КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОТКЛОНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА

Оглавление

1. Общие положения

1.1. Общие сведения о проверке статистических гипотез

При проверке гипотезы о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону проверяемая гипотеза имеет вид H_0: $F(x) \in \{F(x,\mu,\sigma),\ \mu \in (0,\infty),\ \sigma(0,\infty)\}$, где $F(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(x-\mu)}{2\sigma^2}} dx$ – функция распределения вероятностей нормального закона.

Для проверки этой гипотезы может использоваться ряд критериев, построенных специально для проверки принадлежности именно нормальному закону, а также применяться совокупность непараметрических критериев согласия и критериев согласия типа χ^2.

Тот факт, что проверяется сложная гипотеза, особенно существенен для применения непараметрических критериев согласия, так как не могут быть использованы классические результаты для этих критериев, имеющие место при проверке простых гипотез [131]. Свои особенности применения в этом случае имеют и критерии согласия типа χ^2.

С каждым из критериев, используемым для проверки гипотезы H_0, связана некоторая статистика S, измеряющая в соответствии с некоторой мерой расстояние между теоретическим законом распределения вероятностей и эмпирическим законом, определяемым выборкой. В силу случайности извлекаемых выборок случайными оказываются и значения статистики S, вычисляемые в соответствии с этими выборками. При справедливости проверяемой гипотезы H_0 статистика S подчиняется некоторому распределению $G(S|H_0)$.

Схема проверки гипотезы заключается в следующем. Область определения статистики разбивается на два подмножества, одно из которых представляет собой критическую область, и попадание в которую при справедливости H_0 маловероятно. При попадании вычисленного по выборке значения S^* статистики S в критическую область проверяемая гипотеза H_0 отклоняется (отвергается). В противном случае – нет оснований для отклонения гипотезы H_0.

Заметим, что неотклонение гипотезы H_0 в процессе проверки не означает, что она справедлива. Истинный закон распределения реальных случайных величин остается всегда неизвестным. Результат проверки свидетельствует лишь о том, что этот закон, возможно, не очень сильно отличается, в данном случае, от нормального.

С другой стороны, может быть отклонена и справедливая гипотеза H_0 и эти самым совершена ошибка 1-го рода. При проверке гипотез, как правило, задают вероятность ошибки 1-го рода α (уровень значимости), допуская тем самым возможность отклонения H_0 и возможность такой ошибки.

При построении критериев стремятся к использованию одномерных статистик, что упрощает построение критической области. При этом критерии могут быть правосторонними, левосторонними и двусторонними, что определяет построение критической области.

Все непараметрические критерии согласия и критерии типа χ^2 – правосторонние, и проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики. Среди специальных критериев проверки нормальности большинство правосторонних и двусторонних, но есть и ряд левосторонних критериев.

В случае правостороннего критерия граница критической области (критическое значение) $S_{1-\alpha}$, определяется уравнением

$$\alpha = \int_{S_{1-\alpha}}^{\infty} g(s|H_0)ds = 1 - G(S_{1-\alpha}|H_0), \tag{1.1}$$

где $g(s|H_0)$ − условная плотность распределения статистики при справедливости H_0.

Обычно полученное значение статистики S^* сравнивают с критическим значением $S_{1-\alpha}$ при заданном уровне значимости α. Проверяемую гипотезу H_0 отклоняют, если $S^* > S_{1-\alpha}$ (рис. 1.1).

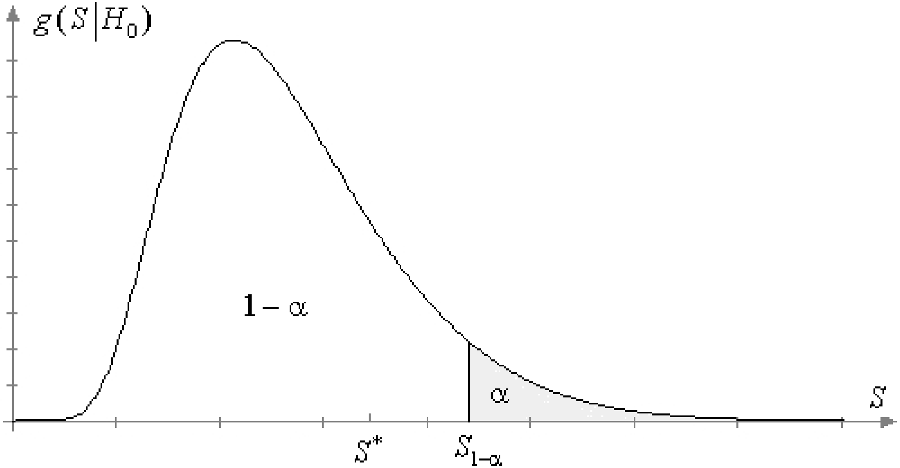


Рис. 1.1. Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и критическое значение для правостороннего критерия

Больше информации о степени согласия можно почерпнуть из «достигнутого уровня значимости»:

$$p_{value} = P\{S > S^*\} = \int_{S^*}^{\infty} g(s|H_0)\,ds = 1 - G(S^*|H_0)\,. \qquad (1.2)$$

Именно эта вероятность позволяет судить о том, насколько хорошо выборка согласуется с теоретическим распределением (рис. 1.2). Гипотезу о согласии не отвергают, если $P\{S > S^*\} > \alpha$.

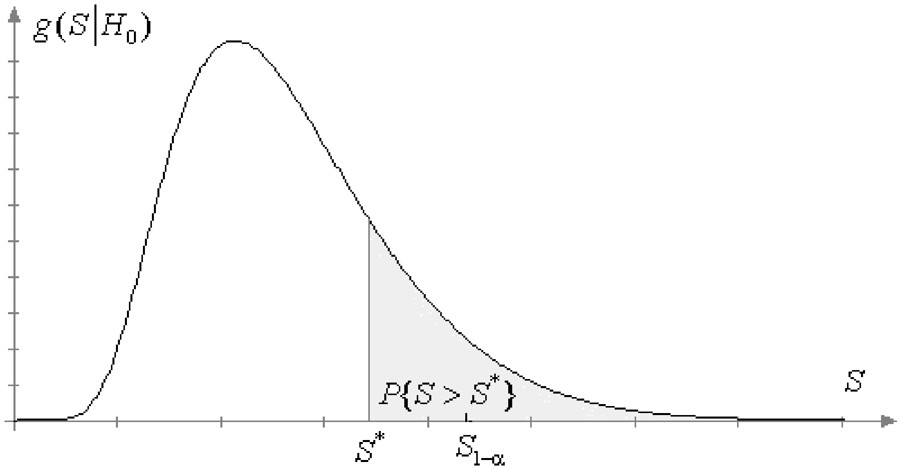


Рис. 1.2. Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и достигнутый уровень значимости

В случае левостороннего критерия граница критической области S_α , определяется уравнением

$$\alpha = \int_{-\infty}^{S_\alpha} g(s|H_0)ds = G(S_\alpha|H_0)\,. \qquad (1.3)$$

Проверяемую гипотезу H_0 отклоняют, если $S^* < S_\alpha$ (рис. 1.3),

$$p_{value} = P\{S < S^*\} = \int_{-\infty}^{S^*} g(s|H_0)\,ds = G(S^*|H_0)\,. \qquad (1.4)$$

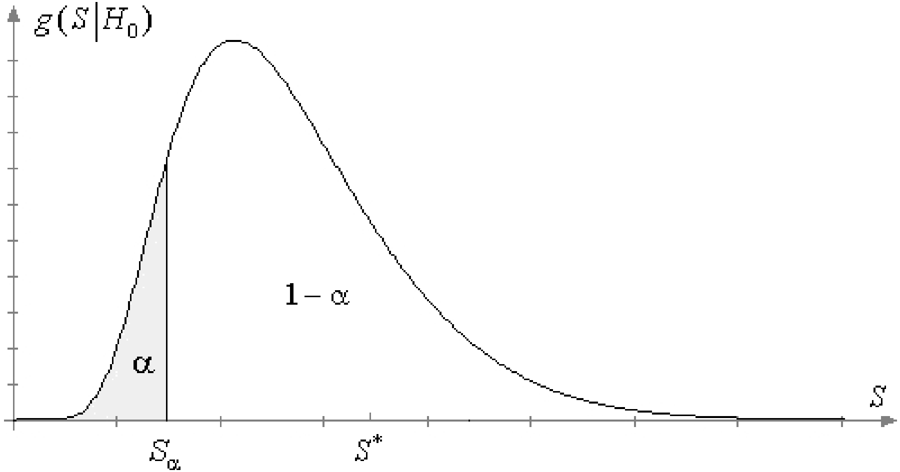


Рис. 1.3. Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и критическое значение для левостороннего критерия

В случае двустороннего критерия критическая область состоит из двух частей. И проверяемая гипотеза H_0 отклоняется, если $S^* < S_{\alpha/2}$ или $S^* > S_{1-\alpha/2}$. А достигнутый уровень значимости (**p-**value) в этом случае определяется соотношением

$$p_{value} = 2\min\left\{G(S^* | H_0), 1 - G(S^* | H_0)\right\}. \tag{1.5}$$

С результатами проверки гипотез связывают ошибки двух видов: **ошибка первого рода** состоит в том, что отклоняют гипотезу H_0, когда она верна; **ошибка второго рода** состоит в том, что принимают (не отклоняют) гипотезу H_0, в то время как справедлива конкурирующая гипотеза H_1. Уровень значимости α задает вероятность ошибки первого рода.

Если гипотеза H_1 задана и имеет, например, вид $H_1: \quad F(x) = F_1(x, \theta)$, то задание величины α для используемого критерия проверки гипотез определяет и вероятность ошибки второго рода β. Вероятность ошибки второго рода β для правостороннего критерия определяется выражением

$$\beta = \int_{-\infty}^{S_{1-\alpha}} g(s | H_1) ds, \tag{1.6}$$

для левостороннего – выражением

$$\beta = \int_{S_\alpha}^{\infty} g(s | H_1) ds, \tag{1.7}$$

а для двустороннего – соотношением

$$\beta = \int_{S_{\alpha/2}}^{S_{1-\alpha/2}} g(s | H_1) ds. \tag{1.8}$$

Для конкретной альтернативы H_0 и H_1 задание вероятности ошибки 1-го рода определяет и вероятность ошибки 2-го рода. На рис. 1.4 $g(s \mid H_0)$ отображает плотность распределения статистики S при справедливости гипотезы H_0, а $g(s \mid H_1)$ – плотность распределения при справедливости H_1.

Мощность критерия представляет собой величину $1-\beta$. Очевидно, что чем выше мощность используемого критерия при заданном значении α, тем лучше он различает гипотезы H_0 и H_1.

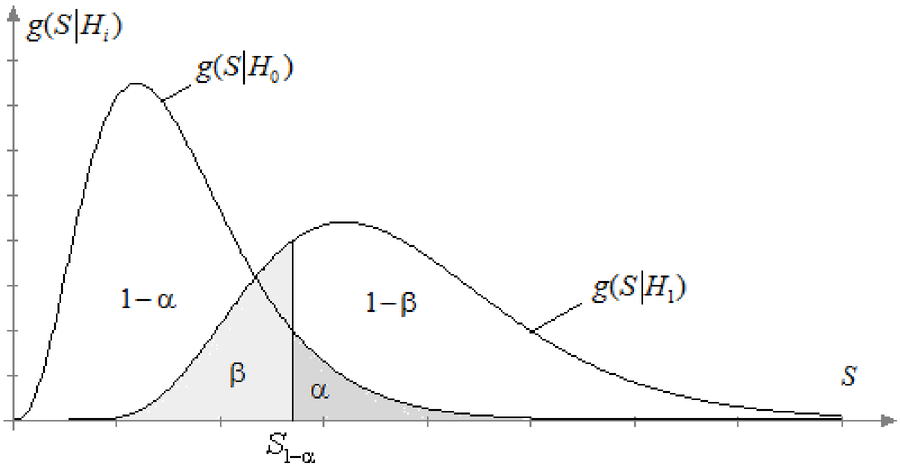


Рис. 1.4. Плотности распределения статистик при справедливости соответственно гипотез H_0 и H_1 в случае правостороннего критерия

Аналогичным образом можно проиллюстрировать вероятности ошибок второго рода и мощности для левостороннего и двустороннего критериев.

1.2. Конкурирующие гипотезы

В данном руководстве при исследовании распределений статистик проверяемой гипотезе H_0 всегда соответствует принадлежность наблюдаемой выборки нормальному закону распределения

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\theta_0)^2}{2\theta_1^2}\right\}. \tag{1.9}$$

В качестве конкурирующих гипотез при исследовании мощности критериев рассмотрена принадлежность анализируемой выборки следующим законам: конкурирующая гипотеза H_1 соответствует обобщённому нормальному закону (семейству распределений) с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1\Gamma(1/\theta_2)} \exp\left\{-\left(\frac{|x-\theta_0|}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right\} \tag{1.10}$$

и параметром формы $\theta_2 = 4$; гипотеза H_2 – распределению Лапласа с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2\theta_1} \exp\left\{-|x-\theta_0| / \theta_1\right\}, \tag{1.11}$$

гипотеза H_3 – логистическому распределению с плотностью

$$f(x) = \frac{\pi}{\theta_1\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1\sqrt{3}}\right\} \Bigg/ \left[1 + \exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1\sqrt{3}}\right\}\right]^2 , \tag{1.12}$$

очень близкому к нормальному. При этом, если это не влияло на результаты исследований, выборки, как правило, моделировались с параметром масштаба $\theta_1 = 1$ и параметром сдвига $\theta_0 = 0$.

На рис. 1.5 показаны функции плотности распределений, соответствующих H_1, H_2, H_3, при значениях параметров масштаба, при которых они наиболее близки стандартному нормальному закону.

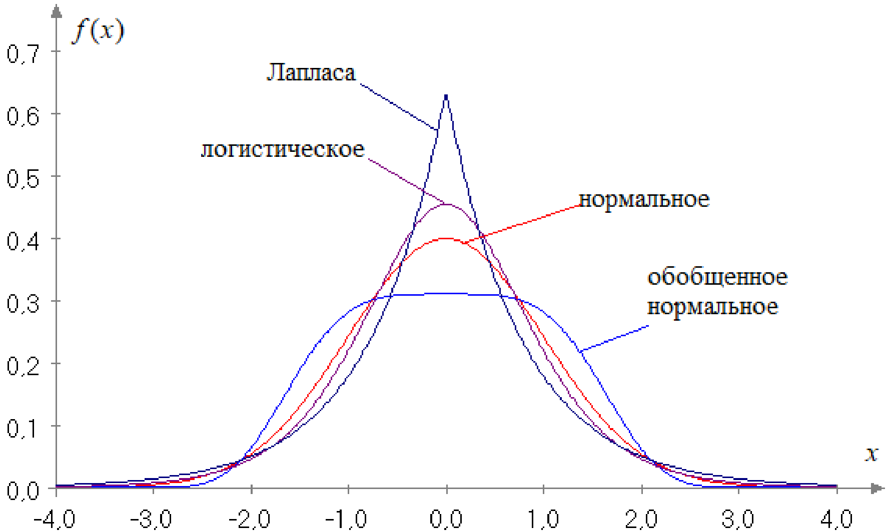


Рис. 1.5. Плотности законов распределения, соответствующие рассматриваемым гипотезам H_0, H_1, H_2, H_3

Конкурирующая гипотеза H_1, которой соответствует обобщённый нормальный закон с параметром формы $\theta_2 = 4$, представляет собой “лакмусовую бумагу”, на которой проявились скрытые недостатки отдельных критериев.

В качестве асимметричных альтернатив будут рассматриваться гипотезы H_4 и H_5,соответствующая распределениям минимального и максимального значения

$$f(x)=\frac{1}{\theta_1}\exp\left\{\frac{x-\theta_0}{\theta_1}-\exp\left(\frac{x-\theta_0}{\theta_1}\right)\right\}, \tag{1.13}$$

где $x\in(-\infty,\infty)$, с параметрами $\theta_0=0.38$, $\theta_1=0.8$, и

$$f(x)=\frac{1}{\theta_1}\exp\left\{-\frac{x-\theta_0}{\theta_1}-\exp\left(-\frac{x-\theta_0}{\theta_1}\right)\right\}, \tag{1.14}$$

и параметрами $\theta_0=-0.38$, $\theta_1=0.8$ (рис. 1.6).

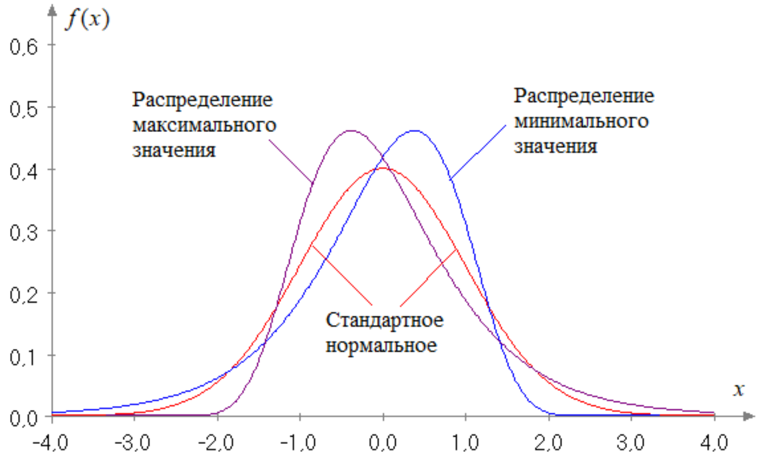


Рис. 1.6. Плотности распределений, соответствующие гипотезам H_0, H_4, H_5

2. Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона

2.1. Критерий проверки на симметричность

Данный критерий [21, 7] предназначен для проверки гипотез о симметричности наблюдаемого закона (против наличия асимметрии) при объемах выборки $8 \le n \le 5000$. Статистика критерия

$$\sqrt{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3}, \qquad (2.1)$$

при вычислении которой оценки используемых центральных моментов $\left(\text{в том числе } \mu_2 = E\left[\left(X-\mu\right)^2\right] = \sigma^2\right)$ вычисляются по выборке $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ в соответствии с соотношением

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^j, \qquad (2.2)$$

где

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Критерий двусторонний: проверяется гипотеза H_0: $\sqrt{\beta_1} = 0$ при конкурирующей гипотезе о наличии асимметрии $\sqrt{\beta_1} > 0$ (положительная асимметрия) или $\sqrt{\beta_1} < 0$ (отрицательная асимметрия).

В стандарте [103] и первоисточниках [21, 7] приводятся только таблицы процентных точек (табл. А.1, приложение **А**). Ничего не говорится о виде распределения.

Распределение статистики (2.1) в случае нормального закона является симметричным и зависит от числа наблюдений (рис. 2.1). В [100] говорится, что распределение статистики (2.1) очень быстро приближается к нормальному с нулевым математическим ожиданием и асимптотической дисперсией $6(n-2)/[(n+1)(n+3)]$.

Критерий, использующий статистику (2.1), является критерием проверки только на симметричность.

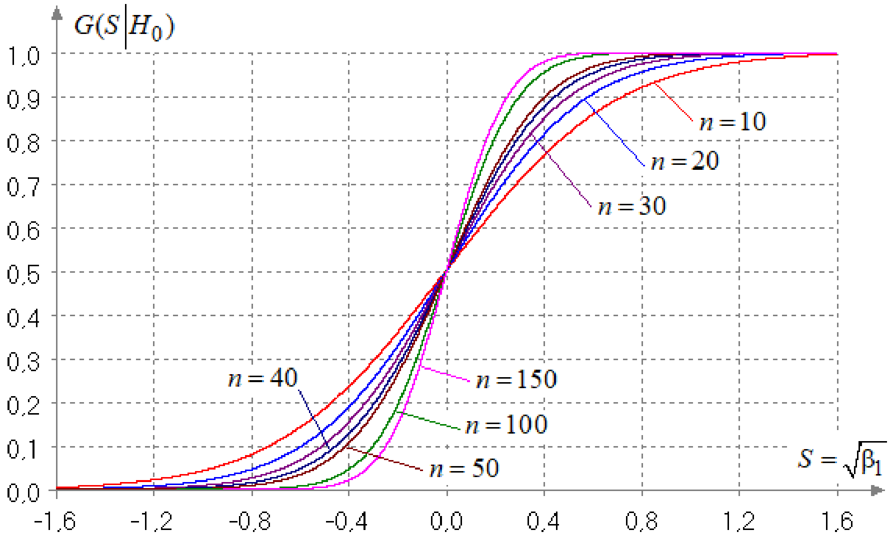


Рис. 2.1. Распределения статистики (2.1) в зависимости от объема выборки при *n* = 10, 20, 30, 40, 50, 100, 150 в случае нормального закона

Его использование полезно при проверке отклонений от нормального закона, но неотклонение гипотезы о симметричности на основании предположений о нормальности закона не может служить подтверждением нормальности (условие необходимое, но недостаточное), так как распределение статистики (2.1) зависит от вида наблюдаемого закона (рис. 2.2).

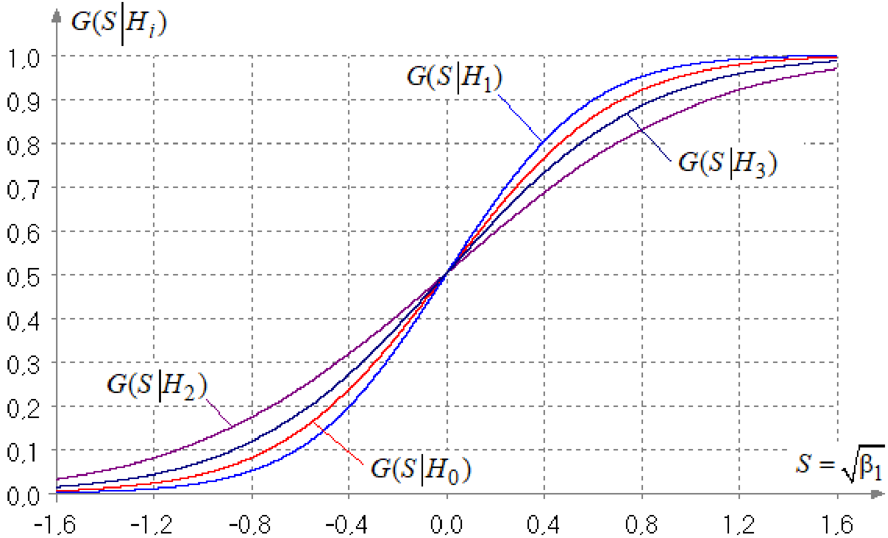


Рис. 2.2. Распределения статистики критерия проверки на симметричность в зависимости от гипотез H_i при объеме выборок $n = 10$

2.2. Критерий проверки на эксцесс

В стандарте [103] предусмотрено использование критерия проверки на эксцесс [7, 22] при объемах выборок $8 \le n \le 5000$. Статистика критерия проверки на значение эксцесса имеет вид

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4}. \tag{2.3}$$

Критерий двусторонний: проверяется гипотеза вида H_0: $\beta_2 = 3$ при конкурирующих гипотезах $\beta_2 > 3$ (больший эксцесс) или $\beta_2 < 3$ (меньший эксцесс).

Распределение статистики зависит от объема рассматриваемых выборок.

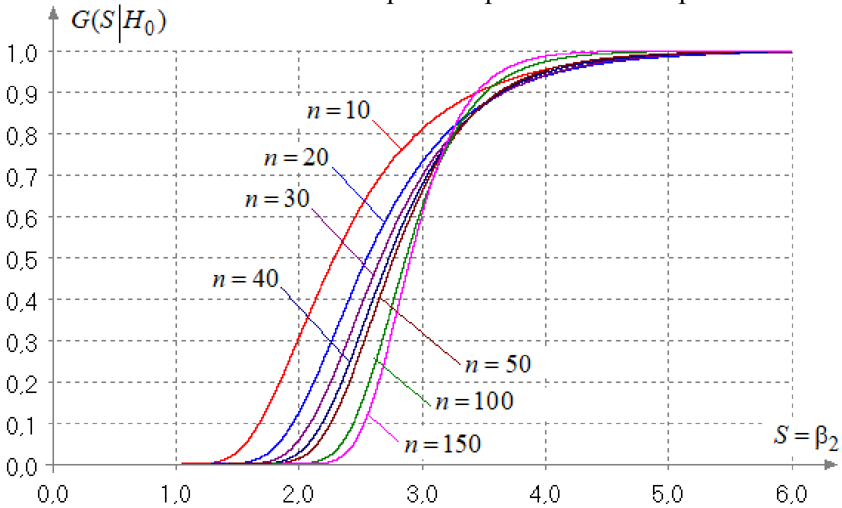


Рис. 2.3. Распределения статистики при n = 10, 20, 30, 40, 50, 100, 150

Распределения статистики (2.3) были исследованы при наблюдаемых законах, соответствующих рассмотренным выше гипотезам H_i. Результаты исследований позволяют судить о мощности критерия проверки на эксцесс относительно различных конкурирующих гипотез.

Естественно, распределения статистики (2.3) зависят от наблюдаемого закона. На рис. 2.4 и 2.5 показано изменение распределения статистики (2.3) в зависимости от наблюдаемого закона при справедливости рассматриваемых конкурирующих гипотез H_i и объемах выборок n = 10 и n = 50.

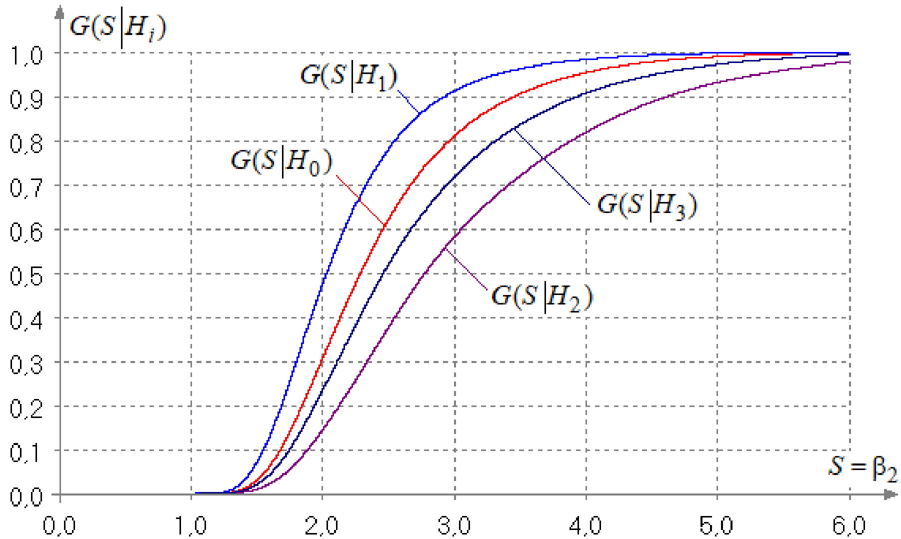


Рис. 2.4. Распределения статистики (2.3) в зависимости от справедливости различных H_i, при n = 10

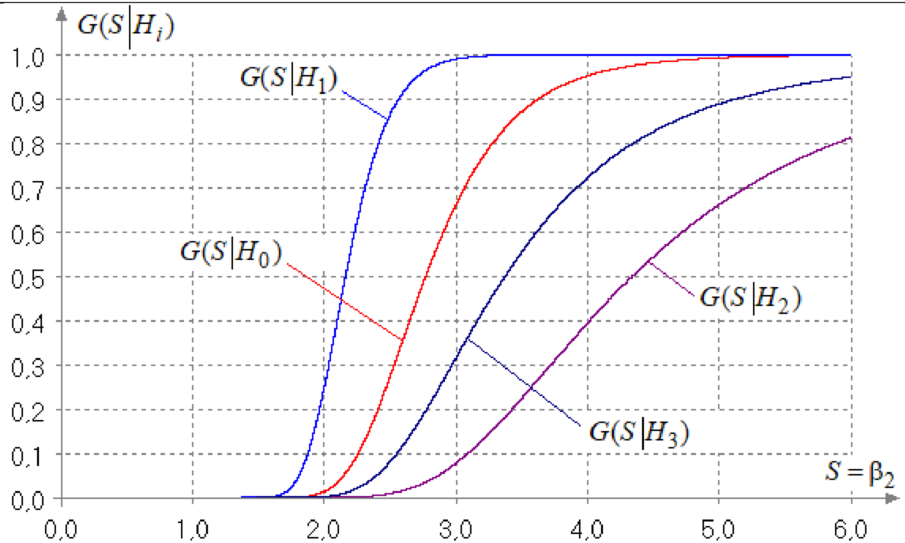


Рис. 2.5. Распределения статистики (2.3) в зависимости от справедливости различных H_i, при n = 50

Вместе с критерием симметричности данный критерий позволяет судить о степени отклонения наблюдаемой выборки от нормального закона. Недостатком критерия является сильная зависимость распределения статистики (2.3) от объема выборок.

Совместный критерий проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса [13] в стандарте рассматривается при объемах выборок $20 \le n \le 1000$ (там он назван многонаправленным критерием). Проверяемая гипотеза имеет вид $H_0 : \sqrt{\beta_1} = 0$ и $\beta_2 = 3$ при конкурирующих гипотезах $\sqrt{\beta_1} \ne 0$ и (или) $\beta_2 \ne 3$. В стандарте приведены кривые, определяющие критическую область при уровне значимости $\alpha = 0.05$ и $\alpha = 0.01$.

При подготовке данного руководства такой совместный критерий не исследовался. Результаты исследования различных вариантов критериев, построенных на основе (совместного) использования статистик (2.1) и (2.3), и не вошедших в стандарт, рассмотрены ниже в разделах 2.6 и 2.8.

2.3. Критерий Шапиро–Уилка (Shapiro–Wilk Test)

Критерий Шапиро–Уилка [76, 77], базируется на анализе линейной комбинации разностей порядковых статистик. В стандарте [103] применение критерия предусмотрено при объемах выборок $8 \le n \le 50$. Сложность применения при больших объемах выборок затруднена из-за отсутствия в документе соответствующих коэффициентов. При объемах выборок $51 \le n \le 99$ коэффициенты и таблицы процентных точек можно найти в [77].

При построении статистики для вариационного ряда $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ \le \ldots \le X_{(n)}$, полученного по наблюдаемой выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$, вычисляют величину

$$S = \sum_k a_k \left[X_{(n+1-k)} - X_{(k)} \right],$$

где индекс k изменяется от 1 до $n/2$ или от 1 до $(n-1)/2$ при четном и нечетном n соответственно. Коэффициенты a_k приведены в стандарте и первоисточниках [76, 78] (табл. А.3, приложение **А**). Статистика критерия имеет вид

$$W = S^2 \Big/ \sum_{i-1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2 . \qquad (2.4)$$

Критерий **левосторонний**: гипотеза о нормальности отвергается при малых значениях статистики W. В стандарте и литературе отсутствует информация об аналитическом виде распределения статистики, приводятся лишь процентные точки (табл. А.4, приложение **А**).

На рис. 2.6 показано изменение распределения статистики критерия Шапиро–Уилка в зависимости от объема выборки, принадлежащей нормальному закону.

Распределения статистики (2.4) исследовались при различных наблюдаемых законах. Исследовалась также мощность критерия.

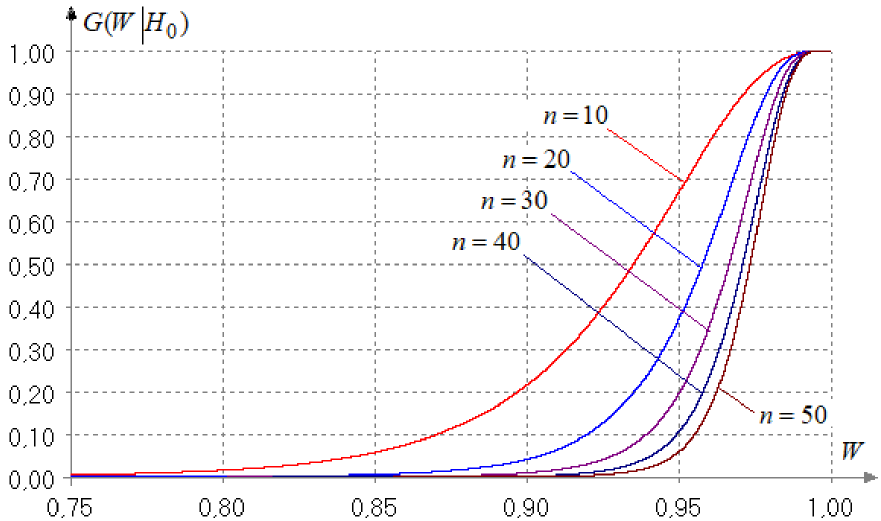


Рис. 2.6. Распределения статистики критерия Шапиро–Уилка в зависимости от объема выборки при n = 10, 20, 30, 40, 50

На рис. 2.7 приведены условные распределения $G(S|H_i)$ статистики (2.4) при справедливости гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 при объеме выборок $n = 10$.

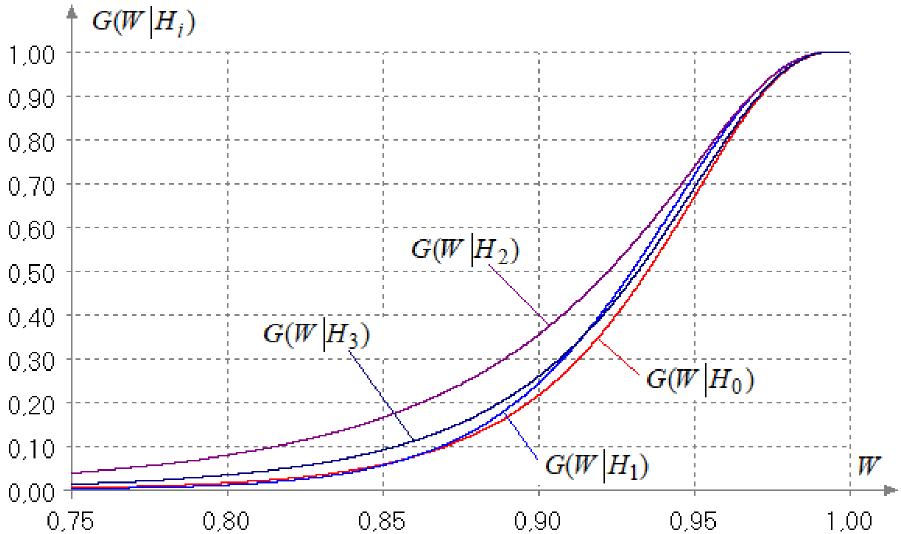


Рис. 2.7. Условные распределения $G(W|H_i)$ статистики (2.4) при $n = 10$

Результаты исследований показали, что при малых объемах выборок (10…20 наблюдений) критерий Шапиро–Уилка *не способен различать* гипотезы H_0 и H_1. Еще в меньшей степени критерий замечает различие между нормальным законом и распределением семейства (1.10) с параметром формы $\theta_2 = 3$.

Более того, по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 критерий оказывается смещённым. Но с ростом числа наблюдений мощность критерия по распознаванию гипотез H_0 и H_1 растет.

На рис. 2.8 для сравнения показаны условные распределения статистики (2.4) при n = 50.

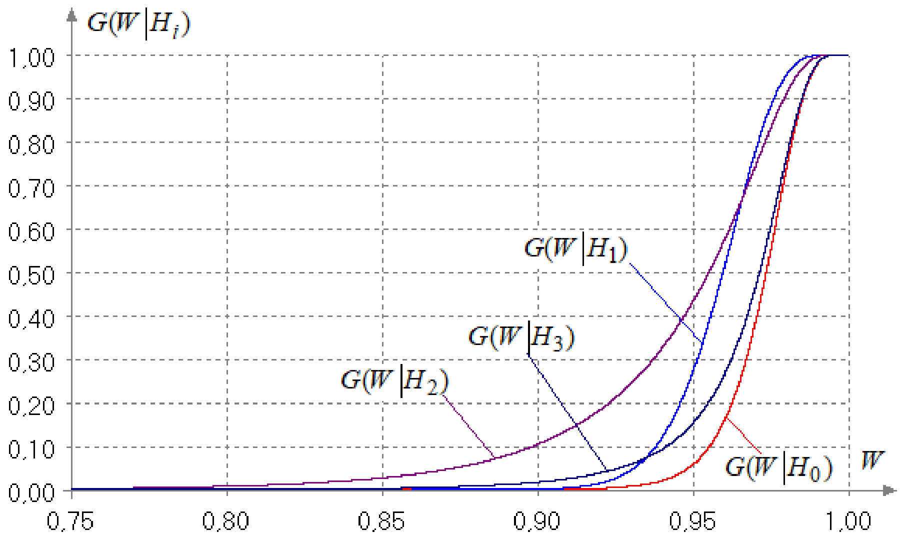


Рис. 2.8. Условные распределения $G(W|H_i)$ статистики (2.4) при n = 50

2.4. Критерий Эппса–Пулли (Epps–Pulley Test)

Этот критерий [6, 5, 32, 46] базируется на сравнении эмпирической и теоретической характеристических функций. В стандарте предусмотрено его применение при $8 \le n \le 200$. Процентные точки в таком диапазоне даны с пропусками (табл. А.5, приложение **А**).

Статистика критерия, вычисляемая по наблюдаемой выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$, имеет вид

$$T_{\mathrm{EP}} = 1 + \frac{n}{\sqrt{3}} + \frac{2}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\exp\left\{-\frac{\left(X_j - X_k\right)^2}{2\hat{\mu}_2}\right\} - \sqrt{2}\sum_{j=1}^{n}\exp\left\{-\frac{\left(X_j - \bar{X}\right)^2}{4\hat{\mu}_2}\right\}, \qquad (2.5)$$

где $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$. Выборка может быть не упорядочена, порядок наблюдений произволен, но он должен быть неизменным в течение всех проводимых вычислений. Гипотезу о нормальности отвергают при больших значениях статистики.

