Bài giảng Toán giải tích

Bùi Đức Nam

Khoa Kỹ thuật và Khoa học máy tính
Email: namducbui0@gmail.com

Trường Đại học Quốc tế Sài Gòn

5.1. Phương trình vi phân cấp 1

5.1.1. Các khái niệm chung
5.1.1.1. Các định nghĩa.

Định nghĩa 5.1. *Phương trình vi phân cấp* 1 là phương trình có dạng

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

trong đó F là một hàm theo ba biến độc lập.
Nếu giải được phương trình đó đối với y' thì phương trình vi phân cấp 1 có dạng

$$y' = f(x, y) \text{ hay } \frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{2}$$

trong đó f là một hàm theo hai biến độc lập.

Định nghĩa 5.2. *Bài toán Cauchy* hay *bài toán điều kiện đầu* là bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân (1) hoặc (2) thỏa điều kiện

$$y(x_0) = y_0. \tag{3}$$

Định nghĩa 5.3. Nghiệm của phương trình vi phân (1) hoặc (2) trên khoảng I là một hàm số $y = \varphi(x)$ xác định trên I sao cho khi thay vào (1) hoặc (2) ta được đồng nhất thức trên I :

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0, \quad \forall x \in I, \tag{4}$$

hoặc

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad \forall x \in I. \tag{5}$$

Ví dụ 5.1.

Xét bài toán Cauchy

$$y' = \frac{y}{x}, \quad y(1) = 2.$$

Giải. Từ $y' = \frac{y}{x}$, ta có $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ hay $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$.
Lấy tích phân hai vế ta được

$$\ln|y| = \ln|x| + C_1, \ (C_1 > 0).$$

$$\Rightarrow y = Cx, \ x \neq 0, \ (C = \pm C_1).$$

Với $x = 1$, $y = 2$ thì $C = 2$. Suy ra nghiệm của bài toán là $y = 2x$, $x \neq 0$.■

5.1.1.2. Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Định lý 5.1. (Peano-Cauchy-Picard) *Xét bài toán Cauchy* (2), (3). *Nếu hàm số* $f(x, y)$ *liên tục trong miền mở* $D \subset \mathbb{R}^2$, *thì với mọi điểm* $(x_0, y_0) \in D$, *bài toán Cauchy* (2), (3) *có nghiệm xác định trong một lận cận của* x_0.

Ngoài ra nếu, đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *liên tục và bị chặn trong* D *thì nghiệm đó là duy nhất.*

5.1.1.3. Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng, nghiệm kỳ dị, tích phân tổng quát.

Thông thường nghiệm của phương trình vi phân cấp một thường phụ thuộc vào một hằng số thực C và có dạng

$$y = \varphi(x, C). \tag{6}$$

Định lý 5.1. (Peano-Cauchy-Picard) *Xét bài toán Cauchy* (2), (3). *Nếu hàm số* $f(x, y)$ *liên tục trong miền mở* $D \subset \mathbb{R}^2$, *thì với mọi điểm* $(x_0, y_0) \in D$, *bài toán Cauchy* (2), (3) *có nghiệm xác định trong một lận cận của* x_0.

Ngoài ra nếu, đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *liên tục và bị chặn trong* D *thì nghiệm đó là duy nhất.*

5.1.1.3. Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng, nghiệm kỳ dị, tích phân tổng quát.

Thông thường nghiệm của phương trình vi phân cấp một thường phụ thuộc vào một hằng số thực C và có dạng

$$y = \varphi(x, C). \tag{6}$$

5.1.1. Các khái niệm chung

Định nghĩa 5.4. Hàm số $y = \varphi(x, C)$ được gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình vi phân (1) hoặc (2) trong miền $D \subset \mathbb{R}^2$, nếu với mọi điểm $(x_0, y_0) \in D$, tồn tại duy nhất một hằng số C_0 sao cho $y = \varphi(x, C_0)$ là nghiệm của phương trình vi phân (1) hoặc (2) thỏa điều kiện đầu $y(x_0) = y_0$, nghĩa là: tồn tại duy nhất một hằng số C_0 sao cho
i/ $y = \varphi(x, C_0)$ là nghiệm của phương trình vi phân (1) hoặc (2) trong khoảng nào đó chứa x_0,
ii/ $y(x_0, C_0) = y_0$.

