Komplexe Vektorräume

$$x = \begin{pmatrix} 4+2i \\ -2+i \\ 3-2i \\ i \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1+i \\ -4-2i \\ -i \end{pmatrix} \quad x,y \in \mathbb{C}^4 \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

$x + y =$ komponentenweise Addition $= \begin{pmatrix} 5+3i \\ -3+2i \\ -1-4i \\ 0 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt $\langle x \mid y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \ldots x_N \bar{y}_N$

$$x \cdot \bar{y} = \sum_{n=1} x_n \bar{y}_n$$

$$x = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2-2i \\ 2+i \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} i \\ 3+2i \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$\langle x \mid y \rangle = (1-i)(-i) + (2-2i)(3-2i) + (2+i)(1+i)$$
$$= -i - 1 + 6 - 4i - 6i - 4 + 2 + 2i + i - 1$$
$$= 2 - 8i$$

$$\langle x \mid x \rangle = (1-i)(1+i) + (2-2i)(2+2i) + (2+i)(2-i)$$
$$= \ldots$$

Diskrete Fourier Transformation

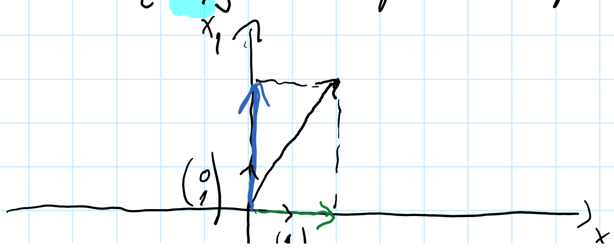
Gegeben: ein Signal im Orts- oder Zeitbereich

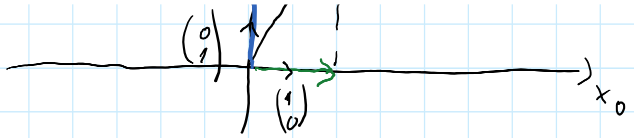
Gesucht: Verstehen des Signals bzgl. Frequenzen

Signal im Ortsbereich / Zeitbereich

$x = \{x_0, x_1\}$ einfaches Signal mit nur 2 Werten

$x = \{2, 3\}^T$





Orth. Projektion von $\vec{x}$ auf die Standardbasis

$$x_\parallel = \mathrm{Proj}_{\binom{1}{0}} \vec{x} = \frac{\binom{x_0}{x_1}\cdot\binom{1}{0}}{\left\|\binom{1}{0}\right\|^2}\binom{1}{0} = \frac{x_0}{1}\binom{1}{0} = x_0\binom{1}{0} = 2\binom{1}{0}$$

Proj. Koeffizient

$$x_\parallel = \mathrm{Proj}_{\binom{0}{1}} \vec{x} = \frac{\binom{x_0}{x_1}\cdot\binom{0}{1}}{\left\|\binom{0}{1}\right\|^2}\binom{0}{1} = x_1\binom{0}{1} = 3\binom{0}{1}$$

Signalrekonstruktion $\vec{x}$ als Summe der Projektionen

$$\vec{x} = \vec{x}_\parallel + \vec{x}_\parallel = x_0\binom{1}{0} + x_1\binom{0}{1} = \binom{x_0}{0} + \binom{0}{x_1} = \binom{x_0}{x_1}$$

Wir können ein Signal auf eine beliebige orth. Basis projizieren und das Originalsignal aus der Summe der Projektionen rekonstruieren.

DFT: als Basiswechsel interpretieren

Fourierbasis: "smarte" Basis

DFT: $$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-i\frac{2\pi n k}{N}} \qquad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$s_k(n) = e^{i\frac{2\pi n k}{N}}$ komplexe Exponentielle

k – Frequenz
n – Laufvariable im Ortsbereich

N: Anzahl Werte im Signal

$N = 4$

$$x = \{\underset{0}{1}, \underset{1}{2}, \underset{2}{4}, \underset{3}{7}\}^T \qquad N$$

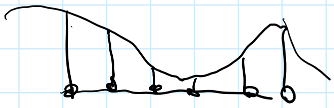
$$X(k) = \frac{x \cdot \bar{s}_k}{N} = \frac{x \cdot \bar{s}_k}{\|s_k\|^2}$$

