概率论与数理统计

事件的运算

符号	集合意义	概率意义
Ω 或 S	全集/空间	样本空间、必然事件
ϕ	空集	不可能事件
ω	元素	样本点、基本事件
A	可测子集	随机事件
$\omega \in A$	ω 为 A 中元素	试验结果 ω 在 A 中，即 A 发生
$A \subset B$	A 包含在 B 中	若 A 发生，则 B 发生
$A = B$	A 与 B 相等	A 与 B 表示同一事件，同时发生或同时不发生
$A \cap B$ 或 AB	交集	A 与 B 同时发生
$A \cap B = \phi$	不相交/互斥	A 与 B 不相容，/互斥 A 与 B 不可能同时发生
$A \cup B$	并集	A 或 B 发生，A 与 B 至少一个发生
A^c 或 $\bar{A}$	余集/补集	对立事件，即 A 不发生
$A-B$ 或 $A \cap B^c$	差集	A 发生且 B 不发生
$A \triangle B$	对称差	A 与 B 恰只有一个发生
$\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n \geq k} A_n$	上极限集合	事件列 $\{A_n\}$ 中有无穷多个发生

若 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$，则 $A = \bigcap A_i$ 即 $A_n \downarrow A$（上方连续）

$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=k}^{\infty} A_n$	下极限集合	事件列 $\{A_n\}$ 中至多有限个不发生

若 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$，则 $A = \bigcup A_i$，即 $A_n \uparrow A$（上方连续）

概率基本性质

1) $P(\phi) = 0$

证：令 $A_n = \phi$，$n = 1, 2, \ldots$ 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$，且 $A_i A_j = \phi$，$i \neq j$，由可列可加性知

$$P(\phi) = P(\cup A_n) = \Sigma P(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\phi)$$

而 $P(\phi) \geq 0$ 故 $P(\phi) = 0$.

2) 有限可加性：

证：令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \phi$，则 $A_i A_j = \phi$，$i \neq j$，由可列可加性

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + 0 = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$$

3) 若 A, B 为两个事件，且 $A \subset B$，则 $P(B-A) = P(B) - P(A)$. $P(B) \geq P(A)$

证：由 $A \subset B$ 知 $B = A \cup (B-A)$，且 $A \cap (B-A) = \phi$.

由有限可加性，知 $P(B)=P(A)+P(B-A)$.

而 $P(B-A)\geq 0$ 知 $P(B)\geq P(A)$.

令 $B=\Omega$，则 $P(A)\leq P(\Omega)=1$.

4). 逆事件概率.

证 任意A事件，$A\cup A^c=\Omega$，$A\cap A^c=\phi$,

则 $1=P(\Omega)=P(A\cup A^c)=P(A)+P(A^c) \Rightarrow P(A^c)=1-P(A)$.

5) 加法公式.

证：$A\cup B=A\cup(B-A\cap B)$ 且 $A\cap(B-A\cap B)=\phi$. $A\cap B\subset B$.

则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B-A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

推广到n个事件，用归纳法.

连续性：概率的上(下)连续性与可列可加性有本质联系.

定理：设 $\mathcal{F}$ 为一个σ-域，P为从 $\mathcal{F}$ 到 $[0,1]$ 的映射满足1,2与有限可加性

那么以下叙述等价.

(1) 可列可加性成立.

(2) 若 $A_n\in\mathcal{F}$，且 $A_n\downarrow\phi$，则 $P(A_n)\downarrow 0$.

(3) 若 $A_n\in\mathcal{F}$，且 $A_n\downarrow A$，则 $P(A_n)\downarrow P(A)$.

(4) 若 $A_n\in\mathcal{F}$，且 $A_n\uparrow\Omega$，则 $P(A_n)\uparrow 1$.

(5) 若 $A_n\in\mathcal{F}$，且 $A_n\uparrow A$，则 $P(A_n)\uparrow P(A)$.

