风月宝鉴

大学数学奇招妙手优秀技巧集锦

作者：香饽饽

风月宝鉴

香饽饽

前言

本卷为笔者练习使用LaTeX、记录大学本科数学学习过程中的所思所学所想而作. 笔者在此提醒读者, **本卷不是正经的数学读物**, 书中涉及的解题技巧不一定严谨, 请读者自有判断能力.

笔者只是一名末流985在读的大一新生, 无论是LaTeX写作技巧还是数学水平都极其有限, 书中难免有科学性错误, 欢迎各位读者斧正.

本卷大多数内容非笔者原创, 但都是笔者学习中认为十分精彩的部分, 在此我十分感谢知乎的各位大佬提供的各种天秀命题. 笔者在学习高等数学的时参考的书籍是谢慧民老师的《数学分析习题课讲义》, 本卷中将有很多习题或结论改编自此书.

安全声明（允许我叠个甲）, 任何人使用此书内容造成的不利情形, 笔者**概不负责**!

香饽饽
2023年——2024年

目录

第一回

繁计算慎始慎终，琐化简胆大心细

§ 1.1 三角函数与双曲函数

【定理 1.1】 (反正切两角和差)设 $0 < u, v < 1$, 则

$$\arctan u \pm \arctan v = \arctan \frac{u \pm v}{1 \mp uv} \tag{1.1}$$

证明. 证明留给读者作为习题.

【例题 1.1】 计算

$$\pi - \arcsin \frac{2}{\sqrt{17}} - \arctan 4$$

解. 由简单的三角函数知识得

$$\arcsin \frac{3}{\sqrt{17}} = \arctan \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\pi - \arcsin \frac{2}{\sqrt{17}} - \arctan 4 \\
&= \pi - \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1}{4} = \arctan \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{1}{4}} \\
&= \arctan \frac{51\sqrt{2} + 34}{68}
\end{aligned}$$

【定理 1.2】

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \arctan' x = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \operatorname{arccot}' x = -\frac{1}{1 + x^2}$$

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \qquad \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}$$

$$\operatorname{arsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad \operatorname{arcosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \operatorname{artanh}' x = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \operatorname{arcoth}' x = \frac{1}{1 - x^2}$$

证明. 证明留给读者作为习题.

【定理 1.3】 三角函数与反三角函数通过虚数单位 i 来构建联系：

$$\sin \mathrm{i}x = \mathrm{i}\sinh x$$
$$\cos \mathrm{i}x = \cosh x$$

证明. 证明留给读者作为习题.

【定理 1.4】 (等差角求和公式)

$$\sum_{N=0}^{n} \sin(\alpha + N\beta) = \frac{\sin\dfrac{n+1}{2}\beta}{\sin\dfrac{\beta}{2}} \sin(\alpha + \frac{n}{2}\beta)$$

$$\sum_{N=0}^{n} \cos(\alpha + N\beta) = \frac{\sin\dfrac{n+1}{2}\beta}{\sin\dfrac{\beta}{2}} \cos(\alpha + \frac{n}{2}\beta)$$

证明. 证明留给读者作为习题.

§ 1.2 连分式展开[1]

【定义 1.1】 称形如

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \cdots}}}}$$

的式子为连分式, 简记为

$$a_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{N=1}^{n} \frac{a_N}{b_N}$$

【命题 1.1】 任何实数可以写作连分式.

解. 命题是正确的. 注意到

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{x-1}{1+\sqrt{x}}$$

所以

$$\sqrt{x} = 1 + \cfrac{x-1}{2 + \cfrac{x-1}{2 + \cfrac{x-1}{2 + \cdots}}}$$

函数也可以写成连分式的形式, 例如：

$$
\begin{aligned}
\ln(x+1) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \\
&= \cfrac{x}{1 + \cfrac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots} - 1} \\
&= \cfrac{x}{1 + \cfrac{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} - \cdots}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots}} \\
&= \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{2 + \cfrac{2 - x + \frac{2x^2}{3} - \frac{2x^3}{4} - \cdots}{1 - \frac{2x}{3} + \frac{2x^2}{4} + \cdots} - 2}} \\
&= \cdots \\
&= \cfrac{x}{1 + \cfrac{1^2 x}{2 + \cfrac{1^2 x}{3 + \cfrac{2^2 x}{4 + \cfrac{2^2 x}{5 + \cfrac{3^2 x}{6 + \cfrac{3^2 x}{7 + \cdots}}}}}}}
\end{aligned}
$$

连分式展开的强大在于, 其有时可以推出**Pade 逼近**, 比如取截断为 2, 有

$$\ln(1+x) \sim \frac{2x}{2+x}$$

这就是让高中生爱不释手的**飘带拟合**, 也就是 $\ln(1+x)$ 的 $[1,1]$ Pade 逼近. 再比如取截断为 4 , 得到

$$\ln(1+x) \sim \frac{3\left(x^2+2x\right)}{x^2+6x+6}$$

这就是大名鼎鼎的**Heron 平均**. 下面给出一些已经被证明了的函数的连分式展开：

- Lambert, 1766年得[1]

$$\tan x = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{x} - \cdots}}}}$$

