matlog

Ramazan Rakhmatullin

10 June 2020

1 (Классическое) Исчисление высказываний

Предметный язык - формальный язык

Метаязык - неформальный язык исследователя

Пропозициональная переменная - буква A, A', A_{1234}

Высказывание, которое истинно при любой оценке переменных называется **общезначимым** или **тавтологией**.

Высказывание

- истинно при какой-нибудь оценке — **выполнимо**
- не истинно при какой-нибудь оценке — **опровержимо**
- не истинно ни при какой оценке — **невыполнимо**

Формула **разрешима**, если для нее можно построить вывод.

Доказательство — конечная последовательность высказываний $\delta_1, \delta_2 \ldots, \delta_n$, где каждое δ_i является либо аксиомой, либо правилом Modus Ponens.

1.1 Теорема о дедукции

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Теория называется **корректной**, если любое доказуемое утверждение общезначимо.

Теория называется **полной**, если любое общезначимое утверждение доказуемо.

1.2 Теорема о корректности и полноте исчисления высказываний

Исчисление высказываний корректно и полно.

2 Интуиционистская логика, Решетки

ВНК интерпретацией логических связок называется следующее

- $\alpha \& \beta$ построено, если построено α и β
- $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β, причем известно, что именно
- $\alpha \to \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β
- $\perp$ — конструкция, не имеющая построения
- $\neg\alpha$ построено, если построено $\alpha \to \perp$

Отличием интуиционистской логики от классической логики является замена последней аксиомы $\neg\neg\alpha \to \alpha$ на $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$

Другой теорией доказательств для ИИВ являются **деревья вывода**.

Доказательство утверждения состоит из построения дерева вывода при помощи следующих правил:

1. Аксиома: $() \Rightarrow (\Gamma, \varphi \vdash \varphi)$
2. Импликация:
   - Введение: $(\Gamma, \varphi \vdash \psi) \Rightarrow (\Gamma \vdash \varphi \to \psi)$
   - Удаление: $(\Gamma \vdash \varphi \to \psi; \Gamma \vdash \varphi) \Rightarrow (\Gamma \vdash \psi)$
3. Конъюкция:
   - Введение: $(\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash \psi) \Rightarrow (\Gamma \vdash \varphi \& \psi)$
   - Удаление: $(\Gamma \vdash \varphi \& \psi) \Rightarrow (\Gamma \vdash \varphi)$ и $(\Gamma \vdash \varphi \& \psi) \Rightarrow (\Gamma \vdash \psi)$
4. Дизъюнкция:
   - Введение: $(\Gamma \vdash \varphi) \Rightarrow (\Gamma \vdash \varphi \vee \psi)$ и $(\Gamma \vdash \psi) \Rightarrow (\Gamma \vdash \varphi \vee \psi)$
   - Удаление: $(\Gamma, \varphi \vdash \gamma; \Gamma, \psi \vdash \gamma; \Gamma \vdash \varphi \vee \psi) \Rightarrow (\Gamma \vdash \gamma)$
5. Удаление лжи: $(\Gamma \vdash \perp) \Rightarrow (\Gamma \vdash \varphi)$

Далее мы рассматриваем ЧУМы с операцией $\sqsubseteq$

Верхней гранью a и b называется наименьшее(любой другой строго больше) c, что $a \sqsubseteq c$ и $b \sqsubseteq c$. Обозначается как $a + b$ или $a \sqcup b$

Нижней гранью a и b называется наибольшее(любой другой строго меньше) c, что $c \sqsubseteq a$ и $c \sqsubseteq b$. Обозначается как $a \cdot b$ или $a \sqcap b$

Решетка — ЧУМ, в котором для любых a и b определены $a + b$ и $a \cdot b$

Дистрибутивная решетка — решетка, в которой для любых a, b, c верно $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Можно доказать, что в дистрибутивной решетке выполнено $a \cdot b + c = (a + c) \cdot (b + c)$ для любых a, b, c

Псевдодополнением a и b называется наибольшее t такое, что $t \cdot a \sqsubseteq b$. Обозначается как $a \to b$

Импликативная решетка — решетка, в которой для любых a, b определено $a \to b$

2.1 Теорема о дистрибутивности импликативной решетки

Импликативная решетка всегда дистрибутивна.