С ростом n наблюдается быстрая сходимость распределения статистики к некоторому предельному. На рис. 2.9 показаны распределения $G(T_{EP} \mid H_0)$ статистики критерия Эппса–Пулли при $n = 10$ и при $n = 1000$. При $n = 50$ распределение $G(T_{EP} \mid H_0)$ практически совпадает с асимптотическим (при $n = 1000$).

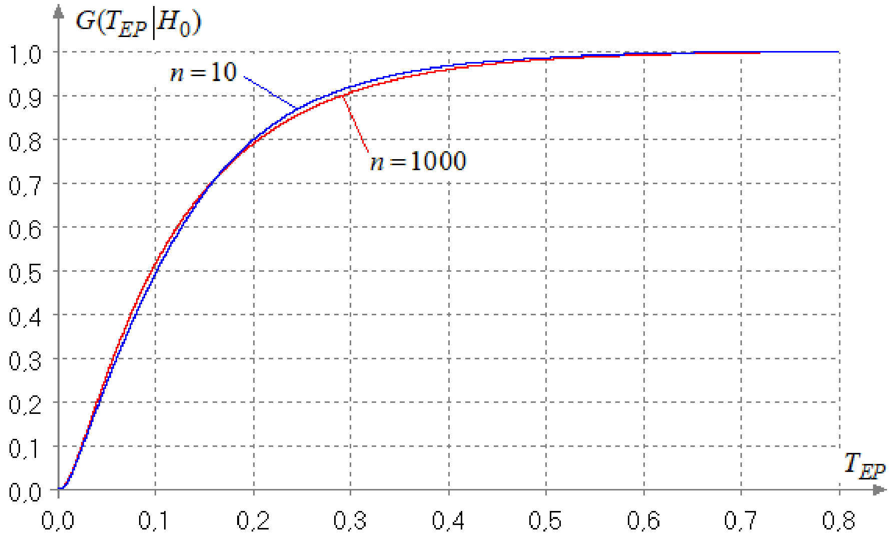


Рис. 2.9. Графики распределений статистики критерия Эппса–Пулли в зависимости от объема выборки при n = 10, 20, 30, 40, 50, 100, 150

Процентные точки распределений статистики (2.5) при различных объемах выборок отличаются существенно, но вероятности вида $P\left\{T_{\text{EP}} > T_{\text{EP}}^{*}\right\}$, вычисленные по распределениям статистики (2.5) при различных n, где T_{EP}^{*} – значение статистики, полученное по выборке, будут достаточно близкими.

В частности, распределения статистики критерия Эппса–Пулли при различных объемах выборок n достаточно хорошо аппроксимируются бета-распределениями III рода с функцией плотности

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{B(\theta_0, \theta_1)} \frac{t^{\theta_0 - 1}(1-t)^{\theta_1 - 1}}{\left[1 + (\theta_2 - 1)t\right]^{\theta_0 + \theta_1}},$$

где $t = (x - \theta_4)/\theta_3 \in [0,1]$. Если пренебречь зависимостью статистики (2.5) от объема выборки n, то при $15 < n < 50$ для приближенного вычисления достигаемого уровня значимости $P\left\{T_{EP} > T_{EP}^*\right\}$ можно использовать бета-распределение III рода с параметрами θ_0 = 1.8645, θ_1 = 2.5155, θ_2 = 5.8256, θ_3 = 0.9216, θ_4 = 0.0008. Соответствующая функция распределения представляет собой некоторую среднюю для «пучка» распределений, приведенного на рис. 2.9.

При $n \geq 50$ для вычисления достигаемого уровня значимости $P\left\{T_{EP} > T_{EP}^*\right\}$ можно использовать предельное распределение, приближением которого является бета-распределение III рода со значениями параметров θ_0 = 1.7669, θ_1 = 2.1668, θ_2 = 6.7594, θ_3 = 0.91, θ_4 = 0.0016.

Исследования распределений статистики критерия Эппса–Пулли при справедливости конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3 и оценка мощности критерия по отношению к данным гипотезам показали, что критерий имеет тот же недостаток, что и критерий Шапиро–Уилка: он оказывается смещённым относительно тех же конкурирующих гипотез.

Подтверждением этому является картина, показанная на рис. 2.10, где представлены условные функции распределения $G(S|H_i)$ статистики (2.5) при справедливости гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 и объеме выборок n = 10.

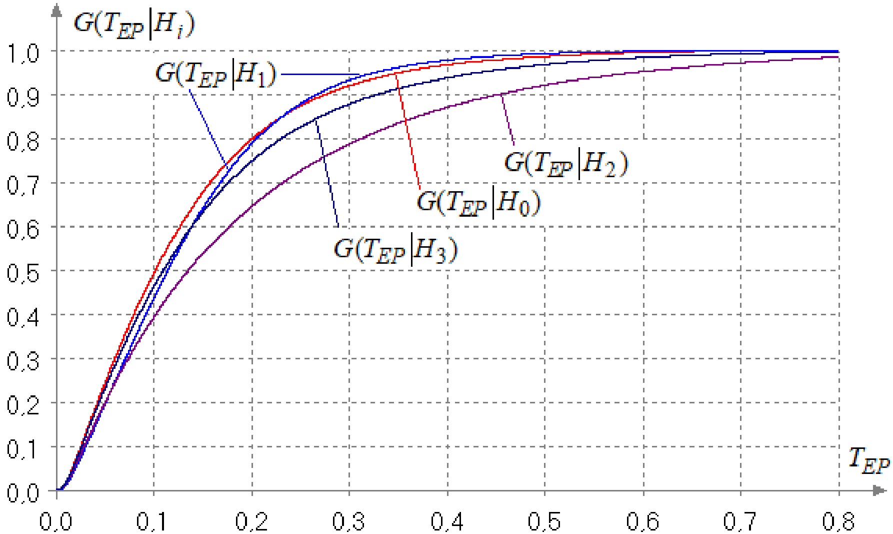


Рис. 2.10. Условные распределения $G(T_{EP}|H_i)$ статистики (2.5) при n = 10

При n = 10 мощность критерия Эппса–Пулли по отношению к гипотезе H_1 меньше (!) уровня значимости (при $\alpha \le 0.1$). Это означает, что при верной гипотезе H_1 при проверке нормальности предпочтение всегда будет отдаваться гипотезе H_0.

При n = 20 распределения $G_{20}(S|H_0)$ и $G_{20}(S|H_1)$ в области значений функций распределения, больших 0.95, практически неразличимы, а при n = 50 критерий уже способен различать гипотезы H_0 и H_1 (рис. 2.11).

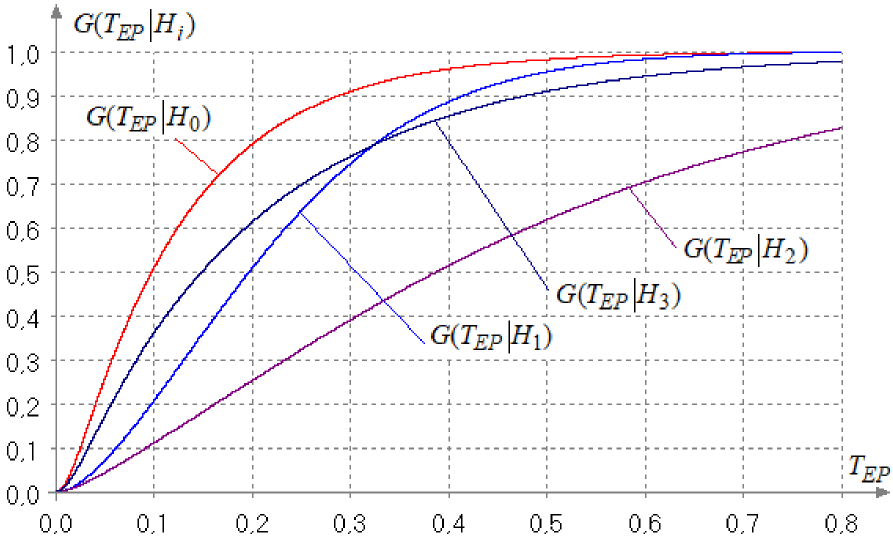


Рис. 2.11. Условные распределения $G(T_{EP}|H_i)$ статистики (2.5) при n = 50

2.5. Модифицированный критерий Шапиро–Уилка

Необходимость проверки отклонения от нормального распределения с использованием нескольких независимых выборок возникает достаточно часто. Это бывает связано с тем, что каждая отдельная выборка оказывается слишком мала для обнаружения значимого отклонения от нормального распределения. В такой ситуации при выборках одинакового объема $n > 8$ стандарт [103] рекомендует применять модифицированный критерий Шапиро–Уилка, который позволяет принять решение по совокупности анализируемых выборок.

При проверке для каждой из h последовательно анализируемых выборок объемом n, отобранных из одной генеральной совокупности, подсчитывается значение W_j $(j = \overline{1,h})$ в соответствии с выражением

$$W_j = S_j^2 \bigg/ \sum_{i-1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2 .$$

Значения $S_j = \sum_k a_k \left[X_{(n+1-k)} - X_{(k)} \right]$ по соответствующей выборке вычисляются как и в критерии Шапиро–Уилка, где индекс k изменяется от 1 до $n/2$ или от 1 до $(n-1)/2$ при четном и нечетном n соответственно. Коэффициенты a_k приведены в стандарте и первоисточниках [21, 7] (табл. А.3, приложение **А**).

Для совместного критерия вычисляют значения C_j по формуле $C_j = \gamma(n) + \delta(n)\nu_j$, где $\nu_j = \ln\left\{ \dfrac{W_j - E(n)}{1 - W_j} \right\}$. Коэффициенты $\gamma(n)$, $\delta(n)$ и $E(n)$ для преобразования W_j и C_j табулированы [103, 9] и приведены в данном руководстве (табл. А.6, приложение **А**).

Утверждается, что если основное распределение вероятностей нормальное, то величины C_j приближенно подчиняются нормальному закону, а статистика модифицированного критерия

$$S_M = \sqrt{h} \cdot \bar{C}\ , \tag{2.6}$$

где $\bar{C} = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{h} C_j$, подчиняется стандартному нормальному закону.

К сожалению, наши исследования показали, что распределение статистики (2.6) лишь очень приближенно подчиняется стандартному нормальному закону и зависит от n и h.

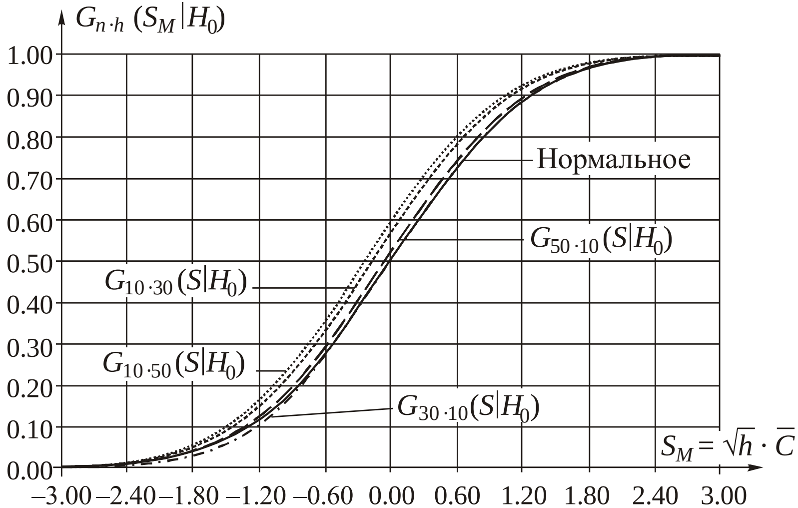


Рис. 2.12. Условные распределения $G_{n \cdot h}(S_M | H_0)$ статистики (2.6) при различных комбинациях n и h

Совокупность недостатков критерия *не позволяет рекомендовать* его для применения.

2.6. Критерий Харке–Бера проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса (Jarque–Bera Test)

В [13] и [29], где приводятся полезные сведения о ряде критериев проверки отклонения от нормального закона, рассмотрена одномерная статистика на базе статистик (2.1) и (2.3)

$$E_p^a = \frac{n\left(\sqrt{\hat{\beta}_1}\right)^2}{6} + \frac{n\left(\hat{\beta}_2 - 3\right)^2}{24} = \frac{n\left(\dfrac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3}\right)^2}{6} + \frac{n\left(\dfrac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4} - 3\right)^2}{24}, \tag{2.7}$$

которая асимптотически подчиняется χ_2^2-распределению [47].

Критерий **правосторонний**.

Наши исследования распределений статистики (2.7) при различных объемах выборок показали, что они настолько плохо сходятся к асимптотическому χ_2^2-распределению, что последним обоснованно можно пользоваться лишь при объемах выборок порядка двух тысяч наблюдений.

Рис. 2.14 иллюстрирует сходимость распределения статистики (2.7) к асимптотическому χ_2^2-распределению в зависимости от объема выборок n в случае нормального закона (при справедливости H_0).

На рис. 2.15 показано, как меняются распределения статистики вследствие принадлежности выборок различным законам (при справедливости различных гипотез) в случае $n = 10$.

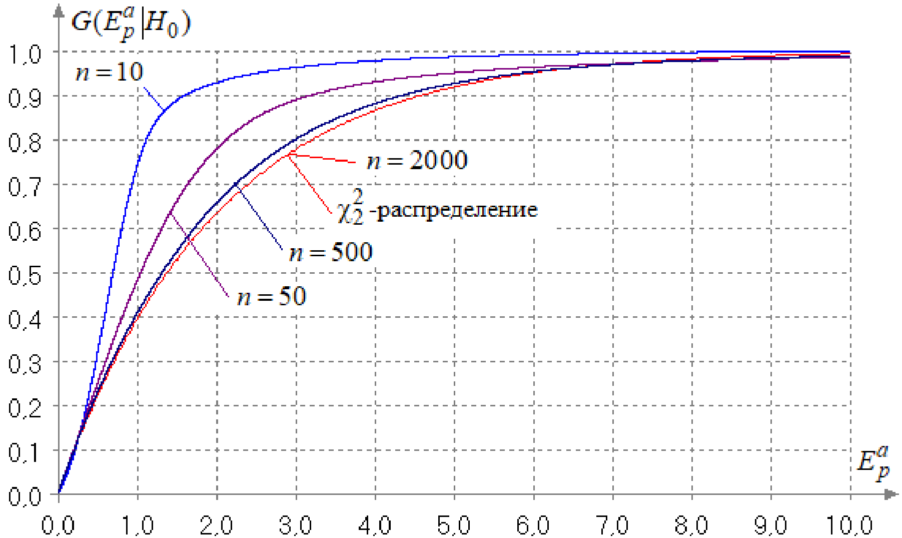


Рис. 2.14. Сходимость распределения статистики (2.7) к асимптотическому χ_2^2 -распределение

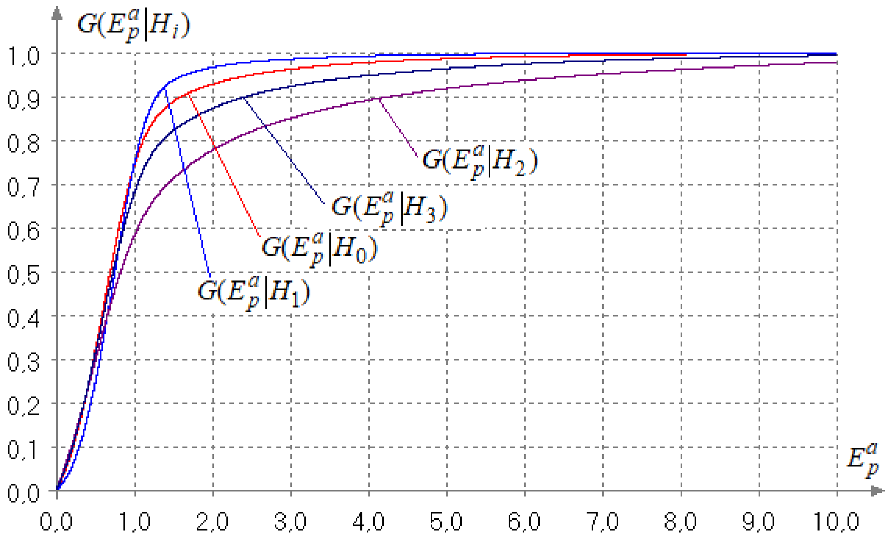


Рис. 2.15. Распределения статистики (2.7) в зависимости от вида H_i, при n = 10

Процентные точки для распределений $G\left(E_p^a|H_0\right)$ для ряда объёмов выборок n, построенные при использовании статистического моделирования, представлены в таблице 2.7.

Таблица 2.7

Процентные точки для критерия со статистики $\mathbf{E}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{a}}$

n	$p=1-\alpha$				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
10	1.280	1.618	2.519	3.750	5.706
20	1.826	2.357	3.805	5.897	9.727
30	2.143	2.750	4.435	6.866	11.357
40	2.354	3.004	4.764	7.299	12.054
50	2.516	3.193	4.987	7.582	12.370
60	2.635	3.324	5.130	7.747	12.531
80	2.808	3.522	5.312	7.860	12.594
100	2.936	3.670	5.425	7.944	12.527
150	3.132	3.897	5.594	7.981	12.218
200	3.264	4.039	5.688	7.932	11.871
300	3.402	4.193	5.758	7.807	11.346
∞	3.794	4.605	5.991	7.378	9.210

2.7. Модификация Гелы–Гаствирта критерия проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса (Gel–Gastwirth Test)

Статистика критерия, предложенного в [41], немногим отличается от статистики в критерии Харке–Бера и имеет вид:

$$R_{JB} = \frac{n}{6}\left(\frac{\hat{\mu}_3}{J_n^3}\right)^2 + \frac{n}{64}\left(\frac{\hat{\mu}_4}{J_n^4} - 3\right)^2, \tag{2.8}$$

где $J_n = \frac{\sqrt{\pi/2}}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - M\right|$ – среднее абсолютное отклонение от оценки медианы M [40].

В [41] также говорится об асимптотическом χ_2^2-распределении статистики.

Однако распределение $G(R_{JB}|H_0)$ сходится к χ_2^2-распределению ещё хуже, чем распределение статистики Харке–Бера: отклонением $G(R_{JB}|H_0)$ от χ_2^2-распределения не следует пренебрегать и при $n = 2000$.

Поэтому для принятия решения о результатах проверки необходима либо таблица критических значений, либо программная поддержка, позволяющая моделировать $G(R_{JB}|H_0)$ и оценивать достигнутый уровень значимости p_{value}.

Процентные точки для распределений $G\left(R_{JB}|H_0\right)$ при некоторых n представлены в таблице 2.11.

Таблица 2.11

Процентные точки для критерия со статистики $\mathbf{E_{JB}}$

n	$p = 1 - \alpha$				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
10	1.876	3.094	6.530	12.422	25.600
20	2.382	3.724	7.229	12.697	24.341
30	2.578	3.892	7.199	12.792	21.966
40	2.692	3.959	7.013	11.500	20.283
50	2.781	4.000	6.911	11.070	18.938
60	2.844	4.005	6.823	10.690	17.992
80	2.945	4.020	6.597	10.124	16.453
100	3.029	4.042	6.474	9.705	15.482
150	3.169	4.084	6.256	9.131	13.891
200	3.257	4.139	6.108	8.707	12.936
300	3.361	4.200	5.941	8.196	11.874
∞	3.794	4.605	5.991	7.378	9.210

В качестве минуса можно отметить, что по сравнению с критерием Харке–Бера смещённость данной модификации относительно конкурирующей гипотезы H_1 выражена ещё сильнее.

Но зато явно выражено преимущество в мощности относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3. По мощности относительно H_2 и H_3 критерий Гелы–Гаствирта показывает один из лучших результатов среди множества всех критериев нормальности.

Рейтинг критерия – 13.

2.8. Модификация Д'Агостино критерия проверки на симметричность

В работе [22] предложена модификация критерия проверки симметричности. В такой модификации на основании следующих соотношений статистика (2.1) преобразуется в статистику z_1, приближенно подчиняющуюся стандартному нормальному закону:

$$b = \frac{3(n^2+27n-70)(n+1)(n+3)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)}, \quad \omega^2 = -1 + \left\{2(b-1)\right\}^{1/2},$$

$$\delta = \frac{1}{\left\{\log(\sqrt{\omega^2})\right\}^{1/2}}, \quad y = \sqrt{\hat{\beta}_1}\left\{\frac{\omega^2-1}{2}\frac{(n+1)(n+3)}{6(n-2)}\right\}^{1/2},$$

$$z_1 = \delta \log\left\{y + (y^2+1)^{1/2}\right\}. \qquad (2.9)$$

Исследования распределений статистики (2.9) при различных объемах выборок показали, что они очень хорошо согласуются со стандартным нормальным законом.

На рис. 2.16, 2.17 показаны условные функции распределения $G(S|H_i)$ статистики (2.9) при справедливости гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 при объеме выборок n = 10 и n = 100. Эти рисунки позволяют судить о том, как меняются распределения $G(S|H_i)$ при сохранении симметричности набюдаемого закона при изменении эксцесса.

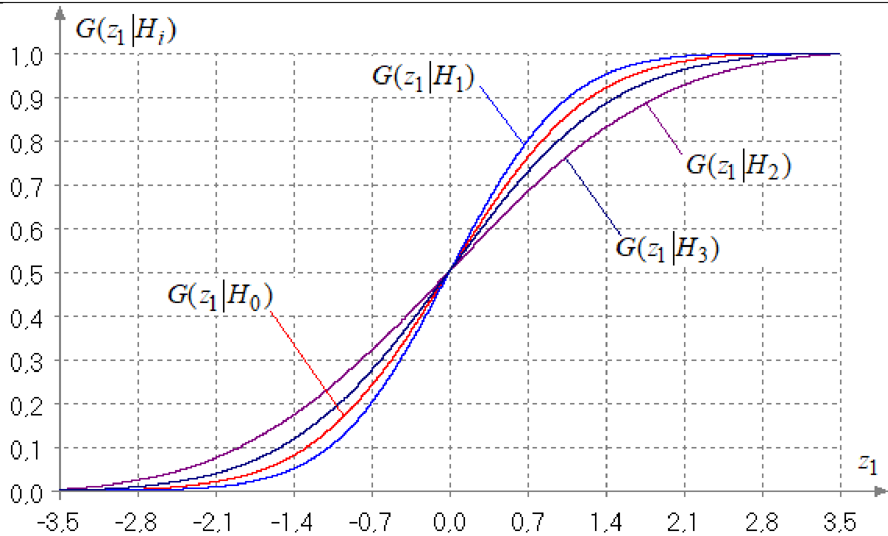


Рис. 2.16. Условные распределения $G(z_1|H_i)$ статистики (2.8) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i, при n = 10

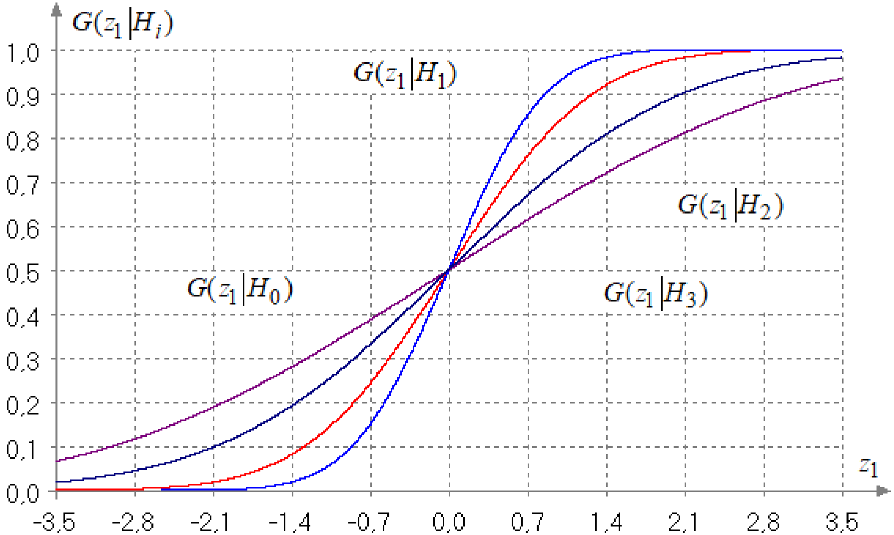


Рис. 2.17. Условные распределения $G(z_1|H_i)$ статистики (2.8) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i, при n = 100

По мощности критерий со статистикой (2.9) идентичен критерию со статистикой (2.1), но применение его предпочтительней, так как при его использовании можно опираться на стандартное нормальное распределение.

Очевидно, что критерий со статистикой z_1, как и критерий со статистикой (2.1) нельзя рассматривать как самостоятельный критерий нормальности.

2.9. Модификация Д'Агостино критерия проверки на симметричность и значение эксцесса

В работе [21] предложено преобразование статистик (2.3) и (2.1) к статистике z_2, приближенно распределенной в соответствии со стандартным нормальным законом, с помощью следующих соотношений:

$$\delta = (n-3)(n+1)(n^2+15n-4),$$

$$a = \frac{(n-2)(n+5)(n+7)(n^2+27n-70)}{6\delta},$$

$$c = \frac{(n-7)(n+5)(n+7)(n^2+2n-5)}{6\delta},$$

$$k = \frac{(n+5)(n+7)(n^3+37n^2+11n-313)}{12\delta},$$

$$\alpha = a+\beta_1 c, \quad \chi = \left(\hat{\beta}_2 - 1 - \hat{\beta}_1\right)2k,$$

$$z_2 = \left\{\left(\frac{\chi}{2\alpha}\right)^{1/3} - 1 + \frac{1}{9\alpha}\right\}(9\alpha)^{1/2}. \qquad (2.10)$$

Исследования распределений статистики (2.10) при справедливой гипотезе H_0 и различных объемах выборок показали, что $G_n(z_2|H_0)$ достаточно хорошо согласуются со стандартным нормальным законом (несколько хуже, чем z_1, но хорошо).

Критерий **двусторонний**: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется, если $z_2 < u_{\alpha/2}$ или $z_2 > u_{1-\alpha/2}$.

Достоинством критерия со статистикой (2.10) является возможность использования в качестве асимптотического распределения статистики стандартный нормальный закон. Статистика критерия учитывает отклонения от симметричности и от эксцесса нормального распределения, и критерий можно рассматривать как полноценный критерий нормальности.

Исследование мощности критерия со статистикой (2.10) по отношению к конкурирующим гипотезам H_1, H_2, H_3 (и ряду других) показало, что данный критерий не обладает недостатком, свойственным критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Пулли по отношению к конкурирующей гипотезе H_1. По оценкам мощности относительно других конкурирующих гипотез при малых объёмах выборок он практически не уступает критериям Шапиро-Уилка и Эппса-Пулли.

На рис. 2.18 и 2.19 представлены условные функции распределения $G_n(S|H_i)$ статистики (2.10) при справедливости гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 при объемах выборок n = 10 и n = 100. Приведенная на них картина позволяет судить о способности критерия распознавать эти гипотезы и о мощности критерия со статистикой (2.10).

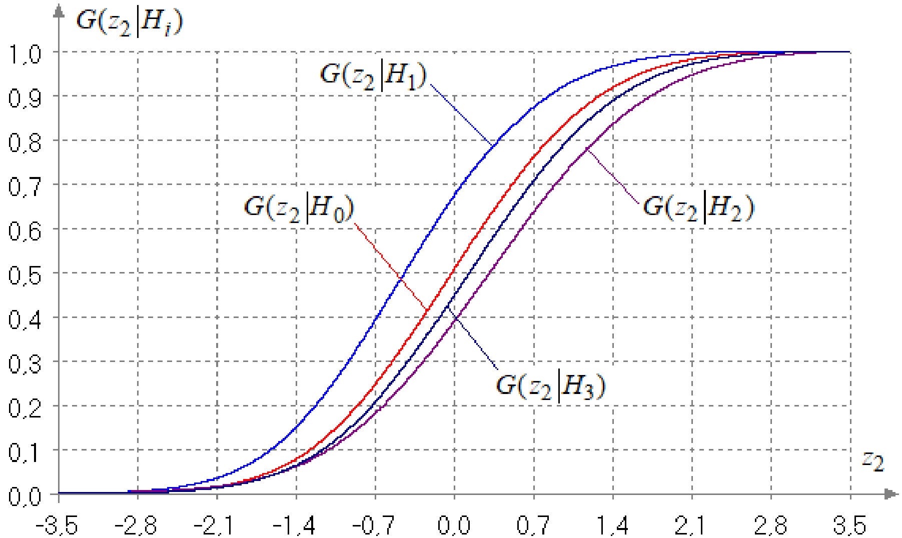


Рис. 2.18. Условные распределения $G(z_2|H_i)$ статистики (2.10) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i, при n = 10

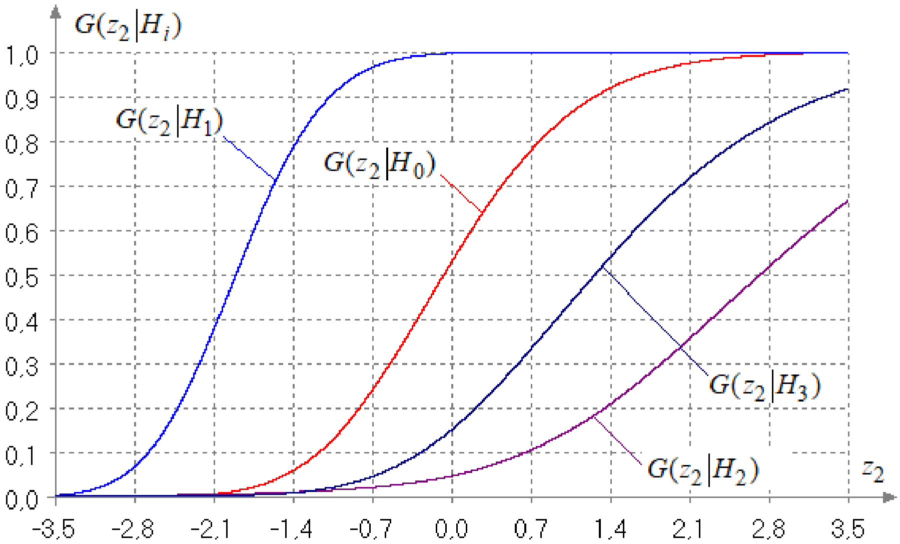


Рис. 2.19. Условные распределения $G(z_2|H_i)$ статистики (2.10) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i, при n = 100

При малых n и близких альтернативах критерий не уступает по мощности критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Пулли. В отличие от критериев Шапиро–Уилка и Эппса–Пулли *данный критерий способен успешно отличать от нормального закона распределения семейства* (1.10) *с более плосковершинными* по сравнению с нормальным законом плотностями.

Рейтинг критерия – 33.

2.10. Совместный критерий проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса Д'Агостино

В [21] на базе статистик z_1 и z_2 рассмотрена одномерная статистика вида

$$E_p = z_1^2 + z_2^2, \tag{2.11}$$

приближенно распределенная как χ_2^2-распределение.

Критерий **правосторонний**: проверяемая гипотеза о нормальности отклоняется при больших значениях статистики (2.11).

Исследование распределений данной статистики показало, что в отличие от статистики (2.8) распределение статистики (2.11) очень хорошо согласуется с χ_2^2-распределением уже при достаточно малых n.

По отношению к конкурирующим гипотезам H_2 и H_3 критерий не уступает по мощности критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Пулли. Однако недостаток, свойственный этим критериям, у него выражен даже более ярко: при малых n вследствие смещённости данный критерий не позволяет надежно различать гипотезы H_1 и H_0 (см. рис. 2.20, 2.21 и табл. 2.18).

На рис. 2.20 особенно заметно, что закон распределения, соответствующий гипотезе H_1, при объеме выборки $n = 10$ этим критерием будет признан «более нормальным», чем нормальный закон.

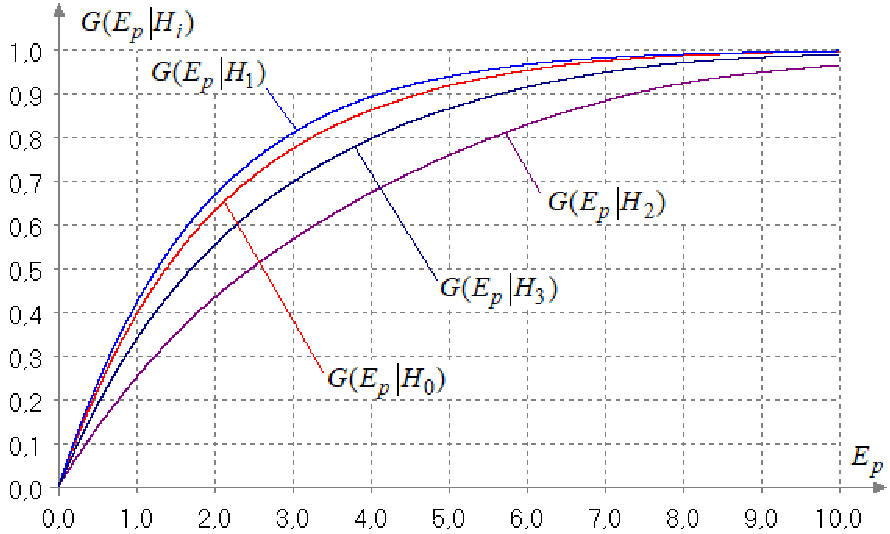


Рис. 2.20. Условные распределения $G(E_p|H_i)$ статистики (2.11) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i, при n = 10

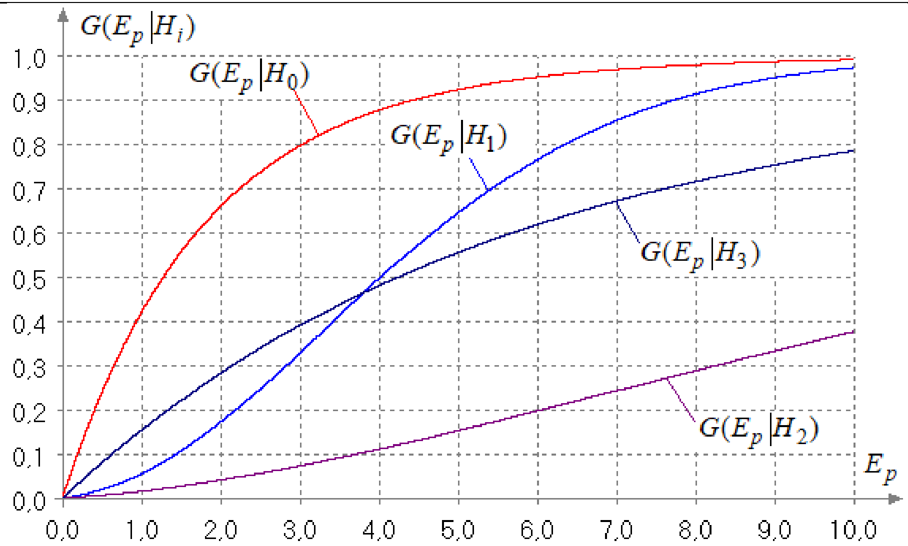


Рис. 2.21. Условные распределения $G(E_p|H_i)$ статистики (2.11) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i, при n = 50

Рейтинг критерия – 5.

2.11. Критерий Фросини (Frosini Test)

Статистика критерия Фросини [35, 36] имеет вид

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left| \Phi\left(z_i\right) - \frac{i-0.5}{n} \right|, \tag{2.12}$$

где элементы выборки x_i , $i = \overline{1,n}$, упорядочены по возрастанию;

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s} \ ; \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \ ; \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \ ;$$

$\Phi\left(z_i\right)$ – функция распределения стандартного нормального закона $N(0,1)$.

Применение критерия несколько осложняется тем, что условные распределения $G(B_n | H_0)$ статистики критерия Фросини при справедливости проверяемой гипотезы H_0 зависят от объемов выборок n. Характер этой зависимости иллюстрирует рис. 2.22.

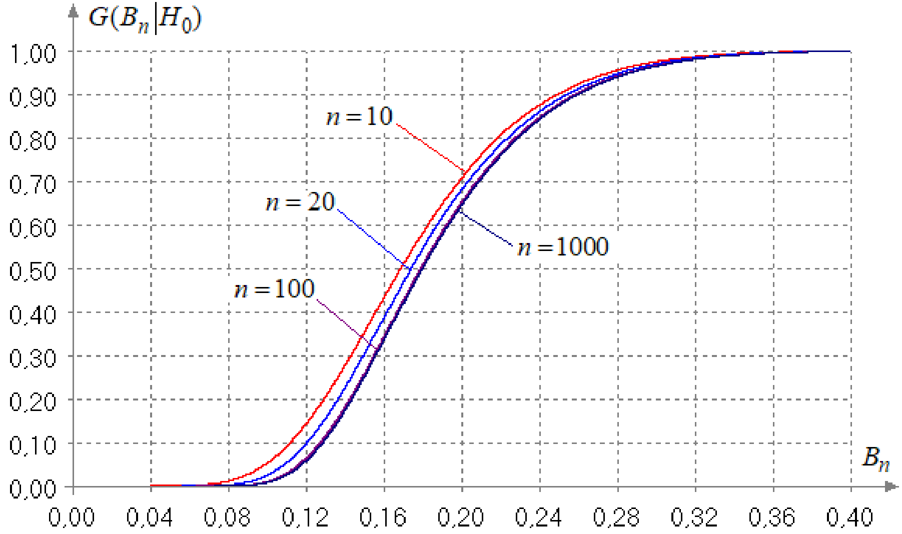


Рис. 2.22. Зависимость распределения $G(B_n \mid H_0)$ статистики B_n от объема выборки

С ростом n распределения $G(B_n|H_0)$ статистики смещаются вправо, однако достаточно быстро сходятся к некоторому асимптотическому распределению. При объемах выборок $n > 100$ распределения статистики уже существенно не меняются.

