第八章作业: 振动

林海轩

(复旦大学物理学系)

摘　要

振动是物理学中一个重要的概念, 广泛应用于各个领域, 从微小的原子振动到宏观的机械振动. 本篇作业将深入探讨振动的基本原理, 特征和应用.

关键词: 振动, 物理学.

目录

1 题目8-10

(1)

分别对两球受力分析可得:

$$T = m_2 g = m_1 \frac{v_0^2}{l_0} \tag{1}$$

解得:

$$l_0 = \frac{m_1 v_0^2}{m_2 g}$$

(2)

设 δl 为偏离平衡位置的线度, 并且是小量. 根据能量守恒定律可以得到:

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\delta\dot{l}^2 + m_2 g \delta l + \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\theta}\left(l_0 + \delta l\right)\right)^2 \tag{2}$$

径向的冲量不影响角动量守恒, 所以有:

$$\dot{\theta} l^2 = v_0 l_0 \tag{3}$$

联立方程, 并对联立式进行 Tailor 展开:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\delta\dot{l}^2 + m_2 g \delta l + \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \left(1 + \frac{\delta l}{l_0}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\delta\dot{l}^2 + m_2 g \delta l + \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \left(1 - 2\frac{\delta l}{l_0} + 3\frac{\delta l^2}{l_0^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\delta\dot{l}^2 + \frac{1}{2} 3 m_1 \frac{v_0^2}{l_0^2} \delta l^2 + \cdots
\end{aligned} \tag{4}$$

与标准简谐运动的能量守恒方程 $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$ 对比:

$$\mathcal{M} = m_1 + m_2 \tag{5}$$

$$\mathcal{K} = 3 m_1 \frac{v_0^2}{l_0^2} \tag{6}$$

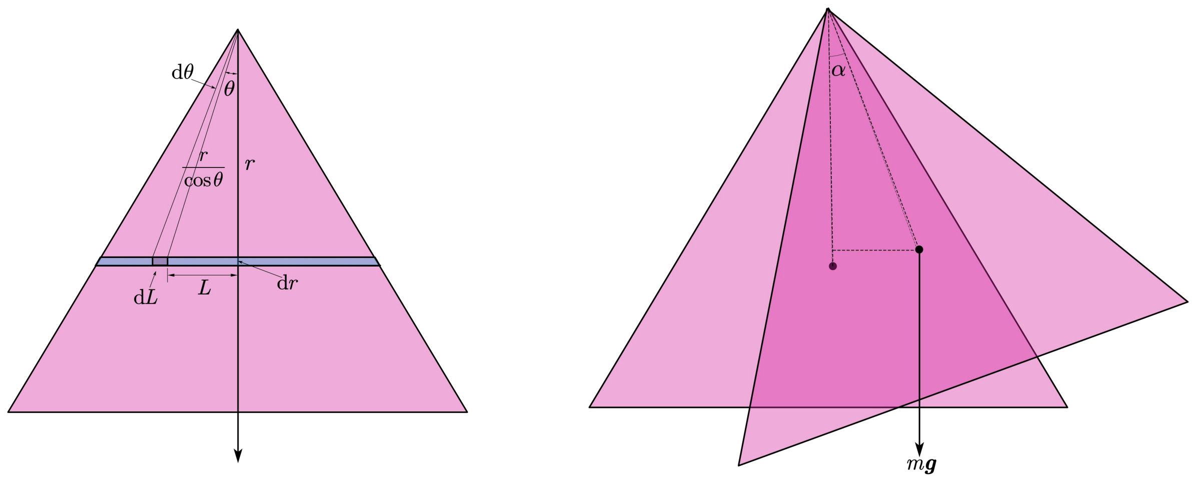
其中, $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{K}$ 是系统的等效质量和等效恢复系数. 根据振动方程的解有:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{K}}{\mathcal{M}}} = \sqrt{\frac{3m_1\frac{v_0^2}{l_0^2}}{m_1+m_2}} \tag{7}$$

代入(1)的结果即可得:

$$\omega_0 = \frac{m_2 g}{v_0}\sqrt{\frac{3}{m_1\left(m_1+m_2\right)}}$$

2　题目8-12



以轴与三角薄板的交点为参考点, 计算三角板定轴转动的转动惯量. 先取一条状微元, 与轴的垂直距离为 r, 再在条状微元上取一小段微元, 考究这一小段的转动惯量:

$$\mathrm{d}J = \mathrm{d}m\frac{r^2}{\cos^2\theta} \tag{8}$$

定义面密度:

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} \tag{9}$$

那么有:

$$\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}L}{\frac{2r}{\sqrt{3}}}\sigma\frac{2r}{\sqrt{3}}\mathrm{d}r \tag{10}$$

联立这些方程并积分:

$$J=\iint \mathrm{d}J=\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{4m}{\sqrt{3}a^2}\frac{r^3}{\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=\frac{4m}{\sqrt{3}a^2}\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}r^3\mathrm{d}r\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^4\theta}=\frac{5}{12}ma^2 \tag{11}$$