Заметим, что обратное верно только в случае конечных решеток.

Нулем будем называть наименьший элемент решетки.

Единицей будем называть наибольший элемент решетки.

Заметим, что в импликативной решетке всегда существует 1, достаточно взять $a \to a$ для любого a.

Псевдобулева алгебра(алгебра Гейтинга) — импликативная решетка с 0.

Булева алгебра — алгебра Гейтинга, в которой для любого a выполнено $a + (a \to 0) = 1$. $(a \to 0)$ также обозначают как $\sim a$

Построим модель оценки ИИВ в алгебре Гейтинга:

- $\& = \cdot$

- $\vee = +$
- $\rightarrow = \rightarrow$
- $\neg = \sim$
- $\perp = 0$
- Истинным значением будем называть 1

Будем называть высказывание общезначимым $\models \alpha$, если для любой алгебры Гейтинга для любой функции оценки высказывания f выполнено $[\![\alpha]\!] = 1$.

2.2 Теорема о корректности и полноте ИИВ в алгебре Гейтинга

1. Любая алгебра Гейтинга — корректная модель ИИВ
2. Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$

Алгебра Линденбаума — множество классов эквивалентности всевозможных формул в ИИВ с отношением $\alpha \sqsubseteq \beta \iff \alpha \vdash \beta$

Можно доказать, что алгебра Линденбаума является алгеброй Гейтинга. Применив этот факт, можно доказать полноту ИИВ.

Алгебра A называется **Геделевой**, если для любых $a, b \in A$ выполнено $a + b = 1 \rightarrow (a = 1$ или $b = 1)$

$\mathbf{\Gamma(A)}$ — алгебра Гейтинга A, в которую добавили еще одну $1_{\Gamma(A)}$, а старую 1_A заменили на ω. Формально, $\Gamma(A)$ это A, в которой удалили 1_A и добавили ω и $1_{\Gamma(A)}$ такие, что для любого $a \in A$ выполнено:

- $a \sqsubseteq \omega$
- $a \sqsubseteq 1_{\Gamma(A)}$
- $\omega \sqsubset 1_{\Gamma(A)}$

Можно заметить, что $\Gamma(A)$ является алгеброй Гейтинга и Геделевой алгеброй.

3 Модель Крипке

Модель Крипке задается множеством миров W, отношением $\preceq$ и $|\vdash$ такими, что

- $(\preceq) \subseteq W \times W$ — отношение частичного порядка на W

- $(\Vdash) \subseteq W \times P$ — отношение вынужденности, причем если $W_x \preceq W_y$ и $W_x \Vdash P$, то $W_y \Vdash P$

В модели Крипке высказывания оцениваются следующим образом:

- $W_k \Vdash \alpha \& \beta$ (вынуждено в W_k), если α и β вынуждено в W_k
- $W_k \Vdash \alpha \vee \beta$, если α или β вынуждено в W_k
- $W_k \Vdash \alpha \rightarrow \beta$, если в любом $W_l : W_k \preceq W_l$ из вынужденности α следует вынужденность β
- $W_k \Vdash \neg\alpha$, если в любом $W_l : W_k \preceq W_l$ α не вынуждено в W_l
- $W_k \nVdash \perp$ (не вынуждено ни в каком мире)

Формула φ вынуждена в модели W ($W \Vdash \varphi$) если она вынуждена в любом мире из W.

Формула φ общезначима ($\models \varphi$), если она вынуждена во всех моделях.

3.1 Теорема о корректности моделей Крипке

Если $\vdash \varphi$ в ИИВ(интуиционистское исчисление высказываний), то $\models \varphi$ в моделях Крипке.

