbol $\hat{x}(k)$ ist auch das Symbol $X(k)$ als generische Bezeichnung der Fourierkoeffizienten eines diskreten Signals mit Komponenten bzw. Abtastwerten $x(n)$ gebräuchlich.

Aufgabe H 28. *Einheitswurzeln und Lösungen von Potenzgleichungen*

(a) Stellen Sie die Zahl $a = -16$ in Exponentialform dar.

(b) Schreiben Sie die vier vierten Einheitswurzeln $u_0, u_1, u_2,$ und u_3 auf.

(c) Geben Sie die vier Lösungen $z_0,\ z_1,\ z_2$ und z_3 der Gleichung $z^4 = -16$ an.

Hinweis: Mit $z_0 = 2 \cdot e^{i\,\frac{\pi}{4}}$ *erhält man die vier Lösungen so:* $z_k = z_0 \cdot u_k$.

Aufgabe H 29. *Diskrete Fouriertransformation (DFT)*

Gegeben sei das durch Abtastung an 4 Punkten erhaltene diskrete Signal $x = \big(1,\ 1,\ 2,\ 2\big)^{\mathsf{T}}$. Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten $\hat{x}(k) = X(k)$ für $k = 0,\ \ k = 1,\ k = 2$ und $k = 3$.

Aufgabe H 30. *Inverse diskrete Fouriertransformation (IDFT)*

Gegeben seien die Fourierkoeffizienten $\hat{x}(k)$ eines 4-Punkt- Signals: $\hat{x} = \frac{1}{4}\big(6,\ -1+i,\ 0,\ -1-i\big)^{\mathsf{T}}$. Rekonstruieren Sie das Signal $x = \big(x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3\big)^{\mathsf{T}}$.

Aufgabe H 31. *Diskrete Fouriertransformation (DFT)*

Betrachten Sie die Diskrete Fouriertransformation (DFT) für Signale, die an acht Punkten abgetastet werden, sowie das Skalarprodukt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ auf $\mathbb{C}^8$.

(a) **Skizzieren Sie** die acht Komponenten von s_7 in der Gauß'schen Zahlenebene und erläutern Sie, inwiefern eine Mehrdeutigkeit (Aliasing) bzgl. des Umlaufsinns und der Winkelgeschwindigkeit besteht.

(b) Aus der Tatsache, dass $s_7(n) = s_{-1}(n)$ für alle $n \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, 7\}$ gilt, folgt

$$c(n) = \cos\big(n \cdot \tfrac{2\,\pi}{8}\big) \ = \ \frac{1}{2} \cdot \left(e^{i\cdot n\cdot \frac{2\,\pi}{8}} + e^{-i\cdot n\cdot \frac{2\,\pi}{8}}\right) \ = \ \frac{1}{2} \cdot \big(s_1(n) + s_7(n)\big).$$

Bestimmen Sie hieraus die Diskrete Fouriertransformierte $\hat{c} = \big(\hat{c}(k)\big)_{k\in\{0,\,1,\,\ldots,\,7\}}$ der an acht Stellen abgetasteten Kosinusfunktion c.

(c) **Zeigen Sie** durch explizite Rechnung, dass die Basisvektoren s_1 und s_7 bzgl. des Skalarprodukts $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ orthogonal sind. *Hinweis: Wenn Sie die achten Einheitswurzeln skizzieren, sehen Sie, welche Paare von Wurzeln sich zu Null addieren.*

Aufgabe H 32. *Komplexe Lösungen quadratischer Gleichungen*

(a) Notieren Sie die beiden komplexen Lösungen der Gleichung $w^2 = -1$.

(b) Betrachten Sie die Gleichung $z^2 - 8z + 17 = 0$. Verifizieren Sie, dass sich die Gleichung **(b)** in die Gleichung $(z-4)^2 = -1$ umformen lässt. Setzen Sie $w := z - 4$ und nutzen Sie Teilaufgabe (a), um die beiden komplexen Lösungen dieser Gleichung bzw. der Gleichung **(b)** zu finden. Führen Sie eine Probe durch.

(c) Betrachten Sie die quadratische Gleichung $a\,z^2 + b\,z + c = 0$, wobei a, b und c reelle Koeffizienten sind. Modifizieren Sie die bekannte Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

durch eine Fallunterscheidung so, dass sich die reellen bzw. komplexen Lösungen ablesen lassen.

(d) Schreiben Sie die Lösungen der Gleichung **(b)** mithilfe der Lösungsformel aus (c) hin.

