Präsenzübungen

Bitte installieren Sie die kostenlose Software *Geogebra Classic* auf Ihrem Rechner und bringen Sie diesen zur Übungssitzung mit. Sie können auch mit der Online-Version arbeiten, die Sie unter `https://www.geogebra.org/calculator` finden.

Aufgabe P 7. *De-Casteljau-Algorithmus*

Gegeben seien zwei Sätze mit je vier Kontrollpunkten (bzw. deren Ortsvektoren) für zwei kubische Bézierkurven α und γ:

$$a_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$c_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie die beiden zugehörigen Kontrollpolygonzüge **in zwei separate Schaubilder**.

(b) Konstruieren Sie die Punkte $\alpha\left(\frac{1}{2}\right)$ und $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ mit dem Algorithmus von de Casteljau **zeichnerisch**.

(c) Prüfen Sie nach, ob der von Ihnen konstruierte Punkt $\alpha\left(\frac{1}{2}\right)$ die gleichen Koordinaten besitzt wie derjenige, den Sie erhalten, wenn Sie das Bézier-Polynom

$$p(t) = (1-t)^3\, a_0 + 3\,t\,(1-t)^2\, a_1 + 3\,t^2\,(1-t)\, a_2 + t^3\, a_3$$

bei $t = \frac{1}{2}$ auswerten.

(d) Um eine Bézierkurve in *Geogebra* anzeigen zu lassen, geben Sie zunächst die vier Kontrollpunkte ein, z.B., indem Sie in die untere Eingabezeile nacheinander schreiben: $A0 = (0,0)$, $A1 = (0,1)$, usw. Geben Sie dann den folgenden Befehl in die Kommandozeile ein:

$$\text{Kurve}[(1-t)^3\, x(A0) + 3\,t\,(1-t)^2\, x(A1) + 3\,t^2\,(1-t)\, x(A2) + t^3\, x(A3),$$
$$(1-t)^3\, y(A0) + 3\,t\,(1-t)^2\, y(A1) + 3\,t^2\,(1-t)\, y(A2) + t^3\, y(A3), t, 0, 1]$$ bzw.

```
Kurve[ (1 - t)^3 x(A0) + 3 t (1-t)^2 x(A1) + 3 t^2 (1-t) x(A2) + t^3 x(A3),
(1 - t)^3 y(A0) + 3 t (1-t)^2 y(A1) + 3 t^2 (1-t) y(A2) + t^3 y(A3), t, 0, 1] .
```

Hier angegeben ist die Eingabe für α, die für γ überlegen Sie sich analog.

Tipp: Öffnen Sie einen Text-Editor, schreiben Sie darin die obige Eingabe und kopieren Sie sie dann nach Geogebra.

Überzeugen Sie sich davon, dass die von Ihnen berechneten Punkte mit dem angezeigten Kurvenverlauf von α bzw. γ übereinstimmen.

Hinweis: Die Werte von $\frac{20}{27}$ *und* $\frac{14}{27}$ *sind nach Rundung auf zwei geltende Ziffern gleich* $0{,}74$ *bzw.* $0{,}52$.

(e) Erstellen Sie einen Schieberegler namens `s`. Schreiben Sie ins nächste Eingabefeld den Text

$$(1-s)^3\, A0 + 3\, s\, (1-s)^2\, A1 + 3\, s^2\, (1-s)\, A2 + s^3\, A3$$

bzw. `(1 - s)^3 A0 + 3 s (1 - s)^2 A1 + 3 s^2 (1-s) A2 + s^3 A3`. Dann wird ein Punkt erzeugt, dessen Position Sie mit dem Schieberegler verändern können.

(f) Teilen Sie sich in zwei Gruppen auf. Führen Sie den Algorithmus von de Casteljau **rechnerisch** durch, um $\alpha\left(\frac{2}{3}\right)$ [Gruppe α] bzw. $\gamma\left(\frac{2}{3}\right)$ [Gruppe γ] zu bestimmen.

