Noether 定理的简要推导与运用

电磁学荣誉课讨论

林海轩

复旦大学物理学系

1. 前置数学定理
    - Eluer-Lagrange 方程
    - 最小作用量原理
    - 多个元函数的变分
    - 变分与微分可对易
2. 推导
3. 定理的运用
    - 正则动量

设 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ 是 Lagrange 量, 其中 q 是广义坐标, 运算 $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 表示对时间求一次导数, $S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\mathrm{d}t$ 是作用量, 当作用量取得极值 ($\delta S = 0$) 时, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

此定理的证明略过.

对于所有的自然现象, 其发生的方式总是趋向于使得作用量取最小值, 即

$$\delta S = 0$$

δ 是变分运算符, 表示当 Lagrange 量 (被积函数) 发生微小变化时作用量的微小变化

$$\delta S[q] = S[q + \delta q] - S[q]$$

δq 是一个很小的但是性质良好的扰动函数.

设 $\tilde{\delta}$ 是既考虑广义坐标 δq 又考虑时间 δt 的变分算符, δ 是仅考虑广义坐标 δq 的变分算符

$$\tilde{\delta} = \delta + \delta t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

可以理解为链式法则和复合微分的结合, 具体证明略去.

设 f 是性质良好的函数, 则

$$\delta(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}\,(\delta f)$$

可以理解为 d 算符是在横轴上给予一微小变化, δ 是在纵轴上给予一微小变化, 因为两者是正交的, 所以互不影响.

根据最小作用量原理 $\tilde{\delta} S=0$, 考察其形式

$$
\begin{aligned}
\tilde{\delta} S &= \tilde{\delta} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \mathrm{d} t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\delta}(\mathcal{L} \mathrm{d} t) \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\left(\tilde{\delta} \mathcal{L}\right) \mathrm{d} t+\mathcal{L} \tilde{\delta}(\mathrm{d} t) \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\left(\delta \mathcal{L}+\delta t \frac{\mathrm{d} \mathcal{L}}{\mathrm{d} t}\right) \mathrm{d} t+\mathcal{L} \mathrm{d}\left(\tilde{\delta} t\right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} \mathrm{d} t+(\delta t \mathrm{d} \mathcal{L}+\mathcal{L} \mathrm{d}(\delta t)) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} \mathrm{d} t+\mathrm{d}(\mathcal{L} \delta t) \tilde{\delta} S \\
&= [\mathcal{L} \delta t]_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} \mathrm{d} t
\end{aligned}
$$

下面考察右侧第二项

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{L}\mathrm{d}t &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\mathrm{d}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta\left(\mathrm{d}q_i\right) \right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\mathrm{d}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}\left(\delta q_i\right) \right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \mathrm{d}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right) = \left[\sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}
\end{aligned}
$$

所以 $\tilde{\delta} S=\left[\mathcal{L}\delta t+\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2}$，再凑一个恒等变形

$$
\begin{aligned}
\tilde{\delta} S &= \left[\mathcal{L}\delta t+\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\left(\tilde{\delta} q_i-\delta t \dot{q}_i\right)\right]_{t_1}^{t_2} \\
&= \left[\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\tilde{\delta} q_i-\left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-\mathcal{L}\right)\delta t\right]_{t_1}^{t_2} \\
&= \left[\sum_i p_i \Delta q_i-E\Delta t\right]_{t_1}^{t_2} \\
&= I\left(t_2\right)-I\left(t_1\right)
\end{aligned}
$$

即有 $I(t_1)=I(t_2)$

由于 t_1 和 t_2 是任意选取的, 所以

$$I(t) := \sum_i p_i \Delta q_i - E \Delta t$$

$I(t)$ 就是此系统在某对称性下的一个守恒量.

正则动量

考察洛伦兹力

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= q\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\\ &= q\left(-\nabla U-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times\boldsymbol{B}\right)\right)\\ &= q\left(-\nabla U-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\nabla\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}\right)-\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{B}\right)\\ &= -q\nabla\left(U-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}\right)-q\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-q\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

联立 Newton 第二定律 $\boldsymbol{F}=\dfrac{\mathrm{d}\left(m\boldsymbol{v}\right)}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\boldsymbol{v}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(q\boldsymbol{A}\right)=-q\left(\nabla\left(U-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}\right)+\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{B}\right)$$

当沿着粒子的轨道 A 不变的时候 (某种沿着轨道的对称性), 例如在匀强磁场中

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A} \qquad (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A} = 0$$

代回上面的方程得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A}\right) = -q\nabla\left(U - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right)$$

定义正则动量

$$\boldsymbol{p} := m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A}$$

当等式的右侧为 0 时, 比如无静电场且速度与磁场垂直, 且 $\boldsymbol{A}$ 的选取恰当的时候, 正则动量就是一个守恒量.

例如平面匀强磁场, 可以写出正则动量守恒的分量方程

$$\begin{cases} m\Delta v_x = -qB\Delta y \\ m\Delta v_y = qB\Delta y \end{cases}$$

这个结论同样可以通过 Lorentz 力冲量来推导, 这对方程也是每一个经历了高考物理的同学非常熟悉的.

参考文献

[1] 郑永令. 2023.《电磁学》. 高等教育出版社.

[2] 一点也不慌的 YZL（知乎用户名）. 2021. 理论力学笔记 2: 诺特定理、对称性与守恒量. https://zhuanlan.zhihu.com/p/103841536

[3] 赵凯华. 2022. 《电磁学》. 高等教育出版社. 磁矢势与磁场中带电粒子的动量: 186-188.

感谢聆听！