- Lambert, 1770年得

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cdots}}}}$$

- Stern, 1833年得[2]

$$\sin x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{(2\cdot 3 - x^2) + \cfrac{2\cdot 3x^2}{(4\cdot 5 - x^2) + \cfrac{4\cdot 5x^2}{(6\cdot 7 - x^2) + \cdots}}}}$$

- Gauss, 1812年得

$$\tanh x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \cfrac{x^2}{7 + \cdots}}}}$$

- Lambert, 1770年, Lagrange, 1776年, 分别得

$$\ln(1+x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1^2x}{2 + \cfrac{1^2x}{3 + \cfrac{2^2x}{4 + \cfrac{2^2x}{5 + \cfrac{3^2x}{6 + \cfrac{3^2x}{7 + \cdots}}}}}}} \qquad |x| < 1$$

[1]逼近度十分高的好公式, 而且不只拟合 $\tan x$ 的第一支

[2]误差很大而且形式丑陋

- Lagrange, 1813年得

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\cfrac{2x}{1-\cfrac{1^2x^2}{3-\cfrac{2^2x^2}{5-\cfrac{3^2x^2}{7-\cfrac{4^2x^2}{9-\cdots}}}}}\qquad |x|<1$$

- Lambert, 1770年, Lagrange, 1776年, 分别得

$$\arctan x=\cfrac{x}{1+\cfrac{1^2x^2}{3+\cfrac{2^2x^2}{5+\cfrac{3^2x^2}{7+\cfrac{4^2x^2}{9+\cdots}}}}}\qquad |x|<1$$

- Lagrange, 1776年得

$$(1+x)^n=\cfrac{1}{1-\cfrac{nx}{1+\cfrac{\frac{1\,(1+n)}{1\cdot 2}x}{1+\cfrac{\frac{1\,(1-n)}{2\cdot 3}x}{1+\cfrac{\frac{2\,(2+n)}{3\cdot 4}x}{1+\cfrac{\frac{2\,(2-n)}{4\cdot 5}x}{1+\cfrac{\frac{3\,(3+n)}{5\cdot 6}x}{1+\cdots}}}}}}}\qquad |x|<1$$

- Laplace, 1805年, Legendre, 1846年, 分别得[3]

$$\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\cfrac{\frac{1}{2}e^{-x^2}}{x+\cfrac{1}{2x+\cfrac{2}{x+\cfrac{3}{2x+\cfrac{4}{x+\cdots}}}}}\qquad x>0$$

[3]概率与统计中会用到

【定理 1.5】 常规连分式(偏分子都是 1) $a_0+\underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}}\dfrac{1}{a_n}$ $(a_n>0)$ 收敛的充要条件是:正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$$

证明. 证明留给读者作为习题.

【定理 1.6】 正规连分式(偏分母都是整数的常规连分式)是有理数的充要条件是式子最终截断有限.

证明. 证明留给读者作为习题.

§ 1.3 母函数

【定义 1.2】 对数列 $\{a_n\}$ 而言, 用其每一项作为一个幂函数的系数构成的函数

$$f\left(x\right)=\sum_{N=0}^{n}a_Nx^N=a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

成为该数列的母函数.

【定理 1.7】 **(Abel 第一定理)** 若复变级数 $\sum\limits_{N=0}^{\infty}c_n(z-a)^N$ 在某点 z_0 收敛, 则在以 a 为圆心, $|z_0-a|$ 为半径的圆内此级数都绝对收敛, 在圆 $|z_0-a|\leqslant r$ $(r<|z_0-a|)$ 中一致收敛.

证明. 证明留给读者作为习题.

【例题 1.2】 计算级数求和

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$$

解.

$$f\left(x\right)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

$$x\left(xf\left(x\right)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$$

代入 $x=\dfrac{1}{2}$, 得 $S=6$.

【例题 1.3】 计算级数求和

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(3n+1\right)}$$

解. 构造母函数

$$M\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{3n}}{3n}-\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\right)\qquad 0<x<1$$

那么有

$$M'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{3n-1}-x^{3n}\right)=\frac{x^2}{1-x^3}-\frac{x^3}{1-x^3}$$

$$M(x)=\int M'(x)\,\mathrm{d}x=x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x+x^2\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{2}\right)+C$$

考虑到 $M(0)=0$, 因此 $C=\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$. 所以

$$S=3\lim_{x\to 1^-}M(x)=9-\frac{9}{2}\ln 3-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

值得注意的是, 不构造母函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{3n+1}}{3n+1})$ 是因为两部分分子的幂的公差不同, 会导致收敛域的问题. 读者可以自行尝试.

