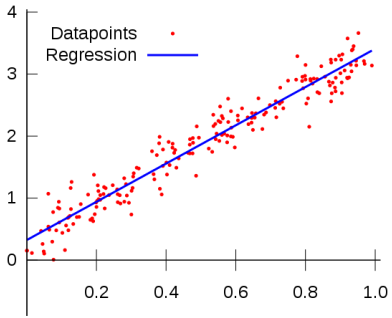


Linear Regression

目录

Contents

线性回归模型

回归诊断

交互效应

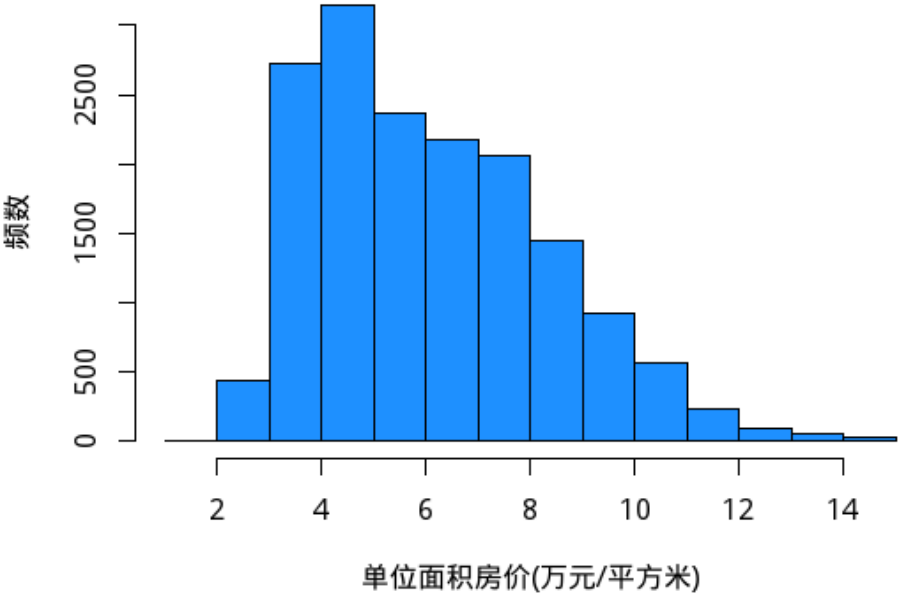
变量选择

回归预测

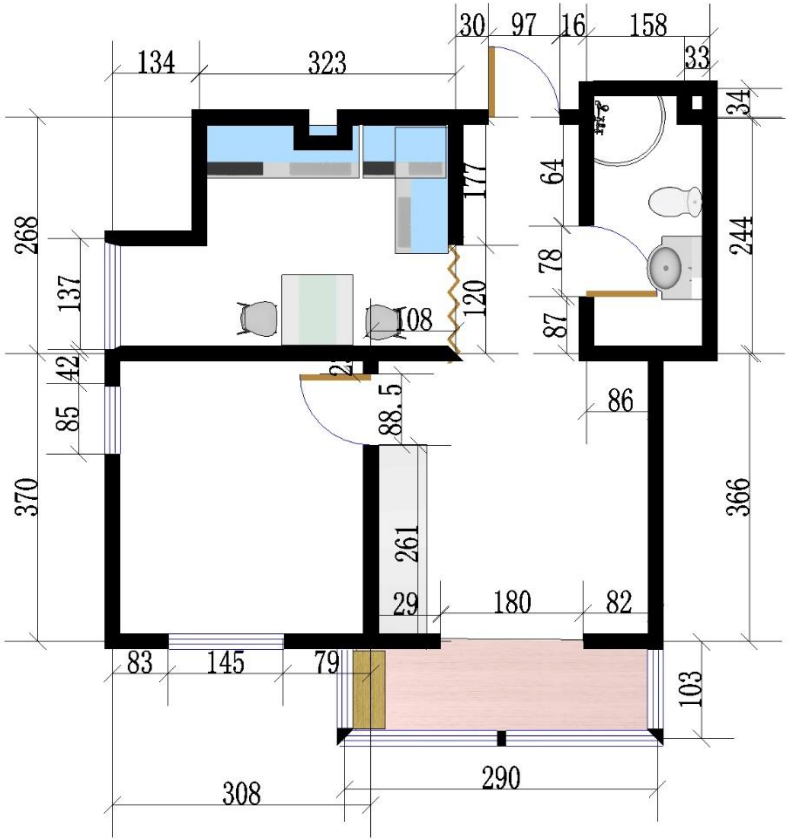
数据说明

变量类型		变量名	详细说明	取值范围	备注
因变量		单位面积房价	单位：万元/平方米	1.83~14.98	
自变量	内部因素	房屋面积	单位：平方米	30.06~299.00	
		卧室数	单位：个	1~5	
		厅数	单位：个	0~3	
		所属楼层	定性变量 共3个水平	低楼层、中楼层、高楼层	相对楼层
	区位因素	所属城区	定性变量 共6个水平	朝阳区、东城区、丰台区、 海淀区、石景山区、西城区	
		是否邻近地铁	定性变量 共2个水平	1代表邻近地铁 0代表不邻近地铁	82.89% 邻近地铁
		是否学区房	定性变量 共2个水平	1代表学区房 0代表非学区房	30.22% 是学区房

北京二手房单位房价（N=16210）



- **均　值：6.12万元/平方米**
- **中位数：5.74万元/平方米**
- **最小值：1.40万元/平方米**
  - 丰台区东山坡三里的一间两居室
  - 总面积100.83平米
- **最大值：14.99万元/平方米**
  - 西城区金融街的一套三室一厅
  - 总面积77.40平米


30
97
16
158
33
34
134
323
64
177
268
137
78
244
120
108
87
42
88.5
86
85
370
261
366
29
180
82
83
145
79
103
308
290

探秘北京金融街天价学区房：一平米要40万(图)

2016年01月14日 13:19　　来源：环球时报　　倪浩】

探秘北京金融街天价学区房：一平米要40万（图）

[打印本稿] [字号 大 中 小] [手机看新闻]

1. 单位房价跟面积、学区房相关吗？有多相关？

2. 在控制了其他因素之后（例如地理位置），这种相关性还明显吗？

3. 在宇宙中心买个40平米的学区房，大约多少钱？

简单线性回归

简单线性回归

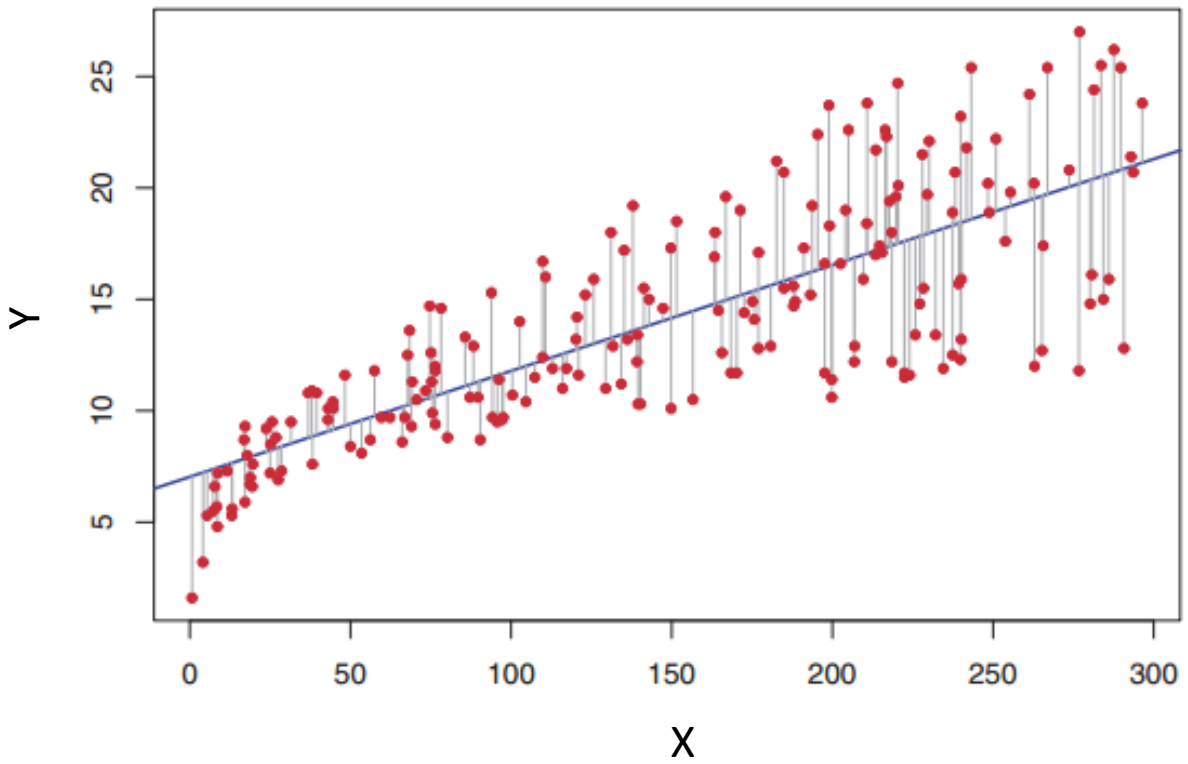
截距项

误差项

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

房屋面积

参数估计



最小二乘估计

residual sum of squares (RSS):

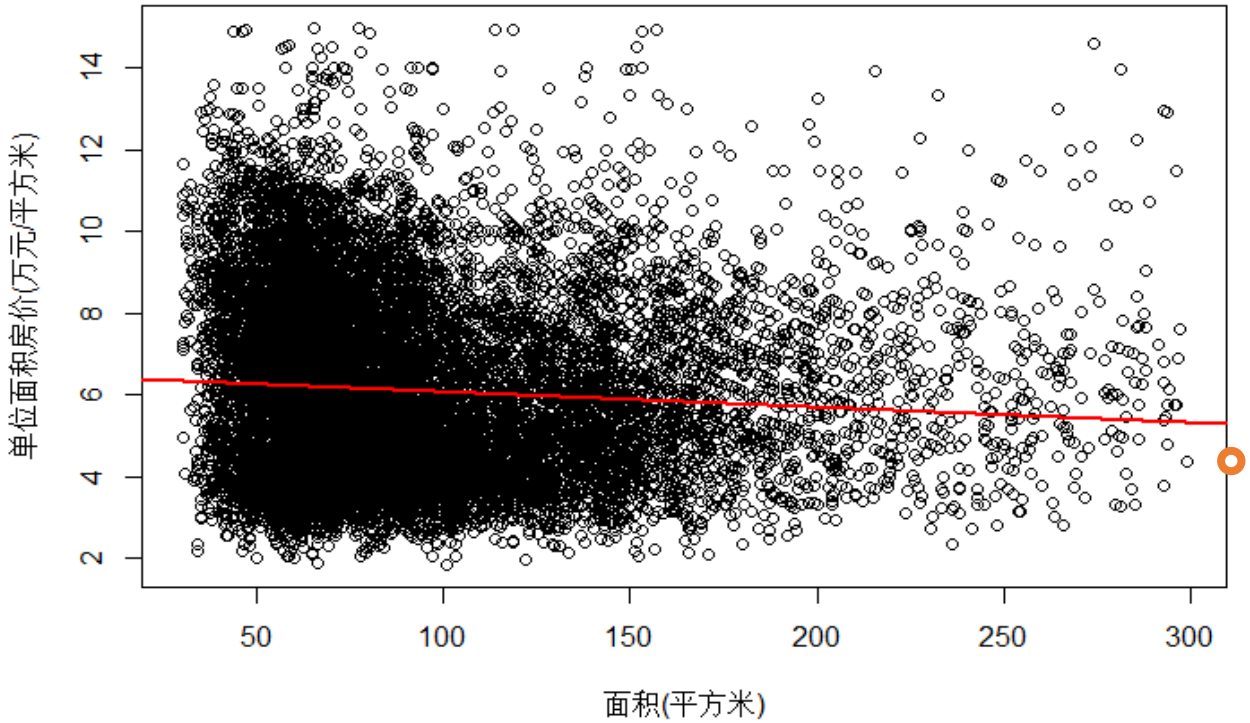
$$\mathrm{RSS} = (y_1 - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_1)^2 + (y_2 - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_2)^2 + \ldots + (y_n - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_n)^2.$$

min

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2},$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x},$$

单位房价 v.s. 面积



你能看出哪些信息?

