Homework 1

Dimitrov Blagoi

2018-11-09

Задание 1

$$\sum_{i=1}^{n+5} 2^i = \mathcal{O}(2^n) \tag{1}$$

Рассмотрим левую часть. Из двоичного представления чисел очевидно:

$$\sum_{i=1}^{n+5} 2^i = 2^{n+6} - 2 \tag{2}$$

Подставляем (2) в (1):

$$2^{n+6} - 2 = \mathcal{O}(2^n) \tag{3}$$

По определению $\mathcal{O}(n)$, (3) $\Leftrightarrow \exists\ c = const :$

$$2^{n+6} - 2 \leq c\,2^n$$

Возьмем $c = 2^6$. Подставим и получим очевидно верное неравенство:

$$2^{n+6} - 2 \leq 2^{n+6}$$

■

Задание 2

$$\frac{n^3}{6} - 7n^2 = \Omega(n^3) \tag{1}$$

По определению $\Omega(n)$, (1) $\Leftrightarrow \exists\ c = const :$

$$\frac{n^3}{6} - 7n^2 \geq cn^3$$

$$n^3(\frac{1}{6} - c) \geq 7n^2$$

Неравенство выполняется при $c = \frac{1}{7}$.

■

Задание 3

$$\max(f(n),\, g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$$

Пусть $\psi(n) = \max(f(n),\, g(n))$, тогда имеем:

$$\psi(n) = \Theta(f(n) + g(n)) \tag{1}$$

По определению $\Theta(n)$, (1) $\Leftrightarrow \exists\ c_1 = const,\ c_2 = const :$

$$c_1 f(n) + c_1 g(n) \overset{*}{\leq} \psi(n) \overset{**}{\leq} c_2 f(n) + c_2 g(n)$$

Неравенство $(**)$ очевидно верно при $c_2 \geq 1$ так как $f(n)$ и $g(n)$ по условию неотрицательны, а $\psi(n)$ для $\forall n$ равно либо $f(n)$, либо $g(n)$.

Рассмотрим $(*)$. Так как $\psi(n) = \max(f(n), g(n))$, то:

$$\psi(n) \geq \frac{1}{2} f(n) + \frac{1}{2} g(n)$$

Получаем, что $c_2 = \frac{1}{2}$ неравенство выполняется.

$\blacksquare$

Задание 4

1, $(\frac{3}{2})^2$, $n^{\frac{1}{\log n}}$, $\log\log n$, $\sqrt{\log n}$, $(\sqrt{2})^{\log n}$, n, $\log^2 n$, $n \log n$, $4^{\log n}$, $(\log n)!$, n^2, $(\log n)^{\log n}$, $n^{\log\log n}$, n^3, e^n, $n \cdot 2^n$, 2^{2^n}, $2^{2^{n+1}}$, $\log n!$, $n!$, $(n+1)!$