Полученная в [36] таблица процентных точек для распределений статистики Фросини наиболее доступна в [108]. Критерий **правосторонний**: гипотеза о принадлежности выборки нормальному закону отклоняется при больших значениях статистики.

В табл. 2.21 представлены значения процентных точек для статистики критерия Фросини, полученные в работе [124] и расширяющие таблицы, приводимые в [36, 108], на большие значения объемов выборок n.

Т а б л и ц а 2.21

Процентные точки для статистик критерия Фросини

n	$p = 1 - \alpha$				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
10	0.233	0.250	0.277	0.302	0.332
20	0.237	0.255	0.283	0.308	0.338
30	0.239	0.257	0.284	0.310	0.342
40	0.239	0.257	0.285	0.310	0.342
50	0.240	0.258	0.285	0.312	0.342
60	0.241	0.258	0.286	0.312	0.343
80	0.241	0.258	0.286	0.312	0.344
100	0.241	0.258	0.286	0.312	0.344
150	0.241	0.259	0.287	0.313	0.345
200	0.241	0.259	0.287	0.313	0.345
300	0.242	0.259	0.288	0.314	0.345
1000	0.242	0.260	0.2875	0.313	0.345

В качестве модели асимптотического закона для распределения статистики Фросини можно использовать бета-распределение III рода с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{B(\theta_0, \theta_1)} \frac{t^{\theta_0 - 1}(1-t)^{\theta_1 - 1}}{\left[1 + (\theta_2 - 1)t\right]^{\theta_0 + \theta_1}},$$

где $t = (x - \theta_4)/\theta_3 \in [0,1]$, при значениях параметров θ_0 = 4.923, θ_1 = 13.2152, θ_2 = 3.0715, θ_3 = 1, θ_4 = 0.076. Отличием действительного распределения статистики (2.11) от предложенной модели асимптотического закона можно практически пренебречь при $n > 50$.

У критерия Фросини отсутствует недостаток, свойственный при малых n ($n \le 20$) критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Пулли по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 [120].

На рис. 2.23 приведены графики распределения статистики B_n при справедливости различных гипотез (при различных наблюдаемых законах) для объемов выборок $n = 10$, которые позволяют судить о мощности критерия относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез.

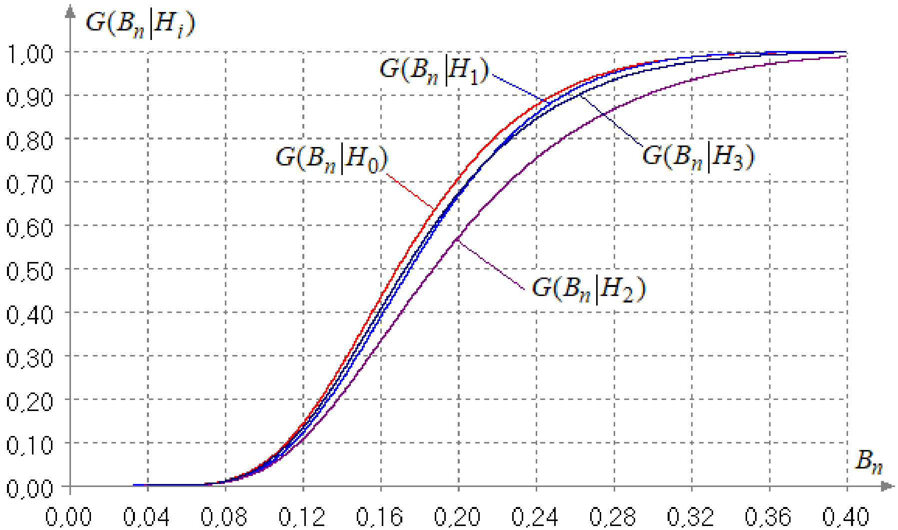


Рис. 2.23. Условные распределения $G(B_n \mid H_i)$ статистики B_n при объеме выборок $n = 10$

В то же время можно заметить, что критерий Фросини обладает не очень высокой мощностью и, в частности, уступает по мощности критериям согласия Андерсона–Дарлинга и типа χ^2 Никулина.

Рейтинг критерия – 30.

2.12. Критерии Хегази–Грина (Hegazy–Green Test)

Хегази и Грин в [45] предложили критерии со статистиками

$$T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=i}^{n}\left|z_i - \eta_i\right|, \tag{2.13}$$

$$T_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{z_i - \eta_i\right\}^2 , \tag{2.14}$$

где $z_i = \dfrac{x_{(i)} - \bar{x}}{s}$; $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$; η_i – математическое ожидание i-й порядковой статистики стандартного нормального закона, которое можно найти из соотношения $\eta_i = \Phi^{-1}\left(i/(n+1)\right)$
.
Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистик. Подчеркнем, что в статистике должна использоваться именно несмещённая оценка дисперсии, это не учтено в [108].

Распределения статистик этих критериев очень сильно зависят от объема выборки. Например, зависимость условных распределений $G(T_1 | H_0)$ статистики T_1 от n иллюстрирует рис. 2.24.

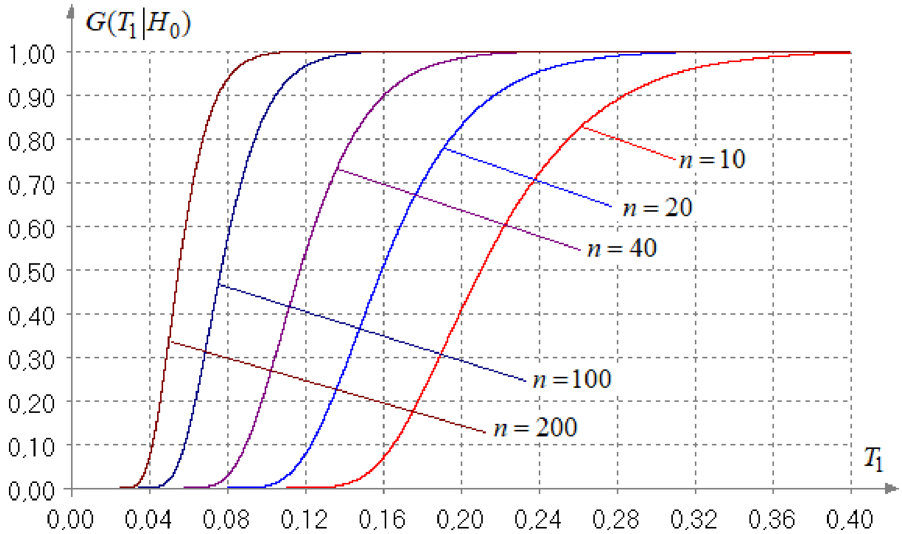


Рис. 2.24. Зависимость распределений статистики T_1 от объема выборки

Таблицы процентных точек для данных критериев при некоторых объемах выборок приводятся в [45, 108].

Ниже в табл. 2.25 представлены процентные точки для статистик T_1 и T_2 критерия Хегази–Грина, полученные в работе [124] и расширяющие таблицы, приведенные в [45, 108].

На рис. 2.25 показаны условные функции распределения $G(T_1 | H_i)$ статистики T_1 при справедливости гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 при объемах выборок $n = 10$. Отметим, что при $n = 10$ и $n = 20$ критерий практически не различает гипотезы H_0 и H_1 (аналогично критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Пулли он оказывается смещённым). Но уже при $n \geq 30$ для всех задаваемых уровней значимости α критерий способен различать эти конкурирующие гипотезы.

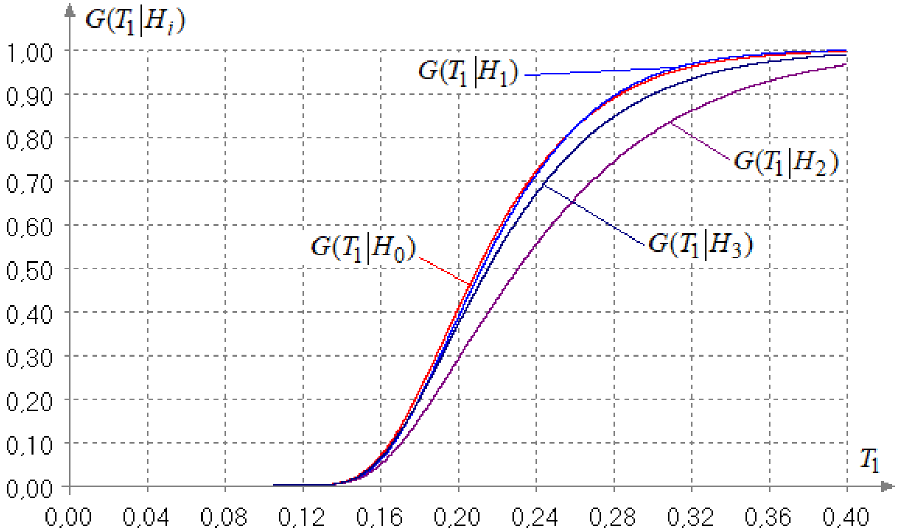


Рис. 2.25. Условные распределения $G_n(T_1 | H_i)$ статистики T_1 при справедливости соответствующих гипотез и объеме выборок $n = 10$

На рис. 2.26 приведены условные функции распределения $G(T_2 \mid H_i)$ статистики T_2 при справедливости гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 и объемах выборок $n=10$. Как видим, относительно конкурирующей гипотезы H_1 этот критерий также оказывается смещённым. Распре-деление $G(T_2 \mid H_1)$ смещено влево относительно распределения $G(T_2 \mid H_0)$ и, следовательно, при справедливости H_1 критерий с большей уверенностью признает истинность H_0.

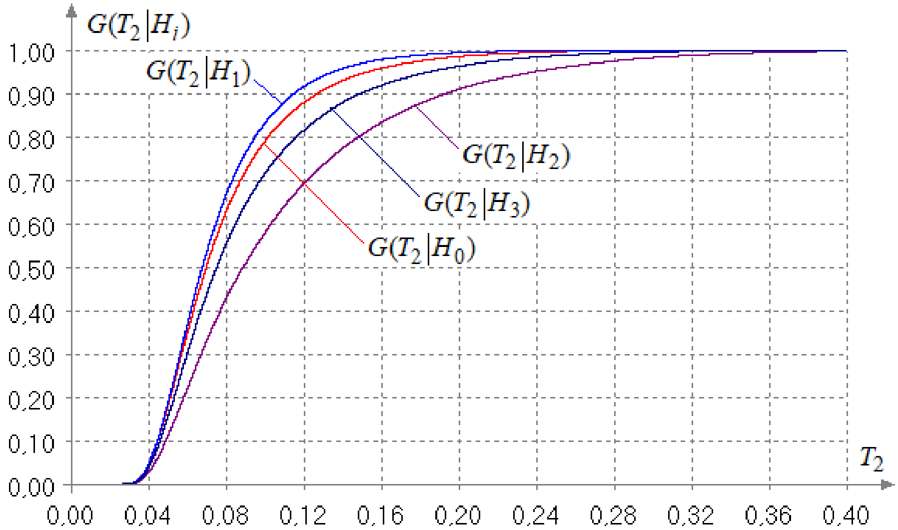


Рис. 2.26. Условные распределения $G_n(T_2 \mid H_i)$ статистики T_2 при справедливости соответствующих гипотез и объеме выборок $n=10$

Оба критерия Хегази–Грина демонстрируют более высокую мощность по сравнению с критериями Шапиро–Уилка и Эппса–Пулли относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3.

Однако по отношению к гипотезам типа H_1 при малых объемах выборок оба критерия также оказываются смещёнными, особенно критерий со статистикой T_2 (смещение даже больше, чем у критериев Шапиро–Уилка и Эппса–Пулли).

Рейтинг критерия со статистикой T_1 – 23, с T_2 – 7.5.

2.13. Критерий Гири (Geary Test)

Гири в работах [37, 38, 39] рассмотрел критерий проверки отклонения от нормального закона, основанный на статистике

$$d = \frac{1}{ns}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|, \tag{2.15}$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$.

Критерий является **двусторонним**, и гипотеза о нормальности не отклоняется, если $d_{\alpha/2} \le d \le d_{1-\alpha/2}$.

Автор критерия утверждает, что статистика критерия при $n \ge 50$ распределена асимптотически нормально. Выражения для математического ожидания и дисперсии асимптотического закона представлены, например, в [108]. Однако на самом деле распределения статистики асимметричны и плохо аппроксимируются нормальным законом, тем более, с указанными в [108] параметрами.

Таблицы процентных точек для некоторых объемов выборок приводятся в [38]. В табл. 2.29 представлены процентные точки $d_{\alpha/2}$ и $d_{1-\alpha/2}$ статистики критерия Гири, полученные в работе [124]. Эти результаты расширяют область применения критерия.

Зависимость условных распределений $G(d|H_0)$ статистики (2.15) от n иллюстрирует рис. 2.27.

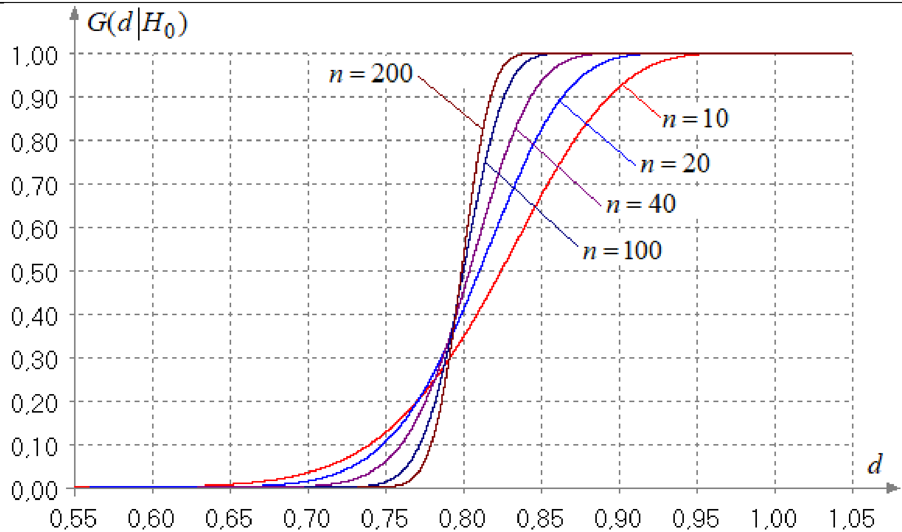


Рис. 2.27. Зависимость распределения $G(d \mid H_0)$ статистики d критерия Гири от объема выборки

На рис. 2.28 показаны условные функции распределения $G(d\,|\,H_i)$ статистики d при справедливости гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 при объеме выборок $n = 10$.

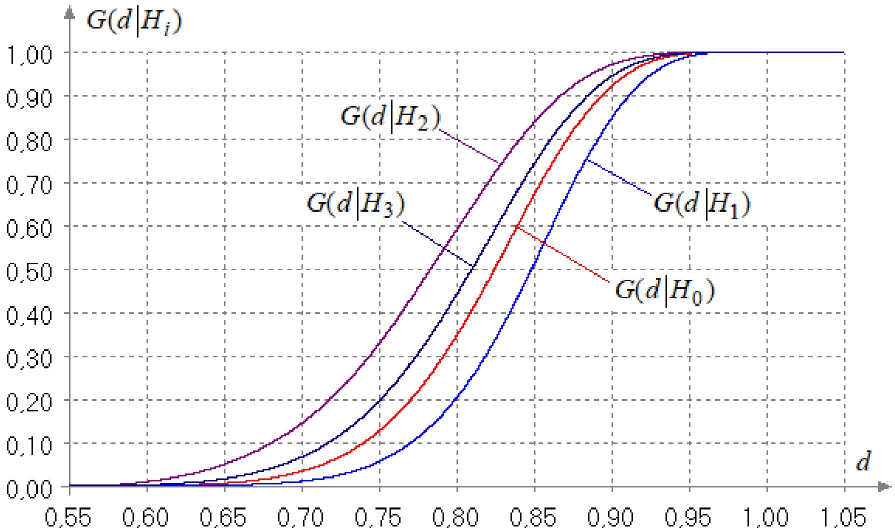


Рис. 2.28. Условные распределения $G_n(d\,|\,H_i)$ статистики d критерия Гири при справедливости различных гипотез и объеме выборок $n = 10$

Основной проблемой, ограничивающей применение критерия Гири на практике, является необходимость опираться на таблицы процентных точек.

Рейтинг критерия – 16.

2.14. Критерий Дэвида–Хартли–Пирсона (David–Hartley–Pearson Test)

В критерии Дэвида–Хартли–Пирсона [23] рассматривается отношение размаха выборки к выборочному стандартному отклонению, и его статистика имеет вид

$$U = \frac{R}{s}, \qquad (2.16)$$

где $R = x_{\max} - x_{\min}$ – размах выборки; $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ – несмещённая оценка дисперсии.

Критерий **двусторонний**: гипотеза о нормальности распределения отвергается, если $U < U_{\alpha/2}$ или $U > U_{1-\alpha/2}$. В табл. 2.33 приведены процентные точки критерия.

Таблица 2.33

Процентные точки для статистики U критерия Дэвида–Хартли–Пирсона

n	0.15		0.1		0.05		0.025		0.01	
	$\alpha/2$	$1-\alpha/2$	$\alpha/2$	$1-\alpha/2$	$\alpha/2$	$1-\alpha/2$	$\alpha/2$	$1-\alpha/2$	$\alpha/2$	$1-\alpha/2$
10	2.723	3.624	2.670	3.686	2.593	3.778	2.530	3.854	2.458	3.936
20	3.240	4.392	3.178	4.488	3.087	4.633	3.012	4.763	2.927	4.915
30	3.535	4.787	3.469	4.896	3.374	5.066	3.293	5.217	3.203	5.400
40	3.741	5.046	3.674	5.162	3.574	5.345	3.493	5.507	3.401	5.708
50	3.900	5.236	3.831	5.356	3.729	5.546	3.644	5.720	3.550	5.929
60	4.028	5.384	3.958	5.508	3.856	5.704	3.769	5.886	3.674	6.106
80	4.230	5.607	4.158	5.735	4.054	5.937	3.967	6.124	3.870	6.354
100	4.382	5.774	4.311	5.905	4.206	6.112	4.117	6.302	4.018	6.536

150	4.656	6.059	4.583	6.191	4.477	6.405	4.388	6.600	4.288	6.838
200	4.847	6.255	4.774	6.388	4.668	6.600	4.578	6.799	4.474	7.044
300	5.111	6.512	5.037	6.645	4.931	6.858	4.841	7.056	4.741	7.303

Рис. 2.29 иллюстрирует зависимость распределений статистики U от объема выборки при справедливости проверяемой гипотезы.

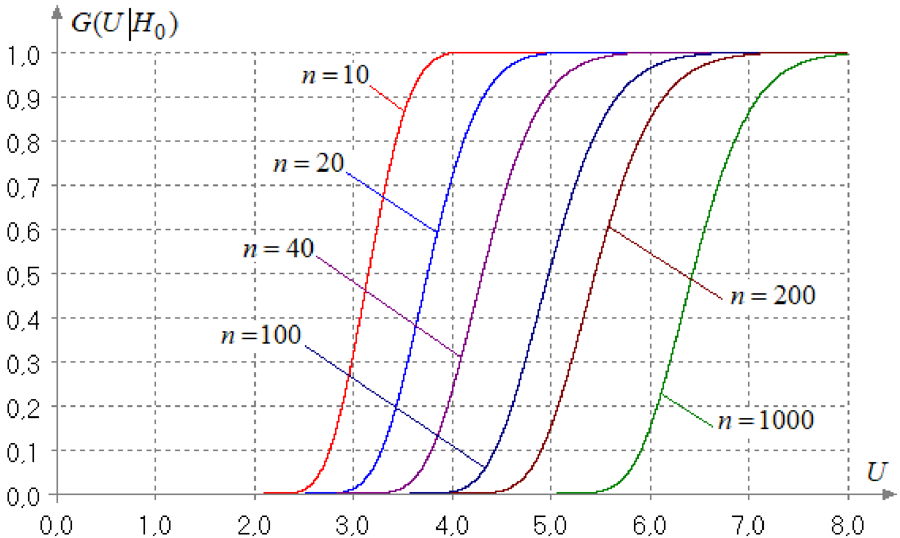


Рис. 2.29. Зависимость распределений $G(U \mid H_0)$ статистики U от объема выборки

На рис. 2.30 показаны условные распределения $G(U \mid H_i)$ статистики U, откуда видно, что не возникает никаких вопросов по поводу возможной смещённости критерия относительно H_1.

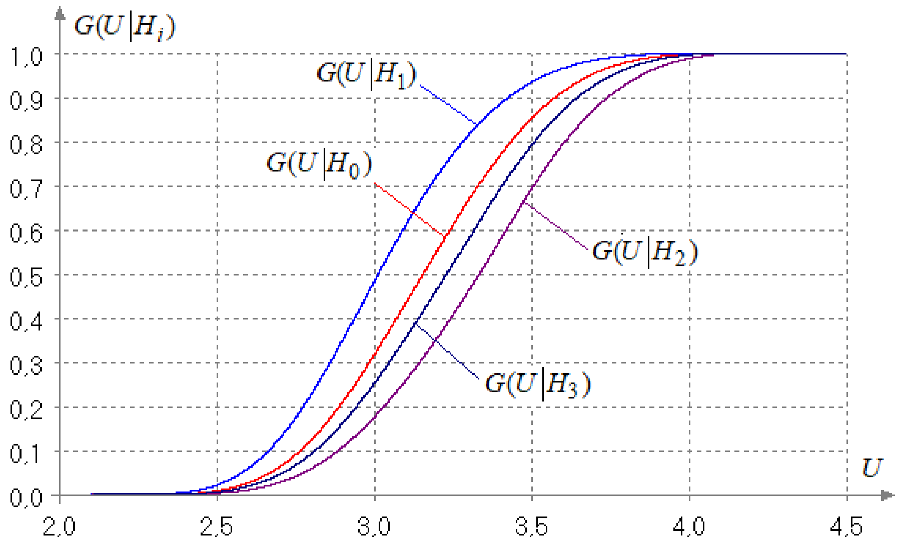


Рис. 2.30. Условные распределения $G(U \mid H_i)$ статистики U при справедливости различных гипотез и объемах выборок $n = 10$

Рейтинг критерия – 36.

2.15. Критерий Шпигельхальтера (Spiegelhalter Test)

Статистика этого критерия [79] базируется на комбинации статистик критериев Гири [37] и Дэвида, Хартли и Пирсона [23] и имеет вид

$$T' = \left\{ \left(C_n U \right)^{-(n-1)} + g^{-(n-1)} \right\}^{\frac{1}{n-1}}, \qquad (2.17)$$

где $C_n = \frac{1}{2n}(n!)^{\frac{1}{n-1}}$; U – статистика (2.16) критерия Дэвида–Хартли–Пирсона; $g = \frac{d}{\sqrt{(n-1)/n}}$; d – статистика (2.15) критерия Гири.

Проверяемая гипотеза о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону по критерию Шпигельхальтера отклоняется при больших значениях статистики T'.

Значения процентных точек для статистики T' критерия Шпи-гельхальтера, полученные в результате моделирования, приведены в табл. 2.37 руководства по критериям нормальности.

Зависимость распределения статистики T' от объема выборки в случае справедливости проверяемой гипотезы иллюстрирует рис. 2.31.

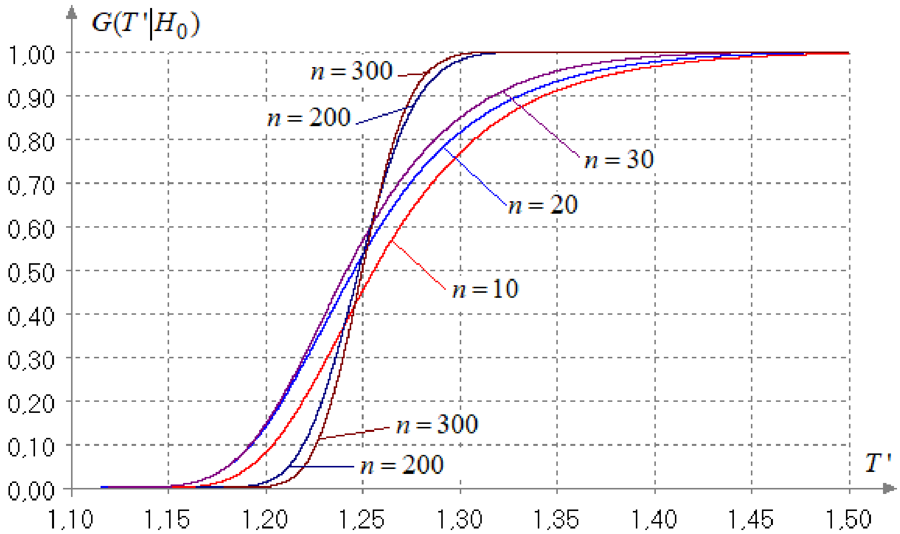


Рис. 2.31. Зависимость распределения статистики T' от объема выборки в случае нормального закона

Однако данный критерий **имеет** очень **существенный недостаток**: критерий со статистикой (2.17) способен отличить от нормального закона далеко не все конкурирующие распределения. В частности, это касается конкурирующей гипотезы H_1.

Мощность любого корректно построенного критерия должна увеличиваться с ростом n. В принципе, так и происходит с мощностью критерия Шпигельхальтера по отношению к конкурирующим гипотезам H_2 и H_3.

Совсем другая картина выяснилась при исследовании методами статистического моделирования распределений $G(T'|H_1)$ статистики и мощности критерия относительно гипотезы H_1.

На рис. 2.32–2.34 показаны условные функции распределения $G(T'|H_i)$ статистики T' при справедливости гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 и объемах выборок $n = 10, 50, 300$.

Можно видеть, что вследствие “специфичного” поведения условного распределения $G(T'|H_1)$ с ростом объема выборок мощность критерия по отношению к гипотезе H_1 при $n \geq 50$ начинает уменьшаться. А далее с ростом n критерий оказывается смещённым относительно гипотезы H_1 и вовсе не способен различать гипотезы H_0 и H_1.

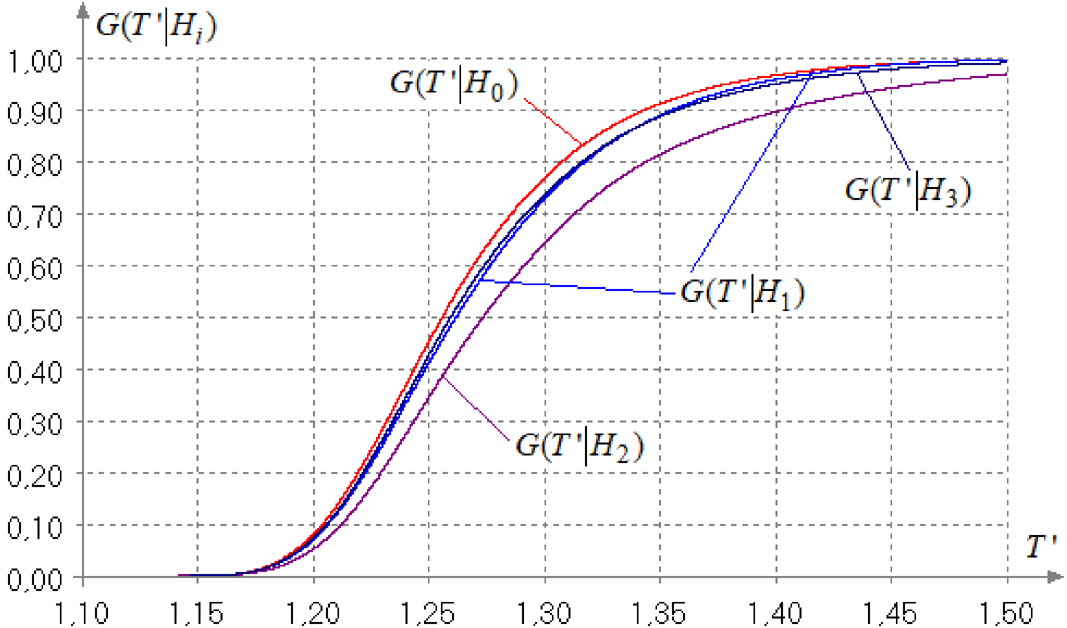


Рис. 2.32. Условные распределения $G(T' \mid H_i)$ статистики T' при объеме выборок $n = 10$

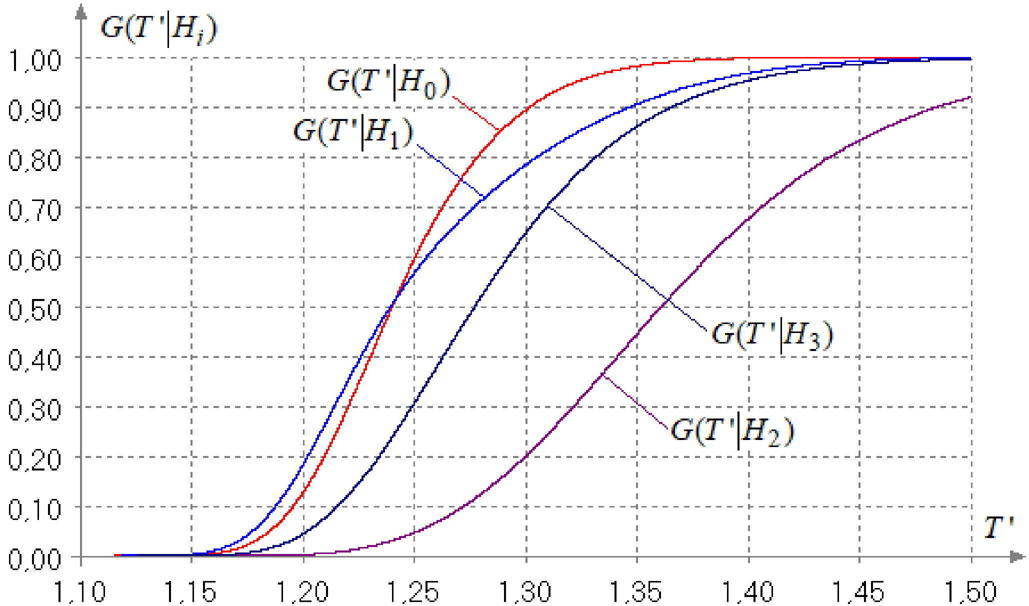


Рис. 2.33. Условные распределения $G\left(T' \mid H_i\right)$ статистики T' при объеме выборок $n = 50$

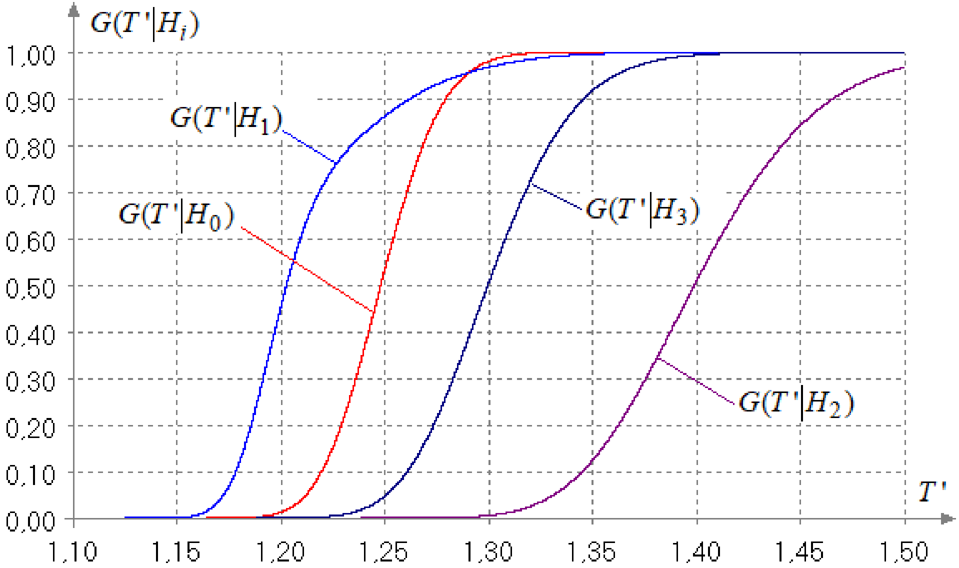


Рис. 2.34. Условные распределения $G(T'\,|\,H_i)$ статистики T' при объеме выборок $n = 200$

По отношению к конкурирующим гипотезам H_2 и H_3 критерий демонстрирует хорошую мощность. Однако ситуация с необычным поведением распределения $G(T'\,|\,H_1)$ заставляет быть осторожным, так как даже при больших объёмах выборок применение критерия может привести к неверному выводу. Поэтому, применяя критерий Шпигельхальтера, желательно для контроля убедиться, что и другие критерии приводят к тому же выводу о результатах проверки гипотезы H_0.

Рейтинг критерия – 21.

2.16. Критерий Ройстона (Royston Test)

Критерий Шапиро-Уилка [76] основывается на анализе порядковых статистик. В качестве статистики критерия вычисляют величину

$$W = \left(\sum_{j=1}^{n} a_i X_{(i)} \right)^2 \Bigg/ \sum_{j=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2 .$$

В стандарте [103] предусмотрено применение критерия при $8 \le n \le 50$ и приведены соответствующие коэффициенты a_i. Применение же критерия при бóльших n затруднено из-за отсутствия коэффициентов в источниках. И хотя приближенный вариант критерия Шапиро-Уилка для $51 \le n \le 100$ приводится, например, в [78], табулирование точных значений a_i для произвольного объема не получило значительного внимания исследователей, в отличие от построения аппроксимаций (см. критерий Ройстона).

В [74] получены приближенные выражения, позволяющие вычислять статистику W при $4 \le n \le 2000$ и не требующие сложных вычислений. Распределение такой статистики хорошо согласуется с опубликованными критическими точками, полученными для точных значений коэффициентов a_i .

Обозначим $c_i = \left(\tilde{\mathbf{m}}^T \tilde{\mathbf{m}} \right)^{-1/2} \tilde{m}_i$, $\tilde{m}_i = \Phi^{-1}\left\{ (i - 3/8)(n + 1/4) \right\}$, где $\Phi(\cdot)$ – функция распределения стандартного нормального закона. Учитывая, что $a_i = -a_{n-i+1}$, приближенные коэффициенты $\tilde{a}_i$ определяют, начиная с вычисления $\tilde{a}_n$ и $\tilde{a}_{n-1}$ в соответствии с соотношениями:

$$\tilde{a}_n = c_n + 0.221157x - 0.147981x^2 - 2.071190x^3 +$$
$$+ 4.434685x^4 - 2.706056x^5,$$

$$\tilde{a}_{n-1} = c_{n-1} + 0.042981x - 0.293762x^2 - 1.752461x^3 +$$
$$+ 5.682633x^4 - 3.582663x^5.$$

где $x = n^{-1/2}$.

Затем, вычисляя нормализующие коэффициенты для $\tilde{m}_i$ в соответствии с выражением

$$\phi = \begin{cases} \left(\tilde{\mathbf{m}}^T\tilde{\mathbf{m}} - 2\tilde{m}_n^2\right) \Big/ \left(1 - 2\tilde{a}_n^2\right), & n \le 5, \\ \left(\tilde{\mathbf{m}}^T\tilde{\mathbf{m}} - 2\tilde{m}_n^2 - 2\tilde{m}_{n-1}^2\right) \Big/ \left(1 - 2\tilde{a}_n^2 - 2\tilde{a}_{n-1}^2\right), & n > 5, \end{cases}$$

получают остальные

$$\tilde{a}_i = \phi^{-1/2}\tilde{m}_i,$$

для $i = 2,\ldots,n-1$ $(n \le 5)$ или $i = 3,\ldots,n-2$ $(n > 5)$.

Применение критерия существенно упрощается благодаря использованию следующего нормализующего преобразования [74]. Для $4 \le n \le 11$ вычисляют вспомогательные величины:

$$w = -\ln\left(\gamma - \ln\left(1 - W\right)\right),$$

$$\gamma = -2.273 + 0.459n,$$

$$\mu = 0.5440 - 0.39978n + 0.025054n^2 - 0.0006714n^3,$$

$$\sigma = \exp\left(1.3822 - 0.77857n + 0.062767n^2 - 0.0020322n^3\right).$$

Для $12 \le n \le 2000$:

$$w = \ln(1 - W),$$

$$\mu = -1.5861 - 0.31082x - 0.083751x^2 + 0.0038915x^3,\ \sigma = \exp\left(-0.4803 - 0.082676x + 0.0030302x^2\right),$$

где $x = \ln n$.

Если критерий Шапиро-Уилка левосторонний, то критерий Ройстона является правосторонним. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики

$$W_R = (w - \mu)/\sigma, \qquad (2.18)$$

которая при справедливости H_0 приближенно описывается стандартным нормальным законом.

Отличием распределения статистики (2.18) от стандартного нормального закона можно практически пренебречь при объёмах выборок $n > 30$ (см. рис. 2.35).

