前言

一些我认为比较重要的命题的证明

证明: 设无限集 E, 从 E 中取出一个元素 e_1, 那么 $E\backslash\{e_1\}$ 仍是无限集, 所以又可以取出 e_2...那么得到集合

$$\{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$$

且满足

$$\overline{\overline{\{e_1, e_2, e_3, \cdots\}}} = \overline{\overline{\{1, 2, 3, \cdots\}}}$$

同时 $E\backslash\{e_1, e_2, \cdots\}$ 仍是无限集, 还有

$$\overline{\overline{E}} \geqslant \aleph_0$$

证毕.

> **(Cantor-Bernstein-Schröder 定理)** 反对称性: 若同时成立 $\overline{\overline{E}} \geqslant \overline{\overline{F}}$ 和 $\overline{\overline{F}} \geqslant \overline{\overline{E}}$, 则必有 $\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{F}}$.

证明: 构造双射

$$\varphi : F_n \mapsto E_{n+1} \subseteq E \qquad \psi : E_n \mapsto F_{n+1} \subseteq F \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

并记

$$E_0 = E \qquad F_0 = F$$

> > 引理1: $E \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$, $F \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$

*证明: * 利用 $E_1 \subseteq E$ 我们嵌套一次复合函数

$$F_2 = \psi \circ \varphi(F) = \psi(E_1) \subseteq \psi(E) = F_1$$

得到

$$F_2 \subseteq F_1 \tag{1}$$

再次

$$\psi \circ \varphi(F_2) \subseteq \psi \circ \varphi(F_1)$$

得到

$$F_4 \subseteq F_3$$

反复运用这个手法就有

$$F_{2n+2} \subseteq F_{2n+1}$$

利用 $F_1 \subseteq F$ 我们嵌套一次复合函数

$$\psi \circ \varphi(F_1) \subseteq \psi \circ \varphi(F)$$

得到

$$F_3 \circ F_2$$

反复运用这个手法就有

$$F_{2n+1} \subseteq F_{2n} \tag{2}$$

结合(1)(2)就有

$$F \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$$

关于 E 的陈述同理可证.

> > 引理2: $\psi \circ \varphi$ 是 $F_n \backslash F_{n+1}$ 到 $F_{n+2} \backslash F_{n+3}$ 的双射.

*证明: * 因为 $\psi \circ \varphi$ 是 F_n 到 F_{n+2} 的双射, 我们只要对以下两个双射做差集即可

$$F_n \mapsto F_{n+2}$$

$$F_{n+1} \mapsto F_{n+3}$$

下面考究原命题. 注意到

$$F = (\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k) \cup (F \backslash F_1) \cup (F_1 \backslash F_2) \cup (F_2 \backslash F_3) \cup (F_3 \backslash F_4) \cup \cdots$$

$$\begin{aligned} F_1 &= (\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k) \cup (F_1 \backslash F_2) \cup (F_2 \backslash F_3) \cup (F_3 \backslash F_4) \cup (F_4 \backslash F_5) \cup \cdots \\ &= (\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k) \cup (F_2 \backslash F_3) \cup (F_1 \backslash F_2) \cup (F_3 \backslash F_4) \cup (F_4 \backslash F_5) \cup \cdots \end{aligned}$$

两式右侧每一项对应为双射, 那么

$$F \sim F_1$$

又

$$F_1 \sim E$$

所以

$$F \sim E$$

证毕.

> $(0, 1), [0, 1]$ 与 R 等势, 它们的势都记作 $\aleph$, 称为**连续统**.

证明: 先证明 $(0, 1)$ 与 $[0, 1]$ 等式, 记

$$A_1 = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots\}$$

$$A_2 = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots\}$$

$$B = [0,1] \backslash A_1$$

于是

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in B \\ \frac{1}{1/x - 2} & x \in A_2, x \neq \frac{1}{2} \\ 0 & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

就是一个 $(0,1)$ 到 $[0,1]$ 的双射.