Projektionskoeff. auf s_k

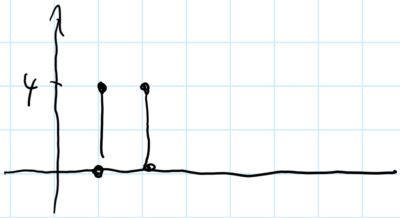
$$X(k) = \frac{x \cdot s_k}{N} = \frac{x \circ s_k}{\|s_k\|^2} \quad \text{auf } s_k$$

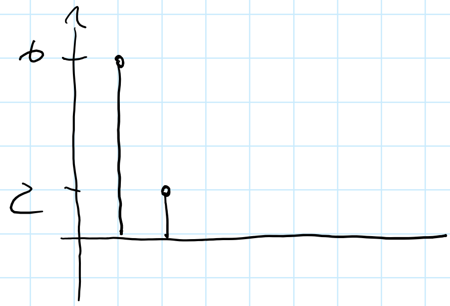
$N = 2$

Bsp. $\{4, 4\}$, $\{6, 2\}$



Für





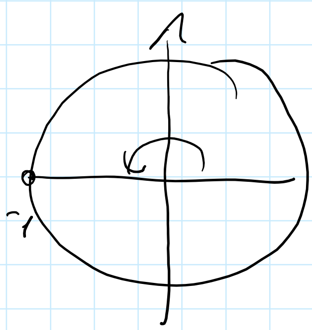
2 Punkt DFT

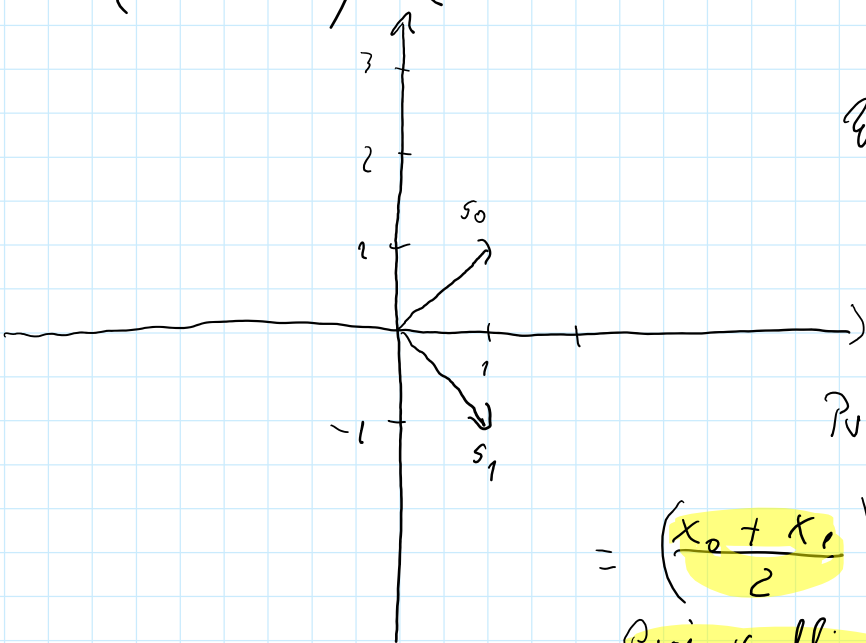
$$s_k(n) = e^{\frac{i 2\pi n k}{N}} = e^{\frac{i 2\pi n k}{2}} = e^{i\pi n k} \qquad n = 0, 1$$

$$s_0 = \begin{pmatrix} e^{i\pi \cdot 0 \cdot 0} \\ e^{i\pi \cdot 1 \cdot 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = \begin{pmatrix} e^{i\pi \cdot 0 \cdot 1} \\ e^{i\pi \cdot 1 \cdot 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$e^{i\pi} = -1$





Wir projizieren $\vec{x} = \{x_0, x_1\}^T$ auf s_0 und s_1

$$\text{Proj}_{s_0} \vec{x} = \frac{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{x_0 + x_1}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Proj. Koeffizienten