Давайте сведем модель Крипке к алгебре Гейтинга. Для этого элементами алгебры сделаем все открытые подмножества элементов модели Крипке, а именно если элемент x входит в открытое множество, то любой элемент $y : x \preceq y$ тоже входит в это множество. На этом построим алгебру Гейтинга на множествах с $\sqsubseteq = \subseteq$.

3.2 Теорема о полноте ИИВ

Если $\models \varphi$ в моделях Крипке, то $\vdash \varphi$ в ИИВ. Эту теорему мы доказывать не будем.

Модель исчисления называется **табличной** если:

1. Задано множество истинностных значений V
2. Для каждой связки задана функция оценки: $f_\star : V \times V \rightarrow V$ и $f_\neg : V \rightarrow V$
3. Среди V выделены некоторые истинные значения T. Мы считаем, что $\models \alpha$, если $[\![\alpha]\!] \in T$ при любых оценках пропозициональных переменных.

4. Модель корректна.

Классическая оценка для исчисления высказываний — табличная модель.

Рассмотрим модели Крипке в данной терминологии:

1. Объединим все модели Крипке в один граф. Тогда V состоит из всех подмножеств этого графа. Оценкой переменной P будет множество всех миров, в которых она вынуждена.
2. Оценка связки $\alpha \star \beta$: все миры, в которых $\Vdash \alpha \star \beta$
3. Истинное значение — множество всех миров.

3.3 Теорема о нетабличности ИИВ

Не существует полной конечной табличной модели для ИИВ.

Гомоморфизм из алгебры A в B — отображение $\varphi : A \to B$, удовлетворяющее следующим условиям:

- $\varphi(a \star b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$
- $\varphi(0_A) = 0_B$

Можно доказать, что $\varphi(1_A) = 1_B$

3.4 Теорема о дизъюнктивности ИИВ

Если $\vdash \alpha \vee \beta$, то $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$.

Заметим, что например в классической логике есть контрпример $\vdash A \vee \neg A$

3.5 Теорема о связи ИИВ и КИВ

Если $\vdash_{\text{и}} \alpha$, то $\vdash_{\text{к}} \alpha$

3.6 Теорема Гливенко

Если $\vdash_{\text{к}} \alpha$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$

3.7 Теорема о противоречиях

Если в КИВ нашлось противоречие, то оно найдется в ИИВ.

Противоречием в данном случае будем называть $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$

4 Исчисление Предикатов

В исчислении предикатов добавляются дополнительные выражения и множества для теории моделей, а именно:

1. D — предметное множество
2. V — множество истинностных значений (обычно $\{\text{True}, \text{False}\}$)
3. предикаты: $P = (D^n \to V)$
4. функциональные символы: $F = (D^n \to D)$
5. свободные переменные: $A : x_i \to (D)$
6. кванторы:

$$\forall x.\varphi = \begin{cases} \text{True}, & [\![\varphi]\!]^{x:=a} \text{ для всех а из D} \\ \text{False}, & \text{Иначе} \end{cases}$$

$$\exists x.\varphi = \begin{cases} \text{True}, & [\![\varphi]\!]^{x:=a} \text{ для какого-то а из D} \\ \text{False}, & \text{Иначе} \end{cases}$$

7. Формулы и выражения будем обозначать как φ
8. Термы будем обозначать как $\theta ::= f_i(\theta_1, \dots, \theta_n)|x_i$, где x_i — предметная переменная.

Формула α общезначима, если $[\![\alpha]\!] = \text{И}$ при любой оценке. Обозначается как $\models \alpha$.

В формуле $\forall x.\varphi$ все вхождения x в φ называются **связанными**.

Вхождение называется **свободным**, если оно не связанно.

В формуле $\varphi[x := \psi]$ ψ **свободно для подстановки** вместо x в φ, если никакое свободное вхождение переменных в ψ не станет связанным.