Định nghĩa 5.5. Ta gọi *nghiệm riêng* của phương trình vi phân cấp một là nghiệm $y = \varphi(x, C_0)$ mà ta nhận được từ nghiệm tổng quát $y = \varphi(x, C)$ bằng cách cho hằng số tùy ý C một giá trị cụ thể C_0.

Ví dụ 5.2.

Xét phương trình vi phân $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

Giải. Ta có $\dfrac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = dx$.

Lấy tích phân hai vế ta được $\arcsin y = x + C$. Suy ra $y = \sin(x + C)$, C là hằng số tùy ý. Đó là nghiệm tổng quát. Ngoài ra ta thấy $y = \pm 1$ cũng là nghiệm, nhưng chúng không nhận được từ nghiệm tổng quát. Đó là các nghiệm kỳ dị.■

5.1.1.3. Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng, nghiệm kỳ dị, tích phân tổng quát.

Khi giải phương trình (1) hoặc (2) có khi ta cũng không nhận được nghiệm tổng quát dưới dạng tường minh $y = \varphi(x, C)$, mà nhận được một hệ thức có dạng

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{7}$$

Khi đó nghiệm tổng quát được xác định dưới dạng hàm ẩn. Phương trình (7) đươc gọi là *tích phân tổng quát* của (1) hoặc (2). Cho $C = C_0$ ta được phương trình

$$\Phi(x, y, C_0) = 0. \tag{8}$$

mà ta gọi là *tích phân riêng* của phương trình vi phân nói trên.

5.2.2. Phương trình vi phân cấp 1 tách biến (biến phân ly)

5.2.2.1. Định nghĩa.
Phương trình vi phân cấp 1 *tách biến* là phương trình có dạng

$$f(x)dx + g(y)dy = 0. \tag{9}$$

6.2.2.2. Cách giải
Lấy tích phân bất định hai vế ta được tích phân tổng quát

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C. \tag{10}$$

Các ví dụ

Ví dụ 6.3. Giải phương trình vi phân $\dfrac{x}{1+x^2}dx + \dfrac{y}{1+y^2}dy = 0.$

Giải. Lấy tích phân, ta được

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{y}{1+y^2}dy = C_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = C_1,$$

$$\Rightarrow \ln[(1+x^2)(1+y^2)] = 2C_1.$$

Ta được tích phân tổng quát

$$(1+x^2)(1+y^2) = C, \quad (C = e^{2C_1} > 0).\blacksquare$$

Chú thích 5.1.

Phương trình dạng

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0, \tag{11}$$

có thể đưa về dạng (9) như sau:
- Nếu $g_1(y) = 0$ tại $y = b$ (tức là $g_1(b) = 0$) thì $y = b$ là nghiệm của (11).
- Nếu $f_2(x) = 0$ tại $x = a$ (tức là $f_2(a) = 0$) thì $x = a$ là nghiệm của (11).
- Nếu $g_1(y)f_2(x) \neq 0$ thì chia hai vế của (11) cho $g_1(y)f_2(x)$, ta được

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0. \tag{12}$$

Lấy tích phân hai vế ta được tích phân tổng quát

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C. \tag{13}$$

Ví dụ 5.4.

Giải phương trình vi phân

$$y' = xy(y+2).$$

Giải. Ta có

$$dy = xy(y+2)dx.$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y(y+2)} = xdx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y(y+2)} - \int xdx = C_1,$$

Ví dụ 5.4.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right)dy - \frac{1}{2}x^2 = C_1,$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{y+2}\right| - x^2 = \ln C = 2C_1.$$

Vậy tích phân tổng quát là

$$\left|\frac{y}{y+2}\right| = Ce^{x^2},\ (C > 0).\blacksquare$$

5.2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp cấp 1

Hàm $F(x, y)$ được gọi là đẳng cấp bậc k nếu với mọi $\lambda > 0$, ta có

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k F(x, y). \tag{14}$$

Ví dụ. Các hàm $\dfrac{x-y}{2x+y}$, $\dfrac{x^2+xy}{x-y}$, $x^2 - 2yx$ là các hàm đẳng cấp bậc 0, 1, 2.

5.2.3.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân

$$y' = f(x, y) \tag{15}$$

được gọi là phương trình vi phân đẳng cấp cấp 1 nếu hàm số $f(x, y)$ là hàm số đẳng cấp bậc 0.

