Example 3 : Line-segment AB is parallel to another line-segment CD. O is the mid-point of AD (see Fig. 7.15). Show that (i) $\triangle AOB \cong \triangle DOC$ (ii) O is also the mid-point of BC.

Solution : (i) Consider $\triangle$ AOB and $\triangle$ DOC.

$\angle$ ABO = $\angle$ DCO

    (Alternate angles as AB $\parallel$ CD

      and BC is the transversal)

$\angle$ AOB = $\angle$ DOC

    (Vertically opposite angles)

OA = OD   (Given)

Therefore, $\triangle$AOB $\cong$ $\triangle$DOC   (AAS rule)

(ii)   OB = OC   (CPCT)

So, O is the mid-point of BC.

Fig. 7.15

```
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
draw triangle
extend AC from C for 200
extend BC from C for 200
join CD DE CE
equation parallel_line AB DE
equation line_eq AC CD
compute
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

>>> draw triangle
angle(ABC)+angle(ACB)+angle(BAC)=180
>>> extend AC from C for 200
new point added
angle(ABC)+angle(ACB)+angle(BAC)=180
>>> extend BC from C for 200
new point added
angle(ABC)+angle(ACB)+angle(BAC)=180
>>> join CD DE CE
angle(BCE)=180
angle(ACD)=180
angle(ACB)+angle(ACE)-angle(BCE)=0
angle(ACB)+angle(BCD)-angle(ACD)=0
angle(ACE)-angle(ACD)+angle(DCE)=0
-angle(BCE)+angle(BCD)+angle(DCE)=0
angle(ACE)-angle(BCD)=0
-angle(ACB)+angle(DCE)=0
angle(ACB)+angle(ABE)+angle(BAD)=180
angle(ADE)+angle(BED)+angle(DCE)=180
line(BC)+line(CE)-line(BE)=0
line(AC)+line(CD)-line(AD)=0
>>> equation parallel_line AB DE
angle(BCE)=180
angle(ACD)=180
angle(ACB)+angle(ACE)-angle(BCE)=0
```
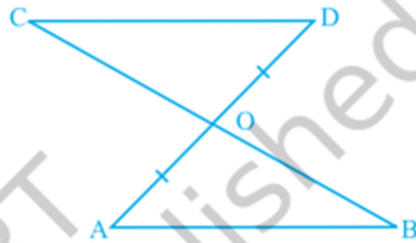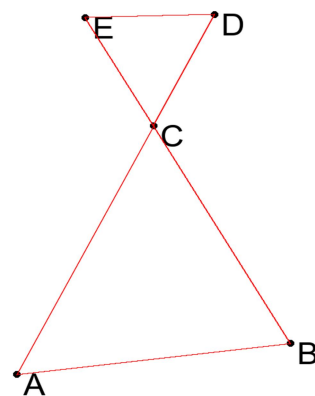
```
angle(ACB)+angle(BCD)-angle(ACD)=0
angle(ACE)-angle(ACD)+angle(DCE)=0
-angle(BCE)+angle(BCD)+angle(DCE)=0
angle(ACE)-angle(BCD)=0
-angle(ACB)+angle(DCE)=0
angle(ACB)+angle(ABE)+angle(BAD)=180
angle(ADE)+angle(BED)+angle(DCE)=180
-angle(ADE)+angle(BAD)=0
angle(ABE)-angle(BED)=0
line(BC)+line(CE)-line(BE)=0
line(AC)+line(CD)-line(AD)=0
parallel(line(AB),line(DE))
>>> equation line_eq AC CD
angle(BCE)=180
angle(ACD)=180
angle(ACB)+angle(ACE)-angle(BCE)=0
angle(ACB)+angle(BCD)-angle(ACD)=0
angle(ACE)-angle(ACD)+angle(DCE)=0
-angle(BCE)+angle(BCD)+angle(DCE)=0
angle(ACE)-angle(BCD)=0
-angle(ACB)+angle(DCE)=0
angle(ACB)+angle(ABE)+angle(BAD)=180
angle(ADE)+angle(BED)+angle(DCE)=180
-angle(ADE)+angle(BAD)=0
angle(ABE)-angle(BED)=0
line(BC)+line(CE)-line(BE)=0
line(AC)-line(CD)=0
line(AC)+line(CD)-line(AD)=0
parallel(line(AB),line(DE))
>>> compute
angle(BCE)=180
angle(ACD)=180
angle(ACB)+angle(ACE)-angle(BCE)=0
angle(ACB)+angle(BCD)-angle(ACD)=0
angle(ACE)-angle(ACD)+angle(DCE)=0
-angle(BCE)+angle(BCD)+angle(DCE)=0
angle(ACE)-angle(BCD)=0
-angle(ACB)+angle(DCE)=0
angle(ACB)+angle(ABE)+angle(BAD)=180
angle(ADE)+angle(BED)+angle(DCE)=180
-angle(ADE)+angle(BAD)=0
angle(ABE)-angle(BED)=0
angle(ADE)-angle(BAD)=0
-angle(ABE)+angle(BED)=0
angle(ACB)-angle(DCE)=0
angle(BCE)-angle(ACD)=0
line(BC)+line(CE)-line(BE)=0
-line(BC)+line(CE)=0
line(AC)-line(CD)=0
line(AC)+line(CD)-line(AD)=0
-line(AC)+line(CD)=0
-line(AB)+line(DE)=0
congruent(triangle(ECD),triangle(BCA))
parallel(line(AB),line(DE))

end of program
```

EXERCISE 7.1

1. In quadrilateral ACBD,

    AC = AD and AB bisects ∠ A
    (see Fig. 7.16). Show that △ ABC ≅ △ ABD.

    What can you say about BC and BD?
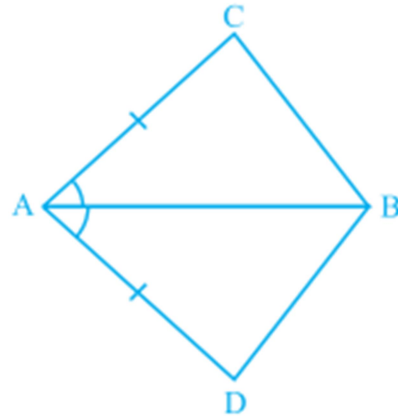
Fig. 7.16

```
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
draw quadrilateral
join BD
equation angle_eq BDA BDC
equation line_eq CD AD
compute
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

>>> draw quadrilateral
angle(BAD)+angle(ABC)+angle(BCD)+angle(ADC)=360
>>> join BD
angle(BAD)+angle(ABC)+angle(BCD)+angle(ADC)=360
-angle(ADC)+angle(BDC)+angle(ADB)=0
-angle(ABC)+angle(CBD)+angle(ABD)=0
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
>>> equation angle_eq BDA BDC
angle(BAD)+angle(ABC)+angle(BCD)+angle(ADC)=360
-angle(ADC)+angle(BDC)+angle(ADB)=0
-angle(ABC)+angle(CBD)+angle(ABD)=0
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
-angle(BDC)+angle(ADB)=0
>>> equation line_eq CD AD
angle(BAD)+angle(ABC)+angle(BCD)+angle(ADC)=360
-angle(ADC)+angle(BDC)+angle(ADB)=0
-angle(ABC)+angle(CBD)+angle(ABD)=0
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
-angle(BDC)+angle(ADB)=0
line(CD)-line(AD)=0
>>> compute
angle(BAD)+angle(ABC)+angle(BCD)+angle(ADC)=360
-angle(ADC)+angle(BDC)+angle(ADB)=0
-angle(ABC)+angle(CBD)+angle(ABD)=0
```
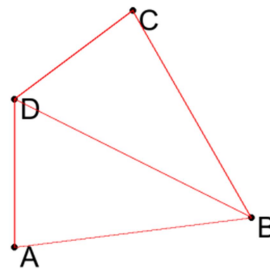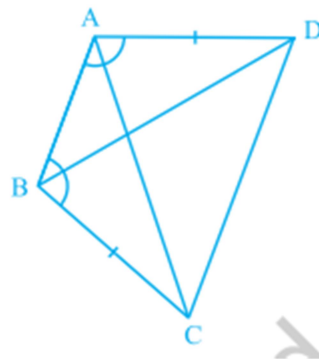
```
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
-angle(BDC)+angle(ADB)=0
angle(BDC)-angle(ADB)=0
-angle(BAD)+angle(BCD)=0
angle(CBD)-angle(ABD)=0
angle(BAD)-angle(BCD)=0
```
<mark>-line(AB)+line(BC)=0</mark>
```
line(CD)-line(AD)=0
```
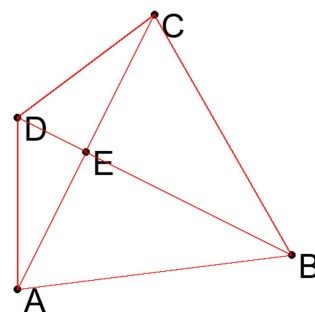<mark>congruent(triangle(BDC),triangle(BDA))</mark>

```
end of program
```

