

Министерство образования и науки Российской Федерации  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

Б.Ю. ЛЕМЕШКО, С.Б. ЛЕМЕШКО,  
С.Н. ПОСТОВАЛОВ, Е.В. ЧИМИТОВА

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ,  
МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ  
ВЕРОЯТНОСТНЫХ  
ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ  
КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПОДХОД

НОВОСИБИРСК  
2011

УДК 519.23  
Л 442

Рецензенты: д-р техн. наук, профессор *Д.В. Лисицин*;  
д-р техн. наук, профессор *А.А. Попов*

**Лемешко Б.Ю.**

Л 442 Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход : монография / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов, Е.В. Чимитова. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. – 888 с. (серия «Монографии НГТУ»).

ISBN 978-5-7782-1590-0

В монографии рассматриваются вопросы, связанные с применением методов статистического анализа. Обсуждаются проблемы оценивания параметров при точечных, цензурированных, группированных и интервальных выборках. Исследуются отличия свойств оценок при ограниченных объемах выборок от асимптотических свойств этих же оценок. Рассматриваются вопросы применения критериев согласия типа  $\chi^2$ , исследуется влияние факторов, влияющих на мощность критериев (числа интервалов и способов группирования). Рассматриваются вопросы применения непараметрических критериев согласия (Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга) при проверке сложных гипотез, приводится множество моделей распределений статистик этих критериев при проверке различных сложных гипотез. Приводятся результаты сравнительного анализа мощности параметрических и непараметрических критериев согласия. Приводятся результаты исследований свойств многочисленных критериев проверки гипотез об отклонении эмпирического распределения от нормального, подчеркиваются достоинства и недостатки отдельных критериев, результаты сравнительного анализа мощности критериев. Исследуются свойства и мощность непараметрических критериев однородности. Показывается устойчивость к отклонениям от нормального закона классических критериев однородности средних, проводится сравнительный анализ мощности параметрических и непараметрических критериев. Проводится сравнительный анализ мощности классических критериев проверки гипотез об однородности дисперсий, анализ мощности непараметрических критериев проверки гипотез о равенстве характеристик рассеяния. Показывается возможность применения классических критериев однородности дисперсий при законах, отличающихся от нормального. Рассматриваются и исследуются критерии исключения аномальных измерений, наличия тренда и др.

В приложении приводится множество таблиц, являющихся результатом исследований и способствующих корректному применению соответствующих методов статистического анализа.

Книга будет полезна студентам, аспирантам, преподавателям вузов, научным сотрудникам, специалистам различного профиля (инженерам, экономистам, медикам и др.), сталкивающимся в своей деятельности с необходимостью статистического анализа результатов экспериментальных исследований.

**УДК 519.23**

**ISBN 978-5-7782-1590-0**

© Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б.,  
Постовалов С.Н., Чимитова Е.В., 2011  
© Новосибирский государственный  
технический университет, 2011

Ministry of Education and Science of the Russian Federation

NOVOSIBIRSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY

---

B.YU. LEMESHKO, S.B. LEMESHKO,  
S.N. POSTAVALOV, E.V. CHIMITOVA

**STATISTICAL DATA ANALYSIS,  
SIMULATION AND STUDY  
OF PROBABILITY REGULARITIES  
COMPUTER APPROACH**

Monograph

NOVOSIBIRSK  
2011

UDC 519.23  
L 442

Reviewers: Prof. *D.V. Lisitsyn*, D. Sc. (Eng.)  
Prof. *A.A. Popov*, D.Sc. (Eng.)

**Lemeshko B.Yu.**

L 442 Statistical Data Analysis, Simulation and Study of Probability Regularities. Computer Approach : monograph / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, S.N. Postovalov, E.V. Chimitova. – Novosibirsk : NSTU Publisher, 2011. – 888 pp. (“NSTU Monographs” series).

ISBN 978-5-7782-1590-0

Issues relating to applying statistical analysis methods are addressed in the monograph. Problems of estimating parameters for point, censored, grouped and interval samples are discussed. Differences between estimate properties under limited amounts of samples and asymptotic properties of the same estimates are studied. The use of the  $\chi^2$  goodness-of-fit tests and the effect of factors on the test power (i.e. the number of intervals and ways of grouping) are considered. The use of nonparametric goodness-of-fit tests (Kolmogorov's, Kramer–Mises–Smirnov's and Anderson–Darling's) when testing complex hypotheses is discussed. A lot of models of distributed statistics of these tests when checking various complex hypotheses are provided. The results of a comparative analysis of the power of parametric and nonparametric goodness-of-fit tests are given. The results of study of properties of various tests of hypotheses of empirical distribution abnormality are given. Advantages and disadvantages of some tests are emphasized and the results of a comparative analysis of tests power are provided. Properties and power of nonparametric tests for homogeneity are studied. The stability of classical tests for homogeneity of means against the departure from the normal law is demonstrated and a comparative analysis of parametric and nonparametric test power is made. A comparative analysis of classical test power in checking hypotheses of variances homogeneity is made as well as an analysis of nonparametric criteria of testing hypotheses of variance characteristics equality. A possibility of using classical tests for homogeneity of variances with distribution abnormality laws is shown. Tests for the rejection of abnormal measurements and tests of the presence of a trend are studied and analyzed.

