

№ 4098

51

А 456

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Методические указания

**НОВОСИБИРСК
2012**

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Методические указания к лабораторным работам
по курсам «Современные проблемы прикладной математики
и информатики» и «Современные компьютерные технологии»
для магистрантов ФПМИ, направление 010400

УДК 517.95(076.5)
А 456

Составители: д-р техн. наук, проф. *М.Г. Персова*;
д-р техн. наук, проф. *Ю.Г. Соловейчик*;
ассист. *П.А. Домников*

Рецензент д-р техн. наук, проф. *М.Э. Рояк*

Работа подготовлена
на кафедре прикладной математики

© Новосибирский государственный
технический университет, 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

Теоретическая часть.....	4
Практическая часть	11
Лабораторная работа № 1	13
Лабораторная работа № 2	16
Лабораторная работа № 3	21
Литература.....	27

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Под *прямыми задачами* понимают задачи моделирования каких-либо физических полей, процессов или явлений (электромагнитных, акустических, сейсмических, тепловых, гравитационных и т.п.). В прямых задачах требуется найти функцию, описывающую физическое поле или процесс в каждой точке исследуемой области и в каждый момент времени (если поле нестационарное). Для решения прямой задачи задаются:

- 1) область, в которой процесс изучается;
- 2) уравнение, описывающее данный процесс;
- 3) условия на границе исследуемой области;
- 4) начальные условия (если процесс нестационарный).

Примером прямой задачи может служить задача нахождения распределения напряженности стационарного электрического поля, возбуждаемого точечным источником в горизонтально-слоистой среде (рис. 1), в которой слои имеют проводимость σ_i и толщину h_i (i – номер слоя).

Распределение электрического поля в области Ω с границей $S_1 \cup S_2$ описывается эллиптическим уравнением

$$-\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} V) = 0 \quad (1)$$

в цилиндрической системе координат (r, z) с краевыми условиями первого и второго рода

$$V|_{S_1} = 0, \quad (2)$$

$$\sigma \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{S_2} = \theta. \quad (3)$$

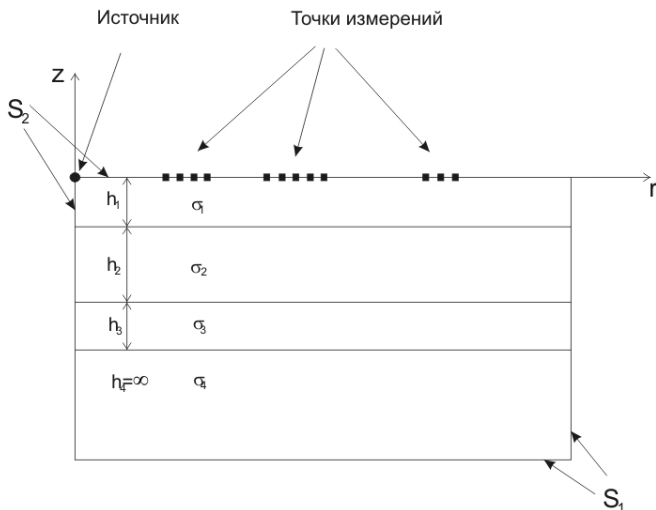


Рис. 1. Вид расчетной области для задачи распределения электрического поля от точечного источника в горизонтально-слоистой среде

Для прямой задачи входными данными являются значения удельной электрической проводимости слоев среды σ_i и их толщины h_i , а также плотность стекающего в среду тока θ , заданная с помощью дельта-функции. Неизвестной величиной является V – скалярный потенциал электрического поля такой, что напряженность электрического поля $\vec{E} = -\text{grad } V$. Таким образом, в прямой задаче при известном положении и плотности источника θ и известной толщине h_i и проводимости σ_i слоев необходимо найти распределение потенциала $V(r, z)$, описываемое уравнением (1) с краевыми условиями (2) и (3).

В *обратной задаче* неизвестными являются некоторые параметры, являющиеся исходными для прямой задачи. Эти неизвестные параметры называются *решением обратной задачи*. Для их определения к заданным уравнениям (1)–(3) и известным параметрам (входным данным прямой задачи) добавляется информация в виде измеренных значений поля (являющегося искомым при решении прямой задачи) в некоторых точках. Измеренные значения могут быть некоторой функцией $\varepsilon = \varphi(V)$ поля V , в нашем случае $\vec{E} = -\text{grad } V$.

Например, обратная задача может быть сформулирована так: при заданных значениях \vec{E} (или некоторых компонент $\vec{E} - E_x$ или E_y) в точках измерения и известной толщине h_i и проводимости слоев σ_i найти мощность источника. Или так: при заданных значениях \vec{E} в точках измерения, заданном источнике и известной толщине h_i слоев найти проводимости слоев σ_i .

К обратным задачам также относятся и другие задачи определения характеристик материалов или физических процессов, например, задача определения теплофизических характеристик материала по результатам измерения температуры в некоторых точках, задача гравиметрии по определению формы и размера аномалии плотности на основании данных измерения силы тяжести на поверхности Земли и т.д.

Процесс решения обратной задачи часто называют *инверсией* практических (измеренных в некотором наборе приемников) данных (или просто инверсией). Подбор модели среды или конфигурации источника, которые удовлетворяют измеренным в приемниках данным, называют также *интерпретацией практических данных*. Вообще говоря, в зависимости от постановки задачи получаемая модель среды (решение обратной задачи) может быть не единственной или не существовать вовсе. Задача для уравнения в частных производных *поставлена корректно*, если решение этой задачи существует, единственно и устойчиво по входным данным. Соответственно задача называется *некорректно поставленной* или *некорректной*, если задача либо не имеет решения, либо, напротив, имеет много решений, либо процедура нахождения решения неустойчива (т. е. при очень малых ошибках измерений полученное решение может как угодно сильно отличаться от точного). На практике используются специальные методы регуляризации, которые связаны с переходом к некоторой «близкой», но уже корректно поставленной задаче.