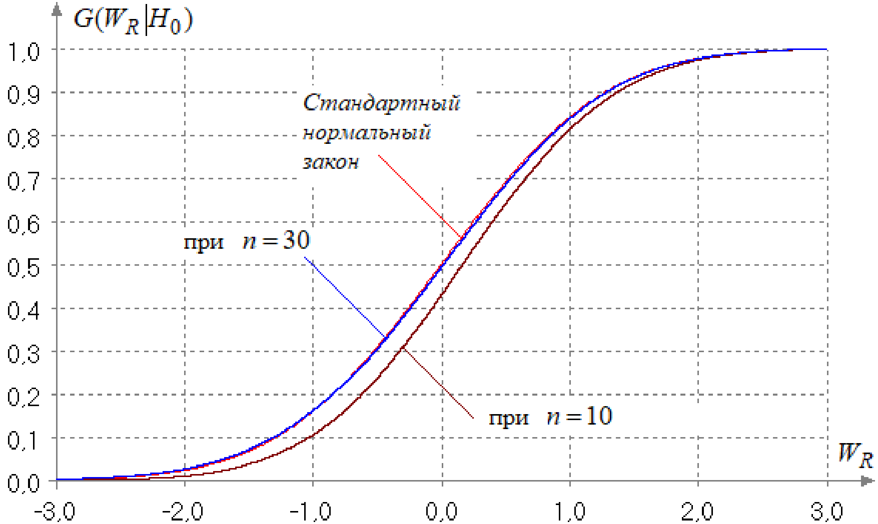


Рис. 2.35. Сходимость распределений $G(W_R \mid H_0)$ статистики W_R Ройстона к стандартному нормальному закону

У критерия Ройстона в меньшей мере, но сохранился недостаток, свойственный критерию Шапиро-Уилка относительно конкурирующих законов близких гипотезе H_1 (см. рис. 2.36).

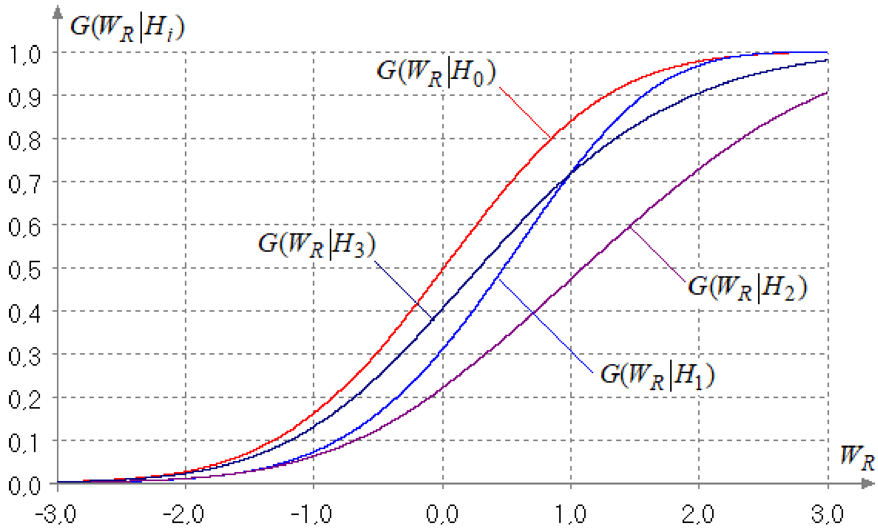


Рис. 2.36. Условные распределения $G(W_R \mid H_i)$ статистики W_R Ройстона при объеме выборок $n = 30$

Относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 критерий Ройстона не уступает по мощности критериям Шапиро-Уилка и Эппса-Пулли. В программных системах под именем критерия Шапиро-Уилка, как правило, реализуется модификация Ройстона.

Рейтинг критерия – 10.

2.17. Критерий Васичека (Vasicek Test)

Энтропийный критерий нормальности Васичека [87, 108] базируется на том, что энтропия нормального закона превышает энтропию любого другого распределения с той же дисперсией.

Энтропия распределения вероятностей с плотностью $f(x)$ определяется выражением

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log f(x)dx\,,$$

а ее оценка по выборочным данным

$$H_{mn} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left\{\frac{n}{2m}\left(x_{(i+m)} - x_{(i-m)}\right)\right\},$$

где $x_{(i)}$ – i-я порядковая статистика (при $i-m<1$ $x_{(i-m)} = x_{(1)}$; при $i+m>n$ $x_{(i+m)} = x_{(n)}$), m – целое положительное число (размер окна), не превышающее $n/2$.

Статистика критерия Васичека имеет вид

$$K_{mn} = \frac{n}{2ms}\left\{\prod_{i=1}^{n}\left(x_{(i+m)} - x_{(i-m)}\right)\right\}^{1/n}, \tag{2.19}$$

где $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$; $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Критерий **левосторонний**. Если $K_{mn} < K_{mn}(\alpha)$, где $K_{mn}(\alpha)$ – критическое значение статистики, то гипотеза H_0 о принадлежности выборки нормальному закону отклоняется на уровне значимости α. При $n,m \to \infty$, $m/n \to \infty$ и справедливости проверяемой гипотезы $K_{mn} \to \sqrt{2\pi \cdot e} = 4.133$, при этом всегда $0 \le K_{mn} \le 4.133$.

В вычислительном плане статистику критерия предпочтительней использовать в следующем эквивалентном виде:

$$K_{mn} = \exp\left\{ \ln\left(\frac{n}{2ms} \right) + \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} \ln\left(x_{(i+m)} - x_{(i-m)} \right) \right] \right\}. \tag{2.20}$$

П р и м е ч а н и е 1. Из-за накопления погрешности при вычислении статистики в форме (2.19) её значения (с ростом n) даже при справедливости проверяемой гипотезы H_0 могут обнуляться (в отличие от статистики в форме (2.20)). Это приведёт к неоправданному отклонению H_0.

П р и м е ч а н и е 2. При $x_{(i+m)} = x_{(i-m)}$ значение статистики K_{mn} оказывается равным нулю, и проверяемая гипотеза H_0 должна отклоняться при $p_{value} = 0$. Такая ситуация нередко встречается на практике и, как правило, является следствием округления измеряемых непрерывных случайных величин. Это должно быть предусмотрено при программной реализации вычисления статистики (2.20).

На рис. 2.37 показана зависимость условного распределения $G(K_{mn} | H_0)$ статистики критерия Васичека от объёма выборки n при $m=1$.

Рис. 2.38 иллюстрирует зависимость распределения $G(K_{mn} | H_0)$ статистики при фиксированном объёме выборки n от размера окна m.

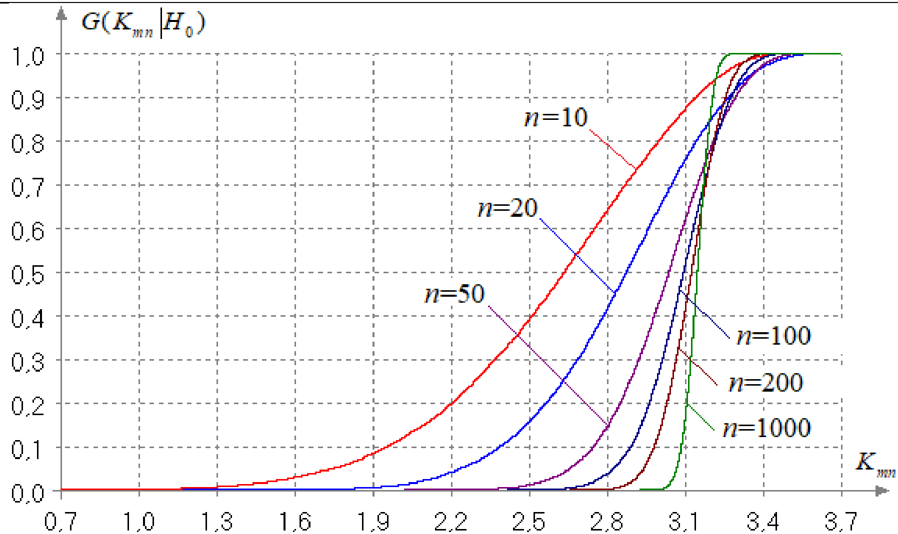


Рис. 2.37. Условные распределения $G\left(K_{mn} \mid H_0\right)$ статистики K_{mn} при размере окна $m = 1$

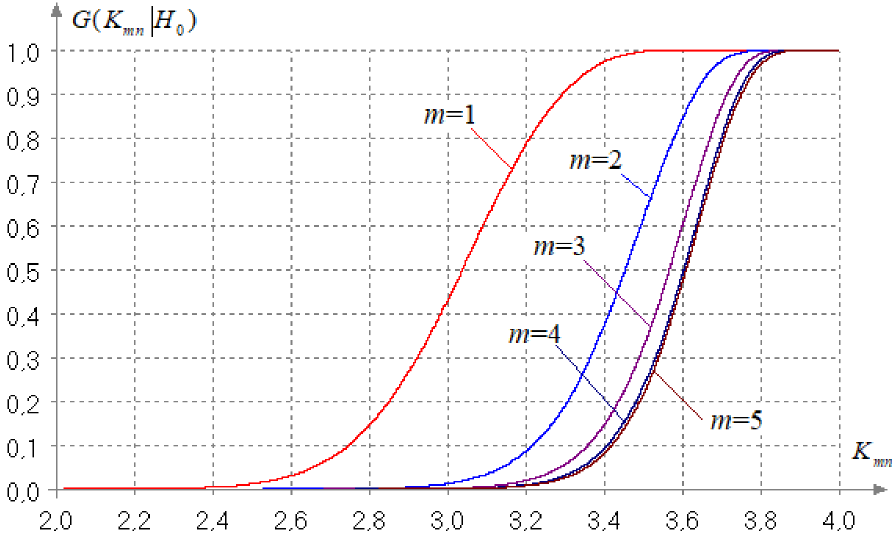


Рис. 2.38. Условные распределения $G(K_{mn} \mid H_0)$ статистики K_{mn} в зависимости от размера окна при $n = 50$

Цель подготовленного **руководства** обеспечить возможность применения различных критериев нормальности, в том числе в отсутствие специального программного обеспечения, позволяющего исследовать распределения статистик и оценивать значения p_{value} (как в [146]).

В целом же, применять критерий Васичека или любой другой из рассмотренных ниже энтропийных критериев целесообразно в составе специального программного обеспечения, дающего возможность с опорой на метод Монте–Карло оценивать p_{value} и не думать о процентных точках.

В [43] свойства оценок энтропии и мощность критериев сравнивались при значениях m, выбираемых по эвристической формуле

$$m = \left[\sqrt{n} + 0.5 \right].$$

При этом в [43] подчеркивалось, что вопрос выбора оптимального m остаётся открытым. На это же соотношение опирались при проведении исследований в [93]. Из представленных в данном параграфе результатов очевидно, что такой выбор m не является оптимальным и не гарантирует максимальной мощности критерия.

Замечание. Зависимость мощности при данных n, H_0 и конкурирующей гипотезе H_i от выбора m является одновременно плюсом и минусом для энтропийных критериев. С одной стороны, при оптимальном выборе m критерий может получить некоторое преимущество в мощности (относительно конкретной H_i) перед другими критериями. Однако это ещё не осначает, что это m будет оптимально относительно другой интересующей нас конкурирующей гипотезы. С другой стороны, при неоптимальном m потери в мощности могут быть существенны.

Заметим, что у критерия Васичека отсутствует недостаток, свойственный многим из рассмотренных выше специальных критериев нормальности – смещённость при малых n и α относительно конкурирующей гипотезы H_1. Однако аналогичный недостаток (смещённость критерия) обнаружен при некоторых размерах окна m относительно гипотезы H_3, соответствующей логистическому закону.

По сравнению с другими рассмотренными, критерий Васичека демонстрирует неплохую мощность относительно H_1, среднюю относительно H_2 и ниже среднего относительно H_3.

Рейтинг критерия – 37.5.

2.18. Критерий Корреа (Correa Test)

Одна из оценок энтропии была предложена в [20]:

$$HC_{mn} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \left\{ \frac{\sum_{j=i-m}^{i+m} \left(x_{(j)} - \bar{x}_{(i)} \right)(j-i)}{n \sum_{j=i-m}^{i+m} \left(x_{(j)} - \bar{x}_{(i)} \right)^2} \right\},$$

где $x_{(j)}$ – порядковые статистики, построенные по выборке,

$$\bar{x}_{(i)} = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=i-m}^{i+m} x_{(j)} .$$

Статистика критерия нормальности [93] имеет вид:

$$THC_{mn} = \frac{\exp\{HC_{mn}\}}{s}, \tag{2.21}$$

Критерий также **левосторонний**. Распределения статистики $G(THC_{mn} | H_0)$ зависят от n и m. Характер зависимости от n и m аналогичен показанному для распределения статистики критерия Васичека.

Рейтинг критерия – 40.5.

2.19. Критерий Ван Эса (Van Es Test)

В работе [86] была введена оценка энтропии с корекцией смещения

$$HEs_{mn} = \frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{n-m}\ln\left(\frac{n+1}{m}(x_{(i+m)} - x_{(i)})\right) + \sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k} + \ln(m) - \ln(n+1)$$

и показана её асимтотическая нормальность.

Статистика соответствующего критерия нормальности имеет вид:

$$THEs_{mn} = \frac{\exp\{HEs_{mn}\}}{s}, \tag{2.22}$$

где $s = \sqrt{1/n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ – оценка стандартного отклонения, вычисленная по выборке.

Примечание. При программной

реализации в случае обнаружения равенства $x_{(i+m)} = x_{(i)}$ статистике $THEs_{mn}$ присваивается значение ноль, и проверяемая гипотеза H_0 должна отклоняться при $p_{value} = 0$.

Критерий **левосторонний**. Распределения $G(THEs_{mn} | H_0)$ статистики данного критерия, как и распределения статистики любого другого энтропийного критерия, зависят от объёмов выборок n и от размера окна m.

Рейтинг критерия – 31.

2.20. Критерий Эбрахими (Ebrahimi Test)

Авторами работы [31] была построена оценка энтропии,

$$HE_{mn} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left\{\frac{n}{c_i m}\left(x_{(i+m)} - x_{(i-m)}\right)\right\},$$

где

$$c_i = \begin{cases} 1+\dfrac{i-1}{m}, & 1 \le i \le m, \\ 2, & m+1 \le i \le n-m, \\ 1+\dfrac{n-i}{m}, & n-m+1 \le i \le n. \end{cases}$$

Методами статистического моделирования в [31] было показано, что эта оценка является точнее оценки энтропии, предложенной Васичеком [87].

Как и в большинстве энтропийных критериев в критерии нормальности используется статистика вида:

$$THE_{mn} = \frac{\exp\{HE_{mn}\}}{s}, \tag{2.23}$$

где $s = \sqrt{1/n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ – оценка стандартного отклонения, вычисленная по выборке.

Примечание. При обнаружении ситуации $x_{(i+m)} = x_{(i-m)}$ статистике THE_{mn} присваивается значение ноль, и проверяемая гипотеза H_0 должна отклоняться при $p_{value} = 0$.

Критерий **левосторонний**. Рейтинг критерия – 37.5.

2.21. Критерии Заманзаде–Аргами (Zamanzade–Arghami Test)

В работе [93] предложена следующая оценка энтропии $H(f)$ с неизвестной непрерывной функцией потности f :

$$HZ1_{mn} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\{b_i\},$$

где

$$b_i = \frac{x_{(i+m)} - x_{(i-m)}}{\sum_{j=k_1(i)}^{k_2(i)-1} \left(\frac{\hat{f}(x_{(j+1)}) + \hat{f}(x_{(j)})}{2} \right) \left(x_{(j+1)} - x_{(j)} \right)},$$

$$k_1(i) = \begin{cases} 1, & i \le m, \\ i-m, & i > m, \end{cases} \quad k_2(i) = \begin{cases} i+m, & i \le n-m, \\ n, & i > n-m, \end{cases}$$

$$\hat{f}(x_i) = \frac{1}{nh}\sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x_i - x_j}{h} \right),$$

где в качестве ядерной функции $K(\ )$ берётся плотность стандартного нормального закона с параметром размытости $h = 1/06sn^{-1/5}$, где $s = \sqrt{1/n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ – оценка стандартного отклонения, вычисленная по выборке.

Статистика первого из критериев, построенных в [93] на базе предложенной оценки, имеет вид:

$$TZ1_{mn} = \frac{\exp\left\{HZ1_{mn}\right\}}{s}. \tag{2.24}$$

При построении оценки $HZ1_{mn}$ для вычисления b_i используется не равное количество точек. Поэтому авторам показалось естественным ввести весовые коэффициенты, пропорциональные количеству точек, используемых при вычислении b_i:

$$HZ2_{mn} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \ln\left\{b_i\right\}}{\sum_{i=1}^{n} w_i},$$

где

$$w_i = \begin{cases} m+i-1, & 1 \le i \le m, \\ 2m, & m+1 \le i \le n-m, \quad i=1,\dots,n, \\ n-i+m, & n-m+1 \le i \le n. \end{cases}$$

являются весами, пропорциональными количеству точек, используемых при вычислении b_i.

Статистика второго критерия, построенного в [92], имеет вид:

$$TZ2_{mn} = \frac{\exp\left\{HZ2_{mn}\right\}}{s}. \tag{2.25}$$

П р и м е ч а н и е. При программной реализации в случае обнаружения ситуации $x_{(i+m)} = x_{(i-m)}$ статистикам $TZ1_{mn}$ и $TZ2_{mn}$ присваивается значение ноль, и проверяемая гипотеза H_0 должна отклоняться при $p_{value} = 0$.

Как и другие энтропийные критерии, оба рассматриваемых критерия являются **левосторонними**.

Рейтинг критерия со статистикой $TZ1_{mn}$ – 2, с $TZ2_{mn}$ – 7.5.

2.22. Критерий Гаствирта (Gel–Miao–Gastwirth Test)

Статистика критерия базируется на отношении [40]

$$R = \frac{s_n}{J_n},$$

где $s_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$ – оценка классического стандартного отклонения, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $J_n = \frac{\sqrt{\pi/2}}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - M\right|$ – среднее абсолютное отклонение от оценки медианы M.

Статистика $\sqrt{n}(R-1)$ в асимптотике подчиняется нормальному распределению $N(0, \sigma_R^2)$, где $\sigma_R^2 = \frac{\pi - 3}{2}$. Следовательно, статистика

$$S_R = \frac{\sqrt{n}(R-1)}{\sigma_R} \tag{2.26}$$

подчиняется стандартному нормальному закону.

В отличие от указанного авторами в [40], критерий является **двусторонним**: проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется при значениях статистики $z_{\alpha/2} \le S_R \le z_{1-\alpha/2}$, где $z_{\alpha/2}$ и $z_{1-\alpha/2}$ – нижний и верхний квантили стандартного нормального закона.

Сходимость распределения статистики S_R к стандартному нормальному закону N(0,1) иллюстрирует рисунок 2.39, где приведены распределения $G(S_R|H_0)$ при $n=10$ и $n=100$. Как можно видеть, заметное отклонение (несколько асимметричного) распределения статистики $G(S_R|H_0)$ от стандартного нормального закона наблюдается на хвостах. Поэтому использование в качестве критических значений квантилей стандартного нормального закона может приводить к некоторому увеличению вероятностей ошибок 1-го или 2-го рода.

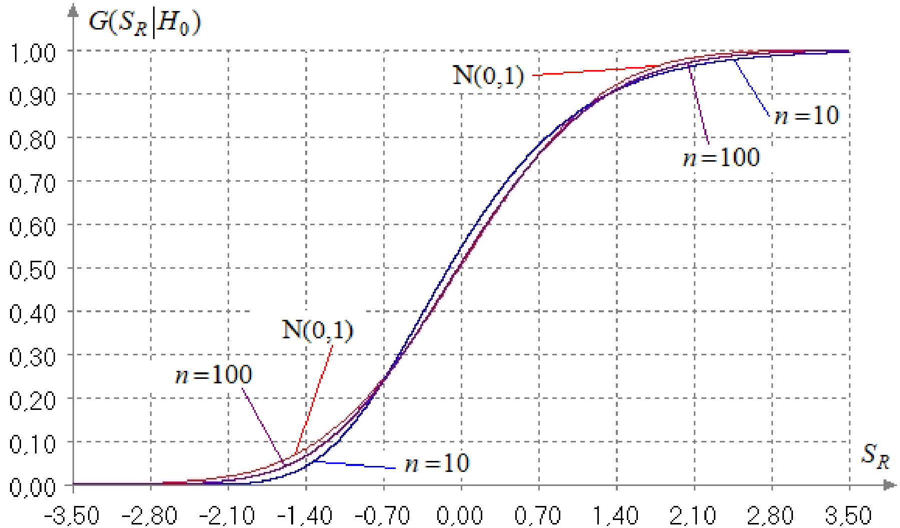


Рис. 2.39. Сходимость распределения $G(S_R|H_0)$ в зависимости от n к стандартному нормальному закону

Рейтинг критерия – 14.

2.23. Критерии Локка–Сперриера (Locke–Spurrier Tests)

Критерии проверки нормальности Локка–Сперриера были предложены в работах [65, 66], и они ориентированы для применения против асимметричных альтернатив. Статистики критериев задаются выражениями:

$$T_{1n} = \frac{U_{1n}}{s}, \quad T_{2n} = \frac{U_{2n}}{s},$$

где $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ – несмещённая оценка дисперсии, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$,

$$U_{1n} = \frac{1}{C_n^3}\sum_{1\le i<j<k\le n}\left(x_{(k)} - 2x_{(j)} + x_{(i)}\right) = \frac{1}{C_n^3}\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_{(i)};$$

$$U_{2n} = \frac{1}{C_n^3}\sum_{1\le i<j<k\le n}\left\{\left(x_{(k)} - x_{(j)}\right)^2 - \left(x_{(j)} - x_{(i)}\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{C_n^3}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} V_{ij}\left(x_{(j)} - x_{(i)}\right)^2.$$

Здесь

$$\omega_i = C_{i-1}^2 - 2(n-1)(i-1) + C_{n-1}^2; \quad V_{ij} = i + j - n - 1;$$

$x_{(i)}$ – i-я порядковая статистика.

Математические ожидания и дисперсии статистик равны:

$E[T_{1n}] = 0$; $\qquad E[T_{2n}] = 0$;

$$D[T_{1n}] = \frac{1}{C_n^3}\left\{1.03804 + 0.69714(n-3) + 0.0890805(n-3)(n-4)\right\};$$

$$D[T_{2n}] = \frac{1}{C_n^3}\left\{7.03804 + 5.32251(n-3) + 0.74412(n-3)(n-4)\right\}.$$

При $n \ge 10$ распределение $G(\tilde{T}_{1n} | H_0)$ нормализованной статистики

$$\tilde{T}_{1n} = \frac{T_{1n} - E[T_{1n}]}{\sqrt{D[T_{1n}]}} \qquad (2.27)$$

достаточно хорошо описывается стандартным нормальным законом.

Распределение $G(\tilde{T}_{2n} | H_0)$ нормализованной статистики

$$\tilde{T}_{2n} = \frac{T_{2n} - E[T_{2n}]}{\sqrt{D[T_{2n}]}} \qquad (2.28)$$

описывается стандартным нормальным законом хуже: нормальной аппроксимацией можно уверенно пользоваться при $n \ge 40$.

Критерии **двусторонние**: гипотеза H_0 не отклоняется при значениях статистик $\tilde{T}_{1n,\alpha/2} \le \tilde{T}_{1n} \le \tilde{T}_{1n,1-\alpha/2}$ и $\tilde{T}_{2n,\alpha/2} \le \tilde{T}_{2n} \le \tilde{T}_{2n,1-\alpha/2}$. Процентные точки статистик (2.27) и (2.28) приведены в таблицах 2.72 и 2.73. При $n \ge 10$ и $n \ge 40$, соответственно, могут использоваться нижний $z_{\alpha/2}$ и верхний $z_{1-\alpha/2}$ квантили стандартного нормального закона.

Рейтинг критерия со статистикой $\tilde{T}_{1n}$ – 45, с $\tilde{T}_{2n}$ – 39.

2.24. Критерий Мартинеса–Иглевича (Martinez–Iglewitcz Test)

Критерий предложен в работе [67] для применения против симметричных альтернатив, к которым как раз относятся рассматриваемые в данном руководстве конкурирующие гипотезы H_1, H_2 и H_3.

В качестве статистики критерия рассматривается отношение двух оценок дисперсии

$$I = \frac{s_m^2}{\tilde{s}^2}, \tag{2.29}$$

где s_m^2 находится по выражению для оценки несмещённой дисперсии с заменой арифметического среднего оценкой медианы $\tilde{x}$, вычисленной по выборке

$$s_m^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{x})^2 .$$

В качестве второй оценки $\tilde{s}^2$ рассматривается робастная, устойчивая к выбросам оценка, определяемая соотношением [67]

$$\tilde{s}^2 = \frac{n\sum\limits_{|z_i|<1}(x_i - \tilde{x})^2\left(1 - z_i^2\right)^4}{\left\{\sum\limits_{|z_i|<1}(x_i - \tilde{x})^2\left(1 - 5z_i^2\right)\right\}^2},$$

где $z_i = \begin{cases} \dfrac{x_i - \tilde{x}}{9med\left(\left|x_i - \tilde{x}\right|\right)}, & при \quad |z_i| < 1; \\ 0, & при \quad |z_i| \geq 1; \end{cases}$ $\tilde{x}$ – выборочная медиана, $med(\ )$ – медиана ряда в скобках.

Заметим, что авторы критерия рассматривали его как правосторонний.

На самом деле критерий **двусторонний**, так как при некоторых симметричных законах, например, при законе, соответствующим конкурирующей гипотезе H_1, распределение статистики $G(I|H_1)$ отклоняется от $G(I|H_0)$ влево, а не вправо (см. рис. 2.43).

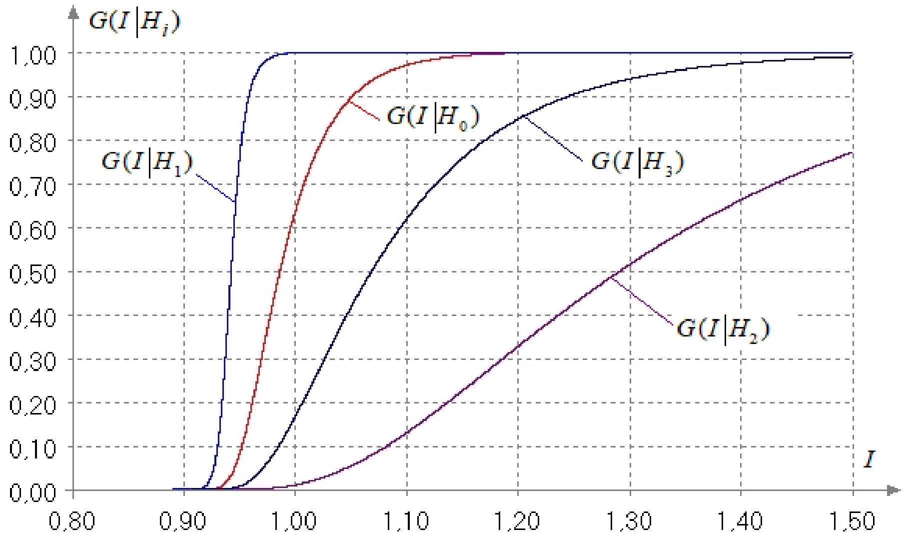


Рис. 2.43. Распределения статистики I при справедливости различных конкурирующих гипотез H_i при $n=100$

Рейтинг критерия – 25.

2.25. Критерий Филлибена (Filliben Test)

В работе [33] предложен критерий, в качестве статистики которого рассматривается коэффициент корреляции r между порядковыми статистиками $x_{(i)}$, построенными по выборке, и медианами порядковых статистик стандартного нормального закона (M_i). Статистика критерия имеет вид [33]:

$$r = \sum_{i=1}^{n}\left(x_{(i)} - \bar{x}\right)\left(M_i - \bar{M}\right) \Big/ \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_{(i)} - \bar{x}\right)^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\left(M_i - \bar{M}\right)^2\right]},$$

где $M_i = \Phi^{-1}(m_i)$ (Φ – функция Лапласа); m_i – медиана i -й порядковой статистики из равномерного распределения на интервале [0, 1]. Так как $\bar{M} = 0$ и $M_i = M_{n-i+1}$, то

$$r = \sum_{i=1}^{n} M_i x_{(i)} \Big/ \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} M_i^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_{(i)} - \bar{x}\right)^2\right]}.$$

Более экономична в вычислительном плане статистика [108]:

$$r = \frac{\sum\limits_{i=[n/2]+1}^{n} M_i \left(x_{(i)} - x_{(n-i+1)}\right)}{\sqrt{\left[2\sum\limits_{i=[n/2]+1}^{n} M_i^2\right]\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_{(i)} - \bar{x}\right)^2\right]}}. \qquad (2.30)$$

Для вычисления m_i автором [33] рекомендуется воспользоваться следующими соотношениями.

$$m_i = \begin{cases} i = m_n, & i = 1, \\ (i - 0.3175)/(n + 0.365), & i = 2, \ldots, n-1, \\ 0.5^{1/n}, & i = n. \end{cases}$$

Критерий **левосторонний**: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при малых значениях r. Зависимость распределения $G(r|H_0)$ статистики критерия Филиббена от объёмов выборок иллюстрирует рис. 2.44.

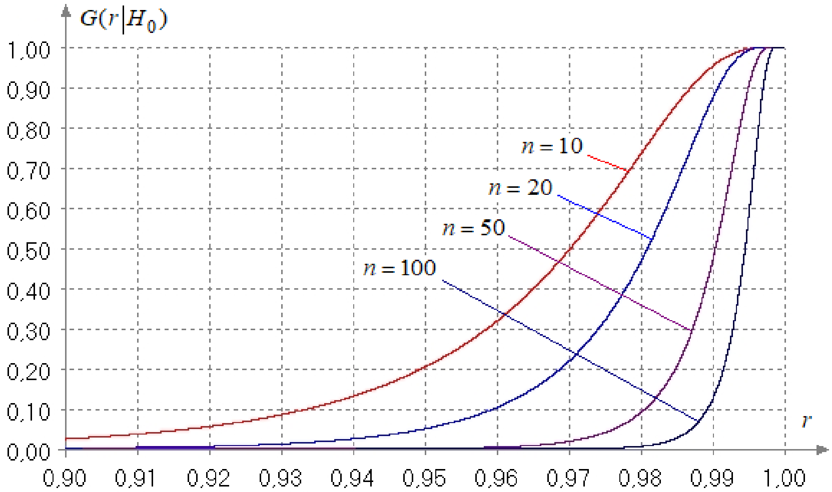


Рис. 2.44. Зависимость распределения $G(r|H_0)$ от n

Рейтинг критерия – 11.

2.26. Критерий Шапиро–Франциа (Shapiro–Francia Test)

Критерий Шапиро–Уилка [76] характеризуется достаточно высокой мощностью относительно рассматриваемых в руководстве конкурирующих гипотез, но использование его при $n > 50$ затруднительно из-за отсутствия необходимых коэффициентов α_k .

Поэтому в [78] была предложена модификация критерия Шапиро–Уилка со статистикой:

$$W` = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{(i)} - \bar{x}\right)^2}, \qquad (2.31)$$

где

$$b_i = m_{i,n} \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{n} m_{j,n}^2}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и $m_{i,n}$ – представляют собой математические ожидания i-х порядковых статистик для стандартного нормального закона по выборке объёмом n.

Используемые в статистике значения $m_{i,n}$ получены и представлены в [44] для $n \le 400$.

Критерий **левосторонний**: проверяемая гипотеза H_0 о нормальности отклоняется при малых значениях статистики.

Исследования показали, что статистические свойства модификация критерия Шапиро–Франциа полностью эквивалентны модификации критерия Вайсберга–Бингема.

Рейтинг критерия – 7.5.

2.27. Критерий Вайсберга–Бингема (Weisberg–Bingham Test)

В [92] была модифицирована уже статистика Шапиро–Францию, что произошло за счёт использования приближенных оценок для математических ожиданий i-х порядковых статистик для стандартного нормального закона.

Модификация статистики имеет тот же вид:

$$\tilde{W}` = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i x_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{(i)} - \bar{x}\right)^2}, \tag{2.32}$$

где

$$\tilde{b}_i = \tilde{m}_{i,n} \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \tilde{m}_{j,n}^2}, \quad i = 1,\ldots,n,$$

и вместо математических ожиданий порядковых статистик стандартного нормального закона $m_{i,n}$ используется их аппроксимация

$$\tilde{m}_{i,n} = \Phi^{-1}\left(\frac{i - 3/8}{n + 1/4}\right),$$

предложенная [10].

Критерий **левосторонний**. проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при малых значениях $\tilde{W}`$.

Распределения $G(\tilde{W}`|H_0)$ статистики зависят от n. Эта зависимость демонстрируется на рис. 2.45.

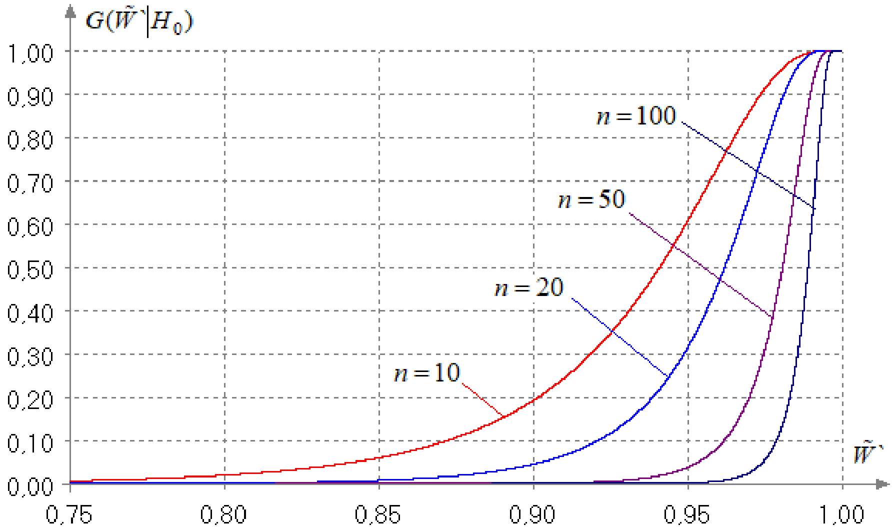


Рис. 2.45. Зависимость распределения $G(\tilde{W}`|H_0)$ от n

Следует подчеркнуть более значительную смещённость этой модификации критерия по сравнению с исходным критерием Шапиро–Уилка (и меньшую мощность при $n = 40 \div 50$) по отношению к гипотезе H_1.

Рейтинг критерия – 7.5.

2.28. Критерий Жанга (Zhang Test)

Идея построения предложенного в [98] критерия нормальности заключается в вычислении двух таких линейных комбинаций порядковых статистик, построенных по выборке, что они представляют собой две несмещённые оценки среднего квадратичного отклонения σ.

В качестве статистики критерия рассматривается отношение этих линейных комбинаций:

$$Q = \ln\left(\frac{q_1}{q_2}\right). \tag{2.33}$$

Оценки q_1 и q_2 вычисляются в соответствии с выражениями

$$q_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_{(i)} \ ,$$

$$q_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i x_{(i)} \ ,$$

где коэффициенты линейных комбинаций a_i и b_i находятся следующим образом:

$$a_i = \frac{1}{(u_i - u_1)(n-1)}, \quad i = 2,\ldots,n;$$

$$a_1 = \textstyle\sum_{i=2}^{2} a_i;$$

$$b_i = -b_{n-i+1} = \frac{1}{(u_i - u_{i+4})(n-4)}, \quad i = 1,\dots,4;$$

$$b_i = \left(\frac{1}{u_i - u_{i+4}} - \frac{1}{u_{i-4} - u_i} \right) \Big/ (n-4), \quad i = 5,\dots,n-4;$$

где

$$u_i = \Phi^{-1}\left(\frac{i - 3/8}{n + 1/4} \right).$$

При справедливости проверяемой гипотезы H_0 о нормальности значение Q должно быть равно нулю. При конкурирующей гипотезе ожидаемое значение Q должно отклоняться от нуля. Критерий **двусторонний**. Распределение $G(Q|H_0)$ зависит от объёмов выборки n и приблизительно нормально со средним значением 0.

Рейтинг критерия – 48.

2.29. Критерий Лина–Мудхолкара (Lin–Mudholkar Test)

Критерий определяется следующим образом [64, 108]. По выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ объёмом n формируется n подвыборок, образуемых из полной исключением каждый раз одного наблюдения. Если по полной выборке $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$, то для подвыборок получаем

$$\bar{x}_i = (n\bar{x} - x_i)/(n-1),\quad s_i^2 = \frac{1}{n-1}\left[(n-1)s^2 - \frac{n}{n-1}(x_i - \bar{x})^2\right].$$

Так как распределение оценок s_i^2 отлично от нормального, а в критерии предполагается анализировать корреляционные связи пар $\left(\bar{x}_i, s_i^2\right)$, то вместо оценок дисперсии используют нормализующее их преобразование Вильсона–Хилферти

$$y_i = \left\{\frac{1}{n}\left[\sum_{j\neq i} x_j^2 - \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j\neq i} x_j\right)^2\right]\right\}^{1/3},\quad i = 1,...,n.$$

В результате рассматривается оценка коэффициента корреляции между величинами $\left(\bar{x}_i, y_i\right)$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2\right]^{1/2}}.$$

В качестве статистики критерия рассматривается нормализующее преобразование:

$$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}.$$

А так как дисперсия $\sigma^2(z)$ достаточно точно аппроксимируется выражением [64]

$$\sigma^2(z) = \frac{3}{n} - \frac{7.324}{n^2} + \frac{53.005}{n^3},$$

то статистика

$$\tilde{z} = \frac{1}{2\sigma(z)} \ln \frac{1+r}{1-r}. \qquad (2.35)$$

при справедливости H_0 должна хорошо описываться стандартным нормальным законом. Действительно, отклонением распределения $G(\tilde{z}|H_0)$ от стандартного нормального закона можно пренебречь уже при $n \geq 30$.