A lot of tables that present the results of the study and help to use correctly the proposed methods of statistical analysis are given in the appendices.

The book is intended for undergraduate, graduate and postgraduate students, university teachers, researchers and specialists in various fields (e.g. engineers, economists, physicians, etc.) who need to analyze the results of their experimental research.

**UDC 519.23**

**ISBN 978-5-7782-1590-0**

© Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B.,  
Postovalov S.N., Chimitova E.V., 2011  
© Novosibirsk State Technical University, 2011

## **Предисловие**

Статистические методы анализа данных, методы прикладной математической статистики в силу объективных условий все шире используются в различных приложениях. В то же время уровень применения этих методов в России, использование современных информационных технологий в ходе решения задач статистического анализа при исследовании процессов и сложных систем в настоящее время не выдерживают никакой критики. В последние десятилетия с рынка научно-технической продукции практически полностью ис��ли отечественные разработки в области программного обеспечения задач статистического анализа, пакеты и программные системы, ориентированные на задачи анализа данных. Это самым негативным образом отражается на качестве статистического анализа при обработке результатов экспериментальных исследований в различных сферах научно-технической деятельности, сужает спектр применяемых методов из широкого арсенала прикладной математической статистики, приводит к некорректным выводам и, как следствие, к принятию неверных решений.

В настоящее время известно множество систем статистического анализа, используемых в мировой практике. Одни программные системы – универсальные, ориентированные на максимально широкий спектр методов статистического анализа, другие предназначены для решения относительно узкого класса задач. Предлагаемые системы дают инструментарий для решения различных задач статистического анализа, правильность использования которого не в последнюю очередь зависит от квалификации пользователя в области соответствующих методов.

Использование популярных систем не снимает проблем корректного решения задач анализа данных в различных приложениях и не только в силу того, что новые результаты в области прикладной математической статистики далеко не сразу воплощаются в программном обеспечении. До внедрения в универсальные системы нового метода проходит 10...15 лет, если это вообще происходит.

Объективно применяемые системы включают в себя богатый арсенал классических методов прикладной математической статистики. Однако область корректного применения этого арсенала в различных приложениях сильно ограничена. Дело в том, что предпосылки применения многих методов в задачах, возникающих на практике, как правило, не выполняются. Например, не выполняются предположения о принадлежности ошибок измерений нормальному закону. Или вследствие ограниченности объемов выборок оказывается некорректным использование асимптотических результатов. Или форма регистрации наблюдений (группированные, цензурированные, многократно цензуренные, интервальные данные) не позволяет использовать классические методы оценивания и проверки статистических гипотез. Или, например, из-за сложности построения конкретных зависимостей аналитическими методами математики не смогли предложить аппарат для проверки сложных гипотез с применением непараметрических критериев согласия. Практика, таким образом, подкидывает множество постановок задач, на которые математический аппарат прикладной статистики пока не дает ответа (новых методов, критериев и т. п.).

Надеяться на то, что поставляемые практикой все в больших масштабах задачи (в нестандартных условиях) будут своевременно разрешаться за счет человеческого интеллекта и аналитическими методами, не приходится. Выход видится в интенсивном и эффективном использовании компьютерных технологий. В последнее десятилетие увеличилось количество примеров использования методов статистического моделирования (методов Монте-Карло) для исследования статистических и вероятностных закономерностей, например, для нахождения процентных точек (квантилей) распределений статистик некоторых критериев. Хотя наиболее часто методы статистиче-

ского моделирования в области прикладной математической статистики исследователи используют для проверки аналитических выводов (или только мечтают применить). Становится правилом хорошего тона, когда в международном журнале высокого уровня доказательство теоремы в области математической статистики подтверждается результатами имитационного моделирования. Однако эти разрозненные примеры еще не являются подтверждением системного подхода к развитию компьютерных технологий, направленных на исследование вероятностных закономерностей, на совершенствование аппарата прикладной математической статистики. Парадоксально, но развитие (прикладной) математической статистики сдерживает предубеждение к численным результатам, полученным в этой области: теорема, дающая асимптотический результат, – это хорошо, а приближенная модель, полученная с использованием компьютерных технологий и адекватно описывающая ситуацию в реальных условиях приложения, показывающая, что асимптотический результат здесь не имеет места, – это не совсем хорошо.

Однако ситуация начинает меняться. Постепенно приходит осознание того, что численные методы, методы статистического моделирования способствуют развитию математической статистики, что «статистические пакеты – это инструмент исследователя». Но здесь надо однозначно понимать, что используемые системы статистического анализа универсального назначения, как правило, не могут служить инструментарием для исследования закономерностей в самой математической статистике, инструментом для развития ее математического аппарата (разве что в очень ограниченном смысле).

