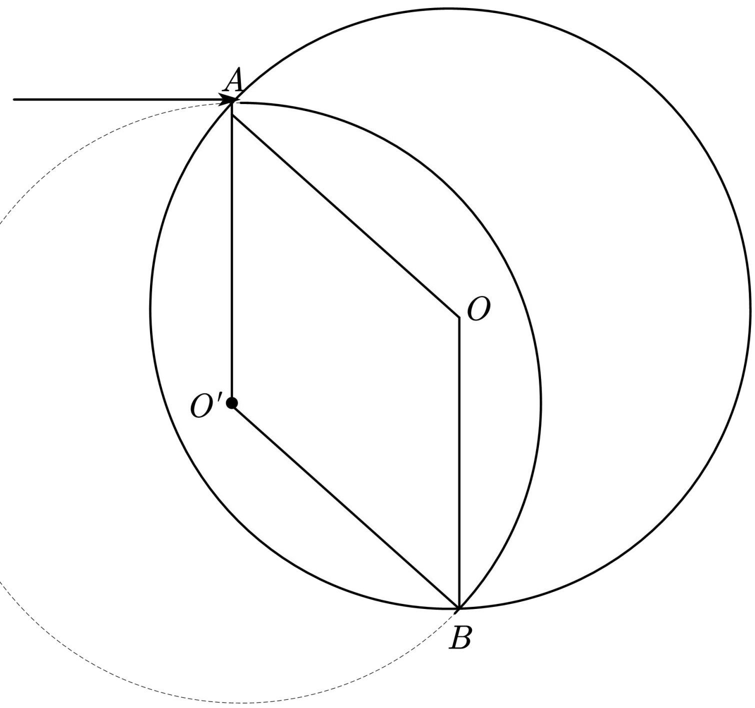
海南中学2024年迎春杯

物理

参考答案与评分细则(建议)

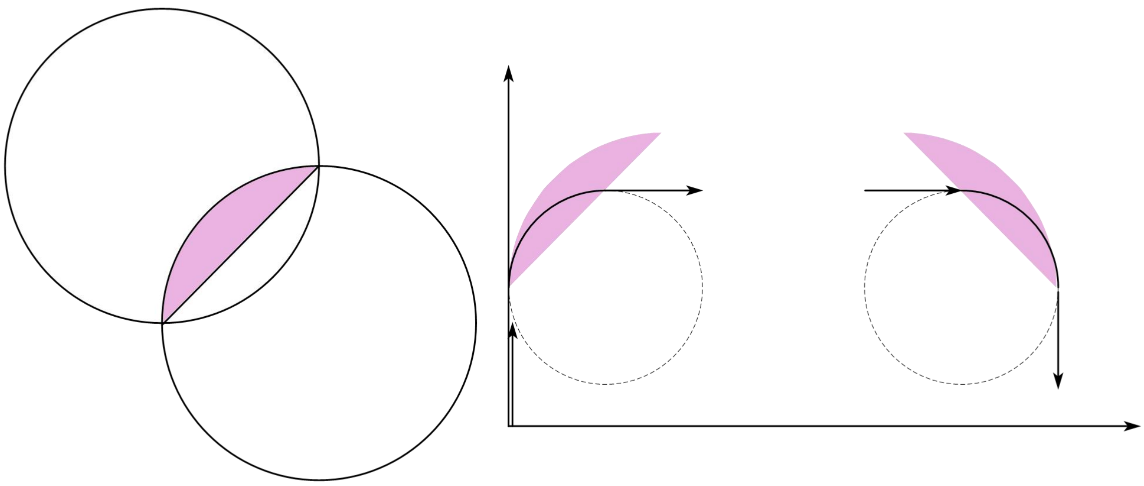
第一题

(1)



如图, $AOBO'$ 是菱形, 因为 AO' 是竖直的，所以 OB 也是竖直的，证毕.

(2)

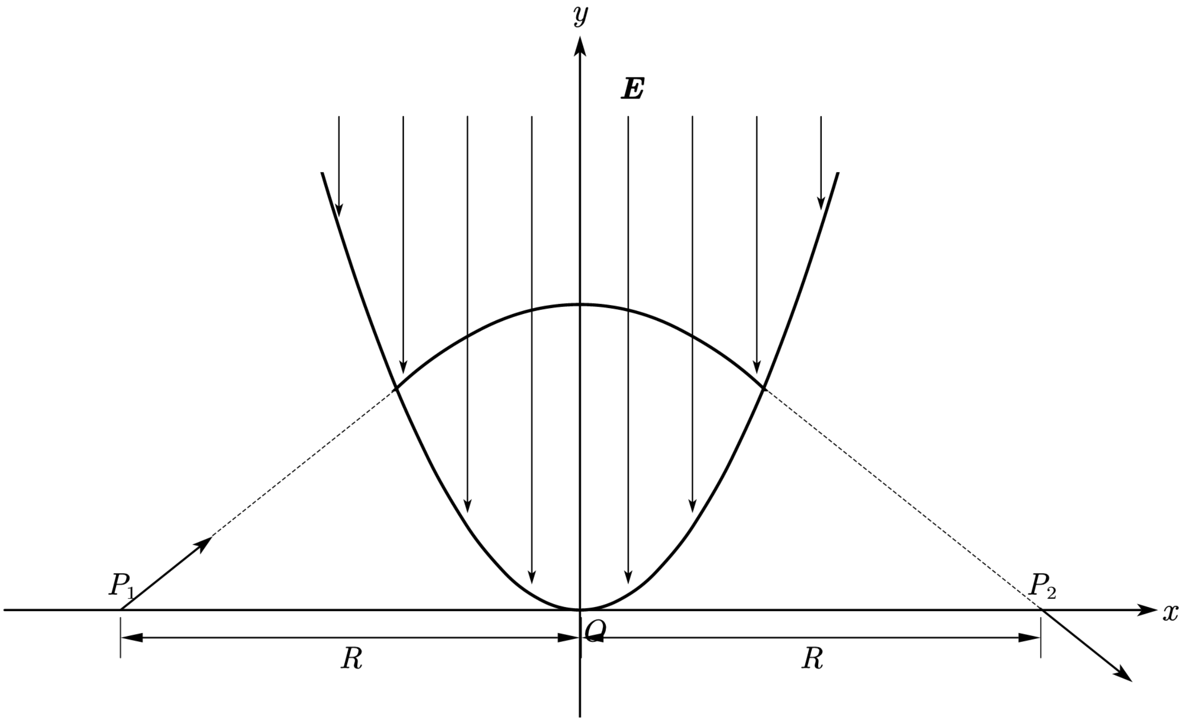


运用上一题的结论, 设计磁场的边界半径为

$$R_B = \frac{mv_0}{qB} \tag{1}$$

为了让不同运动半径的粒子都能水平出射, 以一条倾斜 $\dfrac{\pi}{4}$ 的斜线作为磁场的另一个边界，因为 OA 足够远, 所以两片磁场不会相交, 因为粒子带正电, 所以磁场方向应该是垂直纸面向外.