§ 1.4 离散微积分

【定义 1.3】 (前向差分) 对于数列 $f(x_n)$ 定义算符 Δ 的作用为

$$\Delta f(x_n)=f(x_{n+1})-f(x_n)$$

当 Δ 作用的表达式有多个变量时, 仿造偏微分的记号规定

$$\Delta_n f(x_{n,m,\cdots})=f(x_{n+1,m,\cdots})-f(x_{n,m,\cdots})$$

【定义 1.4】 归纳地定义高阶差分

$$\Delta^k a_n=\Delta(\Delta^{k-1}a_n)$$

【定理 1.8】 **(Leibniz 公式)**

$$\Delta^k a_n=\sum_{N=0}^{k}C_k^N(-1)^{k-N}a_{n+N}$$

【定理 1.9】

$$\Delta\left(\alpha a_n+\beta b_n\right)=\alpha\Delta a_n+\beta\Delta b_n$$

$$\Delta\left(a_n b_n\right)=\Delta a_n b_{n+1}+a_n\Delta b_n=\Delta a_n b_n+a_{n+1}\Delta b_n$$

$$\Delta\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\Delta a_n b_n-a_n\Delta b_n}{b_{n+1}b_n}$$

值得注意的是,没有类似复合函数求导公式的差分公式.

【定义 1.5】 (不定求和)

$$\Delta_n\left(\sum_n a_n\right)=a_n$$

不至于混淆的时候下标 n 可以省略, 为了凑得和不定积分像一点, 做一个等价变形

$$\Delta\left(\sum a_n\Delta n\right)=a_n$$

【推论 1.1】

$$\sum_{f(n)}\Delta_{f(n)}a_n=a_n+C$$

注意 C 不一定是常数, 只要差分为 0 就行. 读者试着自己举一个例子.

【推论 1.2】

$$\sum a_{n+1}-\sum a_n=a_n \iff \sum a_{n+1}=\sum a_n+a_n$$

【定义 1.6】 (原数列) 若 $\Delta F(n)=f(n)$ 在所考究区间内总是成立的, 就称 $F(n)$ 为 $f(n)$ 的原数列.

第二回

求极限誓破妖魔，察秋毫奇手回春

香饽饽同学终于开始写书了，他很开心，这是他学习使用LaTeX的大进步.

——香饽饽

§ 2.1 离散化连续——一类递推数列估阶通法[2]

【定义 2.1】 数列是**整标函数**，定义域是离散的.

【定理 2.1】 数列对应的整标函数可以通过如下构造延拓成可导函数：
$\forall a_n = f(n)$，用分段多项式 $g(x)$ 进行分段拟合，保证所有自然数点可导.让 $g(x)$ 在 $[2k-1,2k]$ 上取次数大于 1 的多项式函数，在 $(2k,2k+1)$ 上取一次函数，区间 $[n,n+1]$ 满足：

$$\begin{aligned} g(n) &= a_n \\ g(n+1) &= a_{n+1} \\ g'(n) &= a_n - a_{n-1} \\ g'(n+1) &= a_{n+2} - a_{n+1} \end{aligned}$$

【命题 2.1】 若行列式

$$\det\begin{pmatrix} (t+1)^3 & (t+1)^2 & (t+1) & 1 \\ t^3 & t^2 & t & 1 \\ 3\,(t+1)^2 & 2\,(t+1) & 1 & 0 \\ 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的值不为 0，则下面式子是一个符合要求的构造：

$$\begin{aligned} &g\left(x\right) = g_{2k}\left(x\right), && 2k < x < 2k+1, k \in N^* \\ &g\left(x\right) = \left(a_{2k} - a_{2k-1}\right)x + a_{2k-1}, && 2k-1 \leqslant x \leqslant 2k, k \in N^* \end{aligned}$$

证明. 将上式代回原方程组，可以验证符合题意.

【例题 2.1】 设 a_n 满足

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$$

估计 a_n 的主阶.

解. 通常有两种方法：

- 法一 (待定表达式法)[1]: 设
$$a_n \sim \alpha\beta^n$$
则
$$\alpha\beta^{n+1} = \alpha\beta^n + \frac{1}{\alpha\beta^n}$$
整理得
$$\beta^{2n} = \frac{1}{\alpha^2\left(\beta-1\right)}$$
不可能
设
$$a_n \sim \alpha\ln^\beta \beta$$
则有
$$\alpha\ln^\beta\left(n+1\right) = \alpha\ln^\beta n + \frac{1}{\alpha\ln^\beta n}$$
整理得
$$\ln^\beta n\left[\ln^\beta\left(n+1\right) - \ln^\beta n\right] = \frac{1}{\alpha^2}$$
利用 $n \to \infty$
$$\frac{1}{\alpha^2} = \ln^\beta n\ln^\beta\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^\beta \to 0$$
不可能.
设
$$a_n \sim \alpha n^\beta$$
则有
$$\alpha\left(n+1\right)^\beta = an^\beta + \frac{1}{an^\beta}$$
利用等价无穷小展开
$$\beta n^{2\beta-1} = \frac{1}{\alpha^2}$$
所以
$$\beta = \frac{1}{2}, \alpha = \sqrt{2}$$
因此
$$a_n \sim \sqrt{2n}$$

- 法二: 微分方程法: 当 $n \to \infty$ 时
$$a_{n+1} - a_n = \Delta a_n \sim \frac{\mathrm{d}a_n}{\mathrm{d}n}$$
而
$$\Delta a_n = \frac{1}{a_n}$$
解这个微分方程就能得到
$$a_n \sim \sqrt{2n}$$

当然解的形式需要是脚注中的那三种之一, 否则解可能不符合题意.