Отличительной особенностью исследований коллектива авторов является развивающийся численный подход к исследованию закономерностей. В тех случаях, когда это оказывается сложным сделать с использованием аналитического аппарата, математические модели закономерностей строятся на основе компьютерного моделирования. Это позволяет добиваться хороших результатов там, где их не удается достичь одними аналитическими методами. Такая методика нахо-

дится в процессе постоянной эволюции: найденные фундаментальные закономерности (модели, их описывающие), расширяющие аппарат математической статистики, встраиваются в программное обеспечение, расширяя, в свою очередь, его возможности для исследования вероятностных закономерностей.

За последние 10...15 лет на базе этого подхода удалось добиться достаточно заметных результатов, способствующих расширению аппарата прикладной математической статистики. Например, по результатам исследований совокупности критериев согласия разработаны рекомендации по стандартизации Госстандарта России Р 50.1.033–2001 и Р 50.1.037–2002. В монографии эти результаты существенно уточнены и расширены. В условиях нарушения классических предположений были исследованы распределения и свойства статистик нескольких десятков широко используемых критериев, что способствовало пониманию возможностей статистических методов, совершенствованию аппарата прикладной статистики. Полученные результаты представлены более чем в пятидесяти журнальных публикациях, однако возникла естественная необходимость систематизировать и обобщить их в едином издании, чтобы сделать доступным широкому кругу специалистов, использующих статистические методы.

Ряд проектов авторов в данном направлении исследований был поддержан Российской фондом фундаментальных исследований, Министерством образования и Министерством образования и науки Российской Федерации, за что авторы искренне признательны неизвестным экспертам, положительно оценившим перспективность компьютерного подхода к исследованию вероятностных и статистических закономерностей. Это особенно важно для молодых участников проектов.

За последние сто с небольшим лет предложена масса статистических методов и критериев, в обилии которых невозможно ориентироваться даже специалисту. Многие из них реализованы в программных системах статистического анализа. Во многих случаях для проверки гипотезы одного и того же вида предложен целый набор критериев. По существу, имеется набор инструментов, предназначенных для

косвенного измерения одной и той же величины. И тут возникает проблема выбора: какой критерий предпочтительней? Какой критерий при заданной вероятности ошибки первого рода гарантирует меньшую вероятность ошибки второго рода? Можно ли вообще при таком объеме выборки различить эти две интересующие нас конкурирующие гипотезы? Можно ли при таких объемах выборок использовать асимптотические результаты для данного критерия? Как правило, получить ответ на эти вопросы можно только при использовании компьютерных технологий исследования. Только при использовании методов компьютерного моделирования «неожиданно» проявляются недостатки статистических критериев, ограничивающие область их корректного применения.

В предлагаемой монографии, в которой основные результаты получены с использованием вычислительных методов и статистического моделирования, компьютерные технологии рассматриваются как инструментарий, направленный на изучение закономерностей математической статистики, на уточнение условий, в которых корректно применение конкретных теоретических результатов математической статистики, на исследование постановок, появившихся в последнее время в связи с потребностями практики. Развивающие технологии существенно дополняют аналитические методы, помогают находить приближенные решения в тех случаях, когда этого не удается сделать аналитическими методами. На основании имитационного моделирования можно делать не только асимптотические выводы, но и прослеживать изменения закономерностей с ростом объемов выборок, моделировать и строить модели распределений любой исследуемой статистики в конкретной ситуации.

В течение ряда последних лет на факультете прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета читается курс «Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей» [253, 264]. Программа курса перекликается с содержанием монографии, а развиваемое математическое и программное обеспечение позволяет слушателям курса проводить самостоятельные исследования по всем направлениям, охваченным ее оглавлением.

В монографию включены только те разделы прикладной математической статистики, в которых авторы получили новые и интересные для практического использования результаты. Авторы надеются, что книга и приводимые в приложениях таблицы будут полезны читателям в их практической деятельности, а ее содержание пополнит знания, полученные при прослушивании вузовского курса по математической статистике, в котором «почти наверное» были опущены острые моменты, связанные с реальными свойствами методов и критериев.

*Б.Ю. Лемешко*  
*Август 2010*

---

# 1. ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

---

## 1.1. Введение

Пусть в эксперименте наблюдается непрерывная случайная величина  $\xi$  с функцией распределения вероятностей  $F(x, \theta)$  и плотностью распределения  $f(x, \theta)$ , где  $\theta$  – вектор неизвестных параметров. По выборке  $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  требуется оценить неизвестные параметры распределения.

Качество оценок, построенных по выборкам конечного объема ( $n < \infty$ ), характеризуется следующими свойствами.

**Несмешенность.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется *несмешенной*, если  $E[\hat{\theta}(X_n)] = \theta$ .

**Эффективность.** Несмешенная оценка  $\hat{\theta}$  называется *эффективной*, если  $D[\hat{\theta}(X_n)] = J_n^{-1}(\theta)$ , где  $J_n(\theta)$  – информационная матрица Фишера. Эффективность имеет смысл только для регулярных моделей.

