# 相对论复习

香饽饽

(复旦大专物理学系)

**摘 要**

期末复习相对论，保佑我力学不挂科。相对论有一堆公式，而且丑的一批，还很难理解，要经常复习。

**关键词**：期末，力学

# 目录

# Lorentz 变换

我们都学过狭义相对论, Lorentz 变换可以写成矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \widehat{\mathbf{Lor}} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

其中, $\widehat{\mathbf{Lor}}$ 表示 Lorentz 变换矩阵:

$$\widehat{\mathbf{Lor}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

与此同时，

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

将矩阵写成分量的形式：

$$ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right) \qquad x' = \gamma\left(-\beta ct + x\right)$$

代入 $\gamma$ 与 $\beta$:

$$t' = \frac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

更一般地有:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

也就是 $y$ 方向和 $z$ 方向是没有尺缩效应的.

# 速度加速度变换

通过对洛伦兹变换等式两端求微分得到:

$$c\mathrm{d}t' = \gamma\left(c\mathrm{d}t - \beta\mathrm{d}x\right) \qquad \mathrm{d}x' = \gamma\left(-\beta c\mathrm{d}t + \mathrm{d}x\right)$$

两式相比:

$$\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}x\prime}{\mathrm{d}t\prime} = \frac{-\beta c\mathrm{d}t + \mathrm{d}x}{c\mathrm{d}t - \beta\mathrm{d}x} = \frac{-\beta c + u_x}{c - \beta u_x}$$

所以:

$$u_x' = \frac{-\beta c + u_x}{1 - \dfrac{\beta}{c}u_x}$$

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}}$$

考虑其他方向:

$$\mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \qquad \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z$$

$$\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y}{\gamma\left(c\mathrm{d}t - \beta\mathrm{d}x\right)} \qquad \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}z}{\gamma\left(c\mathrm{d}t - \beta\mathrm{d}x\right)}$$

所以:

$$u_y' = \frac{u_y}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}}\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$u_z' = \frac{u_z}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}}\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

由于加速度的推导过于丑陋, 所以直接给答案:

$$a_x' = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)^3}$$

$$a_y' = \frac{a_y}{\gamma^2\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)^2} + \frac{a_x\dfrac{vu_y}{c^2}}{\gamma^2\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)^3}$$

$$a_z' = \frac{a_z}{\gamma^2\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)^2} + \frac{a_x\dfrac{vu_z}{c^2}}{\gamma^2\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)^3}$$

以上结果有更“自然语言”的写法:

$$u_x^{(S')} = \frac{u_x^{(S)} + u_S^{(S')}}{1 + \dfrac{u_x^{(S)}u_S^{(S')}}{c^2}}$$

$$u_y^{(S')} = \frac{\dfrac{1}{\gamma} u_y^{(S)}}{1 + \dfrac{u_x^{(S)} u_S^{(S')}}{c^2}}$$

$$u_z^{(S')} = \frac{\dfrac{1}{\gamma} u_z^{(S)}}{1 + \dfrac{u_x^{(S)} u_S^{(S')}}{c^2}}$$

$$a_x^{(S')} = \frac{a_x^{(S)}}{\gamma^3 \left(1 + \dfrac{u_x^{(S)} u_S^{(S')}}{c^2}\right)^3}$$

$$a_y^{(S')} = \frac{a_y^{(S)}}{\gamma^2 \left(1 + \dfrac{u_x^{(S)} u_S^{(S')}}{c^2}\right)^2} - \frac{a_x^{(S)} \dfrac{u_y^{(S)} u_S^{(S')}}{c^2}}{\gamma^2 \left(1 + \dfrac{u_x^{(S)} u_S^{(S')}}{c^2}\right)^3}$$

$$a_z^{(S')} = \frac{a_z^{(S)}}{\gamma^2 \left(1 + \dfrac{u_x^{(S)} u_S^{(S')}}{c^2}\right)^2} - \frac{a_x^{(S)} \dfrac{u_z^{(S)} u_S^{(S')}}{c^2}}{\gamma^2 \left(1 + \dfrac{u_x^{(S)} u_S^{(S')}}{c^2}\right)^3}$$

# Doppler 效应

设本征频率为 $f_0$, 此即在相对波源静止的参考系中测得的频率, 考虑相对论效应的 Doppler 效应为:

$$f' = \frac{f_0}{\gamma\left(1 \pm \beta\cos\theta\right)}$$

其中的符号根据相对运动是使得新频率增大还是减小判断, 也就是说 $\theta$ 总是取锐角, 这样判断不容易错误.

推论1: 纵向运动

$$f' = \sqrt{\frac{c \pm v}{c \mp v}} f_0$$

同理, 正负号取决于是相向运动还是相背运动.

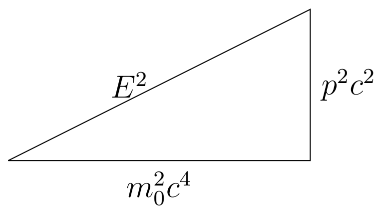
推论2: 横向运动

$$f' = \frac{f_0}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} f_0$$

# 质量能量动量

首先必须是大名鼎鼎的质能方程:

$$E = mc^2$$




能量动量三角形

# 相对论中的力

实际上相对论在推导的时候是基于保留动量守恒定律的, 也就是修改了物理量的概念而试图保存物理定律. 那么可以根据力的定义来计算:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\right)$$

展开过程是一坨大便, 略去不写:

$$F_x' = F_x - \frac{\dfrac{u_y v}{c^2}F_y}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}} - \frac{\dfrac{u_z v}{c^2}F_z}{1-\dfrac{vu_z}{c^2}} = \frac{F_x - \dfrac{v}{c^2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F}}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}}$$

$$F_y' = \frac{\dfrac{1}{\gamma}F_y}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}} = \frac{F_y\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}}$$

$$F_z' = \frac{\dfrac{1}{\gamma}F_z}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}} = \frac{F_y\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}}$$