Zur Erinerung:

$$\begin{gathered} a_0^1 = \left(1-\tfrac{2}{3}\right)\, a_0 \;+\; \tfrac{2}{3}\, a_1, \quad a_1^1 = \left(1-\tfrac{2}{3}\right)\, a_1 \;+\; \tfrac{2}{3}\, a_2, \quad a_2^1 = \left(1-\tfrac{2}{3}\right)\, a_2 \;+\; \tfrac{2}{3}\, a_3; \\ a_0^2 = \left(1-\tfrac{2}{3}\right)\, a_0^1 \;+\; \tfrac{2}{3}\, a_1^1, \qquad a_1^2 = \left(1-\tfrac{2}{3}\right)\, a_1^1 \;+\; \tfrac{2}{3}\, a_2^1; \\ \alpha\left(\tfrac{2}{3}\right) \;=\; a_0^3 = \left(1-\tfrac{2}{3}\right)\, a_0^2 \;+\; \tfrac{2}{3}\, a_1^2 \end{gathered}$$

bzw. analog für γ.

Hinweis: Lösungen: $a_0^3 \;=\; \begin{pmatrix} \frac{20}{27} \\ \frac{18}{27} \end{pmatrix}, \quad c_0^3 \;=\; \begin{pmatrix} \frac{14}{27} \\ \frac{18}{27} \end{pmatrix}.$

Aufgabe P 8. *Bézier-Splines*

Betrachten Sie wiederum die kubische Kurve $p\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 6\,t-3\,t^2-3\,t^3 \\ 12\,t-24\,t^2+14\,t^3 \end{smallmatrix}\right)$. Wie in Aufgabe T 1 thematisiert, lässt sich p als Bézierkurve mit den Kontrollpunkten

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\, p_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},\, p_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},\, p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

darstellen. Am Punkte $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ soll nun eine zweite Bézierkurve $q\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ so „angehängt" werden, dass die resultierende Kurve insgesamt glatt ist. Wir überlegen uns, wie wir deren Kontrollpunkte q_0, q_1, q_2 und q_3 wählen müssen, wenn die Geschwindigkeit und die Beschleunigung an der Anschlussstelle stetig sein sollen:

(a) Werten Sie die Bedingungen, die in der Vorlesung vorgestellt wurden (vgl. auch Aufgabe T 4) aus, um zu zeigen, dass die folgende Wahl die gewünschten Stetigkeitsanforderungen liefert:

$$q_0 = p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ q_1 = 2\, p_3 - p_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix},\ q_2 = 4\, p_3 - 4\, p_2 + p_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 12 \end{pmatrix},$$

(b) Rechnen Sie nach, dass nun $p'(1) = q'(0) = \left(\begin{smallmatrix} -9 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$ sowie $p''(1) = q''(0) = \left(\begin{smallmatrix} -24 \\ 36 \end{smallmatrix}\right)$ gilt.

(c) Öffnen Sie die *Geogebra*-Datei BezierSplines.ggb und vollziehen Sie diese Bedingungen nach. Variieren Sie auch die Positionen der Punkte q_1 und q_2, um zu erkennen, auf welche Weise die Bedingungen verletzt werden können.

(d) Um nun **eine** C^2-parametrisierte Kurve f über dem Zeitintervall $[0,2]$ zu definieren, setzen wir:

$$f(t) = \begin{cases} p(t) & \text{für } t \in [0,1] \\ q(t-1) & \text{für } t \in [1,2]. \end{cases}$$

Hausübungen

Aufgabe H 12. *Graphen, Funktionen, Ableitungen*

Gegeben sei die Polynomfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x$.

(a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion über dem Intervall $[0, 1]$.

(b) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion.

(c) Bestimmen Sie die zweite Ableitung der Funktion.

Aufgabe H 13. *Funktionen, Graphen, Ableitungen*

Gegeben sei das Polynom $f(x) = -x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 1$.

(a) Überzeugen Sie sich davon, dass die Gleichung $f(x) = -\left(x-1\right)^3$ richtig ist.

(b) Skizzieren Sie den Graphen der Polynomfunktion $f\colon\ [0,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$.

(c) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion f' mithilfe der Ihnen bekannten Ableitungsformeln bzw. Ableitungsregeln.

(d) Berechnen Sie die Werte von f' an den Stellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

(e) Bestimmen Sie die zweite Ableitung der Funktion f sowie die Werte $f''(0)$, $f''(1)$ und $f''(2)$.

(f) Entdecken Sie Ihre Ergebnisse in Ihrer Skizze aus Teilaufgabe **(b)** wieder ?(!)