Семейство  $\{F(x, \theta), \theta \in \Omega\}$  является *регулярным*, если выполняются следующие условия:

- для любого  $\theta, \theta \in \Omega$ , плотность  $f(x, \theta)$  дифференцируема по  $\theta$ , т. е. существует  $\frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta)$ ;
- множество  $\{x : f(x, \theta) = 0\}$  не зависит от  $\theta$ .

При  $n \rightarrow \infty$  качество оценок определяется их асимптотическими свойствами.

**Состоятельность.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется *состоятельной*, если  $\hat{\theta}(X_n) \xrightarrow{P} \theta$ , т. е.  $\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ |\hat{\theta}(X_n) - \theta| > \varepsilon \right\} = 0$ . Для проверки состоятельности можно использовать следующий критерий: *если оценка является асимптотически несмещенной и дисперсия стремится к нулю с ростом  $n$ , то оценка состоятельна*.

**Асимптотическая нормальность.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется *асимптотически нормальной*, если  $F_{\hat{\theta}}(t) \rightarrow \Phi(t)$ , где  $\Phi(t)$  – функция распределения нормального закона.

Свойства оценок обычно проверяются аналитическими методами. Однако в ситуациях, когда оценка не выражается в явном аналитическом виде, а получается в процессе решения сложной оптимизационной задачи, выявление свойств таких оценок, сравнение их со свойствами других оценок оказывается непростой задачей.

При выборе методов статистического анализа необходимо учитывать форму представления исходных данных, часто определяемую условиями и точностью регистрации. На практике нередко возникает задача обработки группированных или цензурированных наблюдений, особенно при исследовании величин типа «времени жизни». Интерес к таким задачам не снижается, так как появление группированных и цензурированных выборок оказывается естественным и обычно порождается спецификой проведения экспериментов и условиями регистрации наблюдений. Вопросы оценивания параметров распределений, условия существования оценок максимального правдоподобия по группированным и частично группированным данным обсуждались в работах [153, 160, 211]. В [303] рассмотрены различные методы оценивания параметров, предполагающие использование группированных выборок. В [307] получены  $L$ -оценки параметров сдвига и масштаба, основанные на выборочных квантилях. Этот подход по сути также предполагает работу с группированными выборками. Оценивание параметров по цензурированным наблюдениям рассматривалось в [155, 156, 157, 158, 159, 328, 322, 324, 323, 325, 327, 326]. Существует большое количество работ, посвященных оцениванию методом максимального правдоподобия параметров распределений по цензурированным выборкам: [54, 109, 140, 145, 157, 205, 225, 309, 319 и другие]. Показано, что цензурирование всегда приводит к потере эффективности оценок и, более того, распределения оценок максимального правдоподобия (ОМП) при сильной степени цензурирования оказываются асимметричными, а сами оценки – смещенными.

## 1.2. Методы оценивания

### 1.2.1. Метод максимального правдоподобия

Оценки максимального правдоподобия вычисляются в результате максимизации по  $\theta$  функции правдоподобия

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \quad (1.1)$$

или ее логарифма

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta). \quad (1.2)$$

В случае скалярного параметра ОМП определяются как решение уравнения, а в случае векторного параметра – как решение системы уравнений правдоподобия вида

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_l} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta_l} = 0, \quad l = \overline{1, m}, \quad (1.3)$$

где  $m$  – размерность вектора параметров  $\theta$ . Чаще всего решение (1.3) может быть найдено только численными методами.

В отличие от других методов максимального правдоподобия позволяет определять оценки параметров по негруппированным, частично группированным, группированным и цензурированным данным, т. е. дает возможность исследователю самому определять, в каком виде регистрировать и в каком виде хранить экспериментальную информацию в зависимости от характеристик приборов, регистрирующих наблюдения, и объема экспериментальной информации.

С точки зрения вида регистрируемых наблюдений группированные и однократно цензурированные выборки являются частным случаем понятия частично группированной выборки, которую можно определить следующим образом. Выборка называется *частично группированной*, если имеющаяся в нашем распоряжении информация связана с множеством непересекающихся интервалов, которые делят область

определения случайной величины на  $k$  непересекающихся интервалов граничными точками

$$x_{(0)} < x_{(1)} < \dots < x_{(k-1)} < x_{(k)},$$

где  $x_{(0)}$  – нижняя грань области определения случайной величины  $X$ ;  $x_{(k)}$  – верхняя грань области определения случайной величины  $X$ , так что каждый интервал принадлежит к одному из двух типов:

- a)  $i$ -й интервал принадлежит к первому типу, если число  $n_i$  известно, но индивидуальные значения  $x_{ij}$ ,  $j = \overline{1, n_i}$  неизвестны;
- б)  $i$ -й интервал принадлежит ко второму типу, если известно не только число  $n_i$ , но и все индивидуальные значения  $x_{ij}$ ,  $j = \overline{1, n_i}$ .

