Новосибирский государственный технический университет

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО КУРСУ "НЕПРЕРЫВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ" ДЛЯ МАГИСТРАНТОВ ФПМИ, НАПРАВЛЕНИЕ 010400

Составители: д.т.н., проф. *М.Г. Персова*,
д.т.н., проф. *Ю.Г. Соловейчик*

Рецензент: к.т.н., доц. *М.Г. Токарева*

Работа подготовлена на кафедре прикладной математики

Содержание

Содержание 3
Лабораторная работа №1 4
Лабораторная работа №2 12
Лабораторная работа №3 14
Список литературы 20

Лабораторная работа №1

Построение сглаживающих сплайнов с использованием кусочно-полиномиальных эрмитовых базисных функций третьего порядка в одномерных, двумерных и трехмерных областях по произвольно зашумленным наборам данных и по конечноэлементным решениям с использованием регуляризаций

Цель: Разработать программу построения сглаживающего сплайна с использованием кусочно-полиномиальных эрмитовых базисных функций третьего порядка в одномерных, двумерных или трехмерных областях и опробовать ее при решении задач фильтрации для произвольных наборов зашумленных данных и при решении задач выдачи численного решения и его производных по набору весов конечноэлементного решения для определенного типа конечных элементов.

Теоретическая часть. Построение сглаживающего сплайна

Пусть задан некоторый набор значений $\left\{\tilde{x}_j, \tilde{f}_j\right\}$, где $\tilde{f}_j$ – значения (возможно, с некоторой погрешностью) функции $f(x)$ в точке $\tilde{x}_j$ $(j=1...k)$. Под задачей сглаживания понимают построение достаточно гладкой функции, значения которой в точках $\tilde{x}_j$ максимально близки к значениям $\tilde{f}_j$.

Задачу сглаживания чаще всего решают на основе метода наименьших квадратов. В этом случае функцию $P(x)$, аппроксимирующую f, находят из условия минимальности суммы квадратов отклонений значений $P(\tilde{x}_j)$ от $\tilde{f}_j$:

$$\sum_{j=1}^{k}\left(P\left(\tilde{x}_j\right)-\tilde{f}_j\right)^2 \to \min.$$

При этом в качестве функции $P(x)$ довольно часто используют кубический сплайн вида:

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i\psi_{2i-1}(x)+\sum_{i=1}^{n} f_i'\psi_{2i}(x), \qquad (1)$$

где f_i' – значения производной интерполируемой функции в точках x_i.
Отметим, что узлы x_i этого сплайна могут не совпадать с точками $\tilde{x}_j$, в которых заданы значения $\tilde{f}_j$.

Получим соотношения для вычисления коэффициентов f_i и f_i', определяющих сглаживающий сплайн в виде соотношения (1). В данном случае сплайн $P(x)$ удобней записать в виде

$$P(x)=\sum_{i=1}^{2n} q_i\psi_i(x), \qquad (2)$$

где $\psi_i(x)$ – глобальные эрмитовы базисные функции [1], а $q_i=f_{(i+1)/2}$ для нечётных i и $q_i=f_{i/2}'$ для чётных i.

Коэффициенты q_i $(i=1...2n)$ будем находить из условия минимизации функционала

$$F(\mathbf{q})=\sum_{j=1}^{k}\omega_j\left(\sum_{i=1}^{2n} q_i\psi_i(\tilde{x}_j)-\tilde{f}_j\right)^2, \qquad (3)$$

где ω_j – некоторые известные веса, с помощью которых можно регулировать близость сплайна $P(x)$ в точке $\tilde{x}_j$ к значению $\tilde{f}_j$ (за счёт увеличения значения параметра ω_j можно приблизить значение $P(\tilde{x}_j)$ к $\tilde{f}_j$).

Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^{2n} q_i\psi_i(x)\equiv\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}(x)\equiv\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(x)\mathbf{q},$$

где $\boldsymbol{\psi}(x)=(\psi_1(x),...,\psi_{2n}(x))^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{q}=(q_1,...,q_{2n})^{\mathrm{T}}$, преобразуем функционал $F(\mathbf{q})$:

$$F(\mathbf{q})=\sum_{j=1}^{k}\omega_j\left(\sum_{i=1}^{2n} q_i\psi_i(\tilde{x}_j)-\tilde{f}_j\right)^2=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\omega_j\left(\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\psi\left(\tilde{x}_j\right)-\tilde{f}_j\right)\left(\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\psi\left(\tilde{x}_j\right)-\tilde{f}_j\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\omega_j\left(\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\psi\left(\tilde{x}_j\right)\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\psi\left(\tilde{x}_j\right)-2\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\psi\left(\tilde{x}_j\right)\tilde{f}_j+\left(\tilde{f}_j\right)^2\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\omega_j\left(\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\psi\left(\tilde{x}_j\right)\psi^{\mathrm{T}}\left(\tilde{x}_j\right)\mathbf{q}-2\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\psi\left(\tilde{x}_j\right)\tilde{f}_j+\left(\tilde{f}_j\right)^2\right)=$$

$$=\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{k}\omega_j\psi\left(\tilde{x}_j\right)\psi^{\mathrm{T}}\left(\tilde{x}_j\right)\right)\mathbf{q}-2\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{k}\omega_j\psi\left(\tilde{x}_j\right)\tilde{f}_j\right)+\sum_{j=1}^{k}\omega_j\left(\tilde{f}_j\right)^2$$

Обозначив матрицу $\sum_{j=1}^{k}\omega_j\psi\left(\tilde{x}_j\right)\psi^{\mathrm{T}}\left(\tilde{x}_j\right)$ через $\mathbf{A}$, вектор $\sum_{j=1}^{k}\omega_j\psi\left(\tilde{x}_j\right)\tilde{f}_j$ через $\mathbf{b}$, а число $\sum_{j=1}^{k}\omega_j\left(\tilde{f}_j\right)^2$ через c, получаем:

$$F\left(\mathbf{q}\right)=\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{q}-2\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}+c. \tag{4}$$

Для нахождения значений q_i, доставляющих минимум функционалу $F\left(\mathbf{q}\right)$, продифференцируем квадратичную форму (4) по каждому из q_i и, приравняв эти производные к нулю, получим следующую СЛАУ, определяющую коэффициенты сплайна (2):

$$\mathbf{A}\mathbf{q}=\mathbf{b}, \tag{5}$$

где матрица $\mathbf{A}$ и вектор правой части $\mathbf{b}$ (размерности $2n$) определяются соотношениями:

$$\mathbf{A}=\sum_{j=1}^{k}\omega_j\psi\left(\tilde{x}_j\right)\psi^{\mathrm{T}}\left(\tilde{x}_j\right), \tag{6}$$

$$\mathbf{b}=\sum_{j=1}^{k}\omega_j\psi\left(\tilde{x}_j\right)\tilde{f}_j, \tag{7}$$

или покомпонентно

$$A_{\nu\mu}=\sum_{j=1}^{k}\omega_j\psi_\nu\left(\tilde{x}_j\right)\psi_\mu\left(\tilde{x}_j\right), \qquad b_\nu=\sum_{j=1}^{k}\omega_j\psi_\nu\left(\tilde{x}_j\right)\tilde{f}_j. \tag{8}$$

Заметим, что матрица (6) может оказаться вырожденной, если, например, $k<2n$ или в некоторые интервалы (x_i, x_{i+1}) попадает недостаточное количество точек $\tilde{x}_j$. Вырожденность матрицы $\mathbf{A}$ означает, что существует не единственный сплайн с минимальной суммой квадратов отклонений его значений в точках $\tilde{x}_j$. В этом случае определить единственный сплайн, делающий взвешенную сумму квадратов отклонений (3) «почти минимальной», можно путём введения дополнительных (регуляризирующих) слагаемых в функционал $F(\mathbf{q})$, например:

$$F(\mathbf{q})=\sum_{j=1}^{k}\omega_j\left(P(\tilde{x}_j)-\tilde{f}_j\right)^2+\int_{x_1}^{x_n}\alpha(x)\left(\frac{dP(x)}{dx}\right)^2dx+\int_{x_1}^{x_n}\beta(x)\left(\frac{d^2P(x)}{dx^2}\right)^2dx. \quad (9)$$