2. ABCD is a quadrilateral in which AD = BC and
   ∠DAB = ∠CBA (see Fig. 7.17). Prove that

   (i)   △ABD ≅ △BAC

   (ii) BD = AC

   (iii) ∠ABD = ∠BAC.


```
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
draw quadrilateral
join AC BD
equation angle_eq ADC BAD
equation line_eq CD AB
compute
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
>>> draw quadrilateral
angle(ABC)+angle(BAD)+angle(ADC)+angle(BCD)=360
>>> join AC BD
angle(ABC)+angle(BAD)+angle(ADC)+angle(BCD)=360
angle(BED)=180
angle(AEC)=180
-angle(ADC)+angle(BDC)+angle(ADB)=0
angle(AED)+angle(CED)-angle(AEC)=0
angle(AED)-angle(BED)+angle(AEB)=0
-angle(ABC)+angle(CBD)+angle(ABD)=0
angle(CED)+angle(BEC)-angle(BED)=0
-angle(BCD)+angle(ACD)+angle(ACB)=0
-angle(BAD)+angle(CAD)+angle(BAC)=0
angle(BEC)-angle(AEC)+angle(AEB)=0
angle(AED)-angle(BEC)=0
angle(CED)-angle(AEB)=0
angle(ABC)+angle(BCD)+angle(BDC)-angle(AED)+angle(BAC)=180
angle(ABC)+angle(BAC)+angle(ACB)=180
angle(ABC)+angle(BAD)-angle(CED)+angle(ACB)+angle(ADB)=180
angle(BAC)+angle(AEB)+angle(ABD)=180
angle(BAD)+angle(ADC)+angle(ACD)-angle(BEC)+angle(ABD)=180
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(ADC)+angle(BCD)+angle(CBD)+angle(CAD)-angle(AEB)=180
angle(ADC)+angle(ACD)+angle(CAD)=180
```

```
angle(AED)+angle(CAD)+angle(ADB)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
angle(CBD)+angle(ACB)+angle(BEC)=180
angle(BDC)+angle(CED)+angle(ACD)=180
-angle(AED)+angle(BEC)=0
line(AE)+line(CE)-line(AC)=0
line(BE)+line(DE)-line(BD)=0
>>> equation angle_eq ADC BAD
angle(ABC)+angle(BAD)+angle(ADC)+angle(BCD)=360
angle(BED)=180
angle(AEC)=180
-angle(ADC)+angle(BDC)+angle(ADB)=0
angle(AED)+angle(CED)-angle(AEC)=0
angle(AED)-angle(BED)+angle(AEB)=0
-angle(ABC)+angle(CBD)+angle(ABD)=0
angle(CED)+angle(BEC)-angle(BED)=0
-angle(BCD)+angle(ACD)+angle(ACB)=0
-angle(BAD)+angle(CAD)+angle(BAC)=0
angle(BEC)-angle(AEC)+angle(AEB)=0
angle(AED)-angle(BEC)=0
angle(CED)-angle(AEB)=0
angle(ABC)+angle(BCD)+angle(BDC)-angle(AED)+angle(BAC)=180
angle(ABC)+angle(BAC)+angle(ACB)=180
angle(ABC)+angle(BAD)-angle(CED)+angle(ACB)+angle(ADB)=180
angle(BAC)+angle(AEB)+angle(ABD)=180
angle(BAD)+angle(ADC)+angle(ACD)-angle(BEC)+angle(ABD)=180
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(ADC)+angle(BCD)+angle(CBD)+angle(CAD)-angle(AEB)=180
angle(ADC)+angle(ACD)+angle(CAD)=180
angle(AED)+angle(CAD)+angle(ADB)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
angle(CBD)+angle(ACB)+angle(BEC)=180
angle(BDC)+angle(CED)+angle(ACD)=180
-angle(AED)+angle(BEC)=0
-angle(BAD)+angle(ADC)=0
line(AE)+line(CE)-line(AC)=0
line(BE)+line(DE)-line(BD)=0
>>> equation line_eq CD AB
angle(ABC)+angle(BAD)+angle(ADC)+angle(BCD)=360
angle(BED)=180
angle(AEC)=180
-angle(ADC)+angle(BDC)+angle(ADB)=0
angle(AED)+angle(CED)-angle(AEC)=0
angle(AED)-angle(BED)+angle(AEB)=0
-angle(ABC)+angle(CBD)+angle(ABD)=0
angle(CED)+angle(BEC)-angle(BED)=0
-angle(BCD)+angle(ACD)+angle(ACB)=0
-angle(BAD)+angle(CAD)+angle(BAC)=0
angle(BEC)-angle(AEC)+angle(AEB)=0
angle(AED)-angle(BEC)=0
angle(CED)-angle(AEB)=0
angle(ABC)+angle(BCD)+angle(BDC)-angle(AED)+angle(BAC)=180
angle(ABC)+angle(BAC)+angle(ACB)=180
angle(ABC)+angle(BAD)-angle(CED)+angle(ACB)+angle(ADB)=180
angle(BAC)+angle(AEB)+angle(ABD)=180
angle(BAD)+angle(ADC)+angle(ACD)-angle(BEC)+angle(ABD)=180
```

```
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(ADC)+angle(BCD)+angle(CBD)+angle(CAD)-angle(AEB)=180
angle(ADC)+angle(ACD)+angle(CAD)=180
angle(AED)+angle(CAD)+angle(ADB)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
angle(CBD)+angle(ACB)+angle(BEC)=180
angle(BDC)+angle(CED)+angle(ACD)=180
-angle(AED)+angle(BEC)=0
-angle(BAD)+angle(ADC)=0
-line(AB)+line(CD)=0
line(AE)+line(CE)-line(AC)=0
line(BE)+line(DE)-line(BD)=0
>>> compute
angle(ABC)+angle(BAD)+angle(ADC)+angle(BCD)=360
angle(BED)=180
angle(AEC)=180
-angle(ADC)+angle(BDC)+angle(ADB)=0
angle(AED)+angle(CED)-angle(AEC)=0
angle(AED)-angle(BED)+angle(AEB)=0
-angle(ABC)+angle(CBD)+angle(ABD)=0
angle(CED)+angle(BEC)-angle(BED)=0
-angle(BCD)+angle(ACD)+angle(ACB)=0
-angle(BAD)+angle(CAD)+angle(BAC)=0
angle(BEC)-angle(AEC)+angle(AEB)=0
angle(AED)-angle(BEC)=0
angle(CED)-angle(AEB)=0
angle(ABC)+angle(BCD)+angle(BDC)-angle(AED)+angle(BAC)=180
angle(ABC)+angle(BAC)+angle(ACB)=180
angle(ABC)+angle(BAD)-angle(CED)+angle(ACB)+angle(ADB)=180
angle(BAC)+angle(AEB)+angle(ABD)=180
angle(BAD)+angle(ADC)+angle(ACD)-angle(BEC)+angle(ABD)=180
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(ADC)+angle(BCD)+angle(CBD)+angle(CAD)-angle(AEB)=180
angle(ADC)+angle(ACD)+angle(CAD)=180
angle(AED)+angle(CAD)+angle(ADB)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
angle(CBD)+angle(ACB)+angle(BEC)=180
angle(BDC)+angle(CED)+angle(ACD)=180
-angle(AED)+angle(BEC)=0
-angle(BAD)+angle(ADC)=0
angle(ACD)-angle(ABD)=0
angle(CAD)-angle(ADB)=0
angle(BAD)-angle(ADC)=0
angle(BDC)-angle(BAC)=0
-line(AB)+line(CD)=0
line(AE)+line(CE)-line(AC)=0
line(AB)-line(CD)=0
line(BE)+line(DE)-line(BD)=0
-line(BD)+line(AC)=0
congruent(triangle(ADC),triangle(DAB))

end of program
```