5.2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp cấp 1

Mệnh đề Nếu hàm số $f(x,y)$ là hàm số đẳng cấp bậc 0 thì $f(x,y)$ là hàm số của một biến $\dfrac{y}{x}$, tức phương trình (15) có thể viết dưới dạng

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{16}$$

5.2.3.2. Cách giải:

Đặt $u = \dfrac{y}{x}$. Khi đó

$$y = ux, \quad y' = xu' + u. \tag{17}$$

5.2.3.2. Cách giải:

Thay (17) vào (16) ta được

$$xu' + u = \varphi(u).$$

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$$

· Nếu $\varphi(u) - u \neq 0$, ta có

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u) - u}.$$

Đây là phương trình vi phân tách biến.

Ví dụ 5.5.

Giải phương trình vi phân đẳng cấp $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Giải. Ta viết lại phương trình vi phân ở trên như sau

$$y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}.$$

Đặt $\dfrac{y}{x} = u$ hay $y = ux$, ta có $y' = u'x + u$, và thay vào phương trình, ta có

$$u'x + u = \frac{1+u}{1-u},$$

hay

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-u}{1+u^2}du.$$

Ví dụ 6.5.

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln|x| = \int \frac{1-u}{1+u^2}du + \frac{1}{2}\ln|C|$$

Ví dụ 6.5.

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln|x| = \int \frac{1-u}{1+u^2}du + \frac{1}{2}\ln|C|$$

Ví dụ 6.5.

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln|x| = \int \frac{1-u}{1+u^2}du + \frac{1}{2}\ln|C|$$

$$\Rightarrow \ln|x| = \int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{udu}{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln|C|$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\Rightarrow \ln|x| = \arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + \frac{1}{2}\ln|C|$$

Ví dụ 5.5.

$$\Rightarrow \ln[x^2(1+u^2)] = 2\arctan u + \ln|C|$$

$$\Rightarrow x^2(1+u^2) = C_1 e^{2\arctan u}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = C_1 e^{2\arctan(y/x)}, \ C_1 > 0. \blacksquare$$

5.2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

5.2.4.1. Định nghĩa.
Phương trình vi phân *tuyến tính cấp* 1 là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{18}$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$ là các hàm số liên tục cho trước.
Nếu $q(x) \equiv 0$, thì (18) đươc gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp* 1 *thuần nhất*.
Nếu $q(x) \neq 0$, thì (18) đươc gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp* 1 *không thuần nhất*.

5.2.4.2. Phương pháp biến thiên hằng số (Lagrange)

Trước hết ta xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất tương ứng với (18)

$$y' + p(x)y = 0, \tag{19}$$

Phương trình này có nghiệm tổng quát

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{20}$$

Ta tìm hàm số khả vi $C = C(x)$ để biểu thức

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{21}$$

là nghiệm của phương trình không thuần nhất (18).

5.2.4.2. Phương pháp biến thiên hằng số (Lagrange)

Thay (21) vào (18), ta được

$$C = C(x) = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C_1.$$

Do đó nghiệm tổng quát của (18) là

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C_1 \right]. \tag{22}$$

Thuật toán tìm nghiệm của PTVPTT cấp 1 bằng phương pháp biến thiên hằng số (Lagrange)

B*ước 1.* Tìm $A(x) = e^{-\int p(x)dx}$.

Bước 2. Tìm $B(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int \frac{q(x)}{A(x)}dx$.

Bước 3. Nghiệm tổng quát của phương trình (18) là

$$y = A(x)[B(x) + C], \; C = const.$$

với các hằng số trong các tích phân ở trên được lấy bằng 0.

Ví dụ 5.6.

Giải phương trình vi phân $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$.

Giải. Ta có $p(x) = \cos x,\ q(x) = e^{-\sin x}$.
Ta có

$$A(x) = e^{-\int \cos x dx} = e^{-\sin x},$$

$$B(x) = \int \frac{q(x)}{A(x)} dx = \int dx = x.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = A(x)[B(x) + C] = e^{-\sin x}(x + C),\ C = const.$$

5.2.5. Phương trình vi phân toàn phần

Cho hai hàm số $P(x, y)$, $Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền mở D, thỏa $Q'_x = P'_y, \forall (x, y) \in D$. Khi đó, tồn tại hàm $U(x, y)$ sao cho

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \qquad (23)$$

Định nghĩa. Phương trình vi phân có dạng

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (24)$$

được gọi là phương trình vi phân toàn phần(PTVPTP) nếu (23) được thỏa mãn.
Nghiệm tổng quát của (24) là $U(x, y) = C$.

Ví dụ 5.7.

