МАТЛОГ 2020

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ	
Метапеременные	"Placeholder" for variables
Пропозициональные переменные	Элементарные высказывания мы будем обозначать БОЛЬШИМИ латинскими буквами и называть **пропозициональными переменными**. — символы, обозначающие высказывания пропозициональные переменные это чисто фиксированные объекты тип буквы они там уже при какой-то оценке разные значения будут принимать
Высказывания	Строка в некотором алфавите, строящаяся по определенным правилам 1) A, B, C - пропозициональные переменные 2) a - высказывание => !a - высказывание 3) $\alpha \wedge \beta$ 4) $\alpha \vee \beta$ 5) α -> β
Схемы аксиом	Аксиомы классического исчисления высказываний. Аксиомами классического исчисления высказываний будем называть пропозициональные формулы любого из следующих видов, где A, B, C — произвольные формулы: 1. A -> (B -> A); 2. (A ->B) -> (A -> B -> C) -> (A -> C); 3. A & B -> A; 4. A & B -> B; 5. A -> B -> A & B; 6. A -> A ∨ B; 7. B -> A ∨ B; 8. (A -> C) -> ((B -> C) -> (A ∨ B -> C)); 9. (A -> B) -> (A -> ¬B) -> ¬A; 10. ¬¬A -> A.
МП	Единственным правилом вывода исчисления высказываний является правило **«modus ponens»** (MP).

	разрешает получить из формул **A** и **(A → B)** формулу **B**.
Общезначимость	Формула общезначима если истинна в любой оценке
Следование	формула X **следует** из $G_1 \dots G_n$, если в любой оценке, в которой истинны $G_1 \dots G_n$ истинна и X
Доказательство	последовательность высказываний, каждое из которых либо аксиома, либо получено из каких-то предыдущих с помощью Modus Ponens.
Доказуемость	Формула α доказуема, если существует доказательство последним высказыванием в котором является α
Вывод из гипотез	α выводимо из Γ, где Γ — список высказываний, если существует *вывод*, то есть последовательность высказываний такая, что каждое из них либо аксиома, либо из Γ, либо получается по М. Р.
Выводимость	Формула α выводима из Γ, если существует вывод из Γ последним высказыванием в котором является α
Корректность	доказуемость ⇒ общезначимость
Полнота	общезначимость ⇒ доказуемость
Непротиворечивость	Множество формул Γ называется **непротиворечивым**, если из него одновременно НЕ выводятся формулы A и ¬A.
Теорема о дедукции для исчисления высказываний	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta \Leftrightarrow \Gamma, \alpha \vdash \beta$
Теорема о полноте исчисления высказываний	ИВ полно
BHK-интерпретация	$\alpha \& \beta$, если есть доказательство α и β $\alpha \vee \beta$, если есть доказательство α или β и мы знаем, чего именно $\alpha \to \beta$, если мы умеем строить доказательство β из доказательства α $\neg\alpha$, если из α можно построить противоречие ($\alpha \to \perp$)
Теорема Гливенко	Если $\vdash_{к} \alpha$, то $\vdash_{и} \neg\neg\alpha$