(3)



设计如图匀强电场, 在右侧边界上任取一点 (x, y), 考究粒子在场内的运动, 由运动学

$$x = v_0 \cos\phi \Delta t \tag{2}$$

$$v_0 \sin\phi = a \Delta t \tag{3}$$

牛顿第二定律给出加速度的大小

$$ma = qE \tag{4}$$

根据几何关系又有

$$\sin\phi = \frac{y}{\sqrt{y^2+(R-x)^2}} \qquad \cos\phi = \frac{R-x}{\sqrt{y^2+(R-x)^2}} \tag{5}$$

得到：

$$v_0^2 y\,(R-x) = \frac{qE}{m}\left[y^2+(R-x)^2\right] \qquad x \geqslant 0 \tag{6}$$

由对称性, 左边界为

$$v_0^2 y\,(R+x) = \frac{qE}{m}\left[y^2+(R+x)^2\right] \qquad x \leqslant 0 \tag{7}$$

合起来就是

$$v_0^2 y\,(R\pm x) = \frac{qE}{m}\left[y^2+(R\pm x)^2\right]$$

*(4)

注意, 本大题的解法**不唯一**. 其他解法只要能准确描述场的边界的并且证明结论即可.

第二题

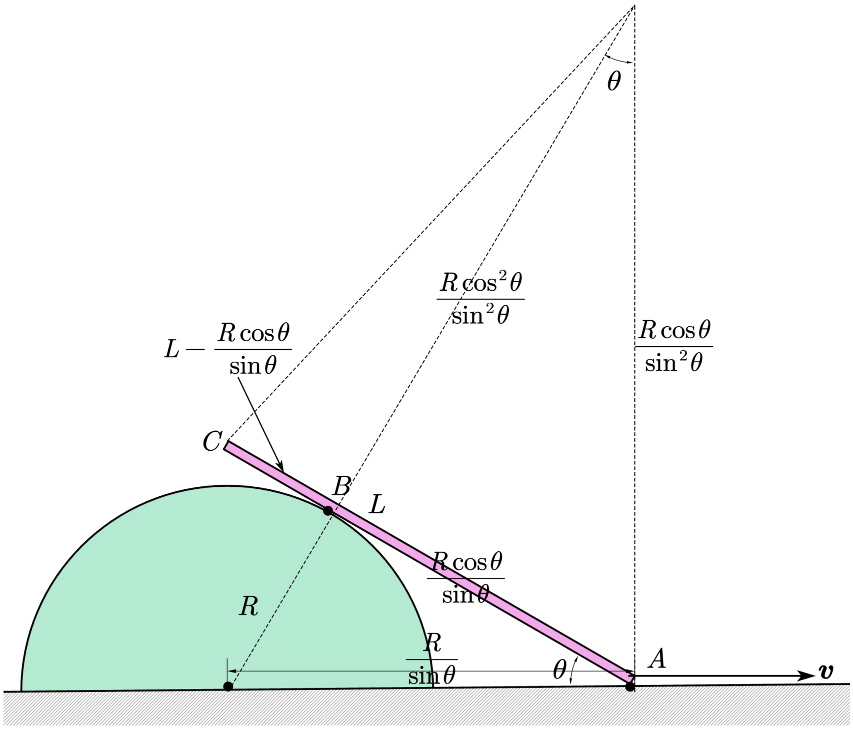
(1)

(i)

考究无穷大平板, 在其上任取一点为参考点, 则平板上任意一点的速度可视作绕参考点的转动和平动的矢量和. 若参考点速度为零, 则它就是瞬心, 若否, 则由于平板无限大, 所以任意的平动速度矢量 $\boldsymbol{v}$, 都可以在平板上距参考点 $r = v/\omega$ (ω是绕参考点转动的角速度) 的圆周上找到一点, 该点速率为 v, 速度方向与 $\boldsymbol{v}$ 相反(通过找到相对参考点的角度), 转动的速度和平动的速度的矢量和就是 $\mathbf{0}$, 这个点就是顺心.

对于给定的刚体, 视作从无穷大平板上截取的, 它的速度顺心就是这个.

(ii)



如图所示, 过 A 点和 B 点作各自速度的垂线, 两线交点即速度顺心, 根据几何关系容易求出 C 点到顺心的距离 r 为：

$$r_C=\sqrt{(L-R\cot\theta)^2+R^2\cot^4\theta} \tag{8}$$

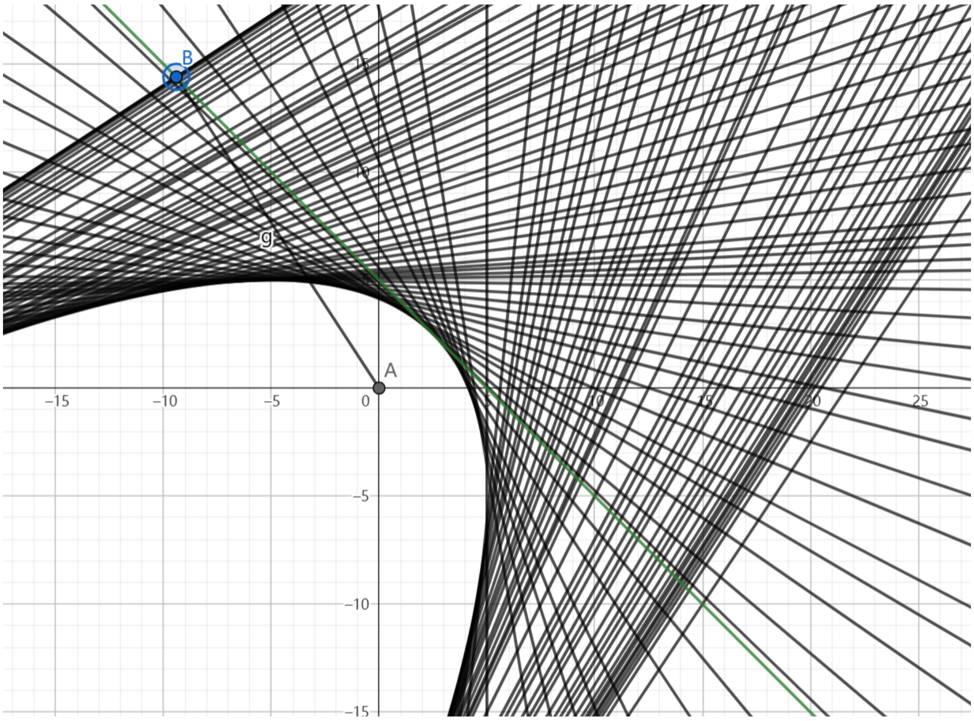
根据顺心的性质:

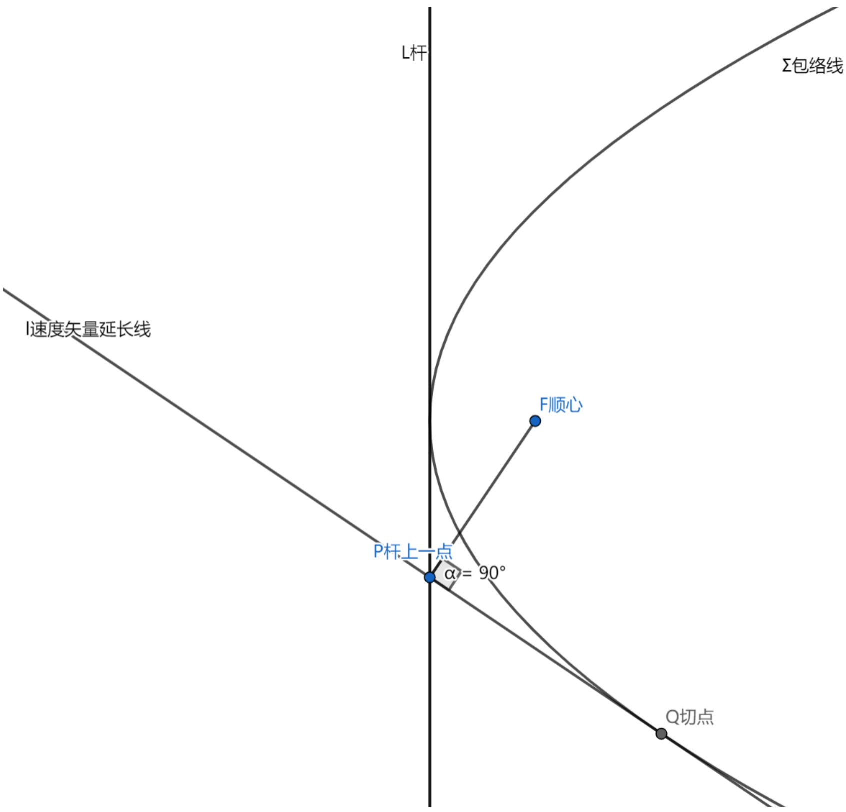
$$\omega=\frac{v}{r_A}=\frac{v\sin^2\theta}{R\cos\theta} \tag{9}$$

所以最终:

$$v_C=\omega r_C=\frac{v}{r_A}=\frac{v\sin^2\theta}{R\cos\theta}\sqrt{(L-R\cot\theta)^2+R^2\cot^4\theta}$$

(2)





形状: 抛物线

证明: 根据瞬心的性质, 速度矢量的延长线与瞬心和该点的连线垂直，考究解析几何. 显然, 杆将平面分为了两片区域, 没有瞬心的一侧显然能被速度矢量的延长线填充, 考虑瞬心所在那一侧. 如图所示 P 点是在杆上任取的一点, 顺心是 F 点，速度矢量延长线设为 l, 其垂直于 PF, 只需证明 l 与以 F 点为焦点的抛物线相切即可.

设 $\Sigma : y^2 = 2px, F(\frac{p}{2}, 0), P(0, y_0)$, 那么 $l : y = \frac{p}{2y_0}x + y_0$, 与 Σ 联立得到:

$$x^2 - \frac{4y_0^2}{p}x + \frac{4y_0^4}{p^2} = 0 \tag{10}$$

显然 $\Delta = 0$, 唯一的解为 $x = \frac{2y_0}{p}$. 也就是说, 任意速度矢量的延长线与以速度顺心为焦点的抛物线只有一个交点, 所以速度矢量的延长线的包络就是这个抛物线.

采用包络线方程组的方法直接解出包络线方程也是可以的.

定理: 关于参数 θ 的曲线簇 $F(x, y, \theta) = 0$ 的包络满足方程组：

$$\begin{cases} F(x, y, \theta) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial \theta}$ 表示对 F 求 θ 的偏导数, 也就是将 θ 视为主变量其他变量视为参数求一次导数. 代入 $F = l, \theta = y_0$ 并消除 y_0, 得到的方程就是包络抛物线的方程.

第三题

(1)

设虚位移为 δx

$$T\delta x = \delta x \lambda g R \tag{12}$$

解得

$$T = \lambda g R$$

(2)

受力分析和虚功原理得到

$$(T_2 - T_1)\delta x = \lambda \delta x g h \tag{13}$$

$$T_1 \sin\alpha = T_2 \sin\beta \tag{14}$$

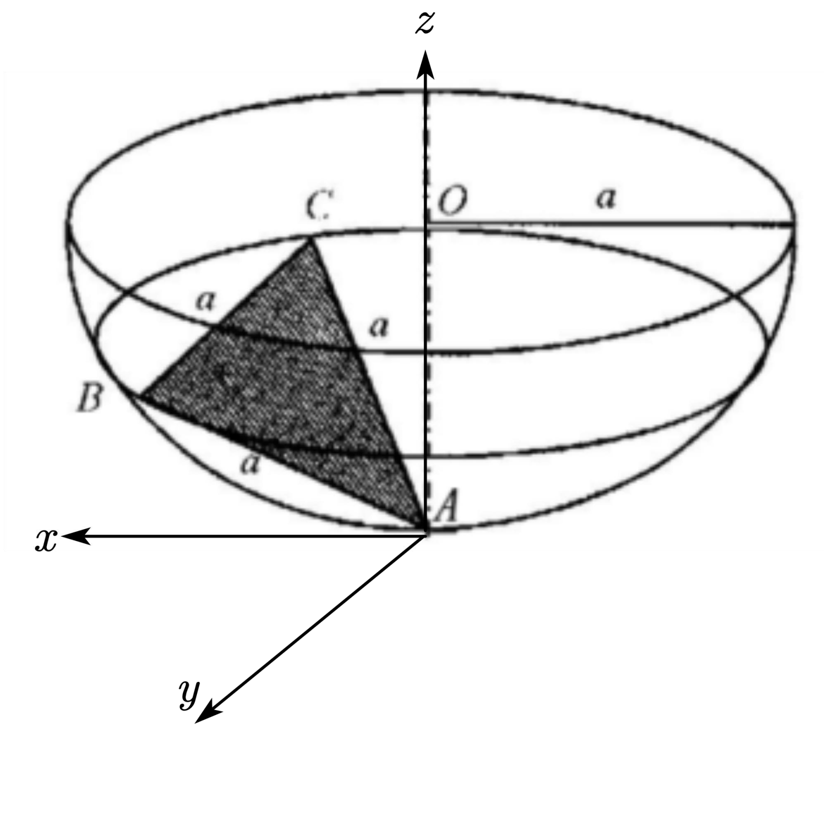
$$T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\beta = \lambda L g \tag{15}$$

解得

$$\beta = \arcsin \frac{L\sin\alpha}{\sqrt{(L + h\cos\alpha)^2 + (h\sin\alpha)^2}} - \arctan \frac{h\sin\alpha}{L + h\cos\alpha}$$

(3)

以 A 为原点, AO 为 z 轴, 垂直 BC 的方向为 x 轴, 建立右手坐标系



容易得到 $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$, $C\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$, $\overrightarrow{BO} = (-\sqrt{2}, -1, 1)$, $\overrightarrow{CO} = (-\sqrt{2}, 1, 1)$.