Cho phương trình vi phân

$$(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (x^2 + 6xy + 3)dy = 0. \tag{25}$$

a/ Chứng tỏ rằng (25) là PTVPTP.
b/ Giải (25).
Giải.
a/ Ta có $P(x,y) = 3y^2 + 2xy + 2x,\ Q(x,y) = x^2 + 6xy + 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q'_x = 2x + 6y \\ P'_y = 6y + 2x \end{cases} \Rightarrow Q'_x = P'_y.$$

Vậy (25) là phương trình vi phân toàn phần.

Ví dụ 5.7.

b/ Ta có

$$U'_x = P(x, y) = 3y^2 + 2xy + 2x$$

$$\Rightarrow U(x, y) = \int (3y^2 + 2xy + 2x)dx = 3xy^2 + x^2y + x^2 + C(y)$$

$$\Rightarrow U'_y = 6xy + x^2 + C'(y) = Q(x, y)$$

$$\Rightarrow 6xy + x^2 + C'(y) = x^2 + 6xy + 3$$

$$\Rightarrow C'(y) = 3 \Rightarrow C(y) = 3y.$$

Vậy (25) có nghiệm tổng quát là $3xy^2 + x^2y + x^2 + 3y = C$.

5.2.6. Phương trình vi phân Bernuoulli

5.2.6.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân *Bernuoulli* là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{26}$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$ là các hàm số liên tục của x cho trước và α là một hằng số thực cho trước.

Với $\alpha = 0$, thì (26) là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Với $\alpha = 1$, thì (26) là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất

$$y' + [p(x) - q(x)]y = 0.$$

5.2.6.2. Cách giải

Giả sử $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$.
Giả sử $y \neq 0$, chia hai vế của (26) cho y^{α}, ta được

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$, ta có $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ và phương trình trên được viết lại

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x). \tag{27}$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 đối với ẩn hàm z. Sau khi giải tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (27), ta trở về ẩn y bởi công thức $z = y^{1-\alpha}$, ta được nghiệm tổng quát của phương trình (26).

Ví dụ 5.8.

Giải phương trình vi phân

$$y' - 2xy = 4x^3y^2. \tag{28}$$

Giải. Giả sử $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho y^2, ta được

$$y^{-2}y' - 2xy^{-1} = 4x^3.$$

Đặt $z = y^{-1}$, ta có $z' = -y^{-2}y'$ và

$$z' + 2xz = -4x^3. \tag{29}$$

Ta có

$$A(x) = e^{-\int 2xdx} = e^{-x^2},$$

Ví dụ 5.8.

$$B(x) = \int \frac{-4x^3}{e^{-x^2}} dx = -\int 4x^3 e^{x^2} dx = -2e^{x^2}\left(x^2 - 1\right).$$

Vậy phương trình (29) có nghiệm tổng quát

$$\begin{aligned} z &= A(x)[B(x) + C] = e^{-x^2}[-2e^{x^2}(x^2 - 1) + C] \\ &= 2(1 - x^2) + Ce^{-x^2}. \end{aligned}$$

Trở về ẩn cũ ta thu được nghiệm tổng quát của (28) là

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{-2x^2 + 2 + Ce^{-x^2}}.\blacksquare$$

5.3.2. Phương trình vi phân cấp hai giảm cấp được

Xét các phương trình vi phân cấp hai có dạng

$$y'' = f(x, y, y') \tag{30}$$

mà ta có thể đưa chúng về cấp một.

5.3.2.1. Phương trình vi phân khuyết $y', \ y$

$$y'' = f(x). \tag{31}$$

Cách giải. Vì $y'' = (y')'$ nên từ (31) ta có

$$y' = \int f(x)dx + C_1.$$

Lấy tích phân một lần nữa, ta được

$$y = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2.$$

trong đó $C_1, \ C_2$ là các hằng số tùy ý.

5.3.2. Phương trình vi phân cấp hai giảm cấp được

Xét các phương trình vi phân cấp hai có dạng

$$y'' = f(x, y, y') \tag{30}$$

mà ta có thể đưa chúng về cấp một.