证明：
$$\left.\begin{array}{l}\text{若 } A_n\downarrow A,\ \text{即 } A_{n+1}\subset A_n,\ \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=A,\\ A_n\uparrow A,\ \text{即 } A_{n+1}\supset A_n,\ \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A\end{array}\right\}\Rightarrow A_n^c\uparrow A^c,\ \text{而 } P(A_n^c)=1-P(A_n)$$

于是 (2) $\Leftrightarrow$ (4)，(3) $\Leftrightarrow$ (5)

在(5)中取 $A=\Omega$，则 (5) $\Rightarrow$ (4)

现考虑 (4) $\Rightarrow$ (5)，设 $A_n\in\mathcal{F}$，且 $A_n\uparrow A$，令 $B_n=A_n\cup A^c$，则 $B_n\uparrow\Omega$

由(4)知 $P(B_n)\uparrow 1$.

而 $A_n\subset A \Rightarrow A_n\cap A^c=\phi \Rightarrow P(A_n\cup A^c)=P(A_n)+P(A^c)$.（有限可加）

$\Rightarrow 1=\lim P(B_n)=\lim(P(A_n)+P(A^c))=\lim P(A_n)+P(A^c)$

$\Rightarrow \lim P(A_n)=1-P(A^c)=P(A)$. 则 (4) $\Leftrightarrow$ (5).

下面考虑 (1) $\Leftrightarrow$ (5)

(5) $\Rightarrow$ (1)：设 $A_n\in\mathcal{F}$，且两两互斥，$A_i\cap A_j=\phi$，$i\neq j$.

令 $B_n=\bigcup_{1\leq i\leq n}A_i$，$B=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ 则 $B_n\uparrow B$.

由有限可加性知，$P(B_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

由(5)知，$B_n \uparrow B$，$\Rightarrow P(B_n) \uparrow P(B)$

则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(B) = \lim P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$，即(1)成立。

(1) $\Rightarrow$ (5) 设 $A_n \in \mathcal{F}$，且 $A_n \uparrow A$，即 $A_n \subset A_{n+1}$.

构造集合列：$B_1 = A_1$，$B_2 = A_2 \cap A_1^c$，… $B_n = A_n \cap A_{n-1}^c$ ….

则 $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = A_n$，且 (B_n) 两两互斥，$B_i \cap B_j = \phi$，$i \neq j$，$A = \sum_{i=1}^{\infty} B_i$

由(1)知 $P(A) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$

$= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ 即(5)成立.

故 (1) $\Leftrightarrow$ (5)．证毕. □

例. 设有 N 件产品，其中有有 D 件次品，今从中取 n 件，问其中恰有 k ($k \le D$) 件次品的概率是多少？

解：从 N 件产品中抽取 n 件（不放回抽样）．取法共 $\binom{N}{n}$ 种，

在 D 件次品中抽取 k 件，… 取法共 $\binom{D}{k}$ 种

在 $N-D$ 件正品中抽取 $n-k$ 件，… 取法共 $\binom{N-D}{n-k}$ 种.

由乘法原理知，N 件产品中，取 n 件中恰有 k 件次品的取法为 $\binom{D}{k} \cdot \binom{N-D}{n-k}$.

$\Rightarrow$ 概率为 $p = \dfrac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$．即超几何分布的概率公式

□

盒子模型：

例. 设有 n 个球，每个球等可能放入 N 个盒子中任一个，每个盒子放球数不限

求 1) 指定 n 个盒子各有一球的概率 p_1，$n \le N$.

2) 恰有 n 个盒子各有一球的概率 p_2，$n \le N$.

解．$\Omega = \{n$ 个球放入 N 个盒子$\}$，$|\Omega| = N^n$.

1) $A = \{$指定 n 个盒子各有一球$\}$：每个放法对应一个排列.

$|A| = n!$

$p_1 = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{n!}{N^n}$

2) $B = \{$恰有 n 个盒子各有一球$\}$

① 从 N 个盒子中取 n 个放球，② 重复 1) 中步骤

$|B| = \binom{N}{n} \cdot n!$

$p_2 = \dfrac{|B|}{|\Omega|} = \dfrac{N!}{N^n (N-n)!}$

应用广泛.