Пусть $\varepsilon^* = (\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_N^*)$ – *экспериментальные* (практические) данные в N точках измерения, соответствующие (возможно, с некоторой погрешностью) «точным» значениям параметров $u^* = (u_1^*, \dots, u_M^*)^T$ среды, а $\varepsilon(u) = (\varepsilon_1(u), \dots, \varepsilon_N(u))^T$ – данные в тех же N точках измерения, полученные при решении прямой задачи с некоторыми «неточными» параметрами среды $u = (u_1, \dots, u_M)^T$. В дальнейшем данные ε мы будем

называть *теоретическими*, и целью решения обратной задачи будет поиск таких значений u , чтобы соответствующие им теоретические данные $\varepsilon(u)$ были максимально близки к экспериментальным данным ε^* .

Количество наблюдений N обычно не меньше числа восстанавливаемых параметров M : $N \geq M$. Если $M = 1$, то обратную задачу иногда называют *одномерной*. Если $M > 1$, то – *многомерной*.

Например, если в задаче электроразведки, расчетная область для которой показана на рис. 1, неизвестными являются проводимости слоев и мощность P источника (где число P устанавливает связь между плотностью источника θ и δ -функцией в виде $\theta = P\delta(r, z)$), то вектор параметров среды будет выглядеть следующим образом: $u = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, P)$. Если же, например, неизвестны проводимость и толщина второго слоя, то $u = (\sigma_2, h_2)$.

Параметры среды будем искать, решая задачу минимизации функционала

$$J(u) = \sum_{i=1}^N (\delta\varepsilon(u))^2, \quad (4)$$

где

$$\delta\varepsilon(u) = \varepsilon^* - \varepsilon(u) \quad (5)$$

– это отклонения теоретических данных от практических.

В прикладных исследованиях типична ситуация с заданием входных данных с погрешностью, поэтому при вычислении суммы квадратов отклонений $\varepsilon(u)$ от ε^* имеет смысл использовать некоторые весовые коэффициенты ω_i . Кроме того, значения параметров u целесообразно искать в окрестности некоторых априорно заданных значений, что позволяет сделать процедуру поиска параметров более устойчивой. В результате вместо (4) рассмотрим функционал

$$J_\alpha(u) = \sum_{i=1}^N (\omega_i \delta\varepsilon(u))^2 + \alpha \sum_{j=1}^M (u_j - \bar{u}_j)^2, \quad (6)$$

где ω_i – некоторые веса, отражающие уровень погрешности при приеме сигнала в i -м приемнике, α – параметр регуляризации,

$\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_M)^T$ – вектор некоторых фиксированных параметров среды, определяющих регуляризующую добавку в функционале (т.е. большие отклонения искомых параметров u_j от их зафиксированных значений \bar{u}_j «штрафуются» с весом α).

Рассмотрим итерационную процедуру минимизации функционала (6). Для этого представим $\varepsilon(u)$ в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки u^0 , причем этот ряд ограничим членами с первыми производными:

$$\delta\varepsilon_i(u) \approx \delta\varepsilon_i(u^0) + \sum_{j=1}^M \frac{\partial(\delta\varepsilon_i(u))}{\partial u_j} \Delta u_j, \quad (7)$$

где $u^0 = (u_1^0, \dots, u_M^0)^T$ – полученные на предыдущей итерации параметры среды (на первой итерации $u^0 = \bar{u}$), $\Delta u_j = u_j - u_j^0$, $\frac{\partial(\delta\varepsilon_i(u))}{\partial u_j}$ – производные, отражающие влияние изменения j -го параметра в i -м приемнике. После подстановки (7) в (6) задача принимает вид

$$J_\alpha(u) = \sum_{i=1}^N \left(\omega_i \delta\varepsilon_i(u^0) + \omega_i \sum_{j=1}^M \frac{\partial(\delta\varepsilon_i(u))}{\partial u_j} \Delta u_j \right)^2 + \alpha \sum_{j=1}^M (u_j^0 - \bar{u}_j + \Delta u_j)^2. \quad (8)$$

Продифференцируем функционал (8) по Δu_j и приравняем к нулю. В результате получим СЛАУ вида

$$(A + \alpha I) \Delta u = f - \alpha(u^0 - \bar{u}), \quad (9)$$

где I – единичная матрица, а элементы матрицы A и вектора правой части f определяются соотношениями

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \omega_k^2 \frac{\partial(\delta\varepsilon_k(u))}{\partial u_i} \frac{\partial(\delta\varepsilon_k(u))}{\partial u_j}, \quad (10)$$

$$f_i = - \sum_{k=1}^N \omega_k^2 \delta\varepsilon_k(u^0) \frac{\partial(\delta\varepsilon_k(u))}{\partial u_i}, \quad i, j = 1, 2, \dots, M. \quad (11)$$

Если производные $\frac{\partial(\delta\varepsilon_i(u))}{\partial u_j}$ не зависят от u и равны константе, то

обратная задача будет *линейной*, в противном случае – *нелинейной*.

