标题

2023年11月7日

目录

第 一 章

集合与映射

在数学中，严格性不是一切，但是没有它便没有一切。不严格的证明微不足道。

——H.Poincaré

§1.1 集合

【定义 1.1】 设A,B是两个集合，若A中元素均属于B，则称A为B的子集，记作$A\subseteq B$或者$B\supseteq A$。此时也称A包含于B，或B包含于A。若$A\subseteq B$且存在B中的元素不属于A，则称A为B的真子集，记作$A\subset B$或者$B\supset A$。那么撒旦飒飒大苏打盛大的发阿瑟东大时代啊实打实的啊阿斯顿阿萨打算大十大速度阿萨打算的阿萨大速度阿萨大速度啊

【定理 1.2】

【命题 1.3】 $(a,b)=(c,d)$当且仅当$a=c$ 且$b=d$。

证明. 充分性是显然的。下证明必要性。如果$(a,b)=(c,d)$，那么

$$\{\{a\},\{a,b\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$$

1. 若$a=b$，则有
$$\{\{a\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$$
那么$c=d$否则上式右侧有两个元素。

2. 若$a\neq b$，则必有$c\neq d$，否则左侧有两个元素而右侧有一个元素。而且必有
$$\{a\}=\{c\}\qquad \text{且} \qquad \{a,b\}=\{c,d\}$$
进而$a=c$且$b=d$。

□

解.

-
- 法一：待定表达式法[1]:
设$a_n\sim\alpha\beta^n$,则$\alpha\beta^{n+1}=\alpha\beta^n+\frac{1}{\alpha\beta^n}$,整理得$\beta^{2n}=\frac{1}{\alpha^2(\beta-1)}$,不可能.

[1]一般情况下，$g(n)$只考虑三种形式：$\alpha\beta^n,\alpha n^\beta,\alpha ln^\beta n$

设$a_n \sim \alpha \ln^{\beta} \beta$,则有$\alpha \ln^{\beta}(n+1) = \alpha \ln^{\beta} n + \frac{1}{\alpha \ln^{\beta} n}$,整理得$\ln^{\beta} n\left[\ln^{\beta}(n+1) - \ln^{\beta} n\right] = \frac{1}{\alpha^2}$,利用$n \to \infty$, $\frac{1}{\alpha^2} = \ln^{\beta} n \ln^{\beta}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\beta} \to 0$,不可能.

设$a_n \sim \alpha n^{\beta}$,则有$\alpha(n+1)^{\beta} = an^{\beta} + \frac{1}{an^{\beta}}$,利用等价无穷小展开,$\beta n^{2\beta-1} = \frac{1}{\alpha^2}$,所以$\beta = \frac{1}{2}, \alpha = \sqrt{2}$.因此$a_n \sim \sqrt{2n}$当$n \to \infty$时,$a_{n+1} - a_n = \Delta a_n \sim \frac{da_n}{dn}$,而$\Delta a_n = \frac{1}{a_n}$,解这个微分方程就能得到$a_n \sim \sqrt{2n}$.当然解的形式需要是脚注中的那三种之一,否则解可能不符合题意.

•