В дальнейшем суммирование по интервалам первого и второго типов (аналогично умножение) обозначается соответственно как  $\left(\sum_{(1)}\right)$  и  $\left(\sum_{(2)}\right)$ .

Оценкой максимального правдоподобия неизвестного параметра по частично группированным наблюдениям называется такое значение параметра, при котором функция правдоподобия

$$L(\theta) = \prod_{(1)} P_i^{n_i}(\theta) \prod_{(2)} \prod_{j=1}^{n_i} f(x_{ij}, \theta), \quad (1.4)$$

где  $f(x, \theta)$  – функция плотности случайной величины;  $P_i(\theta) = \int_{x_{(i-1)}}^{x_{(i)}} f(x, \theta) dx$  – вероятность попадания наблюдения в  $i$ -й интервал

значений, достигает максимума на множестве возможных значений параметра. При вычислении ОМП максимизируют (1.4) или решают систему уравнений правдоподобия

$$\sum_{(1)} n_i \frac{\partial \ln P_i(\theta)}{\partial \theta_l} + \sum_{(2)} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\partial \ln f(x_{ij}, \theta)}{\partial \theta_l} = 0, \quad l = \overline{1, m}, \quad (1.5)$$

где  $m$  – размерность вектора параметров  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)^\top$ . В случае частично группированных данных система (1.5), за редким исключением, решается только численно.

Подробнее о построении и статистических свойствах ОМП параметров по группированным и цензуризованным данным говорится в разделах 1.4 и 1.5.

Оценки максимального правдоподобия при достаточно общих условиях являются асимптотически несмещенными и асимптотически эффективными, что объясняет их популярность на практике. Однако ОМП не всегда являются устойчивыми к наличию аномальных наблюдений в выборке.

### 1.2.2. Методы минимального расстояния

При вычислении  $MD$ -оценок (оценок минимального расстояния) по  $\theta$  минимизируется некоторая мера близости (расстояние  $\rho(F(x, \theta), F_n(x))$ ) между теоретическим и эмпирическим распределениями.  $MD$ -оценки находятся в процессе решения задачи

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \rho(F(x, \theta), F_n(x)).$$

В качестве мер близости можно использовать, например, статистики непараметрических критериев согласия:

а) статистику  $D_n$  Колмогорова

$$D_n = \sup_x |F(x, \theta) - F_n(x)|, \quad (1.6)$$

которую можно вычислить на основании соотношений

$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-),$$

$$D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_i, \theta) \right\},$$

$$D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ F(x_i, \theta) - \frac{i-1}{n} \right\},$$

где  $n$  – объем выборки;  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – упорядоченные по возрастанию выборочные значения;

б) статистику  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова

$$\begin{aligned} \omega_n^2 [\psi(F)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \{E[F_n(x)] - F(x)\}^2 \psi(F(x)) dF(x) = \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ g[F(x_i)] - \frac{2i-1}{2n} f[F(x_i)] \right\} + \int_0^1 (1-t)^2 \psi(t) dt, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $E[\cdot]$  – оператор математического ожидания;  $\psi(t)$  – заданная на отрезке  $0 \leq t \leq 1$  неотрицательная функция, относительно которой предполагается, что  $\psi(t)$ ,  $t\psi(t)$ ,  $t^2\psi(t)$  интегрируемы на отрезке  $0 \leq t \leq 1$ , и

$$f(t) = \int_0^t \psi(s) ds, \quad g(t) = \int_0^t s\psi(s) ds.$$

При выборе  $\psi(t) \equiv 1$  получается

$$\omega_n^2 = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ F(x_i, \theta) - \frac{2i-1}{2n} \right\}^2; \quad (1.8)$$

в) статистику  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга, которая получается при выборе в (1.7)  $\psi(t) \equiv 1/t(1-t)$

$$\Omega_n^2 = -1 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2i-1}{2n} \ln F(x_i, \theta) + \left(1 - \frac{2i-1}{2n}\right) \ln(1 - F(x_i, \theta)) \right\}. \quad (1.9)$$

### 1.2.3. Оценивание параметров по порядковым статистикам

Для нахождения оценок часто используются линейные комбинации порядковых статистик (элементов вариационного ряда)  $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$ , построенного по выборке, или выборочных квантилей. Такие оценки называются *L-оценками*. *L-оценки* обладают двумя важными для практического применения качествами: простотой вычислений и хорошими свойствами робастности.

При построении *L-оценок* по выборочным квантилям  $\hat{z}_1 < \hat{z}_2 < \dots < \hat{z}_k$  рассматриваемого закона, где  $P\{X \leq z_i\} = F(z_i, \theta) = p_i$ , а выборочная квантиль определяется, например, выражением  $\hat{z}_i = (x_{([np_i])} + x_{([np_i]+1)}) / 2$ , где  $x_{(i)}$  –  $i$ -я порядковая статистика;  $n$  – объем выборки, соответствующую оценку находят в виде

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \hat{z}_i,$$

где  $\alpha_i$  – набор коэффициентов, определяющий конкретную оценку.