Исследования показали, что относительно H_1, критерий смещённый и не способен отличить от H_0 подобные конкурирующие гипотезы.

Относительно гипотез H_2 и H_3, которым также соответствуют симметричные законы, критерий проявляет мощность ниже среднего по сравнению с большинством критериев. Но относительно асимметричных альтернатив критерий оказывается достаточно эффективным.

Рейтинг критерия – 43.

2.30. Критерий Чена–Шапиро (Chen–Shapiro Test)

В работе [16] предложен критерий со статистикой следующего вида

$$QH = \frac{1}{s(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{(i+1)} - x_{(i)}}{\tilde{m}_{i+1} - \tilde{m}_i} , \tag{2.36}$$

где $x_{(i)}$ – порядковые статистики, построенные по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ объёмом n, $\tilde{m}_i = \Phi^{-1}\left(\frac{i-3/8}{n+1/4}\right)$ – аппроксимации математических ожиданий порядковых статистик стандартного нормального закона, $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$. Критерий со статистикой QH – **левосторонний**.

При выборе статистики в эквивалентной форме

$$QH^* = \sqrt{n}(1 - QH) \tag{2.37}$$

критерий становится **правосторонним** с, возможно, более предпочтительным для применения диапазоном значений статистики при справедливости H_0. Распределения $G(QH|H_0)$ и $G(QH^*|H_0)$ зависят от n (см. рис. 2.46).

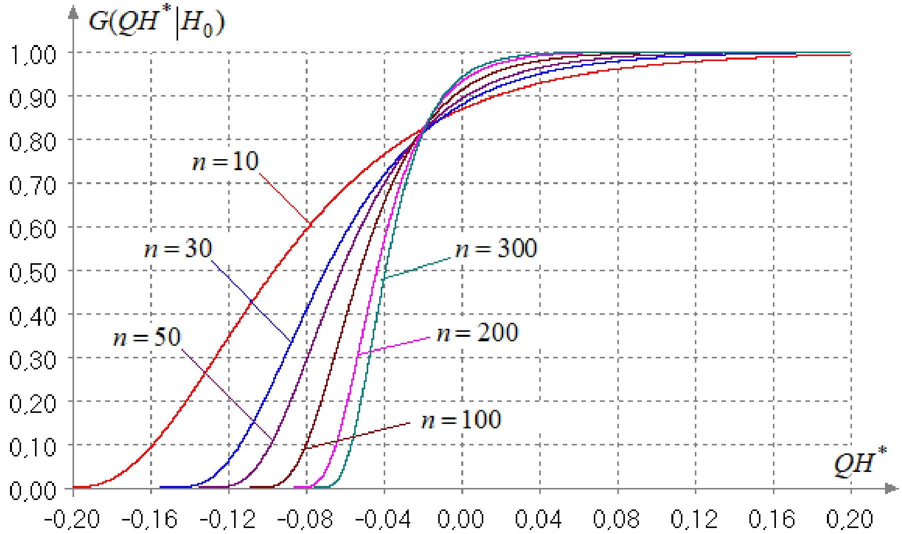


Рис. 2.46. Зависимость распределения $G(QH^*|H_0)$ от n

Рейтинг критерия – 12.

2.31. Критерий Бонетта–Сейер (Bonett–Seier Test)

В статистике критерия, рассмотренного в [11], связаны две различные меры, характеризующие эксцесс. Статистика критерия имеет вид

$$Z_\omega = \frac{\sqrt{n+2}(\hat{\omega}-3)}{3.54}, \qquad (2.38)$$

где $\hat{\omega} = 13.29(\ln s - \ln \hat{\tau})$, $\hat{\tau} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$, $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

Критерий **двусторонний**. Распределение статистики $G(Z_\omega|H_0)$ сходится к стандартному нормальному закону, но, как показали исследования, достаточно медленно.

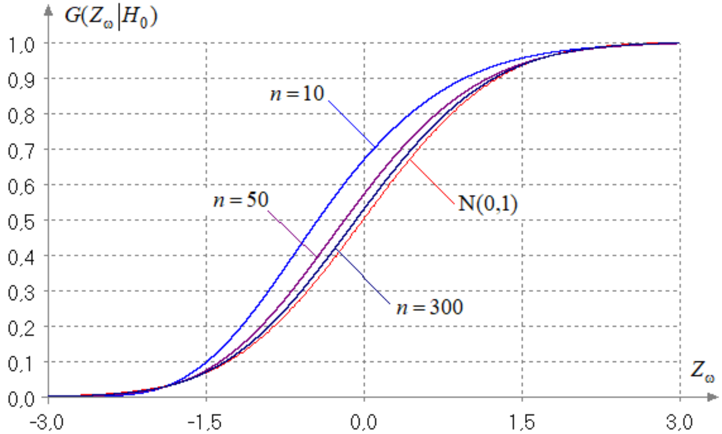


Рис. 2.47. Сходимость распределения $G(Z_\omega|H_0)$ к N(0,1)

Рейтинг критерия – 17.5.

2.32. Критерий Али-Чорго-Ревеса (Aly–Csorgo–Revesz Test)

Совокупность похожих критериев рассмотрена в работах [1, 2]. Статистика критерия имеет вид [2]:

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{x_{(i)} - \bar{x}}{s} - \Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1} \right) \right\}^2 \varphi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1} \right) \right), \qquad (2.39)$$

где $x_{(i)}$ – порядковые статистики, построенные по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ объёмом n, $\Phi(\ )$ – функция распределения стандартного нормального закона, $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$.

Критерий **правосторонний**.

Наше исследование зависимости распределения $G(M_n | H_0)$ статистики M_n от объёмов выборок n показало, что оно достаточно быстро сходится к некоторому асимптотическому распределению. В качестве этого асимптотического распределения предлагается использовать модель бета-распределения III рода с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 \mathrm{B}(\theta_0, \theta_1)} \frac{\left(\frac{x - \theta_4}{\theta_3} \right)^{\theta_0 - 1} \left(1 - \frac{x - \theta_4}{\theta_3} \right)^{\theta_1 - 1}}{\left[1 + (\theta_2 - 1) \frac{x - \theta_4}{\theta_3} \right]^{\theta_0 + \theta_1}}$$

и значениями параметров $\theta_0 = 4.6198$, $\theta_1 = 3.9986$, $\theta_2 = 8.4016$, $\theta_3 = 1.2044$, $\theta_4 = 0.0398$, которая была построена по результатам статистического моделирования распределения $G(M_n | H_0)$ при $n = 3000$.

Рейтинг критерия – 27.5.

2.33. Критерии Бонтемпса–Меддахи (Bontemps–Meddahi Test)

В работе [12] предложено семейство критериев нормальности со статистиками, задаваемыми в форме

$$BM_{3-p} = \sum_{k=3}^{p} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} H_k(z_i) \right)^2 , \qquad (2.40)$$

где $z_i = (x_i - \bar{x}) / s$, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$, а $H_k(\cdot)$ – полином Эрмита порядка k. В основном упоминается [85] применение критериев со статистиками вида BM_{3-4} и BM_{3-6} при p равном 4 и 6.

Последовательность полиномов Эрмита определяется рекурсивной формулой

$$\forall k > 1,\ \ H_k(x) = \frac{1}{\sqrt{k}}\left\{ xH_{k-1}(x) - \sqrt{k-1}H_{k-2}(x) \right\},$$

$$H_0(x) = 1,\ \ H_1(x) = x.$$

В частности, для $k = 2 \div 4$ имеем полиномы вида

$$H_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - 1),\quad H_3(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}(x^3 - 3x),\quad H_4(x) = \frac{1}{\sqrt{24}}(x^4 - 6x^2 + 3).$$

При вычислении статистик BM_{3-p} требуемые значения $H_k(z_i)$ для $k \ge 2$ в целях снижения числа операций и уменьшения погрешностей целесообразно находить по рекурсивной формуле.

В [12] показано, что при справедливости гипотезы H_0 и принадлежности выборок $x_1, x_2, ..., x_n$ нормальным законам статистики BM_{3-p} в асимптотике подчиняются χ^2_{p-2}-распределениям.

Однако на самом деле сходимость распределений $G(BM_{3-p}|H_0)$ к χ^2_{p-2}-распределениям очень медленная. Например, при проверке гипотез с использованием критерия со статистикой BM_{3-4} на соответствующее χ^2_2-распределение можно опираться лишь при объёмах выборок порядка 1000 (см. рис. 2.48).

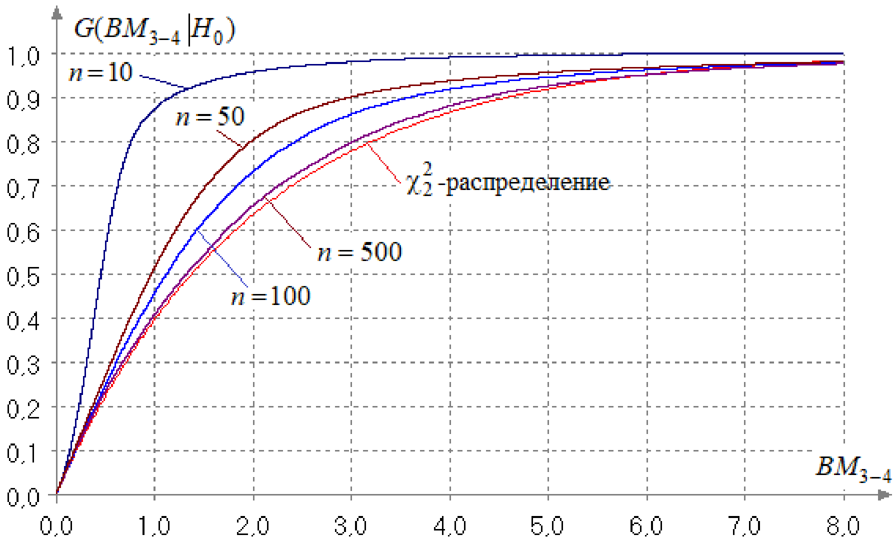


Рис. 2.48. Сходимость $G(BM_{3-4}|H_0)$ к χ^2_2-распределению с ростом n

В случае критерия со статистикой BM_{3-6} ситуация ещё хуже: асимптотическое χ_4^2-распределение можно обосновано использовать при $n > 10000$ (см. рис. 2.49).

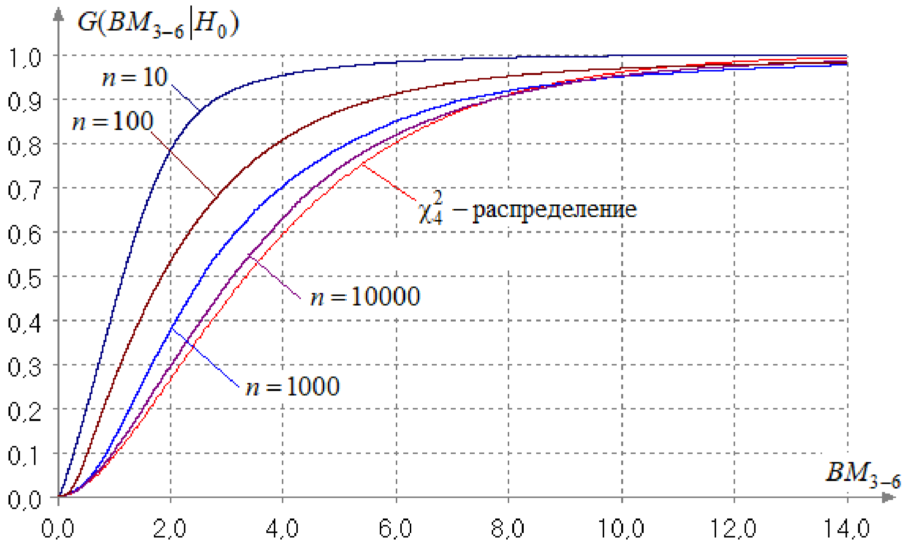


Рис. 2.49. Сходимость $G(BM_{3-6}|H_0)$ к χ_4^2-распределению с ростом n

Поэтому приходится пользоваться таблицами критических значений или находить достигнутый уровень значимости p_{value}, используя метод Монте-Карло.

Рейтинг критерия со статистикой BM_{3-4} – 19, с BM_{3-6} – 4.

2.34. Критерии Десгань–Мишо (Desgagne–Micheaux Tests)

Первый из критериев, предложенный в [26], предназначен для обнаружения отклонений от нормальности на хвостах распределения.

Статистика критерия определяется выражением

$$R_n = n\mathbf{r}_n\left(\bar{x},s\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{J}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_0\mathbf{v}_0^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{r}_n\left(\bar{x},s\right), \tag{2.41}$$

где

$$\mathbf{r}_n\left(\bar{x},s\right) \approx \mathbf{r}_n\left(\mu,\sigma\right) - \frac{1}{2}(1-T_n)\mathbf{v}_0,$$

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2, \quad y_i = \left(x_i - \mu\right)/\sigma,$$

$$\mathbf{r}_n\left(\mu,\sigma\right) = \begin{bmatrix} 0.18240929 - \dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 \ln\left|y_i\right| \\ 0.53482230 - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln\left(1+\left|y_i\right|\right) \\ 0.20981558 - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln\left(\ln(e+\left|y_i\right|)\right) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 0.86481850 \\ 0.38512925 \\ 0.15594892 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_0\mathbf{v}_0^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 00502754623 & -00336793487 & -00134179540 \\ -00336793487 & 00266463308 & 00105350321 \\ -00134179540 & 00105350321 & 00416669944 \end{bmatrix},$$

$$\left(\mathbf{J}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_0\mathbf{v}_0^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1259.04213 & -32040.6957 & 85065.7774 \\ -32040.6957 & 918649.901 & -2425883.34 \\ 85065.7774 & -2425883.34 & 6407749.82 \end{bmatrix}.$$

При вычислении статистики R_n вместо неизвестных μ и σ используются их оценки $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ и $s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$.

Критерий **правосторонний**.

Асимптотическим распределением статистики R_n при справедливости H_0 является χ_3^2-распределение [26].

Однако исследования распределений $G(R_n | H_0)$ методами статистического моделирования показывают их крайне медленную сходимость к χ_3^2-распределению: совсем пренебречь отклонением $G(R_n | H_0)$ от χ_3^2-распределения можно лишь при $n > 2000$, а при $n = 500$ различие ощутимо.

Второй и третий критерии предложены в [27] и ориентированы на обнаружение отклонений, связанных с асимметрией и эксцессом.

Статистика **второго** критерия задаётся соотношением

$$X_{APD} = \frac{nB_2^2}{(3-8/\pi)(1-1.9/n)} + \\ + \frac{n\left[\left(K_2 - B_2^2\right)^{1/3} - \left((2-\ln 2-\gamma)/2\right)^{1/3}(1-1.026/n)\right]^2}{72^{-1}\left((2-\ln 2-\gamma)/2\right)^{-4/3}\left(3\pi^2-28\right)\left(1-2.25/n^{0.8}\right)}, \qquad (2.42)$$

где $$B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 sign(Z_i), \quad K_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \ln(Z_i),$$

$$Z_i = (x_i - \bar{x})/s, \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2},$$

$\gamma = 0.577215665...$ – константа Эйлера.

Критерий **правосторонний**. Асимптотическим распределением статистики X_{APD} при справедливости гипотезы H_0 является χ_2^2-распределение. При $n \ge 10$ отклонением $G(X_{APD} | H_0)$ от χ_2^2-распределения можно пренебречь.

Статистика **третьего** критерия [27] задаётся соотношением

$$X_{EPD}=\frac{n^{1/2}\left[\dfrac{\left(2K_2\right)^{\alpha_n}-1}{\alpha_n}+\dfrac{(2-\ln 2-\gamma)^{-0.06}-1}{0.06}+\dfrac{1.32}{n^{0.95}}\right]}{\left[(2-\ln 2-\gamma)^{-2.12}\left(3\pi^2-28\right)/2-3.78/n^{0.733}\right]^{1/2}}, \qquad (2.43)$$

где $K_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2\ln(Z_i)$, $Z_i=(x_i-\bar{x})/s$, $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$, γ – константа Эйлера.

Критерий со статистикой X_{EPD} является **двусторонним**.

Асимптотическим распределением для $G(X_{EPD}|H_0)$ является стандартный нормальный закон. Уже при $n=10$ отклонением $G(X_{EPD}|H_0)$ от $\mathrm{N}(0,1)$ можно пренебречь.

Все три критерия Десгань–Мишо обладают достаточно высокой мощностью, отсутствует смещение относительно конкурирующей гипотезы H_1 при любых объёмах выборок.

Рейтинг критерия со статистикой R_n – 29, с X_{APD} – 1, с X_{EPD} – 3.

2.35. Критерии Оя (Oja Tests)

В [70] для использования в критериях нормальности автором были предложены две статистики, имеющие следующий вид

$$T_1 = \frac{1}{C_n^3} \sum_{1 \le i < j < k \le n} \frac{x_{(k)} - x_{(j)}}{x_{(k)} - x_{(i)}},$$

$$T_2 = \frac{1}{C_n^4} \sum_{1 \le i < j < k < l \le n} \frac{x_{(k)} - x_{(j)}}{x_{(l)} - x_{(i)}},$$

и которые должны быть эффективны относительно альтернатив с асимметрией и эксцессом, отличающимися от нормального закона.

Так как при справедливости H_0 $E\left[T_1\right] = 0.5$, $E\left[T_2\right] = 0.298746$, а оценки дисперсий в [70] представлены 2.130, то нормализованные статистики принимают следующую форму

$$\tilde{T}_1 = \frac{T_1 - 0.5}{\sqrt{D[T_1]}},$$

$$\tilde{T}_2 = \frac{T_2 - 0.298746}{\sqrt{D[T_1]}},$$

и должны хорошо описываться стандартным нормальным законом, а статистика T_{12}

$$\tilde{T}_{12} = \left(\tilde{T}_1\right)^2 + \left(\tilde{T}_2\right)^2 \tag{2.44}$$

должна описываться χ_2^2-распределением.

В качестве критерия нормальности можно рассматривать критерий со статистикой $\tilde{T}_{12}$.

Примечание 1. Если при вычислении T_1 обнаруживается ситуация $x_{(k)} = x_{(i)}$, или при вычислении T_2 – ситуация $x_{(l)} = x_{(i)}$, то статистика $\tilde{T}_{12}$ не вычисляется, $p_{value} = 0$ и проверяемая гипотеза H_0 отклоняется.

Таблица 2.130

Оценки дисперсий $\mathbf{D}[\mathbf{T_1}]$ и $\mathbf{D}[\mathbf{T_2}]$ при нормальности

n	$D[T_1]$	$D[T_2]$	n	$D[T_1]$	$D[T_2]$
5	0.01512	0.01549	10	0.00358	0.00196
6	0.01045	0.00800	15	0.00218	0.00098
7	0.00740	0.00473	20	0.00144	0.00058
8	0.00575	0.00350	30	0.00089	0.00032
9	0.00457	0.00248	∞	$0.0214/n$	$0.0026/n$

При объёмах выборок $n \le 30$ и соответствующих значениях дисперсий $D[T_1]$ и $D[T_2]$, взятых из таблицы 2.130, распределения статистик $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ хорошо согласуются со стандартным нормальным законом, а распределение статистики $\tilde{T}_{12}$ – с χ_2^2-распределением.

Но при $n > 30$ приближения для дисперсий $D[T_1]$ и $D[T_2]$, приведенные в таблице 2.130, дают значения, заниженные по сравнению с истинными значениями дисперсий, а распределения статистик $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ уже описываются нормальными законами со значениями $\sigma > 1$. И распределение статистики $\tilde{T}_{12}$ уже не согласуется с χ_2^2-распределением. На рис. 2.50 показана зависимость распределения $G(\tilde{T}_{12} | H_0)$ статистики $\tilde{T}_{12}$ от n и характер сходимости этого распределения к χ_2^2-распределению.

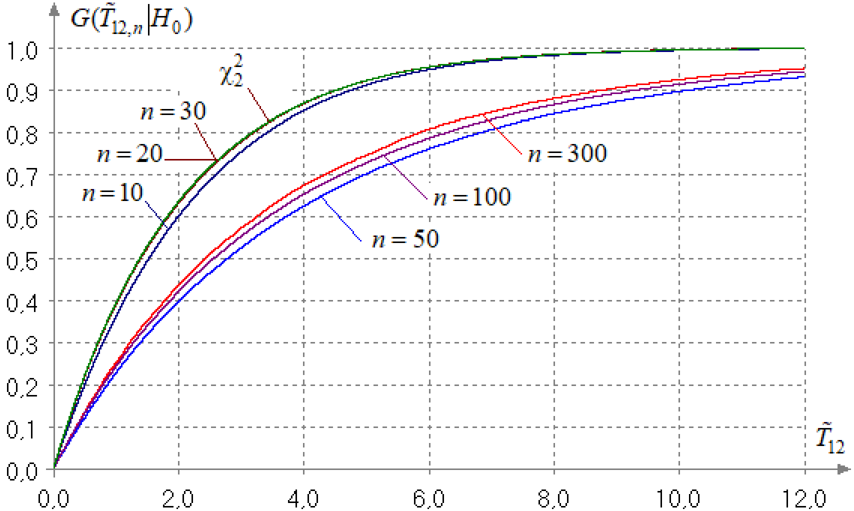


Рис. 2.50. Сходимость $G(\tilde{T}_{12}|H_0)$ к χ_2^2-распределению с ростом n

Очевидно, что при условии построения более точных регрессионных зависимостей $D[T_1]$ и $D[T_2]$ от n (чем в таблице 2.130) можно было бы для вычисления p_{value} всегда использовать асимптотическое χ_2^2-распределение. В данном же случае это возможно лишь при $n \le 30$.

Чтобы реализовать возможность принятия решения о результатах проверки гипотезы о нормальности, в таблице 2.131 приведены полученные в результате статистического моделирования критические значения статистики $\tilde{T}_{12}$ для некоторых n.

Таблица 2.131

Процентные точки статистики $\tilde{T}_{12}$ критерия Оя

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	3.993	4.782	6.097	7.412	9.202
20	3.767	4.552	5.866	7.176	8.697
30	3.749	4.543	5.875	7.200	8.953
40	8.619	10.706	14.409	18.302	23.593
50	8.235	10.224	13.736	17.419	22.419
60	7.990	9.928	13.284	16.815	21.782
80	7.718	9.558	12.913	16.356	21.089
100	7.560	9.376	12.668	15.945	20.432
150	7.361	9.132	12.268	15.566	19.906
200	7.233	8.933	11.904	14.998	19.661
300	7.088	8.839	11.986	14.981	19.485

В продолжение работы [70] в [71] автором были рассмотрены ещё две статистики:

$$T_3 = \frac{1}{C_n^3} \sum_{1 \le i < j < k \le n} \ln\left(\frac{x_{(k)} - x_{(j)}}{x_{(j)} - x_{(i)}} \right) = \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} \ln\left(x_{(j)} - x_{(i)} \right),$$

где $a_{ij} = (i + j - n - 1)n!/[3!(n-3)!]$, и

$$T_4 = \frac{1}{C_n^4} \sum_{1 \le i < j < k < l \le n} \ln\left\{ \frac{\left(x_{(k)} - x_{(j)} \right)^2}{\left(x_{(l)} - x_{(k)} \right)\left(x_{(j)} - x_{(i)} \right)} \right\} = \sum_{1 \le i < j \le n} b_{ij} \ln\left(x_{(j)} - x_{(i)} \right),$$

где $b_{ij} = \frac{1}{C_n^4}\left\{ 2(n-j)(i-1) - C_{n-j}^2 - C_{i-1}^2 \right\}$.

При справедливости H_0 математические ожидания статистик равны

$$E\left[T_3\right] = 0, \quad E\left[T_4\right] \approx -0.4523,$$

а дисперсии определяются приближенными выражениями

$$D\left[T_3\right] = \frac{1}{C_n^3}\left\{ 0.07478 C_3^1 C_{n-3}^2 + 0.03963 C_3^2 C_{n-3}^1 + 2.8979 \right\},$$

$$D\left[T_4\right] = \frac{1}{C_n^4}\left\{ 0.1311 C_4^1 C_{n-4}^3 + 0.0145 C_4^2 C_{n-4}^2 + 1.3355 C_4^3 C_{n-4}^1 + 8.8552 \right\}.$$

В [71] показано, что нормализованные статистики

$$\tilde{T}_3 = \frac{T_3}{\sqrt{D[T_3]}},$$

$$\tilde{T}_4 = \frac{T_4 + 0.4523}{\sqrt{D[T_4]}}$$

должны описываться стандартным нормальным законом. В качестве статистики критерия нормальности можно использовать статистику вида

$$\tilde{T}_{34} = \left(\tilde{T}_3\right)^2 + \left(\tilde{T}_4\right)^2, \qquad (2.45)$$

подчиняющуюся в асимптотике χ_2^2-распределению.

Примечание 1. Если при вычислении T_3 или T_4 обнаруживается ситуация $x_{(j)} = x_{(i)}$, то статистика $\tilde{T}_{34}$ не вычисляется, $p_{value} = 0$ и проверяемая гипотеза H_0 отклоняется.

Иссследование распределений статистик $\tilde{T}_3$ и $\tilde{T}_4$ методами статистического моделирования показало, что выражение для $D\left[T_3\right]$ даёт *заниженные* по сравнению с истинными значения дисперсий статистики T_3, а выражение для $D\left[T_4\right]$ – завышенные значения дисперсий статистики T_4. Вследствие приближенности оценок дисперсий распределения нормализованных статистик $\tilde{T}_3$ и $\tilde{T}_4$ отклоняются от стандартного нормального закона, а распределение статистики $\tilde{T}_{34}$ – от χ_2^2-распределения.

На рис. 2.51 показана зависимость распределения $G(\tilde{T}_{34}|H_0)$ статистики $\tilde{T}_{34}$ от n, откуда видно, что сходимость к χ_2^2-распределению отсутствует.

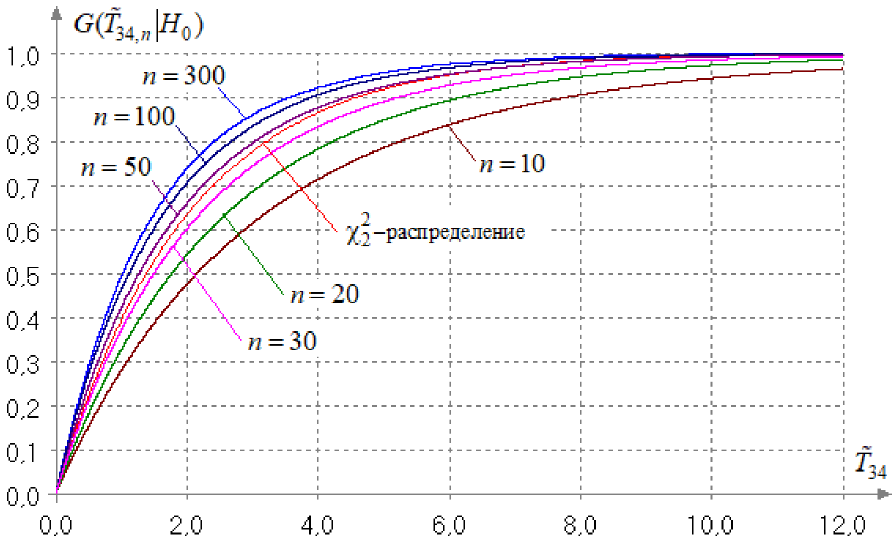


Рис. 2.51. Зависимость $G(\tilde{T}_{34}|H_0)$ от n и χ_2^2-распределение

По-видимому, можно построить более точные, чем приведенные автором, регрессионные зависимости для $D[T_3]$ и $D[T_4]$ как функции от n. И тогда можно будет для вычисления p_{value} использовать асимптотическое χ_2^2-распределение.

Но в данном случае это исключается. В этой связи в таблице 2.135 приведены полученные в результате статистического моделирования критические значения статистики $\tilde{T}_{34}$ для некоторых n.

Таблица 2.135

Процентные точки статистики $\tilde{T}_{34}$ критерия Оя

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	6.300	7.817	10.575	13.543	17.750
20	5.047	6.204	8.250	10.387	13.355
30	4.260	5.242	6.960	8.746	11.216
40	3.856	4.737	6.301	7.908	10.156
50	3.618	4.442	5.911	7.417	9.525
60	3.465	4.277	5.674	7.128	9.141
80	3.263	4.033	5.413	6.761	8.733
100	3.182	3.911	5.223	6.570	8.411
150	3.064	3.749	5.018	6.329	8.068
200	3.008	3.697	4.940	6.248	7.963
300	2.880	3.585	4.801	6.004	7.733

Рейтинг критерия со статистикой $\tilde{T}_{12}$ – 22, с $\tilde{T}_{34}$ – 40.5.

2.36. Модификация критерии Оя

Критерий Оя со статистикой (2.44) показал заметное преимущество в мощности перед критерием со статистикой (2.45), а недостатками обоих критериев оказалась невозможность использования в качестве распределений статистик $G(\tilde{T}_{12} | H_0)$ и $G(\tilde{T}_{34} | H_0)$ асимптотического χ_2^2-распределения. В случае статистики $\tilde{T}_{12}$ причина этого заключается в больших погрешностях оценок дисперсий $D[T_1]$ и $D[T_2]$, вычисляемых в соответствии с соотношениями $0.0214/n$ и $0.0026/n$.

Для устранения этого недостатка на основании результатов статистического моделирования распределений $G(T_1 | H_0)$ и $G(T_2 | H_0)$ статистик T_1 и T_2 для ряда объёмов выборок n были вычислены оценки $D[T_1]$ и $D[T_2]$. Далее для ряда оценок $D[T_1]$ и ряда оценок $D[T_2]$ были построены регрессионные зависимости как функции от n, позволяющие более точно, по сравнению с приводимыми в [70], оценивать $D[T_1]$ и $D[T_2]$.

Для статистики T_1 зависимость $D[T_1]$ от n при $n \geq 10$ имеет вид

$$D[T_1] \approx \begin{cases} 0.108785 n^{-1.44648}, & n \leq 20, \\ 0.037578 n^{-1.10380}, & n > 20, \end{cases}$$

а для статистики T_2 –

$$D[T_2] \approx \begin{cases} 0.1224 n^{-1.797535}, & n \leq 20, \\ 0.019202 n^{-1.1941}, & n > 20. \end{cases}$$

Все остальные соотношения при вычислении статистики $\tilde{T}_{12}$ те же, что и в (2.44).

В данном случае распределения $G(\tilde{T}_{12} | H_0)$ статистики полученной модификации достаточно хорошо согласуются с χ_2^2-распределением, а оценки мощности те же, что для критерия со статистикой $\tilde{T}_{12}$ Оя.

2.37. Критерий Чена (Chen Test)

В работах [17, 18] предложен критерий, статистика которого при проверке нормальности имеет следующий вид

$$G_C = \frac{(n+1)\sum_{i=1}^{n}\left\{\Phi\left(\frac{x_{(i)}-\bar{x}}{s}\right)-\Phi\left(\frac{x_{(i-1)}-\bar{x}}{s}\right)-\frac{1}{n+1}\right\}^2}{n}, \tag{2.46}$$

где $x_{(i)}$ – порядковые статистики, $x_{(0)} = -\infty$, $x_{(n+1)} = \infty$, $\Phi(\cdot)$ – функция распределения стандартного нормального закона, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$.

Критерий **правосторонний**: проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистик. Зависимость распределений $G(G_C | H_0)$ от объёмов выборок n показана на рис. 2.52.

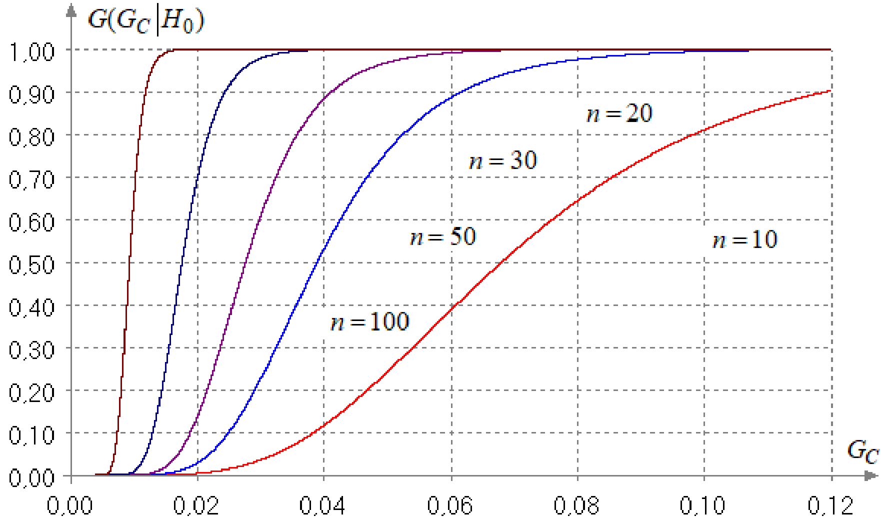


Рис. 2.52. Зависимость распределений $G(G_C|H_0)$ статистики Чена от n

В таблице 2.139 приведены полученные процентные точки для распределений $G(G_C|H_0)$ статистики при некоторых объёмах выборок.

Таблица 2.139

Процентные точки статистики $\mathbf{G_C}$ критерия Чена

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.1072	0.1194	0.1398	0.1602	0.1865
20	0.0564	0.0618	0.0708	0.0800	0.0923
30	0.0381	0.0413	0.0466	0.0520	0.0592
40	0.0287	0.0308	0.0344	0.0379	0.0427
50	0.0229	0.0245	0.0271	0.0296	0.0331
60	0.0191	0.0203	0.0223	0.0242	0.0269
80	0.0142	0.0150	0.0163	0.0176	0.0193
100	0.0113	0.0119	0.0128	0.0137	0.0149
150	0.00746	0.00777	0.00827	0.00874	0.00936
200	0.00554	0.00575	0.00607	0.00637	0.00676
300	0.00365	0.00376	0.00393	0.00409	0.00429

Рейтинг критерия – 49.

2.38. Критерий Брис–Хьюберт–Стройфа (Brys–Hubert–Struyf Test)

Этот критерий [14] опирается на робастные меры асимметрии и “тяжести хвостов”. Следуя [15], приведём необходимые сведения, используемые при вычислении статистики предложенного критерия нормальности.

Пусть $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$ вариационный ряд, полученный по выборке, и $\tilde{m}_n$ – оценка медианы

$$\tilde{m}_n = \begin{cases} (x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)})/2, & \text{при } n \text{ четном}, \\ x_{(n+1)/2}, & \text{при } n \text{ нечетном}. \end{cases}$$

Далее рассматриваются множества:

$$X^+ = \left\{ x_{(i)} \middle| x_{(i)} \ge \tilde{m}_n \right\},$$

$$X^- = \left\{ x_{(i)} \middle| x_{(i)} \le \tilde{m}_n \right\},$$

с количеством элементов p и q, соответственно, и для $x_{(i)}^+ \in X^+$ и $x_{(j)}^- \in X^-$ вводится ядерная функция вида

$$h(x_{(i)}^+, x_{(j)}^-) = \begin{cases} \dfrac{(x_{(i)}^+ - \tilde{m}_n) - (\tilde{m}_n - x_{(j)}^-)}{x_{(i)}^+ - x_{(j)}^-}, & \text{при } x_{(i)}^+ > x_{(j)}^-, \\ \operatorname{sign}(p - 1 - i - j), & \text{при } x_{(i)}^+ = \tilde{m}_n = x_{(j)}^-. \end{cases}$$

Для множества всех pq вычисленных значений ядерной функции

$$\left\{ h(x_{(i)}^{+}, x_{(j)}^{-}) \,\middle|\, x_{(i)}^{+} \in X^{+}, \quad x_{(j)}^{-} \in X^{-} \right\}$$

находится медиана, обозначим её как MC. Вышеописанные вычисления можно рассматривать как процедуру вычисления MC по всем наблюдениям, то есть $MC = MC(x \in X)$, где $X = X^{+} \cup X^{-}$.

Можно рассмотреть соответствующие меры для левого $LMC = -MC(x < \tilde{m}_n)$ и правого $RMC = MC(x > \tilde{m}_n)$ хвостов распределения, вычисляемые по тому же алгоритму, что и $MC(x \in X)$.

Статистика критерия нормальности имеет вид [14]:

$$T_{MC-LR} = n(\mathbf{w} - \boldsymbol{\omega})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{w} - \boldsymbol{\omega}), \qquad (2.47)$$

где $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} MC & LMC & RMC \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0.199 & 0.199 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.323 & -0.323 \\ 0.323 & 2.62 & -0.0123 \\ -0.323 & -0.0123 & 2.62 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.85416669 & -0.1048117 & 0.1048117 \\ -0.1048117 & 0.39454887 & -0.01106917 \\ 0.1048117 & -0.01106917 & 0.39454887 \end{bmatrix}.$$

Критерий **правосторонний**: проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики. Асимптотическим распределением статистики T_{MC-LR} является χ_3^2-распределение.