很容易写出能量守恒方程, 并根据小角度近似做 Tailor 展开:

$$E=mg\frac{a}{\sqrt{3}}(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}mg\frac{a}{\sqrt{3}}\theta^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2+\cdots \tag{12}$$

与标准简谐运动的能量守恒方程 $E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$ 对比:

$$\mathcal{M}=J \tag{13}$$

$$\mathcal{K}=mg\frac{a}{\sqrt{3}} \tag{14}$$

其中, $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{K}$ 是系统的等效质量和等效恢复系数. 根据振动方程的解有:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{K}}}=2\pi\sqrt{\frac{5a}{4\sqrt{3}g}}$$

与标准单摆的周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 对比, 系统的等效摆长为:

$$\mathcal{L}=\frac{5a}{4\sqrt{3}}$$

3 题目8-13

(1)

根据平行轴定理, 容易求出系统相对转轴的转动惯量:

$$J=\frac{1}{3}ml^2+\frac{1}{2}m_0R^2+m_0l^2 \tag{15}$$

写出系统的能量并根据小角度进行 Tailor 展开:

$$E=mg\frac{1}{2}(1-\cos\theta)+m_0gl(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\left(mg\frac{l}{2}+m_0gl\right)\theta^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2+\cdots \tag{16}$$

与标准简谐运动的能量守恒方程 $E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$ 对比:

$$\mathcal{M}=J$$

$$\mathcal{K}=mg\frac{l}{2}+m_0gl$$

其中, $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{K}$ 是系统的等效质量和等效恢复系数. 根据振动方程的解有:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{K}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\left(m+3m_0\right)l^2+3m_0R^2}{3\left(m+2m_0\right)gl}}$$

与标准单摆的周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ 对比, 系统的等效摆长为:

$$\mathcal{L} = \frac{2\left(m+3m_0\right)l^2+3m_0R^2}{3\left(m+2m_0\right)l}$$

(2)

若相连处的轴是光滑的, 那么圆盘是不会有自转的, 因此转动惯量没有由圆盘自转引起的那一项, 也就是说 $J = \dfrac{1}{3}ml^2 + m_0l^2$, 据此写出能量表达式并进行 Tailor 展开:

$$E = \frac{1}{2}\left(mg\frac{l}{2}+m_0gl\right)\theta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2+m_0l^2\right)\dot{\theta}^2 + \cdots \tag{17}$$

与标准简谐运动的能量守恒方程 $E = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}kx^2$ 对比:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{3}ml^2 + m_0l^2$$
$$\mathcal{K} = mg\frac{l}{2} + m_0gl$$

其中, $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{K}$ 是系统的等效质量和等效恢复系数. 根据振动方程的解有:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{K}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\left(m+3m_0\right)l}{3\left(m+2m_0\right)g}}$$

与标准单摆的周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ 对比, 系统的等效摆长为:

$$\mathcal{L} = \frac{2\left(m+3m_0\right)l}{3\left(m+2m_0\right)}$$

4 题目8-14

对球受力分析, 根据 Newton 第二定律:

$$ma = -mg\sin\theta = -mg\frac{x}{R-r} + \cdots \tag{18}$$

上式已依据小角度进行 Tailor 展开, 并且根据纯滚动有关系:

$$\frac{2}{5}mr^2\beta = \frac{2}{5}mr^2\frac{a}{r} = fr \tag{19}$$

上式已经用到了转动定律. 两式联立:

$$a+\frac{5}{7}\frac{g}{R-r}x=0 \tag{20}$$

与标准得弹簧振子方程 $\ddot{x}+\omega_0^2x=0$ 对比, 得到:

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{5}{7}\frac{g}{R-r}}}=2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\frac{R-r}{g}}$$

5　问题8-19

(1)

因为 $k_1<k_2$, 所以平衡时物块向右移动一段距离, 设之为 Δx, 对于物块, 它是受力平衡的:

$$k_1\left(\Delta x_0+\Delta x\right)=k_2\left(\Delta x_0-\Delta x\right) \tag{21}$$

代入数据解得:

$$\Delta x=5\ \mathrm{cm}$$

所以左端弹簧的长度为 35 cm, 右端弹簧的长度为 25 cm.