3. AD and BC are equal perpendiculars to a line segment AB (see Fig. 7.18). Show that CD bisects AB.

Fig. 7.17
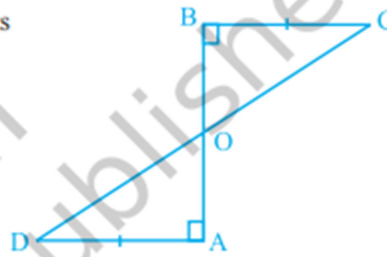

```
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
draw triangle
extend AC from C for 200
extend BC from C for 200
join CD CE DE
equation angle_val ADE 90
equation angle_val BAC 90
equation line_eq AB DE
compute
compute
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
>>> draw triangle
angle(ABC)+angle(ACB)+angle(BAC)=180
>>> extend AC from C for 200
new point added
angle(ABC)+angle(ACB)+angle(BAC)=180
>>> extend BC from C for 200
new point added
angle(ABC)+angle(ACB)+angle(BAC)=180
>>> join CD CE DE
angle(ACD)=180
angle(BCE)=180
angle(ACB)+angle(BCD)-angle(ACD)=0
angle(ACB)-angle(BCE)+angle(ACE)=0
angle(BCD)+angle(DCE)-angle(BCE)=0
angle(DCE)-angle(ACD)+angle(ACE)=0
angle(BCD)-angle(ACE)=0
-angle(ACB)+angle(DCE)=0
angle(ACB)+angle(ABE)+angle(BAD)=180
angle(DCE)+angle(BED)+angle(ADE)=180
line(AC)+line(CD)-line(AD)=0
line(BC)+line(CE)-line(BE)=0
>>> equation angle_val ADE 90
angle(ACD)=180
angle(BCE)=180
angle(ACB)+angle(BCD)-angle(ACD)=0
angle(ACB)-angle(BCE)+angle(ACE)=0
angle(BCD)+angle(DCE)-angle(BCE)=0
angle(DCE)-angle(ACD)+angle(ACE)=0
angle(BCD)-angle(ACE)=0
-angle(ACB)+angle(DCE)=0
angle(ACB)+angle(ABE)+angle(BAD)=180
angle(DCE)+angle(BED)+angle(ADE)=180
angle(ADE)=90
line(AC)+line(CD)-line(AD)=0
```
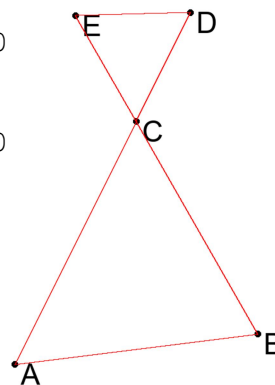
```
line(BC)+line(CE)-line(BE)=0
>>> equation angle_val BAC 90
angle(ACD)=180
angle(BCE)=180
angle(ACB)+angle(BCD)-angle(ACD)=0
angle(ACB)-angle(BCE)+angle(ACE)=0
angle(BCD)+angle(DCE)-angle(BCE)=0
angle(DCE)-angle(ACD)+angle(ACE)=0
angle(BCD)-angle(ACE)=0
-angle(ACB)+angle(DCE)=0
angle(ACB)+angle(ABE)+angle(BAD)=180
angle(DCE)+angle(BED)+angle(ADE)=180
angle(ADE)=90
angle(BAD)=90
line(AC)+line(CD)-line(AD)=0
line(BC)+line(CE)-line(BE)=0
>>> equation line_eq AB DE
angle(ACD)=180
angle(BCE)=180
angle(ACB)+angle(BCD)-angle(ACD)=0
angle(ACB)-angle(BCE)+angle(ACE)=0
angle(BCD)+angle(DCE)-angle(BCE)=0
angle(DCE)-angle(ACD)+angle(ACE)=0
angle(BCD)-angle(ACE)=0
-angle(ACB)+angle(DCE)=0
angle(ACB)+angle(ABE)+angle(BAD)=180
angle(DCE)+angle(BED)+angle(ADE)=180
angle(ADE)=90
angle(BAD)=90
line(AC)+line(CD)-line(AD)=0
line(AB)-line(DE)=0
line(BC)+line(CE)-line(BE)=0
>>> compute
angle(ACD)=180
angle(BCE)=180
angle(ACB)+angle(BCD)-angle(ACD)=0
angle(ACB)-angle(BCE)+angle(ACE)=0
angle(BCD)+angle(DCE)-angle(BCE)=0
angle(DCE)-angle(ACD)+angle(ACE)=0
angle(BCD)-angle(ACE)=0
-angle(ACB)+angle(DCE)=0
angle(ACB)+angle(ABE)+angle(BAD)=180
angle(DCE)+angle(BED)+angle(ADE)=180
angle(ADE)=90
angle(BAD)=90
angle(ACB)-angle(DCE)=0
angle(ABE)-angle(BED)=0
angle(ACD)-angle(BCE)=0
angle(BAD)-angle(ADE)=0
line(AC)+line(CD)-line(AD)=0
line(AB)-line(DE)=0
line(BC)+line(CE)-line(BE)=0
>>> compute
angle(ACD)=180
angle(BCE)=180
angle(ACB)+angle(BCD)-angle(ACD)=0
```

```
angle(ACB)-angle(BCE)+angle(ACE)=0
angle(BCD)+angle(DCE)-angle(BCE)=0
angle(DCE)-angle(ACD)+angle(ACE)=0
angle(BCD)-angle(ACE)=0
-angle(ACB)+angle(DCE)=0
angle(ACB)+angle(ABE)+angle(BAD)=180
angle(DCE)+angle(BED)+angle(ADE)=180
angle(ADE)=90
angle(BAD)=90
angle(ACB)-angle(DCE)=0
angle(ABE)-angle(BED)=0
angle(ACD)-angle(BCE)=0
angle(BAD)-angle(ADE)=0
line(AC)-line(CD)=0
line(BC)-line(CE)=0
line(BC)+line(CE)-line(BE)=0
line(AC)+line(CD)-line(AD)=0
line(AB)-line(DE)=0
congruent(triangle(CAB),triangle(CDE))

end of program
```

4. *l* and *m* are two parallel lines intersected by another pair of parallel lines *p* and *q* (see Fig. 7.19). Show that $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

Fig. 7.18
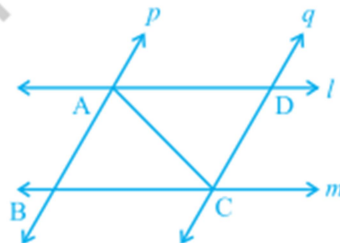
```
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
draw quadrilateral
join BD
equation parallel_line AB CD
equation parallel_line AD BC
compute
compute
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
>>> draw quadrilateral
angle(BAD)+angle(BCD)+angle(ADC)+angle(ABC)=360
>>> join BD
angle(BAD)+angle(BCD)+angle(ADC)+angle(ABC)=360
-angle(ADC)+angle(BDC)+angle(ADB)=0
-angle(ABC)+angle(CBD)+angle(ABD)=0
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
>>> equation parallel_line AB CD
angle(BAD)+angle(BCD)+angle(ADC)+angle(ABC)=360
-angle(ADC)+angle(BDC)+angle(ADB)=0
-angle(ABC)+angle(CBD)+angle(ABD)=0
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
-angle(BDC)+angle(ABD)=0
parallel(line(AB),line(CD))
>>> equation parallel_line AD BC
```
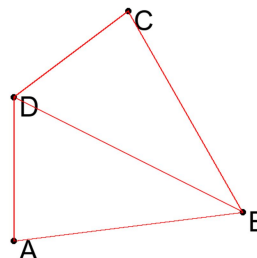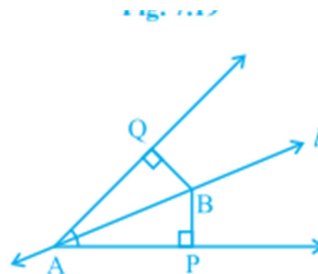
```
angle(BAD)+angle(BCD)+angle(ADC)+angle(ABC)=360
-angle(ADC)+angle(BDC)+angle(ADB)=0
-angle(ABC)+angle(CBD)+angle(ABD)=0
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
-angle(BDC)+angle(ABD)=0
angle(CBD)-angle(ADB)=0
parallel(line(AB),line(CD))
parallel(line(AD),line(BC))
>>> compute
angle(BAD)+angle(BCD)+angle(ADC)+angle(ABC)=360
-angle(ADC)+angle(BDC)+angle(ADB)=0
-angle(ABC)+angle(CBD)+angle(ABD)=0
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
-angle(BDC)+angle(ABD)=0
angle(CBD)-angle(ADB)=0
angle(BAD)-angle(BCD)=0
angle(BDC)-angle(ABD)=0
parallel(line(AB),line(CD))
parallel(line(AD),line(BC))
>>> compute
angle(BAD)+angle(BCD)+angle(ADC)+angle(ABC)=360
-angle(ADC)+angle(BDC)+angle(ADB)=0
-angle(ABC)+angle(CBD)+angle(ABD)=0
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
-angle(BDC)+angle(ABD)=0
angle(CBD)-angle(ADB)=0
angle(BAD)-angle(BCD)=0
angle(BDC)-angle(ABD)=0
-angle(BAD)+angle(BCD)=0
line(BC)-line(AD)=0
-line(AB)+line(CD)=0
congruent(triangle(CBD),triangle(ADB))
parallel(line(AB),line(CD))
parallel(line(AD),line(BC))

end of program
```