Теория доказательств — теория доказательств для КИВ, с добавлением 11 и 12 схем аксиом, а также двумя правилами вывода:

11. $(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \theta]$
12. $\varphi[x := \theta] \to \exists x.\varphi$

1. $(\psi \to \varphi) \Rightarrow (\psi \to \forall x.\varphi)$
2. $(\varphi \to \psi) \Rightarrow ((\exists x.\varphi) \to \psi)$

Аксиомы можно применять при условии, что θ свободна для подстановки вместо x в φ. Правила вывода можно применять при условии, что x не входит свободно в ψ.

4.1 Теорема о дедукции

Если $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, тогда $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ и в доказательстве отсутствуют правила для кванторов по свободным переменным из α, то $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

α **следует** из Γ, если

1. Если все $[\![\gamma_i]\!] = \text{И}$, то $[\![\alpha]\!] = \text{И}$
2. Ни одна из оценок свободных переменных в γ_i не замещается в оценке для $\forall$ и $\exists$ в α

Обозначение: $\Gamma \models \alpha$

4.2 Теорема о корректности

Если $\Gamma \vdash \alpha$ и в выводе α нет кванторов по свободным переменным из Γ, то $\Gamma \models \alpha$.

Формула называется **замкнутой**, если она не содержит свободных переменных.

Γ — **непротиворечивое множество формул**, если $\Gamma \not\vdash \alpha \& \neg\alpha$ для некоторого α.

Заметим, что если выводимо противоречие для некоторого α, то оно выводимо для любого α.

Γ — **полное непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул**, если:

1. Γ содержит только замкнутые (бескванторные) формулы
2. если α — некоторая замкнутая (бескванторная) формула, то $\alpha \in \Gamma$ или $\neg\alpha \in \Gamma$

4.3 Теорема о пополнении непротиворечивого множества формул

Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда, какова бы ни была замкнутая (бескванторная) формула φ, хотя бы $\Gamma \cup \varphi$ или $\Gamma \cup \neg\varphi$ непротиворечиво.

4.4 Теорема о дополнении непротиворечивого множества формул до полного

Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда найдется полное непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул Δ, что $\Gamma \subseteq \Delta$.

Моделью для множества формул F назовем такую модель M, что при всяком $\varphi \in F$ выполнено $[\![\varphi]\!]_M = \text{И}$. Обозначение: $M \models \varphi$

4.5 Теорема о существовании модели

Любое непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул имеет модель. Построим эту модель.

1. D — множество всех замкнутых бескванторных формул, а также строка "ошибка".
2. Функции оценим как конкатенацию значений аргументов.
3. Предикаты оценим как истину, если конкатенация значений аргументов принадлежит множеству формул M.
4. Все предметные переменые оценим как "ошибка". Заметим, что в данном случае предметных переменных не существует в силу замкнутости и бескванторности.

4.6 Теорема о непротиворечивости множества формул

Если у множества формул M есть модель, то оно непротиворечиво.

4.7 Теорема Геделя о полноте исчисления предикатов

Любое непротиворечивое множество замкнутых формул имеет модель.

Формула φ имеет **поверхностные кванторы** (находится в **предваренной форме**), если соответствует грамматике

$$\varphi ::= \forall x.\varphi | \exists x.\varphi | \tau$$

где τ — формула без кванторов. Другими словами, φ выглядит как сначала все кванторы, а потом бескванторная формула.

4.8 Теорема о предваренной форме

Для любой замкнутой формулы ψ найдется такая формула φ с поверхностными кванторами, что $\vdash \psi \rightarrow \varphi$ и $\vdash \varphi \rightarrow \psi$. (Не доказано в степике)

4.9 Следствие теоремы Геделя о полноте

Исчисление предикатов для замкнутых формул полно.

5 Формальная арифметика

Множество N $(N, 0, ')$ соответствует **аксиоматике Пеано**, если следующее выполнено:

1. $(') : N \to N$, причем если $a, b \in N$ и $a' = b'$, то $a = b$
2. Константа $0 \in N$: нет $x \in N$, что $x' = 0$
3. Индукция. Каково бы ни было свойство(предикат) $P : N \to V$, если:
   (a) выполнено $P(0)$
   (b) при любом $x \in N$, из $P(x)$ следует $P(x')$

   то при любом $x \in N$ выполнено $P(x)$

Заметим, что с помощью данного определения можно доказать, что 0 единственен.

