1. **简答（多重选择）题**:

(1) $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)[z-a-(b-a)]}=\dfrac{1}{(z-a)^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{b-a}{z-a}\right)^k$ (6**分**)

(2) 沿实轴和虚轴趋于 ∞ 极限不同，故为本性奇点 (3**分**)

求留数只能展开: $f(z)=\dfrac{1}{z}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{z^l}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l z^{k-l}}{k!}$

$\dfrac{1}{z}$ **项的系数**：$a_{-1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=e^{-1}$, **留数**：$-a_{-1}=-\dfrac{1}{e}$ (3**分**)

(3) $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^n}$, $g(z)$ **解析且** $g(z_0)\neq 0$ (3**分**)

$\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\dfrac{g'(z)(z-z_0)-ng(z)}{(z-z_0)g(z)}$, **留数**：Res$=\displaystyle\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)\frac{f'(z)}{f(z)}\right]=-n$ (3**分**)

(4) $I=\ln z\Big|_{-3i}^{2i}=\ln\frac{2}{3}+i[\arg(2i)-\arg(-3i)]=\ln\frac{2}{3}-i\pi$ (6**分**)

另解：连续变形为：c_1：**从** $z=-3i$ **经** $z=-3$ **到** $z=3i$，

c_2：**从** $z=3i$ **沿虚轴到** $z=2i$。

$\displaystyle\int_{c_1}\frac{\mathrm{d}z}{z}=-i\pi,\quad \int_{c_2}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\ln\frac{2}{3},\quad I=\ln\tfrac{2}{3}-i\pi$ (6**分**)

(5) $I=2\pi i\,\mathrm{Res}$, $f(z)=\dfrac{1}{z\sin^3 z\cos z}$ **是偶函数，展开式不应有奇次幂项，**
$\mathrm{Res}=a_{-1}=0$ (6**分**)

(6) 离 $z=1$ **最近的奇点为** $z=\dfrac{\pi}{2}$, **故级数的收敛半径为** $\dfrac{\pi}{2}-1$ (6**分**)

(7) 只选 (d) （**其它选择一律** 0 **分**） (6**分**)

例：$f(z)=\dfrac{1}{z-1}$ **在** $|z|>1$ **可展开为**：$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}$ **违反** (a), (b) (c)

(8) (b) **和** (c) **正确** 给出一个正确选择得3分，给出一个错误选择倒扣3分，例如，选 (a), (b) 得 0 分，本小题最低得 0 分

2. **奇点**：$z=2k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ (8**分**)

$k=0$ **对应于可去奇点** (4**分**)

$k\neq 0$ **对应于单极点。** (6**分**)

3. z 沿正负实轴趋于 0，$f(z)=\dfrac{\sin e^{1/z}}{z}$ 极限不同，故$z=0$ 是本性奇点。 (4分)

留数只能通过 Laurent 展开计算，难求。

利用有限远与无穷远留数和为 0，可求 $z=\infty$ 处的留数。 (4分)

作变量代换：$\zeta=1/z$，$f(z)=\zeta\sin e^{\zeta}$，

只需求 $g(\zeta)=f(z)/\zeta^2$ 在 $\zeta=0$ 处的留数。 (4分)

$\text{Res}\,[g(0)]=\sin 1$，故：$\text{Res}\,[f(\infty)]=-\sin 1$， (4分)

即：$\text{Res}\,[f(0)]=\sin 1$，$I=2\pi i\sin 1$ (2分)

4. 作 $f(z)=\dfrac{\sqrt{z}\,\ln z}{z^2+1}$ 的割线：连接 $z=0$ 与 $z=\infty$ 的直线。上岸：$\arg z=0$ (3分)

因为 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=0$, 故：$\displaystyle\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=0$ (2分)

因为 $\lim\limits_{z\to 0} zf(z)=0$, 故：$\displaystyle\int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z=0$ (2分)

$\displaystyle\oint f(z)\mathrm{d}z=2I+2\pi i\int\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=2\pi i[\text{Res}\,f(i)+\text{Res}\,f(-i)]$ (3分)

$\text{Res}\,f(i)=\dfrac{\sqrt{2}}{8}\pi(1+i)$ (3分)

$\text{Res}\,f(-i)=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}\pi(1-i)$ (3分)

$I=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi^2$ (2分)

5. $f(z)=\dfrac{|z|^p|z-1|^{1-p}\,e^{i[p\theta_1+(1-p)\theta_2]}}{z^2-1}$, $\quad\theta_1=\arg z,\quad\theta_2=\arg(z-1)$ (3分)

在上岸：$\theta_1=\theta_{10}$, $\quad\theta_2=\theta_{20}$, $\quad z_0=1/2+i0^+$,

$f(z_0)=-\dfrac{2}{3}\,e^{i[p\theta_{10}+(1-p)\theta_{20}]}=\dfrac{2}{3}\,e^{ip\pi}$

故：$\theta_{10}-\theta_{20}=\pi$, $\quad\theta_{20}=\pi$ (3分)

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0 \qquad z=\infty$ 为可去奇点 (3分)

$a_{-1}=\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^{p-1}(z-1)^{1-p}}{1-\frac{1}{z^2}}=\lim\limits_{z\to\infty} e^{i(p-1)(\theta_1-\theta_2)}$ (3分)

注意在上岸：$\theta_{10}=2\pi$, $\quad\theta_{20}=\pi$, $\quad\theta_{10}-\theta_{20}=\pi$

$z\to\infty$ 时，$\theta_1-\theta_2=2\pi$ (3分)

故：$a_{-1}=e^{i(p-1)2\pi}$, $\quad\text{Res}\,[f(\infty)]=-a_{-1}=-e^{i2p\pi}$ (3分)