构造

$$g(x) = \begin{cases} \ln 2x & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ -\ln(2-2x) & x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

就是一个 $(0,1)$ 到 R 的双射.

课后习题

A组

> 1. 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为复常数, 且对任何的 $x \in \mathrm{R}$ 成立
>
> $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$
>
> 证明: $a_0 = a_1 = \cdots = a_0 = 0$.

证明: 先给出一个不太严谨的证法. 代入 $x = 0$ 立刻得到

$$a_0 = 0$$

于是

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x = 0$$

约去 x

$$a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0 \qquad (x \neq 0)$$

尽管 $x \neq 0$, 但不严谨地, 我们反复运用这个手法就可以得到结果. 下面给出一个更加严格的证法, 这个证法经过考究存在学名"Lagrange 插值(Interpolation)法".

对于式子

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x = 0$$

让 x 取遍 n 个不同的非零值 $x_i (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ 得到

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=0 \\ a_1x_2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_2^n=0 \\ \cdots \\ a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=0 \end{cases}$$

视其为关于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的线性方程组, 其系数行列式为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} x_i \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_i-x_j) \neq 0$$

上面的展开运用了 Vandermonde 行列式的性质. 由于系数行列式恒为 0, 所以

$$a_i=0 \qquad i=1,2,3\cdots,n$$

> 2. 试构造区间 $(0,1)$ 到 $[0,1]$ 的一个双射.

见前文.

> 3. 说明以下映射为有理数集到整数集的单射
>
> $$T(q)=\begin{cases} (m+n)^2+n & q=\dfrac{n}{m} \quad n,m\text{为既约正整数} \\ 0 & q=0 \\ -(m+n)^2=n & q=-\dfrac{n}{m} \quad n,m\text{为既约正整数} \end{cases}$$

证明: 只需证明整数情形即可, 设

$$q_1=\frac{n_1}{m_1} \qquad q_2=\frac{n_2}{m_2}$$

且 n_1,m_1 既约, n_2,m_2 既约, $q_1,q_2>0$, $q_1\neq q_2$, 下面试图通过等式

$$(m_1+n_1)^2+n_1=(m_2+n_2)^2+n_2$$

导出矛盾. 容易验证, 若 $m_1=m_2$ 或 $n_1=n_2$ 成立其一, 可以导出另外一个, 下面讨论更一般情形 $m_1\neq m_2$ 且 $n_1\neq n_2$, 不失一般性, 令 $n_1>n_2$, 于是

$$m_1+n_1<m_2+n_2$$

由于都是正整数, 所以

$$(m_2+n_2)-(m_1+n_1)>1$$

于是

$$\begin{aligned} (m_2+n_2)^2-(m_1+n_1)^2-n_1 &= [(m_1+n_1)+(m_2+n_2)-(m_1+n_1)]^2-(m_1+n_1)^2-n_1 \\ &= 2(m_1+n_1)[(m_2+n_2)-(m_1+n_1)]+[(m_2+n_2)-(m_1+n_1)]^2-n_1 \\ &> 2(m_1+n_1)+[(m_2+n_2)-(m_1+n_1)]^2-n_1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

所以

$$(m_1+n_1)^2+n_1<(m_2+n_2)^2+n_2$$

矛盾! 所以原函数在 $q>0$ 时是单射, 证毕.

> 4. 证明代数数集是可列集.

证明: 显然给定一个整系数多项式, 它的系数构成的集合是可列的. 又对于给定的 $n \in \mathbb{N}$, n 次多项式构成的集合是克列的, 所以整系数多项式构成的集合是可列的. 对于 n 次整系数多项式, 其根构成的集合是可列的, 所以代数数集是可列的.

> 5. 证明: 存在常数 $A > 0$ 使得对于任何整数 q 和正整数 p, 成立
>
> $$\left|\sqrt{3} - \frac{q}{p}\right| > \frac{A}{p^2}$$

证明: 注意到 $x = \sqrt{3}$ 是以下方程的一个根

$$x^2 - 3 = 0$$

根据 Diophantus 逼近的 Liouville 定理, 立刻得证.