$\widehat{\beta_0} = 6.459,$

$\widehat{\beta_1} = -0.004$

标准误

- 估计均值 $\hat{\mu} = \frac{\sum_i y_i}{n}$
- 标准误（Standard Error of $\hat{\mu}$）：

$$Var(\hat{\mu}) = SE(\hat{\mu})^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

- 与σ^2有关
- 与n 有关

- 回归系数的标准误：

$$SE(\widehat{\beta_0})^2 = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}\right), SE(\widehat{\beta_1})^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

置信区间

- n足够大时：$\frac{\widehat{\beta_j}-\beta_j}{SE(\widehat{\beta_j})}\sim N(0,1)$
- 置信水平为$1-\alpha$的置信区间：

$$\widehat{\beta_j}\pm z_{\alpha/2}SE(\widehat{\beta_j})$$

- $P\left(\widehat{\theta_L}\leq\theta\leq\widehat{\theta_U}\right)=1-\alpha$

回归系数的假设检验

H_0: $\beta_1 = 0$ H_1: $\beta_1 \neq 0$

$\boldsymbol{\beta_1 = 0}$

意味着什么?

回归系数的假设检验

$$H_0: \quad \beta_1 = 0 \qquad H_1: \quad \beta_1 \neq 0$$

检验统计量：$t = \dfrac{\widehat{\beta_1} - 0}{SE(\widehat{\beta_1})}$

- 在零假设下，t服从自由度是(n-2)的t分布。在显著性水平α的前提下，如果 $|t| > t_{\alpha/2}$(n-2) 则拒绝H_0

$$p\text{-value} = P(t_{n-2} > |t|)$$

- p值是原假设可被拒绝的最小显著性水平。如果p-value $\leq \alpha$ 则在显著性水平 α 下拒绝 H_0

评估回归模型准确性

Residual Standard Error (RSE)：

$$\mathrm{RSE} = \sqrt{\frac{1}{n-2}\mathrm{RSS}} = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}.$$

→ 平均偏离程度

$$R^2 = \frac{\mathrm{TSS} - \mathrm{RSS}}{\mathrm{TSS}} = 1 - \frac{\mathrm{RSS}}{\mathrm{TSS}} \quad \in [0,1]$$

→ 回归模型能够解释Y波动的比例

其中：$TSS = \sum(y_i - \bar{y})^2$, $RSS = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$

单位房价 v.s. 面积：R语言实现

```
> summary(lm(price ~ AREA, data = dat0))

Call:
lm(formula = price ~ AREA, data = dat0)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.3251 -1.8348 -0.3338  1.5153  9.1663

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.4589537  0.0403832 159.942   <2e-16 ***
AREA        -0.0037470  0.0003969  -9.441   <2e-16 ***

Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 2.223 on 16208 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.005469,  Adjusted R-squared:  0.005408
F-statistic: 89.13 on 1 and 16208 DF,  p-value: < 2.2e-16

>
```

β_0 β_1 参数估计

单位房价 v.s. 面积：R语言实现

```
> summary(lm(price ~ AREA, data = dat0))

Call:
lm(formula = price ~ AREA, data = dat0)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.3251 -1.8348 -0.3338  1.5153  9.1663

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.4589537  0.0403832 159.942   <2e-16 ***
AREA        -0.0037470  0.0003969  -9.441   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 2.223 on 16208 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.005469,  Adjusted R-squared:  0.005408
F-statistic: 89.13 on 1 and 16208 DF,  p-value: < 2.2e-16

>
```

β_0 β_1 参数估计

t统计量

单位房价 v.s. 面积：R语言实现

```
> summary(lm(price ~ AREA, data = dat0))

Call:
lm(formula = price ~ AREA, data = dat0)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.3251 -1.8348 -0.3338  1.5153  9.1663

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.4589537  0.0403832 159.942   <2e-16 ***
AREA        -0.0037470  0.0003969  -9.441   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 2.223 on 16208 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.005469,  Adjusted R-squared:  0.005408
F-statistic: 89.13 on 1 and 16208 DF,  p-value: < 2.2e-16

>
```

β_0 β_1 参数估计

t统计量

p-value

单位房价 v.s. 面积：R语言实现

```
> summary(lm(price ~ AREA, data = dat0))

Call:
lm(formula = price ~ AREA, data = dat0)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.3251 -1.8348 -0.3338  1.5153  9.1663

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.4589537  0.0403832 159.942   <2e-16 ***
AREA        -0.0037470  0.0003969  -9.441   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.223 on 16208 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.005469,  Adjusted R-squared:  0.005408
F-statistic: 89.13 on 1 and 16208 DF,  p-value: < 2.2e-16

>
```

β_0 β_1 参数估计

t统计量

p-value

R^2

自变量离散：0-1自变量

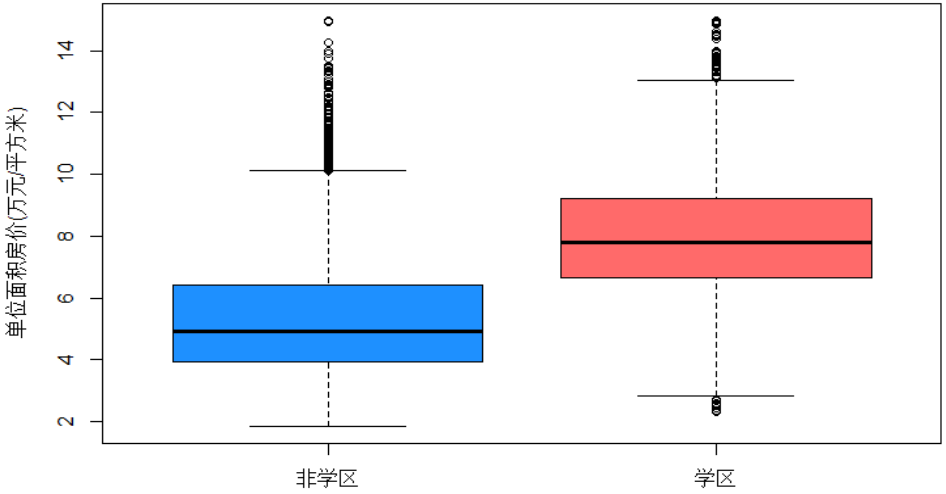
$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

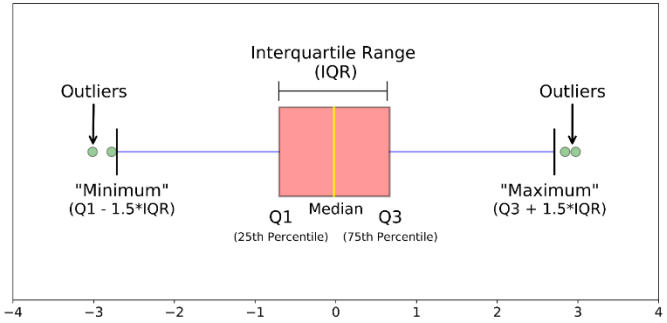
$X = 1$ 表示是学区房；

$X = 0$ 表示非学区房

β_1 如何解读?

自变量离散：0-1自变量


单位面积房价(万元/平方米)
2
4
6
8
10
12
14
非学区
学区


Interquartile Range
(IQR)
Outliers
Outliers
"Minimum"
(Q1 - 1.5*IQR)
Q1
Median
Q3
(25th Percentile)
(75th Percentile)
"Maximum"
(Q3 + 1.5*IQR)
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

自变量离散：0-1自变量

```
> summary(lm(price~school, data=dat0))

Call:
lm(formula = price ~ school, data = dat0)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-5.5957 -1.3670 -0.3366  1.1542  9.6545

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  5.33262    0.01776  300.32   <2e-16 ***
school       2.58199    0.03225   80.05   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.887 on 16208 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2834,    Adjusted R-squared:  0.2833
F-statistic:  6408 on 1 and 16208 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

自变量离散：多水平（例如：多城区）

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

X = 海淀区、朝阳区、东城区

自变量离散：多水平（例如：多城区）

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

解决方案：

$X_1 = 1$ (海淀区)；$= 0$ (非海淀区)

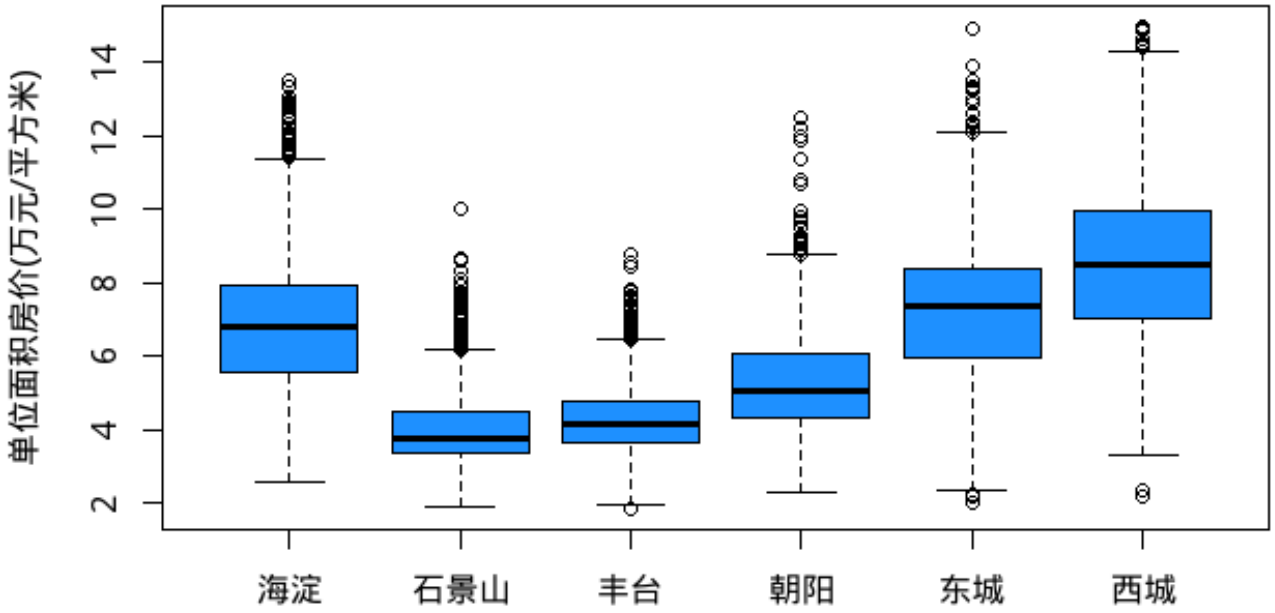
$X_2 = 1$ (朝阳区)；$= 0$ (非朝阳区)

问题：

（1） 是否需要X_3?

（2） 如果有p个水平，需要几个0-1变量?

自变量离散：多水平（例如：多城区）



自变量离散：多水平（例如：多城区）

```
> summary(lm(price~CATE, data=dat0))

Call:
lm(formula = price ~ CATE, data = dat0)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-6.3757 -0.9465 -0.1071  0.8932  7.7370

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  4.02869    0.03489 115.474  < 2e-16 ***
CATE丰台     0.22140    0.04496   4.924 8.54e-07 ***
CATE朝阳     1.25137    0.04522  27.674  < 2e-16 ***
CATE东城     3.15967    0.04548  69.469  < 2e-16 ***
CATE海淀     2.84707    0.04505  63.205  < 2e-16 ***
CATE西城     4.53879    0.04560  99.545  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.539 on 16204 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5233,    Adjusted R-squared:  0.5232
F-statistic:  3558 on 5 and 16204 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

回归系数

如何解读?