Оптимальные несмешенные оценки для параметров *сдвига* и *масштаба* по выборочным квантилям получены в [118]. В [307] установлено, что оптимальные оценки параметров сдвига и масштаба являются асимптотически эффективными. В [222, 272, 271] предложено при построении таких оценок использовать асимптотически оптимальное группирование и получены соответствующие коэффициенты для *L-оценок*. Более подробно о построении и статистических свойствах *L-оценок* говорится в разделе 1.5.

## 1.3. Оценки параметров распределений по группированным данным

### 1.3.1. Методы оценивания параметров по группированным данным

Группирование наблюдений используется как при оценке параметров распределений, так и в задачах проверки статистических гипотез. Группирование наблюдений может являться следствием естеств-

венной процедуры регистрации измерений прибором ограниченной точности, следствием сжатия или обработки больших массивов информации. Чаще всего при группировании область определения случайной величины разбивается на интервалы равной длины или равной вероятности. Такой подход рассматривается в наиболее часто используемых для руководства источниках [154, 167, 198, 199, 213, 214, 285, 299, 305, 313, 317, 318, 349, 352].

Оценки максимального правдоподобия параметров распределений по группированным данным являются асимптотически эффективными (если они существуют и единственны). Их асимптотическая дисперсия определяется соотношением

$$D(\theta) = n^{-1} \mathbf{J}_\Gamma^{-1}(\theta),$$

где  $\mathbf{J}_\Gamma(\theta) = \left[ \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial \ln P_i(\theta)}{\partial \theta_l} \frac{\partial \ln P_i(\theta)}{\partial \theta_r} \right) P_i(\theta) \right] = \sum_{i=1}^k \frac{\nabla P_i(\theta) \nabla P_i^T(\theta)}{P_i(\theta)}$  – информационная матрица Фишера по группированным наблюдениям.

Это же справедливо [303] для оценок, получаемых в результате минимизации статистики  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(n_i / n - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)},$$

модифицированной статистики  $\chi^2$ :

$$\text{mod } \chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n P_i(\theta))^2}{n_i},$$

где  $n_i$  заменяется на 1, если  $n_i = 0$ .

Расстояния Хеллингера

$$H_D = \arccos \sum_{i=1}^k \sqrt{(n_i / n) P_i(\theta)},$$

дивергенции Кульбака–Лейблера

$$S_{KL} = \sum_{i=1}^k P_i(\theta) \ln \left[ P_i(\theta) / (n_i / n) \right],$$

меры расхождения Холдейна

$$D_j = \frac{(n+j)!}{n!} \sum_{i=1}^k \frac{n_i! P_i^{j+1}(\theta)}{(n_i + j)!}, \quad j \neq -1,$$

$$D_{-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \ln P_i(\theta).$$

Все эти методы, как уже упоминалось, при соответствующих условиях регулярности дают состоятельные и асимптотически эффективные оценки [303].

Аналогично асимптотически эффективными являются оценки параметров сдвига и масштаба по выборочным квантилям [307], рассматриваемые далее.

Всякое группирование данных по сравнению с исходными наблюдениями приводит к *потере информации*, понимаемой в общем широком смысле. И это, естественно, отражается на качестве статистических выводов. Очевидно, что чем меньше потери информации, тем надежнее получаемые результаты. Постановка задачи асимптотически оптимального группирования вытекает непосредственно из асимптотических свойств оценок и критериев. Ее решение, минимизирующее потери в количестве информации Фишера, повышает качество статистических выводов как при оценивании, так и при проверке гипотез.

### 1.3.2. Решение задачи асимптотически оптимального группирования

Элементы информационной матрицы зависят от граничных точек интервалов, так как  $P_i(\theta) = \int_{x_{(i-1)}}^{x_{(i)}} f(x, \theta) dx$ . В случае, когда функция

плотности распределения определяется скалярным параметром или осуществляется оценивание только одного параметра при известных

остальных, целью задачи асимптотически оптимального группирования является минимизация асимптотической дисперсии ОМП по группированным данным. И эта задача сводится к максимизации информационного количества Фишера о параметре по группированной выборке, т. е. к решению задачи нелинейного программирования

$$\begin{aligned} \max_{x(0) < x(1) < \dots < x(k-1) < x(k)} \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial \ln P_i(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 P_i(\theta) = \\ = \max_{x(0) < x(1) < \dots < x(k-1) < x(k)} J_\Gamma(\theta), \end{aligned} \quad (1.10)$$

где  $x(0) < x(1) < \dots < x(k)$  – граничные точки интервалов;  $J_\Gamma(\theta)$  – количество информации Фишера о параметре по группированным наблюдениям.

Решение такой задачи для параметра экспоненциального распределения при  $k = 2, \dots, 6$  впервые было получено в [23], а для параметров нормального распределения при известном одном из них – в [211].