5. Line *l* is the bisector of an angle ∠ A and B is any point on *l*. BP and BQ are perpendiculars from B to the arms of ∠ A (see Fig. 7.20). Show that:

(i)   Δ APB ≅ Δ AQB

(ii) BP = BQ or B is equidistant from the arms

of ∠ A.


```
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
draw quadrilateral
join BD
equation angle_eq ABD CBD
equation angle_val BAD 90
equation angle_val BCD 90
compute
```

```
compute
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
>>> draw quadrilateral
angle(ABC)+angle(BAD)+angle(BCD)+angle(ADC)=360
>>> join BD
angle(ABC)+angle(BAD)+angle(BCD)+angle(ADC)=360
-angle(ADC)+angle(ADB)+angle(BDC)=0
-angle(ABC)+angle(ABD)+angle(CBD)=0
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
>>> equation angle_eq ABD CBD
angle(ABC)+angle(BAD)+angle(BCD)+angle(ADC)=360
-angle(ADC)+angle(ADB)+angle(BDC)=0
-angle(ABC)+angle(ABD)+angle(CBD)=0
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
angle(ABD)-angle(CBD)=0
>>> equation angle_val BAD 90
angle(ABC)+angle(BAD)+angle(BCD)+angle(ADC)=360
-angle(ADC)+angle(ADB)+angle(BDC)=0
-angle(ABC)+angle(ABD)+angle(CBD)=0
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
angle(ABD)-angle(CBD)=0
angle(BAD)=90
>>> equation angle_val BCD 90
angle(ABC)+angle(BAD)+angle(BCD)+angle(ADC)=360
-angle(ADC)+angle(ADB)+angle(BDC)=0
-angle(ABC)+angle(ABD)+angle(CBD)=0
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
angle(ABD)-angle(CBD)=0
angle(BAD)=90
angle(BCD)=90
>>> compute
angle(ABC)+angle(BAD)+angle(BCD)+angle(ADC)=360
-angle(ADC)+angle(ADB)+angle(BDC)=0
-angle(ABC)+angle(ABD)+angle(CBD)=0
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
angle(ABD)-angle(CBD)=0
angle(BAD)=90
angle(BCD)=90
angle(BAD)-angle(BCD)=0
>>> compute
angle(ABC)+angle(BAD)+angle(BCD)+angle(ADC)=360
-angle(ADC)+angle(ADB)+angle(BDC)=0
-angle(ABC)+angle(ABD)+angle(CBD)=0
angle(BAD)+angle(ADB)+angle(ABD)=180
angle(BCD)+angle(BDC)+angle(CBD)=180
angle(ABD)-angle(CBD)=0
angle(BAD)=90
angle(BCD)=90
angle(BAD)-angle(BCD)=0
angle(ADB)-angle(BDC)=0
-line(CD)+line(AD)=0
```
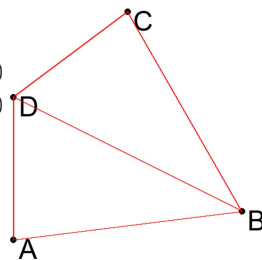
```
line(AB)-line(BC)=0
congruent(triangle(ABD),triangle(CBD))

end of program
```

8. In right triangle ABC, right angled at C, M is the mid-point of hypotenuse AB. C is joined to M and produced to a point D such that DM = CM. Point D is joined to point B (see Fig. 7.23). Show that:

(i) $\triangle$ AMC $\cong$ $\triangle$ BMD

(ii) $\angle$ DBC is a right angle.

(iii) $\triangle$ DBC $\cong$ $\triangle$ ACB
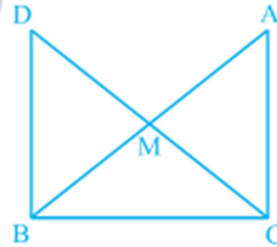
(iv) CM $= \dfrac{1}{2}$ AB

