风月宝鉴

大学数学奇招妙手优秀技巧集锦

作者：香饽饽

标题

2023年11月21日

目录

第一回

求极限誓破妖魔，察秋毫妙手回春

香饽饽同学终于开始写书了，他很开心，这是他学习使用LaTeX的大进步.

——香饽饽

§1.1 离散化连续——一类递推数列估阶通法[1]

【定义 1.1】 数列是**整标函数**，定义域是离散的.

【定理 1.2】 数列对应的整标函数可以通过如下构造延拓成可导函数：
$\forall a_n = f(n)$，用分段多项式$g(x)$进行分段拟合，保证所有自然数点可导. 让$g(x)$在$[2k-1, 2k]$上取次数大于1的多项式函数，在$(2k, 2k+1)$上取一次函数，区间$[n, n+1]$满足：

$$\begin{aligned} g(n) &= a_n \\ g(n+1) &= a_{n+1} \\ g'(n) &= a_n - a_{n-1} \\ g'(n+1) &= a_{n+2} - a_{n+1} \end{aligned}$$

【命题 1.3】 若行列式

$$\det \begin{pmatrix} (t+1)^3 & (t+1)^2 & (t+1) & 1 \\ t^3 & t^2 & t & 1 \\ 3(t+1)^2 & 2(t+1) & 1 & 0 \\ 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的值不为0，则下面式子是一个符合要求的构造：

$$\begin{aligned} &g(x) = g_{2k}(x), && 2k < x < 2k+1, k \in N^* \\ &g(x) = (a_{2k} - a_{2k-1})x + a_{2k-1}, && 2k-1 \leqslant x \leqslant 2k, k \in N^* \end{aligned}$$

证明. 将上式代回原方程组，可以验证符合题意.

【例题 1.4】 设$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$，估计$a_n$的主阶.

解. 通常有两种方法：

- 法一：待定表达式法[1]:
  设$a_n \sim \alpha\beta^n$,则$\alpha\beta^{n+1} = \alpha\beta^n + \frac{1}{\alpha\beta^n}$,整理得$\beta^{2n} = \frac{1}{\alpha^2(\beta-1)}$,不可能.
  设$a_n \sim \alpha\ln^\beta\beta$,则有$\alpha\ln^\beta(n+1) = \alpha\ln^\beta n + \frac{1}{\alpha\ln^\beta n}$,整理得$\ln^\beta n\left[\ln^\beta(n+1) - \ln^\beta n\right] = \frac{1}{\alpha^2}$,利用$n\to\infty$, $\frac{1}{\alpha^2} = \ln^\beta n\ln^\beta\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^\beta \to 0$,不可能.
  设$a_n \sim \alpha n^\beta$,则有$\alpha(n+1)^\beta = an^\beta + \frac{1}{an^\beta}$,利用等价无穷小展开,$\beta n^{2\beta-1} = \frac{1}{\alpha^2}$,所以$\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = \sqrt{2}$. 因此$a_n \sim \sqrt{2n}$

- 法二：微分方程法:

[1]一般情况下，$g(n)$只考虑三种形式：$\alpha\beta^n, \alpha n^\beta, \alpha ln^\beta n$

参考文献

[1] 天才琪露诺. 离散化连续——一类递推数列估阶通法. 知乎, 2021.