B组

> 1. 设 P 为首系数不为零的 n 次复系数多项式, x_1 是它的一个零点. 则首项系数不为零的 $n-1$ 次多项式 Q 使得
>
> $$P(x) = (x - x_1)Q(x)$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
&= a_n\left(x^n - x_1^n\right) + a_{n-1}\left(x^{n-1} - x_1^{n-1}\right) + \cdots + a_1\left(x - x_1\right) + a_0 + a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 \\
&= a_n\left(x^n - x_1^n\right) + a_{n-1}\left(x^{n-1} - x_1^{n-1}\right) + \cdots + a_1\left(x - x_1\right) + f\left(x_1\right) \\
&= a_n\left(x^n - x_1^n\right) + a_{n-1}\left(x^{n-1} - x_1^{n-1}\right) + \cdots + a_1\left(x - x_1\right) \\
&= a_n\left(x - x_1\right)\left(x^{n-1} + x_1 x^{n-2} + \cdots + x_1^{n-2}x + x_1^{n-1}\right) + a_{n-1}\left(x - x_1\right)\left(x^{n-2} + x_1 x^{n-3} + \cdots + x_1^{n-3}x + x_1^{n-2}\right) + \cdots + a_1 (x \\
&= \left(x - x_1\right)\left(a_n\left(x^{n-1} + x_1 x^{n-2} + \cdots + x_1^{n-2}x + x_1^{n-1}\right) + a_{n-1}\left(x^{n-2} + x_1 x^{n-3} + \cdots + x_1^{n-3}x + x_1^{n-2}\right) + \cdots + a_1\right) \\
&= \left(x - x_1\right)\left(a_n x^{n-1} + \left(a_n x_1 + a_{n-1}\right)x^{n-2} + \cdots + a_1\right)
\end{aligned}$$

> 2. **(代数基本定理)** 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为复常数, $a_n \neq 0$. 证明: 多项式
>
> $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
>
> 至多有 n 个复零点(含重数).

实际上这个题目的严格证明以及远远超出了目前的知识水平. 我本人没有能力解答, 答案也看不明白, 泪.

> 3. 证明 Vièta 定理: 设 $a_n \neq 0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为
>
> $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
>
> 的 n 个复零点(含重根), 则对于 $1 \leqslant k \leqslant n$, 成立
>
> $$\sum_{1 \leqslant m_1 < m_2 < \cdots < m_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} x_{m_j} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

**证明: ** 把 $P(x)$ 写成零点式

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

得到

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_0}{a_n}$$

展开左边并比较两边系数即可证明.

> 4. 称关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 m 次 n 元多项式 $R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 **可轮换的**, 如果对任何 $1\leqslant k<j\leqslant n$, 将 $R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中的 x_k,x_j 分别替换成 x_j,x_k 后多项式保持不变. 证明: (1) 若 $R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是可轮换的一次齐次多项式, 则它是 $x_1+x_2+\cdots x_n$ 的常数倍. (2) 若 $R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是可轮换的二次齐次多项式, 则有常数 C_1,C_2, 使得
>
> $$R\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\equiv C_1\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)+C_2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$$
>
> (3) 归纳证明, 若 $R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是可轮换的 k 次多项式, 而 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是某首项系数不为零的 n 次有理系数多项式的零点, 则 $R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为有理数.