[1] 一般情况下, $g(n)$ 只考虑三种形式: $\alpha\beta^n, \alpha n^\beta, \alpha\ln^\beta n$

微分方程法为什么可以这样使用, 正是因为离散化连续与中值定理的搭配使用, 这也解释了为什么 $g(n)$ 一般只有这三种形式.

【命题 2.2】 设 $g(x)$ 是脚注给出的三种函数, $\xi \in (x-1, x+1)$, 则

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g^{(k)}(\xi)}{g^{(k)}(x)} = c, k \geqslant 1$$

.

证明. 留给读者作为习题.

§ 2.2 证明通法[2]

【例题 2.2】 证明: 若 a_n 满足

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$$

则

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$$

证明. 设

$$a_n = f(n) = \sqrt{2n + h(n)}$$

只需证

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{h(n)}{n} = 0$$

用前文给出的通法延拓 $h(n)$ 至 $H(x)$ 由 L' Hospital 法则, 只需证

$$\lim_{x \to +\infty} H(x) = 0$$

根据递推式

$$f(n+1) = f(n) + \frac{1}{f(n)}$$

由 Lagrange 中值定理得

$$f'(\xi) = \frac{1}{f(n)} \quad \xi \in (n, n+1)$$

而

$$f'(\xi) = \frac{2 + H'(x)}{2f(\xi)}$$

所以

$$H'(x) = 2\frac{f(\xi)}{f(x)} - 2$$

只需证

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(\xi)}{f(n)} = 1$$

根据夹逼定理

$$\frac{f(n)}{f(n)} \leqslant \frac{f(\xi)}{f(n)} \leqslant \frac{f(n+1)}{f(n)}$$

就可以证明了.

§ 2.3 $\mathcal{O}$和o — Landau 记号[3]

【定义 2.2】 若

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \qquad (-\infty\leqslant x_0\leqslant+\infty)$$

记[2]

$$f(x)=o(g(x)) \qquad x\to x_0$$

若

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \qquad (-\infty\leqslant x_0\leqslant+\infty)$$

记

$$f(x)\sim g(x) \qquad x\to x_0$$

设 $g(x)>0$, 若 $\exists A\in R^+$, $s.t.$

$$|f(x)|\leqslant Ag(x) \qquad x\in(a,b) \qquad (-\infty\leqslant a,b\leqslant+\infty)$$

记[3]

$$f(x)=\mathcal{O}(g(x)) \qquad x\in(a,b) \qquad (-\infty\leqslant a,b\leqslant+\infty)$$

f,g 可以离散化为 a_n,b_n, 上述定义依旧可以使用.

【命题 2.3】 n 个 $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ 的和是 $\mathcal{O}(1)$.

解. 这个命题是错误的. 最致命的错误在于这个命题描述的构造要求数列的个数随下标 n 的改变而改变. 一个反例[4]就是

$$a_n^{(m)}=\frac{m}{n}$$

【命题 2.4】 若 $a_n=\mathcal{O}(\frac{1}{n})$, 则

$$S_n=\sum_{N=1}^{n}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\mathcal{O}(1)$$

解. 这个命题也是错误的. 一个显然的反例是 $a_n=\ln n$

【命题 2.5】 N 个 $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$ 的和是 $\mathcal{O}(1)$.

---

[2]若求取极限的时候 ε 依赖某一参数(比如 m),常用 $o_m(\cdots)$ 代替 $o(\cdots)$

[3]记 A 叫做 " $\mathcal{O}$ 常数" ,若 A 与某一参数(比如 m)有关, 常用 $\mathcal{O}_m(\cdots)$ 代替 $\mathcal{O}(\cdots)$

[4]笔者在这里存在疑问,这种构造当参数 m 取依赖自变量 n 的值时不一定是 $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$, 比如 $m=n$, 当然这就是所谓的数列个数随下标变化带来的问题, 因为构造的时候就认为 m 是独立于 n 的参数.

<u>**解.**</u> 这个命题是正确的, 而且是显然的, 证明留给读者作为习题.