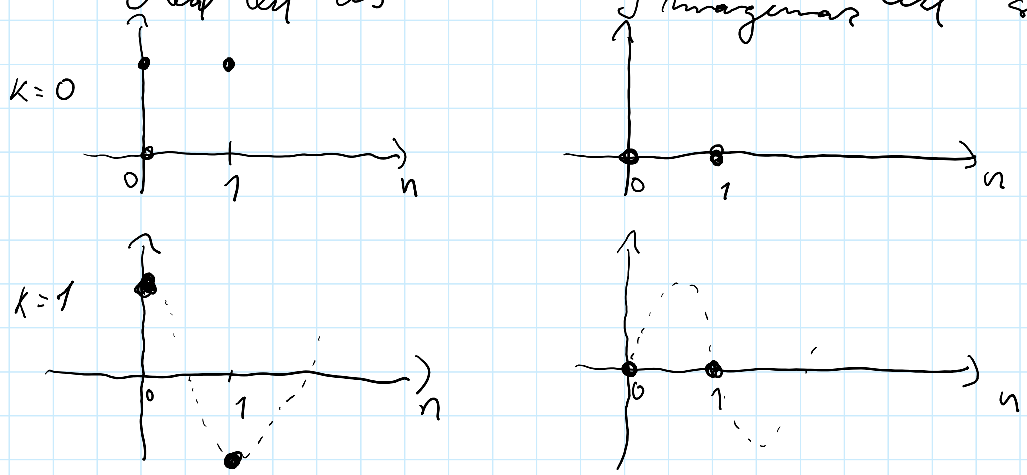
$$\text{Proj}_{s_1} \vec{x} = \frac{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{x_0 - x_1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$s_k(n) = e^{i\frac{2\pi n k}{N}} = \cos\left(\frac{2\pi n k}{N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi n k}{N}\right)$$

$N = 2$

$$s_k(n) = \cos\left(\frac{2\pi n k}{2}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi n k}{2}\right) = \underbrace{\cos(\pi n k)}_{\text{Realanteil}} + i\, \underbrace{\sin(\pi n k)}_{\text{Imaginäranteil}}$$

Realteil cos　　　　Imaginärteil sin



IDFT (Inverse Diskrete Fourier Transformation)

Wir rekonstruieren das Signal aus den Projektionen

$N = 2$

$$\vec{x} = \left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \left(\frac{x_0 - x_1}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{x_0 + x_1}{2}\\ \frac{x_0 + x_1}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{x_0 - x_1}{2}\\ \frac{-x_0 + x_1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2x_0}{2}\\ \frac{2x_1}{2}\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\end{pmatrix}}}$$

Wie sieht die Fourierbasis für $N = 4$ aus?

$$s_k(n) = e^{i\frac{2\pi n k}{4}} = e^{i\frac{\pi n k}{2}} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

$$s_0 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi \cdot 0 \cdot 0}{2}} \\ e^{i\frac{\pi \cdot 1 \cdot 0}{2}} \\ e^{i\frac{\pi \cdot 2 \cdot 0}{2}} \\ e^{i\frac{\pi \cdot 3 \cdot 0}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^0 \\ e^0 \\ e^0 \\ e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|s_0\|^2 = 4 = N$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ e^{i\frac{\pi 3\cdot 0}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ e^{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi 0\cdot 1}{2}} \\ e^{\frac{i\pi 1\cdot 1}{2}} \\ e^{i\frac{\pi 2\cdot 1}{2}} \\ e^{i\frac{\pi 3\cdot 1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{0} \\ e^{i\frac{\pi}{2}} \\ e^{i\pi} \\ e^{i\frac{3\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\|S_1\|^2}_{S_1 \bullet \overline{S_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - i^2 + 1 - i^2 = 1+1+1+1$$

$$= \underline{\underline{4}}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi 0\cdot 2}{2}} \\ e^{i\frac{\pi 1\cdot 2}{2}} \\ e^{i\frac{\pi 2\cdot 2}{2}} \\ e^{i\frac{\pi 3\cdot 2}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{0} \\ e^{i\pi} \\ e^{i2\pi} \\ e^{i3\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|S_2\|^2 = \underline{\underline{4}}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi 0\cdot 3}{2}} \\ e^{i\frac{\pi 1\cdot 3}{2}} \\ e^{i\frac{\pi 2\cdot 3}{2}} \\ e^{i\frac{\pi 3\cdot 3}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{0} \\ e^{i\frac{3\pi}{2}} \\ e^{i3\pi} \\ e^{i\frac{9\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\|S_3\|^2 = \ldots = 4$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Realteil}} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{Imaginärteil}}$$

s. Skript Folie 21