решетка	$\langle A,\leq\rangle$⟨A,≤⟩ — решётка, если: $\forall a,b\in A$: $\exists$ наименьший $c=a+b$:$a\leq c$, $b\leq c$ $\forall a,b\in A$: $\exists$ наибольший $c=a\cdot b$: $c\leq a$, $c\leq b$
Дистрибутиваная решетка	решётка + свойство: a+(b · c)=(a+b) · (a+c) **лемма**: a · (b+c)=a · b+a · c **теорема**: решётка дистрибутивна ⇔ не содержит ни диаманта ни пентагона
Импликативная решетка	дистрибутивная решётка + определена операция псевдодополнения (относительно b): $c=a\rightarrow b=max\{x\vert x\cdot a\leq b\}$ **теорема**: дистрибутивность в определении можно опустить **def**: *1* — наибольший элемент решётки **def**: *0* — наименьший элемент решётки
Алгебра Гейтинга	Импликативная решетка называется **псевдобулевой алгеброй или алгеброй Гейтинга**, если в ней есть наименьший элемент, который мы будем обозначать о. Псевдодополнением элемента а данной псевдобулевой алгебры называется элемент а → о, обозначаемый ~ а. Всякая алгебра Гейтинга — модель ИИВ
Булевая алгебра	$\forall a$: $a + \neg a = 1$
Алгебра Линденбаума	Пусть α, β — формулы, $\alpha\leq\beta$, если $\beta\vdash\alpha$, $\alpha\approx\beta$, если $\alpha\leq\beta$ & $\beta\leq\alpha$ Тогда, алгебра Линденбаума — ИИВ/≈ [факторизация по операции ≈] теорема: Алгебра Линденбаума — корректная и полная модель ИИВ.
Модели Крипке.	$<\Omega,\leqslant,\Vdash>$ - упорядоченная тройка, где: Ω - множество миров, $\Omega,\leqslant,\Vdash$ - отношение частичного порядка $\Vdash$: $\Omega\, x\, P$, такое что если $W_i \leqslant W_j$ и $W_i \Vdash \phi$, то $W_j \Vdash \phi$ $W_i \Vdash \phi \& \psi$, если $W_i \Vdash \phi$ и $W_i \Vdash \psi$ $W_i \Vdash \phi \vee \psi$, если $W_i \Vdash \phi$ или $W_i \Vdash \psi$ $W_i \Vdash \phi -> \psi$, если для любого $W_i \leqslant W_j$ $W_j \Vdash \phi$ влечет $W_j \Vdash \psi$
Сведение моделей Крипке к	**Утверждение: если** $<X,\Omega>$ - топология, то $<\Omega,\leq>$ - алгебра Гейтинга.

псевдобулевым алгебрам.	**Сведение моделей Крипке к топологии:** $<\Omega, \leqslant>$ - множество миров. $X = \Omega$. T - открытое множество миров: если $x \in T$ и $x \leqslant y$, то $y \in T$ Тогда X - переменная, $S = \{W_i \| W_i \Vdash X\}$ - открытое
Нетабличность интуиционистского исчисления высказываний.	У ИИВ нет полной табличной модели :(
Гёделева алгебра.	Алгебра А геделева, если для любых a, b из A: если a + b = 1,то a = 1 или b = 1
Операция Г(А)	**Г(А)** Добавим к алгебре новую “1”, большую всех элементов, а старую переименуем в “ω”. **Утв**. Если А - алгебра Гейтинга, то и Г(А) алгебра Гейтинга **Утв.** Г(А) - геделева
Дизъюнктивность интуиционистского исчисления высказываний	|- a | b, значит доказуемо a или доказуемо b
ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ	
Предикатные и функциональные символы	
Константы и пропозициональные переменные	Константа --- это 0-местный функциональный символ(возвр элемент предметного множества) Пропозициональная переменная --- это 0-местный предикат
Свободные и связанные вхождения предметных переменных в формулу	*Связанное* вхождение — вхождение в области действия квантора. ∀x.x *Связывающее* вхождение — вхождение непосредственно рядом с квантором.
Свобода для подстановки	$\phi[x := \psi]$ - имеется свобода для подстановки ψ вместо x в ϕ - никакие свободные вхождения переменных в ψ не станут связанными
Правила вывода для кванторов	$\left.\begin{array}{l} 2. \dfrac{\psi \to \phi}{\psi \to \forall x.\phi} \\ 3. \dfrac{\phi \to \psi}{(\exists x.\phi) \to \psi} \end{array}\right\}$, где x не входит свободно в ψ