Определим арифметические операции:

$$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a + c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$

$$a \cdot b = \begin{cases} 0, & \text{если } b = 0 \\ a \cdot c + a, & \text{если } b = c' \end{cases}$$

На основе данных определений можно, например, доказать, что сложение коммутативно, т.е. что $a + b = b + a$

Теорией первого порядка назовем исчисление предикатов с дополнительными("нелогическими"или "математическими"):

- предикатными или функциональными символами
- аксиомами

Сущности, взятые из исходного исчисления предикатов назовем **логическими**.

Формальная арифметика — теория первого порядка, со следующими добавленными нелогическими

1. двуместными функциональными символами $(+), (\cdot)$, одноместным функциольнаным символом $(')$, нульместным функциональным символом 0
2. двуместным предикатным символом $(=)$
3. 8 нелогическими аксиомами(не схемами аксиом)

4. нелогической схемой аксиом индукции: $\psi[x := 0]\&(\forall x.\psi \to \psi[x := x']) \to \psi$, с метапеременными x и ψ.

Также будем обозначать $x \le y$ как $\exists a.x + a = y$

Отношение R называется **выразимым** в формальной арифметике, если существует формула $\alpha(x_1, \dots x_n)$ с n свободными переменными, что для любых натуральных чисел $k_1, \dots k_n$

1. если $(k_1, \dots k_n) \in R$, то $\vdash \alpha(\overline{k_1}, \dots \overline{k_n})$
2. если $(k_1, \dots k_n) \notin R$, то $\vdash \neg\alpha(\overline{k_1}, \dots \overline{k_n})$

Обозначим $\exists! y.\varphi(y)$ как $(\exists y.\varphi(y))\&\forall a.\forall b.\varphi(a)\&\varphi(b) \to a = b$, где a, b не входят свободно в φ

Функция f от n аргументов называется **представимой** в формальной арифметике, если существует такая формула $\alpha(x_1, \dots x_{n+1})$ с $n+1$ свободными переменными, что для любых натуральных чисел $k_1, \dots k_{n+1}$

1. $f(k_1, \dots k_n) = k_{n+1}$ тогда и только тогда, когда $\vdash \alpha(\overline{k_1}, \dots \overline{k_{n+1}})$
2. $\vdash \exists! b.\alpha(\overline{k_1}, \dots \overline{k_n}, b)$

Можно доказать, что из единственности следует то, что $\neg(w = k_{n+1}) \vdash \neg\alpha(\overline{k_1}, \dots w)$.

5.1 Теорема о соответствии рекурсивных и представимых функций

Функция является рекурсивной тогда и только тогда, когда она представима в формальной арифметике.

β-функция Геделя — $\beta(b, c, i) = b \mod (1 + (i + 1) \cdot c)$

Заметим, что β-функция Геделя представима в ФА:

$$\beta(b, c, i, d) := \exists q.(b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d)\&(d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

5.2 Китайская теорема об остатках

Если $u_0, \dots, u_n$ — попарно взаимно-просты и $0 \le a_i < u_i$, то существует такое b, что $a_i = b \mod u_i$

5.3 Теорема о представимости массива с помощью β-функции Геделя

Если $a_0, \dots, a_n \in N_0$, то найдутся такие $b, c \in N_0$, что $a_i = \beta(b, c, i)$

Возьмем $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i+1)$. Можно доказать, что числа u_i попарно взаимно просты.

β-функция Геделя нужна для доказательства представимости примитива R в ФА, а именно кодируются результаты рекурсии на каждом шаге в виде массива.