При оценивании вектора параметров мы имеем дело с информационной матрицей. В этом случае в качестве критериев оптимальности могут быть выбраны различные функционалы от асимптотической дисперсионной матрицы, но наиболее естественно минимизировать обобщенную асимптотическую дисперсию (максимизировать  $\det \mathbf{J}_\Gamma(\theta) = |\mathbf{J}_\Gamma(\theta)|$ ), т. е. решать задачу нелинейного программирования вида

$$\max_{x(0) < x(1) < \dots < x(k-1) < x(k)} |\mathbf{J}_\Gamma(\theta)|. \quad (1.11)$$

Задачи (1.10), (1.11) представляют собой задачи нелинейного программирования с допустимым множеством решений, задаваемым линейной системой ограничений, и нелинейной целевой функцией. При вогнутой целевой функции эти задачи имеют единственное решение. Но в таких задачах вогнутость целевой функции обеспечивается не всегда, и в некоторых случаях задача асимптотически оптимального группирования оказывается многоэкстремальной. Задачи асимптотически оптимального группирования (АОГ) для конкретных законов распределения решались нами в работах [179, 183, 184, 186, 189, 219, 220, 242, 217]. Аналогичная задача, связанная с оцениванием параметров

регрессионных моделей по группированным наблюдениям и асимптотически оптимальным группированием при их оценивании, решалась в работах [185, 182].

Вид системы ограничений позволяет достаточно просто, используя метод штрафных функций [335, 346], свести условную задачу оптимизации (1.10) или (1.11) к безусловной, а для решения последней использовать различные алгоритмы поиска минимума функции  $n$  переменных [172, 173, 194, 200, 202, 279, 308], в том числе методы сопряженных градиентов [300, 335], вращающихся координат Розенброка [336], алгоритмы переменной метрики [336].

В приложении А представлены результаты решения задачи асимптотически оптимального группирования для законов распределения, наиболее часто используемых на практике, для которых решение удалось получить в виде, инвариантном относительно параметров распределения.

Так, например, в табл. А.1 приложения А приведены асимптотически оптимальные граничные точки для экспоненциального распределения в виде  $t_i = x_{(i)} / \theta$ , максимизирующие информационное количество Фишера по группированным данным

$$J_\Gamma(\theta) = \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left(t_i e^{-t_i} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}}\right)^2}{e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i}},$$

где  $t_i = x_{(i)} / \theta$ , а функция плотности экспоненциального распределения описывается выражением  $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$ . Для числа интервалов  $k = 2, \dots, 6$  асимптотически оптимальные граничные точки приведены в [211], в [219] эти данные были проверены и таблица продолжена до  $k = 11$ . В этой же таблице даны значения относительной асимптотической информации, равной

$$A = J_\Gamma(\theta) / J_H(\theta),$$

где  $J_H(\theta) = E\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln[\theta e^{-\theta x}]\right)^2 = \frac{1}{\theta^2}$  – информационное количество Фишера о параметре  $\theta$  по негруппированным наблюдениям.

В табл. А.2 приложения А представлены соответствующие значения оптимальных вероятностей. Заметим, что величина относительной информации  $A$  позволяет делать заключение о качестве проводимого группирования. Для сравнения дадим вычисленные значения относительной асимптотической информации при разбиении на интервалы равной вероятности. Оказывается, что  $A = 0.8928$  для  $k = 10$  и  $A = 0.9462$  для  $k = 20$ , в то время как оптимальному группированию уже при  $k = 10$  соответствует значение  $A = 0.9798$ .

На рис. 1.1 построен график относительных потерь в информационном количестве Фишера при равновероятном группировании (РВГ) для экспоненциального распределения в зависимости от числа интервалов. Видно, что потери особенно велики при малом числе интервалов. Этот же график отражает и относительную величину возрастания асимптотической дисперсии оценки.

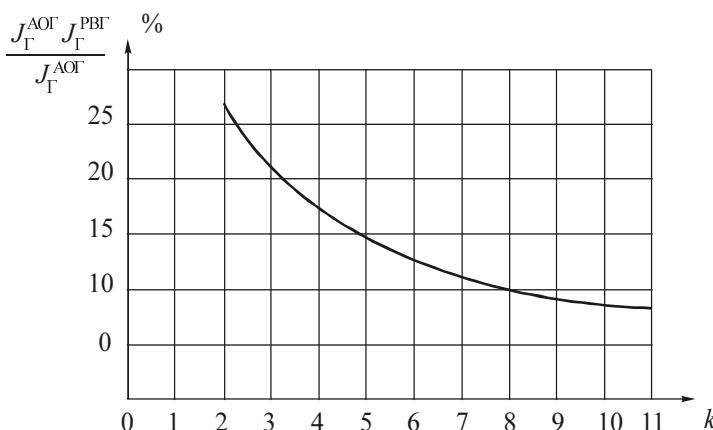


Рис. 1.1. Относительные потери в информационном количестве Фишера при равновероятном группировании по сравнению с асимптотически оптимальным группированием для экспоненциального распределения

Таким образом, для широкого ряда распределений при решении задач асимптотически оптимального группирования удалось получить граничные точки интервалов в виде, инвариантном относительно параметров распределений, и на их основе сформировать таблицы асимптотически оптимального группирования. Были построены таблицы для распределений: экспоненциального, полунаormalного, Рэлея, Мак-

свелла, модуля многомерного нормального вектора, Парето, Эрланга, Лапласа, нормального, логарифмически-нормальных ( $\ln$  и  $\lg$ ), Коши, Вейбулла, распределений минимального и максимального значения, двойного показательного, гамма-распределения. В общей сложности 58 таблиц оптимальных граничных точек и соответствующих вероятностей, представляющих собой решения задач (1.10), (1.11), приведены в приложении А.