自变量离散：多水平（例如：多城区）

```
> dat0$CATE = factor(dat0$CATE,
+                    levels=c("海淀","石景山","丰台","朝阳","东城","西城"))
> summary(lm(price~CATE, data=dat0))

Call:
lm(formula = price ~ CATE, data = dat0)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-6.3757 -0.9465 -0.1071  0.8932  7.7370

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.87576    0.02849 241.311  < 2e-16 ***
CATE石景山   -2.84707    0.04505 -63.205  < 2e-16 ***
CATE丰台     -2.62567    0.04020 -65.315  < 2e-16 ***
CATE朝阳     -1.59570    0.04049 -39.411  < 2e-16 ***
CATE东城      0.31260    0.04079   7.665  1.9e-14 ***
CATE西城      1.69172    0.04091  41.352  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.539 on 16204 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5233,    Adjusted R-squared:  0.5232
F-statistic:  3558 on 5 and 16204 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

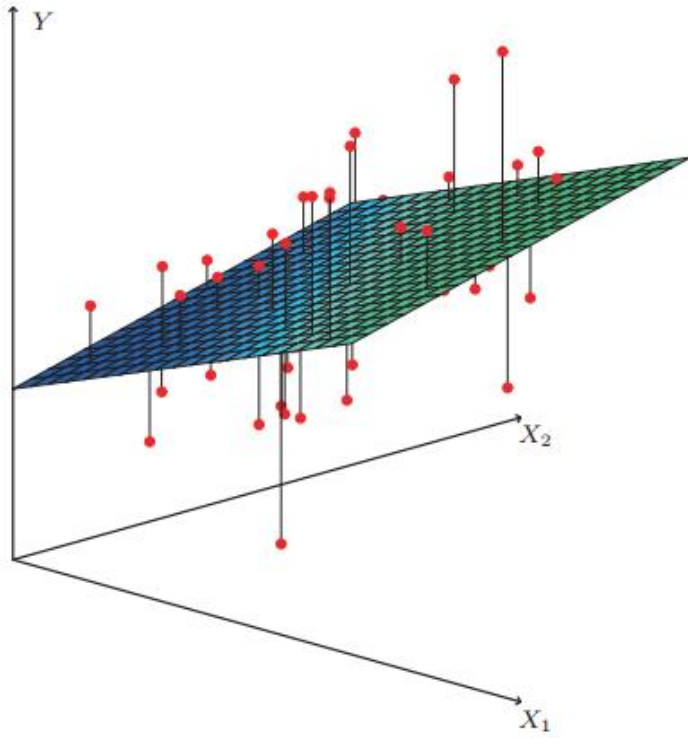
将海淀区换为基础?

多元线性回归

多元线性回归

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{X}_1 + \beta_2 \mathrm{X}_2 + \cdots + \beta_p \mathrm{X}_\mathrm{p} + \varepsilon$$

多元线性回归



$$\begin{aligned}\text{RSS} &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \hat{\beta}_p x_{ip})^2.\end{aligned}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(XY)$$

评估：是否存在线性关系?

$$H_0: \quad \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$$

$$H_1: \text{至少有一个} \beta_j \neq 0$$

在零假设下，F统计量： $F = \dfrac{(\mathrm{TSS} - \mathrm{RSS})/p}{\mathrm{RSS}/(n-p-1)}$,

服从自由度是 $(p, n-p-1)$ 的 F 分布。

扩展：是否存在线性关系?

$$H_0: \quad \beta_{p-q+1} = \beta_{p-q+2} = \cdots = \beta_p = 0$$

在零假设下，F统计量 $$F = \frac{(\mathrm{RSS}_0 - \mathrm{RSS})/q}{\mathrm{RSS}/(n-p-1)}.$$

如果 q=1 呢?

服从自由度是 $(q, n-p-1)$ 的 F 分布。

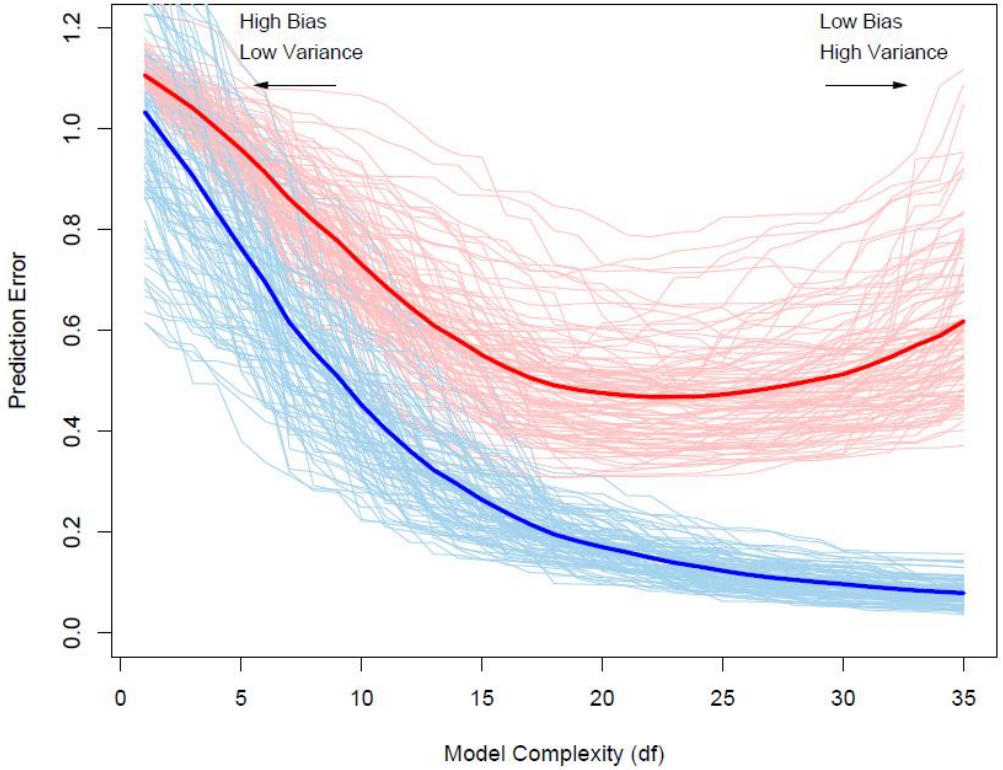
多元回归中的R^2

$$R^2 = \frac{\text{TSS} - \text{RSS}}{\text{TSS}} = 1 - \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}}$$

- 当加入新变量时，RSS单调下降。因此，更多的自变量会得到更大的R^2
- The more, the better?

No No No! 容易造成过拟合!

多元回归中的R^2



训练集

测试集

Adjusted R^2

$$R_a^2 = 1 - \frac{RSS/(n-p-1)}{TSS/(n-1)} = 1 - \frac{(n-1)}{(n-p-1)}\frac{RSS}{TSS}$$

通过自由度调整，对加入更多变量进行“惩罚”。

扩展：是否存在线性关系?

```
> summary(lm(price~ school + AREA, data = dat0))

Call:
lm(formula = price ~ school + AREA, data = dat0)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-5.6618 -1.3745 -0.3286  1.1538  9.6872

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  5.5881160  0.0359067 155.629  < 2e-16 ***
school       2.5722336  0.0322103  79.858  < 2e-16 ***
AREA        -0.0027526  0.0003364  -8.181 3.02e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.883 on 16207 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2863,    Adjusted R-squared:  0.2862
F-statistic:  3251 on 2 and 16207 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

与单变量回归系数是否相同?

扩展：是否存在线性关系?

