1. 简答题:（8分 $\times$ 4）

(1) $x = P_1(x)$，故：当 $l = 1$ 时，原式 $= 2/3$ (4分)

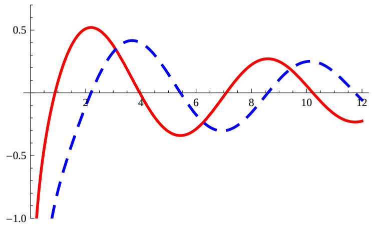
当 $l = 2, 3$ 时，原式 $= 0$ (2分 + 2分)

(2) 几个特征：

(a) $\lim_{x\to 0} N_0(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to 0} N_1(0) = \infty$ (2分)

(b) N_1 的第一个根大于 N_0 的第一个根 (3分)

(c) N_0 与 N_1 根交错出现 (3分)



(3) $u(l, t) = 0$ (4分)

$YSu_x(0, t) = ku(0, t)$ (4分)

(4) 只有向右传播的波：$u = f(t - x/a)$ (2分)

$t = 0$ 时 $u = 0$，故 $f(-x/a) = 0$ if $x \geq 0$ (2分)

$t \geq 0$ 的 $x = 0$ 处，$SYu_x = \sin\omega t = f(t)$ (2分)

综上：$u = \begin{cases} \dfrac{a}{\omega SY}[\cos\omega(t - x/a) - 1] & t \geq x/a \\ 0 & t < x/a \end{cases}$ (2分)

(5) $u = \sum_l B_l r^{-l-1} P_l(\cos\theta)$ (2分)

边条：$u(a, \theta) = \cos^2\theta = \dfrac{2}{3}P_2(\cos\theta) + \dfrac{1}{3}P_0(\cos\theta)$ (2分)

$B_0 = \dfrac{a}{3}, \qquad B_2 = \dfrac{2a^3}{3}, \qquad u = \dfrac{1}{3}\dfrac{a}{r} + \dfrac{2}{3}\dfrac{a^3}{r^3}P_2(\cos\theta)$ (三式各 2分)

2. 定解问题：$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & \text{(2分)} \\ u(0, t) = u_0, \quad u(l, t) = u_0 & \text{(2分)} \\ u(x, 0) = 0, & \text{(2分)} \end{cases}$

$u(x, t) = u_0 + \sum_n A_n \exp[-(n\pi a/l)^2 t] \sin\dfrac{n\pi}{l}x$ (5分)

$u(x, 0) = 0 \implies A_n = -\dfrac{2u_0}{l}\int_0^l \sin\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$ (4分)

$A_{2n+1} = \dfrac{4u_0}{(2n+1)\pi}, \qquad A_{2n} = 0$ (3分)

3. $u_t = a^2\nabla^2 u, \qquad u\Big|_{t=0} = u_0, \qquad u\Big|_{r=b} = u_1$ (1 + 1 + 1 分)

$u = v + w, \quad v = u_1, \quad w$ 满足齐次方程、齐次边条

$w_t = a^2\nabla^2 w, \quad w\Big|_{t=0} = u_0 - u_1, \quad w\Big|_{r=b} = 0$ (3分)

$w = R(r)T(t)$

$r^2R''(r) + rR(r) + \mu^2 r^2 R(r) = 0 \implies R_n(r) = J_0\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{b}r\right)$ (4分)

$T''(z) + a^2\mu^2 T(z) = 0 \implies T(t) = \exp\left[-\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{b}a\right)^2 t\right]$ (4分)

$w(r,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{b}r\right)\exp\left[-\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{b}a\right)^2 t\right]$ (2分)

应用初条：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{b}r\right) = (u_0 - u_1)$ (2分)

$$c_n = \frac{(u_0 - u_1)\displaystyle\int_0^b J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}r\right)r\mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^b J_0^2\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}r\right)r\mathrm{d}r}$$ (2分)

4. 定解问题：
$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & a \le r < \infty \\ \lim\limits_{r\to 0} u(r,\theta,\phi) = \text{有界} & \\ (ku_r + Hu)\Big|_{r=a} = \begin{cases} q_0\cos\theta & 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \le \theta \le \pi \end{cases} & \end{cases}$$ (2分) (2分) (4分)

$u = \sum\limits_{l=0}^{\infty} A_l r^l\, P_l(\cos\theta)$ (4分)

利用 $r = a$ 处的边界条件：

$HA_l a^l + klA_l a^{l-1} = \dfrac{2l+1}{2}\, q_0 \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos\theta P_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$ (4分)

求球心温度，只需求 A_0 (2分)

$A_0 = \dfrac{q_0}{2H}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = \dfrac{q_0}{4H}$ (2分)

5. 定解问题：$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=h\sin\omega t, \\ u(0,t)=u(l,t)=0 \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0 \end{cases}$ (每行 1 分)

$v(x,t)=A(x)\sin\omega t, \quad A(0)=A(l)=0$ (2分)

$-\omega^2 A-a^2A''=h$ (2分)

$A(x)=-\dfrac{h}{\omega^2}+F(x)$ (2分)

$F''+(\omega/a)^2F(x)=0 \quad \Longrightarrow \quad F=\alpha\cos(\omega/a)x+\beta\sin(\omega/a)x$ (2分)

由 $A(0)=A(l)=0$ 可得：$\alpha=\dfrac{h}{\omega^2}, \qquad \beta=\dfrac{h}{\omega^2}\dfrac{1-\cos\dfrac{\omega l}{a}}{\sin\dfrac{\omega l}{a}}$ (4分)

$v(x,t)=\dfrac{h}{\omega^2}\dfrac{\sin\omega t}{\sin\dfrac{\omega l}{a}}\left[\sin\dfrac{\omega x}{a}-\sin\dfrac{\omega l}{a}+\sin\left(\dfrac{\omega l}{a}-\dfrac{\omega x}{a}\right)\right]$ (5分)