**证明: ** (1) 依题意设

$$R\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

那么

$$R\left(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_j,\cdots,x_n\right)-R\left(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_k,\cdots,x_n\right)=a_k\left(x_k-x_j\right)+a_j\left(x_j-x_k\right)=\left(x_k-x_j\right)\left(a_k-a_j\right)=0$$

所以

$$a_k=a_j$$

因为 k,j 是取遍 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的正整数对, 所以

$$a_1=a_2=\cdots=a_n$$

(2) 采用相同的方法, 依题意, 设

$$R\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2+b_{12}x_1x_2+b_{13}x_1x_3+\cdots+b_{1n}x_1x_n+b_{23}x_2x_3+\cdots+b_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

那么

$$\begin{aligned}
&R\left(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_j,\cdots,x_n\right)-R\left(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_k,\cdots,x_n\right)\\
&=\left(a_k-a_j\right)\left(x_k+x_j\right)\left(x_k-x_j\right)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}b_{ki}x_i\left(x_k-x_j\right)-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}b_{ji}x_i\left(x_k-x_j\right)\\
&=\left(x_k-x_j\right)\left(\left(a_k-a_j\right)\left(x_k+x_j\right)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}b_{ki}x_i-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}b_{ji}x_i\right)\\
&=\left(x_k-x_j\right)\left(\left(b_{k1}-b_{j1}\right)x_1+\left(b_{k2}-b_{j2}\right)x_2+\cdots+\left(a_k-b_{jk}\right)x_k+\cdots+\left(b_{kj}-a_j\right)x_j+\cdots+\left(b_{kn}-b_{jn}\right)x_n\right)\\
&=0
\end{aligned}$$

就此推得所有的 b 都是相同的, 且

$$a_kx_k-a_jx_j+b_{jk}\left(x_j-x_k\right)=0$$

只有 $a_k=a_j$ 时才能实现. 所以所有的 a 都相同.

(3) 本题实际上是要证明**对称多项式基本定理**, 之后利用 Viète 定理立刻得证, 以下是定理的叙述与证明(证明来自 ChatGPT-4o):

定理陈述

对于任意一个对称多项式 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, 都存在一个多项式 g 满足

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

其中 e_i 是 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的初等对称多项式.

初等对称多项式定义

初等对称多项式 $e_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 定义为:

$$\begin{aligned} e_0 &= 1 \\ e_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ e_2 &= \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j \\ &\vdots \\ e_n &= x_1 x_2 \cdots x_n \end{aligned}$$

证明

步骤 1: 单项式表达

首先, 我们考虑对称多项式 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的单项式表达. 假设 f 可以表示为:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha} c_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 是一个多重指数, c_α 是常数系数.

步骤 2: 对称性

由于 f 是对称多项式, 对于任意置换 $\sigma \in S_n$ 有:

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

因此, 单项式 $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ 的系数 c_α 必须在所有不同排列下相同.

步骤 3: 对称多项式基底

接下来, 我们使用初等对称多项式 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 作为基底. 我们希望找到一个多项式 g, 使得:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

考虑多项式环 $\mathrm{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 中的理想 I, 由初等对称多项式生成:

$$I = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$$

对于任意对称多项式 f, 存在一个多项式 h, 使得:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I$$

这意味着 f 可以表示为初等对称多项式 e_i 的多项式:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h(e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

步骤 4: 构造 g

由于 e_i 是 x_i 的多项式, 因此 f 是 e_i 的多项式. 我们将 f 写作 $g(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, 并证明存在这样的 g.

考虑 f 的每一项 $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$:

1. 对于 α 中所有的 α_i 都相同的项(如 $x_1^k x_2^k \cdots x_n^k$), 它们可以直接表示为 e_i 的幂次.
2. 对于混合项, 我们通过初等对称多项式的展开表示这些项为 e_i 的组合.

因此, 所有对称多项式 f 都可以表示为初等对称多项式的多项式 $g(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

> 5. 设 P, Q 分别是 m, n 阶首系数为 1 的有理系数多项式.
>
> $$P(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - x_k), \qquad Q(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - y_k)$$
>
> 证明: (1) 多项式 $= R(x) = \prod_{k=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (x - x_k - y_j)$ 是有理系数多项式. (2) 多项式 $S(x) = \prod_{k=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (x - x_k y_j)$ 是有理系数多项式.

> 6. 证明 Liouville 定理.

> 7. 证明一个复数是代数数当且仅当它的实部和虚部都是代数数.