显然 $N_B = N_C$, 各自的方向都是指向圆心 O, 那么

$$\boldsymbol{N}_B = N_B \frac{\overrightarrow{BO}}{|\overrightarrow{BO}|} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{N}_C = N_C \frac{\overrightarrow{CO}}{|\overrightarrow{CO}|} \tag{17}$$

注意到 $\boldsymbol{e} = \left(1, 0, -\sqrt{2}\right)$ 是平面 ABC 的一个法向量, 设 B 点绕 AC 有一个极小的转动, 则虚位移为

$$\delta \boldsymbol{x} = \delta x \frac{\boldsymbol{e}}{|\boldsymbol{e}|} \tag{18}$$

设 G 是板的重心, 根据三角形的重心公式得

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right) \tag{19}$$

则 G 的虚位移为

$$\delta \boldsymbol{x}_G = \frac{1}{3} \delta \boldsymbol{x} \tag{20}$$

根据虚功原理

$$\boldsymbol{N}_B \cdot \delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{G} \cdot \delta \boldsymbol{x}_G = 0 \tag{21}$$

其中 $\boldsymbol{G} = (0, 0, -mg)$ 是三角形板受到的重力. 解得

$$N_B = \frac{1}{3} mg$$

据此

$$\boldsymbol{N}_B = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \frac{1}{3} mg$$

$$\boldsymbol{N}_C = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \frac{1}{3} mg$$

根据受力矢量和为零可以解出 A 点受力

$$\boldsymbol{N}_A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} mg$$

第四题

(1)

(i)

考虑体积为 V, 底面积为 S 的正方形刚性容器内装有物质的量为 n 的理想气体在较短的一段时间 Δt 内的运动, 对容器沿 x 方向一面受力分析：

$$p=\frac{F}{S}=\frac{1}{S}\frac{\Delta P}{\Delta t} \tag{22}$$

其中 ΔP 为力 F 在时间 Δt 内引起的粒子群的动量变化

$$\Delta P=\frac{1}{2}v_x\Delta tS\frac{nN_\mathrm{A}}{V}2mv_x=\frac{nN_\mathrm{A}}{V}mv_x^2S\Delta t \tag{23}$$

其中, 系数 $\frac{1}{2}$ 表示 x 方向上仅有一半数目的粒子速度为正, $\frac{1}{2}v_x\Delta tS\frac{nN_\mathrm{A}}{V}$ 表示时间 Δt 内会和容器面相撞的粒子数. 同时认为

$$\frac{1}{2}mv_x^2=\frac{1}{3}\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}k_\mathrm{B}T \tag{24}$$

整理得到

$$pV=nN_\mathrm{A}k_\mathrm{B}T$$

此即理想气体状态方程, 不难得到 $R=N_\mathrm{A}k_\mathrm{B}$.

(ii)

取一个微小过程, 考虑容器被压缩了极小的体积 ΔV, 方程满足

$$\Delta\left(pV^\gamma\right)=0 \tag{25}$$

根据导数的运算规则

$$\Delta pV^\gamma+\gamma pV^{\gamma-1}\Delta V=0 \tag{26}$$

进一步

$$\Delta pV+\gamma p\Delta V=0 \tag{27}$$

理想气体地内能仅与温度相关

$$U = N\frac{1}{2}mv^2 = nN_{\mathrm{A}}\frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T \tag{28}$$

根据热力学第一定律

$$\Delta U = Q + W \tag{29}$$

其中, $Q = 0, W = -p\Delta V$, 此处为不失一般性设 $\Delta V < 0$, 因此

$$nN_{\mathrm{A}}\frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}\Delta T = -p\Delta V \tag{30}$$

与此同时考虑理想气体状态方程

$$\Delta\left(pV\right) = \Delta pV + p\Delta V = nN_{\mathrm{A}}k_{\mathrm{B}}\Delta T \tag{31}$$

联立得

$$\Delta pV + \frac{5}{3}p\Delta V = 0 \tag{32}$$

与(27)对比得到 $\gamma = \dfrac{5}{3}$.

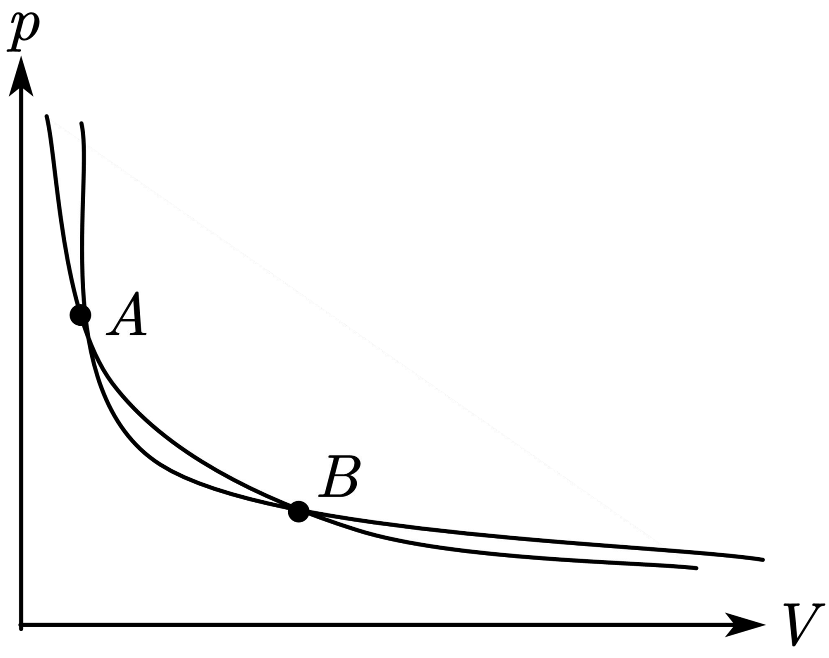
(2)

方法一：直接联立绝热曲线和等温曲线

$$pV^{\frac{5}{3}} = pV \tag{33}$$

这个方程有且仅有一个解.