Аксиомы исчисления предикатов	11.$(\forall x.\phi) \to \phi[x := \Theta]$ 12.$\phi[x := \Theta] \to \exists x.\phi$, где Θ свободна для подстановки вместо x в ϕ
Теорема о дедукции в исчислении предикатов	1. Если $\Gamma \vdash \phi \to \psi$, то $\Gamma, \phi \vdash \psi$ 2. Если $\Gamma, \phi \vdash \psi$ и в доказательстве отсутствуют правила для кванторов по свободным переменным из ϕ, то $\Gamma \vdash \phi \to \psi$
Теорема о корректности для исчисления предикатов	каждое доказуемое утв. общезначимо
Замкнутая формула	Формула без свободных переменных
Непротиворечивое множество формул	Определение *Γ — непротиворечивое множество формул, если $\Gamma \not\vdash \alpha \& \neg\alpha$ при некотором α* Теорема *Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда, какова бы ни была замкнутая (бескванторная) формула φ, хотя бы $\Gamma \cup \{\varphi\}$ или $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ — непротиворечиво*
Полное непротиворечивое множество формул	Определение *Γ — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул, если:* 1. *Γ содержит только замкнутые бескванторные формулы;* 2. *если α — некоторая замкнутая бескванторная формула, то $\alpha \in \Gamma$ или $\neg\alpha \in \Gamma$.* Теорема *Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда найдётся полное непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул Δ, что $\Gamma \subseteq \Delta$*
Существование моделей у непротиворечивых множеств формул в бескванторном исчислении предикатов.	Определение *Моделью для множества формул F назовём такую модель $\mathcal{M}$, что при всяком $\varphi \in F$ выполнено $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}} =$ И.* *Альтернативное обозначение: $\mathcal{M} \models \varphi$.* Теорема *Любое непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул имеет модель.*

	Определение *Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул. Тогда модель $\mathcal{M}$ задаётся так:* 1. *D — множество всех замкнутых бескванторных формул и дополнительная строка “ошибка!”* 2. $[\![f(\theta_1,\dots,\theta_n)]\!] = “f(” +\!\!+ [\![\theta_1]\!] +\!\!+ “,” +\!\!+ \dots +\!\!+ “,” +\!\!+ [\![\theta_n]\!] +\!\!+ “)”$ 3. $[\![P(\theta_1,\dots,\theta_n)]\!] = \begin{cases} И, & \text{если } “P(” +\!\!+ [\![\theta_1]\!] +\!\!+ “,” +\!\!+ \dots +\!\!+ “,” +\!\!+ [\![\theta_n]\!] +\!\!+ “)” \in M \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$
Формула с поверхностными кванторами	**Определение 7.4.** Назовём формулу α формулой с поверхностными кванторами, если существует такой узел в дереве разбора формулы, не являющийся квантором, ниже которого нет ни одного квантора, а выше — нет ничего, кроме кванторов.
Теорема Геделя о полноте исчисления предикатов	**лемма**: Для любой формулы ИП найдётся эквив. ей ф-ла с поверхностными кванторами **теорема**: Г — непротиворечивое множество формул ИП. Тогда, существует модель для Г
Следствие из теоремы Геделя о полноте исчисления предикатов	если формула общезначима, то она выводима
Теории первого порядка, структуры и модели.	Определение *Теорией первого порядка назовём исчисление предикатов с дополнительными («нелогическими» или «математическими»):* ► *предикатными и функциональными символами;* ► *аксиомами.* *Сущности, взятые из исходного исчисления предикатов, назовём логическими*
Аксиоматика Пеано.	Определение *N (или, более точно, $\langle N, 0, (')\rangle$) соответствует аксиоматике Пеано, если следующее определено/выполнено:* 1. *Операция «штрих» $(')$: $N \to N$, причём нет $a, b \in N$, что $a \neq b$, но $a' = b'$. Если $x = y'$, то x назовём следующим за y, а y — предшествующим x.* 2. *Константа $0 \in N$: нет $x \in N$, что $x' = 0$.* 3. *Индукция. Каково бы ни было свойство («предикат») $P : N \to V$, если:* 3.1 $P(0)$ 3.2 *При любом $x \in N$ из $P(x)$ следует $P(x')$* *то при любом $x \in N$ выполнено $P(x)$.* Как построить? Например, в стиле алгебры Линденбаума: 1. N — язык, порождённый грамматикой $\nu ::= 0 \mid \nu$«’» 2. 0 — это «0», x' — это x ++ «’»
Арифметические операции.	Определение $$a + b = \begin{cases} a, & \text{если } b = 0 \\ (a+c)', & \text{если } b = c' \end{cases}$$ Определение $$a \cdot b = \begin{cases} 0, & \text{если } b = 0 \\ a \cdot c + a, & \text{если } b = c' \end{cases}$$