Fig. 7.22

Fig. 7.23

```
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
draw triangle
extend AC from C for 200
extend BC from C for 200
join EA EC CD BD
equation line_eq CE BC
equation line_eq AC CD
equation angle_val ABD 90
compute
compute
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
>>> draw triangle
angle(ABC)+angle(BAC)+angle(ACB)=180
>>> extend AC from C for 200
new point added
angle(ABC)+angle(BAC)+angle(ACB)=180
>>> extend BC from C for 200
new point added
angle(ABC)+angle(BAC)+angle(ACB)=180
>>> join EA EC CD BD
angle(ACD)=180
angle(BCE)=180
angle(ACB)+angle(ACE)-angle(BCE)=0
angle(ACB)-angle(ACD)+angle(BCD)=0
angle(DCE)-angle(ACD)+angle(ACE)=0
angle(DCE)-angle(BCE)+angle(BCD)=0
angle(DAE)+angle(BAD)-angle(BAE)=0
-angle(ABD)+angle(ABE)+angle(DBE)=0
-angle(ACE)+angle(BCD)=0
-angle(ACB)+angle(DCE)=0
angle(ACB)+angle(ABE)+angle(BAD)=180
angle(AEB)+angle(ABE)+angle(BAE)=180
angle(ABD)+angle(ADB)+angle(BAD)=180
angle(ABD)-angle(DCE)+angle(AEB)+angle(ADB)+angle(BAE)=180
angle(DAE)+angle(AEB)+angle(ACE)=180
angle(ADB)+angle(DBE)+angle(BCD)=180
```

```
line(BC)+line(CE)-line(BE)=0
line(AC)+line(CD)-line(AD)=0
>>> equation line_eq CE BC
angle(ACD)=180
angle(BCE)=180
angle(ACB)+angle(ACE)-angle(BCE)=0
angle(ACB)-angle(ACD)+angle(BCD)=0
angle(DCE)-angle(ACD)+angle(ACE)=0
angle(DCE)-angle(BCE)+angle(BCD)=0
angle(DAE)+angle(BAD)-angle(BAE)=0
-angle(ABD)+angle(ABE)+angle(DBE)=0
-angle(ACE)+angle(BCD)=0
-angle(ACB)+angle(DCE)=0
angle(ACB)+angle(ABE)+angle(BAD)=180
angle(AEB)+angle(ABE)+angle(BAE)=180
angle(ABD)+angle(ADB)+angle(BAD)=180
angle(ABD)-angle(DCE)+angle(AEB)+angle(ADB)+angle(BAE)=180
angle(DAE)+angle(AEB)+angle(ACE)=180
angle(ADB)+angle(DBE)+angle(BCD)=180
line(BC)+line(CE)-line(BE)=0
line(AC)+line(CD)-line(AD)=0
-line(BC)+line(CE)=0
>>> equation line_eq AC CD
angle(ACD)=180
angle(BCE)=180
angle(ACB)+angle(ACE)-angle(BCE)=0
angle(ACB)-angle(ACD)+angle(BCD)=0
angle(DCE)-angle(ACD)+angle(ACE)=0
angle(DCE)-angle(BCE)+angle(BCD)=0
angle(DAE)+angle(BAD)-angle(BAE)=0
-angle(ABD)+angle(ABE)+angle(DBE)=0
-angle(ACE)+angle(BCD)=0
-angle(ACB)+angle(DCE)=0
angle(ACB)+angle(ABE)+angle(BAD)=180
angle(AEB)+angle(ABE)+angle(BAE)=180
angle(ABD)+angle(ADB)+angle(BAD)=180
angle(ABD)-angle(DCE)+angle(AEB)+angle(ADB)+angle(BAE)=180
angle(DAE)+angle(AEB)+angle(ACE)=180
angle(ADB)+angle(DBE)+angle(BCD)=180
line(BC)+line(CE)-line(BE)=0
line(AC)+line(CD)-line(AD)=0
-line(BC)+line(CE)=0
line(AC)-line(CD)=0
>>> equation angle_val ABD 90
angle(ACD)=180
angle(BCE)=180
angle(ACB)+angle(ACE)-angle(BCE)=0
angle(ACB)-angle(ACD)+angle(BCD)=0
angle(DCE)-angle(ACD)+angle(ACE)=0
angle(DCE)-angle(BCE)+angle(BCD)=0
angle(DAE)+angle(BAD)-angle(BAE)=0
-angle(ABD)+angle(ABE)+angle(DBE)=0
-angle(ACE)+angle(BCD)=0
-angle(ACB)+angle(DCE)=0
angle(ACB)+angle(ABE)+angle(BAD)=180
angle(AEB)+angle(ABE)+angle(BAE)=180
```
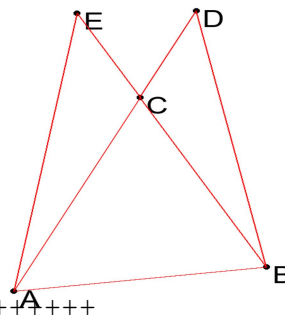
```
angle(ABD)+angle(ADB)+angle(BAD)=180
angle(ABD)-angle(DCE)+angle(AEB)+angle(ADB)+angle(BAE)=180
angle(DAE)+angle(AEB)+angle(ACE)=180
angle(ADB)+angle(DBE)+angle(BCD)=180
angle(ABD)=90
line(BC)+line(CE)-line(BE)=0
line(AC)+line(CD)-line(AD)=0
-line(BC)+line(CE)=0
line(AC)-line(CD)=0
>>> compute
angle(ACD)=180
angle(BCE)=180
angle(ACB)+angle(ACE)-angle(BCE)=0
angle(ACB)-angle(ACD)+angle(BCD)=0
angle(DCE)-angle(ACD)+angle(ACE)=0
angle(DCE)-angle(BCE)+angle(BCD)=0
angle(DAE)+angle(BAD)-angle(BAE)=0
-angle(ABD)+angle(ABE)+angle(DBE)=0
-angle(ACE)+angle(BCD)=0
-angle(ACB)+angle(DCE)=0
angle(ACB)+angle(ABE)+angle(BAD)=180
angle(AEB)+angle(ABE)+angle(BAE)=180
angle(ABD)+angle(ADB)+angle(BAD)=180
angle(ABD)-angle(DCE)+angle(AEB)+angle(ADB)+angle(BAE)=180
angle(DAE)+angle(AEB)+angle(ACE)=180
angle(ADB)+angle(DBE)+angle(BCD)=180
angle(ABD)=90
-angle(DAE)+angle(ADB)=0
-angle(AEB)+angle(DBE)=0
angle(ACB)-angle(DCE)=0
angle(ABD)-angle(BAE)=0
angle(DAE)-angle(ADB)=0
angle(AEB)-angle(DBE)=0
angle(ACD)-angle(BCE)=0
angle(ACE)-angle(BCD)=0
angle(BAE)=90
-line(BC)+line(CE)=0
line(AC)-line(CD)=0
line(BC)-line(CE)=0
-line(AE)+line(BD)=0
line(BC)+line(CE)-line(BE)=0
line(AC)+line(CD)-line(AD)=0
-line(AC)+line(CD)=0
congruent(triangle(BCD),triangle(ECA))
>>> compute
angle(ACD)=180
angle(BCE)=180
angle(ACB)+angle(ACE)-angle(BCE)=0
angle(ACB)-angle(ACD)+angle(BCD)=0
angle(DCE)-angle(ACD)+angle(ACE)=0
angle(DCE)-angle(BCE)+angle(BCD)=0
angle(DAE)+angle(BAD)-angle(BAE)=0
-angle(ABD)+angle(ABE)+angle(DBE)=0
-angle(ACE)+angle(BCD)=0
-angle(ACB)+angle(DCE)=0
angle(ACB)+angle(ABE)+angle(BAD)=180
```

```
angle(AEB)+angle(ABE)+angle(BAE)=180
angle(ABD)+angle(ADB)+angle(BAD)=180
angle(ABD)-angle(DCE)+angle(AEB)+angle(ADB)+angle(BAE)=180
angle(DAE)+angle(AEB)+angle(ACE)=180
angle(ADB)+angle(DBE)+angle(BCD)=180
angle(ABD)=90
-angle(DAE)+angle(ADB)=0
-angle(AEB)+angle(DBE)=0
angle(ACB)-angle(DCE)=0
angle(ABD)-angle(BAE)=0
angle(DAE)-angle(ADB)=0
angle(AEB)-angle(DBE)=0
angle(ACD)-angle(BCE)=0
angle(ACE)-angle(BCD)=0
angle(BAE)=90
-angle(ABD)+angle(BAE)=0
angle(ABE)-angle(BAD)=0
angle(AEB)-angle(ADB)=0
angle(DAE)-angle(AEB)=0
angle(DAE)-angle(DBE)=0
angle(ADB)-angle(DBE)=0
-line(BC)+line(CE)=0
line(AC)-line(CD)=0
line(BC)-line(CE)=0
-line(AD)+line(BE)=0
-line(AE)+line(BD)=0
line(BC)+line(CE)-line(BE)=0
line(AC)+line(CD)-line(AD)=0
line(AE)-line(BD)=0
-line(AC)+line(CD)=0
congruent(triangle(EAB),triangle(DBA))
congruent(triangle(BDC),triangle(EAC))
congruent(triangle(BCD),triangle(ECA))

end of program
```

Example 4 : In △ ABC, the bisector AD of ∠ A is perpendicular to side BC (see Fig. 7.27). Show that AB = AC and △ ABC is isosceles.

Solution : In △ABD and △ACD,

∠ BAD = ∠ CAD	(Given)
AD = AD	(Common)
∠ ADB = ∠ ADC = 90°	(Given)
So, △ ABD ≅ △ ACD	(ASA rule)
So, AB = AC	(CPCT)

or, △ ABC is an isosceles triangle.