Aufgabe H 14. *Parameterdarstellung einer Geraden*

Gegeben sei eine Gerade, die durch die Punkte $P_0 = (1, 1)$ und $P_1 = (0, -2)$ geht.

(a) Bestimmen Sie die Parameterform dieser Geraden als lineare Gewichtung der 2 Punkte.

(b) Bestimmen Sie den Punkt auf der Geraden für $t = 1/3$.

Aufgabe H 15. *Parametrisierte Kurve*

Betrachten Sie die parametrisierte Kurve

$$p\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,t - 3\,t^2 - 3\,t^3 \\ 12\,t - 24\,t^2 + 14\,t^3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Punkte $p(0)$ und $p(1)$

(b) Es wäre relativ aufwändig, wenn Sie den ganzen Kurvenverlauf von Hand zeichneten. Anhand der *Geogebra*-Datei Parametrisierung.ggb können Sie sich den Verlauf der Kurve insgesamt ansehen.

(c) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor $v(t) = p'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

Für die nächsten Teilaufgaben ist es am besten wenn Sie ein separates Blatt im Querformat verwenden.

(d) Zeichnen Sie den Vektor $v(0)$ so, dass der Pfeil am Punkt $p(0)$ beginnt. Sie haben damit $v(0)$ an den Punkt $p(0)$ „angeheftet".

(e) Heften Sie den Vektor $v(1)$ an den Punkt $p(1)$ an.

(f) Berechnen Sie die Beträge der Vektoren $v(0)$ und $v(0.5)$.

(g) Vergleichen Sie Ihre Befunde mit der *Geogebra*-Datei $\mathrm{Parametrisierung.ggb}$. Die Geschwindigkeiten können Sie veranschaulichen, wenn Sie die Option „Animation ein" einschalten.

Aufgabe H 16. *Von der Standardform zur Bézier-Darstellung mit Matrix-Methoden*

Wir verwenden im Folgenden die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, in deren Spalten die Koeffizienten der Bézier-Basisfunktionen stehen. Durch Vergleich des Ausdrucks

$$\mathbf{f}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

für die Bézier-Darstellung mit dem Ausdruck

$$\mathbf{f}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

für die Standardform erhalten wir die Gleichungen

$$M \cdot \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \;=\; M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Lesen Sie an der Parametrisierung $p\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} 6\,t-3\,t^2-3\,t^3 \\ 12\,t-24\,t^2+14\,t^3 \end{pmatrix}$ die vektorwertigen Koeffizienten $A_0,\ A_1\ A_2$ und A_3 ab.

(b) Bestimmen Sie für die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ die Inverse M^{-1} und berechnen Sie hieraus die Kontrollpunkte $C_0,\ C_1\ C_2$ und C_3.

(c) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den Angaben in Aufgabe T 1.

Aufgabe H 17. *Definition der Ableitung*

Betrachten Sie die Polynomfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 1$. Verwenden Sie **die Definition** der Ableitung zur Bestimmung von $f'(0)$. Berechnen Sie hierzu

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Aufgabe H 18. *Skalarprodukt und Zeilenvektor-Matrix- Multiplikation*

(a) Bilden Sie das Skalarprodukt der folgenden zwei Vektoren: $(u_0, u_1, u_2, u_3)^T$ und $(1, v, v^2, v^3)^T$.

(b) Schreiben Sie folgenden Term $h(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ als Skalarprodukt zweier Vektoren in der Form:

$$\begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

und als Produkt von Matrizen im Format (1×4) und (4×1):