【定理 2.2】 (运算法则)

- **法则1 (有界量是无穷大的低阶)** $f(x)=\infty,\varphi(x)=\mathcal{O}(1),x\to x_0,-\infty\leqslant x_0\leqslant+\infty\Longrightarrow\varphi(x)=o(f(x))$
- **法则2 ($\mathcal{O}$吸收$\mathcal{O}$)** $f(x)=\mathcal{O}(\varphi),\varphi=\mathcal{O}(\psi)\Longrightarrow f(x)=\mathcal{O}(\psi)$
- **法则3 (o吸收$\mathcal{O}$)** $f(x)=\mathcal{O}(\varphi),\varphi=o(\psi)\Longrightarrow f(x)=o(\psi)$
- **法则4 ($\mathcal{O}$乘法结合律)** $\mathcal{O}(f)+\mathcal{O}(g)=\mathcal{O}(f+g)$
- **法则5 (o乘法结合律)** $o(f)+o(g)=o(|f|+|g|)$
- **法则6 ($\mathcal{O}$加法吸收率)** $\mathcal{O}(f)+o(f)=\mathcal{O}(f)$
- **法则7 (o乘法吸收律)** $o(1)\mathcal{O}(f)=\mathcal{O}(1)o(f)=o(f)$
- **法则8 (高阶小的积等于积的高阶小)** $o(f)\cdot o(g)=o(fg)$
- **法则9 (控制的积等于积的控制)** $\mathcal{O}(f)\cdot\mathcal{O}(g)=\mathcal{O}(fg)$
- **法则10 (控制的幂等于幂的控制)** $[\mathcal{O}(f)]^k=\mathcal{O}_k(f^k)$
- **法则11 (高阶小的 Riemann 积分等于 Riemann 积分的高阶小)** 若 $f(x)$,$g(x)>0$, $f(x)=o(g(x))$, $x\to\infty$, 则

$$\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x=o\left(\int_A^B g(x)\mathrm{d}x\right)\qquad B>A\to\infty$$

特别的, 若 $\exists A_0$, $s.t.\ \int_{A_0}^{\infty}g(x)\mathrm{d}x<\infty$, 则

$$\int_A^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=o\left(\int_A^{\infty} g(x)\mathrm{d}x\right)\qquad B>A\to\infty$$

将 f,g 离散化为 a_n,b_n 结论依旧成立.

<u>**证明.**</u> 留给读者作为习题.

【推论 2.1】 **(传递性)** $\mathcal{O}(\mathcal{O}(f))=\mathcal{O}(1)\mathcal{O}(f)=\mathcal{O}(f),o(o(f))=o(1)o(f)=o(f)$

【推论 2.2】 **(有限可加乘性)**

$$\sum_{N=1}^{n}\mathcal{O}(f_N)=\mathcal{O}_n\left(\sum_{N=1}^{n}f_N\right)$$
$$\prod_{N=1}^{n}\mathcal{O}(f_N)=\mathcal{O}_n\left(\prod_{N=1}^{n}f_N\right)$$
$$\sum_{N=1}^{n}o(f_N)=o_n\left(\sum_{N=1}^{n}|f_N|\right)$$
$$\prod_{N=1}^{n}o(f_N)=o_n\left(\prod_{N=1}^{n}|f_N|\right)\qquad n<\infty$$

【命题 2.6】

$$f(x)=o(g(x))\Longrightarrow\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=o\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

解. 这个命题是错误的. o 是局部性质, 积分是正测度区间运算.

【命题 2.7】

$$f(x)=\mathcal{O}(g(x))\Longrightarrow\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\mathcal{O}\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

解. 这个命题可能是错误的. 积分区间如果满足 $\mathcal{O}$ 定义时候的不等式命题才是正确的.

【命题 2.8】

$$a_n=\mathcal{O}(b_n)\Longrightarrow\sum_{N=1}^{n}a_N=\mathcal{O}\left(\sum_{N=1}^{n}b_N\right)$$

解. 这个命题是正确的.

【例题 2.3】 判断反常积分

$$\int_1^{\infty}\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}\mathrm{d}x\qquad n>0$$

的敛散性.

解. 因为

$$\int_1^{\infty}\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}\mathrm{d}x\sim\frac{\pi}{2}x^{m-n}(1+o(1))\qquad n>0\qquad x\to\infty$$

所以当 $n-m>1$ 时收敛, $n-m\leqslant 1$ 时发散.

【定理 2.3】 **(高阶小的反常积分等于反常积分的高阶小)** 设 $g(x)>0$, $f(x)=o(g(x))$, $x\to\infty$, 且 $\displaystyle\int_a^{\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=o\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)\qquad x\to\infty$$

将 f,g 离散化为 a_n,b_n 结论依旧成立.

证明. 此处给出潘承洞老师书上的证明:

先严格表述离散化情形: 设 $b_n>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\infty$ 且 $a_n=o(b_n)$, $n\to\infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{N}a_n=o\left(\sum_{n=1}^{N}b_n\right)\qquad N\to\infty$$

再给出离散情形的证明:

用K_n表示使

$$\sum_{n=1}^{k}b_n<\sqrt{\sum_{N=1}^{n}b_N}$$

成立的最大整数 k, 则

$$K_n\to\infty\qquad n\to\infty$$

于是

$$
\begin{aligned}
|\sum_{N=1}^{n} a_N| &= \mathcal{O}(1)\sum_{N=1}^{K_n} b_N + o(1)\sum_{N=K_n}^{n} b_N \\
&= \mathcal{O}(1)\sqrt{\sum_{N=1}^{n} b_N} + o(1)\sum_{N=1}^{n} b_N \\
&= o(1)\sum_{N=1}^{n} b_N
\end{aligned}
$$