<table>
<tr><td>Формальная арифметика.</td><td>Определение
Формальная арифметика — теория первого порядка, со следующими добавленными нелогическими ...
► двуместными функциональными символами $(+)$, $(\cdot)$; одноместным функциональным символом $(')$, нульместным фукнциональным символом 0;
► двуместным предикатным символом $(=)$;
► восемью нелогическими аксиомами:
(A1) $a = b \to a = c \to b = c$ (A5) $a + 0 = a$
(A2) $a = b \to a' = b'$ (A6) $a + b' = (a + b)'$
(A3) $a' = b' \to a = b$ (A7) $a \cdot 0 = 0$
(A4) $\neg a' = 0$ (A8) $a \cdot b' = a \cdot b + a$</td></tr>
<tr><td>Примитивы:</td><td>Определение 4. Рассмотрим следующие примитивы.
1. $Z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,\ Z(x) = 0$
2. $N : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,\ N(x) = x'$
3. Проекция. $U_i^n : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0,\ U_i^n(x_1, ...x_n) = x_i$
4. Подстановка. Если $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g_1, ...g_n : \mathbb{N}_0^m \to \mathbb{N}_0$, то $S\langle f, g_1, ...g_n\rangle : \mathbb{N}_0^m \to \mathbb{N}_0$. При этом $S\langle f, g_1, ...g_n\rangle(x_1, ...x_m) = f(g_1(x_1, ...x_m), ...g_n(x_1, ...x_m))$
5. Примитивная рекурсия. Если $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$, то $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, при этом
$$R\langle f, g\rangle(x_1, ...x_n, y) = \begin{cases} f(x_1, ...x_n) & , y = 0 \\ g(x_1, ...x_n, y-1, R\langle f, g\rangle(x_1, ...x_n, y-1)) & , y > 0 \end{cases}$$
6. Минимизация. Если $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, то $\mu\langle f\rangle : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, при этом $\mu\langle f\rangle(x_1, ...x_n)$ — такое минимальное число y, что $f(x_1, ...x_n, y) \neq 0$. Если такого y нет, результат данного примитива неопределен.</td></tr>
<tr><td>Примитивно-рекурсивная функция</td><td>Функция называется примитивно-рекурсивной, если возможно построить выражение только из первых пяти примитивов, такое, что оно при всех аргументах возвращает значение, равное значению требуемой функции.</td></tr>
<tr><td>Рекурсивная функция</td><td>Если функция может быть выражена с помощью всех шести примитивов, она называется рекурсивной.</td></tr>
<tr><td>Функция Аккермана.</td><td>Определение 6. Функцией Аккермана мы назовем так определенную функцию:
$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1, & \text{если } m = 0 \\ A(m-1, 1), & \text{если } m > 0, n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)), & \text{если } m > 0, n > 0 \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>Выразимость отношений</td><td>Определение 1. Отношение R называется выразимым (в формальной арифметике), если существует такая формула $\alpha(x_1, \dots x_n)$ с n свободными переменными, что для любых натуральных чисел k_1 ... k_n
1. если $(k_1, \dots k_n) \in R$, то доказуемо $\alpha(\overline{k_1}, \dots \overline{k_n})$
2. если $(k_1, \dots k_n) \notin R$, то доказуемо $\neg\alpha(\overline{k_1}, \dots \overline{k_n})$.</td></tr>
<tr><td>Представимость функций</td><td>Определение 2. Введем следующее сокращение записи: пусть $\exists! y.\phi(y)$ означает
$$(\exists y.\phi(y))\ \&\ \forall a.\forall b.\phi(a)\ \&\ \phi(b) \to a = b$$
Здесь a и b — некоторые переменные, не входящие в формулу ϕ свободно.
Определение 3. Функция f от n аргументов называется представимой в формальной арифметике, если существует такая формула $\alpha(x_1, \dots x_{n+1})$ с $n+1$ свободными пременными, что для любых натуральных чисел k_1 ... k_{n+1}
1. $f(k_1, \dots k_n) = k_{n+1}$ тогда и только тогда, когда доказуемо $\alpha(\overline{k_1}, \dots \overline{k_{n+1}})$.
2. Доказуемо $\exists! b.\alpha(\overline{k_1}, \dots \overline{k_n}, b)$</td></tr>
</table>