5.3.2.1. Phương trình vi phân khuyết y', y

$$y'' = f(x). \tag{31}$$

Cách giải. Vì $y'' = (y')'$ nên từ (31) ta có

$$y' = \int f(x)dx + C_1.$$

Lấy tích phân một lần nữa, ta được

$$y = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2.$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Phương trình vi phân cấp 2 giảm cấp được

Ví dụ 6.9. Tìm nghiệm tổng quát và nghiệm riêng của phương trình vi phân $y'' = \sin x$ thỏa các điều kiện đầu $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
Giải. Ta có

$$y' = \int \sin x dx + C_1 = -\cos x + C_1. \tag{32}$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \int (-\cos x + C_1) dx + C_2 = -\sin x + C_1 x + C_2. \tag{33}$$

Thay $x = 0$, $y = 0$ vào (33), ta có $C_2 = 0$.
Thay $x = 0$, $y' = 1$ vào (32), ta có $C_1 = 2$.
Vậy nghiệm riêng của bài toán Cauchy đã cho là $y = -\sin x + 2x$.■

Phương trình vi phân cấp 2 giảm cấp được

5.3.2.2. Phương trình vi phân khuyết y

$$y'' = f(x, y'). \tag{34}$$

Cách giải. Đặt $y' = p$, khi đó $y'' = p'$ và (34) có dạng

$$p' = f(x, p).$$

Đây là phương trình vi phân cấp 1. Nếu giải được, ta có nghiệm tổng quát là

$$p = \varphi(x, C_1).$$

Vì $y' = p$, nên ta có

$$y' = \varphi(x, C_1).$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình (34) là

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$

Ví dụ 5.10. Giải phương trình vi phân $y'' = x - \dfrac{y'}{x}$.

Giải. Đặt $y' = p$, ta có $y'' = p'$. Do đó phương trình đã cho có dạng

$$p' = x - \frac{p}{x} \Rightarrow p' + \frac{p}{x} = x$$

Ta có

$$A(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x},$$

$$B(x) = \int xe^{\int \frac{1}{x}dx}dx = \int x^2dx = \frac{x^3}{3}.$$

Ví dụ 5.10

Vậy

$$p = A(x)[B(x) + C_1] = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}\right)dx + C_2 = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2. \blacksquare$$

5.3.2.3. Phương trình vi phân khuyết x

$$y'' = f(y, y'). \tag{35}$$

Cách giải. Đặt $y' = p = p(y)$ và xem như là hàm của y. Ta có

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Khi đó, phương trình đã cho có dạng

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Phương trình vi phân cấp 2 giảm cấp được

Đó là phương trình vi phân cấp 1 với ẩn hàm là $p = p(y)$. Nếu phương trình nầy giải được, ta có

$$p = \varphi(y, C_1),$$

hay

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1), \ \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx.$$

Suy ra tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Ví dụ 5.11.

Giải phương trình vi phân $yy'' - (y')^2 = 0$.

Giải. Đặt $y' = p = p(y)$. Ta có $y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$ và phương trình đã cho có dạng

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0,$$

hay

$$p(y\frac{dp}{dy} - p) = 0.$$

Do đó ta được hoặc $p = 0$, hoặc là $y\dfrac{dp}{dy} - p = 0$.

Nếu $p = 0$, ta có $y' = p = 0$, suy ra $y = C$.

Ví dụ 5.11.

Nếu $y\dfrac{dp}{dy} - p = 0$, ta có

$$\frac{dp}{p} - \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \ln\left|\frac{p}{y}\right| = C_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}p = C_2 \Rightarrow p = C_2 y \Rightarrow y' = C_2 y.$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = C_2 dx \Rightarrow \ln|y| = C_2 x + C_3.$$

$$\Rightarrow y = C_4 e^{C_2 x}.$$

Ví dụ 5.11.

Nếu lấy $C_2 = 0$, ta được $y = C_4$ là nghiệm đã thấy ở trên.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = ae^{bx}, \ a, \ b \text{ là các hằng số tùy ý.} \blacksquare$$

5.3.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 có hệ số hằng

5.3.3.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân *tuyến tính cấp* 2 *có hệ số hằng* là phương trình có dạng

$$y'' + py' + qy = f(x), \ \ a < x < b, \tag{36}$$

trong đó p, q là các hằng số. Ta luôn giả thiết $f(x)$ hàm liên tục trong khoảng (a, b).

Nếu $f(x) \equiv 0$, phương trình

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{37}$$

được gọi là *phương trình thuần nhất* tương ứng với phương trình (36).

5.3.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất có hệ số hằng

Bây giờ ta xét phương trình thuần nhất (37)
Xét phương trình đặc trưng của (37)

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{38}$$

Ta có các trường hợp sau:

i/ Phương trình (38) có hai nghiệm thực phân biệt k_1, k_2.

Khi đó ta có hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình (37) là

$$y_1 = e^{k_1 x}, \; y_2 = e^{k_2 x}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (37) là

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

5.3.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất có hệ số hằng

ii/ Phương trình (38) có nghiệm kép k.