При $\alpha>0$ и $\beta>0$ минимизация функционала (9) определяет единственный сплайн (2). Второе слагаемое в функционале (9) влияет на первые производные сплайна (делая их меньше при увеличении α), а третье – на его вторые производные (также уменьшая их при увеличении β). При этом следует помнить, что с увеличением значений α или β для сплайнов (2), параметры которых q_i определяются из условия минимизации функционала (9), может увеличиваться первое слагаемое (определяющее взвешенную сумму квадратов отклонений значений сплайна $P(x)$ в точках $\tilde{x}_j$ от значений $\tilde{f}_j$), т.е. с увеличением параметров α или β сплайн $P(x)$ может начать всё сильнее отклоняться от значений $\tilde{f}_j$.

Предлагаем читателю убедиться, что функционал (9) при подстановке в него вместо $P(x)$ разложения (2) может быть записан в виде квадратичного функционала (4) и его минимизация эквивалентна решению СЛАУ (5) с матрицей $\mathbf{A}$ и вектором правой части $\mathbf{b}$ следующего вида (сравните с (6) и (7)):

$$\mathbf{A}=\sum_{j=1}^{k}\omega_j\psi(\tilde{x}_j)\psi^{\text{т}}(\tilde{x}_j)+\int_{x_1}^{x_n}\alpha\frac{d\psi(x)}{dx}\frac{d\psi^{\text{т}}(x)}{dx}dx+\int_{x_1}^{x_n}\beta\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\frac{d^2\psi^{\text{т}}(x)}{dx^2}dx. \quad (10)$$

$$\mathbf{b}=\sum_{j=1}^{k}\omega_j\psi(\tilde{x}_j)\tilde{f}_j. \quad (11)$$

Второе слагаемое в правой части (10) фактически определяет матрицу жёсткости. Её так же, как и при решении соответствующих краевых задач с использованием эрмитовых элементов, удобно собирать из локальных матриц жёсткости [1].

Матрица, определяемая третьим слагаемым, также может быть собрана из локальных матриц отдельных элементов. Эти локальные матрицы имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{12}{h^3} & \frac{6}{h^2} & -\frac{12}{h^3} & \frac{6}{h^2} \\ \frac{6}{h^2} & \frac{4}{h} & -\frac{6}{h^2} & \frac{2}{h} \\ -\frac{12}{h^3} & -\frac{6}{h^2} & \frac{12}{h^3} & -\frac{6}{h^2} \\ \frac{6}{h^2} & \frac{2}{h} & -\frac{6}{h^2} & \frac{4}{h} \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

где h – длина конечного элемента.

В принципе, и матрицу, определяемую первым слагаемым, можно собирать из локальных матриц отдельных элементов. Компоненты этих локальных матриц можно вычислить по формуле:

$$A^l_{\nu\mu} = \sum_j \omega_j \hat{\psi}_\nu\left(\tilde{x}_j\right)\hat{\psi}_\mu\left(\tilde{x}_j\right), \qquad \nu, \mu = 1...4,$$

где $\hat{\psi}_\nu$ – локальные базисные функции соответствующего элемента $\left(x_l, x_{l+1}\right)$ и суммирование ведётся только по тем j, для которых точки $\tilde{x}_j$ принадлежат текущему элементу (отметим, что точки $\tilde{x}_j$, совпадающие с граничными точками элементов x_l, могут быть учтены в любом из элементов $\left(x_{l-1}, x_l\right)$ или $\left(x_l, x_{l+1}\right)$, но только один (!) раз).

Для построения сплайна в двумерных и трехмерных областях используются бикубические и трикубические эрмитовые базисные функции соответственно. Их вид через одномерные базисные функции приведен в [1]. Сборка локальных матриц осуществляется также с использованием локальных матриц одномерных эрмитовых элементов.

