全概率公式与Bayes公式

事件列$(B_i)_{1\le i\le n}\in\mathcal{F}$, 称$B_1,\cdots,B_n$为$\Omega$的一个划分, 若它满足

1. $B_i\cap B_j=\emptyset,\ i\neq j,$
2. $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=\Omega.$

全概率公式

设事件列$(B_i)_{1\le i\le n}\in\mathcal{F}$为$\Omega$的一个划分, 且$P(B_i)>0$, 那么, 对于事件$A\in\mathcal{F}$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i).$$

Bayes公式

设事件列$(B_i)_{1\le i\le n}$为Ω的一个划分, 且$P(B_i)>0$, 事件A满足$P(A)>0$, 那么

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)},i=1,\cdots,n.$$

独立性

定义

两个事件A与B为相互独立的，如果满足

$$P(A\cap B)=P(A)P(B).$$

定理

设A与B相互独立，

- 若$P(A)>0$, 则$P(B|A)=P(B)$;
- A与B^c, A^c与B, A^c与B^c相互独立.

定义: 设三个事件A, B与C

- 若$P(AB)=P(A)P(B)$, $P(BC)=P(B)P(C)$, $P(AC)=P(A)P(C)$, 则称三个事件两两独立;
- 若还有$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$, 则称三个事件相互独立.

推广：事件类的独立性

- 事件类$(A_i)_{i\in I}$的两两独立：若对于任意$i,j\in I$, $i\neq j$, $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$;
- 事件类$(A_i)_{i\in I}$的相互独立：若对于任意I的有限子集J, $P(\cap_{i\in J}A_i)=\prod_{i\in J}P(A_i)$;
- $\mathcal{F}$的子σ-代数$(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$称为两两独立, 若对于任意$i,j\in I$, $i\neq j$, 任意$A_i\in\mathcal{A}_i$, $A_j\in\mathcal{A}_j$, 总有

$$P(A_i\cap A_j)=P(A_i)P(A_j).$$

- $\mathcal{F}$的子σ-代数$(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$称为相互独立, 若对于任意I的有限子集J, 任意$A_i\in\mathcal{A}_i$, $i\in J$, 总有

$$P(\cap_{i\in J}A_i)=\prod_{i\in J}P(A_i).$$

Pascal与Fermat的问题

两个赌徒以某种方式赌博，每人胜一次记一分，设定某分值，谁先达到谁赢，可以取走所有赌资. 如果在没有人赢的情况下中止赌博，但每人都有一些“得分”，如何分赌资合理？

- 问题由de Méré向Pascal提出，
- Pascal 认为应该基于每人最终赢的概率来分配赌资，
- 与Fermat通信讨论, 这些讨论被认为是概率的起源,

点数问题

独立重复同一试验, 每次成功概率为p, 失败概率为$1-p$,

1. m次失败前, 成功n次的概率多大？
2. A, B两人竞赛, 谁成功谁得一分, 若A先得到n分则A赢, 若B先得到m分则B赢. 求A赢的概率.