(e) Zerlegen Sie die Polynome $z^2 - 5\,z + 6$, $z^2 + 2\,z + 1$ und $z^2 + 2\,z + 5$ in Linearfaktoren, stellen Sie sie also jeweils als Produkte der Form $(z - z_1) \cdot (z - z_2)$ dar.

Tutoriumsübungen

Aufgabe T 19. *Komplexe Zahlen*

Es sei $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

(a) Berechnen Sie z in Exponentialdarstellung.

(b) Skizzieren Sie z in der komplexen Zahlenebene.

(c) Berechnen Sie $(e^{-i\frac{3\pi}{2}}) \cdot i$.

Aufgabe T 20. *Einheitswurzeln*

(a) Bestimmen Sie die drei komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$ und skizzieren Sie diese in der Gauß'schen Zahlenebene.

(b) Bestimmen Sie die sechs komplexen Lösungen der Gleichung $z^6 = 1$ und skizzieren Sie diese in der Gauß'schen Zahlenebene.

(c) Die sechste Haupteinheitswurzel w_6 hat die kartesische Darstellung $w_6 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$. Berechnen Sie die Potenzen w_6^2, w_6^3 und w_6^6.

Aufgabe T 21. *In Anlehnung an einer Klausuraufgabe aus dem Sommersemester 2015*

(a) Geben Sie die komplexen Zahlen $w_3 = e^{i\,\frac{2\pi}{3}}$ und $\overline{w_3} = e^{-i\,\frac{2\pi}{3}}$ jeweils in kartesischer Form an. *Hinweis: Euler-Identität:* $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)$.

Wir betrachten nun Signale, deren Werte an drei Abtaststellen vorliegen, ein entsprechender Wertevektor hat somit die Form $u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Wir verwenden ferner das Skalarprodukt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ auf $\mathbb{C}^3$ mit $\langle u \mid v \rangle = u_0 \cdot \overline{v_0} + u_1 \cdot \overline{v_1} + u_2 \cdot \overline{v_2}$. Schließlich benötigen wir die Fourierbasis, die aus den Vektoren $s_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ w_3 \\ w_3^2 \end{pmatrix}$ und $s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ w_3^2 \\ w_3^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\,\frac{4\pi}{3}} \\ e^{i\,\frac{8\pi}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\,\frac{4\pi}{3}} \\ e^{i\,\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}$ besteht, wobei $w_3 = e^{i\,\frac{2\pi}{3}}$ die dritte Haupteinheitswurzel ist.

(b) Berechnen Sie das diskrete Fourierspektrum $\hat{x}$ des Signals $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$:

$$
\begin{aligned}
\hat{x}(0) &= \frac{\langle x \mid s_0 \rangle}{\langle s_0 \mid s_0 \rangle} = \tfrac{1}{3} \langle x \mid s_0 \rangle \ldots \\
\hat{x}(1) &= \frac{\langle x \mid s_1 \rangle}{\langle s_1 \mid s_1 \rangle} = \tfrac{1}{3} \langle x \mid s_1 \rangle \ldots \\
\hat{x}(2) &= \frac{\langle x \mid s_2 \rangle}{\langle s_2 \mid s_2 \rangle} = \tfrac{1}{3} \langle x \mid s_2 \rangle \ldots
\end{aligned}
$$

(c) Weisen Sie zur Probe Ihrer Berechnungen nach, dass der Ausdruck $\hat{x}(0)\, s_0 + \hat{x}(1)\, s_1 + \hat{x}(2)\, s_2$ gleich dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ist.

Aufgabe T 22. *DFT – Fortsetzug von Aufgabe P 1*

(a) Bestimmen Sie die Fouriertransformierten der Signale $d_1 = (0, 1, 2, 1)^\mathsf{T}$ und $d_2 = (2, 1, 0, 1)^\mathsf{T}$ und zeichnen Sie jeweils die Spektren.

(b) Verifizieren Sie jeweils durch Addition der Drehzeiger, dass die Linearkombinationen

$$\hat{d}_j(0)\, s_0 \; + \; \hat{d}(1)\, s_1 \; + \; \hat{d}(2)\, s_2 \; + \; \hat{d}(3)\, s_3$$

gleich dem Signal d_j ist.

(c) Verfahren Sie analog mit den Signalen $r = (0, 0, 1, 1)^\mathsf{T}$. und $t = (0, 1, 2, -1)^\mathsf{T}$.