Практическая часть

В соответствии с вариантом задания студент разрабатывает программу построения сглаживающего сплайна в одномерной, двумерной или трехмерной области и предусматривает возможность введения регуляризирующих слагаемых. При этом исходными данными является набор значений $\left\{\tilde{x}_j, \tilde{f}_j, \omega_j\right\}$ (где $\tilde{x}_j$ – точка в одномерной, двумерной или трехмерной области, а $\tilde{f}_j$ – значение функции в этой точке), конечноэлементная сетка для построения сплайна, значения параметров регуляризации α и β. Выходными данными является набор весов построенного сплайна, по которому с помощью дополнительного модуля могут быть выданы значения сплайна и его производных в произвольной точке.

В соответствии с вариантом задания студент формирует набор данных либо в виде зашумленных значений аналитической функции либо в виде значений конечноэлементного решения, выданного в некотором наборе точек расчетной области по известным весам.

В первом случае для зашумления используется любое распределение ошибки с нулевым среднем, но при этом в наборе должно присутствовать некоторое количество выбросов. С использованием разработанной программы по заданному набору зашумленных данных студент строит сплайн и оценивает отклонения значений сплайна от значений заданного набора. Затем определяет точки, в которых отклонения превышают среднее отклонение в заданное количество раз, уменьшает этим точкам значение весов ω_j и снова строит сплайн. Эта процедура фильтрации прекращается, когда отклонения значений сплайна от значений заданного набора во всех точках не превышают среднее отклонение в заданное количество раз. Такая итерационная процедура должна быть автоматизирована и протестирована на аналитических функциях, точно представимых и непредставимых в кусочно-кубическом базисе.

Во втором случае для проведения исследований студент использует программу конечноэлементного моделирования. С помощью этой программы студент получает численное решение в виде весов конечноэлементного решения. По нему с помощью дополнительно разработанной программы студент формирует набор значений конечноэлементного решения в некотором наборе точек. По полученному набору значений студент строит сплайн. Студент выдает значения производных численного решения непосредственно по конечноэлементному решению и по построенному сплайну. С использованием последовательности вложенных сеток для получения конечноэлементного решения студент анализирует возможность повышения точности расчета производных численного решения с помощью сплайна.

Варианты заданий

1. Решение задачи фильтрации в одномерной области. При построении сглаживающего сплайна использовать параметр регуляризации α.
2. Решение задачи фильтрации в одномерной области. При построении сглаживающего сплайна использовать параметр регуляризации β.
3. Решение задачи фильтрации в двумерной области. При построении сглаживающего сплайна использовать параметр регуляризации α.
4. Решение задачи фильтрации в двумерной области. При построении сглаживающего сплайна использовать параметр регуляризации β.
5. Решение задачи фильтрации в трехмерной области. При построении сглаживающего сплайна использовать параметр регуляризации α.
6. Решение задачи фильтрации в трехмерной области. При построении сглаживающего сплайна использовать параметр регуляризации β.
7. Решение задачи уточнения численного решения, полученного с использованием линейных базисных функций, в одномерной области в декартовых координатах.
8. Решение задачи уточнения численного решения, полученного с использованием линейных базисных функций, в одномерной области в цилиндрических координатах.

9. Решение задачи уточнения численного решения, полученного с использованием линейных базисных функций, в одномерной области в сферических координатах.
10. Решение задачи уточнения численного решения, полученного с использованием билинейных базисных функций на прямоугольных конечных элементах, в двумерной области в декартовых координатах.
11. Решение задачи уточнения численного решения, полученного с использованием линейных базисных функций на треугольных конечных элементах, в двумерной области в декартовых координатах.
12. Решение задачи уточнения численного решения, полученного с использованием билинейных базисных функций на четырехугольных конечных элементах, в двумерной области в декартовых координатах.
13. Решение задачи уточнения численного решения, полученного с использованием билинейных базисных функций на прямоугольных конечных элементах, в двумерной области в цилиндрических координатах.
14. Решение задачи уточнения численного решения, полученного с использованием линейных базисных функций на треугольных конечных элементах, в двумерной области в цилиндрических координатах.
15. Решение задачи уточнения численного решения, полученного с использованием билинейных базисных функций на четырехугольных конечных элементах, в двумерной области в цилиндрических координатах.
16. Решение задачи уточнения численного решения, полученного с использованием билинейных базисных функций на прямоугольных конечных элементах, в двумерной области в полярных координатах.
17. Решение задачи уточнения численного решения, полученного с использованием линейных базисных функций на треугольных конечных элементах, в двумерной области в полярных координатах.
18. Решение задачи уточнения численного решения, полученного с использованием билинейных базисных функций на четырехугольных конечных элементах, в двумерной области в полярных координатах.