Однако при относительно малых объёмах выборок n распределения статистики $G(T_{MC-LR}|H_0)$ существенно отличаются от χ_3^2-распределения. Лишь при объёмах выборок порядка 300 распределения $G(T_{MC-LR}|H_0)$ практически не отличаются χ_3^2-распределения (см. рис. 2.53).

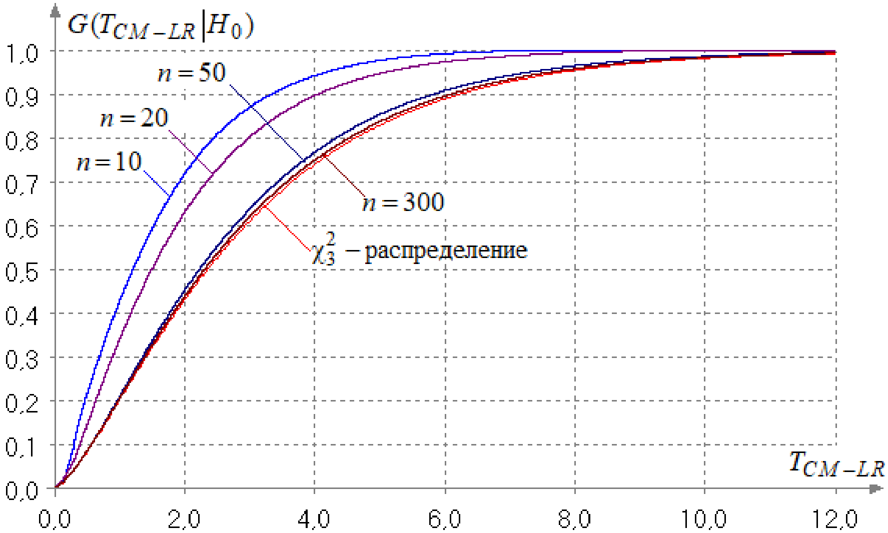


Рис. 2.53. Сходимость распределений $G(T_{CM-LR}|H_0)$ к χ_3^2-распределению в зависимости от n

Рейтинг критерия – 50.

3. Критерии согласия при проверке нормальности

При проверке гипотезы H_0 о принадлежности выборки нормальному закону можно использовать любой непараметрический критерий или критерии типа хи-квадрат.

5. Ранжирование критериев нормальности по мощности

Имея в наличии целый арсенал критериев, специалисту в конкретной области желательно знать, применение каких критериев является предпочтительным. Желательно, чтобы при заданной вероятности α ошибки 1-го рода критерий обеспечивал минимальную вероятность β ошибки 2-го рода. Другими словами, желательно, чтобы критерий обладал максимальной мощностью $1-\beta$ относительно рассматриваемых (близких) конкурирующих законов.

В процессе подготовки данного варианта руководства методами статистического моделирования исследовались свойства рассматриваемого множества критериев и в обязательном порядке оценивалась мощность критериев относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3, соответствующих симметричным законам. Симметричные законы, соответствующие гипотезам H_1 и H_3 выбраны в связи с тем, что их достаточно трудно отличать от нормального закона.

На основании оценок мощности, показанной критериями относительно H_1, H_2 и H_3, уже можно отдавать предпочтение тем или иным критериям, отказываясь от тех, которые не зарекомендовали себя способностью, например, отличать от H_0 гипотезы типа H_1 и H_3.

В таблице 5.1 все критерии проверки нормальности, рассмотренные в разделах 2 –4 , упорядочены по убыванию мощности относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3 (по величине мощности $1-\beta$, проявленной критериями при $n=50$ и заданном уровне значимости $\alpha=0.1$). Серым цветом в ячейках таблицы, как и ранее, отмечены критерии, для которых в процессе исследования мощности относительно соответствующей гипотезы была выявлена смещенность критерия, то есть при некоторых, как правило, небольших n было обнаружено, что $1-\beta<\alpha$.

Уже то, как зарекомендовал себя соответствующий критерий по мощности относительно соответствующей гипотезы, является определённой характеристикой. Очевидно, что предпочтительней применять критерии, оказавшиеся в верхних частях соответствующих столбцов.

К сожалению, если критерий способен хорошо отличать H_1 от H_0, это не значит, что он также легко отличает от H_0 гипотезу H_3 или более далёкую гипотезу H_2. Например энтропийные критерии Васичека, Корреа и Эбрахими показывают высокую мощность относительно H_1 и имеют низкие оценки мощности относительно H_2 и H_3. А энтропийный критерии Заманзаде–Аргами со статистикой TZ_2 наоборот: низкую мощность относительно H_1 и высокую относительно H_2 и H_3.

Тем не менее, ориентируясь на таблицу 5.1, можно выделить и наиболее предпочтительные критерии, и наименее предпочтительные критерии, включив в последние критерии, сосредоточенные в нижней части таблицы 5.1. Например, не очень эффективны критерии Чена, Локка–Сперриера T_{1n}, Брис–Хьюберт–Стройфа,

В таблице 5.2 добавлена колонка с полученными оценками мощности критериев относительно гипотезы H_4, соответствующей асимметричному распредлению минимального значения (при $n = 50$ и $\alpha = 0.1$). Теперь для более однозначных выводов по множеству симметричных и асимметричных альтернатив можно поступить следующим образом.

Таблица 5.1

Упорядоченность критериев нормальности по мощности относительно гипотез $\mathbf{H_1}$ - $\mathbf{H_3}$ $(n = 50,\ \alpha = 0.1)$

№	H_1	1-β	H_2	1-β	H_3	1-β
1	Десгань–Мишо X_{EPD}	0.451	Шпигельхальтера	0.790	Гелы–Гаствирта	0.378
2	Корреа	0.441	Гелы–Гаствирта	0.753	Заманзаде–Аргами TZ_2	0.366
3	Васичека	0.434	Заманзаде–Аргами TZ_2	0.752	Хегази–Грина T_2	0.359
4	Эбрахими	0.434	Гаствирта	0.731	Харке–Бера	0.349
5	Д`Агостино Z_2	0.428	Хегази–Грина T_2	0.723	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_4}	0.349
6	Оя $\tilde{T}_{12}$	0.406	Гири	0.722	Д`Агостино E_p	0.347
7	Дэвида–Хартли–Пирсона	0.400	Бонетта–Сейер	0.722	Шпигельхальтера	0.343
8	Гири	0.394	Десгань–Мишо X_{APD}	0.705	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_6}	0.342
9	Бонетта–Сейер	0.394	Десгань–Мишо X_{EPD}	0.705	Филлибена	0.340
10	Шапиро–Уилка	0.389	Филлибена	0.699	Шапиро-Франциа	0.333
11	Гаствирта	0.384	Заманзаде–Аргами TZ_1	0.695	Вайсберга-Бингема	0.333
12	Чена–Шапиро	0.327	Оя $\tilde{T}_{12}$	0.694	Заманзаде–Аргами TZ_1	0.330
13	Хи-квадрат Пирсона	0.311	Шапиро-Франциа	0.691	Десгань–Мишо X_{APD}	0.318
14	Десгань–Мишо X_{APD}	0.304	Вайсберга-Бингема	0.691	Мартинеса–Иглевича	0.301

Продолжение таблицы 5.1

№	H_1	1-β	H_2	1-β	H_3	1-β
15	Жанга Z_C	0.300	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_6}	0.689	Десгань–Мишо X_{EPD}	0.299
16	Заманзаде–Аргами TZ_1	0.293	Мартинеса–Иглевича	0.683	Ван Эса	0.298
17	Ватсона	0.293	Хегази–Грина T_1	0.674	Десгань–Мишо Rn	0.287
18	Андерсона–Дарлинга	0.287	Д\`Агостино E_p	0.671	Ройстона	0.273
19	Фросини	0.285	Десгань–Мишо Rn	0.670	Гаствирта	0.273
20	Али–Чорго–Ревеса	0.281	Ван Эса	0.667	Гири	0.272
21	Ройстона	0.280	Харке–Бера	0.654	Бонетта–Сейер	0.272
22	Купера	0.279	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_4}	0.653	Жанга Z_A	0.272
23	Эппса–Пулли	0.275	Али–Чорго–Ревеса	0.643	Жанга Z_C	0.270
24	Десгань–Мишо R_n	0.275	Андерсона–Дарлинга	0.630	Хегази–Грина T_1	0.267
25	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.269	Ватсона	0.626	Дэвида–Хартли–Пирсона	0.255
26	Оя $\tilde{T}_{34}$	0.262	Эппса–Пулли	0.623	Чена–Шапиро	0.251
27	Мартинеса–Иглевича	0.252	Фросини	0.623	Эппса–Пулли	0.249
28	Никулина–Рао–Робсона	0.240	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.621	Жанга Z_K	0.249

Продолжение таблицы 5.1

№	H_1	1-β	H_2	1-β	H_3	1-β
29	Жанга Z_A	0.239	Ройстона	0.616	Д`Агостино Z_2	0.241
30	Хегази–Грина T_1	0.218	Купера	0.589	Али–Чорго–Ревеса	0.240
31	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_6}	0.216	Жанга Z_A	0.578	Андерсона–Дарлинга	0.230
32	Шпигельхальтера	0.211	Чена–Шапиро	0.576	Оя $\tilde{T}_{12}$	0.228
33	Колмогорова	0.208	Жанга Z_K	0.569	Локка–Сперриера T_{2n}	0.222
34	Жанга Z_K	0.186	Жанга Z_C	0.548	Лина–Мудхолкара	0.216
35	Жанга	0.179	Колмогорова	0.540	Фросини	0.212
36	Д`Агостино E_p	0.164	Оя $\tilde{T}_{34}$	0.518	Жанга	0.212
37	Ван Эса	0.150	Локка–Сперриера T_{2n}	0.504	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.209
38	Шапиро-Франциа	0.139	Шапиро–Уилка	0.502	Ватсона	0.204
39	Вайсберга-Бингема	0.139	Дэвида–Хартли–Пирсона	0.499	Шапиро–Уилка	0.203
40	Чена	0.139	Д`Агостино Z_2	0.489	Купера	0.192
41	Филлибена	0.119	Никулина–Рао–Робсона	0.473	Никулина–Рао–Робсона	0.188
42	Заманзаде–Аргами TZ_2	0.086	Хи-квадрат Пирсона	0.423	Колмогорова	0.181

Окончание таблицы 5.1

№	H_1	1-β	H_2	1-β	H_3	1-β
43	Локка–Сперриера T_{1n}	0.074	Васичека	0.397	Оя $\tilde{T}_{34}$	0.172
44	Брис–Хьюберт–Стройфа	0.162	Эбрахими	0.396	Локка–Сперриера T_{1n}	0.168
45	Харке–Бера	0.071	Корреа	0.382	Хи-квадрат Пирсона	0.155
46	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_4}	0.066	Жанга	0.355	Васичека	0.137
47	Хегази–Грина T_2	0.061	Лина–Мудхолкара	0.332	Эбрахими	0.136
48	Лина–Мудхолкара	0.056	Чена	0.292	Корреа	0.132
49	Гелы–Гаствирта	0.004	Локка–Сперриера T_{1n}	0.255	Чена	0.130
50	Локка–Сперриера T_{2n}	0.000	Брис–Хьюберт–Стройфа	0.147	Брис–Хьюберт–Стройфа	0.100

Таблица 5.2

Ранжирование критериев нормальности

№	Критерий	Мощность относительно H_i				Место относительно H_i				Σ мест	R
		H_1	H_2	H_3	H_4	H_1	H_2	H_3	H_4		
1	Десгань–Мишо X_{APD}	0.304	0.705	0.318	0.744	14	7.5	13	16.5	51	1
2	Заманзаде–Аргами TZ_1	0.293	0.695	0.330	0.717	16.5	11	12	20	59.5	2
3	Десгань–Мишо X_{EPD}	0.451	0.705	0.299	0.356	1	7.5	15	43	66.5	3
4	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_6}	0.216	0.689	0.342	0.744	31	15	8	16.5	70.5	4
5	Д`Агостино E_p	0.164	0.671	0.347	0.756	36	18	6	12.5	72.5	5
6	Шапиро-Франциа	0.139	0.691	0.333	0.760	39.5	13.5	10.5	9.5	73	7.5
7	Вайсберга-Бингема	0.139	0.691	0.333	0.760	39.5	13.5	10.5	9.5	73	7.5
8	Хегази–Грина T_2	0.061	0.723	0.359	0.735	47	5	3	18	73	7.5
9	Заманзаде–Аргами TZ_2	0.086	0.752	0.366	0.696	43	3	2	25	73	7.5
10	Ройстона	0.280	0.616	0.273	0.776	21	29	18.5	5.5	74	10
11	Филлибена	0.119	0.699	0.340	0.754	42	10	9	14	75	11
12	Чена–Шапиро	0.327	0.576	0.251	0.776	12	32	26	5.5	75.5	12
13	Гелы–Гаствирта	0.004	0.753	0.378	0.699	49	2	1	24	76	13
14	Гаствирта	0.384	0.731	0.273	0.354	11	4	18.5	44	77.5	14

Продолжение таблицы 5.2

№	Критерий	Мощность относительно H_i				Место относительно H_i				Σ мест	R
		H_1	H_2	H_3	H_4	H_1	H_2	H_3	H_4		
15	Жанга Z_C	0.300	0.548	0.270	0.772	15	34	23	7	79	15
16	Гири	0.394	0.722	0.272	0.271	8.5	6.5	21	46	82	16
17	Харке–Бера	0.071	0.654	0.349	0.756	45	21	4.5	12.5	83	17.5
18	Бонетта–Сейер	0.394	0.722	0.272	0.271	8.5	6.5	21	47	83	17.5
19	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_4}	0.066	0.653	0.349	0.757	46	22	4.5	11	83.5	19
20	Жанга Z_A	0.239	0.578	0.272	0.787	29	31	21	3	84	20
21	Шпигельхальтера	0.211	0.790	0.343	0.320	32	1	7	45	85	21
22	Оя $\tilde{T}_{12}$	0.406	0.694	0.228	0.455	6	12	32	38.5	88.5	22
23	Хегази–Грина T_1	0.218	0.674	0.267	0.724	30	17	24	19	90	23
24	Эппса–Пулли	0.275	0.623	0.249	0.751	23.5	26.5	27.5	15	92.5	24
25	Мартинеса–Иглевича	0.252	0.683	0.301	0.503	27	16	14	36	93	25
26	Шапиро–Уилка	0.389	0.502	0.203	0.765	10	38	39	8	95	26
27	Али-Чорго-Ревеса	0.281	0.643	0.240	0.702	20	23	30	22.5	95.5	27.5
28	Андерсона–Дарлинга	0.287	0.630	0.230	0.702	18	24	31	22.5	95.5	27.5
29	Десгань–Мишо R_n	0.275	0.670	0.287	0.398	23.5	19	17	42	101.5	29
30	Фросини	0.285	0.623	0.212	0.665	19	26.5	35	27	107.5	30

Окончание таблицы 5.2

№	Критерий	Мощность относительно H_i				Место относительно H_i				Σ мест	R
		H_1	H_2	H_3	H_4	H_1	H_2	H_3	H_4		
31	Ван Эса	0.150	0.667	0.298	0.551	38	20	16	34	108	31
32	Ватсона	0.293	0.626	0.204	0.583	16.5	25	38	32	111.5	32
33	Д\`Агостино Z_2	0.428	0.489	0.241	0.402	5	40	29	41	115	33
34	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.269	0.621	0.209	0.652	25	28	37	28	118	34
35	Жанга Z_K	0.186	0.569	0.249	0.679	34	33	27.5	26	120.5	35
36	Дэвида–Хартли–Пирсона	0.400	0.499	0.255	0.172	7	39	25	50	121	36
37	Васичека	0.434	0.397	0.137	0.611	3.5	43.5	46.5	29.5	123	37.5
38	Эбрахими	0.434	0.396	0.136	0.611	3.5	43.5	46.5	29.5	123	37.5
39	Локка–Сперриера T_{2n}	0.000	0.504	0.222	0.786	50	37	33	4	124	39
40	Оя $\tilde{T}_{34}$	0.262	0.518	0.172	0.715	26	36	43	21	126	40.5
41	Корреа	0.441	0.382	0.132	0.586	2	45	48	31	126	40.5
42	Купера	0.279	0.589	0.192	0.526	22	30	40	35	127	42
43	Лина–Мудхолкара	0.056	0.332	0.216	0.827	48	47	34	1	130	43
44	Хи-квадрат Пирсона	0.311	0.423	0.155	0.455	13	42	45	38.5	138.5	44
45	Локка–Сперриера T_{1n}	0.074	0.255	0.168	0.808	44	49	44	2	139	45
46	Колмогорова	0.208	0.540	0.181	0.564	33	35	42	33	143	46
47	Никулина–Рао–Робсона	0.240	0.473	0.188	0.431	28	41	41	40	150	47
48	Жанга	0.179	0.355	0.212	0.476	35	46	36	37	154	48
49	Чена	0.139	0.292	0.130	0.262	41	48	49	48	186	49.5
50	Брис-Хьюберт-Стройфа	0.162	0.147	0.100	0.247	37	50	50	49	186	49.5

В убывающем ряду оценок мощности относительно рассматриваемой гипотезы H_i находится ранг этого критерия. В качестве основы для рейтинга можно взять сумму рангов соответствующего критерия: сумму мест “занятых” критерием по величине мощности относительно H_i, $i=\overline{1,4}$. При упорядочивании критериев по возрастанию суммы, порядковые номера (ранги) этих сумм указывают рейтинг R соответствующего критерия.

При одинаковой сумме мест будут одинаковыми и рейтинги.

На результаты анализа и предложенное в таблице 5.2 ранжирование (оценки рейтинга) можно ориентироваться в приложениях, отдавая предпочтение применению того или иного критерия для проверки гипотезы о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону.

Вместе с тем из анализа результатов исследований можно сделать не вполне утешительные выводы.

Очевидно, что ряд специальных критериев нормальности имеет явное преимущество в мощности по сравнению с используемыми в этих же целях непараметрическими и параметрическими критериями согласия.

Среди специальных критериев есть фавориты, применение которых в приложениях наиболее целесообразно. По-видимому, с осторожностью к таким критериям можно отнести те, рейтинги которых в таблице 5.2 не опускаются ниже 20.

К сожалению, достаточно обширна группа критериев, неспособных при малых n и малых α отличать от H_0 конкурирующие гипотезы типа H_1.

Если внимательно посмотреть на результаты в таблице 5.2, то можно обратить внимание на то, что нет критерия, который входил бы в группу лидеров по величине мощности относительно каждой из рассмотренных 4-х конкурирующих гипотез, а минимальная сумма мест (Σ) равна 51 Как правило, если критерий обладает высокой мощностью относительно 2-х – 3-х типов конурирующих гипотез, то очень плохо с мощностью относительно гипотезы 4-го типа (H_1 или H_4). В качестве примера, достаточно глянуть на ситуацию с критериями Десгань–Мишо со статистикой X_{EPD} , Хегази–Грина со статистикой T_2 , Заманзаде–Аргами со статистикой TZ_2 .

Всё это говорит о том, что несмотря на наличие множества критериев, идеального (равномерно наиболее мощного) критерия проверки отклонения от нормального закона нет. В такой ситуации рекомендуется применять такую совокупность критериев, чтобы обеспечить распозавание любой конкурирующей гипотезы.

Замечание. Описанные в предшествующих разделах результаты, касающиеся свойств критериев проверки гипотез, имеют место в условиях отсутствия влияния ошибок округления измерений на распределения статистик критериев. Именно в рамках этих свойств имеет место предложенный в данном разделе рейтинг критериев. В последнее время нами отмечалась заметная роль ошибок округления в изменении свойств статистических критериев [137, 138, 139, 140, 62]. Ошибки округления измерений могут существенно менять распределения статистик критериев нормальности и могут отражаться на других свойствах критериев. Это означает, что в таких условиях могут измениться и рейтинги критериев.

8. Применение критериев нормальности в условиях влияния ошибок округления

8.1. Влияние ошибок округления на распределения статистик критериев нормальности

Классические результаты, касающиеся асимптотических свойств рассмотренных критериев, или результаты, представленные в данном руководстве и характеризующие реальные свойства этих критериев, опираются на предположение, что анализируемые данные представляют собой выборки независимых одинаково распределённых непрерывных случайных величин. Именно при выполнении данного условия гарантируется корректность выводов по применяемым критериям нормальности. В выборках непрерывной случайной величины исключено появление повторяющихся значений.

Как правило, в такой ситуации отклонением реального распределения $G(S_n|H_0)$ статистики от асимптотического $G(S|H_0)$ можно пренебречь при достаточно небольших n. Например, отклонением распределения статистики Колмогорова с поправкой Большева от $K(s)$ можно пренебречь при $n > 30$, отклонением распределения статистики Крамера–Мизеса–Смирнова от $a1(s)$ и распределения статистики Андерсона–Дарлинга от $a2(s)$ – при $n \geq 25$.

На практике всё несколько сложнее. Любые результаты измерений фиксируются с некоторой погрешностью округления.

То, что наличие ошибок округления Δ может как-то отражаться на результатах статистических выводов, было очевидно давно. Например, о возможности проблем с применением критериев нормальности, являющихся следствием округления, отмечалось ещё в работе [72]. В работах [83, 84] на примере критериев проверки гипотез о равенстве математического ожидания и дисперсии номинальным значениям, а также критериев Стьюдента об однородности средних и Фишера об однородности дисперсий двух выборок было показано влияние ошибок округления на реальный уровень значимости, а также отмечено, что с их увеличением снижается мощность критериев. Авторами работы [24] при анализе множества выборок с повторяющимися наблюдениями было показано, что в такой ситуации критические значения распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обобщенного распределения Парето отличаются от ранее полученных.

Давно отмечалось, что при использовании различных критериев согласия для анализа больших выборок, проверяемая гипотеза о принадлежности наблюдений закону с функцией распределения $F(x,\theta)$, как правило, отклоняется (даже в случае справедливости гипотезы H_0). В [137] показано, что основная причина такого явления заключается в наличии округления наблюдаемых данных, вследствие чего с ростом n реальные распределения статистик критериев отклоняются от асимптотических в сторону больших значений статистик. То есть, асимптотическими результатами можно пользоваться только при $n \le n_{\max}$, где $n_{\max}$ которое зависит от Δ и σ закона. Получается, что, применяя для проверки нормальности упомянутые критерии согласия Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга, мы можем опираться на модели распределений статистик этих критериев, представленные в разделе, лишь при $25 < n \le n_{\max}$, когда $\Delta << \sigma$.

Но, что будет, если ошибки округления Δ соизмеримы со среднеквадратичным отклонением ошибок измерений σ ($\Delta \approx \sigma$)? А такие ситуации на практике очень часто имеют место, в том числе при анализе высокоточных измерений.

Исследованиям распределений статистик различных статистических критериев в условиях соизмеримости Δ и σ посвящены наши работы [62, 138, 139, 140], где показано, что под влиянием ошибок округления распределения статистик могут изменяться очень существенно, и этим фактом ни в коем случае нельзя пренебрегать. Это касается и множества критериев, применяемых при проверке нормальности.

При соизмеримости Δ и σ, когда значения Δ и σ величины одного порядка, в выборках появляется значительное количество повторяющихся значений. Для энтропийных критериев нормальности, примерами которых являются критерии Васичека, Эбрахими, Корреа, Ван Эса и Заманзаде–Аргами, факт наличия в вариационном ряду одинаковых порядковых статистик уже служит сигналом для отклонения проверяемой гипотезы H_0. Это же приходится учитывать при использовании критериев Оя. То есть в подобных ситуациях применение этой группы критериев исключается.

Результаты, полученные в [140], касающиеся поведения критериев согласия Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга, Купера и Ватсона и имеющие отношение к проверке нормальности, кратко можно охарактеризовать следующим образом:

– наличие ошибок округления приводит к появлению зависимости $G(S|H_0)$ от n;
– факт наличия округлений в анализируемых данных исключает возможность использования асимптотических распределения статистик в условиях больших выборок;
– в условиях соизмеримости Δ и σ распределения $G(S_n|H_0)$ статистик могут значительно отличаться от асимптотических и при относительно небольших объёмах выборок;
– вследствие наличия округлений потеря свойства “свободы от распределения” может происходить и в условиях проверки простых гипотез;
– на распределения статистик критериев согласия Жанга, которые зависят от n и в отсутствие ошибок округления, все вышеперечисленные факторы, связанные с Δ, воздействуют аналогичным образом.

В качестве демонстрационного примера на рис. 8.1 в условиях соизмеримости Δ и σ иллюстрируется влияние Δ на распределение $G(S_K|H_0)$ статистики критерия Колмогорова в следующей ситуации: проверяется гипотеза H_0 о принадлежности выборок нормальному закону распределения при $n=50$ с вычислением оценок максимального правдоподобия (ОМП) параметров μ и σ закона. Приведенные на рисунке зависимости построены на основании результатов статистического моделирования распределений статистик в условиях округления данных с использованием возможностей системы [146].

Аналогично, на рис. 8.2 показано, как меняются распределения статистики Колмогорова в зависимости от объёма выборки n при справедливости гипотезы H_0 о нормальности при фиксированной ошибке округления $\Delta = 0.1\sigma$ и использовании ОМП. Мы можем видеть, что и при росте Δ, и при росте n распределения $G(S_K|H_0)$ всё дальше отклоняются от асимптотического распределения статистики, имеющего место в отсутствие ошибок округления, модель которого приведена в таблице 3.2.

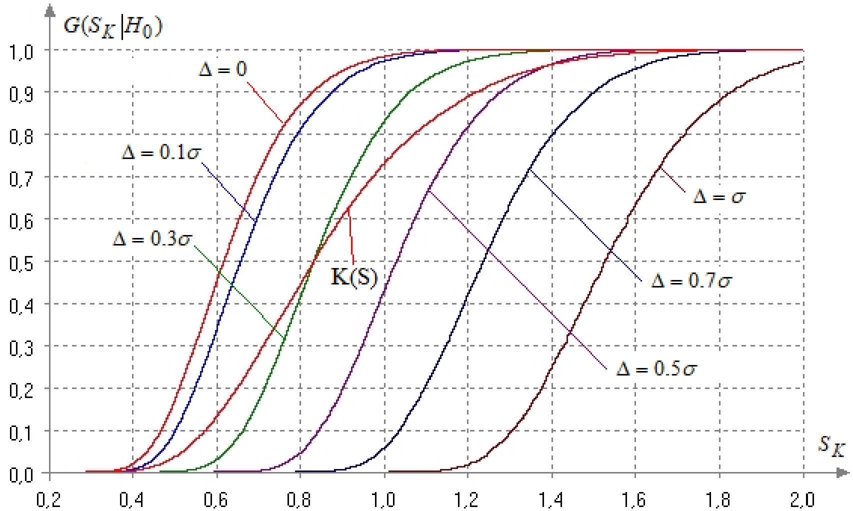


Рис. 8.1. Зависимость распределения статистики критерия Колмогорова от Δ при справедливости сложной гипотезы H_0 о принадлежности выборки нормальному закону (в случае ОМП) при $n = 50$

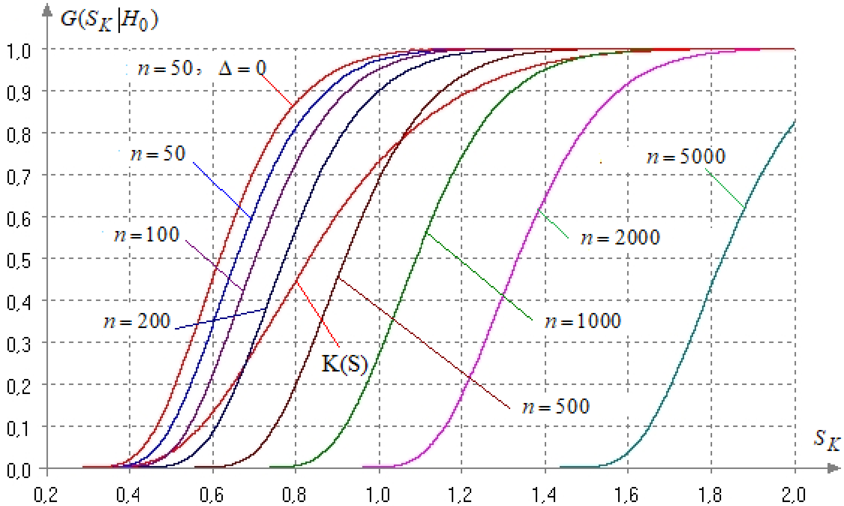


Рис. 8.2. Зависимость распределения статистики критерия Колмогорова от n при справедливости сложной гипотезы H_0 о принадлежности выборки нормальному закону (в случае ОМП) при $\Delta = 0.1\sigma$

Таким же образом в подобных условиях от своих асимптотических распределений отклоняются распределения статистик критериев Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга, Купера и Ватсона, а распределения статистик 3-х критериев Жанга – от распределений, имеющих место в отсутствие округлений при конкретных n.

В соответствии с оценками рейтинга, представленными в таблице 5.2, критерий Десгань–Мишо со статистикой X_{APD} (2.42) оказался наиболее предпочтительным (на первой позиции рейтинга)критерием нормальности. Асимптотическим распределением статистики этого критерия является χ_2^2-распределение. На рис. 8.3 показана зависимость распределения его статистики от Δ при объёме выборок $n = 50$. Распределение статистики при $\Delta = 0$ на рисунке совпадает с χ_2^2-распределением.

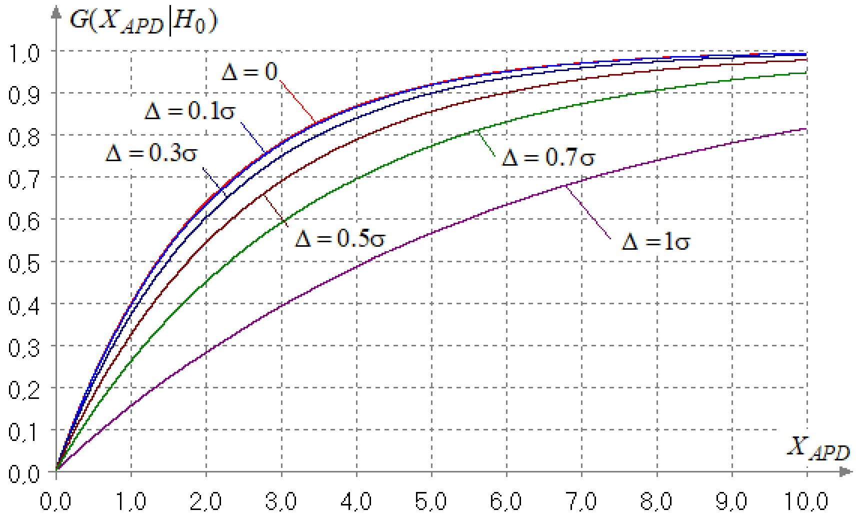


Рис. 8.3. Зависимость от Δ распределения статистики X_{APD} критерия нормальности Десгань–Мишо при справедливости H_0 и $n = 50$

Можно обратить внимание на то, что с ростом Δ распределения $G(X_{APD}|H_0)$ в меньшей степени отклоняются от асимптотического распределения, чем распределения непараметрических критериев согласия. Кроме того, при фиксированной величине Δ в существенно меньшей степени проявляется зависимость $G(X_{APD}|H_0)$ от n.

Распределения статистики E_p (2.11) критерия Д`Агостино, занимающего 5-ю позицию в рейтинге, практически не реагируют на рост Δ и совсем не отклоняются от асимптотического χ_2^2-распределения, что, вообще говоря, является редким исключением. А с ростом Δ лишь несколько снижается мощность критерия.

Напротив, распределения статистики W_R (2.18) критерия Ройстона (10-я позиция в рейтинге) очень чувствительны к наличию ошибок округления и с ростом Δ быстро отклоняются от асимптотического стандартного нормального закона (рис. 8.4).

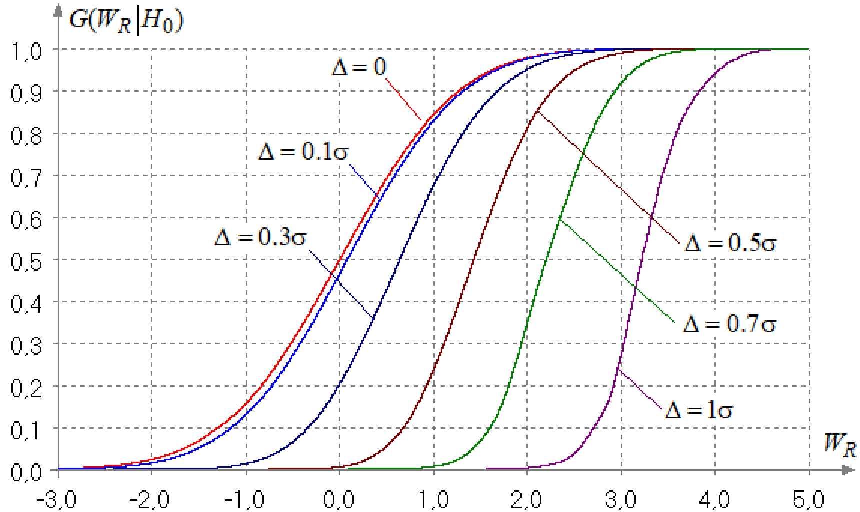


Рис. 8.4. Зависимость от Δ распределения статистики W_R критерия нормальности Ройстона при справедливости H_0 и $n = 50$

Рис. 8.5 демонстрирует изменения распределения статистики Ройстона в зависимости от объёма выборки n при фиксированной ошибке округления $\Delta = 0.1\sigma$. То есть, и при росте Δ, и при росте n распределения $G(W_R|H_0)$ статистики всё дальше отклоняются от асимптотического стандартного нормального закона.

Распределения статистик большинства специальных критериев нормальности зависят от объёмов выборок n. Естественно, при соизмеримости Δ и σ эти распределения зависят от величины Δ.

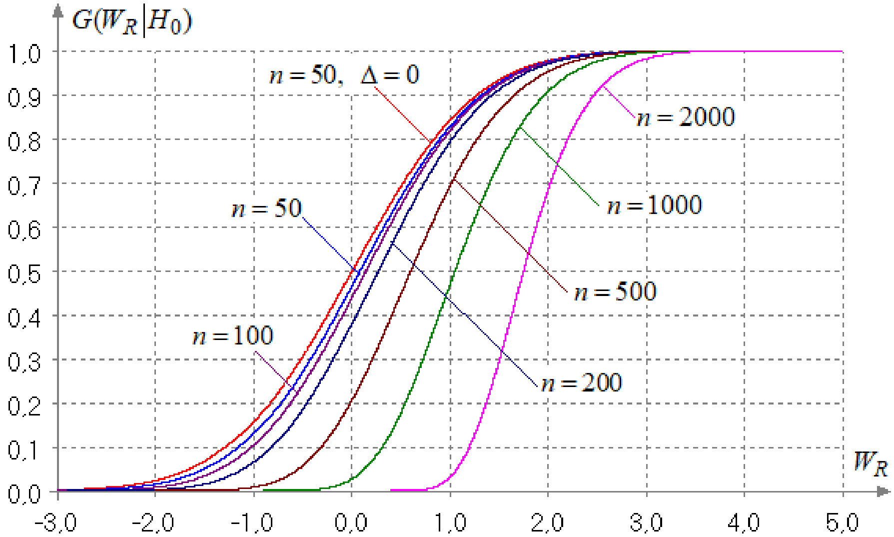


Рис. 8.5. Зависимость распределения статистики W_R критерия нормальности Ройстона от n при справедливости H_0 и $\Delta = 0.1\sigma$

На рис. 8.6 показано, как меняются распределения статистики (2.32) левостороннего критерия Вайсберга–Биргема при $n = 50$ и изменении Δ на интервале от 0 до σ. По мощности этот критерий эквивалентен критерию Шапиро–Франциа (2.31) и вместе с последним и ещё двумя критериями занимает позиции 6–9 в таблице 5.2, в которой проранжированы критерии нормальности. Можно заметить, что у распределения статистики $G(\tilde{W}|H_0)$ с ростом Δ существенно меняются характеристики рассеяния. Очевидно, что в случае применения критерия Вайсберга–Биргема или любого другого критерия нормальности в подобной ситуации, не может идти и речи об использовании приводимых в руководстве таблиц критических значений.

Естественно, что на распределения статистик критериев типа χ^2 ошибки округления Δ оказывают определённое влияние. На рис. 8.7 показаны дискретные распределения $G(X_n^2|H_0)$ статистики (4.1) критерия Пирсона при различных Δ, объёме выборок $n=50$ и при $k=5$ равновероятных интервалах группирования. При $\Delta \leq 0.3\sigma$ распределения статистики совпадают с распределением, имеющим место в случае отсутствия округлений, а затем видим существенные отклонения.

Ошибки округления оказывают такое же значительное влияние на распределения $G(Y_n^2|H_0)$ статистики (4.7) критерия Никулина. На характере влияния отражается также выбираемый способ разбиения на интервалы группирования.