Fig. 7.27

```
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
draw triangle
split AB
join CD
equation angle_eq ACD BCD
```
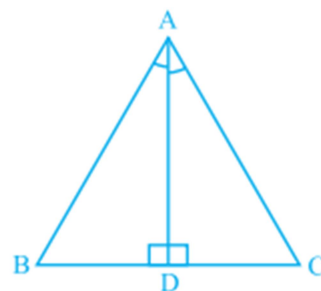
equation angle_val ADC 90
equation angle_val BDC 90
compute
compute
+++
>>> draw triangle
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
>>> split AB
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
angle(ADB)=180
-line(AB)+line(AD)+line(BD)=0
>>> join CD
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
angle(ADB)=180
-angle(ADB)+angle(ADC)+angle(BDC)=0
-angle(ACB)+angle(ACD)+angle(BCD)=0
angle(ABC)+angle(BDC)+angle(BCD)=180
angle(BAC)+angle(ADC)+angle(ACD)=180
-line(AB)+line(AD)+line(BD)=0
>>> equation angle_eq ACD BCD
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
angle(ADB)=180
-angle(ADB)+angle(ADC)+angle(BDC)=0
-angle(ACB)+angle(ACD)+angle(BCD)=0
angle(ABC)+angle(BDC)+angle(BCD)=180
angle(BAC)+angle(ADC)+angle(ACD)=180
angle(ACD)-angle(BCD)=0
-line(AB)+line(AD)+line(BD)=0
>>> equation angle_val ADC 90
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
angle(ADB)=180
-angle(ADB)+angle(ADC)+angle(BDC)=0
-angle(ACB)+angle(ACD)+angle(BCD)=0
angle(ABC)+angle(BDC)+angle(BCD)=180
angle(BAC)+angle(ADC)+angle(ACD)=180
angle(ACD)-angle(BCD)=0
angle(ADC)=90
-line(AB)+line(AD)+line(BD)=0
>>> equation angle_val BDC 90
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
angle(ADB)=180
-angle(ADB)+angle(ADC)+angle(BDC)=0
-angle(ACB)+angle(ACD)+angle(BCD)=0
angle(ABC)+angle(BDC)+angle(BCD)=180
angle(BAC)+angle(ADC)+angle(ACD)=180
angle(ACD)-angle(BCD)=0
angle(ADC)=90
angle(BDC)=90
-line(AB)+line(AD)+line(BD)=0
>>> compute
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
angle(ADB)=180
-angle(ADB)+angle(ADC)+angle(BDC)=0
-angle(ACB)+angle(ACD)+angle(BCD)=0
angle(ABC)+angle(BDC)+angle(BCD)=180
angle(BAC)+angle(ADC)+angle(ACD)=180
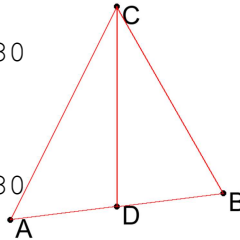
```
angle(ACD)-angle(BCD)=0
angle(ADC)=90
angle(BDC)=90
angle(ABC)-angle(BAC)=0
angle(ADC)-angle(BDC)=0
-line(AB)+line(AD)+line(BD)=0
>>> compute
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
angle(ADB)=180
-angle(ADB)+angle(ADC)+angle(BDC)=0
-angle(ACB)+angle(ACD)+angle(BCD)=0
angle(ABC)+angle(BDC)+angle(BCD)=180
angle(BAC)+angle(ADC)+angle(ACD)=180
angle(ACD)-angle(BCD)=0
angle(ADC)=90
angle(BDC)=90
angle(ABC)-angle(BAC)=0
angle(ADC)-angle(BDC)=0
-angle(ADC)+angle(BDC)=0
-angle(ACD)+angle(BCD)=0
line(BC)-line(AC)=0
-line(AB)+line(AD)+line(BD)=0
-line(AD)+line(BD)=0
congruent(triangle(BDC),triangle(ADC))

end of program
```

Example 5 : E and F are respectively the mid-points of equal sides AB and AC of Δ ABC (see Fig. 7.28). Show that BF = CE.

Solution : In Δ ABF and Δ ACE,

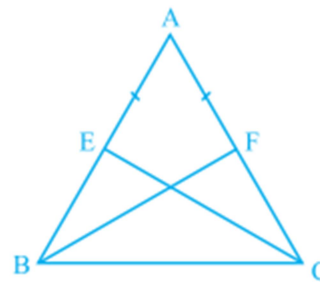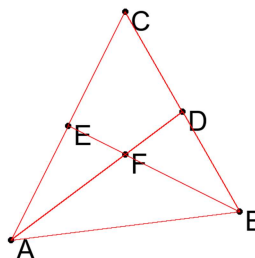|		
	AB = AC	(Given)
	∠ A = ∠ A	(Common)
	AF = AE	(Halves of equal sides)
So,	Δ ABF ≅ Δ ACE	(SAS rule)
Therefore,	BF = CE	(CPCT)