【推论 2.3】 设 b_n 是正数数列, $a_n = o(b_n)$,

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n
$$

又设当 $0 \leqslant x < 1$ 时, 级数

$$
\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n < \infty
$$

并且

$$
\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \to \infty
$$

那么就有

$$
f(x) = o(g(x))
$$

§ 2.4 级数求和的敛散性问题

【定理 2.4】 **(Kummer 判别法)** 设 $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ 是使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ 发散的正数序列. 考虑序列

$$
\mathcal{K}_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} c_n - c_{n+1}
$$

那么当 $n \to \infty$ 时有以下等价关系:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_n \geqslant \delta > 0 &\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{收敛} \\
\mathcal{K}_n \leqslant 0 &\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{发散}
\end{aligned}
$$

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}c_n - c_{n+1}\right) = 2\delta > \delta > 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n \geqslant N$, s.t.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}c_n - c_{n+1} > \delta \Longrightarrow a_{n+1} < \frac{1}{\delta}\left(a_n c_n - a_{n+1}c_{n+1}\right)$$

于是: $\sum\limits_{n=N}^{m} a_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{\delta}\sum\limits_{n=N}^{m}\left(a_n c_n - a_{n+1}c_{n+1}\right) \leqslant \dfrac{1}{\delta}a_N c_N$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和有上界, 从而收敛.

§ 2.5 反常积分的敛散性问题

【定义 2.3】 设 f 是可积函数，如下概念各自有定义：

1. 绝对收敛：若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则称 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛. 绝对收敛一定收敛.
2. 条件收敛：若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散, 则称 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛.

【定理 2.5】 (**Chauchy 收敛准则**) $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛等价于：$\forall\varepsilon > 0$, $\exists A > 0$, $\forall A_1, A_2 > A$, $s.t.$

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

证明. 证明留给读者作为习题.

【定理 2.6】 (比较判别法) 设 f, g 均是可积函数, 且

$$|f(x)| < g(x)$$

那么有

- 当 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 进一步有 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛.
- 当 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散时, $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 均发散.

证明. 证明留给读者作为习题.

【定理 2.7】 (**Cauchy 判别法**) 设 f 是可积函数, 若 $\exists p \in R, s.t.$

$$\lim_{x\to+\infty} x^p|f(x)| = l \qquad 0 \leqslant l \leqslant +\infty$$

则

- 若 $l \neq +\infty$ 且 $p > 1$, 则 $|f(x)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^p}\right) = o\left(\frac{1}{x}\right)$, 则 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 进一步地 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛.
- 若 $l \neq 0$ 且 $p \leqslant 1$, 则 $f(x)$ 是 $\frac{1}{x}$ 的高阶大, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证明. 证明留给读者作为习题.

【例题 2.4】 证明: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛但是 $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 发散.

证明.

$$
\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x &= -\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\cos x}{x} \\
&= -\lim_{A\to+\infty} \frac{\cos x}{x}\bigg|_1^A - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

注意到第一项是有限数, 而

$$
\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\mathrm{d}x < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x
$$

所以第二项绝对收敛, 故原积分收敛. 又

$$
\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x > \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin^2 x}{x}\right|\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \left|\frac{1-\cos^2 x}{x}\right|\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\mathrm{d}x
$$

第一项发散, 第二项收敛. 所以原积分发散.

【定理 2.8】 满足以下条件之一可使得 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛:

1. **(Dirichlet 判别法)** 函数 $F(A) = \int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有界, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调地趋于 0.
2. **(Abel 判别法)** 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界.

§ 2.6 极限与其他运算的换序问题

【定理 2.9】 **(函数与数列极限间的换序)** 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个领域内有定义且在 x_0 处连续, 则 $\forall x_n \to x_0$, $n\to\infty$, 恒有

$$
\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0)
$$

证明. 根据 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 有

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta_{\varepsilon}>0,\ \forall x:|x-x_0|<\delta_{\varepsilon},\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

又因为 $x_n \to x_0$, 所以

$$\exists N \in N_+,\ \forall n>N,\ |x_n-x_0|<\delta_{\varepsilon}$$

这就证明了定理.

【定理 2.10】 **(控制收敛定理)** 设 $a_n(s), n=1,2,3...$ 满足

$$|a_n(s)| \leqslant c_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$$

以及 $\lim\limits_{s} a_n(s)=b_n \in \mathbb{R}$, 则就有

$$\lim_{s} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

其中 $\lim\limits_{s}$ 表示 s 趋向于某数 s_0

$$s_0 \in \mathbb{R} \bigcup \{-\infty,+\infty\}$$

证明. 根据极限的保号性, 有 $|b_n| \leqslant c_n$, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)-\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right| &\leqslant \left|\sum_{n=1}^{m} a_n(s)-\sum_{n=1}^{m} b_n\right|+\left|\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n(s)-\sum_{n=m+1}^{\infty} b_n\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{n=1}^{m} a_n(s)-\sum_{n=1}^{m} b_n\right|+\sum_{n=m+1}^{\infty}|a_n(s)|+\sum_{n=m+1}^{\infty}|b_n| \\
&\leqslant \left|\sum_{n=1}^{m} a_n(s)-\sum_{n=1}^{m} b_n\right|+2\sum_{n=m+1}^{\infty} c_n
\end{aligned}$$

其中 m 是任取的正整数, 上式对 s 取极限, 由于第一项是有穷的求和, 所以第一项是趋于 0 的

$$\lim_{s}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)-\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right| \leqslant 2\sum_{n=m+1}^{\infty} c_n$$

根据 m 的任意性, 右侧那项可以任意小, 据此得证.