方法二：构造一个热力学循环导出矛盾



假设两曲线有两个或以上的交点, 取相邻的两个交点命名为 A、B, 设气体从 A 绝热膨胀到 B, 则气体对外做功降温, 内能减少, 在让气体等温压缩回到 A, 过程中气体内能不变, 所以

$$U_A > U_B = U_A \tag{34}$$

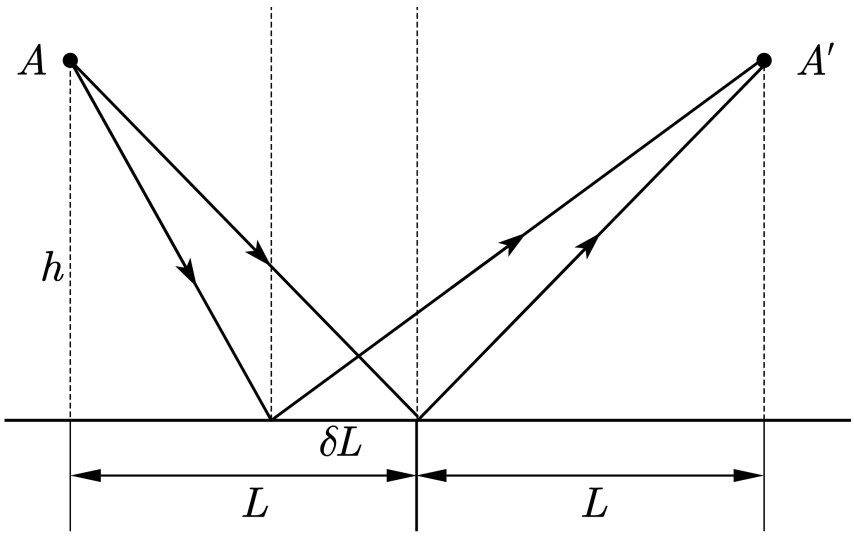
导出了矛盾.

1　第五题

(1)

(i)

如图所示, A 点和 A' 点是中心对称的, 假设发生反射的点偏移了 δL 的距离, 则新的光路的光程为



$$S(\delta L)=\sqrt{h^2+(L-\delta L)^2}+\sqrt{h^2+(L+\delta L)^2} \tag{35}$$

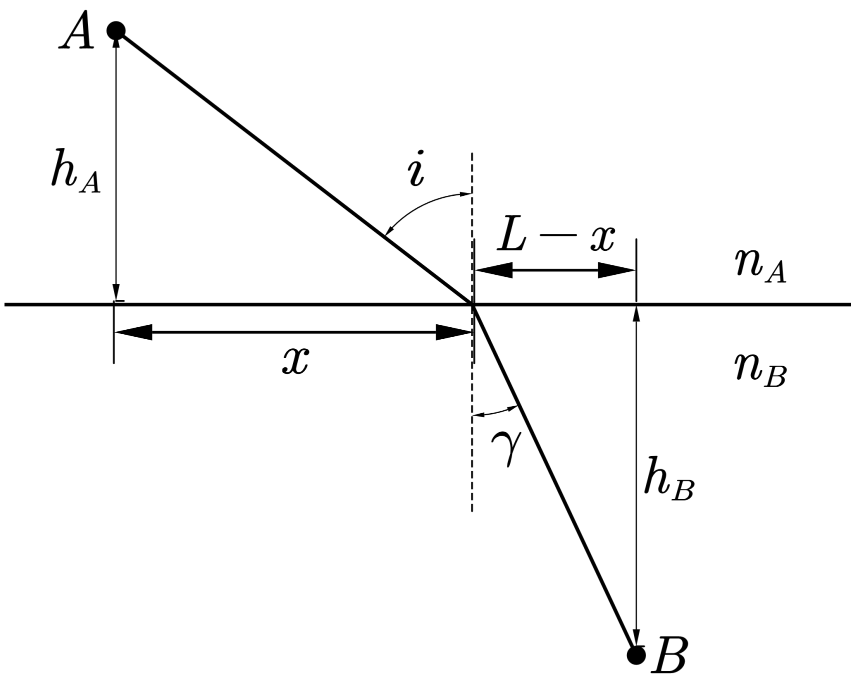
根据凹函数的性质:

$$S(\delta L)=\sqrt{h^2+(L-\delta L)^2}+\sqrt{h^2+(L+\delta L)^2}$$

$$\geqslant 2\sqrt{h^2+\left(\frac{(L-\delta L)+(L+\delta L)}{2}\right)^2}$$

$$=2\sqrt{h^2+L^2}=S(0)$$

也就是说任何不在对称轴处发生的反射都会使得光程变大, 违背了费马原理, 所以反射一定会发生在对称轴上.



折射定律也可以用同样的方法证明:

$$S(x)=n_A\sqrt{h_A^2+x^2}+n_B\sqrt{h_B^2+(L-x)^2} \tag{36}$$

对 x 求一次导数:

$$S'(x)=\frac{n_A x}{\sqrt{h_A^2+x^2}}-\frac{n_B\left(L-x\right)}{\sqrt{h_B^2+\left(L-x\right)^2}} \tag{37}$$

令 $S'(x)=0$ 并代入 $\sin i=\dfrac{x}{\sqrt{h_A^2+x^2}}, \sin\gamma=\dfrac{(L-x)}{\sqrt{h_B^2+\left(L-x\right)^2}}$, 解得:

$$n_A\sin i=n_B\sin\gamma$$

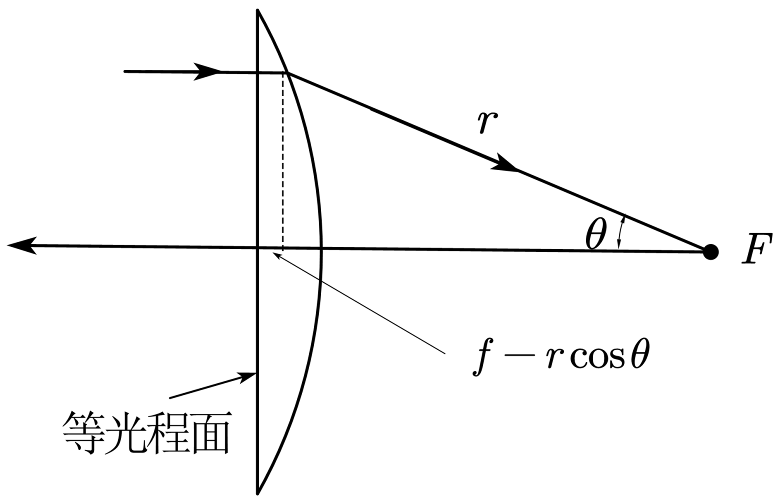
(ii)

根据折射定律, 入水点满足

$$\frac{x}{\sqrt{h_A^2+x^2}}=\frac{n\left(L-x\right)}{\sqrt{h_B^2+\left(L-x\right)^2}} \tag{38}$$

其中 x 是入水点沿水陆交界线离救生员的距离.