$$\begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

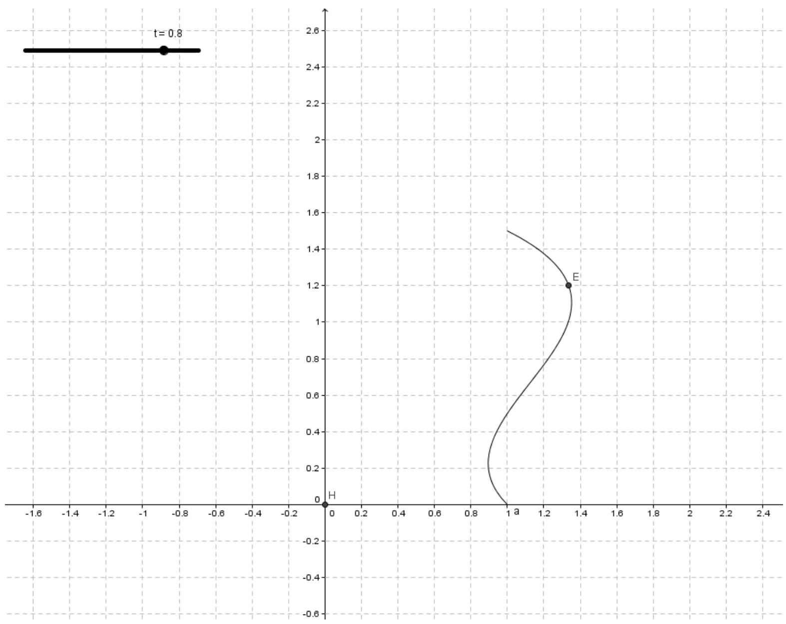
(c) Multiplizieren Sie den folgenden Zeilenvektor (1×4-Matrix) mit der angegebenen 4×4-Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe H 19. *Parametrisierte Kurve*

Gegeben sei eine parametrisierte Kurve p mit

$$p(t) = \begin{pmatrix} -4.5\,t^3 + 6\,t^2 - 1.5\,t + 1 \\ 1.5\,t \end{pmatrix},\ t \in [0, 1].$$



(a) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Kurve an der Stelle $t = 0.8$ und zeichnen Sie sie in die Graphik ein.

(b) Bestimmen Sie die zweite Ableitung der Kurve an der Stelle $t = 0.8$ und zeichnen Sie sie in die Graphik ein.

Aufgabe H 20. *De-Casteljau-Algorithmus*

Verwenden Sie die Angaben und Bezeichnungen von Aufgabe P 1.

(a) Bestimmen Sie $\alpha\left(\frac{3}{4}\right)$ und $\beta\left(\frac{3}{4}\right)$

- durch graphische Durchführung des Algorithms von de Casteljau,
- durch rechnerische Durchführung des Algorithms von de Casteljau,
- durch Auswertung der entsprechenden Bézier-Polynome.

(b) Benutzen Sie die bislang erzielten Ergebnisse sowie die Eigenschaften von Bézier-Basisfunktionen, um die Punkte der Kurven α und β für die Werte $t = 0$, $t = 1$, $t = \left(\frac{1}{4}\right)$ und $t = \left(\frac{1}{3}\right)$ zu ermitteln.

Aufgabe H 21. *Funktion und Umkehrfunktion*

(a) Es seien m und b reelle Konstanten. Betrachten Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = m \cdot x + b.$$

Für welche Werte von m und b ist die Funktion f umkehrbar. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion, indem Sie die Gleichung $y = m \cdot x + b$ nach x auflösen.

(b) In den Vereinigten Staaten werden Temperaturen oft in Grad Fahrenheit angegeben. Möchte man zu einer solchen Temperaturanabe f den entsprechenden Wert c in Grad Celsius ermitteln, so verwendet man die Formel

$$c = \frac{5}{9} \cdot (f - 32)\,.$$

Bestimmen Sie die Umkehrformel, mit der man Grad Celsius in Grad Fahrenheit umrechnen kann.

Tutoriumsübungen

Aufgabe T 12. *Bézierkurve mit Kontrollpunkten*

Betrachten Sie die kubische Kurve $p\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} 6\,t-3\,t^2-3\,t^3 \\ 12\,t-24\,t^2+14\,t^3 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass die Punkte

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ p_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ p_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die Bedingungen erfüllen, die an Kontrollpunkte einer kubischen Bézierkurve mit Parametrisierung $p\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gestellt werden:

$$p(0) = p_0, \quad p(1) = p_3, \quad p'(0) = 3\ (p_1 - p_0)\,, \quad p'(1) = 3\ (p_3 - p_2)$$

Aufgabe T 13. *Ableitung – Kettenregel*

Wenn zwei differenzierbare Funktionen f und g (mit zueinander passenden Definitions- und Wertebereichen) gegeben sind, so können diese „verkettet“ werden, indem die Funktion $f \circ g$ mit der Abbildungsvorschrift $x \mapsto f\big(g(x)\big)$ gebildet wird. Deren Ableitung erhält man gemäß der sogenannten **Kettenregel**:

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x).$$

(a) Betrachten Sie das Polynom $p(t) = (1-t)^3$. Finden Sie $f(u)$ und $g(t)$ so, dass $p(t) = f\big(g(t)\big)$ gilt. Berechnen Sie dann die Ableitung $p'(t)$ mit der Kettenregel.