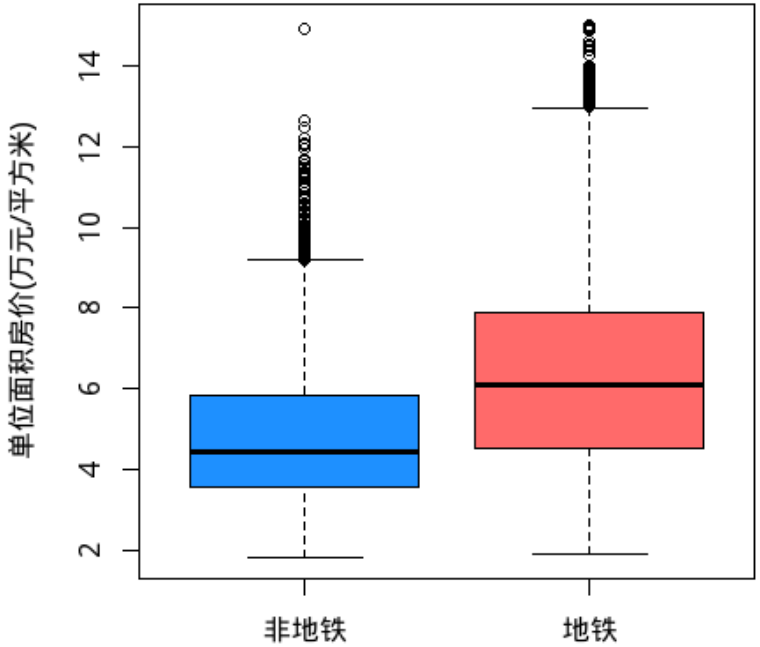
```
> summary(lm(price~ school + AREA + CATE, data = dat0))

Call:
lm(formula = price ~ school + AREA + CATE, data = dat0)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-5.7442 -0.9176 -0.1425  0.8249  8.2456

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.4208740  0.0393383 163.222  < 2e-16 ***
school       1.2458616  0.0280696  44.385  < 2e-16 ***
AREA        -0.0014385  0.0002644  -5.440 5.41e-08 ***
CATE石景山  -2.2882854  0.0446501 -51.249  < 2e-16 ***
CATE丰台    -2.0762116  0.0399083 -52.025  < 2e-16 ***
CATE朝阳    -1.2476593  0.0390133 -31.980  < 2e-16 ***
CATE东城     0.3263657  0.0384931   8.479  < 2e-16 ***
CATE西城     1.5643723  0.0388286  40.289  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.452 on 16202 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.576,     Adjusted R-squared:  0.5758
F-statistic:  3144 on 7 and 16202 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

与单变量回归

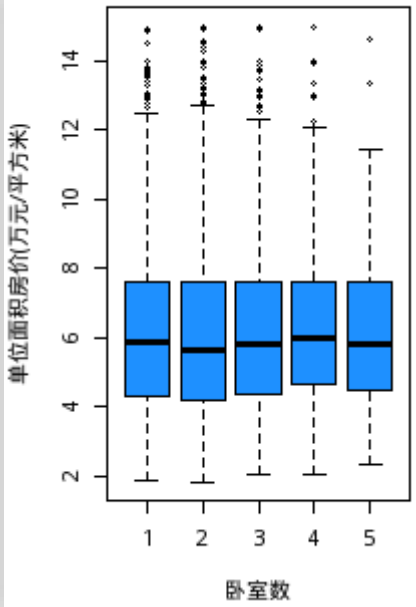
系数是否相同?

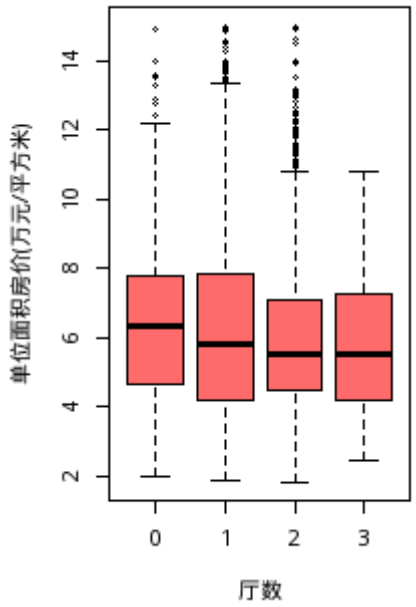
其他因素：地铁?


至昌平 To Changping
至顺义 To Shunyi
北京首都国际机场
Beijing Capital International Airport
至良乡 To Liangxiang
龙泽 Longze
回龙观 Huilongguan
霍营 Huoying
太平庄 Taipingzhuang
太平庄北 Taipingzhuangbei
颐和园 Yiheyuan
龙背村 Longbeicun
北宫门 Beigongmen
圆明园 Yuanmingyuan
西二旗 Xi'erqi
森林公园 Senlingongyuan
奥林匹克公园 Olympic Park
奥体中心 Olympic Sports Centre
立水桥 Lishuiqiao
立水桥北 Lishuiqiaobei
北苑 Beiyuan
大羊坊 Dayangfang
望京西 Wangjingxi
大屯 Datun
成府路 Chengfulu
上地 Shangdi
五道口 Wudaokou
中关村 Zhongguancun
八达岭高速 Badaling Expressway
学院路 Xueyuanlu
干杨树 Ganyangshu
芍药居 Shaoyaoju
太阳宫 Taiyanggong
万柳 Wanliu
黄庄 Huangzhuang
安定路 Andinglu
苏州街 Suzhoujie
科南路 Kenanlu
知春路 Zhichunlu
花园东路 Huayuan-donglu
熊猫环岛 Xiongmao-huandao
北土城东路 Beitucheng-donglu
和平西桥 Hepingxiqiao
光照门 Guangximen
麦子店西路 Maizidianxilu
双榆树 Shuangyushu
学院南路 Xueyuannanlu
大钟寺 Dazhongsi
积水潭 Jishuitan
鼓楼大街 Guloudajie
安定门 Andingmen
和平里北路 Hepinglibeilu
柳芳 Liufang
亮马河 Liangmahe
农展馆 Nongzhanguan
动物园 Beijing Zoo
新街口 Xinjiekou
雍和宫 Yonghegong
北新桥 Beixinqiao
东直门 Dongzhimen
工体北路 Gongtibeilu
白石桥 Baishiqiao
西直门 Xizhimen
平安里 Ping'anli
张自忠路 Zhangzizhonglu
东四十条 Dongsishitiao
呼家楼 Hujialou
四道口 Sidaokou
车公庄 Chegongzhuang
西土城 Xitucheng
东四 Dongsi
朝阳门 Chaoyangmen
光华路 Guanghualu
白锥子 Baizhuizi
阜成门 Fuchengmen
灵境胡同 Lingjinghutong
灯市口 Dengshikou
建国门 Jianguomen
大望路 Dawanglu
四惠 Sihui
四惠东 Sihuidong
Pingguoyuan 苹果园
Bajiao Amusement Park 八角游乐园
古城路 Guchenglu
八宝山 Babaoshan
五棵松 Wukesong
公主坟 Gongzhufen
军事博物馆 Military Museum
南礼士路 Nanlishilu
木樨地 Muxidi
复兴门 Fuxingmen
西单 Xidan
天安门东 Tian'anmen East
天安门西 Tian'anmen West
王府井 Wangfujing
东单 Dongdan
永安里 Yong'anli
国贸 Guomao
高碑店 Gaobeidian
双桥 Shuangqiao
管庄 Guanzhuang
八里桥 Baliqiao
通州北苑 Tongzhou-beiyuan
Yuquanlu 玉泉路
Wanshoulu 万寿路
长椿街 Changchunjie
宣武门 Xuanwumen
和平门 Hepingmen
前门 Qianmen
崇文门 Chongwenmen
北京站 Beijing Railway Station
双井 Shuangjing
劲松 Jinsong
Guangbo-xueyuan 广播学院
Guoyuan 果园
Jiukeshu 九棵树
Liyuan 梨园
Linheli 临河里
Tuqiao 土桥
北京西站 Beijing West Railway Station
菜市口 Caishikou
磁器口 Ciqikou
陶然亭 Taoranting
天坛东门 Tiantandongmen
Beijing South Railway Station 北京南站
永定门 Yongdingmen
蒲黄榆 Puhuangyu
刘家窑 Liujiayao
Shiliuzhuanglu 石榴庄路
角门北 Jiaomenbei
宋家庄 Songjiazhuang

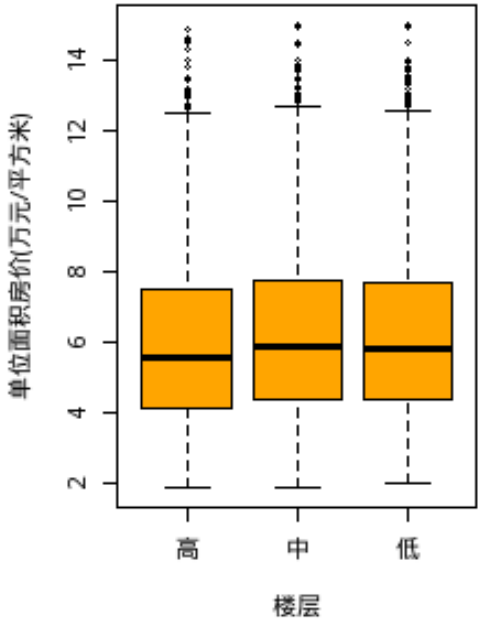

单位面积房价(万元/平方米)
2
4
6
8
10
12
14
非地铁
地铁

其他因素：房屋内设计？


单位面积房价(万元/平方米)
2
4
6
8
10
12
14
1
2
3
4
5
卧室数


单位面积房价(万元/平方米)
2
4
6
8
10
12
14
0
1
2
3
厅数

其他因素：楼层?



多元线性回归模型（因变量：单位面积房价）

变量	回归系数	p值	备注
截距项	3.315	<.0001	
城区-丰台	0.131	0.001	基准组：石景山区
城区-朝阳	0.875	<.0001	
城区-东城	2.443	<.0001	
城区-海淀	2.191	<.0001	
城区-西城	3.705	<.0001	
学区房	1.183	<.0001	
地铁房	0.672	0.001	
楼层-中层	0.152	<.0001	基准组：高层
楼层-低层	0.198	<.0001	
有客厅	0.163	<.0001	
卧室数	0.111	<.0001	
房间面积	-0.002	<.0001	
F检验	**p值<.0001**	**调整的R2**	**0.5901**

线性回归模型：结果解读

控制其他因素不变时

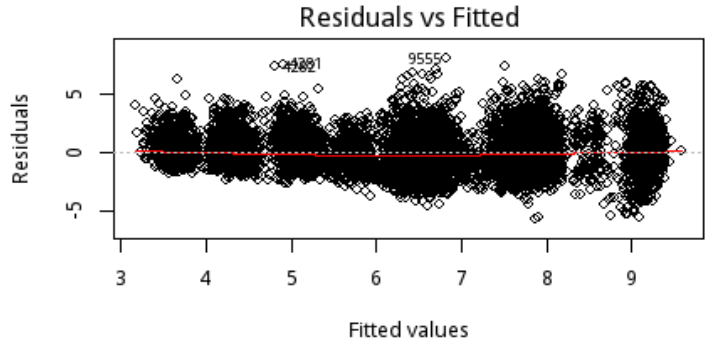
- **城区**：石景山区单位面积房价最低，西城区单位面积房价最高，比石景山区每平米平均高出**3.705**万元
- **学区房**比非学区房单位面积房价平均高出**1.18**万元
- **地铁房**比非地铁房单位面积房价平均高出**6720**元
- **高层房屋**单位面积房价最低，其次是中层，低层房屋单位面积房价最高
- **有客厅**的房子单位面积房价更高
- **卧室数**每增加一间，单位面积房价平均增加**1110**元
- **房屋面积**的增加会带来单位面积房价的降低

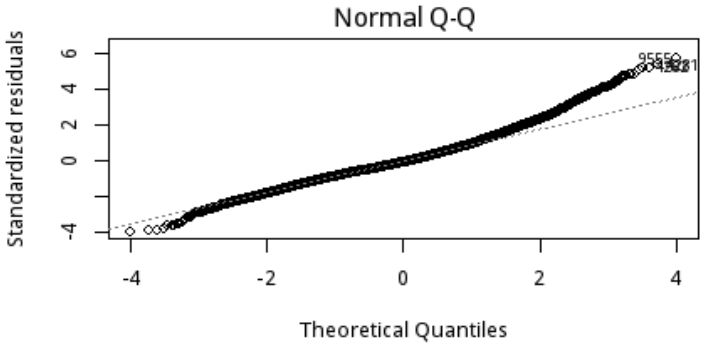
回归诊断

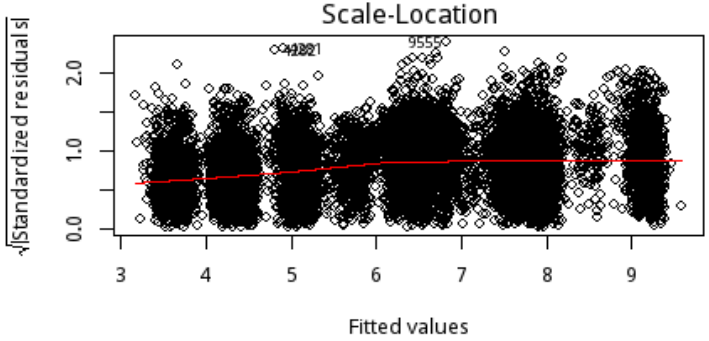
回归诊断: R语言实现

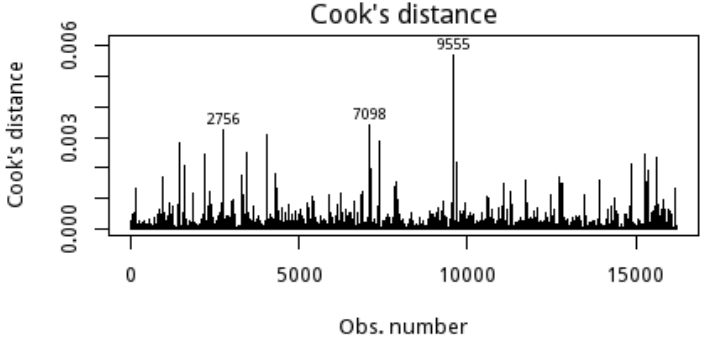
```
### 线性回归模型
lm1=lm(price~CATE+school+subway+style+floor+bedrooms+AREA,
data=dat0)
summary(lm1)                    #回归结果展示