Найденное решение Δu системы (9) является направлением поиска для вектора параметров среды $u := u^0 + \beta \Delta u$, где β – параметр релаксации. Далее берем $u^0 := u$, вычисляем новое значение $\varepsilon(u^0)$, решая прямую задачу, вычисляем значение функционала

$$J(u) = \sum_{i=1}^N (\omega_i \delta\varepsilon(u))^2, \quad (12)$$

и если это значение стало меньше, чем на предыдущей итерации, то осуществляется переход к следующему шагу, в противном случае уменьшается значение параметра релаксации β .

Отметим, что основные вычислительные затраты при решении обратной задачи составляет решение серии прямых задач.

Кроме предложенного метода линеаризации для минимизации функционала (6) можно использовать любой другой метод минимизации, однако, как правило, по эффективности они уступают описанному выше методу линеаризации.

Помимо точечного источника в задачах электроразведки могут быть заданы источники другой конфигурации.

В случае когда в качестве источника используется вертикальная электрическая линия (ВЭЛ), решается следующая осесимметричная задача. Распределение потенциала электрического поля V описывается уравнением (1), а источник задается двумя δ -функциями: $\theta_1 = P\delta(r - r_0, z - z_A)$ и $\theta_2 = -P\delta(r - r_0, r - z_B)$, P – мощность источника (рис. 2), r_0 – радиус внутренней поверхности обсадной колонны труб либо радиус кабеля, а z_A и z_B – координаты расположения электродов ВЭЛ в скважине. Для задания ВЭЛ также можно использовать «размазанный» источник по вертикальным ребрам l_A и l_B . При этом нижней точкой ребра l_A (A – верхний электрод ВЭЛ)

будет точка (r_0, z_A) , а верхней точкой l_B (B – нижний электрод ВЭЛ) – точка (r_0, z_B) .

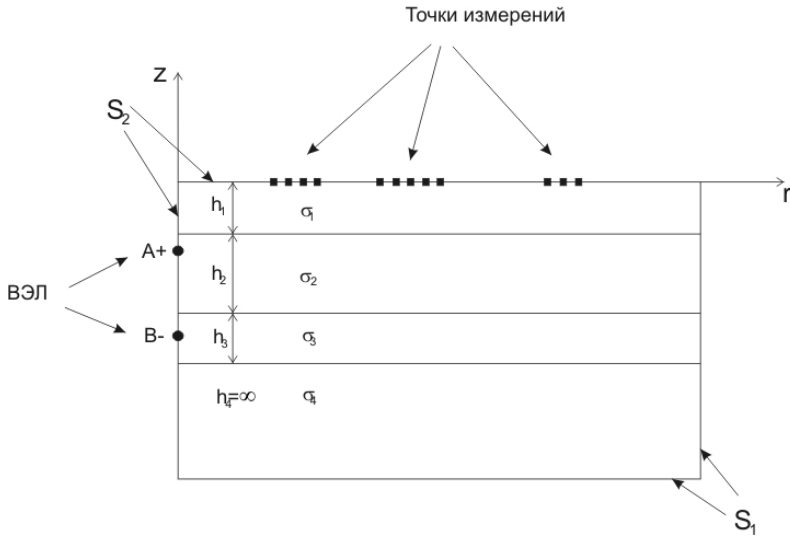


Рис. 2. Вид расчетной области для задачи распределения электрического поля ВЭЛ в горизонтально-слоистой среде

В случае, когда в качестве источника используется круговой электрический диполь (КЭД), применяются две δ -функции:

$$\theta_1 = \frac{P}{2\pi r_0} \delta(r - r_0, z - z_0) \text{ и } \theta_2 = -\frac{P}{2\pi R} \delta(r - R, z - z_0), \text{ где } r_0 \text{ и } R -$$

это соответственно внутренний и внешний радиусы КЭД, а z_0 – глубина его расположения (рис. 3). КЭД можно также задать в виде поверхностного источника (аналогичного второму краевому условию), на вертикальных ребрах, верхними точками которых соответственно являются точки (r_0, z_0) и (R, z_0) .

В отличие от источников типа ВЭЛ и КЭД стационарное электрическое поле горизонтальной электрической линии (ГЭЛ) в горизонтально-слоистой среде – трехмерное. Однако оно может быть

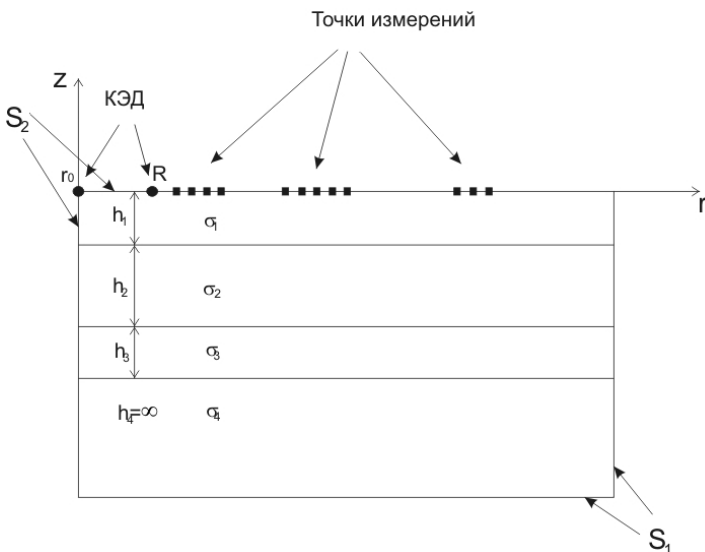


Рис. 3. Вид расчетной области для задачи распределения электрического поля КЭД в горизонтально-слоистой среде

вычислено просто в виде суммы полей двух точечных источников, расположенных в точках $(x_A, y_A, 0)$ и $(x_B, y_B, 0)$. При этом необходимо учитывать, что электрод А – положительный, а электрод В – отрицательный. Результирующее поле необходимо пересчитать в декартову систему координат:

$$V(x, y, z) = V^{rz} \left(\sqrt{(x - x_A)^2 - (y - y_A)^2}, z \right) - V^{rz} \left(\sqrt{(x - x_B)^2 - (y - y_B)^2}, z \right).$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

При выполнении лабораторных работ следует вначале решить соответствующую прямую задачу, чтобы получить экспериментальные данные ε^* . Для некоторых вариантов эти данные нужно «зашумить» –

внести искажения порядка нескольких процентов от значений, полученных из решения прямой задачи.