【定理 2.11】 **(Levi 定理)** 若 $a_n(s) \geqslant 0, n=1,2,3...$ 满足 $a_n(s)$ 是 s 的关于趋近方向的递增函数且

$$\lim_{s} a_n(s)=b_n \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$$

则

$$\lim_{s} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

<u>**证明.**</u> 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 就以其为控制级数, 由控制收敛定理得到

$$\lim_{s} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 不收敛且

$$\lim_{s} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = m < \infty$$

则对于 $\forall N \in \mathbb{N}$, 都有

$$\sum_{n=1}^{N} b_n = \lim_{s} \sum_{n=1}^{N} a_n(s) \leqslant \lim_{s} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = m < \infty$$

矛盾!

第 三 回

中值构造本天成, 浑然妙手偶得之

很多无用但奇妙的构造在这里诞生.
——香饽饽

§ 3.1

Rolle 中值定理

【定理 3.1】 **(无穷区间的 Rolle 定理)** 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) $(-\infty \leqslant a<b \leqslant +\infty)$ 中的任意一点有导数 $f'(x)$, 且

$$\lim_{x\to +a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x)$$

则 $\exists \xi \in (a,b), s.t. f'(\xi) = 0$.

证明. 留给读者作为习题.

【例题 3.1】 已知函数 $y=f(x)$ 在 R 上 2 阶可导, 且 $x_0 \neq 0 : f(x_0) = 0$, 证明:
(1)$\exists \eta \in R, s.t.$

$$\eta f'(\eta) + f(\eta) = 0$$

(2)若 f'' 在 R 上有界, 则 $\exists \xi \in R, s.t.$

$$\xi f''(\xi) + (2+\xi) f'(\xi) + f(\xi) = 0$$

解. (1)略
(2)注意到题目所述方程对应的原函数是

$$F(x) = (xf(x))'' + (xf(x))'$$

令

$$G(x) = e^x \cdot xf(x)$$

那么有

$$G(0) = G(x_0) = 0$$

由 Rolle 中值定理, $\exists \eta$ 介于 0 与 x_0, $s.t. G'(\eta) = 0$, 而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty} G'(x) &= \lim_{x\to -\infty} e^x (f(x) + xf'(x) + xf(x)) \\ &= \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{e^{-x}} + \lim_{x\to -\infty} \frac{xf'(x)}{e^{-x}} + \lim_{x\to -\infty} \frac{xf(x)}{e^{-x}}\end{aligned}$$

等式右侧第一项, 若 $f(x)$ 的极限为有限数, 则该项等于 0, 若极限为无穷大, 根据 L'Hospital 法则, 该项的值涉及一阶导的阶. 第二、三项同理.

经过几次 L'Hospital 法则运算, 最后总能转换为二阶导阶数的问题, 而二阶导是有界量, x 相比 e^x 远低阶, 所以原极限的值为 0.

根据无穷区间的 Rolle 中值定理, $\exists\xi < \eta,\ s.t. G''(\xi) = 0$.

第四回

取真经道高一尺，定积分乾坤未定

§4.1 三角函数积分技巧

【定理 4.1】 **(Wallis 公式)**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} & n \text{ 为偶数} \\ \\ \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{1} & n \text{ 为大于 } 1 \text{ 的奇数} \end{cases}$$

证明. 留给读者作为习题.

【例题 4.1】 设

$$a_n = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1}$$

证明 a_n 收敛, 并求其极限.

证明. 设

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \mathrm{d}x$$

那么

$$I_{2n+2} < I_{2n+1} < I_{2n}$$

而

$$I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} < I_{2n+1} < I_{2n}$$

根据夹逼定理

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$$

把Wallis公式代入

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{2}{\pi} = 1$$

得证.

【推论 4.1】
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\qquad n\to\infty$$

【定理 4.2】 (区间再现) 设 f 是连续函数,则
$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

证明. 证明留给读者作为习题.

§ 4.2 级数与定积分

【定理 4.3】 单调函数 $f\in C[0,+\infty)$, 且反常积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则
$$\lim_{h\to0^+}h\sum_{n=1}^{\infty}f(nh)=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

证明. 不妨设 f 是单调递增的, $\forall h>0$, 有
$$h\sum_{n=1}^{\infty}f(nh)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)h}^{nh}f(nh)\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)h}^{nh}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$
又有
$$h\sum_{n=1}^{\infty}f(nh)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{nh}^{(n+1)h}f(nh)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{nh}^{(n+1)h}f(x)\mathrm{d}x=\int_h^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$
令 $h\to0^+$, 有夹逼定理就可以得到.