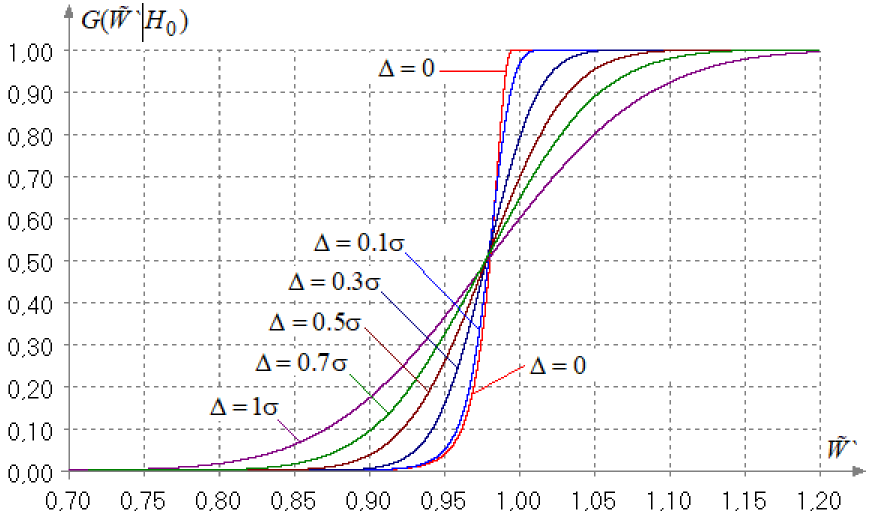


Рис. 8.6. Зависимость от Δ распределения статистики $\tilde{W}`$ критерия нормальности Вайсберга–Биргема при справедливости H_0 и $n = 50$

В случае правосторонних и левосторонних критериев пренебрежение фактом изменения распределений статистик вследствие влияния ошибок округления, как правило, приводит к занижению оценки p_{value} и росту вероятности ошибки 1-го рода. В случае двусторонних критериев поведение распределений $G(S_n|H_0)$ статистик под влиянием Δ менее предсказуемо: использование классических результатов, не учитывающих влияния Δ, может приводить как к занижению, так и к завышению оценок p_{value}.

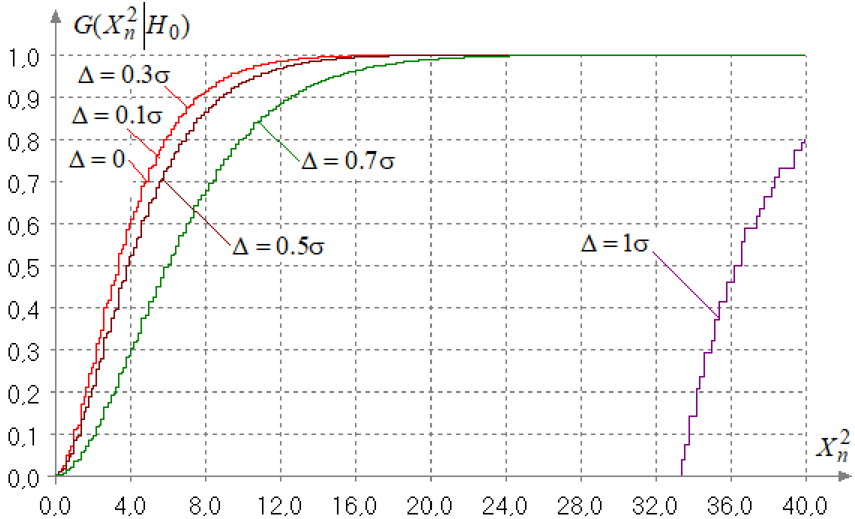


Рис. 8.7. Зависимость от Δ распределения статистики X_n^2 критерия Пирсона при справедливости гипотезы H_0 о нормальности при $n = 50$

В качестве примера продемонстрируем изменение распределений $G(d | H_0)$ статистики (2.15) двустороннего критерия Гири в зависимости от Δ при объёме выборок $n = 50$ (см. рис. 8.8). То, что получаемые по реальным распределениям статистик, учитывающим влияние Δ, значения p_{value} могут быть как выше, так и ниже их оценок, вычисляемых на основании классических результатов, можно увидеть в таблицах 8.2–8.4, представленных в следующем параграфе.

Все приведенные выше примеры говорят об одном: при соизмеримости Δ и σ нельзя пренебрегать фактом изменения распределений статистик критериев, так как в противном случае, как правило, возрастает вероятность ошибки 1-го рода α (отклонения справедливой гипотезы H_0), или реже – возрастает вероятность ошибки 2-го рода β. И в то же время приведенные результаты исследований подсказывают единственный выход, возможный в такой ситуации и обеспечивающий корректность выводов: применяя любой критерий нормальности, следует опираться на программное обеспечение, позволяющее моделировать распределения $G(S_n|H_0)$ статистик критериев нормальности в реальных условиях приложения (при соответствующих Δ и σ). Именно так это реализовано, например, в системе [146], с использованием которой проводились настоящие исследования.

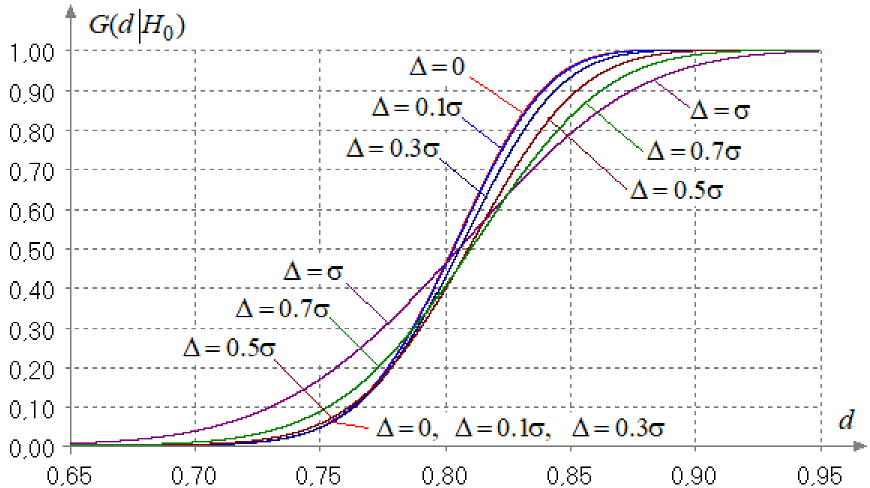


Рис. 8.8. Зависимость от Δ распределения статистики d критерия Гири при справедливости гипотезы H_0 о нормальности при $n = 50$

8.2. Применение критериев нормальности в условиях округления измерений

В работе [34] результаты измерений характеристик ирисов были использованы для решения задачи таксономии. Рассмотрим, насколько хорошо ошибки этих измерений описываются нормальными законами распределения. Заимствованные в [34] результаты измерений в сантиметрах представлены в таблице 8.1.

В таблице для каждого из 3-х видов ириса (Iris setosa, Iris versicolor, Iris virginica) представлены измерения 4-х характеристик для 50 представителей каждого вида: S_l – Sepal length – длина чашелистика, S_w – Sepal width – ширина чашелистика, P_l – Petal length – длина лепестка, P_w – Petal width – ширина лепестка. Погрешность округления Δ=0.1 одна и та же для всех измерений.

Таблица 8.1

Результаты измерений характеристик ирисов

№	Iris setosa				Iris versicolor				Iris virginica			
	S_l	S_w	P_l	P_w	S_l	S_w	P_l	P_w	S_l	S_w	P_l	P_w
1	5.1	3.5	1.4	0.2	7.0	3.2	4.7	1.4	6.3	2.2	6.0	2.5
2	4.9	3.0	1.4	0.2	6.4	3.2	4.5	1.5	5.8	2.5	5.1	1.9
3	4.7	3.2	1.3	0.2	6.9	3.1	4.9	1.5	7.1	2.5	5.9	2.1
4	4.6	3.1	1.5	0.2	5.5	2.3	4.0	1.3	6.3	2.5	5.6	1.8
5	5.0	3.6	1.4	0.2	6.5	2.8	4.6	1.5	6.5	2.5	5.8	2.2
6	5.4	3.9	1.7	0.4	5.7	2.8	4.5	1.3	7.6	2.6	6.6	2.1
7	4.6	3.4	1.4	0.3	6.3	3.3	4.7	1.6	4.9	2.6	4.5	1.7
8	5.0	3.4	1.5	0.2	4.9	2.4	3.3	1.0	7.3	2.7	6.3	1.8
9	4.4	2.9	1.4	0.2	6.6	2.9	4.6	1.3	6.7	2.7	5.8	1.8
10	4.9	3.1	1.5	0.1	5.2	2.7	3.9	1.4	7.2	2.7	6.1	2.5
11	5.4	3.7	1.5	0.2	5.0	2.0	3.5	1.0	6.5	2.7	5.1	2.0

12	4.8	3.4	1.6	0.2	5.9	3.0	4.2	1.5	6.4	2.8	5.3	1.9
13	4.8	3.0	1.4	0.1	6.0	2.2	4.0	1.0	6.8	2.8	5.5	2.1
14	4.3	3.0	1.1	0.1	6.1	2.9	4.7	1.4	5.7	2.8	5.0	2.0
15	5.8	4.0	1.2	0.2	5.6	2.9	3.6	1.3	5.8	2.8	5.1	2.4
16	5.7	4.4	1.5	0.4	6.7	3.1	4.4	1.4	6.4	2.8	5.3	2.3
17	5.4	3.9	1.3	0.4	5.6	3.0	4.5	1.5	6.5	2.8	5.5	1.8
18	5.1	3.5	1.4	0.3	5.8	2.7	4.1	1.0	7.7	2.8	6.7	2.2
19	5.7	3.8	1.7	0.3	6.2	2.2	4.5	1.5	7.7	2.8	6.9	2.3
20	5.1	3.8	1.5	0.3	5.6	2.5	3.9	1.1	6.0	2.9	5.0	1.5
21	5.4	3.4	1.7	0.2	5.9	3.2	4.8	1.8	6.9	2.9	5.7	2.3
22	5.1	3.7	1.5	0.4	6.1	2.8	4.0	1.3	5.6	3.0	4.9	2.0
23	4.6	3.6	1.0	0.2	6.3	2.5	4.9	1.5	7.7	3.0	6.7	2.0
24	5.1	3.3	1.7	0.5	6.1	2.8	4.7	1.2	6.3	3.0	4.9	1.8
25	4.8	3.4	1.9	0.2	6.4	2.9	4.3	1.3	6.7	3.0	5.7	2.1
26	5.0	3.0	1.6	0.2	6.6	3.0	4.4	1.4	7.2	3.0	6.0	1.8
27	5.0	3.4	1.6	0.4	6.8	2.8	4.8	1.4	6.2	3.0	4.8	1.8
28	5.2	3.5	1.5	0.2	6.7	3.0	5.0	1.7	6.1	3.0	4.9	1.8
29	5.2	3.4	1.4	0.2	6.0	2.9	4.5	1.5	6.4	3.0	5.6	2.1
30	4.7	3.2	1.6	0.2	5.7	2.6	3.5	1.0	7.2	3.0	5.8	1.6

Окончание таблицы 8.1

Результаты измерений характеристик ирисов

№	Iris setosa				Iris versicolor				Iris virginica			
	S_l	S_w	P_l	P_w	S_l	S_w	P_l	P_w	S_l	S_w	P_l	P_w
31	4.8	3.1	1.6	0.2	5.5	2.4	3.8	1.1	7.4	3.0	6.1	1.9
32	5.4	3.4	1.5	0.4	5.5	2.4	3.7	1.0	7.9	3.0	6.4	2.0

33	5.2	4.1	1.5	0.1	5.8	2.7	3.9	1.2	6.4	3.0	5.6	2.2
34	5.5	4.2	1.4	0.2	6.0	2.7	5.1	1.6	6.3	3.1	5.1	1.5
35	4.9	3.1	1.5	0.2	5.4	3.0	4.5	1.5	6.1	3.1	5.6	1.4
36	5.0	3.2	1.2	0.2	6.0	3.4	4.5	1.6	7.7	3.1	6.1	2.3
37	5.5	3.5	1.3	0.2	6.7	3.1	4.7	1.5	6.3	3.1	5.6	2.4
38	4.9	3.6	1.4	0.1	6.3	2.3	4.4	1.3	6.4	3.2	5.5	1.8
39	4.4	3.0	1.3	0.2	5.6	3.0	4.1	1.3	6.0	3.2	4.8	1.8
40	5.1	3.4	1.5	0.2	5.5	2.5	4.0	1.3	6.9	3.2	5.4	2.1
41	5.0	3.5	1.3	0.3	5.5	2.6	4.4	1.2	6.7	3.2	5.6	2.4
42	4.5	2.3	1.3	0.3	6.1	3.0	4.6	1.4	6.9	3.2	5.1	2.3
43	4.4	3.2	1.3	0.2	5.8	2.6	4.0	1.2	5.8	3.3	5.1	1.9
44	5.0	3.5	1.6	0.6	5.0	2.3	3.3	1.0	6.8	3.3	5.9	2.3
45	5.1	3.8	1.9	0.4	5.6	2.7	4.2	1.3	6.7	3.3	5.7	2.5
46	4.8	3.0	1.4	0.3	5.7	3.0	4.2	1.2	6.7	3.4	5.2	2.3
47	5.1	3.8	1.6	0.2	5.7	2.9	4.2	1.3	6.3	3.4	5.0	1.9
48	4.6	3.2	1.4	0.2	6.2	2.9	4.3	1.3	6.5	3.6	5.2	2.0
49	5.3	3.7	1.5	0.2	5.1	2.5	3.0	1.1	6.2	3.8	5.4	2.3
50	5.0	3.3	1.4	0.2	5.7	2.8	4.1	1.3	5.9	3.8	5.1	1.8

Вследствие округления результатов измерений в столбцах таблицы 8.1 наблюдаются повторяющиеся значения. Посмотрим, как это отражается на результатах проверки гипотезы о принадлежности измерений характеристик ирисов нормальному закону.

Результаты проверки принадлежности всех 12-и выборок нормальным законам по 8-и рассматриваемым критериям согласия (Колмогорова (K), Крамера–Мизеса–Смирнова (CMS), Андерсона–Дарлинга (AD), Купера (Ku), Ватсона (W), Жанга (Z_A, Z_C и Z_K)) и 6-и специальным критериям (Бонтемпса–Меддахи со статистикой BM_{3-6} (BM), Десгань–Мишо со статистикой X_{APD} (DM), Филлибена (Fb), Гири (Gr), Ройстона (Rn), Вайсберга–Биргема (WB)) для каждого из 3-х видов ириса представлены в таблицах 8.2–8.4.

Таблица 8.2

Проверка гипотез о принадлежности нормальному закону характеристик для Iris setosa

Test	Sepal length			Sepal width			Petal length			Petal width		
	$\mu = 5.006$, $\sigma = 0.3489$			$\mu = 3.428$, $\sigma = 0.3753$			$\mu = 1.462$, $\sigma = 0.1719$			$\mu = 0.246$, $\sigma = 0.1043$		
	S	p_{value}		S	p_{value}		S	p_{value}		S	p_{value}	
		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$
K	0.828	0.106	0.479	0.758	0.192	0.614	1.102	0.006	0.521	2.501	0.000	0.000
CMS	0.071	0.269	0.659	0.074	0.248	0.558	0.187	0.009	0.429	0.982	0.000	0.0001
AD	0.414	0.339	0.731	0.484	0.231	0.496	0.999	0.013	0.522	4.747	0.000	0.0001
Ku	1.511	0.047	0.388	1.420	0.086	0.485	2.110	0.000	0.343	4.148	0.000	0.0004
W	0.070	0.229	0.627	0.072	0.217	0.540	0.188	0.004	0.402	0.940	0.000	0.0001
Z_A	3.312	0.636	0.828	3.356	0.148	0.220	3.365	0.107	0.520	3.706	0.000	0.001
Z_C	5.643	0.518	0.689	6.690	0.376	0.515	8.390	0.216	0.756	41.661	0.0002	0.002
Z_K	1.175	0.262	0.630	1.168	0.078	0.249	0.206	0.019	0.610	12.067	0.000	0.000
BM	0.374	0.924	0.928	2.799	0.282	0.288	3.525	0.196	0.221	16.154	0.010	0.020
DM	0.243	0.884	0.893	2.108	0.345	0.370	3.410	0.169	0.299	17.185	0.000	0.022
Fb	0.991	0.543	0.833	0.981	0.110	0.191	0.974	0.033	0.365	0.891	0.000	0.001
Gr	0.776	0.371	0.351	0.766	0.227	0.218	0.765	0.219	0.156	0.791	0.692	0.120
Rn	0.102	0.462	0.735	0.608	0.273	0.461	1.600	0.055	0.611	4.782	0.000	0.0005
WB	0.982	0.537	0.547	0.964	0.119	0.283	0.949	0.035	0.278	0.795	0.000	0.011

Таблица 8.3

Проверка гипотез о принадлежности нормальному закону характеристик для Iris versicolor

Критерий Test	Sepal length			Sepal width			Petal length			Petal width		
	$\mu = 5.936$, $\sigma = 0.5110$			$\mu = 2.770$, $\sigma = 0.3106$			$\mu = 4.260$, $\sigma = 0.4652$			$\mu = 1.3260$, $\sigma = 0.1958$		
	S	p_{value}		S	p_{value}		S	p_{value}		S	p_{value}	
		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$
K	0.716	0.265	0.557	0.888	0.061	0.415	0.860	0.079	0.259	1.065	0.010	0.453
CMS	0.059	0.395	0.602	0.105	0.094	0.345	0.091	0.147	0.262	0.154	0.023	0.467
AD	0.374	0.421	0.613	0.573	0.139	0.450	0.562	0.149	0.254	0.975	0.015	0.319
Ku	1.282	0.199	0.519	1.403	0.097	0.678	1.252	0.232	0.623	1.886	0.001	0.432
W	0.057	0.362	0.576	0.098	0.093	0.373	0.076	0.191	0.359	0.153	0.014	0.451
Z_A	3.313	0.624	0.717	3.320	0.500	0.742	3.354	0.155	0.201	3.387	0.050	0.214
Z_C	6.214	0.441	0.515	5.900	0.483	0.691	8.593	0.203	0.256	12.31	0.055	0.226
Z_K	0.849	0.520	0.742	1.348	0.176	0.568	1.285	0.204	0.399	2.563	0.008	0.283
BM	1.168	0.639	0.644	2.464	0.333	0.343	4.062	0.151	0.154	0.913	0.721	0.744
DM	0.682	0.708	0.716	2.379	0.302	0.340	3.771	0.150	0.164	0.119	0.942	0.955
Fb	0.992	0.640	0.781	0.988	0.351	0.679	0.984	0.168	0.239	0.976	0.052	0.342
Gr	0.825	0.444	0.482	0.820	0.548	0.658	0.815	0.674	0.726	0.803	0.986	0.786
Rn	0.089	0.468	0.594	0.418	0.340	0.658	1.014	0.156	0.229	1.922	0.027	0.243
WB	0.984	0.620	0.597	0.976	0.346	0.471	0.968	0.166	0.306	0.953	0.047	0.283

Таблица 8.4

Проверка гипотез о принадлежности нормальному закону характеристик для Iris virginica

Критерий Test	Sepal length			Sepal width			Petal length			Petal width		
	$\mu = 6.5880$, $\sigma = 0.6295$			$\mu = 2.9740$, $\sigma = 0.3193$			$\mu = 5.552$, $\sigma = 0.5463$			$\mu = 2.0260$, $\sigma = 0.2719$		
	S	p_{value}		S	p_{value}		S	p_{value}		S	p_{value}	
		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$
K	0.841	0.095	0.202	0.925	0.042	0.314	0.843	0.092	0.238	0.895	0.057	0.504
CMS	0.089	0.155	0.210	0.106	0.093	0.313	0.087	0.165	0.250	0.121	0.059	0.308
AD	0.557	0.153	0.204	0.611	0.112	0.355	0.619	0.108	0.159	0.760	0.048	0.245
Ku	1.331	0.151	0.336	1.744	0.008	0.170	1.322	0.159	0.411	1.746	0.008	0.259
W	0.085	0.140	0.198	0.102	0.081	0.308	0.074	0.201	0.322	0.121	0.044	0.273
Z_A	3.332	0.334	0.377	3.342	0.238	0.389	3.356	0.146	0.175	3.356	0.146	0.296
Z_C	6.711	0.373	0.420	7.263	0.314	0.486	9.466	0.148	0.178	9.737	0.133	0.275
Z_K	1.306	0.194	0.296	1.496	0.124	0.439	1.554	0.107	0.201	2.076	0.028	0.230
BM	1.605	0.514	0.517	2.839	0.276	0.285	3.994	0.156	0.157	1.475	0.550	0.560
DM	0.824	0.660	0.667	2.762	0.249	0.283	3.038	0.216	0.228	1.233	0.536	0.579
Fb	0.985	0.220	0.267	0.982	0.116	0.244	0.983	0.137	0.176	0.983	0.147	0.396
Gr	0.798	0.871	0.854	0.759	0.152	0.146	0.805	0.938	0.970	0.839	0.200	0.317
Rn	0.649	0.259	0.316	0.912	0.181	0.389	1.238	0.108	0.144	1.360	0.088	0.268
WB	0.971	0.221	0.324	0.964	0.122	0.309	0.965	0.131	0.240	0.966	0.136	0.350

Для каждой выборки в таблицах приводятся ОМП параметров μ и σ нормального закона и вычисленные значения S статистик применяемых критериев. Значения достигнутого уровня значимости p_{value} в предположении об отсутствии ошибок округления (при $\Delta = 0$) для критериев Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга, Купера, Ватсона, Десгань–Мишо и Ройстона могут быть рассчитаны по известным асимптотическим распределениям статистик. Но распределения $G(S_n|H_0)$ статистик остальных критериев зависят от n. Для чистоты эксперимента оценки p_{value} в отсутствие ошибок округления (при $\Delta = 0$) находились по распределениям статистик $G(S_n|H_0)$, моделируемым при $n = 50$.

Оценки p_{value} в условиях влияния ошибок округления (при $\Delta = 0.1$ и при соответствующей ОМП для σ) вычислялись по реальным распределениям $G(S_n|H_0)$ статистик критериев, моделируемым в интерактивном режиме. Такая возможность реализована в [146].

Как можно видеть, оценки p_{value}, вычисленные по реальным распределениям $G(S_n|H_0)$ статистик, имеющим место в условиях наличия ошибок округления ($\Delta = 0.1$), кардинально отличаются от значений p_{value}, вычисленных по распределениям статистик этих же критериев в условиях отсутствия ошибок округления ($\Delta = 0$). И если пренебречь влиянием ошибок округления на распределения статистик критериев, то во многих случаях гипотеза о нормальности будет несправедливо отклоняться.

В данном случае надо обратить внимание на то, что каждой проверке по каждому применяемому критерию при ($\Delta = 0.1$ и $n = 50$) соответствует своё распределение статистики $G(S_n|H_0)$, зависящее от σ нормального закона. То есть, для анализа 12 выборок по каждому из 14 критериев мы должны использовать 12 различных распределений $G(S_{50}|H_0)$ статистики применяемого критерия, по которому и вычисляется p_{value}.

Следует сделать ещё одно важное замечание. Среди специальных критериев нормальности есть правосторонние, левосторонние и двусторонние критерии. Вследствие влияния ошибок округления распределения статистик правосторонних критериев сдвигаются вправо, а левосторонних – влево. При этом реальный достигнутый уровень значимости p_{value}, учитывающий влияние Δ, всегда оказывается не меньше того, что мы имеем при его вычислении без учёта такого влияения. В случае двусторонних критериев вследствие влияния Δ область определения статистик критериев также меняется: при этом она может изменятьсч по масштабу и сдвигаться влево или вправо. Поэтому реальный p_{value}, учитывающий влияние Δ и вычисляемый в соответствии с (1.5), может возрастать, а может и уменьшаться. Чтобы подчеркнуть этот факт, в строках таблиц 8.2-8.4 для двустороннего критерия Гири ситуации с уменьшением p_{value} из-за влияния Δ выделены цветом.

В отсутствие влияния округлений распределения $G(S_n|H_0)$ статистик критериев Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга, Купера, Ватсона, Десгань–Мишо и Ройстона быстро сходятся к асимптотическим $G(S|H_0)$ распределениям этих статистик: отклонением $G(S_n|H_0)$ от $G(S|H_0)$ можно пренебречь, как правило, при $n \geq 25 \div 30$. При наличии влияния ошибок округления (как в данном случае) распределения $G(S_n|H_0)$ могут не сходиться к асимптотическим $G(S|H_0)$, а с ростом n всё дальше отклоняются от них.

Проведенные ранее исследования показали, что и при проверке простых гипотез о принадлежности выборок нормальному закону (в условиях влияния Δ) распределения статистик $G(S_n|H_0)$ непараметрических критериев согласия (Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга, Купера, Ватсона) становятся зависящими от n, от Δ и от значения параметра масштаба σ, а с ростом n всё больше отклоняются от асимптотических $G(S|H_0)$.

В общем случае проверки сложной гипотезы о принадлежности выборки некоторому закону $F(x,\theta)$ к факторам, влияющим на распределения статистик $G(S|H_0)$ при сложной гипотезе [131], добавляется зависимость от n, Δ и от значений оценок параметров формы и масштаба закона $F(x,\theta)$.

8.3. Реализация применения критериев в условиях влияния ошибок округления

Таким образом, применяя различные критерии для проверки гипотезы о принадлежности выборок нормальному закону, следует учитывать возможное влияние ошибок округления на распределения статистик критериев.

Ошибки округления есть всегда. В ситуации, когда $\Delta << \sigma$ и n меньше некоторого $n_{\max}$, зависящего от n и σ, влиянием Δ на распределения статистик можно пренебречь. Но при $n > n_{\max}$ реальные распределения статистик отклоняются от асимптотических, использование которых при проверке увеличивает вероятности ошибок 1-го рода – отклонения верной гипотезы H_0. С учетом замечания в предшествующем параграфе, в случае двусторонних критериев в такой ситуации увеличивается или вероятность ошибок 1-го рода, или вероятность ошибок 2-го рода.

В условиях соизмеримости Δ и σ отклонение реальных распределений статистик от асимптотических (или от имеющих место в отсутствие округлений при зависимости распределений статистик от n) может проявляться при относительно малых объёмах выборок. Это подтверждает рассмотренный пример с характеристиками ирисов. А с ростом n эта проблема только усугубляется.

С выборками такого рода сталкиваются не только в биологии, зоологии, медицине и т.п., где в связи со спецификой измеряемых величин ошибки округления Δ всегда достаточно велики.

С такого же рода выборками сталкиваются при высокоточных измерениях в технических приложениях, когда измерения осуществляются на пределе точности измерительных систем. Общим и в том, и в другом случае является проведение измерений на пределе точности.

Не следует считать, что ошибки округления могут изменять свойства только критериев согласия. Как видим, ошибки округления влияют на распределения статистик специальных критериев, ориентированных только на проверку нормальности и которых насчитывается более 3-х десятков. Под влиянием ошибок округления изменяются свойства критериев равномерности, экспоненциальности и других десятков и сотен критериев, предназначенных для проверки различных гипотез.

Решать обозначенную проблему применения критериев проверки различных гипотез в условиях влияния ошибок округления можно единственным способом, разрабатывая программное обеспечение, позволяющее методами статистического моделирования исследовать распределения статистик критериев (или находить оценки p_{value}) в конкретных условиях приложения и при конкретном значении Δ. Таким примером является система [146], в рамках которой проведены настоящие исследования.

Применение специальных критериев нормальности при анализе измерений характеристик ирисов, учитывающее влияние ошибок округления Δ, в системе [146] можно описать следующим образом.

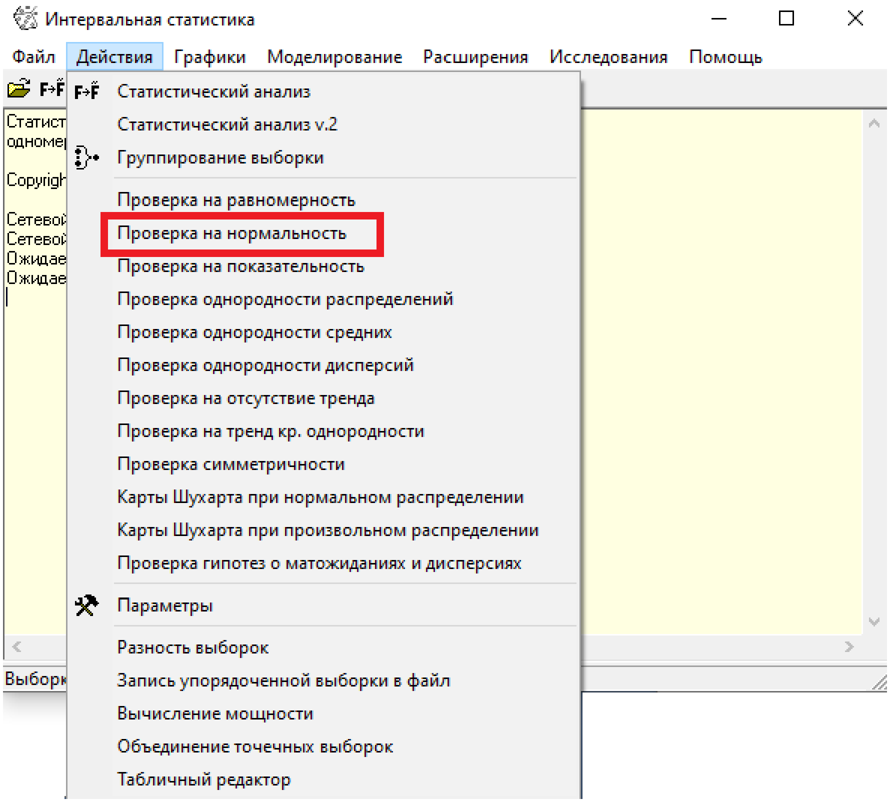


Рис. 8.9. Выбор группы критериев нормальности в главном окне ISW

После выбора в главном окне ISW раздела “Действия” в открывшемся меню (см. рис. 8.9) выбираем “Проверка на нормальность”, в результате чего открывается вкладка “Проверка нормальности” (см. рис. 8.10). На этой вкладке загружаем анализируемые выборки, в данном случае файл “Iris Setosa Petal length.dat”.

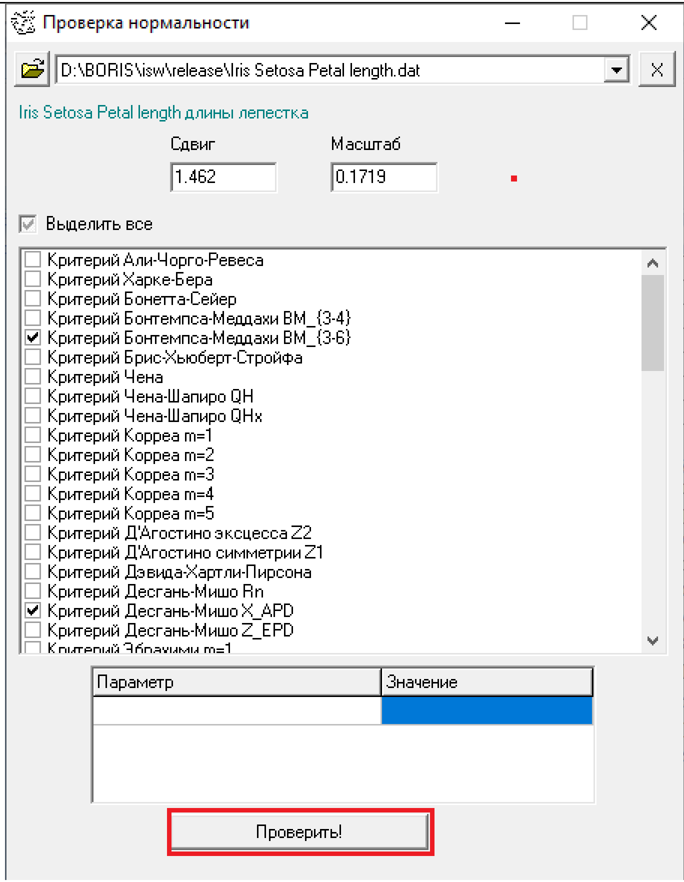
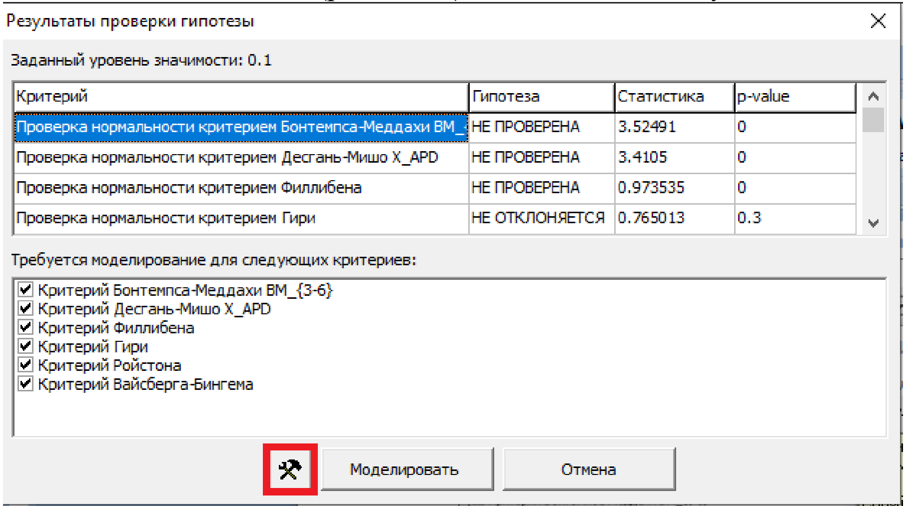
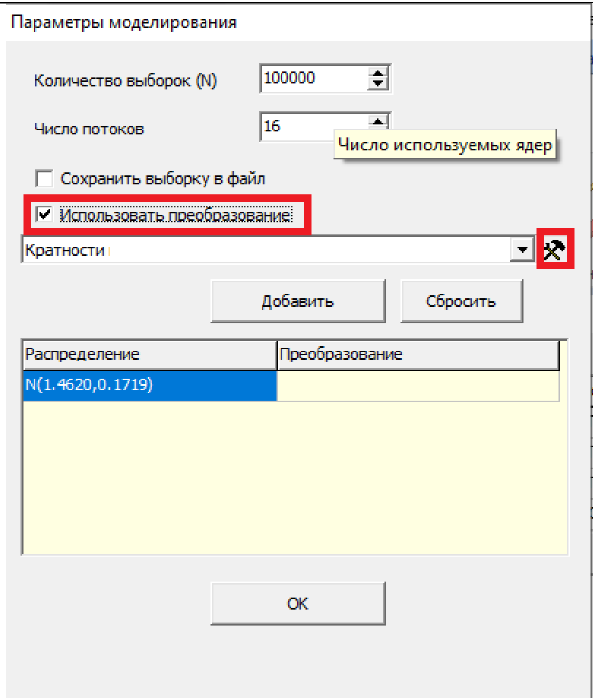

Проверка нормальности
D:\BORIS\isw\release\Iris Setosa Petal length.dat
Iris Setosa Petal length длины лепестка
Сдвиг
1.462
Масштаб
0.1719
Выделить все
Критерий Али-Чорго-Ревеса
Критерий Харке-Бера
Критерий Бонетта-Сейер
Критерий Бонтемпса-Меддахи BM_{3-4}
Критерий Бонтемпса-Меддахи BM_{3-6}
Критерий Брис-Хьюберт-Стройфа
Критерий Чена
Критерий Чена-Шапиро QH
Критерий Чена-Шапиро QHx
Критерий Коррea m=1
Критерий Коррea m=2
Критерий Коррea m=3
Критерий Коррea m=4
Критерий Коррea m=5
Критерий Д'Агостино эксцесса Z2
Критерий Д'Агостино симметрии Z1
Критерий Дэвида-Хартли-Пирсона
Критерий Десгань-Мишо Rn
Критерий Десгань-Мишо X_APD
Критерий Десгань-Мишо Z_EPD
Параметр
Значение
Проверить!

Рис. 8.10. Окно проверки нормальности

Далее вписываем в окна ОМП параметров (см. табл. 8.2) μ (сдвиг) и σ (масштаб), необходимые только для учета влияния Δ. Выбираем группу применяемых критериев и жмем кнопку “Проверить!”. В появившемся окне (рис. 8.11) жмем на кнопку для задания параметров моделирования.



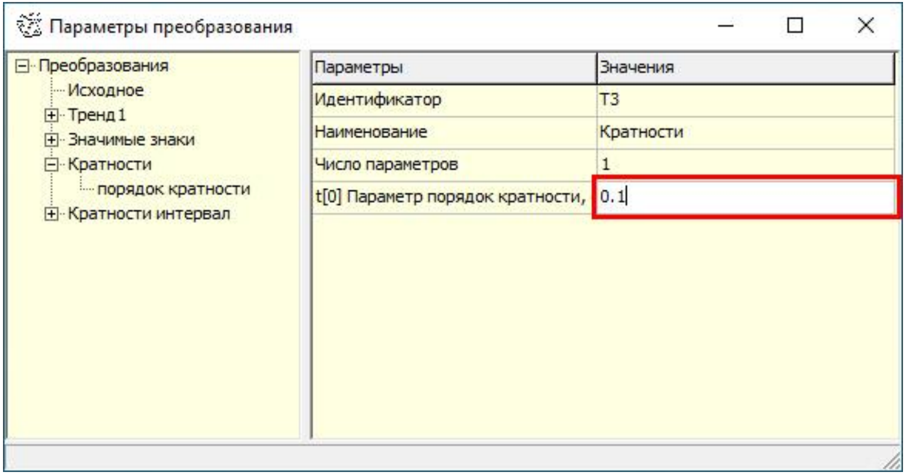
8.11. Окно результатов проверки нормальности



8.12. Окно для выбора параметров моделирования

В окне “Параметры моделирования” можно задать требуемое количество имитационных экспериментов *N* при моделировании распределений статистик применяемых критериев, а также указать число используемых при распараллеливании ядер процессора. Если выборки, моделируемые по указанному нормальному закону, подвергаются преобразованию, а в данном случае значения округляются, то ставим галочку и жмем кнопку, как показано на рис. 8.12.