Для решения обратной задачи нужно воспользоваться следующим алгоритмом.

1. Сгенерировать экспериментальные данные ε^* , как результат решения прямой задачи и последующего возможного «зашумления».

2. Выбрать вектор параметров среды $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_M)^T$, причем значения параметров должны быть некоторыми типичными усредненными для решаемой задачи, и положить $u^0 = \bar{u}$.

3. Для вычисления производных в (7) задать приращение параметров $\delta u_j \approx 0.05u_j$, $j = 1, \dots, M$, решить прямую задачу для вектора

параметров $u + \delta u$ и положить
$$\frac{\partial(\delta \varepsilon_i(u))}{\partial u_j} = \frac{\delta \varepsilon_i(u + \delta u) - \delta \varepsilon_i(u)}{\delta u_j},$$

 $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$.

4. Сгенерировать матрицу и вектор правой части СЛАУ (9) с учетом формул (10) и (11).

5. Решить СЛАУ (9) прямым методом.

6. Сравнить значение функционала невязки экспериментальных и теоретических данных (12) для значений параметров u на предыдущей итерации (u^0) и на текущей итерации ($u + \beta \Delta u$) и в случае его существенного изменения обновить вектор параметров ($u^0 := u + \beta \Delta u$) и продолжить итерационный процесс минимизации функционала (8), а в противном случае завершить итерационный процесс вычисления параметров u .

Построение дискретных аналогов краевых задач для дифференциальных уравнений выполнять на основе метода конечных элементов (МКЭ).

Параметр регуляризации α выбирать следующим образом. Для некоторого значения параметров $u \neq \bar{u}$ вычислить значения функционалов $J_\alpha(u)$ по формуле (6) и $J(u)$ по формуле (12). Значение α взять максимальным из значений, удовлетворяющих условию $J_\alpha(u) \leq (1 + \gamma)J(u)$, где γ – достаточно малая величина (в диапазоне $10^{-4} \dots 10^{-2}$).

Лабораторная работа № 1

РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Распределение скалярного потенциала V напряженности стационарного электрического поля $\vec{E} = -\text{grad } V$, возбуждаемого источником f в горизонтально-слоистой среде с удельной электрической проводимостью σ , описывается эллиптическим уравнением

$$-\text{div } \sigma \text{ grad } V = f.$$

Способы задания точечного источника, ВЭЛ, КЭД и ГЭЛ описаны в теоретической части методических указаний.

Дополнительными входными данными служит набор значений электрического поля $\vec{E} = -\text{grad } V$ в определенном наборе приемников на дневной поверхности.

Во всех вариантах необходимо:

- а) найти величину источника (при его известном положении) – линейная обратная задача. Силу тока задавать в диапазоне $1 \dots 10$ А;
- б) найти значения коэффициента удельной проводимости σ_i или толщину одного из слоев h_j – нелинейная обратная задача. Проводимость задавать в диапазоне $0.001 \dots 10$ См/м. Толщину слоев задавать в диапазоне $10 \dots 500$ м.

При выполнении заданий а) и б) исследовать влияние зашумления (в диапазоне от 1 до 10 % от полезного сигнала) в указанных приемниках на решение обратной задачи. Расстояние между соседними приемниками задавать не менее 10 м.

Варианты заданий

1. Однородное полупространство, точечный источник. Неизвестна проводимость σ полупространства. Дано два приемника. Исследовать влияние зашумления в одном и в двух приемниках на решение обратной задачи.

2. Однородное полупространство, точечный источник. Неизвестна проводимость σ полупространства. Дано три приемника. Исследовать

влияние зашумления в одном, в двух и в трех приемниках на решение обратной задачи.

3. Однородное полупространство, источник – ВЭЛ. Неизвестна проводимость σ полупространства. Дано три приемника. Исследовать влияние зашумления в одном, в двух и в трех приемниках на решение обратной задачи.

4. Однородное полупространство, источник – ГЭЛ. Неизвестна проводимость σ полупространства. Дано три приемника. Исследовать влияние зашумления в одном и в двух приемниках на решение обратной задачи.

5. Однородное полупространство, источник – КЭД. Неизвестна проводимость σ полупространства. Дано три приемника. Исследовать влияние зашумления в одном, в двух и в трех приемниках на решение обратной задачи.