(2)

设向右为正, 离开平衡位置的距离记为 x, 受力分析得:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\left(k_1+k_2\right)x \tag{22}$$

所以

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}=\pi\ \mathrm{s}\approx 3.14\ \mathrm{s}$$

(3)

发生得是完全非弹性碰撞, 能量损失为原来的一半, 又因为弹簧振子的能量正比于振幅的平方, 所以振幅为原来的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍.

$$A'=\frac{A}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}\ \mathrm{cm}\approx 3.54\ \mathrm{cm}$$

振动的周期与能量无关:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m+\Delta m}{k_1+k_2}}=\sqrt{2}\pi\ \mathrm{s}\approx 4.44\ \mathrm{s}$$

(4)

根据上面的论述, 很容易有:

$$A' = A = 5\ \mathrm{cm}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+\Delta m}{k_1+k_2}} = \sqrt{2}\pi\ \mathrm{s} \approx 4.44\ \mathrm{s}$$

6 题目8-20

不妨考察一般形式的带阻尼项的振动方程:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{23}$$

这个方程的通解为:

$$x = A_0 \mathrm{e}^{-\delta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t + \phi_0\right) \tag{24}$$

这个解对应的是欠阻尼的情形, 如果 $\omega_0^2 - \delta^2 < 0$ 则会出现虚数的情况, 此时用 Euler 公式

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$$

改写, 再取实部的部分. 根据原题意, 可以得到:

$$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}_f = -2\mu A\boldsymbol{v} \Longrightarrow \delta = \frac{\mu A}{m} \tag{25}$$

根据周期公式:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} \tag{26}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{27}$$

解得:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + (\mu S)^2}}$$

7 题目8-25

能量的频率是位移量频率的两倍, 容易写出:

$$E = E_0 \mathrm{e}^{-2\delta t} \tag{28}$$

在 $t_0 = 1\,\mathrm{s}$ 后能量减至一半:

$$\frac{1}{2}E_0 = E_0\mathrm{e}^{-2\delta t_0} \tag{29}$$

根据品质因数 Q 的定义:

$$Q = 2\pi\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\pi}{1-\mathrm{e}^{-2\delta T}} \tag{30}$$

同时有:

$$T = \frac{2\pi}{f} \tag{31}$$

根据阻尼振动的解:

$$2\pi f = \sqrt{(2\pi f_0)^2 - \delta^2} \tag{32}$$

最终解得:

$$Q = \frac{2\pi}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{(t_0 f_0)^{-}\left(\frac{\ln 2}{4\pi}\right)^2}}}} \approx 2323$$

8 问题8-27

(1)

与标准的带阻尼受迫振动运动学方程对比:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = F \tag{33}$$

只需证明受迫项 $F = \frac{g}{l}x_2$. 以悬点为参考点, 则单摆可以等效为收阻尼和惯性力的谐振子, 其中, 把惯性力放入受迫的那一项, 即可得到:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{g}{l}x_1 = \frac{g}{l}x_2$$

一般地, 余弦式受迫振动的通解为:

$$x = A_0\mathrm{e}^{-\delta t}\cos\left(\sqrt{{\omega_0}^2-\delta^2}t+\varphi_0\right) + \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t + \arctan\frac{2\delta\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\right)$$

代入相关系数即可得到：

$$x = A_0\mathrm{e}^{-\delta t}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}-\delta^2}t+\varphi_0\right) + \frac{Ag/l}{\sqrt{\left(\omega^2-\frac{g}{l}\right)^2+4\delta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t + \arctan\frac{2\delta\omega}{\omega^2-\frac{g}{l}}\right)$$

其中, A_0 取决于初始的能量, φ_0 取决于初始的相位.

(2)

令 $t \to +\infty$, 上式右侧的第一项趋于 0, 再使得 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, 即达到共振, 则:

$$x = \frac{Ag/l}{2\delta\omega}\cos\left(\omega t + \arctan\frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \frac{g}{l}}\right)$$

当不考虑受迫的时候:

$$A = A_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \tag{34}$$

代入 $t = 50T$, 以及 $A = \frac{A_0}{\mathrm{e}}$, 考虑到:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \tag{35}$$

最终:

$$A' = \frac{\sqrt{10^4\pi^2 + 1}}{2}A \approx 15.7\ \mathrm{cm}$$

(3)

只需要:

$$4\delta\sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\left(\omega^2 - \frac{g}{l}\right)^2 + 4\delta^2\omega^2} \tag{36}$$

解得:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - 2\delta^2 \pm \sqrt{4\delta^2 + 12\frac{g}{l}\delta^2}} = 3.147\ \mathrm{rad/s}, 3.113\ \mathrm{rad/s}$$

9 题目8-34

(1)

同频时候振幅为同向线性叠加, 所以

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$A = A_1 + A_2 = 0.6\ \mathrm{m}$$

其中, $k \in \mathbb{Z}$.

(2)

根据初相位公式得到：

$$\varphi = \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} = \varphi_2 + \frac{\pi}{2} \tag{37}$$

于是解得:

$$\varphi_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

其中, $k \in \mathbb{Z}$.

10　问题8-36

拍频为:

$$\Delta \nu = \frac{N}{\Delta t} = |\nu_{\text{standard}} - \nu_{\text{not\_standard}}| \tag{38}$$

所以:

$$\nu_{\text{not\_standard}} = \nu_{\text{standard}} \pm \Delta \nu = 256 \pm 0.4 \text{ Hz}$$