事件的独立性是概率论中的一个非常重要的概念．概率论与数理统计中的很多内容都是在独立的前提下讨论的．应该注意到，在实际应用中，对于事件的独立性，我们往往不是根据定义来验证而是根据实际意义来加以判断的．根据实际背景判断事件的独立性，往往并不困难．

■ 重要术语及主题

下面列出了本章的重要术语及主题，请读者写出它们的定义或内容，然后与教材中的陈述校核，看看你是否写对了．这样做旨在使读者在复习时收到较好的效果．

随机试验　样本空间　随机事件　基本事件　频率　概率　古典概型　A 的对立事件 $\overline{A}$ 及其概率　两个互不相容事件的和事件的概率　概率的加法定理　条件概率　概率的乘法公式　全概率公式　贝叶斯公式　事件的独立性　实际推断原理

习题

1. 写出下列随机试验的样本空间 S：

(1) 记录一个班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分)．

(2) 生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数．

(3) 对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上“正品”，不合格的记上“次品”，如连续查出了 2 件次品就停止检查，或检查了 4 件产品就停止检查，记录检查的结果．

(4) 在单位圆内任意取一点，记录它的坐标．

2. 设 A,B,C 为三个事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件：

(1) A 发生，B 与 C 不发生．

(2) A 与 B 都发生，而 C 不发生．

(3) A,B,C 中至少有一个发生．

(4) A,B,C 都发生．

(5) A,B,C 都不发生．

(6) A,B,C 中不多于一个发生．

(7) A,B,C 中不多于两个发生．

(8) A,B,C 中至少有两个发生．

3. (1) 设 A,B,C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=1/8$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率．

(2) 已知 $P(A)=1/2$，$P(B)=1/3$，$P(C)=1/5$，$P(AB)=1/10$，$P(AC)=1/15$，$P(BC)=1/20$，$P(ABC)=1/30$，求 $A\cup B$，$\overline{A}\overline{B}$，$A\cup B\cup C$，$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，$\overline{A}\overline{B}C$，$\overline{A}\overline{B}\cup C$ 的概率．

(3) 已知 $P(A)=1/2$，(i)若 A,B 互不相容，求 $P(A\overline{B})$，(ii)若 $P(AB)=1/8$，求 $P(A\overline{B})$．

4. 设 A,B 是两个事件．

(1) 已知 $A\overline{B}=\overline{A}B$，验证 $A=B$．

(2) 验证事件 A 和事件 B 恰有一个发生的概率为 $P(A)+P(B)-2P(AB)$．

5. 10 片药片中有 5 片是安慰剂．

(1) 从中任意抽取 5 片，求其中至少有 2 片是安慰剂的概率．

(2) 从中每次取一片，作不放回抽样，求前 3 次都取到安慰剂的概率.

6. 在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选 3 人记录其纪念章的号码.

(1) 求最小号码为 5 的概率.

(2) 求最大号码为 5 的概率.

7. 某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶、红漆 3 桶，在搬运中所有标签脱落，交货人随意将这些油漆发给顾客. 问一个订货为 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客，能按所订颜色如数得到订货的概率是多少？

8. 在 1 500 件产品中有 400 件次品、1 100 件正品. 任取 200 件.

(1) 求恰有 90 件次品的概率.

(2) 求至少有 2 件次品的概率.

9. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，问这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少？

10. 在 11 张卡片上分别写上 probability 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，求其排列结果为 ability 的概率.

11. 将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 1,2,3 的概率.

12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 只铆钉强度太弱. 每个部件用 3 只铆钉. 若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱. 问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

13. 一俱乐部有 5 名一年级学生，2 名二年级学生，3 名三年级学生，2 名四年级学生.

(1) 在其中任选 4 名学生，求一、二、三、四年级的学生各一名的概率.

(2) 在其中任选 5 名学生，求一、二、三、四年级的学生均包含在内的概率.

14. (1) 已知 $P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，求条件概率 $P(B|A\cup\overline{B})$.

(2) 已知 $P(A)=1/4$，$P(B|A)=1/3$，$P(A|B)=1/2$，求 $P(A\cup B)$.

15. 掷两颗骰子，已知两颗骰子点数之和为 7，求其中有一颗为 1 点的概率（用两种方法）.

16. 据以往资料表明，某一 3 口之家，患某种传染病的概率有以下规律：

$$P\{孩子得病\}=0.6,\quad P\{母亲得病\mid孩子得病\}=0.5,$$
$$P\{父亲得病\mid母亲及孩子得病\}=0.4,$$

求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

17. 已知在 10 件产品中有 2 件次品，在其中取两次，每次任取一件，作不放回抽样. 求下列事件的概率：

(1) 两件都是正品.

(2) 两件都是次品.

(3) 一件是正品，一件是次品.

(4) 第二次取出的是次品.