Fig. 7.28

```
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
draw triangle
split BC
split AC
join AD BE
equation line_eq AE CE
equation line_eq BD CD
equation line_eq AC BC
compute
compute
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
>>> draw triangle
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
>>> split BC
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
angle(BDC)=180
-line(BC)+line(BD)+line(CD)=0
```

```
>>> split AC
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
angle(BDC)=180
angle(AEC)=180
-line(AC)+line(CE)+line(AE)=0
-line(BC)+line(BD)+line(CD)=0
>>> join AD BE
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
angle(BDC)=180
angle(AEC)=180
angle(BFE)=180
angle(AFD)=180
-angle(BDC)+angle(ADC)+angle(ADB)=0
angle(AFB)-angle(AFD)+angle(BFD)=0
angle(AFB)-angle(BFE)+angle(AFE)=0
-angle(AEC)+angle(BEC)+angle(AEB)=0
-angle(BAC)+angle(CAD)+angle(BAD)=0
-angle(BFE)+angle(BFD)+angle(DFE)=0
-angle(AFD)+angle(DFE)+angle(AFE)=0
-angle(ABC)+angle(CBE)+angle(ABE)=0
angle(BFD)-angle(AFE)=0
-angle(AFB)+angle(DFE)=0
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BEC)+angle(BAD)-angle(AFE)=180
angle(ABC)+angle(BAD)+angle(ADB)=180
angle(ABC)+angle(BAC)+angle(AEB)-angle(DFE)+angle(ADB)=180
angle(AFB)+angle(BAD)+angle(ABE)=180
angle(ACB)+angle(BAC)+angle(ADC)-angle(BFD)+angle(ABE)=180
angle(BAC)+angle(AEB)+angle(ABE)=180
angle(ACB)-angle(AFB)+angle(CAD)+angle(CBE)=0
angle(ACB)+angle(ADC)+angle(CAD)=180
angle(CAD)+angle(AEB)+angle(AFE)=180
angle(ACB)+angle(BEC)+angle(CBE)=180
angle(BFD)+angle(CBE)+angle(ADB)=180
angle(ACB)+angle(ADC)+angle(BEC)+angle(DFE)=360
-line(BC)+line(BD)+line(CD)=0
-line(AC)+line(CE)+line(AE)=0
line(AF)+line(DF)-line(AD)=0
line(BF)+line(EF)-line(BE)=0
>>> equation line_eq AE CE
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
angle(BDC)=180
angle(AEC)=180
angle(BFE)=180
angle(AFD)=180
-angle(BDC)+angle(ADC)+angle(ADB)=0
angle(AFB)-angle(AFD)+angle(BFD)=0
angle(AFB)-angle(BFE)+angle(AFE)=0
-angle(AEC)+angle(BEC)+angle(AEB)=0
-angle(BAC)+angle(CAD)+angle(BAD)=0
-angle(BFE)+angle(BFD)+angle(DFE)=0
-angle(AFD)+angle(DFE)+angle(AFE)=0
-angle(ABC)+angle(CBE)+angle(ABE)=0
angle(BFD)-angle(AFE)=0
-angle(AFB)+angle(DFE)=0
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BEC)+angle(BAD)-angle(AFE)=180
angle(ABC)+angle(BAD)+angle(ADB)=180
```

```
angle(ABC)+angle(BAC)+angle(AEB)-angle(DFE)+angle(ADB)=180
angle(AFB)+angle(BAD)+angle(ABE)=180
angle(ACB)+angle(BAC)+angle(ADC)-angle(BFD)+angle(ABE)=180
angle(BAC)+angle(AEB)+angle(ABE)=180
angle(ACB)-angle(AFB)+angle(CAD)+angle(CBE)=0
angle(ACB)+angle(ADC)+angle(CAD)=180
angle(CAD)+angle(AEB)+angle(AFE)=180
angle(ACB)+angle(BEC)+angle(CBE)=180
angle(BFD)+angle(CBE)+angle(ADB)=180
angle(ACB)+angle(ADC)+angle(BEC)+angle(DFE)=360
-line(BC)+line(BD)+line(CD)=0
line(AF)+line(DF)-line(AD)=0
-line(AC)+line(CE)+line(AE)=0
line(BF)+line(EF)-line(BE)=0
-line(CE)+line(AE)=0
>>> equation line_eq BD CD
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
angle(BDC)=180
angle(AEC)=180
angle(BFE)=180
angle(AFD)=180
-angle(BDC)+angle(ADC)+angle(ADB)=0
angle(AFB)-angle(AFD)+angle(BFD)=0
angle(AFB)-angle(BFE)+angle(AFE)=0
-angle(AEC)+angle(BEC)+angle(AEB)=0
-angle(BAC)+angle(CAD)+angle(BAD)=0
-angle(BFE)+angle(BFD)+angle(DFE)=0
-angle(AFD)+angle(DFE)+angle(AFE)=0
-angle(ABC)+angle(CBE)+angle(ABE)=0
angle(BFD)-angle(AFE)=0
-angle(AFB)+angle(DFE)=0
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BEC)+angle(BAD)-angle(AFE)=180
angle(ABC)+angle(BAD)+angle(ADB)=180
angle(ABC)+angle(BAC)+angle(AEB)-angle(DFE)+angle(ADB)=180
angle(AFB)+angle(BAD)+angle(ABE)=180
angle(ACB)+angle(BAC)+angle(ADC)-angle(BFD)+angle(ABE)=180
angle(BAC)+angle(AEB)+angle(ABE)=180
angle(ACB)-angle(AFB)+angle(CAD)+angle(CBE)=0
angle(ACB)+angle(ADC)+angle(CAD)=180
angle(CAD)+angle(AEB)+angle(AFE)=180
angle(ACB)+angle(BEC)+angle(CBE)=180
angle(BFD)+angle(CBE)+angle(ADB)=180
angle(ACB)+angle(ADC)+angle(BEC)+angle(DFE)=360
-line(BC)+line(BD)+line(CD)=0
line(AF)+line(DF)-line(AD)=0
-line(AC)+line(CE)+line(AE)=0
line(BF)+line(EF)-line(BE)=0
-line(CE)+line(AE)=0
line(BD)-line(CD)=0
>>> equation line_eq AC BC
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
angle(BDC)=180
angle(AEC)=180
angle(BFE)=180
angle(AFD)=180
-angle(BDC)+angle(ADC)+angle(ADB)=0
```

```
angle(AFB)-angle(AFD)+angle(BFD)=0
angle(AFB)-angle(BFE)+angle(AFE)=0
-angle(AEC)+angle(BEC)+angle(AEB)=0
-angle(BAC)+angle(CAD)+angle(BAD)=0
-angle(BFE)+angle(BFD)+angle(DFE)=0
-angle(AFD)+angle(DFE)+angle(AFE)=0
-angle(ABC)+angle(CBE)+angle(ABE)=0
angle(BFD)-angle(AFE)=0
-angle(AFB)+angle(DFE)=0
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BEC)+angle(BAD)-angle(AFE)=180
angle(ABC)+angle(BAD)+angle(ADB)=180
angle(ABC)+angle(BAC)+angle(AEB)-angle(DFE)+angle(ADB)=180
angle(AFB)+angle(BAD)+angle(ABE)=180
angle(ACB)+angle(BAC)+angle(ADC)-angle(BFD)+angle(ABE)=180
angle(BAC)+angle(AEB)+angle(ABE)=180
angle(ACB)-angle(AFB)+angle(CAD)+angle(CBE)=0
angle(ACB)+angle(ADC)+angle(CAD)=180
angle(CAD)+angle(AEB)+angle(AFE)=180
angle(ACB)+angle(BEC)+angle(CBE)=180
angle(BFD)+angle(CBE)+angle(ADB)=180
angle(ACB)+angle(ADC)+angle(BEC)+angle(DFE)=360
-angle(ABC)+angle(BAC)=0
-line(BC)+line(BD)+line(CD)=0
line(AF)+line(DF)-line(AD)=0
-line(AC)+line(CE)+line(AE)=0
line(BF)+line(EF)-line(BE)=0
-line(CE)+line(AE)=0
line(BD)-line(CD)=0
-line(BC)+line(AC)=0
>>> compute
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
angle(BDC)=180
angle(AEC)=180
angle(BFE)=180
angle(AFD)=180
-angle(BDC)+angle(ADC)+angle(ADB)=0
angle(AFB)-angle(AFD)+angle(BFD)=0
angle(AFB)-angle(BFE)+angle(AFE)=0
-angle(AEC)+angle(BEC)+angle(AEB)=0
-angle(BAC)+angle(CAD)+angle(BAD)=0
-angle(BFE)+angle(BFD)+angle(DFE)=0
-angle(AFD)+angle(DFE)+angle(AFE)=0
-angle(ABC)+angle(CBE)+angle(ABE)=0
angle(BFD)-angle(AFE)=0
-angle(AFB)+angle(DFE)=0
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BEC)+angle(BAD)-angle(AFE)=180
angle(ABC)+angle(BAD)+angle(ADB)=180
angle(ABC)+angle(BAC)+angle(AEB)-angle(DFE)+angle(ADB)=180
angle(AFB)+angle(BAD)+angle(ABE)=180
angle(ACB)+angle(BAC)+angle(ADC)-angle(BFD)+angle(ABE)=180
angle(BAC)+angle(AEB)+angle(ABE)=180
angle(ACB)-angle(AFB)+angle(CAD)+angle(CBE)=0
angle(ACB)+angle(ADC)+angle(CAD)=180
angle(CAD)+angle(AEB)+angle(AFE)=180
angle(ACB)+angle(BEC)+angle(CBE)=180
angle(BFD)+angle(CBE)+angle(ADB)=180
```

```
angle(ACB)+angle(ADC)+angle(BEC)+angle(DFE)=360
-angle(ABC)+angle(BAC)=0
angle(ADC)-angle(BEC)=0
angle(CAD)-angle(CBE)=0
angle(AEB)-angle(ADB)=0
-angle(BAD)+angle(ABE)=0
-angle(BFD)+angle(AFE)=0
angle(ABC)-angle(BAC)=0
angle(BDC)-angle(AEC)=0
angle(BDC)-angle(AFD)=0
angle(AEC)-angle(AFD)=0
angle(AFB)-angle(DFE)=0
angle(BAD)-angle(ABE)=0
-line(BC)+line(BD)+line(CD)=0
line(AF)+line(DF)-line(AD)=0
-line(DF)+line(EF)=0
line(BD)-line(AE)=0
line(CD)-line(CE)=0
-line(AC)+line(CE)+line(AE)=0
line(BC)-line(AC)=0
line(BF)+line(EF)-line(BE)=0
line(CD)-line(AE)=0
-line(CE)+line(AE)=0
line(BD)-line(CD)=0
-line(BD)+line(AE)=0
line(AF)-line(BF)=0
line(BD)-line(CE)=0
-line(BE)+line(AD)=0
-line(BC)+line(AC)=0
line(CE)-line(AE)=0
line(BE)-line(AD)=0
congruent(triangle(ACD),triangle(BCE))
congruent(triangle(AEB),triangle(BDA))
congruent(triangle(FAE),triangle(FBD))
>>> compute
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
angle(BDC)=180
angle(AEC)=180
angle(BFE)=180
angle(AFD)=180
-angle(BDC)+angle(ADC)+angle(ADB)=0
angle(AFB)-angle(AFD)+angle(BFD)=0
angle(AFB)-angle(BFE)+angle(AFE)=0
-angle(AEC)+angle(BEC)+angle(AEB)=0
-angle(BAC)+angle(CAD)+angle(BAD)=0
-angle(BFE)+angle(BFD)+angle(DFE)=0
-angle(AFD)+angle(DFE)+angle(AFE)=0
-angle(ABC)+angle(CBE)+angle(ABE)=0
angle(BFD)-angle(AFE)=0
-angle(AFB)+angle(DFE)=0
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BEC)+angle(BAD)-angle(AFE)=180
angle(ABC)+angle(BAD)+angle(ADB)=180
angle(ABC)+angle(BAC)+angle(AEB)-angle(DFE)+angle(ADB)=180
angle(AFB)+angle(BAD)+angle(ABE)=180
angle(ACB)+angle(BAC)+angle(ADC)-angle(BFD)+angle(ABE)=180
angle(BAC)+angle(AEB)+angle(ABE)=180
```

```
angle(ACB)-angle(AFB)+angle(CAD)+angle(CBE)=0
angle(ACB)+angle(ADC)+angle(CAD)=180
angle(CAD)+angle(AEB)+angle(AFE)=180
angle(ACB)+angle(BEC)+angle(CBE)=180
angle(BFD)+angle(CBE)+angle(ADB)=180
angle(ACB)+angle(ADC)+angle(BEC)+angle(DFE)=360
-angle(ABC)+angle(BAC)=0
angle(ADC)-angle(BEC)=0
angle(CAD)-angle(CBE)=0
angle(AEB)-angle(ADB)=0
-angle(BAD)+angle(ABE)=0
-angle(BFD)+angle(AFE)=0
angle(ABC)-angle(BAC)=0
angle(BDC)-angle(AEC)=0
angle(BDC)-angle(AFD)=0
angle(AEC)-angle(AFD)=0
angle(AFB)-angle(DFE)=0
angle(BAD)-angle(ABE)=0
-line(BC)+line(BD)+line(CD)=0
line(AF)+line(DF)-line(AD)=0
-line(DF)+line(EF)=0
line(BD)-line(AE)=0
line(CD)-line(CE)=0
-line(AC)+line(CE)+line(AE)=0
line(BC)-line(AC)=0
line(BF)+line(EF)-line(BE)=0
line(CD)-line(AE)=0
-line(CE)+line(AE)=0
line(BD)-line(CD)=0
-line(BD)+line(AE)=0
line(AF)-line(BF)=0
line(BD)-line(CE)=0
-line(BE)+line(AD)=0
-line(BC)+line(AC)=0
line(CE)-line(AE)=0
line(BE)-line(AD)=0
congruent(triangle(AFE),triangle(BFD))
congruent(triangle(ACD),triangle(BCE))
congruent(triangle(AEB),triangle(BDA))
congruent(triangle(ADC),triangle(BEC))
congruent(triangle(FAE),triangle(FBD))

end of program
```