par(mfrow=c(2,2))               #画2*2的图
plot(lm1,which=c(1:4))          #模型诊断图
```

回归诊断

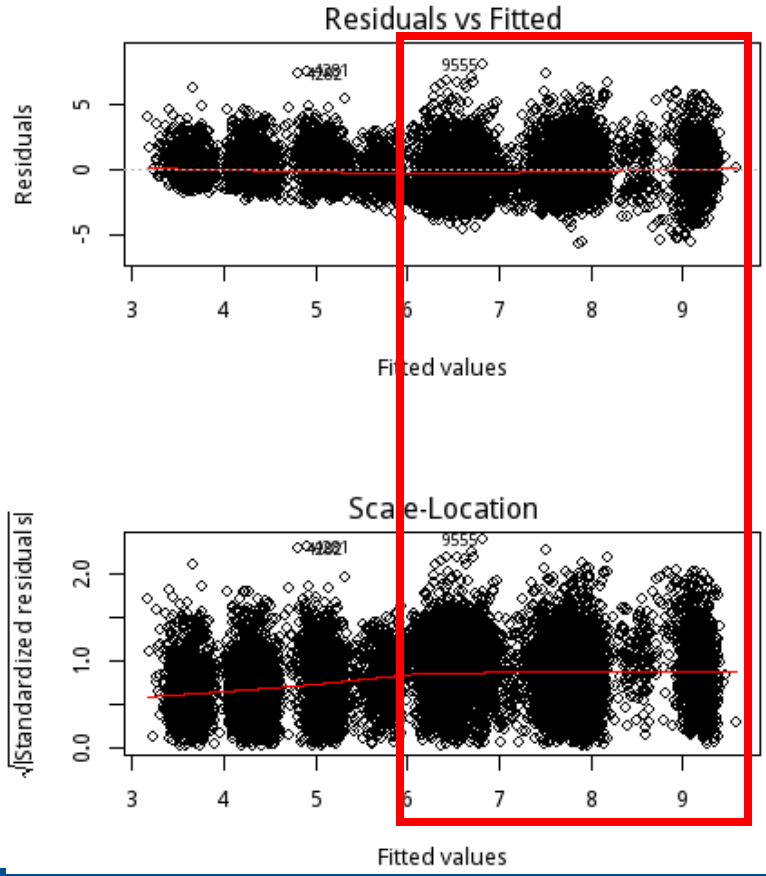

Residuals vs Fitted
Residuals
Fitted values
9555


Normal Q-Q
Standardized residuals
Theoretical Quantiles
9555


Scale-Location
√|Standardized residuals|
Fitted values
9555


Cook's distance
Cook's distance
Obs. number
9555
2756
7098

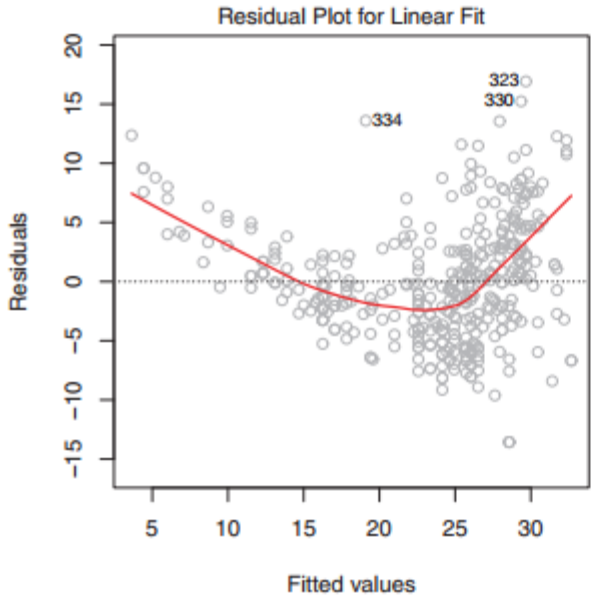
回归诊断

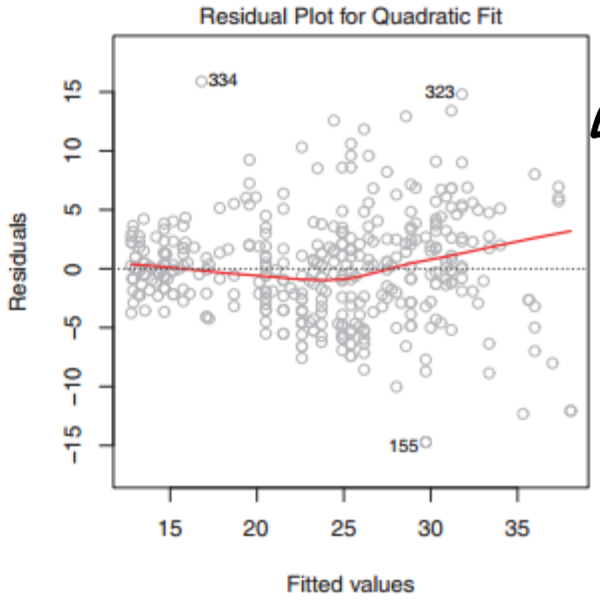

Residuals vs Fitted
Residuals
Fitted values
Scale-Location
√|Standardized residuals|
Fitted values

线性?

异方差?

补充：其他常见示例





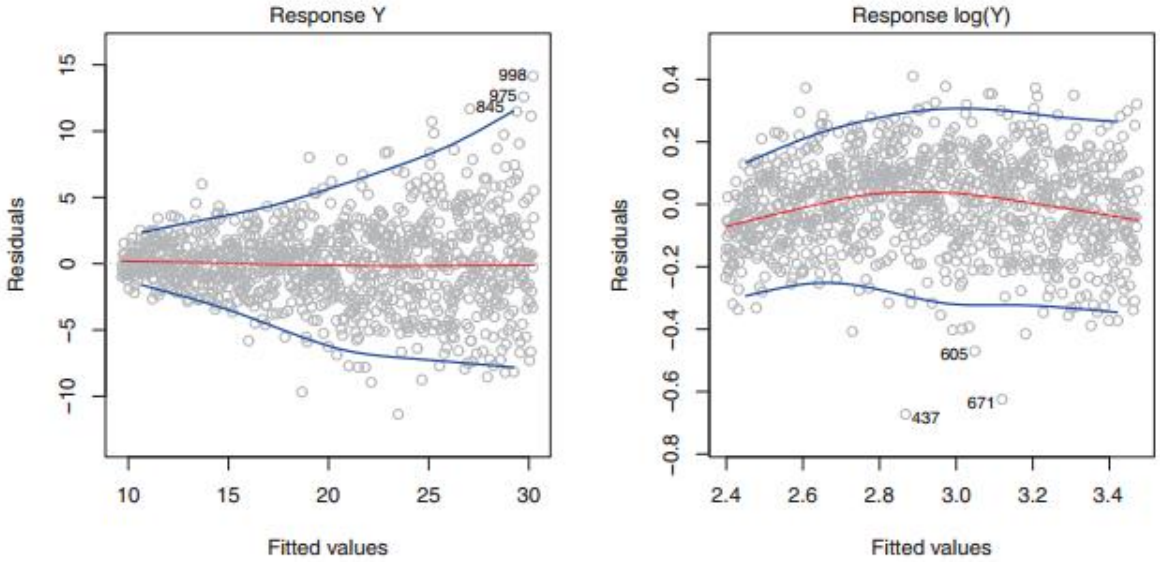
Problem：非线性！

Solution：

加入非线性项：

e.g., $X^2, \log(X), \sqrt{X}$ 等

补充：其他常见示例



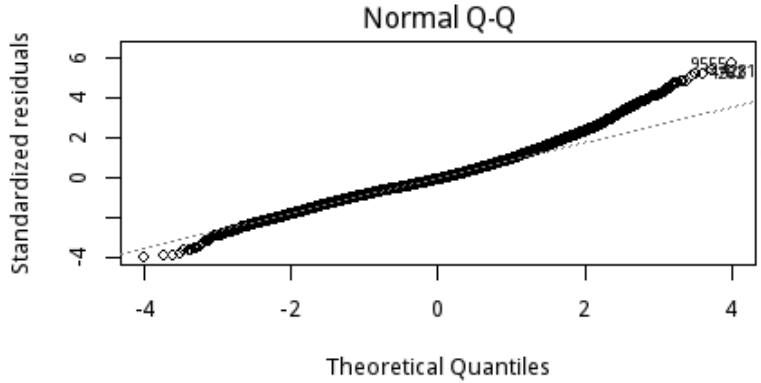
Problem：异方差!

Solution：

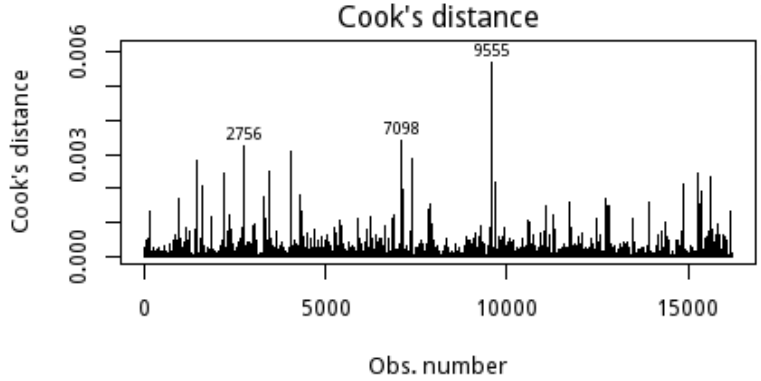
对因变量进行变换：

e.g., $\log(Y)$, $\sqrt{Y}$ 等

回归诊断



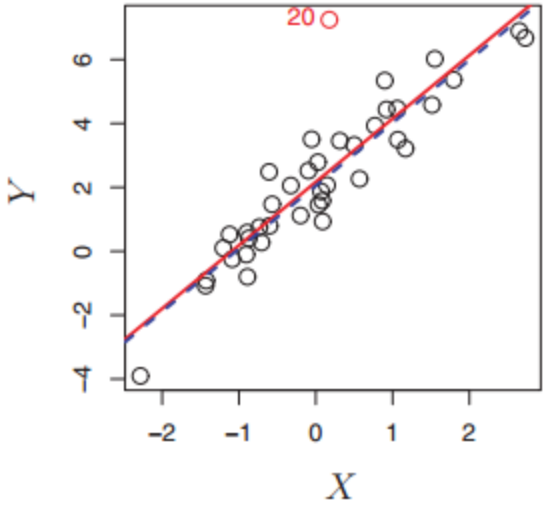
正态性诊断

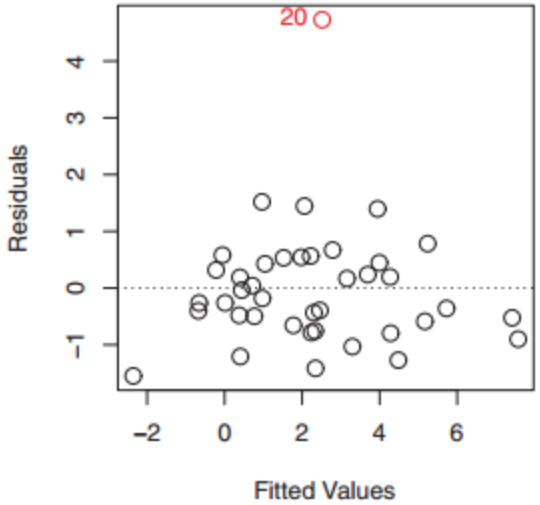


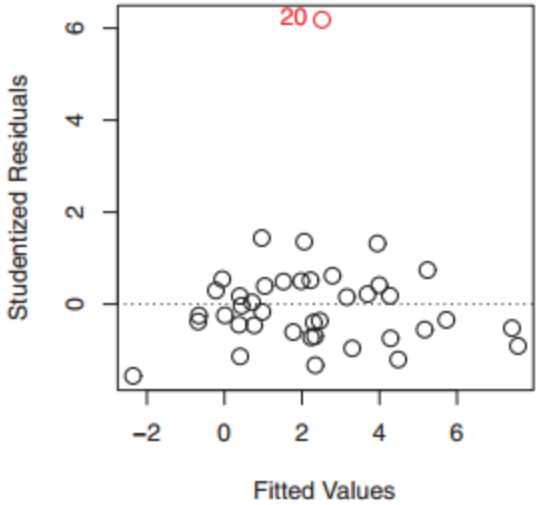
Outlier: Cook’s Distance

一般认为>4/n，或者 >1

示例：强影响点







强影响点会对回归曲线造成较大影响（对回归方程斜率&R^2造成较大影响）

共线性