19. Решение задачи уточнения численного решения, полученного с использованием трилинейных базисных функций на параллелепипеидальных конечных элементах, в трехмерной области в декартовых координатах.
20. Решение задачи уточнения численного решения, полученного с использованием линейных базисных функций на тетраэдральных конечных элементах, в трехмерной области в декартовых координатах.
21. Решение задачи уточнения численного решения, полученного с использованием трилинейных базисных функций на призмах с четырехугольным основанием, в трехмерной области в декартовых координатах.

Лабораторная работа №2

Расчет потока векторного поля через поверхность

Цель: Разработать программу вычисления потока через поверхность, ограничивающую некоторую подобласть, и определение интегральной мощности источника внутри заданной подобласти.

Теоретическая часть

Рассмотрим краевую задачу с сосредоточенными источниками вида:

$$-\Delta V = f \quad \text{в } \Omega,\ V\big|_{\Gamma} = 0, \tag{13}$$

где Δ – оператор Лапласа, f – сосредоточенный источник с мощностью F, Ω – трехмерная область, $V(x,y,z)$ – скалярная функция трех координат.

Выберем некоторую подобласть Ω', ограниченную поверхностью S, и проинтегрируем по ней уравнение (13), применив к левой части формулу Грина. В результате получим:

$$\int\limits_{\Omega'} -\Delta V d\Omega = \int\limits_{S} \frac{\partial V}{\partial n} dS = \int\limits_{\Omega'} \delta F d\Omega,$$

где $\int\limits_{\Omega'} \delta F d\Omega = F$, если точка, в которой задан сосредоточенный источник, расположена внутри Ω', и $\int\limits_{\Omega'} \delta F d\Omega = 0$, если точка, в которой задан сосредоточенный источник, расположена снаружи Ω' [1].

Аналитическое решение уравнения (13) при условии, что Γ является удаленной границей, имеет вид $V(x,y,z) = F/4\pi r$, где r – расстояние от источника до точки (x,y,z).

Практическая часть

В ходе выполнения работы студент разрабатывает программу, которая выполняет численное интегрирование нормальной производной аналитического или конечноэлементного решения краевой задачи (13) для заданной поверхности S. Исходными данными является поверхность S, ограничивающая подобласть Ω', заданную, например, в виде параллелепипеда (который, в свою очередь, может быть задан координатами своих вершин), координаты расположения и значения мощностей сосредоточенных источников, параметры соответствующей схемы численного интегрирования. Выходным данным является интегральная величина источника внутри заданной подобласти, равная значению потока через поверхность S, полученному в результате численного интегрирования.

В ходе выполнения работы студент исследует точность расчета потока в зависимости от дискретизации поверхности. В ходе исследований студентом должны быть рассмотрены следующие ситуации:

1) один источник, расположенный в центре подобласти;
2) один источник, смещенный к одной из границ подобласти;
3) несколько источников внутри подобласти;
4) один источник снаружи подобласти;
5) 2 несимметрично расположенных источника внутри подобласти и 3 источника снаружи подобласти.

Варианты заданий

1. В качестве решения задачи (13) использовать аналитическое решение. Интегрирование выполнять по методу прямоугольника.
2. В качестве решения задачи (13) использовать аналитическое решение. Интегрирование выполнять по схеме Гаусса с двумя точками по каждой из координат.
3. В качестве решения задачи (13) использовать аналитическое решение. Интегрирование выполнять по схеме Гаусса с тремя точками по каждой из координат.
4. В качестве решения задачи (13) использовать аналитическое решение. Интегрирование выполнять по схеме Гаусса с четырьмя точками по каждой из координат.
5. В качестве решения задачи (13) использовать конечноэлементное решение. Интегрирование выполнять по методу прямоугольника.
6. В качестве решения задачи (13) использовать конечноэлементное решение. Интегрирование выполнять по схеме Гаусса с двумя точками по каждой из координат.
7. В качестве решения задачи (13) использовать конечноэлементное решение. Интегрирование выполнять по схеме Гаусса с тремя точками по каждой из координат.
8. В качестве решения задачи (13) использовать конечноэлементное решение. Интегрирование выполнять по схеме Гаусса с четырьмя точками по каждой из координат.