6. Двухслойная среда, точечный источник. Неизвестна проводимость σ_1 первого слоя. Дано четыре приемника. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

7. Двухслойная среда, точечный источник. Неизвестна толщина h_1 первого слоя. Дано два приемника. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

8. Двухслойная среда, источник – ВЭЛ. Неизвестна проводимость σ_2 второго слоя, имеющего бесконечную толщину. Дано два приемника. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

9. Двухслойная среда, источник – ГЭЛ. Неизвестна проводимость σ_1 первого слоя. Дано два приемника. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

10. Двухслойная среда, источник – КЭД. Неизвестна проводимость σ_2 второго слоя, имеющего бесконечную толщину. Дано четыре приемника. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

11. Трехслойная среда, точечный источник. Неизвестна проводимость σ_2 второго слоя. Дано пять приемников. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

12. Трехслойная среда, точечный источник. Неизвестна толщина h_2 второго слоя. Дано пять приемников. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

13. Трехслойная среда, источник – ВЭЛ. Неизвестна проводимость σ_3 третьего слоя, имеющего бесконечную толщину. Дано пять приемников. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

14. Трехслойная среда, источник – ГЭЛ. Неизвестна проводимость σ_1 первого слоя. Дано пять приемников. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

15. Трехслойная среда, источник – КЭД. Неизвестна толщина h_2 второго слоя. Дано шесть приемников. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

16. Четырехслойная среда, точечный источник. Неизвестна проводимость σ_2 второго слоя. Дано шесть приемников. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

17. Четырехслойная среда, точечный источник. Неизвестна толщина h_2 второго слоя. Дано шесть приемников. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

18. Четырехслойная среда, точечный источник. Неизвестна проводимость σ_3 третьего слоя. Рассмотреть ситуации, когда задано два приемника и три приемника. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

19. Четырехслойная среда, точечный источник. Неизвестна толщина h_3 третьего слоя. Рассмотреть ситуации, когда задано два приемника и три приемника. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

20. Четырехслойная среда, источник – ВЭЛ. Неизвестна проводимость σ_3 третьего слоя. Рассмотреть ситуации, когда задано два приемника и три приемника. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

21. Четырехслойная среда, источник – ВЭЛ. Неизвестна толщина h_3 третьего слоя. Рассмотреть ситуации, когда задано два приемника и три приемника. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

22. Четырехслойная среда, источник – ГЭЛ. Неизвестна проводимость σ_2 второго слоя. Рассмотреть ситуации, когда задано два приемника и три приемника. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

23. Четырехслойная среда, источник – ГЭЛ. Неизвестна толщина h_3 третьего слоя. Рассмотреть ситуации, когда задано два приемника и три приемника. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

24. Четырехслойная среда, источник – КЭД. Неизвестна толщина h_3 третьего слоя. Рассмотреть ситуации, когда задано два приемника и три приемника. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

25. Четырехслойная среда, источник – КЭД. Неизвестна проводимость σ_3 третьего слоя. Рассмотреть ситуации, когда задано два приемника и три приемника. Исследовать влияние зашумления в одном приемнике на решение обратной задачи.

Лабораторная работа № 2

РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В данной лабораторной работе требуется в задаче электроразведки на постоянном токе по результатам измерений разности потенциалов в приемных линиях $M_j N_j$ (j – число приемных линий, расположенных на дневной поверхности), определить положение источника заданной конфигурации. При этом положение источника ищется среди нескольких заданных положений (рис. 4).

При выполнении вариантов лабораторной работы необходимо задать 10 положений источника и определить, в каком положении был включен источник. При этом вектор неизвестных параметров выглядит следующим образом: $u = (P_1, \dots, P_{10})^T$, где P_i , $i = 1, \dots, 10$ – мощность источника в i -м положении.

В случае источников, создающих осесимметричное поле в горизонтально-слоистой среде (точечный источник, ВЭЛ, КЭД) приемные линии следует расставлять на разном расстоянии от источника.

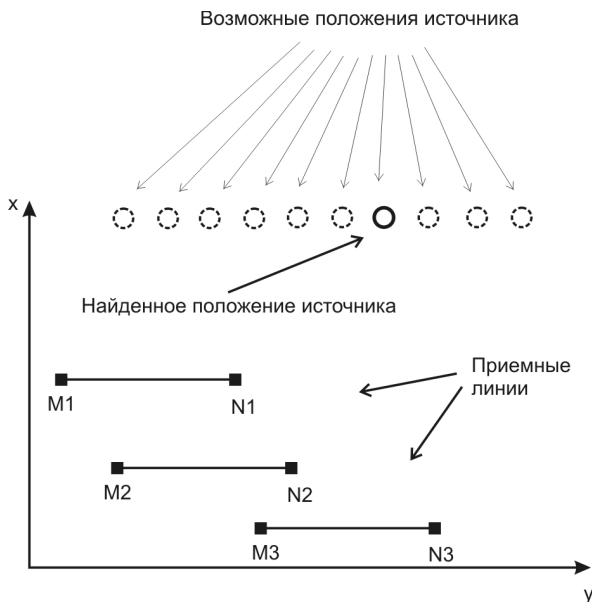


Рис. 4. Иллюстрация к задаче о поиске положения источника

Расстояние между возможными положениями источника задавать: для точечного источника и КЭД – не менее 10 м, для ГЭЛ – не менее 100 м, для электродов ВЭЛ – 10 м. Длина приемных линий $M_j N_j$ – 10 м. Толщину и проводимость слоев горизонтально-слоистой среды считать известными.

Во всех вариантах исследовать влияние выбора параметра регуляризации на решение обратной задачи.

Варианты заданий

1. Определить положение точечного источника. Среда двухслойная. Даны три приемные линии, две из которых расположенные на одной прямой, а третья – на параллельной к ним прямой. В одной из приемных линий уровень шума 1 %.

2. Определить положение точечного источника. Среда трехслойная. Даны четыре приемные линии, расположенные на параллельных прямых. В одной из приемных линий уровень шума 1 %.

3. Определить положение точечного источника. Среда трехслойная. Даны три приемные линии, расположенные под углом 45 градусов друг к другу. В одной из приемных линий уровень шума 1 %.