Khi đó ta có hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình (37) là

$$y_1 = e^{kx}, \; y_2 = xe^{kx}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (37) là

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x).$$

5.3.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất có hệ số hằng

iii/ Phương trình (38) có hai nghiệm phức $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Khi đó ta có hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình (37) là

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \;\; y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (37) là

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right).$$

Các ví dụ

Ví dụ 5.12. Giải phương trình vi phân $y'' - 6y' + 8y = 0$.
Giải. Phương trình đặc trưng của nó là

$$k^2 - 6k + 8 = 0.$$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt $k_1 = 2$, $k_2 = 4$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x},$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.■

Các ví dụ

Ví dụ 5.13. Giải phương trình vi phân $y'' + 4y' + 4y = 0$.
Giải. Phương trình đặc trưng của nó là

$$k^2 + 4k + 4 = 0.$$

Phương trình đặc trưng có một nghiệm kép $k_1 = k_2 = -2$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}, \text{ trong đó } C_1, C_2 \text{ là hai hằng số tùy ý.} \blacksquare$$

Ví dụ 5.14. Giải phương trình vi phân $y'' + 2y' + 4y = 0$.
Giải. Phương trình đặc trưng của nó là

$$k^2 + 2k + 4 = 0.$$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp $k_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $k_2 = -1 - i\sqrt{3}$.
Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = e^{-x}(C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x).\blacksquare$$

5.3.3. Phương trình vi phân không thuần nhất

Bây giờ ta xét phương trình vi phân tuyến tính không thuần

$$y'' + py' + qy = f(x), \ a < x < b,$$

trong đó p, q là các hằng số và hàm $f(x)$ hàm liên tục trong khoảng (a, b).

Phương pháp giải tổng quát: Nếu phương trình (37) có hai nghiệm riêng đltt $y_1(x)$ và $y_2(x)$ thì phương trình (36) có nghiệm tổng quát là

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \tag{39}$$

trong đó $C_1(x)$, $C_2(x)$ là nghiệm của hệ Wronsky

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \tag{40}$$

Các ví dụ

Ví dụ 5.15. Giải phương trình vi phân $y'' - 2y' + y = x$.
Giải. Xét phương trình thuần nhất

$$y'' - 2y' + y = 0. \tag{41}$$

Phương trình đặc trưng của (41) là

$$k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

$\Rightarrow y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$ là hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình (41).
Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x,$$

Ví dụ 5.15

trong đó $C_1(x)$, $C_2(x)$ thỏa hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0 \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(x+1)e^x = x \end{cases}$$

Giải hệ bằng định thức Crammer, ta được

$$\begin{cases} C_1'(x) = -x^2e^{-x} \\ C_2'(x) = xe^{-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \int -x^2e^{-x}dx = e^{-x}(x^2+2x+2) + C_1 \\ C_2(x) = \int xe^{-x}dx = -e^{-x}(x+1) + C_2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho là

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + x + 2.$$

Phương pháp giải đặc biệt
Bây giờ ta xét phương trình vi phân tuyến tính không thuần

$$y'' + py' + qy = f(x), \ \ a < x < b, \tag{36}$$

trong đó p, q là các hằng số và hàm $f(x)$ hàm liên tục trong khoảng (a, b).
Xét phương trình vi phân thuần nhất tương ứng với phương trình (36)

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{37}$$

Định lý 5.8. *Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất* (36) *bằng tổng của nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng* (37) *với một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất* (36).

5.3.3. Phương trình vi phân không thuần nhất

Định lý 5.9.(Nguyên lý chồng chất nghiệm). *Cho phương trình không thuần nhất*

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x). \tag{42}$$

Nếu y_1 là nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + py' + qy = f_1(x),$$

và y_2 là nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + py' + qy = f_2(x),$$

thì $y = y_1 + y_2$ là nghiệm riêng của phương trình (42).