```
> library(car)
> vif(lm1)
   CATE丰台     CATE朝阳     CATE东城
       2.09         2.21         2.31
   CATE海淀     CATE西城       school
       2.29         2.32         1.30
     subway   style有厅 floormiddle
       1.08         1.05         1.32
   floorlow     bedrooms         AREA
       1.32         2.13         2.18
```

Problem:

回归时，F检验显著，但是单个系数不显著

方差膨胀因子:

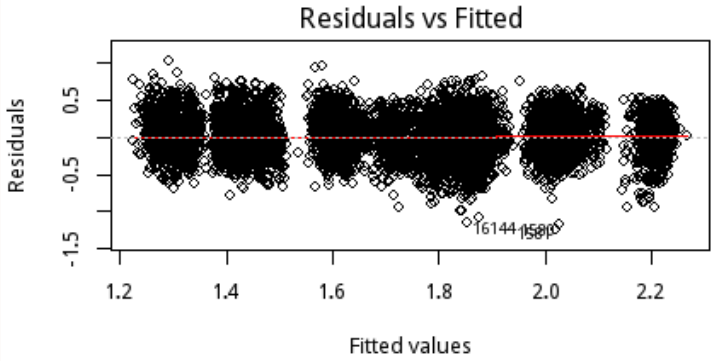
$$\mathrm{VIF} = (1 - R_i^2)^{-1}$$

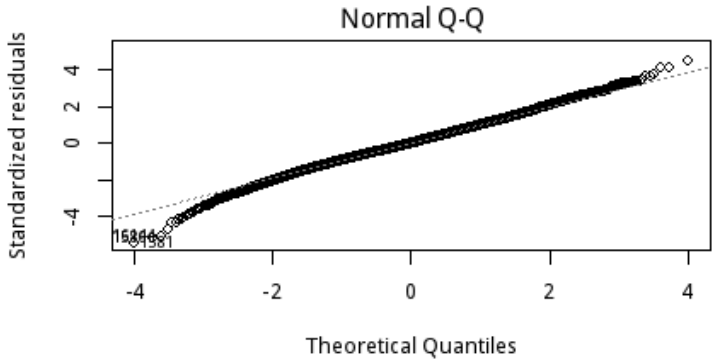
一般认为$VIF > 10$，则存在多重共线性

对数线性回归：Log(Y)

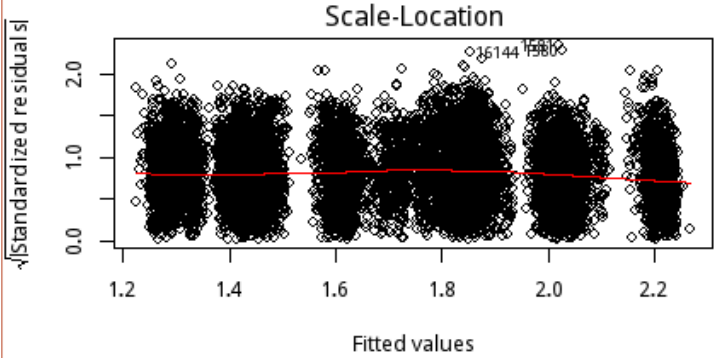
变量	回归系数（$\times 10^{-1}$）	p 值	备注
截距项	12.360	<0.001	
城区-丰台	0.441	<0.001	基准组：石景山组
城区-朝阳	2.057	<0.001	
城区-东城	4.577	<0.001	
城区-海淀	4.320	<0.001	
城区-西城	6.270	<0.001	
学区房	1.719	<0.001	
地铁房	1.282	<0.001	
楼层-中层	0.152	<0.001	基准组：高层
楼层-底层	0.198	<0.001	
有客厅	0.275	0.001	
卧室数	0.140	<0.001	
房间面积	-0.003	<0.001	
F 检验	p 值<0.0001	调整的 R^2	0.6079

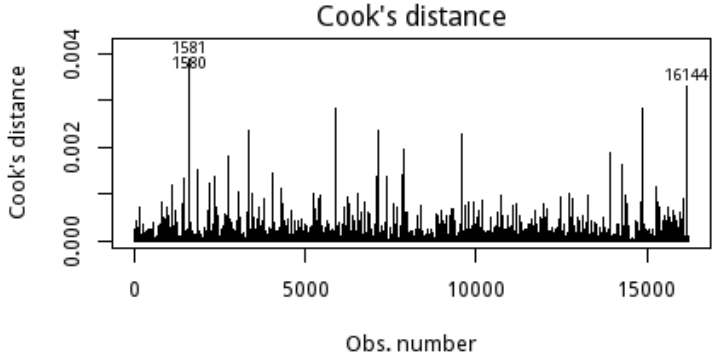
对数线性回归：Log(Y)





异方差得到改善！





对数线性模型：结果解读

- 与线性模型不同，对数线性模型的系数估计解读为“**增长率**”
- 控制其他因素不变时

$$\beta_j = \frac{d\ \log(y)}{d\ x_j} = \frac{dy/y}{dx}$$

  - **城区**：石景山区单位面积房价最低，西城区单位面积房价最高，比石景山区平均贵**62.70%**
  - **学区房**比非学区房单位面积房价平均贵**17.19%**
  - **地铁房**比非地铁房单位面积房价平均贵**12.82%**
  - **高层房屋**单位面积房价最低，其次是中层，低层房屋单位面积房价最高
  - **有客厅**的房子单位面积房价更高，平均贵**2.75%**
  - **卧室数**每增加一间，单位面积房价平均增加**1.41%**
  - **房屋面积**的增加会带来单位面积房价的降低

交互效应

交互效应

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \epsilon.$$

Interaction Term

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2 + \epsilon.$$

$$\begin{aligned} Y &= \beta_0 + (\beta_1 + \beta_3 X_2) X_1 + \beta_2 X_2 + \epsilon \\ &= \beta_0 + \tilde{\beta}_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \epsilon \end{aligned}$$

交互效应: 学区房×面积

$$\beta_0 + \beta_1 \times \text{面积} + \beta_2 \times \text{学区} + \beta_3 \times (\text{面积} \cdot \text{学区}) + \varepsilon$$

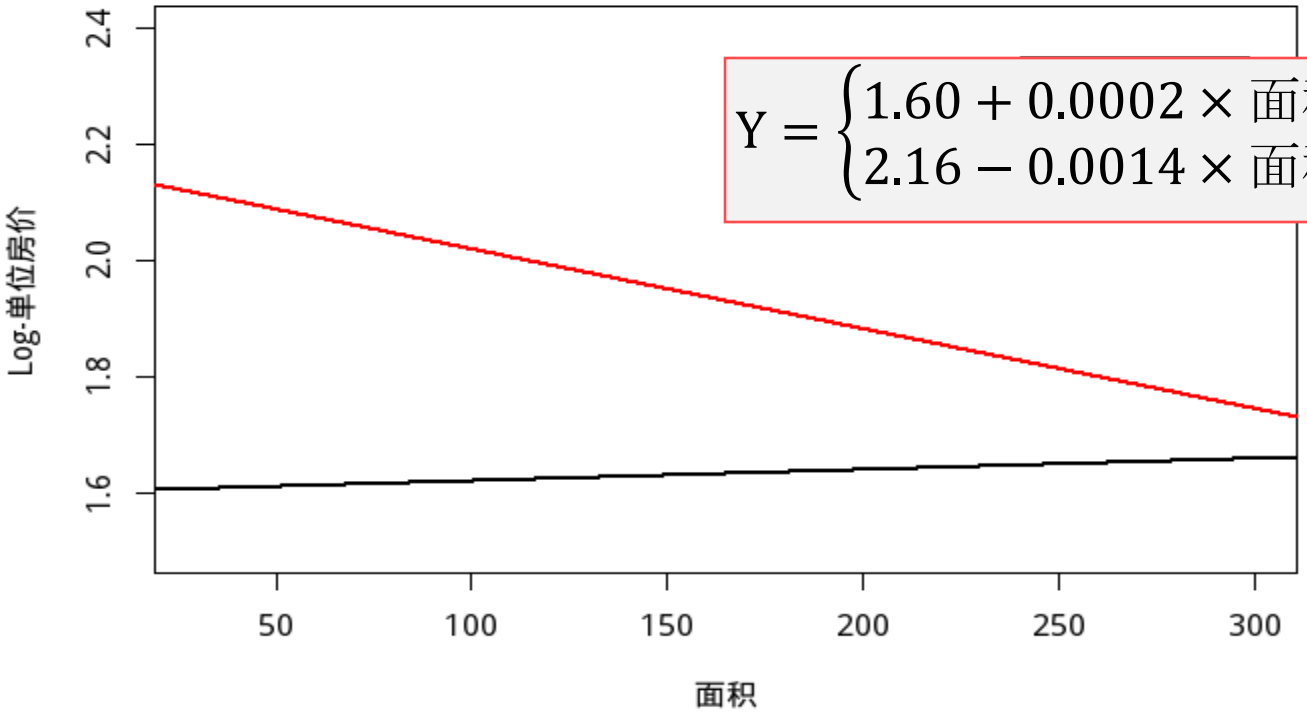
$$Y = \begin{cases} \beta_0 + \beta_1 \times \text{面积} + \varepsilon & \text{非学区} \\ \beta_0 + \beta_2 + (\beta_1 + \beta_3) \times \text{面积} + \varepsilon' & \text{学区} \end{cases}$$

交互效应: 学区房×面积

```
> summary(lm(log(price)~school+AREA+school*AREA,data=dat0))

Call:
lm(formula = log(price) ~ school + AREA + school * AREA, data = dat0)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.22690 -0.21873 -0.01225  0.21458  1.09244

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.6015432  0.0068784  232.84  < 2e-16 ***
school       0.5548057  0.0118299   46.90  < 2e-16 ***
AREA         0.0001936  0.0000672    2.88  0.00398 **
school:AREA -0.0015622  0.0001171  -13.34  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.3081 on 16206 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2835,    Adjusted R-squared:  0.2834
F-statistic:  2138 on 3 and 16206 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

如何解释?

交互效应: 学区房×面积

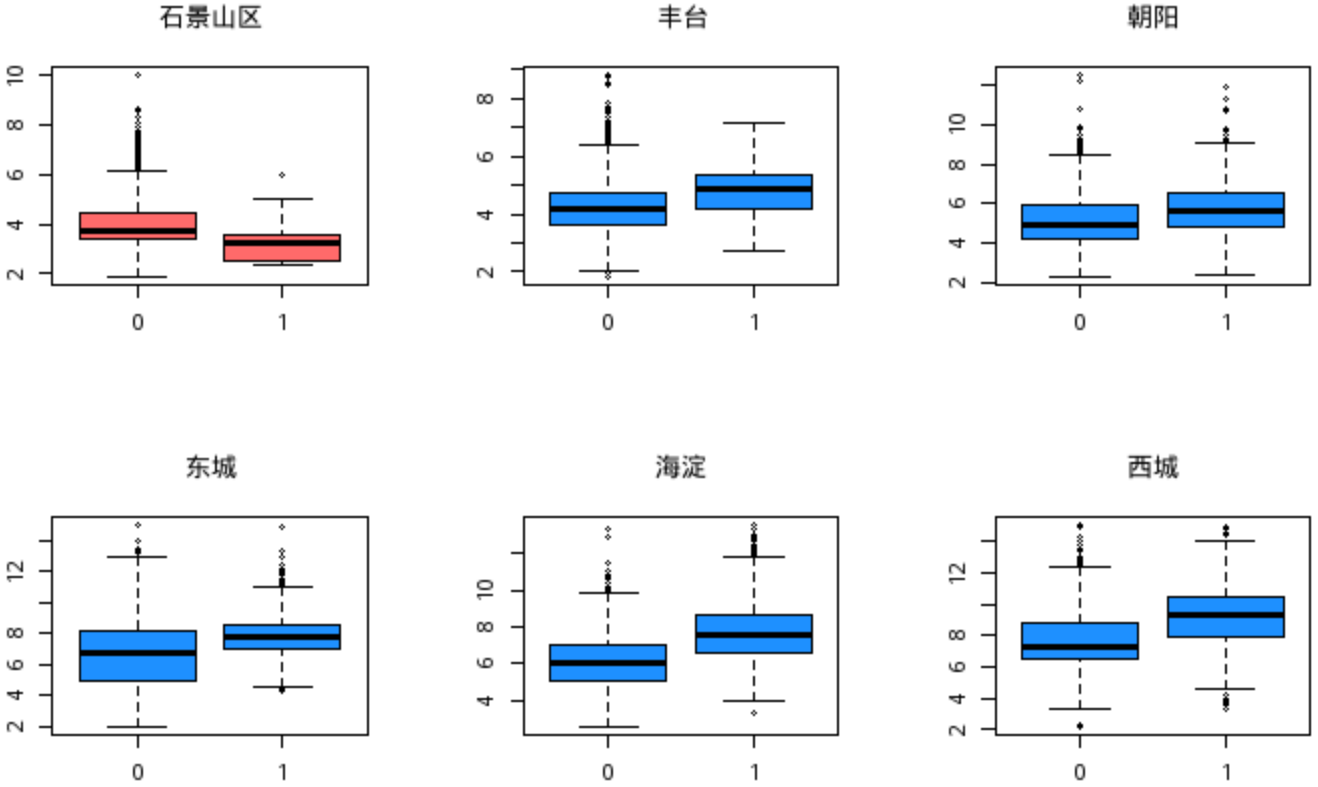


$$Y = \begin{cases} 1.60 + 0.0002 \times \text{面积} + \varepsilon & \text{非学区} \\ 2.16 - 0.0014 \times \text{面积} + \varepsilon' & \text{学区} \end{cases}$$

试试加入城区×

学区的交互项?