(iii)



如图, 可以认为光从左侧无穷远处一点选择光路并汇聚到焦点F, 根据费马原理, 每一条光路都是等光程的, 左侧从无穷远到透镜左平面平行光走过的光程相等, 所以光从左侧平面到焦点的光程也是相等的.

以透镜焦点为极点, 朝左侧水平线为极轴建立极坐标系, 任取右侧平面上一点考究经过该点的光路, 该光路的光程等于中间水平光路的光程:

$$r + n\left(f - r\cos\theta\right) = nD + f - D \tag{39}$$

解得:

$$r = \frac{(n-1)\left(D - f\right)}{1 - n\cos\theta}$$

这是圆锥曲线的极坐标方程, 因为 $n > 1$, 所以右侧曲线是一个以 n 为离心率的双曲线的一支.

(2)

根据题意:

$$n(h) - 1 = \mu\frac{\rho}{m_0}\mathrm{e}^{-\frac{m_0 gh}{k_B T}} \tag{40}$$

据此可以求出环绕星球一圈的光路的光程:

$$S(h)=2\pi\left(R+h\right)n(h)=2\pi\left(R+h\right)\left(1+\frac{\mu\rho}{m_0}\mathrm{e}^{-\frac{m_0gh}{k_BT}}\right) \tag{41}$$

对 $S(h)$ 求一次 h 的导数:

$$S'(h)=2\pi\mathrm{e}^{-\frac{m_0gh}{k_BT}}\left(\mathrm{e}^{\frac{m_0gh}{k_BT}}+\frac{\mu\rho}{m_0}\left(\frac{1}{m_0}-\frac{g\left(R+h\right)}{k_BT}\right)\right) \tag{42}$$

由于 $R\gg h$, 所以上式近似有:

$$S'(h)\approx 2\pi\mathrm{e}^{-\frac{m_0gh}{k_BT}}\left(\mathrm{e}^{\frac{m_0gh}{k_BT}}+\frac{\mu\rho}{m_0}\left(\frac{1}{m_0}-\frac{gR}{k_BT}\right)\right) \tag{43}$$

解得:

$$h=\frac{k_BT}{m_0g}\ln\frac{\mu\rho}{m_0}\left(\frac{gR}{k_BT}-\frac{1}{m_0}\right) \tag{44}$$

2 第六题

(1)

(i)

设两点电荷相距为 r

$$q_1U_1'+q_2U_2'=k\frac{q_1q_2'}{r}+k\frac{q_2q_1'}{r} \tag{45}$$

$$q_1'U_1+q_2'U_1=k\frac{q_1'q_2}{r}+k\frac{q_2'q_1}{r} \tag{46}$$

注意到两方程的等号右边完全相同, 所以原命题得证.

(ii)

假设当 $n=m\geqslant 2$ 时命题成立, 即

$$\sum_{i=1}^{m}q_iU_i'=\sum_{i=1}^{m}q_i'U_i \tag{47}$$

则当 $n = m + 1$ 时有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m+1} q_i U_i' &= q_1(U_1' + k\frac{q_{m+1}'}{r_{1,m+1}}) + \cdots + q_m(U_m' + k\frac{q_{m+1}'}{r_{m,m+1}}) \\ &\quad + q_{m+1}\left(k\frac{q_1'}{r_{1,m+1}} + \cdots + k\frac{q_m'}{r_{m,m+1}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} q_i U_i' + \sum_{i=1}^{m} k\frac{q_i q_{m+1}' + q_i' q_{m+1}}{r_{i,m+1}} \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m+1} q_i{}' U_i &= q_1'(U_1 + k\frac{q_{m+1}}{r_{1,m+1}}) + \cdots + q_m'(U_m + k\frac{q_{m+1}}{r_{m,m+1}}) \\ &\quad + q_{m+1}'\left(k\frac{q_1}{r_{1,m+1}} + \cdots + k\frac{q_m}{r_{m,m+1}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} q_i' U_i + \sum_{i=1}^{m} k\frac{q_i q_{m+1}' + q_i' q_{m+1}}{r_{i,m+1}} \end{aligned} \tag{49}$$

所以当 $n = m + 1$ 时命题依旧成立, 根据归纳原理, 对于任意大于 2 的正整数 n, 此命题都成立.

(iii)

根据已经证明的定理

$$\sum_{i=1}^{n} q_i U_i' = \sum_{i=1}^{n} q_i' U_i \tag{50}$$

由于电容器是导体, 所以给定电荷后电容器是个等势体, 因此

$$U_i = U \qquad U_i' = U' \tag{51}$$

是恒成立的，因此

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{U} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i'}{U'}$$

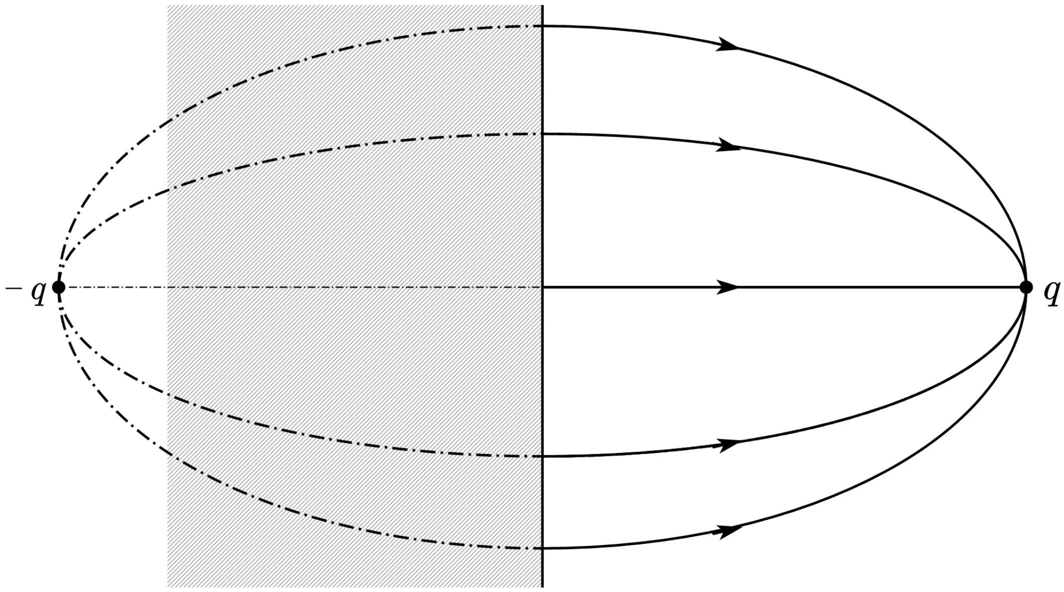
因此

$$C = C'$$

说明电容器的值与给定的电荷是无关的.