18. 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而他随意地拨号. 求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率. 若已知最后一个数字是奇数，则此概率是多少？

19. (1) 设甲袋中装有 n 只白球、m 只红球，乙袋中装有 N 只白球、M 只红球. 今从甲袋中任意取一只球放入乙袋中，再从乙袋中任意取一只球. 问取到白球的概率是多少？

(2) 第一只盒子装有 5 只红球、4 只白球,第二只盒子装有 4 只红球、5 只白球.先从第一盒中任取 2 只球放入第二盒中去,然后从第二盒中任取一只球.求取到白球的概率.

20. 某种产品的商标为"MAXAM",其中有 2 个字母脱落,有人捡起随意放回,求放回后仍为"MAXAM"的概率.

21. 已知男子有 5% 是色盲患者,女子有 0.25% 是色盲患者.今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人,恰好是色盲患者,问此人是男性的概率是多少?

22. 一学生接连参加同一课程的两次考试.第一次及格的概率为 p,若第一次及格则第二次及格的概率也为 p;若第一次不及格则第二次及格的概率为 $p/2$.

(1) 若至少有一次及格则他能取得某种资格,求他取得该资格的概率.

(2) 若已知他第二次已经及格,求他第一次及格的概率.

23. 将两信息分别编码为 A 和 B 传送出去,接收站收到时,A 被误收作 B 的概率为 0.02,而 B 被误收作 A 的概率为 0.01.信息 A 与信息 B 传送的频繁程度为 2 : 1.若接收站收到的信息是 A,问原发信息是 A 的概率是多少?

24. 有两箱同种类的零件,第一箱装 50 只,其中 10 只一等品;第二箱装 30 只,其中 18 只一等品.今从两箱中任挑出一箱,然后从该箱中取零件两次,每次任取一只,作不放回抽样.求

(1) 第一次取到的零件是一等品的概率.

(2) 在第一次取到的零件是一等品的条件下,第二次取到的也是一等品的概率.

25. 某人下午 5:00 下班,他所积累的资料表明:

到家时间	5:35～5:39	5:40～5:44	5:45～5:49	5:50～5:54	迟于 5:54
乘地铁的概率	0.10	0.25	0.45	0.15	0.05
乘汽车的概率	0.30	0.35	0.20	0.10	0.05

某日他抛一枚硬币决定乘地铁还是乘汽车,结果他是 5:47 到家的.试求他乘地铁回家的概率.

26. 病树的主人外出,委托邻居浇水,设已知如果不浇水,树死去的概率为 0.8.若浇水则树死去的概率为 0.15.有 0.9 的把握确定邻居会记得浇水.

(1) 求主人回来时树还活着的概率.

(2) 若主人回来时树已死去,求邻居忘记浇水的概率.

27. 设本题涉及的事件均有意义.设 A,B 都是事件.

(1) 已知 $P(A)>0$,证明 $P(AB|A)\geqslant P(AB|A\cup B)$.

(2) 若 $P(A|B)=1$,证明 $P(\overline{B}|\overline{A})=1$.

(3) 若设 C 也是事件,且有 $P(A|C)\geqslant P(B|C)$,$P(A|\overline{C})\geqslant P(B|\overline{C})$,证明 $P(A)\geqslant P(B)$.

28. 有两种花籽,发芽率分别为 0.8,0.9,从中各取一颗,设各花籽是否发芽相互独立.求

(1) 这两颗花籽都能发芽的概率.

(2) 至少有一颗能发芽的概率.

(3) 恰有一颗能发芽的概率.

29. 根据报道美国人血型的分布近似地为:A 型为 37%,O 型为 44%,B 型为 13%,AB 型为 6%.夫妻拥有的血型是相互独立的.

(1) B 型的人只有输入 B,O 两种血型才安全.若妻为 B 型,夫为何种血型未知,求夫是妻的安全输血者的概率.

(2) 随机地取一对夫妇,求妻为 B 型,夫为 A 型的概率.

(3) 随机地取一对夫妇,求其中一人为 A 型,另一人为 B 型的概率.

(4) 随机地取一对夫妇,求其中至少有一人是 O 型的概率.

30. (1) 给出事件 A,B 的例子,使得

(i) $P(A|B)<P(A)$, (ii) $P(A|B)=P(A)$, (iii) $P(A|B)>P(A)$.

(2) 设事件 A,B,C 相互独立,证明(i) C 与 AB 相互独立;(ii) C 与 $A\cup B$ 相互独立.

(3) 设事件 A 的概率 $P(A)=0$,证明对于任意另一事件 B,有 A,B 相互独立.

(4) 证明事件 A,B 相互独立的充要条件是 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$.

31. 设事件 A,B 的概率均大于零,说明以下的叙述(a) 必然对,(b) 必然错,(c) 可能对.并说明理由.

(1) 若 A 与 B 互不相容,则它们相互独立.

(2) 若 A 与 B 相互独立,则它们互不相容.

(3) $P(A)=P(B)=0.6$,且 A,B 互不相容.

(4) $P(A)=P(B)=0.6$,且 A,B 相互独立.