交互效应: 城区×学区房



对数线性交互效应模型

变量	回归系数（$\times 10^{-1}$）	p 值	备注
截距项	12.410	<0.001	
城区-丰台	0.429	<0.001	基准组：石景山组
城区-朝阳	2.184	<0.001	
城区-东城	4.467	<0.001	
城区-海淀	4.121	<0.001	
城区-西城	6.177	<0.001	
学区房	**-1.800**	<0.001	
地铁房	1.257	<0.001	
楼层-中层	0.263	<0.001	基准组：高层
楼层-底层	0.343	<0.001	
有客厅	0.270	0.001	
卧室数	0.140	<0.001	
房间面积	-0.003	<0.001	
丰台×学区	2.948	<0.001	基准组：石景山×学区
朝阳×学区	2.780	<0.001	
东城×学区	3.706	<0.001	
海淀×学区	3.876	<0.001	
西城×学区	3.638	<0.001	
F 检验	p 值<0.0001	调整的 R^2	0.6108

交互模型：结果解读

- 整体而言（不考虑学区交互项），西城区与海淀区的单位面积房价之比?
  - 对数线性模型： $e^{0.627-0.432} = e^{0.195} = 1.215$
- **学区房房价哪家强?**
  - 学区房：西城区与海淀区的单位面积房价之比
    - 交互模型： $e^{0.617+0.363-0.412-0.387} = e^{0.181} = 1.198$
  - 非学区房：西城区与海淀区的单位面积房价之比
    - 交互模型： $e^{0.617-0.412} = e^{0.205} = 1.228$

交互效应: 城区×学区房

原因:

1. 石景山区学区资源相对较差
2. 石景山区学区房入样比例较低，可能存在偏差

城区	样本量	学区房占比（%）
石景山	1947	**0.92**
丰台	2947	3.18
朝阳	2864	20.84
东城	2783	45.81
海淀	2919	47.48
西城	2750	56.10

超多水平变量

```
> head(dat0)
  CATE bedrooms halls   AREA  floor subway school  price     LONG      LAT        NAME DISTRICT style
1 朝阳        1     0  46.06 middle      1      0 4.8850 116.4597 39.92835 10AM新坐标     方庄   无厅
2 朝阳        1     1  59.09 middle      1      0 4.6540 116.4597 39.92835 10AM新坐标     方庄   有厅
3 海淀        5     2 278.95   high      1      1 7.1662 116.3036 39.95481   10号名邸   紫竹桥   有厅
4 海淀        3     2 207.00   high      1      1 5.7972 116.3036 39.95481   10号名邸   紫竹桥   有厅
5 丰台        2     1  53.32    low      1      1 7.1268 116.4188 39.94381   17号旁门   蒲黄榆   有厅
6 丰台        2     1  58.00    low      1      1 7.0690 116.4188 39.94381   17号旁门   蒲黄榆   有厅
> tab_dist = table(dat0$DISTRICT)
> length(tab_dist)
[1] 173
> sort(tab_dist, decreasing = T)[1:10]

  鲁谷    马甸    望京  苹果园 广渠门 广安门 崇文门 东直门    清河 六铺炕
   918     418     409     400     366     333     322     288     283     255
> quantile(tab_dist)
  0%  25%  50%  75% 100%
   2   29   68  112  918
```

173个水平= 172个0-1变量!

超多水平变量

1. 保留出现较多的 区域， code成新变量

```
dist_high = names(tab_dist[tab_dist>=100])
dat0$DISTRICT1 = ""
ind = is.element(dat0$DISTRICT, dist_high)
dat0$DISTRICT1[ind] = as.character(dat0$DISTRICT[ind])
dat0$DISTRICT1 = factor(dat0$DISTRICT1)

lm5 = lm(log(price)~CATE*school+subway+style+floor+bedrooms+AREA+DISTRICT1 , data=dat0)
summary(lm5)
```

共72个变量：

Multiple R-squared: 0.6992

Adjusted R-squared: 0.6979

变量选择

给定一个准则： AIC BIC p-value Adjusted R^2

线性回归变量选择:

- 向前选择（forward selection）：每次添加一个预测变量到模型中，直到添加变量不会使模型有所改进为止。

- 向后选择（backward selection）：从模型包含所有预测变量开始，一次删除一个变量直到会降低模型质量为止。

- **逐步回归**（stepwise selection）：变量每次进入一个，但是每一步中，变量都会被重新评价，对模型没有贡献的变量将会被删除

变量选择

```
mat_dist = model.matrix(~ DISTRICT1, data = dat0)[,-1]
dat1 = data.frame(dat0[,c("CATE", "school","price","subway", "style", "floor","bedrooms","AREA")],
                  mat_dist)

lm6 = lm(log(price)~CATE*school+. , data=dat1)
reg_table = summary(step(lm6))
```

R function:

step*(object, scope, scale = 0,*

direction = c("both", "backward",

"forward"), trace = 1, keep = NULL,

steps = 1000, k = 2)

共64个变量:

Multiple R-squared: 0.6991

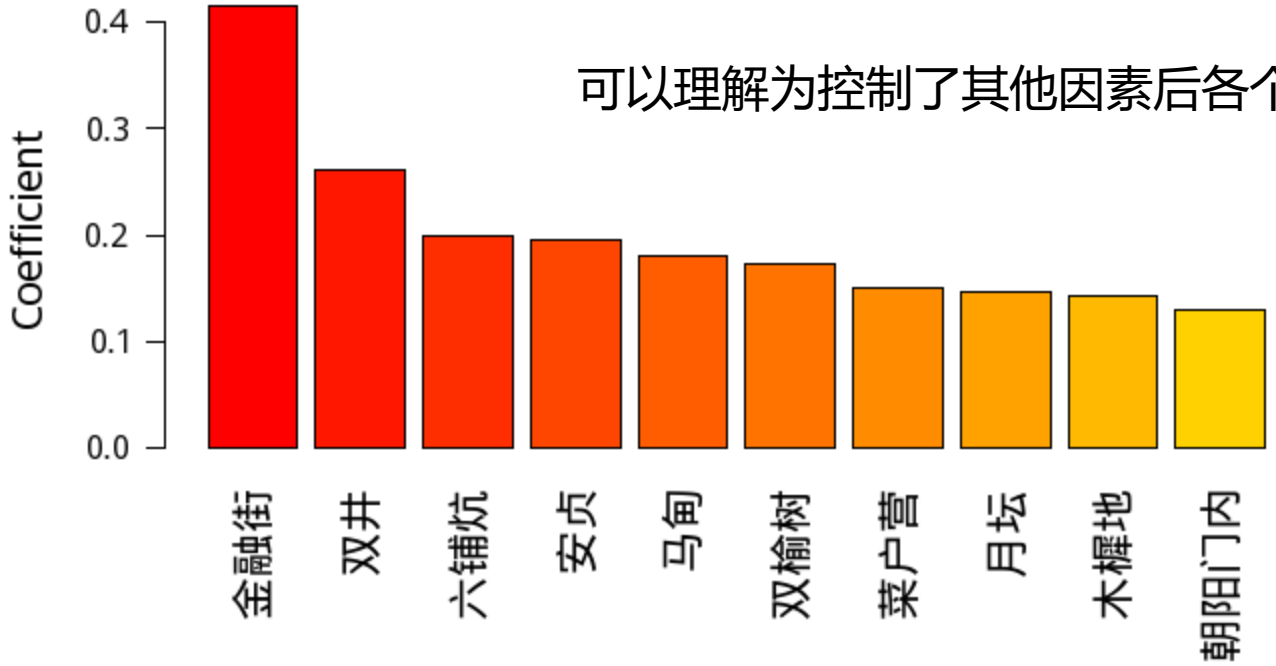
Adjusted R-squared: 0.698

两个重要的参数:

direction：变量选择方向

k：可以转换AIC&BIC 准则

十大“寸土寸金”区域



可以理解为控制了其他因素后各个区域的“魅力指数”

用词云表示

R包：

wordcloud2

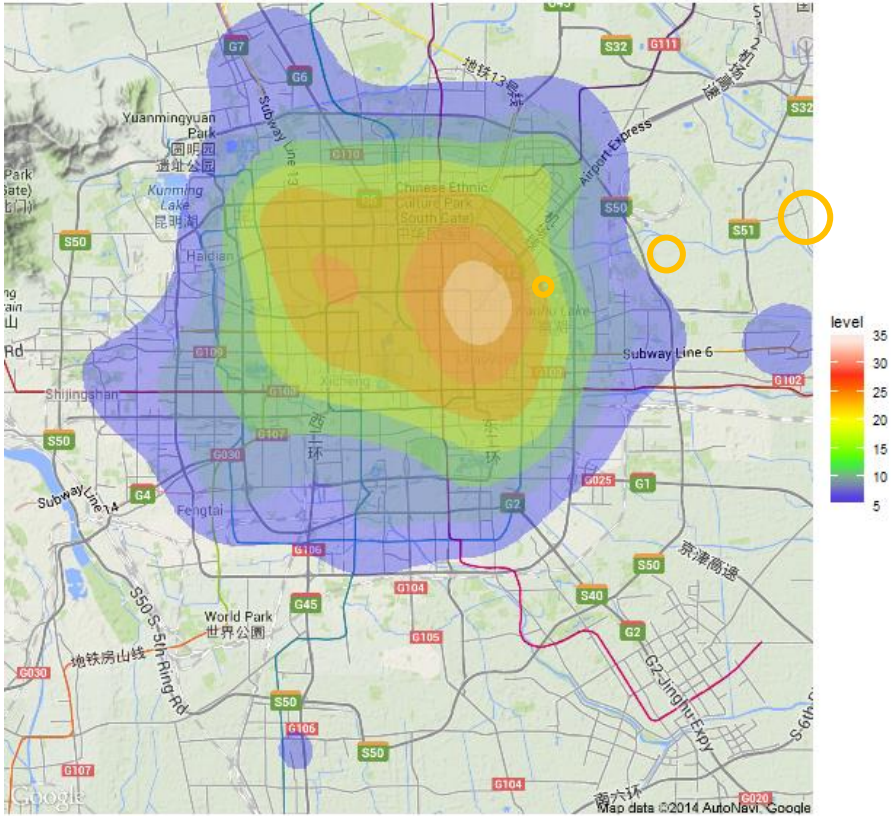
获取外部数据

越繁华的地段房价越高，是这样的吗?