4. Определить положение точечного источника. Среда двухслойная. Рассмотреть случаи, когда заданы одна, две и три приемные линии, расположенные на параллельных прямых. В одной из приемных линий уровень шума 1 %.

5. Определить положение точечного источника. Среда двухслойная. Даны три приемные линии, расположенные на одной прямой, и одна перпендикулярная к ним. Исследовать влияние зашумления на решение обратной задачи при зашумлении данных в двух приемных линиях в диапазоне 1...10 %.

6. Определить положение точечного источника. Среда трехслойная. Даны три приемные линии, расположенные на параллельных прямых. Исследовать влияние зашумления на решение обратной задачи при зашумлении данных в двух приемных линиях в диапазоне 1...10 %.

7. Определить положение точечного источника. Среда трехслойная. Даны четыре приемные линии, три из которых расположены на параллельных прямых, а третья – перпендикулярно к ним. Исследовать влияние зашумления на решение обратной задачи при зашумлении данных в двух и в трех приемных линиях в диапазоне 1...10 %.

8. Определить положение ГЭЛ. Длину ГЭЛ считать фиксированной. Среда четырехслойная. Дано пять приемных линий, расположенных на параллельных прямых. В трех приемных линиях уровень шума 1 %.

9. Определить положение ГЭЛ. Длину ГЭЛ считать фиксированной. Среда четырехслойная. Дано шесть приемных линий, три из которых расположены на параллельных прямых, а остальные три – перпендикулярно к ним. Во всех приемных линиях уровень шума 1 %.

10. Определить положение ГЭЛ. Длину ГЭЛ считать фиксированной. Среда трехслойная. Дано шесть приемных линий, расположенных на параллельных прямых. Исследовать влияние зашумления на решение обратной задачи при зашумлении данных в двух, трех и во всех приемных линиях в диапазоне 1...10 %.

11. Определить положение электрода B в ГЭЛ. Положение электрода A считать фиксированным. Среда двухслойная. Дано семь приемных линий, три из которых расположены на параллельных прямых, а остальные – перпендикулярно к ним. Во всех приемных линиях уровень шума 1 %.

12. Определить положение электрода B в ГЭЛ. Положение электрода A считать фиксированным. Среда трехслойная. Дано восемь приемных линий, четыре из которых расположены на параллельных прямых, а остальные – перпендикулярно к ним. Исследовать влияние зашумления на решение обратной задачи при зашумлении данных в двух, четырех и всех приемных линиях в диапазоне 1...10 %.

13. Определить координаты скважины с ВЭЛ. Длину ВЭЛ и глубину, на которую опускалась ВЭЛ, считать известными. Среда трехслойная. Дано пять приемных линий, расположенных на параллельных прямых. Во всех приемных линиях уровень шума 1 %.

14. Определить координаты скважины с ВЭЛ. Длину ВЭЛ и глубину, на которую опускалась ВЭЛ, считать известными. Среда четырехслойная. Дано семь приемных линий, расположенных под разными углами. В трех приемных линиях уровень шума 1 %.

15. Определить координаты скважины с ВЭЛ. Длину ВЭЛ и глубину, на которую опускалась ВЭЛ, считать известными. Среда двухслойная. Дано девять приемных линий, расположенных параллельно. Исследовать влияние зашумления на решение обратной задачи при зашумлении данных в двух, четырех и всех приемных линиях в диапазоне 1...10 %.

16. Определить положение электрода B в ВЭЛ. Координаты скважины и положение электрода A считать известными. Среда трехслойная. Дано семь приемных линий, расположенных на параллельных прямых. В трех приемных линиях уровень шума 1 %.

17. Определить положение электрода B в ВЭЛ. Координаты скважины и положение электрода A считать известными. Среда четырехслойная. Дано восемь приемных линий, пять из которых расположены на параллельных прямых, а остальные – перпендикулярно к ним. Во всех приемных линиях уровень шума 1 %.

18. Определить положение электрода B в ВЭЛ. Координаты скважины и положение электрода A считать известными. Среда четырех-

слойная. Дано семь приемных линий, расположенных на параллельных прямых. Исследовать влияние зашумления на решение обратной задачи при зашумлении данных в двух, четырех и всех приемных линиях в диапазоне 1...10 %.

19. Определить глубину погружения ВЭЛ в скважину. Координаты скважины и длину ВЭЛ считать известными. Среда трехслойная. Дано семь приемных линий, расположенных на параллельных прямых. В трех приемных линиях уровень шума 1 %.

20. Определить глубину погружения ВЭЛ в скважину. Координаты скважины и длину ВЭЛ считать известными. Среда четырехслойная. Дано девять приемных линий, расположенных на параллельных прямых. Исследовать влияние зашумления на решение обратной задачи при зашумлении данных в двух, четырех и всех приемных линиях в диапазоне 1...10 %.

21. Определить положение КЭД. Среда трехслойная. Даны четыре приемные линии, расположенные под разными углами друг к другу. Во всех приемных линиях уровень шума 1 %.

22. Определить положение КЭД. Среда четырехслойная. Рассмотреть случаи, когда заданы одна, две, три и четыре приемные линии, расположенные на параллельных прямых. В одной из приемных линий уровень шума 1 %.

23. Определить положение КЭД. Среда трехслойная. Даны четыре приемные линии, расположенные на одной прямой, и одна – на параллельной к ним прямой. Исследовать влияние зашумления на решение обратной задачи при зашумлении данных в двух приемных линиях в диапазоне 1...10 %.

24. Определить положение КЭД. Среда трехслойная. Даны четыре приемные линии, расположенные на параллельных прямых. Исследовать влияние зашумления на решение обратной задачи при зашумлении данных в двух приемных линиях в диапазоне 1...10 %.