【例题 4.2】 求极限
$$\lim_{t\to1^-}\sqrt{1-t}\sum_{n=0}^{\infty}t^{n^2}$$

解. 令 $t=e^{-h^2}$, 则
$$\begin{aligned}\lim_{t\to1^-}\sqrt{1-t}\sum_{n=0}^{\infty}t^{n^2}&=\lim_{h\to0^+}\sqrt{1-e^{-h^2}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(nh)^2}\\&=\lim_{h\to0^+}\frac{\sqrt{1-e^{-h^2}}}{h}\lim_{h\to0^+}h\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(nh)^2}\\&=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

§ 4.3 积分与其他运算换序问题

【定理 4.4】 (含参常限定积分的积分求导换序问题[4]) 设 $f(t,x),\ f'_x(t,x) \in C[a,b]\times C[c,d]$, 定义

$$F(x) = \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t$$

则 $F(x)\in C^1[c,d]$, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = \int_a^b f'_x(t,x)\,\mathrm{d}t$$

证明. 设 x_0 是 $[c,d]$ 中任一点, 我们证明 $F(x)$ 在点 x_0 处连续. 我们有

$$F(x_0+\Delta x) - F(x_0) = \int_a^b [f(t,x_0+\Delta x) - f(t,x_0)]\,\mathrm{d}t$$

任给 $\varepsilon>0$, 由假定 $f(t,x)$ 在闭矩形 $a\leqslant t\leqslant b,\ c\leqslant x\leqslant d$ 上连续, 从而一致连续. 因此, 必有 $\delta>0$ 存在, 使当 $|\Delta y|<\delta$ 时, 对一切 $x\ (a\leqslant t\leqslant b)$ 都有

$$|f(t,x_0+\Delta x) - f(t,x_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

当 $|\Delta y|<\delta$ 时, 必有

$$|F(x_0+\Delta x) - F(x_0)| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\mathrm{d}x = \varepsilon$$

由此可知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} F(x_0+\Delta x) = F(x_0)$, 即 $F(x)$ 在点 x_0 处连续.这就证明了 $F(x)$ 的连续性. [1]

$\forall x\in[c,d]$, 由 Lagrange 中值定理

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^b (f(t,x+\Delta x) - f(t,x))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f'_x(t,x+\theta\Delta x)\,\Delta x\mathrm{d}t \qquad (0<\theta<1)$$

所以有

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \int_a^b f'_x(t,x+\theta\Delta x)\,\mathrm{d}t$$

$\forall\varepsilon>0$, 根据 $f'_x(t,x)\in C[a,b]\times C[c,d]$, 由 Cantor 定理, 其在矩形区域上一致连续, 从而 $\exists\delta>0,\ \forall\Delta x: |\Delta x|<\delta,\ \forall t\in[a,b],\ s.t.$

$$|f'_x(t,x+\theta\Delta x) - f'_x(t,x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

即

$$\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} - \int_a^b f'_x(t,x)\mathrm{d}x\right| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\mathrm{d}t = \varepsilon$$

得证

[1]注: $F(x)$ 在点 x_0 连续又可写为

$$\lim_{x\to x_0}\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\lim_{x\to x_0} f(t,x)\right]\mathrm{d}x$$

即, 可以在积分号下取极限.

【定理 4.5】 (含参变限定积分的积分求导换序问题[4]) 设 $f(t,x), f'_x(t,x) \in C[a,b] \times C[c,d]$, 又设 $\alpha(x), \beta(x) \in C^1[c,d]$, 且满足

$$a \leqslant \alpha(x), \beta(x) \leqslant b \qquad (\forall x : c \leqslant x \leqslant d)$$

定义

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t$$

则 $F(x) \in C^1[c,d]$, 并且有

$$F'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f'_x(t,x)\,\mathrm{d}t + \beta'(x) f(\beta(x), x) - \alpha'(x) f(\alpha(x), x)$$

证明. 更严谨地, 本次证明先证明 $F(x)$ 的连续性:
设 $x_0 \in [c,d]$ 为所考察区间上任取的一点, 现在证的是

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$$

显然

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x_0)} f(t,x)\,\mathrm{d}t + \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} f(t,x)\,\mathrm{d}t + \int_{\beta(x_0)}^{\beta(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} f(t,x)\,\mathrm{d}t + \int_{\beta(x_0)}^{\beta(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t - \int_{\alpha(x_0)}^{\alpha(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

令 $F_i(x)(i=1,2,3)$ 分别表示上面等式右侧的三个积分, 根据上面的定理

参考文献

[1] Tesstanshiny. 连分数展开. 知乎, 2022.

[2] 天才琪露诺. 离散化连续——一类递推数列估阶通法. 知乎, 2021.

[3] 潘承洞. 阶的估计基础. 高等教育出版社, 2015.

[4] 郭大钧. 数学分析. 高等教育出版社, 2015.