获取外部数据

北京市内餐厅

分布密度图:



朝阳区、

东城区

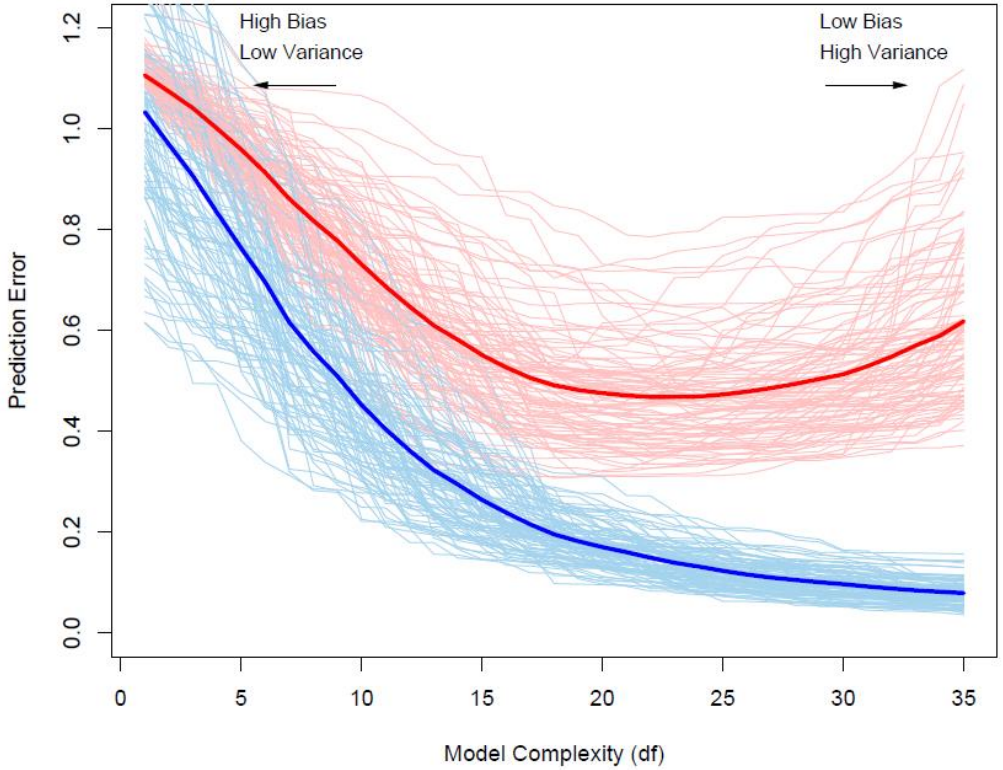
回归分析结果

Multiple R-squared:
0.7157
Adjusted R-squared:
0.7144

```
DISTRICT1苏州桥     8.570e-02  1.730e-02   4.955 7.30e-07 ***
DISTRICT1太平桥     8.361e-02  1.983e-02   4.217 2.49e-05 ***
DISTRICT1陶然亭     1.574e-01  1.494e-02  10.533  < 2e-16 ***
DISTRICT1天宁寺    -1.485e-01  1.979e-02  -7.507 6.39e-14 ***
DISTRICT1望京       1.278e-01  1.079e-02  11.843  < 2e-16 ***
DISTRICT1西罗园    -2.949e-01  1.424e-02 -20.701  < 2e-16 ***
DISTRICT1西三旗    -1.886e-01  1.636e-02 -11.526  < 2e-16 ***
DISTRICT1西直门    -6.708e-02  1.710e-02  -3.923 8.80e-05 ***
DISTRICT1亚运村     3.258e-02  1.993e-02   1.635 0.102076
DISTRICT1杨庄      -8.339e-04  2.087e-02  -0.040 0.968121
DISTRICT1永定门    -1.971e-01  2.028e-02  -9.717  < 2e-16 ***
DISTRICT1右安门内 -2.466e-02  1.993e-02  -1.237 0.216116
DISTRICT1玉泉路     7.688e-03  2.075e-02   0.371 0.710956
DISTRICT1玉泉营     6.573e-02  1.411e-02   4.658 3.22e-06 ***
DISTRICT1月坛       1.502e-01  1.660e-02   9.048  < 2e-16 ***
DISTRICT1赵公口    -2.800e-02  1.936e-02  -1.446 0.148193
DISTRICT1知春路     3.395e-02  2.053e-02   1.653 0.098261 .
DISTRICT1紫竹桥    -2.561e-02  1.648e-02  -1.554 0.120267
restN               2.399e-03  7.839e-05  30.606  < 2e-16 ***
CATE丰台:school     2.036e-01  5.140e-02   3.961 7.50e-05 ***
CATE朝阳:school     2.062e-01  4.794e-02   4.300 1.72e-05 ***
CATE东城:school     2.544e-01  4.793e-02   5.308 1.12e-07 ***
CATE海淀:school     2.600e-01  4.780e-02   5.440 5.42e-08 ***
CATE西城:school     1.850e-01  4.789e-02   3.864 0.000112 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.1945 on 16137 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7157,    Adjusted R-squared:  0.7144
F-statistic: 564.2 on 72 and 16137 DF,  p-value: < 2.2e-16

>
```

回归预测

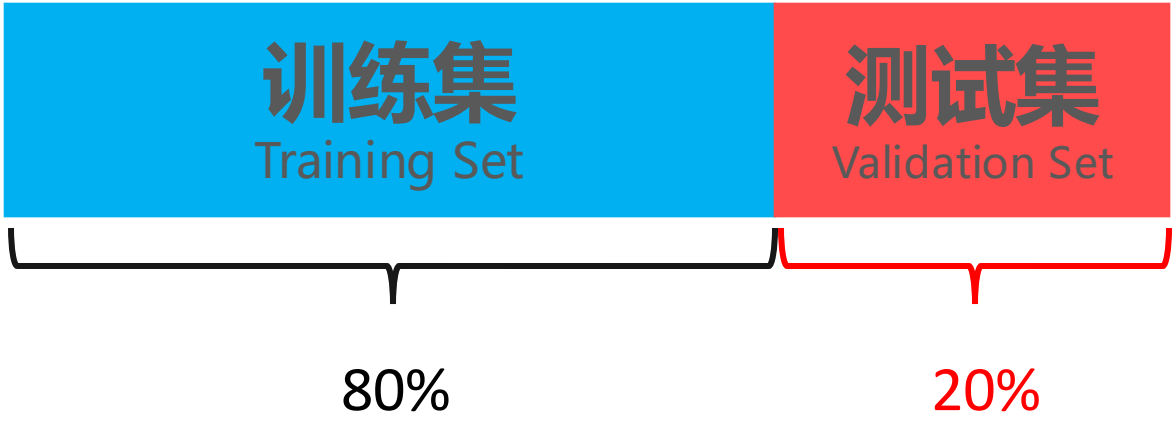
预测


High Bias
Low Variance
Low Bias
High Variance
Prediction Error
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
0
5
10
15
20
25
30
35
Model Complexity (df)

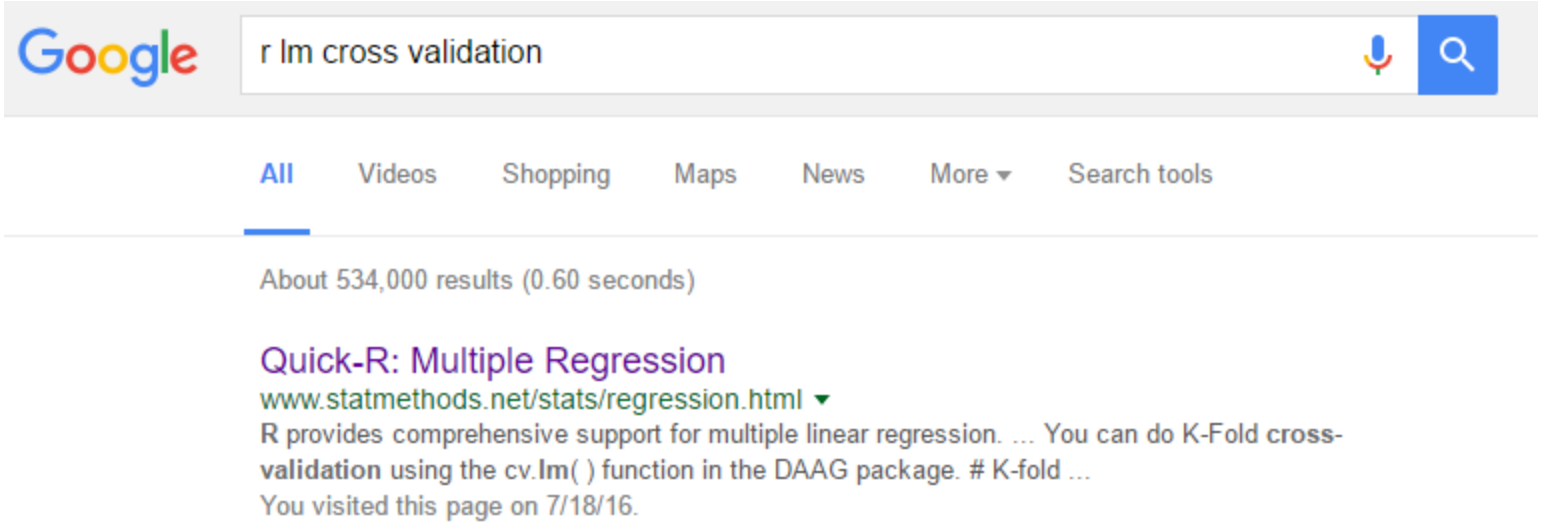
训练集

测试集

5折交叉验证



5折交叉验证：R语言实现



5折交叉验证：R语言实现

Approach 1：使用DAAG中的cv.lm() 函数

```
> library(DAAG)
> system.time({cvlm4 = cv.lm(data = dat0, lm4, m=5, printit = F, seed = 1234)})

用户 系统 流逝
0.72 0.77 1.48
Warning message:
In cv.lm(data = dat0, lm4, m = 5, printit = F, seed = 1234) :

 As there is >1 explanatory variable, cross-validation
 predicted values for a fold are not a linear function
 of corresponding overall predicted values.  Lines that
 are shown for the different folds are approximate

> attr(cvlm4, "ms")
[1] 0.0516
```

缺点：计算慢，参数较复杂，许多不必要输出

5折交叉验证：R语言实现

Approach 2：使用bootstrap中的crossval() 函数

```
library(bootstrap)

# define functions
theta.fit = function(x,y){lsfit(x,y)}
theta.predict = function(fit,x){cbind(1,x)%*%fit$coef}

system.time({
# matrix of predictors
mat01 = model.matrix(~ CATE+ floor+style, data = dat0)[,-1]
X = cbind(mat01, dat0[,c(2:4,6:7)])
# vector of predicted values
y = as.matrix(log(dat0$price))

set.seed(1234)
pred_cv = crossval(X,y, theta.fit, theta.predict, ngroup=5)
})
sqrt(mean((pred_cv$cv.fit-log(dat$price))^2))
```

```
用户 系统 流逝
0.08 0.02 0.09
> sqrt(mean((pred_cv$cv.fit-log(dat$price))^2))
[1] 0.226
>
```

优点：速度快！

缺点：要预处理成矩阵，差评！

5折交叉验证：R语言实现

Approach 3：自己动手，丰衣足食！ （示例：如何动手写一个函数）

```
pred.cv<-function(dat, k)
{
  ind = sample(1:k, nrow(dat), replace = T)
  pred_cv = rep(0, nrow(dat))
  for (i in 1:k)
  {
    ii = which(ind==i)
    obj = lm(log(price)~CATE*school+subway+style+floor+bedrooms+AREA,
             data = dat[-ii,])
    pred_cv[ii] = predict(obj, dat0[ii,])
  }
  rmse = sqrt(mean((pred_cv-log(dat$price))^2))
  return(list(pred_cv = pred_cv, rmse = rmse))
}

set.seed(1234)
system.time({pred_cv = pred.cv(dat = dat0, k = 5)})
pred_cv$rmse
```

```
> system.time({pred_cv = pred.cv(dat = dat0, k = 5)})
用户 系统 流逝
0.24 0.06 0.30
> pred_cv$rmse
[1] 0.227
```

5折交叉验证：R语言实现

重复k次，做评估

```
> set.seed(1234)
> rmses = rep(0, 50)
> for (i in 1:50)
+ {
+   cat(i, "\r")
+   pred_cv = pred.cv(dat = dat0, k = 5)
+   rmses[i] = pred_cv$rmse
+ }
50
> mean(rmses)
[1] 0.227
>
```

THANKS!