Лабораторная работа №3

Расчет циркуляции векторного поля по контуру

Цель: Разработать программу вычисления ротора конечноэлементного решения и его циркуляции по контуру для определения интегральной величины источника вихревой части поля.

Теоретическая часть

Уравнение, связывающее индукцию магнитного поля $\mathbf{B}$ и плотность токов $\mathbf{J}$, в однородном по магнитной проницаемости пространстве имеет вид:

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \qquad (14)$$

Для определения индукции $\mathbf{B}$ часто используют вектор-потенциал $\mathbf{A}$, который связан с ней соотношением $\mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}$. В случае, когда вектор плотности токов $\mathbf{J}$ имеет только одну ненулевую компоненту (например, $\mathbf{J}_z$), не изменяющуюся вдоль оси z, вектор-потенциал может быть определен из решения двумерной краевой задачи вида [1]:

$$-\Delta A_z = \mu_0 \mathbf{J}_z \ \text{ в } S, \ A_z\big|_\Gamma = 0. \qquad (15)$$

где Δ – оператор Лапласа, S – двумерная область, $A_z(x, y)$ – z-компонента вектора $\mathbf{A} = (0, 0, A_z(x, y))$.

Будем считать, что ток является сосредоточенным на линии (или на линиях), т.е. источник, стоящий в правой части уравнения (14) может быть представлен в виде $\delta \cdot \dfrac{I}{\mu_0}$, где $\delta(x - x_0, y - y_0)$ – это дельта-функция, сосредоточенная на бесконечной линии $x = x_0, y = y_0$ (направленной вдоль оси z), а $\dfrac{I}{\mu_0}$ – мощность этой дельта-функции, определяемая током I в источнике.

Выберем некоторую подобласть S', ограниченную контуром L, и проинтегрируем по ней уравнение (14), применив формулу Стокса. В результате получим:

$$\int\limits_{S'} \mathrm{rot}\mathbf{B} dS = \int\limits_{L} B_\tau dL = \int\limits_{S'} \delta I dS,$$

где B_τ – это касательная к контуру составляющая вектора $\mathbf{B}$, а интеграл $\int\limits_{S'} \delta I dS = I$, если точка, определяющая бесконечную линию, на которой сосредоточен источник, расположена внутри S', и $\int\limits_{S'} \delta I dS = 0$, если точка, определяющая бесконечную линию, на которой сосредоточен источник, расположена снаружи S'.

Аналитическое решение уравнения (15) при условии, что Γ является удаленной границей, имеет вид $A_z(x, y) = \ln r / 2\pi$, где r – расстояние от источника до точки (x, y).

Практическая часть

В ходе выполнения работы студент разрабатывает программу, которая выполняет численное интегрирование $B_\tau = \mathrm{rot}_\tau(0, 0, A_z(x, y))$ аналитического или конечноэлементного решения краевой задачи (15) – касательной составляющей вектора $\mathbf{B}$ по контуру L. Исходными данными является контур L, ограничивающий подобласть S', заданную в виде многоугольника (который, в свою очередь, может быть задан координатами вершин составляющих его отрезков), координаты расположения и значения мощностей сосредоточенных источников, параметры соответствующей схемы численного интегрирования. Выходным данным является интегральная величина источника вихревой части поля внутри заданной подобласти S', равная значению циркуляции ротора решения задачи (15) по контуру L и полученная в результате численного интегрирования.

В ходе выполнения работы студент исследует точность расчета циркуляции поля в зависимости от дискретизации контура. В ходе исследований студентом должны быть рассмотрены следующие ситуации:

1) один источник, расположенный в центре подобласти;
2) один источник, смещенный к одной из границ подобласти;
3) несколько источников внутри подобласти;
4) один источник снаружи подобласти;
5) 2 несимметрично расположенных источника внутри подобласти и 3 источника снаружи подобласти.