32. 有一种检验艾滋病毒的检验法,其结果有概率 0.005 误认为假阳性(即不带艾滋病毒者,经此检验法有 0.005 的概率被认为带艾滋病毒).今有 140 名不带艾滋病毒的正常人全部接受此种检验,被报道至少有一人带艾滋病毒的概率为多少?

33. 盒中有编号为 1,2,3,4 的 4 只球,随机地自盒中取一只球,事件 A 为"取得的是 1 号或 2 号球",事件 B 为"取得的是 1 号或 3 号球",事件 C 为"取得的是 1 号或 4 号球".验证:

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(AC)=P(A)P(C),\quad P(BC)=P(B)P(C),$$

但

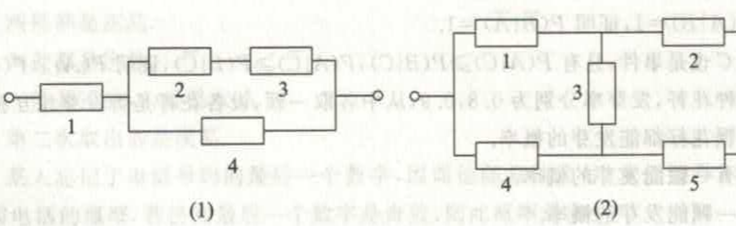
$$P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C),$$

即事件 A,B,C 两两独立,但 A,B,C 不是相互独立的.

34. 试分别求以下两个系统的可靠性:

(1) 设有 4 个独立工作的元件 1,2,3,4.它们的可靠性分别为 p_1,p_2,p_3,p_4,将它们按题 34 图(1)的方式连接(称为并串联系统).

(2) 设有 5 个独立工作的元件 1,2,3,4,5.它们的可靠性均为 p,将它们按题 34 图(2)的方式连接(称为桥式系统).



题 34 图

35. 如果一危险情
并联以改善可靠性.在 C
就发出.如果两个这样的
合的概率),问这时系统的
为 0.999 9 的系统,则至

36. 三人独立地去破
中至少有一人能将此密码

37. 设第一只盒子中
蓝色球、3 只绿色球、4 只

(1) 求至少有一只蓝

(2) 求有一只蓝色球

(3) 已知至少有一只

38. 袋中装有 m 枚
一枚,将它投掷 r 次,已知

39. 设根据以往记录
(这一事件记为 A_1),损坏
$0.15,P(A_3)=0.05$.现在
件记为 B).试求 $P(A_1|B$
取后一件是否为好品的概

40. 将 A,B,C 三个字
母的概率都是$(1-\alpha)/2$.
CCCC 的概率分别为 p_1,p
概率是多少?(设信道传

35. 如果一危险情况 C 发生时，一电路闭合并发出警报，我们可以借用两个或多个开关并联以改善可靠性. 在 C 发生时这些开关每一个都应闭合，且若至少一个开关闭合了，警报就发出. 如果两个这样的开关并联连接，它们每个具有 0.96 的可靠性(即在情况 C 发生时闭合的概率)，问这时系统的可靠性(即电路闭合的概率)是多少？如果需要有一个可靠性至少为 0.999 9 的系统，则至少需要用多少只开关并联？设各开关闭合与否是相互独立的.

36. 三人独立地去破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为 1/5，1/3，1/4. 问三人中至少有一人能将此密码译出的概率是多少？

37. 设第一只盒子中装有 3 只蓝色球、2 只绿色球、2 只白色球，第二只盒子中装有 2 只蓝色球、3 只绿色球、4 只白色球. 独立地分别在两只盒子中各取一只球.

(1) 求至少有一只蓝色球的概率.

(2) 求有一只蓝色球、一只白色球的概率.

(3) 已知至少有一只蓝色球，求有一只蓝色球、一只白色球的概率.

38. 袋中装有 m 枚正品硬币、n 枚次品硬币(次品硬币的两面均印有国徽)，在袋中任取一枚，将它投掷 r 次，已知每次都得到国徽. 问这枚硬币是正品的概率为多少？

39. 设根据以往记录的数据分析，某船只运输的某种物品损坏的情况共有三种：损坏 2%(这一事件记为 A_1)，损坏 10%(事件 A_2)，损坏 90%(事件 A_3)，且知 $P(A_1)=0.8$，$P(A_2)=0.15$，$P(A_3)=0.05$. 现在从已被运输的物品中随机地取 3 件，发现这 3 件都是好的(这一事件记为 B). 试求 $P(A_1|B)$，$P(A_2|B)$，$P(A_3|B)$(这里设物品件数很多，取出一件后不影响取后一件是否为好品的概率).

40. 将 A，B，C 三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率是 α，而输出为其他某一字母的概率都是 $(1-\alpha)/2$. 今将字母串 AAAA，BBBB，CCCC 之一输入信道，输入 AAAA，BBBB，CCCC 的概率分别为 p_1, p_2, p_3 $(p_1+p_2+p_3=1)$，已知输出为 ABCA，问输入的是 AAAA 的概率是多少？(设信道传输各个字母的工作是相互独立的.)