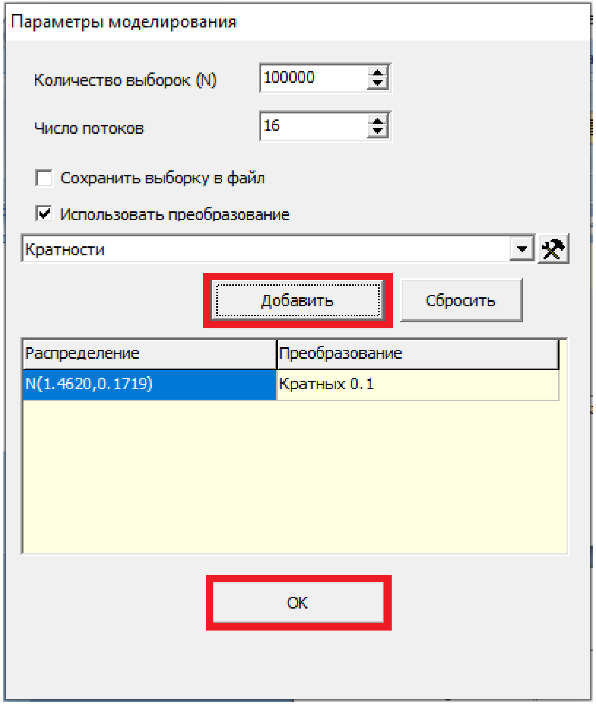
В открывшемся окне (рис. 8.13) можно выбрать параметры преобразования, которому будут подвергаться выборки. В нашем случае выбираем параметр “порядок кратности” 0.1. Следовательно, элементы выборок, моделируемых по нормальному закону с параметрами μ и σ, будут округляться с погрешностью округления $\Delta = 0.1$.



8.13. Окно для выбора параметров преобразования

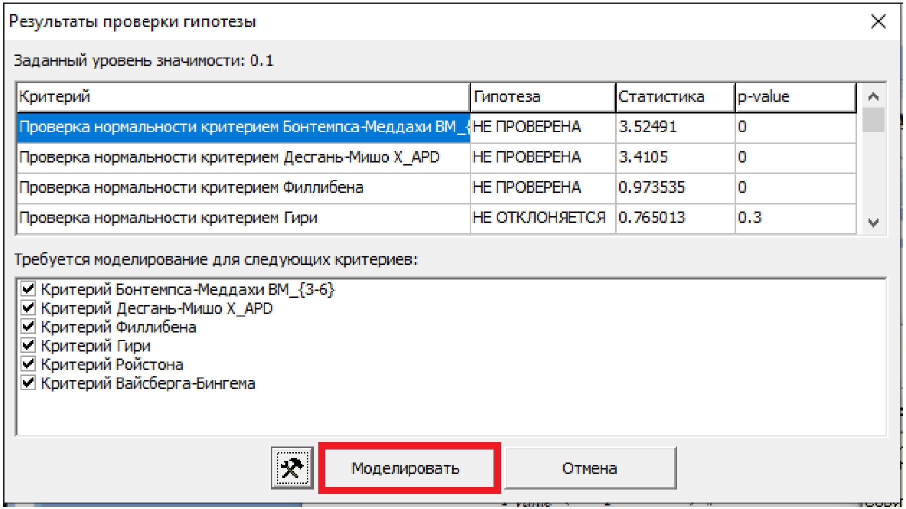
Закрыв окно преобразования, возвращаемся в окно “Параметры моделирования”, жмём кнопку “Добавить”, а затем “ОК” (см. рис. 8.14).

Теперь, вернувшись в окно “Результаты проверки гипотез”, жмём на кнопку “Моделировать” (см. рис. 8.15). После завершения процесса моделирования получаем результаты, где для каждого выбранного критерия, отмеченного “галочкой” в окне на рис. 8.15, приводится значение его статистики и достигнутый уровень значимости p_{value} (см. рис. 8.16), вычисленный в соответствии с распределением статистики, полученным по результатам интерактивного моделирования.

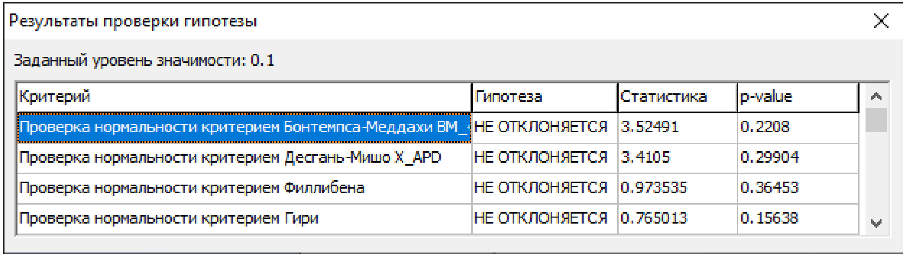


8.14. Окно для выбора параметров моделирования

Такой порядок действий предусмотрен для ситуации возможного влияния на результаты проверки имеющихся ошибок округления. Если опасения о таком влиянии отсутствуют, то процесс проверки оказывается проще. Это не значит, что можно обойтись без компьютерных технологий при использовании множества специальных критериев нормальности, так как распределения статистик большей части таких критериев зависят от объёмов выборок. Поэтому и в таких случаях требование корректности и обоснованности вывода о результатах проверки гипотезы заставляет использовать интерактивное моделирование распределений статистик применяемых критериев, чтобы указать достигнутый уровень значимости p_{value}.



8.15. Окно результатов проверки нормальности после задания преобразования



8.16. Окно результатов проверки нормальности после завершения проверки

При использовании специальных критериев нормальности в условиях отсутствия влияния ошибок округления в описанной последовательности действий исключаются все моменты, связанные с введением преобразования (округления в моделируемых выборках). То есть, после задания числа имитационных экспериментов N и числа используемых ядер процессора (см. рис. 8.12) сразу переходят к процессу моделирования (см. рис. 8.15).

Аналогичные возможности реализованы в [146] для применения в нестандартных условиях критериев типа χ^2 и множества непараметрических критериев согласия.

Библиографический список

1. *Aly E.E.* Quadratic nuisance parameter-free goodness-of-fit tests in the presence of location and scale parameters [Text] / E. E. Aly, M. Csorgo // Canadian Journal of Statistics. – 1985. –Vol. 13. – P. 53–70.

2. *Aly E.E.* On some goodness-of-fit tests for the normal, logistic and extreme-value distributions [Text] / E.E. Aly, M.A. Shayib // Communications in Statistics - Theory and Methods. – 1992. – Vol. 21. No. 5. – P. 1297–1308.

3. *Anderson T.W.* Asymptotic theory of certain “Goodness of fit” criteria based on stochastic processes [Text] / T.W. Anderson, D.A. Darling // AMS. – 1952. – Vol. 23. – P. 193–212.

4. *Anderson T.W.* A test of goodness of fit [Text] / T.W. Anderson, D.A. Darling // J. Amer. Statist. Assoc. – 1954. – Vol. 29. – P. 765–769.

5. *Baringhaus L.* A consistent test for multivariate normality based on the empirical characteristic function [Text] / L. Baringhaus, N. Henze // Metrika. – 1988. – No. 35. – P. 339–348.

6. *Baringhaus L.* Recent and classical tests for normality – A comparative study [Text] / L. Baringhaus, R. Danschke, N. Henze // Comm. Statistic. – 1989. – No. 18(1). – P. 363–379.

7. Biometrika tables for Statisticians [Text] / ed. by E.S. Pearson, H.O. Hartley. – 3rd ed. – Cambridge : University Press, 1966. – Vol. 1. – 264 p.

8. Biometrika tables for Statisticians [Text] / ed.: E.S. Pearson, H.O. Hartley. – Cambridge : University Press, 1972. – Vol. 2. – 385 p.

9. Biometrika tables for Statisticians [Text] / ed.: E.S. Pearson, H.O. Hartley. – Cambridge : University Press, 1976. – Vol. 2. – 286 p.

10. *Blom G.* Statistical estimates and transformed beta-variables : Doctoral thesis [Text] / G. Blom. – Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1958.

11. *Bonett D.G.* A test of normality with high uniform power [Text] / D.G. Bonett, E. Seier // Computational statistics & Data analysis. – 2002. – Vol. 40. – No. 3. – P. 435–445.

12. *Bontemps C.* Testing Normality: A GMM Approach [Text] / C. Bontemps, N. Meddahi // Journal of Econometrics. – 2005. – Vol. 124. – No. 1. – P. 149–186.

13. *Bowmann K.O.* ‘Omnibus’ test contours for departures from normality based on $\left|\sqrt{b_1}\right|$, b_2 [Text] / K.O. Bowmann, L.R. Shenton // Biometrika. – 1975. – Vol. 62. – P. 243–250.

14. *Brys G.* Goodness-of-fit Tests Based on a Robust Measure of Skewness [Text] / G. Brys, M. Hubert, A. Struyf // Computational Statistics. – 2008. – Vol. 23. – No. 3. – P. 429-442.

15. *Brys G.* A robust measure of skewness [Text] / G. Brys, M. Hubert, A. Struyf // Journal of Computational and Graphical Statistics. – 2004. – Vol. 13. – No. 4. – P. 996–1017.

16. *Chen L.* An alternative test for normality based on normalized spacings [Text] / L. Chen, S.S. Shapiro // Journal of Statistical and Simulation. – 2012. – Vol. 53. – P. 269–288.

17. *Chen Z.* An alternative test for uniformity [Text] / Z. Chen, C. Ye // International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering. – 2009. – Vol. 16. – No. 4. – P. 343–356.

18. *Chen Z.* Goodness-of-Fit Test Based on Arbitrarily Selected Order Statistics [Text] / Z. Chen // Mathematics and Statistics. – 2014. – Vol. 2. – No. 2. – P. 72–77.

19. *Chernoff H.* The use of maximum likelihood estimates in χ^2 test for goodness of fit [Text] / H. Chernoff, E.L. Lehmann // Ann. Math. Stat. – 1954. – Vol. 25. – P. 579–586.

20. *Correa J.C.* A new estimator of entropy [Text] / J.C. Correa // Communication in Statistics – Theory and Methods. – 1995. – Vol. 24. – No. 10. – P. 2439–2449.

21. *D’Agostino R.B.* Transformation to normality of the null distribution of g_1 / R.B. D’Agostino // Biometrika. – 1970. – Vol. 57. – P. 679–681.

22. *D’Agostino R.B.* Simulation probability points of b_2 for small samples [Text] / R.B. D’Agostino, G.L. Tietjen // Biometrika. – 1971. – Vol. 58. – P. 669–672.

23. *David H.A.* The distribution of the ratio? In a single normal sample, of range to standard deviation [Text] / H.A. David, H.O. Hartley, E.S. Pearson // Biometrika. – 1964. – Vol. 512. – No. 3–4. – P. 484–487.

24. *Deidda R.* Sensitivity of goodness-of-fit statistics to rainfall data rounding off [Text] / R. Deidda, M. Puliga // Physics and Chemistry of the Earth. – 2006. – Vol. 31. – P. 1240–1251.

25. Design of experiments and statistical analysis for grouped observations [Text]: monograph / V.I. Denisov, K.-H. Eger, B.Yu. Lemeshko, E.B. Tsoy. – Novosibirsk : NSTU Publishing house, 2004. – 464 p.

26. *Desgagne A.* Test of Normality Against Generalized Exponential Power Alternatives [Text] / A. Desgagne, P.L. de Micheaux, A. Leblanc // Communications in Statistics – Theory and Methods. – 2013. – Vol. 42. – No. 1. – P. 164–190.

27. *Desgagne A.* A Powerful and Interpretable Alternative to the Jarque–Bera Test of Normality Based on 2nd-power Skewness and Kurtosis, Using the Rao's Score Test on the APD Family [Text] / A. Desgagne, P.L. de Micheaux // Journal of Applied Statistics. – 2018. – Vol. 45. – No. 13. – P. 2307–2327.

28. *Dong L.B.* An Empirical Likelihood Ratio Test for Normality [Text] / L.B. Dong, D.E.A. Giles // Communications in Statistics – Simulation and Computation, 2007. – Vol.36. – No. 1. – P.197–215.

29. *Doornik J.A.* An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality [Electronic resource] / J.A. Doornik, H. Hansen // Discussion Paper. – Oxford: Nuffield College, 1994. – No. W4&91. – URL: http://www.nuff.ox.ac.uk/users/Doornik/papers/normal2.pdf. – Загл. с экрана.

30. *Doornik J.A.* An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality / J.A. Doornik, H. Hansen // Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 2008. – Vol.70, – P.927–939.

31. *Ebrahimi N.* Two measures of sample entropy [Text] / N. Ebrahimi, K. Pflughoeft, E.S. Soofi // Statistics & Probability Letters. – 1994. – Vol. 20. – No. 3. – P. 225–234.

32. *Epps T. W.* A test for normality based on the empirical characteristic function [Text] / T.W. Epps, L.B. Pulley // Biometrika. – 1983. – Vol. 70. – P. 723–726.

33. *Filliben J.J.* The Probability Plot Correlation Coefficient Test for Normality [Text] / J.J. Filliben // Technometrics. – 1975. Vol. 17. – No. 1. – P.111–117.

34. *Fisher R.A.* The Use of Multiple Measurements in Taxonomic Problems [Text] / R.A. Fisher // Annals of Eugenics. – 1936. – Vol. 7. – P. 179–188.

35. *Frosini B.V.* A survey of a class of goodness-of-fit statistics [Text] / B.V. Frosini // Metron. – 1978. – Vol. 36. – No. 1–2. – P. 3–49.

36. *Frosini B.V.* On the distribution and power of goodness-of-fit statistic with parametric and nonparametric applications, "Goodness-of-fit" [Text] / B.V. Frosini, F.E. Grubbs ; ed. by P. Revesz, K. Sarkadi, P.K. Sen. – Amsterdam – Oxford – New York : North Holland Publ. Comp, 1987. – P. 133–154.

37. *Geary R.C.* The ratio of the mean deviation to the standard deviation as a test of normality [Text] / R.C. Geary // Biometrika. – 1935. – Vol. 27. – P. 310–322.

38. *Geary R.C.* Moments of the ratio of the mean deviation to the standard deviation for normal samples / R.C. Geary // Biometrika. – 1936. – Vol. 28. – P. 295–307.

39. *Geary R.C.* Testing for Normality [Text] / R.C. Geary // Biometrika. – 1937. – Vol. 34. – P. 209–242.

40. *Gel Y.R.* Robust directed tests of normality against heavy-tailed alternatives [Text] / Y.R. Gel, W. Miao, J.L. Gastwirth //Computational Statistics & Data Analysis. – 2007. – Vol. 51. – No. 5. – P. 2734-2746.

41. *Gel Y.R.* A robust modification of the Jarque–Bera test of normality [Text] / Y.R. Gel, J.L. Gastwirth // Economics Letters. – 2008. – Vol. 99. – No. 1. – P. 30–32.

42. *Greenwood P.E.* A guide to chi-squared testing [Text] / P.E. Greenwood, M.S. Nikulin. – New York : John Wiley & Sons, 1996. – 280 p.

43. *Grzegorzewski P.* Entropy-based goodness-of-fit test for exponentiality [Text] / P. Grzegorzewski, R. Wieczorkowski // Communication in Statistics – Theory and Methods. – 1999. – Vol. 28. – P. 1183–1202.

44. *Harter H.L.* Expected values of normal order statistics [Text] / H.L. Harter // Biometrika. – 1961. – Vol. 48. – No. 1–2. – P. 151–165.

45. *Hegazy Y.A.S.* Some new goodness-of-fit tests using order statistics [Text] / Y.A.S. Hegazy, J.R. Green // Applied Statistics. – 1975. – Vol. 24. – No. 3. – P. 299–308.

46. *Henze N.* An approximation to the limit distribution of the Epps-Pulley test statistic for normality [Text] / N. Henze // Metrika. – 1990. – Vol. 37. – P. 7–18.

47. *Jarque C.M.* Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals [Text] / C.M. Jarque, A.K. Bera // Economics Letters. – 1980. – Vol. 6. No. 3. – P. 255–259.

48. *Jarque C.M.* Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals: Monte Carlo evidence [Text] / C.M. Jarque, A.K. Bera // Economics Letters. – 1981. – Vol. 7. № 4. – P. 313–318.

49. *Kolmogoroff A. N.* Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione [Text] / A.N. Kolmogoroff // G. Ist. Ital. attuar. – 1933. – Vol. 4. – No. 1. – P. 83–91.

50. *Kuiper N.H.* Tests concerning random points on a circle [Text] / N.H. Kuiper // Proc. Konikl. Nederl. Akad. Van Wettenschappen. Series A. – 1960. – Vol. 63. – P.38-47.

51. *Lemeshko B.Yu.* The power of goodness of fit tests for close alternatives [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, S.N. Postovalov // Measurement Techniques, 2007. – Vol. 50. No. 2. – P. 132–141.

52. *Lemeshko B.Yu.* Distribution models for nonparametric tests for fit in verifying complicated hypotheses and maximum-likelihood estimators. P. 1 [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2009. – Vol. 52., No. 6. – P. 555–565.

53. *Lemeshko B.Yu.* Analysis of the Power of Goodness-of-Fit Tests for Near Competing Hypotheses. I. The Verification of Simple Hypotheses [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, S.N. Postovalov // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2009. – Vol. 3. – No. 4. – P. 462–475.

54. *Lemeshko B.Yu.* Comparative analysis of the power of goodness-of-fit tests for near competing hypotheses. II. Verification of complex hypotheses [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, S.N. Postovalov // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2010. – Vol. 4. – No. 1. – P. 79–93.

55. *Lemeshko B.Yu.* Statistic Distribution Models for Some Nonparametric Goodness-of-Fit Tests in Testing Composite Hypotheses [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, S.N. Postovalov // Communications in Statistics – Theory and Methods. – 2010. – Vol. 39. – No. 3. – P. 460–471.

56. *Lemeshko B.Yu.* Real-Time Studying of Statistic Distributions of Non-Parametric Goodness-of-Fit Tests when Testing Complex Hypotheses [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, A.P. Rogozhnikov // Proceedings of the International Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference”. – Novosibirsk, Russia, 20-22 September, 2011. – P. 19–27.

57. *Lemeshko B.Yu.* Application of nonparametric goodness-of-fit tests for composite hypotheses in case of unknown distributions of statistics [Text] / A.A. Gorbunova, B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, A.P. Rogozhnikov // Proceedings of the International Workshop “Applied methods of statistical analysis. Applications in survival analysis, reliability and quality control”. – Novosibirsk, 25–27 September 2013. – P. 8–24.

58. *Lemeshko B.Yu.* Interactive investigation of statistical regularities in testing composite hypotheses of goodness of fit [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, A.P. Rogozhnikov // Statistical Models and Methods for Reliability and Survival Analysis: monograph. Chap. 5. – Wiley-ISTE, 2013. – P. 61–76.

59. *Lemeshko B.Yu.* Application and Power of the Nonparametric Kuiper, Watson, and Zhang Tests of Goodness-of-Fit [Text] / B.Yu. Lemeshko, A.A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2013. – Vol. 56, – No. 5. – P.465–475.

60. *Lemeshko B.Yu.* Application of nonparametric Kuiper and Watson tests of goodness-of-fit for composite hypotheses [Text] / B.Yu. Lemeshko, A.A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2013. – Vol. 56. – No. 9. – P.965–973.

61. *Lemeshko B.Yu.* Solving problems of using some nonparametric goodness-of-fit tests [Text] / B.Yu. Lemeshko, A.A. Gorbunova, S.B. Lemeshko, A.P. Rogozhnikov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2014. – Vol. 50. – No. 1. – P.21–35.

62. *Lemeshko B.Y.* About the effect of rounding on the properties of tests for testing statistical hypotheses [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1715. – No. 012063.

63. *Lilliefors H.W.* On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown [Text] / H.W. Lilliefors // J. Am. Statist. Assoc. – 1967. – Vol. 62. – P. 399–402.

64. *Lin Ch.-Ch.* A simple test for normality against asymmetric alternatives [Text] / Ch.-Ch. Lin, G.S. Mudholkar // Biometrika. – 1980. – Vol. 67. – No. 2. – P. 455–461.

65. *Locke C., Spurrier J. D.* The use of U-statistics for testing normality against nonsymmetrical alternative // Biometrika. – 1976. – Vol. 63, No. 1. – P. 143–147.

66. *Locke C.* The use of U-statistics for testing normality against alternatives with both tails heavy or both tails light [Text] / C. Locke, J.D. Spurrier // Biometrika. – 1977. – Vol. 64. – No. 3. – P. 638–640.

67. *Martinez J.* A test for departure from normality based on a biweight estimator of scales [Text] / J. Martinez, B. Iglewitcz // Biometrika. – 1981. – Vol. 68. – No. 1. – P. 331–333.

68. *Martynov G*. Weighted Cramer-von Mises Test with Estimated Parameters [Text] / G. Martynov // Communications in Statistics – Theory and Methods, 2011. – Vol. 40. – No. 19–20. – P. 3569–3586.

69. *Millikan R.A.* On the elementary electrical charge and the Avogadro constant [Text] / R.A. Millikan // The Physical Review. Series II. – 1913. – P.109–143.

70. *Oja H.* Two location and scale-free goodness-of-fit tests [Text] / H. Oja // Biometrika. – 1981. – Vol. 68. – No. 3. – P. 637–640.

71. *Oja H.* New tests for normality [Text] / H. Oja // Biometrika. – 1983. – Vol. 70. – No. 1. – P. 297–299.

72. *Pearson E.S.* Test for departure from normality: Comparison of powers [Text] / E.S. Pearson, R.B. D'Agostino, K.O. Bowmann // Biometrika. – 1977. – Vol. 64. – P. 231–246.

73. *Rao K.C.* A chi-squared statistic for goodness-of-fit tests within the exponential family [Text] / K.C. Rao, D.S. Robson // Commun. Statist. – 1974. – Vol. 3. – P. 1139–1153.

74. *Royston J. P.* Approximating the Shapiro-Wilk W-test for non-normality [Text] / J.P. Royston // Statistics and Computing. – 1992. – Vol. 2. – No. 3. – P. 117–119.

75. *Scott W.F*. Tables for the Lilliefors and Modified Cramer–von Mises tests of normality [Text] / W.F. Scott, B. Stewart // Communications in Statistics – Theory and Methods. – 2011. – Vol.40. – No. 4. – P.726–730.

76. *Shapiro S.S.* An analysis of variance test for normality (complete samples) [Text] / S.S. Shapiro, M.B. Wilk // Biometrika. – 1965. – Vol. 52. – P. 591–611.

77. *Shapiro S.S.* Goodness-of fit tests [Text] / S.S. Shapiro, M.B. Wilk, C.J. Chen // Journal of the American statistical Association. – 1968. – Vol. 63. – P. 1343–1372.

78. *Shapiro S.S.* An approximate analysis of variance test for normality [Text] / S.S. Shapiro, R.S. Francia // Journal of the American statistical Association. – 1972. – Vol. 67. – No. 337. – P. 215–216.

79. *Spiegelhalter D.J.* A test for normality against symmetric alternatives [Text] / D.J. Spiegelhalter //Biometrika. – 1977. – Vol. 64. – No. 2. – P. 415–418.

80. *Stephens M.A.* Use of Kolmogorov–Smirnov, Cramer – von Mises and related statistics – without extensive table [Text] / M.A. Stephens // J. R. Stat. Soc. – 1970. – Vol. 32. – P. 115–122.

81. *Stephens M.A.* EDF statistics for goodness of fit and some comparisons [Text] / M.A. Stephens // Journal of the American statistical Association. – 1974. – Vol. 69. – No. 347. – P. 730–737.

82. *Stigler S.M.* Do robust estimators work with real data? [Text] / S.M. Stigler // The Annals of Statistics. – 1977. – Vol.5. – No. 6. – P.1055–1098.

83. *Tricker A.R.* The effect of rounding on the significance level of certain normal test statistics [Text] / A.R. Tricker // Journal of Applied Statistics. – 1990. – Vol. 17. – No. 1. – P. 31–38.

84. *Tricker A.R.* The effect of rounding on the power level of certain normal test statistics [Text] / A.R. Tricker // Journal of Applied Statistics. – 1990. – Vol. 17. – No. 2. – P. 219–228.

85. *Uyanto S.S.* An Extensive Comparisons of 50 Univariate Goodness-of-fit Tests for Normality [Text] / S.S. Uyanto // Austrian Journal of Statistics. – 2022. – Vol. 51. – P. 45–97.

86. *Van Es B.* Estimating functionals related to a density by class of statistics based on spacings [Text] / B.Van Es // Scandinavian Journal of Statistics. – 1992. – Vol. 19. – P. 61–72.

87. *Vasicek Oldrich.* A Test for Normality Based on Sample Entropy [Text] /O. Vasicek // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). – 1976. – Vol. 38. – No. 1. – P. 54–59.

88. *Voinov V.* A comparative study of some modified chi-squared tests / V. Voinov, N. Pya, R. Alloyarova // Communications in Statistics – Simulation and Computation. – 2009. – Vol. 38. – No. 3. – P.355–367.

89. *Voinov V.* A statistical reanalysis of the classical Rutherford's experiment [Text] / V. Voinov, E. Voinov // Communications in Statistics – Simulation and Computation. – 2010. – Vol.39. – No. 1. – P.157–171.

90. *Watson G.S.* Goodness-of-fit tests on a circle. I [Text] / G.S. Watson // Biometrika. – 1961. – Vol. 48. – No. 1-2. – P.109–114.

91. *Watson G.S.* Goodness-of-fit tests on a circle. II [Text] / G.S. Watson // Biometrika. – 1962. – Vol. 49. – No. 1-2. – P.57- 63.

92. *Weisberg S.* An approximate analysis of variance test for non-normality suitable for machine calculation [Text] / S. Weisberg, C. Bingham // Technometrics. – 1975. – Vol. 17. – No. 1. – P. 133-134.

93. *Zamanzade E.* Testing normality based on new entropy estimators [Text] / E. Zamanzade, N.R. Arghami // Journal of Statistical Computation and Simulation. – 2012. – Vol. 82. No. 11. – P. 1701-1713.

94. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests [Text]: PhD Thesis / J. Zhang. – Toronto: York University, 2001.

95. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit tests based on the likelihood ratio [Text] / J. Zhang // Journal of the Royal Statistical Society: Series B. – 2002. – Vol. 64. – No. 2. – P. 281–294.

96. *Zhang J.* Likelihood-ratio tests for normality [Text] / J. Zhang, Yu. Wub // Computational Statistics & Data Analysis. – 2005. – Vol. 49. – No. 3. – P.709–721.

97. *Zhang J.* Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio [Text] / J. Zhang // Technometrics. – 2006. – Vol. 48. – No. 1. – P.95–103.

98. *Zhang P.* Omnibus test of normality using the Q statistic [Text] / P. Zhang // Journal of Applied Statistics. – 1999. – Vol. 26. – No. 4. – P. 519–528.

99. *Большев Л.Н.* Асимптотические пирсоновские преобразования [Текст] / Л.Н. Большев // Теория вероятностей и ее применение. – 1963. – Т. 8. – № 2. – С. 129–155.

100. *Большев Л.Н.* Таблицы математической статистики [Текст] / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М.: Наука, 1983. – 416 с.

101. *Большев Л.Н.* Теория вероятностей и математическая статистика : избр. тр. [Текст] / Л.Н. Большев; под ред. Ю.В. Прохорова. – М.: Наука, 1987. – 286 с.

102. *Бушакова А.Д.* Исследование влияния вариантов асимптотической оптимальности группирования на мощность критериев типа χ^2 [Текст] / А.Д. Бушакова, Б.Ю. Лемешко // Материалы Российской НТК: Информатика и проблемы телекоммуникаций. Т. 1. – Новосибирскб 2009. – С .34–37.

103. *ГОСТ Р ИСО 5479–2002*. Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения [Текст]. – М. : Изд-во стандартов, 2002. – 30 с.

104. *Денисов В.И.* Оптимальное группирование при обработке экспериментальных данных [Текст] / В.И. Денисов, Б.Ю. Лемешко // Измерительные информационные системы. – Новосибирск, 1979. – С. 5–14.

105. *Денисов В.И.* Оптимальное группирование, оценка параметров и планирование регрессионных экспериментов [Текст]: в 2 ч. / В.И. Денисов, Б.Ю. Лемешко, Е.Б. Цой; Новосиб. гос. техн. ун-т. – Новосибирск, 1993. – 346 с.

106. *Денисов В.И.* Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим [Текст]: метод. реком. Ч. I. Критерии типа χ^2 / В.И. Денисов, Б.Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. – 126 с.

107. *Золотухина Л.В.* Эмпирическое исследование мощности критерия Саркади и его модификация [Текст] / Л.В. Золотухина, Е.В. Винник // Завод. лаб. – 1985. – Т. 51. № 1. – С. 51–55.

108. *Кобзарь А.И.* Прикладная математическая статистика: для инженеров и научных работников [Текст] / А.И. Кобзарь. – М.: Физматлит, 2006. – 816 с.

109. *Козлова А.В.* Исследование распределений статистик и мощности непараметрических критериев согласия, предложенных Jin Zhang [Текст] / А.В. Козлова, Б.Ю. Лемешко // Материалы Российской НТК: Информатика и проблемы телекоммуникаций. Т. 1. – Новосибирск, – 2007. – С.136-139.

110. *Лемешко Б.Ю.* Группирование наблюдений как способ получения робастных оценок [Текст] / Б.Ю. Лемешко // Надежность и контроль качества. – 1997. – № 5. – С.26–35.

111. *Лемешко Б.Ю.* Робастные методы оценивания и отбраковка аномальных измерений [Текст] / Б.Ю. Лемешко // Заводская лаборатория. – 1997. – Т.63. – № 5. – С. 43–49.

112. *Лемешко Б.Ю.* Асимптотически оптимальное группирование наблюдений – это обеспечение максимальной мощности критериев [Текст] / Б.Ю. Лемешко // Надежность и контроль качества. – 1997. – № 8. – С. 3–14.

113. *Лемешко Б.Ю.* Асимптотически оптимальное группирование наблюдений в критериях согласия [Текст] / Б.Ю. Лемешко // Заводская лаборатория. – 1998. – Т. 64. – № 1. – С. 56–64.

114. *Лемешко Б.Ю.* Максимизация мощности критериев типа χ^2 [Текст] / Б.Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова // Докл. СО АН высш. шк. – Новосибирск, 2000. – № 2. – С. 53–61.

115. *Лемешко Б.Ю.* О зависимости распределений статистик непараметрических критериев и их мощности от метода оценивания параметров [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2001. – Т. 67. – № 7. – С. 62–71.

116. *Лемешко Б.Ю.* Применение непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез [Текст] / Б. Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов // Автометрия. – 2001. – № 2. – С. 88–102.

117. *Лемешко Б.Ю.* Обеспечение наибольшей мощности применяемых критериев типа χ^2 [Текст] / М.Г. Березовский, Б.Ю. Лемешко, Е.В. Чимитова // Вестник СибГАУ. Вып.3. – Красноярск: СибГАУ, 2002. – С.78–85.

118. *Лемешко Б.Ю.* О выборе числа интервалов в критериях согласия типа χ^2 [Текст] / Б.Ю. Лемешко, Е.В. Чимитова // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2003. – Т. 69. – № 1. – С. 61–67.

119. *Лемешко Б.Ю.* Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей [Текст]: учебное пособие. / Б.Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 119 с.

120. *Лемешко Б.Ю.* Сравнительный анализ критериев проверки отклонения распределения от нормального закона [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Метрология. – 2005. – № 2. – С. 3–24.

121. *Лемешко Б.Ю.* Мощность критериев согласия при близких альтернативах [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов // Измерительная техника. – 2007. – № 2. – С.22-27.

122. *Лемешко Б.Ю.* Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах. I. Проверка простых гипотез [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – Т. 11. – № 2 (34). – С.96–111.

123. *Лемешко Б.Ю.* Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких альтернативах. II. Проверка сложных гипотез [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – Т. 11. – № 4 (36). – С.78–93.

124. *Лемешко Б.Ю.* Исследование особенностей и мощности некоторых критериев нормальности [Текст] / Б.Ю. Лемешко, А.П. Рогожников // Метрология. – 2009. – № 4. – С. 3–24.

125. *Лемешко Б.Ю.* Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. I [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2009. – № 6. – С. 3–11.

126. *Лемешко Б.Ю.* Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. II [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2009. – № 8. – С.17–26.

127. *Лемешко Б.Ю.* О нормальности погрешностей измерений в классических экспериментах и мощности критериев, применяемых для проверки отклонения от нормального закона [Текст] / Б.Ю. Лемешко, А.П. Рогожников // Метрология. – 2012. – № 5. – С. 3–26.

128. *Лемешко Б.Ю.* О применении и мощности непараметрических критериев согласия Купера, Ватсона и Жанга [Текст] / Б.Ю. Лемешко, А.А. Горбунова // Измерительная техника. – 2013. – № 5. – С.3–9.

129. *Лемешко Б.Ю.* Применение непараметрических критериев согласия Купера и Ватсона при проверке сложных гипотез [Текст] / Б.Ю. Лемешко, А.А. Горбунова // Измерительная техника. – 2013. – № 9. – С.14–21.

130. *Лемешко Б.Ю.* О решении проблем применения некоторых непараметрических критериев согласия [Текст] / Б.Ю. Лемешко, А.А. Горбунова, С.Б. Лемешко, А.П. Рогожников // Автометрия. – 2014. – Т. 50. – № 1. – С.26–43.

131. *Лемешко Б.Ю.* Непараметрические критерии согласия: Руководство по применению [Текст] / Б.Ю. Лемешко. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 163 с.

132. *Лемешко Б.Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению [Текст]: монография. – М.: ИНФРА-М, 2015. – 160 с.

133. *Лемешко Б.Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона. Руководство по применению [Текст]: монография / Б.Ю. Лемешко. П.Ю. Блинов. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. –183 с.

134. *Лемешко Б.Ю.* Критерии проверки отклонения от экспоненциального закона. Руководство по применению [Текст]: монография / Б.Ю. Лемешко, П.Ю. Блинов. – М.: ИНФРА-М, 2021. – 352 с.

135. *Лемешко Б.Ю.* Критерии проверки гипотез о случайности и отсутствии тренда. Руководство по применению [Текст]: монография / Б.Ю. Лемешко, И.В. Веретельникова. – М.: ИНФРА-М, 2021. – 221 с.

136. *Лемешко Б.Ю.* Критерии проверки гипотез об однородности. Руководство по применению [Текст]: монография / Б.Ю. Лемешко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2021. – 248 с.

137. *Лемешко Б.Ю.* К вопросу статистического анализа больших данных [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, М.А. Семёнова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2018. – № 44. – С. 40–49.

138. *Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б.* Влияние округления на свойства критериев проверки статистических гипотез [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Автометрия. – 2020. – Т. 56. – № 3. – С. 35–45.

139. *Лемешко Б.Ю.* О влиянии ошибок округления на распределения статистик критериев согласия [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2020. – № 53. – С. 47–60.

140. *Лемешко Б.Ю.* Проблемы применения непараметрических критериев согласия в задачах обработки результатов измерений [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Системы анализа и обработки данных. – 2021. – № 2 (82). – С. 47–66.

141. *Лемешко Б.Ю.* Непараметрические критерии согласия при проверке нормальности в условиях округления измерений [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Системы анализа и обработки данных. – 2022. – № 2 (86). – С. 19–35.

142. *Мартынов Г.В.* Критерии омега-квадрат [Текст] / Г.В. Мартынов. – М.: Наука, 1978. – 80 с.

143. *Никулин М.С.* Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба [Текст] / М.С. Никулин // Теория вероятностей и ее применение. – 1973. – Т. XVIII. – № 3. – С. 583–591.

144. *Никулин М.С.* О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений [Текст] / М.С. Никулин // Теория вероятностей и ее применение. – 1973. – Т. XVIII. – № 3. – С. 675–676.

145. *Новицкий П.В.* Оценка погрешностей результатов измерений [Текст] / П.В. Новицкий, И.А. Зограф. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 303 с.

146. Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин "Интервальная статистка 5.4" [Электронный ресурс] / Б.Ю. Лемешко, С.Б.Лемешко, П.Ю. Блинов, И.В. Веретельникова, А.Ю. Новикова // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2018666213, 13.12.2018. Заявка № 2018663206 от 22.11.2018. URL: http://www.ami.nstu.ru/~headrd/ISW_exe.zip (дата обращения 24.04.2022).

147. Р 50.1.037–2002. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. II. Непараметрические критерии [Текст]. – М.: Изд-во стандартов, 2002. – 64 с.

148. Р 50.1.033–2001. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. I. Критерии типа хи-квадрат [Текст]. – М.: Изд-во стандартов, 2002. – 87 с.

149. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход [Текст]: монография / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов, Е.В. Чимитова. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. – 888 с.

150. *Чибисов Д.М.* Некоторые критерии типа хи-квадрат для непрерывных распределений [Текст] / Д. М. Чибисов // Теория вероятностей и ее применение. – 1971. – Т. XVI. – № 1. – С. 3–20.