泛函分析中的 Euler 方程与最小作用量原理的联系

变分算符 δ

对于性质良好的函数

$$y = y(x)$$

δy 表示任意性质良好的保端点小值函数，其中，保端点的意思是

$$\delta y|_{x=a} \equiv \delta y|_{x=b} \equiv 0$$

对于泛函

$$F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}, x)$$

作用在其上的变分算符 δ 满足链式法则

$$\delta F = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} \delta y^{(i)} = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)}$$

Euler 方程

对于如下所示的泛函

$$S[y] = \int_a^b F\left(y, y', x\right) \mathrm{d}x$$

为求得其极值，对其做一次变分

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta\left(\mathrm{d}y\right)\right) \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y'}\mathrm{d}\left(\delta y\right)\right) \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y\mathrm{d}x + \mathrm{d}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right) - \delta y\mathrm{d}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right) \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y\mathrm{d}x - \delta y\mathrm{d}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right) + \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right|_a^b \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y\mathrm{d}x - \delta y\mathrm{d}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right) \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

可以看到，泛函取得极值的一个必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

最小作用量原理

最小作用量原理又称 Hamilton 原理，原理指出，每一个力学系统都可以由一个确定的函数

$$L(q, \dot{q}, t)$$

表征，称为 Lagrange 函数，其中

$$q = (q_1, q_2, \cdots, q_s)$$

$s \in \mathbb{N}_+$ 表示系统的自由度. Lagrange 函数的具体形式将由以下条件给出

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t$$

$$\delta S = 0$$

S 称为系统的作用量，$\delta S = 0$ 意思是 Lagrange 函数的具体形式使得作用量取最小值. 显然作用量是无法取得极大值的，而对于取得的极小值是最小值这一论述，则不太好说明.

练习

试导出最速降线方程.

解： 根据功能关系，我们知道下降 y 后质点获得的速度为

$$v=\sqrt{2gy}$$

弧微元被表示为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

所以时间微元可以写作

$$\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x$$

我们所关心的全时长是路径函数的泛函

$$t=\int_0^{x_0}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x$$

记

$$K=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$$

直接套用 Euler 方程得到的是一个十分复杂的微分方程(读者可以自行尝试)，为改善这一点，我们可以利用 K 不显含 x 这一性质，以下是对 Euler 方程的一些变形.

首先，做如下考量

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}$$

上式第二个等号的成立要求 F 不显含 x，这样就有

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

这样得到

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}-\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}$$

代回 Euler 方程

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}-\frac{\partial F}{\partial y\prime}\frac{\mathrm{d}y\prime}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

下面做一个求导算子的恒等变形

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}=y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$$

代回 Euler 方程

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}-\frac{\partial F}{\partial y\prime}\frac{\mathrm{d}y\prime}{\mathrm{d}y}-y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

$$F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=C$$

将上式用于本题得到

$$K-y'\frac{\partial K}{\partial y'}=C$$

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}-y'\frac{1}{2}\frac{2y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}}=C$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}}=C$$

$$y(1+y'^2)=C$$

这个微分方程可分离变量，是好解的，解是摆线方程

$$\begin{cases}x=C\left(\theta-\sin\theta\right)\\y=C\left(1-\cos\theta\right)\end{cases}$$

后记

本文的 markdown 格式源代码以上传至 Github, 复制以下代码到终端可下载源文件

```
git clone https://github.com/SweetPastry/Markdown
```