Các trường hợp cụ thể

Trường hợp 1. $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, trong đó α là số thực, $P_n(x)$ là đa thức bậc n.

a) Nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng (38), thì ta tìm nghiệm riêng y_r theo dạng

$$y_r = e^{\alpha x} Q_n(x), \text{ với } Q_n(x) \text{ là đa thức bậc } n, \text{ với } n+1 \text{ hệ số chưa biết.}$$

b) Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (38), thì ta tìm nghiệm riêng y_r theo dạng

$$y_r = x e^{\alpha x} Q_n(x), \text{ với } Q_n(x) \text{ là đa thức bậc } n.$$

c) Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (38), thì ta tìm nghiệm riêng y_r theo dạng

$$y_r = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x), \text{ với } Q_n(x) \text{ là đa thức bậc } n.$$

Các trường hợp cụ thể

Trường hợp 2. $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + \widetilde{P}_m(x)\sin\beta x]$, trong đó α, β là hằng số thực, $P_n(x)$, $\widetilde{P}_m(x)$ là các đa thức bậc n, m tương ứng.
Khi đó:
a) Nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (38), thì một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$y_r = e^{\alpha x}[Q_s(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_s(x)\sin\beta x],$$

với $Q_s(x)$, $\widetilde{Q}_s(x)$ là các đa thức bậc $s = \max\{n, m\}$.
b) Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng (38), thì một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$y_r = xe^{\alpha x}[Q_s(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_s(x)\sin\beta x],$$

với $Q_s(x)$, $\widetilde{Q}_s(x)$ là các đa thức bậc $s = \max\{n, m\}$.

Ví dụ 5.16

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y'' - y' - 2y = 4x^2$.
Giải. Xét phương trình thuần nhất tương ứng

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Phương trình đặc trưng của nó là

$$k^2 - k - 2 = 0.$$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt là $k_1 = -1$, $k_2 = 2$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y_{tq} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}, \text{ trong đó } C_1, C_2 \text{ là hai hằng số tùy ý.}$$

Ví dụ 5.16

Đối chiếu với dạng của vế phải $f(x) = 4x^2 = e^{\alpha x}P_n(x)$, ta có $n = 2$, $\alpha = 0$.
Vì $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta tìm nghiệm riêng y_r của phương trình đã cho theo dạng

$$y_r = e^{0x}Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Lấy đạo hàm y_r', y_r'' rồi thế vào phương trình đã cho

$$2A - (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2,$$

hay

$$-2Ax^2 + (-2A - 2B)x + 2A - B - 2C = 4x^2.$$

Ví dụ 5.16

Cân bằng các hệ số cùng bậc ở hai vế, ta được một hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} -2A = 4, \\ -2A - 2B = 0, \\ 2A - B - 2C = 0. \end{cases}$$

Giải hệ nầy, ta được $A = -2$, $B = 2$, $C = -3$. Vậy

$$y_r = -2x^2 + 2x - 3.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = y_{tq} + y_r = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3. \blacksquare$$

Ví dụ 5.17

Giải phương trình $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$.
Giải. Xét phương trình thuần nhất tương ứng

$$y'' + y = 0.$$

Phương trình đặc trưng

$$k^2 + 1 = 0$$

có hai nghiệm phức $k_{1,2} = \pm i$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y_{tq} = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \text{ với } C_1, C_2 \text{ là hai hằng số tùy ý.}$$

Ví dụ 5.17.

Sử dụng nguyên lý chồng chất nghiệm ta tìm nghiệm riêng y_r của phương trình đã cho theo dạng tổng

$$y_r = y_1 + y_2,$$

trong đó y_1, y_2 lần lượt là các nghiệm riêng của các phương trình vi phân sau

$$y'' + y = xe^x \text{ và } y'' + y = 2e^{-x}.$$

Do $\alpha = \pm 1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên y_1, y_2 có dạng

$$y_1 = (Ax + B)e^x, \quad y_2 = Ce^{-x}.$$

Ví dụ 5.17.

Vậy y_r có dạng
$$y_r = (Ax + B)e^x + Ce^{-x}.$$
Lấy đạo hàm y_r', y_r'' rồi thế vào phương trình đã cho, ta thu được
$$y_r'' + y_r = (2Ax + 2A + 2B)e^x + 2Ce^{-x} = xe^x + 2e^{-x}.$$
Từ đó ta nhận được một hệ phương trình tuyến tính
$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 2A + 2B = 0, \\ 2C = 2. \end{cases}$$

Ví dụ 5.17.

Giải hệ nầy, ta được $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{-1}{2}$, $C = 1$.
Vậy

$$y_r = \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x},$$

và nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}.\blacksquare$$

Ví dụ 5.18.

Giải phương trình $y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x)$.
Giải. Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

có hai nghiệm thực phân biệt là $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.
Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng với phương trình đã cho là

$$y_{tq} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}, \text{ trong đó } C_1, \ C_2 \text{ là hai hằng số tùy ý.}$$

Đối chiếu với dạng của vế phải $f(x) = e^x(3 - 4x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, ta có $n = 1$, $\alpha = 1$.