(2)

(i)



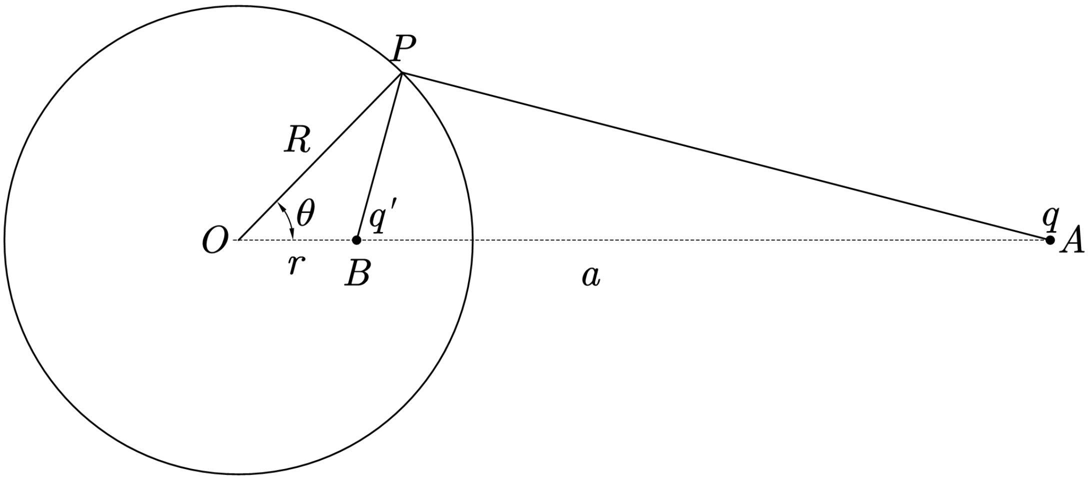
如图设像电荷带电量为 $-q$, 离板的距离为 d, 那么像电荷与点电荷在板上产生的电场处处垂直于板, 使得板成为等势体, 这和感应电荷与点电荷产生的电场使得板成为等势体效果一致, 根据题干提供的定理, 用像电荷产生的电场等效感应电荷产生的电场.

考察点电荷的受力, 由库仑定律

$$F = k\frac{q^2}{4d^2}$$

方向垂直指向板面.

(ii)



如图, 在导体球上任找一点 P, 在 AO 上找一点 B 使得 $\triangle BPO \sim \triangle APO$, 并设 $\overline{OB} = r$, 这样就有

$$\frac{r}{R} = \frac{R}{a} \tag{52}$$

解得

$$r = \frac{R^2}{a}$$

在 B 点放置一像电荷 q', 由于 P 点是任找的, 只要像电荷的大小能使得 P 点电势为 0 即可. 设 $\angle AOP = \theta$, 根据余弦定理

$$\begin{aligned} U_P &= k\frac{q'}{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr\cos\theta}} + k\frac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2Ra\cos\theta}} \\ &= k\frac{q'}{\sqrt{R^2 + R^4/a^2 + 2R^3/a\cos\theta}} + k\frac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2\cos\theta}} \\ &= k\frac{q'a/R}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2Ra\cos\theta}} + k\frac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2Ra\cos\theta}} \end{aligned} \tag{53}$$

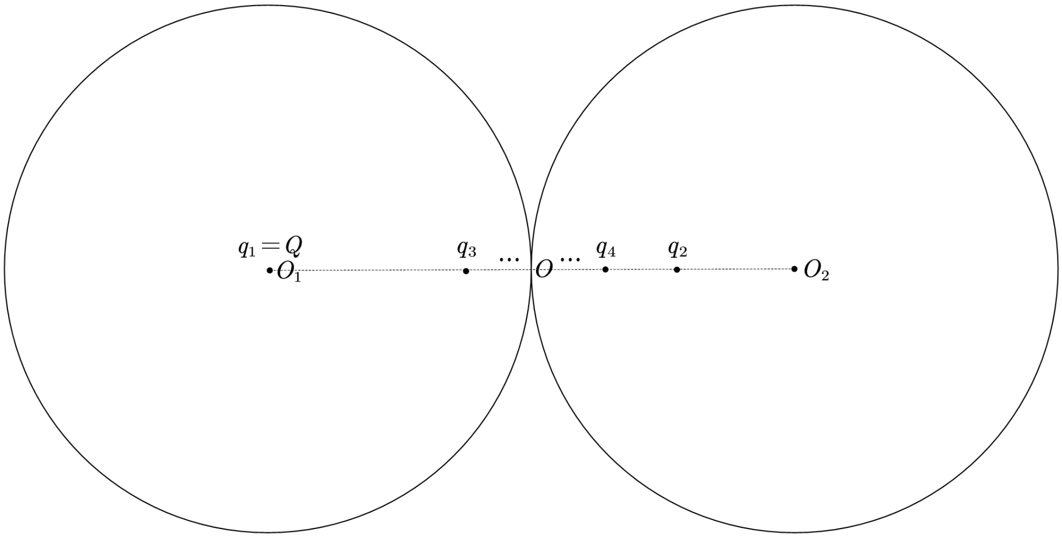
所以 $q' = -\dfrac{R}{a}q$, 用像电荷的电场代替感应电荷的电场, 考虑点电荷的受力, 由库仑定律

$$F = k\frac{aRq^2}{(a^2 - R^2)}$$

方向指向球心.

(3)

考虑给定连接体电势 U_0, 再据此求出连接体的带电量, 为求出总的带电量, 考虑用像电荷代替净电荷, 其中像电荷的分布满足连接体是等势的.



如图所示, 设两球球心为 O_1, O_2, 设相切处为 O, 先考虑球 O_1, 当考虑球 O_2 时只需要对称地进行如下构造, 此构造使得球 O_1 的电势为 U_0, 球 O_2 的电势为 0:

为使得球 O_1 的表面电势为 U_0, 设像电荷 $q_1 = Q$ 在 O_1 处, 其满足方程:

$$U_0 = k\frac{Q}{R} \tag{54}$$

但 q_1 的存在使得球 O_2 上产生了不等于 0 的附加电势, 为消除 q_1 的影响设处于球 O_2 内的像电荷 q_2, 但 q_2 会在球 O_1 上产生附加电荷, 于是在球 O_1 内设像电荷 q_3 来消除 q_2 的影响……重复直至无穷.