25. Определить положение КЭД. Среда трехслойная. Даны пять приемных линий, три из которых расположены на параллельных прямых, а третья – перпендикулярно к ним. Исследовать влияние зашумления на решение обратной задачи при зашумлении данных в двух и в трех приемных линиях в диапазоне 1...10 %.

Лабораторная работа № 3

РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В данной лабораторной работе в процессе решения обратной задачи требуется найти сразу несколько неизвестных параметров среды в задаче зондирования на постоянном токе: проводимости σ_i или толщины h_i некоторых слоев. Положение источника считается известным.

В некоторых вариантах заданий используется дополнительное разбиение слоя на ячейки, в которых ищется значение проводимости. Например, если в четырехслойной среде второй слой разбивается на четыре ячейки (рис. 5) и неизвестными являются, например, значения проводимости в ячейках второго слоя и толщина третьего слоя, то вектор неизвестных будет выглядеть следующим образом:

$$u = (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{24}, h_3)^T.$$

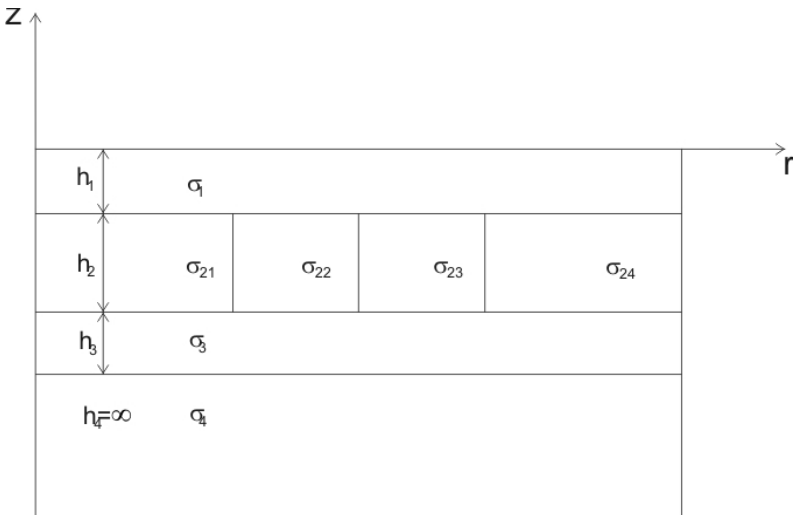


Рис. 5. Разбиение слоя на ячейки

В вариантах с двумя положениями источника измерения, полученные в приемниках с одинаковыми координатами, но соответствующие разным положениям приемников, считать различными.

Варианты заданий

1. В двухслойной среде найти проводимость слоев σ_1, σ_2 . Точечный источник, пять приемников, в двух приемниках зашумление в 1 %. В качестве регуляризирующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)^T$, где $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = 0.001$ См/м.

2. В трехслойной среде найти проводимость слоев $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Точечный источник, семь приемников, в четырех приемниках зашумление в 1 %. В качестве регуляризирующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)^T$, где $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = 0.01$ См/м, $\bar{\sigma}_3 = 0.001$ См/м.

3. В трехслойной среде найти проводимость слоев. Источник ГЭЛ, семь приемников, в четырех приемниках зашумление в 1 %. В качестве регуляризирующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)^T$, где $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_3 = 0.001$ См/м, $\bar{\sigma}_2 = 0.05$ См/м.

4. В четырехслойной среде найти проводимость $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ первых трех слоев. Источник ГЭЛ, семь приемников, во всех приемниках зашумление в 1 %. В качестве регуляризирующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)^T$, где $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = 0.01$ См/м.

5. В двухслойной среде найти проводимость слоев. Источник КЭД, три приемника. В качестве регуляризирующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)^T$, где $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = 0.001$ См/м. Исследовать влияние зашумления и выбора параметра регуляризации на решение обратной задачи при зашумлении данных в одном приемнике в диапазоне 1...10 %.

6. В трехслойной среде найти проводимость σ_2, σ_3 последних двух слоев. Источник ВЭЛ, семь приемников, в четырех приемниках зашумление в 1 %. В качестве регуляризирующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)^T$, где $\bar{\sigma}_2 = 0.1$ См/м, $\bar{\sigma}_3 = 0.001$ См/м.

7. В двухслойной среде разбить первый слой на три ячейки $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ по r . Найти проводимость $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ в ячейках. То-

точный источник. Приемников два или четыре. В качестве регуляризующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\sigma}_{13})^T$, где $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{13} = 0.01$ См/м. Во всех приемниках зашумление в 1 %.

8. В трехслойной среде разбить второй слой на три ячейки $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$ по r . Найти проводимость $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$ в ячейках. Точечный источник. Приемников два или три. В качестве регуляризующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_{21}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{23})^T$, где $\bar{\sigma}_{21} = \bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{23} = 1$ См/м. Во всех приемниках зашумление в 1 %.

9. В двухслойной среде разбить первый слой на три ячейки $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ по r . Найти проводимость $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ в ячейках. Источник КЭД. Приемников четыре. В качестве регуляризующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\sigma}_{13})^T$, где $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{13} = 0.1$ См/м. Во всех приемниках зашумление в 1 %.

10. В четырехслойной среде разбить второй слой на три ячейки $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$ по r . Найти проводимость $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$ в ячейках. Источник КЭД. Приемников пять. В качестве регуляризующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_{21}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{23})^T$, где $\bar{\sigma}_{11} = 0.01$ См/м, $\bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{23} = 0.05$ См/м. Во всех приемниках зашумление в 1 %.