Варианты заданий

1. В качестве решения задачи (15) использовать аналитическое решение. Интегрирование выполнять по методу Симпсона. В качестве поверхности брать прямоугольник.
2. В качестве решения задачи (15) использовать аналитическое решение. Интегрирование выполнять по двухточечной схеме Гаусса. В качестве поверхности брать прямоугольник.
3. В качестве решения задачи (15) использовать аналитическое решение. Интегрирование выполнять по трехточечной схеме Гаусса. В качестве поверхности брать прямоугольник.
4. В качестве решения задачи (15) использовать аналитическое решение. Интегрирование выполнять по четырехточечной схеме Гаусса. В качестве поверхности брать прямоугольник.
5. В качестве решения задачи (15) использовать конечноэлементное решение. Интегрирование выполнять по методу Симпсона. В качестве поверхности брать прямоугольник.
6. В качестве решения задачи (15) использовать конечноэлементное решение. Интегрирование выполнять по двухточечной схеме Гаусса. В качестве поверхности брать прямоугольник.
7. В качестве решения задачи (15) использовать конечноэлементное решение. Интегрирование выполнять по трехточечной схеме Гаусса. В качестве поверхности брать прямоугольник.
8. В качестве решения задачи (15) использовать конечноэлементное решение. Интегрирование выполнять по четырехточечной схеме Гаусса. В качестве поверхности брать прямоугольник.
9. В качестве решения задачи (15) использовать аналитическое решение. Интегрирование выполнять по методу Симпсона. В качестве поверхности брать восьмиугольник.

10. В качестве решения задачи (15) использовать аналитическое решение. Интегрирование выполнять по двухточечной схеме Гаусса. В качестве поверхности брать восьмиугольник.
11. В качестве решения задачи (15) использовать аналитическое решение. Интегрирование выполнять по трехточечной схеме Гаусса. В качестве поверхности брать восьмиугольник.
12. В качестве решения задачи (15) использовать аналитическое решение. Интегрирование выполнять по четырехточечной схеме Гаусса. В качестве поверхности брать восьмиугольник.
13. В качестве решения задачи (15) использовать конечноэлементное решение. Интегрирование выполнять по методу Симпсона. В качестве поверхности брать восьмиугольник.
14. В качестве решения задачи (15) использовать конечноэлементное решение. Интегрирование выполнять по двухточечной схеме Гаусса. В качестве поверхности брать восьмиугольник.
15. В качестве решения задачи (15) использовать конечноэлементное решение. Интегрирование выполнять по трехточечной схеме Гаусса. В качестве поверхности брать восьмиугольник.
16. В качестве решения задачи (15) использовать конечноэлементное решение. Интегрирование выполнять по четырехточечной схеме Гаусса. В качестве поверхности брать восьмиугольник.
17. В качестве решения задачи (15) использовать аналитическое решение. Интегрирование выполнять по методу Симпсона. В качестве поверхности брать круг.
18. В качестве решения задачи (15) использовать аналитическое решение. Интегрирование выполнять по двухточечной схеме Гаусса. В качестве поверхности брать круг.
19. В качестве решения задачи (15) использовать аналитическое решение. Интегрирование выполнять по трехточечной схеме Гаусса. В качестве поверхности брать круг.

20. В качестве решения задачи (15) использовать аналитическое решение. Интегрирование выполнять по четырехточечной схеме Гаусса. В качестве поверхности брать круг.
21. В качестве решения задачи (15) использовать конечноэлементное решение. Интегрирование выполнять по методу Симпсона. В качестве поверхности брать круг.
22. В качестве решения задачи (15) использовать конечноэлементное решение. Интегрирование выполнять по двухточечной схеме Гаусса. В качестве поверхности брать круг.
23. В качестве решения задачи (15) использовать конечноэлементное решение. Интегрирование выполнять по трехточечной схеме Гаусса. В качестве поверхности брать круг.
24. В качестве решения задачи (15) использовать конечноэлементное решение. Интегрирование выполнять по четырехточечной схеме Гаусса. В качестве поверхности брать круг.

Список литературы

1. Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э., Персова М.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач: Учеб. пособие. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 896 с. («Учебники НГТУ»).