设第 n 个像电荷距离所在球的球心距离为 r_n, 带电量为 q_n, 根据上一小题的结论

$$r_{n+1} = \frac{R^2}{2R - r_n} \tag{55}$$

$$q_{n+1} = \frac{R}{2R - r_n} q_n \tag{56}$$

其中 $r_1 = 0, q_1 = Q$, 解数列递推可得

$$r_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) R \tag{57}$$

$$q_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} Q \tag{58}$$

所以连接体总的带电量为：

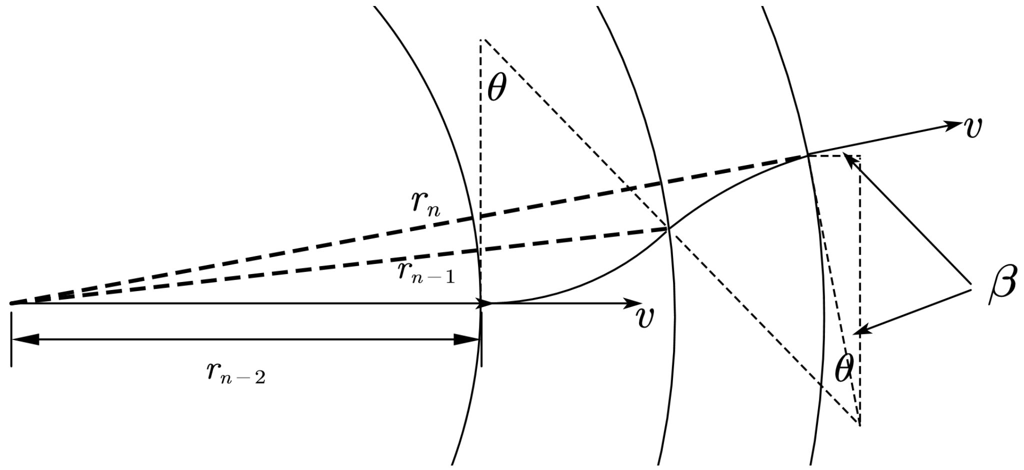
$$Q_{O_1O_2} = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\right) Q = 2\ln 2 \frac{RU_0}{k} \tag{59}$$

根据电容的定义

$$C = \frac{Q_{O_1O_2}}{U_0} = 2\ln 2 \frac{R}{k}$$

第七题

先证明一个引理: 如图所示, 若半径满足关系 $r_n^2 - r_{n-1}^2 = r_{n-1}^2 - r_{n-2}^2$ 的三个同心圆同时又满足: 最内侧同心圆内 ($0 \sim r_{n-2}$) 无磁场, 而其余区域 ($r_{n-2} \sim r_{n-1}$、$r_{n-1} \sim r_n$) 有等大反向的匀强磁场, 则当粒子从圆心延半径方向出射, 通过两次同心圆边界后, 速度方向延长线过圆心.



不妨令给定的长度 r_1 为

$$r_n^2 - r_{n-1}^2 = r_{n-1}^2 - r_{n-2}^2 = r_1 \tag{60}$$

以粒子进入磁场的位置为参考点, 根据几何关系有

$$\Delta x_1 = R\sin\theta \tag{61}$$

$$\Delta y_1 = R\left(1-\cos\theta\right) \tag{62}$$

$$\Delta x_2 = R\left(\sin\theta-\sin\beta\right) \tag{63}$$

$$\Delta y_2 = R\left(\cos\beta-\cos\theta\right) \tag{64}$$

说明一下符号的含义: 角标的阿拉伯数字表示是第几段磁场, R 是粒子在磁场中的运动半径, θ 是粒子在第一段磁场中的偏转角, β 是粒子在第二段磁场中的偏转角与 θ 的差.

根据勾股定理:

$$\left(\Delta x_1 + r_{n-2}\right)^2 + \Delta y_1^2 = r_{n-1}^2 \tag{65}$$

$$\left(x_1 + \Delta x_2 + r_{n-2}\Delta\right)^2 + \left(\Delta y_1 + \Delta y_2\right)^2 = r_n^2 \tag{66}$$

展开得到:

$$2\left(1-\cos\theta\right)R^2 + 2r_{n-2}\sin\theta R + r_1^2 = 0 \tag{67}$$

$$\left(3-2\cos\theta+\cos\beta-2\sin\theta\sin\beta-2\cos\theta\cos\beta\right)R^2 + r_{n-2}\left(2\sin\theta-\sin\beta\right)R + r_1^2 = 0 \tag{68}$$

两式相减:

$$\left(1+\cos\beta-2\sin\theta\sin\beta-2\cos\theta\cos\beta\right)R^2 - r_{n-2}\sin\beta R = 0 \tag{69}$$

舍去 $R=0$ 这个不合理的解, 就得到了

$$R = \frac{r_{n-2}\sin\beta}{1+\cos\beta-2\sin\theta\sin\beta-2\cos\theta\cos\beta} \tag{70}$$

设 α 为粒子离开第二段磁场时相对圆心的位移偏转角, 则要验证:

$$\tan\alpha = \tan\beta \tag{71}$$

进行如下操作:

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\Delta y_1 + \Delta y_2}{\Delta x_1 + \Delta x_2} - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{R\left(1 - 2\cos\theta + \cos\beta\right)}{R\left(2\sin\theta - \sin\beta\right) + r_{n-2}} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{R\left(1 + \cos\beta - 2\sin\theta\sin\beta - 2\cos\theta\cos\beta\right) - r_{n-2}\sin\beta}{\left(R\left(2\sin\theta - \sin\beta\right) + r_{n-2}\right)\cos\theta}$$

$$= \frac{\dfrac{r_{n-2}\sin\beta}{1 + \cos\beta - 2\sin\theta\sin\beta - 2\cos\theta\cos\beta}\left(1 + \cos\beta - 2\sin\theta\sin\beta - 2\cos\theta\cos\beta\right) - r_{n-2}\sin\beta}{\left(R\left(2\sin\theta - \sin\beta\right) + r_{n-2}\right)\cos\theta}$$

$$= \frac{r_{n-2}\sin\beta - r_{n-2}\sin\beta}{\left(R\left(2\sin\theta - \sin\beta\right) + r_{n-2}\right)\cos\theta} = 0 \tag{72}$$

所以 $\alpha = \beta$, 证明完毕.

(1)

(i)

$$v_{\min} = \frac{qBr}{2m}$$

(ii)

根据引理, 令 $r_{n-2} \to 0$, 即可得证. 其他方法利用几何关系推演, 或者利用高级的结论如正则角动量(要推导, 否则适当扣分)言之有理可得分.

(2)

(i)

利用引理, 当粒子穿过外面两层磁场时, 会沿半径方向垂直射入第三层磁场, 以此类推会回到(1)(ii)的情形. 其他方法言之有理可得分.

(ii)

$$v_{\min} = \frac{qBr}{2m}$$