(b) Betrachten Sie $q(t) = (1-t)^2$. Berechnen Sie die Ableitung $q'(t)$

- mit der Kettenregel,
- nachdem Sie $(1-t)^2$ ausmultipliziert haben: $(1-t)^2 = 1 - 2\,t + t^2$.

(c) Betrachten Sie $r(t) = t \cdot (1-t)^2$ sowie $s(t) = t^2 \cdot (1-t)$. Multiplizieren Sie jeweils aus und bestimmen Sie die Ableitungen $r'(t)$ und $s'(t)$.

Aufgabe T 14. *Ableitungen von Bézier-Polynomen*

Es seien p_0, p_1, p_2 und p_3 Kontrollpunkte einer kubischen Bézierkurve mit Parametrisierung $p\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$p(t) = (1-t)^3\, p_0 + 3\,t\,(1-t)^2\, p_1 + 3\,t^2\,(1-t)\, p_2 + t^3\, p_3$$

(a) Berechnen Sie die erste Ableitung $p'\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto p'(t)$ und zeigen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$p'(t) = 3\,(1-t)^2 \cdot (p_1 - p_0) + 6\,t\,(1-t) \cdot (p_2 - p_1) + 3\,t^2 \cdot (p_3 - p_2).$$

(b) Berechnen Sie die zweite Ableitung $p''\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto p''(t)$ und zeigen Sie, dass die Gleichung $p''(t) = 6\,(1-t) \cdot (p_2 - 2p_1 + p_0) + 6\,t \cdot (p_3 - 2p_2 + p_1)$ erfüllt ist.

Aufgabe T 15. *Ableitungen von Bézier-Polynomen*

Wie in Aufgabe T 3 sei eine eine kubischen Bézierkurve mit Parametrisierung $p\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ und Kontrollpunkten p_0, p_1, p_2 und p_3 gegeben Am Punkte p_3 soll nun eine zweite Bézierkurve mit Parametrisierung $q\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ „angehängt" werden. Wir überlegen uns, welche Bedingungen deren Kontrollpunkte q_0, q_1, q_2 und q_3 erfüllen müssen, wenn wir bestimmte Stetigkeitsanforderungen stellen:

(a) Stetigkeit an der Anschlussstelle erfordert $p(1) = q(0)$, somit $p_3 = q_0$.

(b) Stetigkeit der **Geschwindigkeit** an der Anschlussstelle erfordert $p'(1) = q'(0)$. Folgern Sie hieraus und aus den Ergebnissen der Aufgabe T 3 die Bedingung

$$p_3 - p_2 \; = \; q_1 - q_0.$$

(c) Skizzieren Sie vier frei von Ihnen gewählte Kontrollpunkte p_0, p_1, p_2 und p_3 und legen Sie dar, wie die Punkte q_0 und q_1 platziert werden müssen, damit die bislang betrachteten Stetigkeitsanforderungen erfüllt sind.

(d) Verlangt man zusätzlich Stetigkeit der **Beschleunigung** an der Anschlussstelle, so heißt dies, dass $p''(1) = q''(0)$ gelten muss. Folgern Sie hieraus und aus den Ergebnissen der Aufgabe T 3 die Bedingung

$$p_3 \, - \, 2\,p_2 \, + \, p_1 \; = \; q_2 \, - \, 2\,q_1 \, + \, q_0$$

bzw. nach Einsetzen der zuvor ermittelten Bedingungen

$$p_2 + (p_2 - p_1) \; = \; q_1 + (q_1 - q_2) \quad \rightsquigarrow \quad q_2 \; = \; 4\,p_3 \, - \, 4\,p_2 + p_1.$$

Bemerkung: Die drei Stetigkeitsanforderungen sind also unabhängig von der Lage von q_3 erfüllbar.

(e) Werten Sie die Bedingungen aus den Teilaufgaben **(a)** bis **(d)** geometrisch aus und geben Sie an, wie (bei vorgegebenen Punkten p_0, p_1, p_2 und p_3) die Punkte q_0, q_1 und q_2 platziert werden müssen, damit alle Stetigkeitsanforderungen erfüllt sind.