

不确定度的评估

林海轩

(复旦大学物理学系)

摘 要

从《复旦大学基础物理实验》第一章中总结的复习要点,有关不确定的评估.

关键词: 不确定度

目录

1	不确定度的分类	3
1.1	A 类不确定度	3
1.2	B 类不确定度	3
1.3	不确定度的合成	4
1.4	例题	5

1 不确定度的分类

1.1 A 类不确定度

记平均值 \bar{x} 为

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

以平均值 \bar{x} 为真值 x 的最佳估计, 那么平均值有不确定度

$$u_A(\bar{x}) = t \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

其中 t 是 ‘ t 因子’, 与测量次数和置信概率有关, 一般地, 当 $n \geq 10$, $p = 68.3\%$ 时有 $t = 1$. 一般就取 $t = 1$ 就可以了.

1.2 B 类不确定度

B 类不确定度由测量不确定度 u_{B_1} 和仪器不确定度 u_{B_2} 组成.

测量不确定度 u_{B_1} 是由估读引起的, 一般单次测量是依靠仪器分度值、值落在的区间还有测量者的经验等得到.

仪器不确定度 u_{B_2} 是由仪器本身的特性所决定的, 定义为

$$u_{B_2}(x) = \frac{a}{c}$$

其中, a 是仪器说明书上所标明的 “最大误差” 或 “不确定度限值”. c 是一个与仪器不确定度 $u_{B_2}(x)$ 的概率分布特性有关的常数, 称为 “置信因子”.

	正态分布	均匀分布	三角分布
c	3	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$

这个表格是常见的概率分布对应的 c 的取值. 如果仪器说明书上只给出不确定度限值 (即最大误差), 却没有关于不确定度概率分布的信息, 则一般可用均匀分布处理.

有些仪器说明书没有直接给出其不确定度限值，但给出了仪器的准确度等级，则其不确定度限值 a 需经计算才能得到。如指针式电表的不确定度限值等于其满量程值乘以等级，例如满量程为 10V 的指针式电压表，其等级为 1 级，则其不确定度限值 $a=10\text{V}\times 1\%=0.1\text{V}$ 。又如电阻箱的不确定度限值等于示值乘以等级再加上零值电阻，由于电阻箱各档的等级是不同的，因此在计算时应分别计算，例如：常用的 ZX21 型电阻箱，其示值为 360.5Ω ，零值电阻为 0.02Ω ，则其不确定度限值

$$a=(300\times 0.1\%+60\times 0.2\%+0\times 0.5\%+0.5\times 5\%+0.02)\Omega=0.46\Omega。$$

从书上截图下来的，注意到小于零值电阻的不确定度限度都被舍弃了

1.3 不确定度的合成

第一种情况：多次测量

$$u(x)=\sqrt{u_A^2(x)+u_{B_2}^2(x)}$$

第二种情况：单次测量

$$u(x)=\sqrt{u_{B_1}^2(x)+u_{B_2}^2(x)}$$

对于若干个直接测量量 x_1, x_2, \dots, x_n 要计算间接测量量 $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，则 y 的不确定度为

$$u^2(y)=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)$$

据此有推论：(1) 加减法 $y=x_1\pm x_2$ ：

$$u^2(y)=u^2(x_1)+u^2(x_2)$$

(2) 乘除法 $y=x_1x_2$ 、 $y=\frac{x_1}{x_2}$ ：

$$\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2=\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2+\left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2$$

(3) 乘开方 $y=x^n$

$$\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2=\left(n\frac{u(x)}{x}\right)^2$$

1.4 例题

六、实例

用电子天平测得一个圆柱体的质量 $M=80.36\text{g}$ ；电子天平的最小指示值为 0.01g ；不确定度限值为 0.02g 。用钢尺测量该圆柱体的高度 $H=H_2-H_1$ ，其中， $H_1=4.00\text{cm}$ ， $H_2=19.32\text{cm}$ ；钢尺的分度值为 0.1cm ，估读 $1/5$ 分度；不确定度限值为 0.01cm 。用游标卡尺测量该圆柱体的直径 D （数据如下表所示）；游标卡尺的分度值为 0.002cm ；不确定度限值为 0.002cm 。

D/cm	2.014	2.020	2.016	2.020	2.018
	2.018	2.020	2.022	2.016	2.020

试根据上述数据，计算该圆柱体的密度及其不确定度。

解：（1）圆柱体的质量 $M = 80.36\text{g}$

$$u(M) = \sqrt{(u_{B1}(M))^2 + (u_{B2}(M))^2} = \sqrt{(0.01)^2 + \left(\frac{0.02}{\sqrt{3}}\right)^2} \text{g} = 0.015\text{g}$$

（2）圆柱体的高 $H = H_2 - H_1 = (19.32 - 4.00)\text{cm} = 15.32\text{cm}$

$$u(H) = \sqrt{2 \cdot (u_{B1}(H))^2 + (u_{B2}(H))^2} = \sqrt{2 \cdot (0.02)^2 + \left(\frac{0.01}{\sqrt{3}}\right)^2} \text{cm} = 0.029\text{cm}$$

（3）圆柱体的直径的平均值 $\bar{D} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} D_i = 2.0184\text{cm}$

$$u_A(\bar{D}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (D_i - \bar{D})^2}{10 \times (10 - 1)}} = 0.00078\text{cm}$$

$$u(\bar{D}) = \sqrt{(u_A(\bar{D}))^2 + (u_{B2}(\bar{D}))^2} = \sqrt{(0.00078)^2 + \left(\frac{0.002}{\sqrt{3}}\right)^2} \text{cm} = 0.0014\text{cm}$$

（4）根据上述数据计算材料的密度及其不确定度。

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{4M}{\pi D^2 H} = \frac{4 \times 80.36}{3.1416 \times (2.0184)^2 \times 15.32} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1.6394 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{u(\rho)}{\rho} &= \sqrt{\left(\frac{u(M)}{M}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{u(H)}{H}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{0.015}{80.36}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{0.0014}{2.0184}\right)^2 + \left(\frac{0.029}{15.32}\right)^2} = 0.24\% \end{aligned}$$

$$u(\rho) = \frac{u(\rho)}{\rho} \times \rho = 0.24\% \times 1.6394 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 0.004 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\therefore \rho \pm u(\rho) = (1.639 \pm 0.004) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = (1.639 \pm 0.004) \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$