Ví dụ 5.18.

Vì $\alpha = 1$ trùng với một nghiệm của phương trình đặc trưng tìm nghiệm riêng y_r được tìm của phương trình đã có theo dạng

$$y_r = xe^x(Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx).$$

Thay vào phương trình đã cho và rút gọn, ta thu được

$$y_r'' - 3y_r' + 2y_r = e^x(-2Ax + 2A - B) = e^x(-4x + 3),$$

hay

$$-2Ax + 2A - B = -4x + 3.$$

Ví dụ 5.18.

Từ đó ta nhận được một hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} -2A = -4, \\ 2A - B = 3. \end{cases}$$

Do đó $A = 2$, $B = 1$. Vậy

$$y_r = e^x(2x^2 + x),$$

và nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^x(2x^2 + x). \blacksquare$$

Ví dụ 5.19.

Hãy tìm một nghiệm riêng của các phương trình $y'' + 2y' - 3y = f(x)$ với $f(x)$ là các hàm số sau:

$a)$ $2\cos 3x$
$b)$ $3xe^x$
$c)$ $(x+1)\cos x$
$d)$ $3xe^x \sin x + e^x \cos x.$

Ví dụ 5.19.

Giải. Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng

$$k^2 + 2k - 3 = 0$$

có hai nghiệm thực phân biệt là $k_1 = 1$, $k_2 = -3$.
a) $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $n = m = 0$. Vậy $\alpha \pm i\beta = \pm 3i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng theo dạng

$$y_r = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Thay vào phương trình đã cho, ta được sau khi rút gọn

$$y_r'' + 2y_r' - 3y_r = (-12A + 6B)\cos 3x + (-6A - 12B)\sin 3x = 2\cos 3x$$

Ví dụ 5.19.

Cân bằng các hệ số hai vế của phương trình ta được hệ

$$\begin{cases} -12A + 6B = 2, \\ -6A - 12B = 0. \end{cases}$$

Suy ra $A = \dfrac{-2}{15}$, $B = \dfrac{1}{15}$. Vậy một nghiệm riêng của phương trình đã cho là

$$y_r = \frac{-2}{15}\cos 3x + \frac{1}{15}\sin 3x.$$

Ví dụ 5.19.

b) $\alpha = 1$, $n = 1$.(trường hợp 1). Vì $\alpha = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$y_r = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Thay vào phương trình đã cho, sau khi rút gọn, ta được

$$y_r'' + 2y_r' - 3y_r = e^x(8Ax + 2A + 4B) = 3xe^x.$$

Suy ra

$$8Ax + 2A + 4B = 3x.$$

Ví dụ 5.19.

Ta thu được hệ

$$\begin{cases} 8A = 3, \\ 2A + 4B = 0. \end{cases}$$

Giải ra ta được $A = \dfrac{3}{8}$, $B = \dfrac{-3}{16}$. Vậy một nghiệm riêng của phương trình đã cho là

$$y_r = \left(\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{16}x\right)e^x.$$

Ví dụ 5.19.

c) $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $n = 1$, $m = 0$. Vậy $\alpha \pm i\beta = \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng dưới dạng

$$y_r = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x.$$

Thay vào phương trình đã cho, sau khi rút gọn, ta có

$$\begin{aligned}&[(-4A + 2C)x + 2A - 4B + 2C + 2D]\cos x\\ &\quad + [(-2A - 4C)x - 2A - 2B + 2C - 3D]\sin x = (x+1)\cos x.\end{aligned}$$

Cân bằng các hệ số hai vế của phương trình ta được hệ

$$\begin{cases} -4A + 2C = 1, \\ 2A - 4B + 2C + 2D = 1, \\ -2A - 4C = 0, \\ -2A - 2B + 2C - 3D = 0. \end{cases}$$

Ví dụ 5.19.

Giải hệ nầy ta được $A = \frac{-1}{5}$, $B = \frac{-3}{20}$, $C = \frac{1}{10}$, $D = \frac{3}{10}$.
Vậy một nghiệm riêng của phương trình đã cho là

$$y_r = -(\frac{1}{5}x + \frac{3}{20})\cos x + (\frac{1}{10}x + \frac{3}{10})\sin x.$$

d) $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $n = 0$, $m = 1$. Vậy $\alpha \pm i\beta = 1 \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng

$$y_r = e^x\big[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\big].$$