	Теорема *Любая рекурсивная функция представима в Ф.А.* Теорема *Любая представимая в Ф.А. функция рекурсивна.*
Бета-функция Гёделя.	Определение *β-функция Гёделя: $\beta(b, c, i) := b\%(1 + (i + 1) \cdot c)$* *Здесь (%) — остаток от деления.* Теорема *β-функция Гёделя представима в Ф.А. формулой* $$\beta(b, c, i, d) := \exists q.(b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d) \& (d < 1 + c \cdot (i + 1))$$ Деление b на x с остатком: найдутся частное (q) и остаток (d), что $b = q \cdot x + d$ и $0 \le d < x$.
Гёделева нумерация.	Будем называть гёделевой нумерацией списка следующую конструкцию. Пусть $\langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle$ — некоторый список натуральных чисел. Пусть p_i — это простое число номер i (естественно, $p_0 = 2$). Тогда гёделева нумерация этого списка $\ulcorner \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle \urcorner = 2^{a_0} \cdot 3^{a_1} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{a_{n-1}}$. Например, $\ulcorner \langle 7, 1, 4 \rangle \urcorner = 2^7 \cdot 3^1 \cdot 5^4 = 240000$.
Самоприменимость	Определение *Определим функцию W_1: $W_1(x, p) = 1$, если $x = \ulcorner \xi \urcorner$, где ξ — формула с единственной свободной переменной x_1, а p — доказательство самоприменения ξ:* $$\vdash \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$$ *$W_1(x, p) = 0$, если это не так.* Теорема *Существует формула ω_1 со свободными переменными x_1 и x_2, такая, что:* 1. *$\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, \overline{p})$, если p — гёделев номер доказательства самоприменения φ;* 2. *$\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, \overline{p})$ иначе.*
Непротиворечивость	*Формальная арифметика непротиворечива, если нет формулы α, что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$.*
ω-непротиворечивость	*Формальная арифметика ω-непротиворечива, если для любой формулы $\varphi(x)$, что $\vdash \varphi(\overline{p})$ при всех $p \in \mathbb{N}_0$, выполнено $\nvdash \exists p.\neg\varphi(p)$.* $\vdash \varphi(\overline{0})$, $\vdash \varphi(\overline{1})$, $\vdash \varphi(\overline{2})$, $\vdash \varphi(\overline{3})$, ... Значит, нет p, что $\vdash \neg\varphi(p)$. *Если формальная арифметика ω-непротиворечива, то она непротиворечива.*
Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики	Определение $\sigma(x) := \forall p.\neg\omega_1(x, p)$ Теорема (первая теорема Гёделя о неполноте арифметики) 1. *Если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.* 2. *Если формальная арифметика ω-непротиворечива, то $\nvdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.*
Неформальный смысл первой теоремы Геделя	ФА не полна :(

Формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики в форме Россера	Определение $W_2(x, p) = 1$, *если* p — *доказательство отрицания самоприменения.* Лемма *Существует формула* ω_2, *что* $\vdash \omega_2(\overline{x}, \overline{p})$, *если* $W_2(x, p) = 1$, *иначе* $\vdash \neg\omega_2(\overline{x}, \overline{p})$ Теорема *Пусть* $\rho(x) := \forall p.\omega_1(x, p) \to \exists q.q < p \,\&\, \omega_2(x, q)$ *Тогда* $\nvdash \rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$ *и* $\nvdash \neg\rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$
Consis	Теорема *Существует формула* $\pi(x, p)$ — *доказуемая тогда и только тогда, когда* $proof(x, p) = 1$. Определение *Формула «доказуемо»:* $\pi_r(x) := \exists p.\pi(x, p)$. Определение $Consis := \neg\pi_r(\overline{\ulcorner \overline{1} = 0 \urcorner})$
Вторая теорема Геделя о неполноте	Теорема $\vdash Consis \to \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$