11. В трехслойной среде разбить первый слой на четыре ячейки $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{14}$ по r . Найти проводимость $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{14}$ в ячейках. Точечный источник. Приемников три или четыре. В качестве регуляризующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\sigma}_{13}, \bar{\sigma}_{14})^T$, где $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{13} = \bar{\sigma}_{14} = 0.01$ См/м. Во всех приемниках зашумление в 1 %.

12. В четырехслойной среде разбить второй слой на четыре ячейки $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{24}$ по r . Найти проводимость $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{24}$ в ячейках. Источник ВЭЛ. Приемников пять. В качестве регуляризующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\sigma}_{13}, \bar{\sigma}_{14})^T$, где $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{13} = 0.1$ См/м, $\bar{\sigma}_{14} = 0.01$ См/м. Во всех приемниках зашумление в 1 %.

13. В четырехслойной среде разбить второй слой на три ячейки $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$ по r . Найти проводимость $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$ в ячейках.

Источник ВЭЛ. Приемников четыре. В качестве регуляризирующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_{21}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{23})^T$, где $\bar{\sigma}_{21} = \bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{23} = 0.1$ См/м. Во всех приемниках зашумление в 1 %.

14. В четырехслойной среде разбить первый слой на три ячейки $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ по r . Найти проводимость $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ в ячейках. Источник ВЭЛ. Приемников два или три. В качестве регуляризирующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\sigma}_{13})^T$, где $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{13} = 0.01$ См/м. Во всех приемниках зашумление в 1 %.

15. В двухслойной среде найти проводимость слоев σ_1, σ_2 . Два положения точечного источника, пять приемников, в двух приемниках зашумление в 1 %. При первом положении источника данные измерялись во всех пяти приемниках, при втором положении источника – только в трех из них. В качестве регуляризирующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)^T$, где $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = 0.001$ См/м.

16. В трехслойной среде найти проводимость слоев $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Два положения точечного источника, семь приемников, в четырех приемниках зашумление в 1 %. При первом положении источника данные измерялись во всех семи приемниках, при втором положении источника – только в трех из них. В качестве регуляризирующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)^T$, где $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = 0.01$ См/м, $\bar{\sigma}_3 = 0.001$ См/м.

17. В пятислойной среде найти проводимость слоев $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Два положения ГЭЛ, пять приемников, в трех приемниках зашумление в 1 %. При первом положении источника данные измерялись во всех пяти приемниках, при втором положении источника – только в трех из них. В качестве регуляризирующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)^T$, где $\bar{\sigma}_1 \neq \bar{\sigma}_2 \neq \bar{\sigma}_3$.

18. В четырехслойной среде найти проводимость слоев σ_1, σ_3 . Два положения ГЭЛ, семь приемников, в трех приемниках зашумление в 1 %. При первом положении источника данные измерялись во всех семи приемниках, при втором положении источника – только в двух из

них. В качестве регуляризирующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_3)^T$, где $\bar{\sigma}_1 = 1$ См/м, $\bar{\sigma}_3 = 0.01$ См/м.

19. В пятислойной среде найти проводимость слоев $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. Два положения ВЭЛ в одной скважине, три приемника, зашумление в 1 %. При первом положении источника данные измерялись во всех трех приемниках, при втором положении источника – только в двух из них. В качестве регуляризирующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_4)^T$, где $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = 0.01$ См/м, $\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_4 = 0.005$ См/м.

20. В пятислойной среде найти проводимость слоев $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4$. Два положения ВЭЛ в одной скважине, шесть приемников, в трех приемниках зашумление в 1 %. При первом положении источника данные измерялись во всех шести приемниках, при втором положении источника – только в трех из них. В качестве регуляризирующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_4)^T$, где $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_4 = 0.01$ См/м.

21. В трехслойной среде найти проводимость слоев σ_1, σ_2 . Два положения КЭД, четыре приемника, в двух приемниках зашумление в 1 %. При первом положении источника данные измерялись во всех четырех приемниках, при втором положении источника – только в трех из них. В качестве регуляризирующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)^T$, где $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = 0.01$ См/м.

22. В четырехслойной среде найти проводимость слоев σ_1, σ_2 . Два положения ГЭЛ, три приемника, в двух приемниках зашумление в 1 %. При первом положении источника данные измерялись во всех трех приемниках, при втором положении источника – только в двух из них. В качестве регуляризирующего вектора параметров взять вектор $\bar{u} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)^T$, где $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = 0.001$ См/м.

23. В трехслойной среде найти проводимость σ_1, σ_2 и толщину h_1, h_2 первых двух слоев. Точечный источник, четыре приемника, в двух приемниках зашумление в 1 %. Промасштабировать искомые параметры – искать значения их логарифмов.

24. В трехслойной среде найти проводимость σ_1, σ_2 первых двух слоев и толщину h_1 первого слоя. Точечный источник, семь приемников, в четырех приемниках зашумление в 1 %. Промасштабировать искомые параметры – искать значения их логарифмов.

25. В четырехслойной среде найти проводимость $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ первых трех слоев и толщину h_1 первого слоя. Точечный источник, четыре приемника, в двух приемниках зашумление в 1 %. Промасштабировать искомые параметры – искать значения их логарифмов.

Литература

Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э., Персова М.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач: учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 896 с. («Учебники НГТУ»).

**АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

Методические указания

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Компьютерная верстка *В.Н. Зенина*

Подписано в печать 07.02.2012. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 100 экз.
Уч.-изд. л. 1,62. Печ. л. 1,75. Изд. № 438/11. Заказ № Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20