Example 6 : In an isosceles triangle ABC with AB = AC, D and E are points on BC such that BE = CD (see Fig. 7.29). Show that AD = AE.

Solution : In Δ ABD and Δ ACE,

$$AB = AC \qquad \text{(Given)} \quad (1)$$

$$\angle B = \angle C$$

$$\text{(Angles opposite to equal sides)} \quad (2)$$

Also,   BE = CD

So,   BE – DE = CD – DE

That is,   BD = CE   (3)

So,   Δ ABD ≅ Δ ACE

(Using (1), (2), (3) and SAS rule).

This gives   AD = AE   (CPCT)

Fig. 7.29

```
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
draw triangle
extend AB from A for 200
join CD AD
split AB
join CE
equation line_eq DE AB
equation line_eq CD BC
compute
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
>>> draw triangle
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
>>> extend AB from A for 200
new point added
angle(ACB)+angle(ABC)+angle(BAC)=180
>>> join CD AD
angle(BAD)=180
angle(ACB)+angle(ACD)-angle(BCD)=0
angle(BAC)-angle(BAD)+angle(CAD)=0
angle(ACB)+angle(BAC)+angle(CBD)=180
angle(BDC)+angle(CBD)+angle(BCD)=180
angle(BDC)+angle(ACD)+angle(CAD)=180
line(AB)+line(AD)-line(BD)=0
>>> split AB
angle(BAD)=180
angle(ACB)+angle(ACD)-angle(BCD)=0
angle(BAC)-angle(BAD)+angle(CAD)=0
angle(ACB)+angle(BAC)+angle(CBD)=180
angle(BDC)+angle(CBD)+angle(BCD)=180
angle(BDC)+angle(ACD)+angle(CAD)=180
angle(BED)=180
line(AB)+line(AD)-line(BD)=0
-line(BD)+line(BE)+line(DE)=0
>>> join CE
angle(BAD)=180
angle(ACB)+angle(ACD)-angle(BCD)=0
angle(BAC)-angle(BAD)+angle(CAD)=0
angle(ACB)+angle(BAC)+angle(CBD)=180
angle(BDC)+angle(CBD)+angle(BCD)=180
```
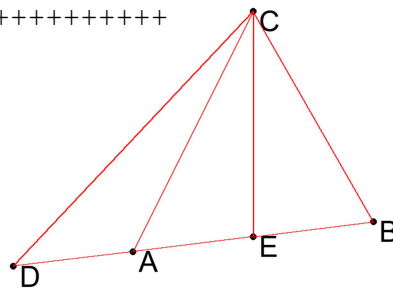
```
angle(BDC)+angle(ACD)+angle(CAD)=180
angle(BED)=180
angle(ACD)+angle(ACE)-angle(DCE)=0
-angle(ACB)+angle(ACE)+angle(BCE)=0
-angle(BED)+angle(CED)+angle(BEC)=0
-angle(BCD)+angle(DCE)+angle(BCE)=0
angle(CBD)+angle(BEC)+angle(BCE)=180
angle(BAC)+angle(ACE)+angle(CED)=180
angle(BDC)+angle(CED)+angle(DCE)=180
line(AB)+line(AD)-line(BD)=0
-line(BD)+line(BE)+line(DE)=0
>>> equation line_eq DE AB
angle(BAD)=180
angle(ACB)+angle(ACD)-angle(BCD)=0
angle(BAC)-angle(BAD)+angle(CAD)=0
angle(ACB)+angle(BAC)+angle(CBD)=180
angle(BDC)+angle(CBD)+angle(BCD)=180
angle(BDC)+angle(ACD)+angle(CAD)=180
angle(BED)=180
angle(ACD)+angle(ACE)-angle(DCE)=0
-angle(ACB)+angle(ACE)+angle(BCE)=0
-angle(BED)+angle(CED)+angle(BEC)=0
-angle(BCD)+angle(DCE)+angle(BCE)=0
angle(CBD)+angle(BEC)+angle(BCE)=180
angle(BAC)+angle(ACE)+angle(CED)=180
angle(BDC)+angle(CED)+angle(DCE)=180
line(AB)+line(AD)-line(BD)=0
-line(AB)+line(DE)=0
-line(BD)+line(BE)+line(DE)=0
>>> equation line_eq CD BC
angle(BAD)=180
angle(ACB)+angle(ACD)-angle(BCD)=0
angle(BAC)-angle(BAD)+angle(CAD)=0
angle(ACB)+angle(BAC)+angle(CBD)=180
angle(BDC)+angle(CBD)+angle(BCD)=180
angle(BDC)+angle(ACD)+angle(CAD)=180
angle(BED)=180
angle(ACD)+angle(ACE)-angle(DCE)=0
-angle(ACB)+angle(ACE)+angle(BCE)=0
-angle(BED)+angle(CED)+angle(BEC)=0
-angle(BCD)+angle(DCE)+angle(BCE)=0
angle(CBD)+angle(BEC)+angle(BCE)=180
angle(BAC)+angle(ACE)+angle(CED)=180
angle(BDC)+angle(CED)+angle(DCE)=180
angle(BDC)-angle(CBD)=0
-line(BC)+line(CD)=0
line(AB)+line(AD)-line(BD)=0
-line(AB)+line(DE)=0
-line(BD)+line(BE)+line(DE)=0
>>> compute
angle(BAD)=180
angle(ACB)+angle(ACD)-angle(BCD)=0
angle(BAC)-angle(BAD)+angle(CAD)=0
angle(ACB)+angle(BAC)+angle(CBD)=180
angle(BDC)+angle(CBD)+angle(BCD)=180
angle(BDC)+angle(ACD)+angle(CAD)=180
```

```
angle(BED)=180
angle(ACD)+angle(ACE)-angle(DCE)=0
-angle(ACB)+angle(ACE)+angle(BCE)=0
-angle(BED)+angle(CED)+angle(BEC)=0
-angle(BCD)+angle(DCE)+angle(BCE)=0
angle(CBD)+angle(BEC)+angle(BCE)=180
angle(BAC)+angle(ACE)+angle(CED)=180
angle(BDC)+angle(CED)+angle(DCE)=180
angle(BDC)-angle(CBD)=0
angle(ACD)-angle(BCE)=0
angle(CAD)-angle(BEC)=0
-angle(ACB)+angle(DCE)=0
-angle(BAC)+angle(CED)=0
angle(ACB)-angle(DCE)=0
angle(BAC)-angle(CED)=0
angle(BAD)-angle(BED)=0
-line(BC)+line(CD)=0
line(AB)+line(AD)-line(BD)=0
-line(AB)+line(DE)=0
line(AD)-line(BE)=0
line(AC)-line(CE)=0
-line(BD)+line(BE)+line(DE)=0
line(AB)-line(DE)=0
-line(AC)+line(CE)=0
congruent(triangle(ACD),triangle(ACD))
congruent(triangle(ADC),triangle(EBC))
congruent(triangle(DCE),triangle(BCA))

end of program
```