Пусть $\varphi = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ — формула. Тогда **Геделев номер** — $\ulcorner\varphi\urcorner = 2^{\ulcorner s_0 \urcorner} \cdot \dots p_{n-1}^{\ulcorner s_{n-1} \urcorner}$. Аналогично можно задать Геделев номер доказательства как строку из формул.

Тезис Тьюринга-Черча — утверждение о том, что любая вычислимая функция вычислима с помощью рекурсивных функций.

5.4 Проверка доказательства на корректность

Следующая функция вычислима

$$proof(f, x_1, \dots, x_n, y, p) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n}, \overline{y}), \text{ где } p \text{ — Геделев номер вывода, а } f = \ulcorner\varphi\urcorner \\ 0, & \text{Иначе} \end{cases}$$

5.5 Проблема останова

Невозможно написать программу $p(s, a)$, которая вычисляет, остановится ли программа с исходным кодом s с аргументами a.

Определим функцию $\mathbf{W_1}$: $W_1(x, p) = 1$, если $x = \ulcorner\xi\urcorner$, где ξ — формула с единственной свободной переменной x_1, а p — геделев номер доказательства самоприменения ξ: $\vdash \xi(\ulcorner\xi\urcorner)$. Иначе, $W_1(x, p) = 0$.

5.6 Теорема о существовании ω_1

Существует формула ω_1 со свободными переменными x_1, x_2 такая, что:

1. $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}, \overline{p})$, если p — геделев номер доказательства самоприменения φ
2. $\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}, \overline{p})$ иначе

Напомним, что ФА считается непротиворечивой, если нет формулы α такой, что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$.

Формальная арифметика **ω-непротиворечива**, если для любой такой формулы $\varphi(x)$, что $\vdash \varphi(\overline{p})$ при всех $p \in N_0$, выполнено $\nvdash \exists p. \neg\varphi(p)$.

5.7 Связь ω-непротиворечивости с непротиворечивостью

Если формальная арифметика ω-непротиворечива, то она непротиворечива.

Пусть $\sigma(x) := \forall p. \neg\omega_1(x, p)$: не существует доказательства для самоприменения x.

5.8 Первая теорема Геделя о неполноте арифметики

1. Если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$
2. Если формальная ω-арифметика непротиворечива, то $\nvdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$

5.9 Неполнота формальной арифметики

Если ФА непротиворечива, то $\models \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$ в стандартной интерпретации: $D = N_0, a' = a + 1$ и т.д.

Определим функцию $\mathbf{W_2}$: $W_2(x, p) = 1$, если p — номер доказательства $\vdash \neg x(\overline{\ulcorner x\urcorner})$.

Аналогично можно доказать, что существует формула ω_2 такая, что если $W_2(x, p) = 1$, то $\vdash \omega_2(\overline{x}, \overline{p})$ и $\vdash \neg\omega_2(\overline{x}, \overline{p})$ иначе.

5.10 Теорема Геделя о неполноте в форме Россера

Пусть $\rho(x) := \forall p.\omega_1(x, p) \to \exists q.q < p\&\omega_2(x, q)$. Тогда если ФА непротиворечива, то $\nvdash \rho(\overline{\ulcorner\rho\urcorner})$ и $\nvdash \neg\rho(\overline{\ulcorner\rho\urcorner})$.

Пусть $\pi(x, p)$ — формула, что $\vdash \pi(x, p)$ когда $proof(x, p) = 1$, и $\vdash \neg\pi(x, p)$ иначе.

Пусть $\pi_r(x) := \exists p.\pi(x, p)$ — формула "доказуемо".

Пусть $Consis := \neg\pi_r(\overline{\ulcorner 0' = 0\urcorner})$

Рассмотрим $Consis$, заметим, что если ФА непротиворечива, то не существует вывода $0' = 0$. $Consis$ утверждает, что не существует такого вывода. Вторая теорема Геделя утверждает, что доказать это утверждение невозможно, то есть невозможно доказать, что невыводимо $0' = 0$.

5.11 Вторая теорема Геделя о неполноте

$\vdash Consis \to \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$