Можно выделить три гипотетические ситуации, когда применение асимптотически оптимального группирования может дать положительный эффект в задачах точечного оценивания параметров.

Во-первых, применение АОГ эффективно при группировании информации в целях сокращении объемов хранимых или передаваемых по каналам связи данных о наблюдениях случайных величин с минимальными потерями информации об этом законе.

Во-вторых, в разделе 1.6 предлагается для вычисления робастных ОМП использовать предварительное группирование наблюдений и вычислять ОМП уже по группированным данным. Это позволяет получать оценки, устойчивые к наличию аномальных наблюдений или к другим отклонениям от предположений. И в этом случае использование асимптотически оптимального группирования приносит положительные результаты.

В-третьих, известно, что оценки параметров, вычисляемые по выборочным квантилям, также являются робастными. В разделе 1.5 рассматриваются оценки, использующие выборочные квантили, соответствующие АОГ. В случае больших выборок использование таких оценок также представляется очень полезным.

В-четвертых, при использовании компьютерных технологий для исследования статистических и вероятностных закономерностей требование высокой точности результатов приводит к выборкам исследуемых статистик очень большой размерности ( $N = 10^6$  и более). Следующим шагом в таких задачах является построение параметрической модели закона, наилучшим образом описывающей эту выборку. Группирование выборки и использование АОГ снимают проблемы вычислительного характера практически без потери точности модели. В случае больших выборок вычисление ОМП по группированным данным оказывается экономичней по сравнению с поиском оценок непосредственно по несгруппированным данным.

Можно возразить: истинные значения оцениваемых параметров нам неизвестны, а асимптотически оптимальные граничные точки зависят от параметров. Как же группировать? Если в нашем распоряжении выборка, состоящая из индивидуальных наблюдений, и к группированию мы прибегаем для того, чтобы получитьrobастные ОМП по группированным данным, то, разбивая выборку на интервалы, мы должны воспользоваться таблицами оптимальных вероятностей, разделяя выборку на части, пропорциональные им.

Если же группирование вызвано технологическими причинами и возможна фиксация только принадлежности наблюдения некоторому интервалу значений, то выбор граничных точек возможен по прогнозируемым значениям параметров. В большинстве практических ситуаций имеются некоторые априорные сведения о параметрах закона. В таком случае существует возможность выбора оптимальных граничных точек относительно прогнозируемого значения параметра. Эти априорные сведения могут поступать от предыдущих экспериментов или следовать из теоретических или практических предпосылок.

Конечно, используемые априорные сведения о параметре могут существенно отличаться от его истинного значения. Тогда оптимальное группирование по прогнозируемому значению параметра приводит к некоторой потере в относительной асимптотической информации. Потери информации при ошибочном прогнозе подробно рассмотрены в [191].

## **1.4. Оценивание параметров распределений по цензурированным данным**

### **1.4.1. Количество информации Фишера как мера возможной точности оценивания**

Проблемы, связанные с анализом цензурированных выборок, не в последнюю очередь зависят от реальных свойств оценок по цензуренным данным. Содержание раздела опирается на исследования, проведенные в [225, 218], толчком для которых послужила интересная, на наш взгляд, статья [326], но в ее тексте, к сожалению, оказалось несколько опечаток, затрудняющих ее восприятие.

При выборке, цензурированной с двух сторон, являющейся частным случаем частично группированной выборки, область определения

случайной величины разбита на три интервала граничными точками  $x_{(1)} < x_{(2)}$  так, что значения левее  $x_{(1)}$  и правее  $x_{(2)}$  не наблюдаются.

Тогда система (1.5) принимает вид

$$n_1 \frac{\partial \ln P_1(\theta)}{\partial \theta_l} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial \ln f(x_{2j}, \theta)}{\partial \theta_l} + n_3 \frac{\partial \ln P_3(\theta)}{\partial \theta_l} = 0, \quad l = \overline{1, m}. \quad (1.12)$$

Если оценивается скалярный параметр, то асимптотическая дисперсия его ОМП определяется соотношением

$$D(\hat{\theta}) = n^{-1} J_c^{-1}(\hat{\theta}), \quad (1.13)$$

где информационное количество Фишера

$$\begin{aligned} J_c(\theta) = & \frac{1}{P_1(\theta)} \left[ \frac{\partial P_1(\theta)}{\partial \theta} \right]^2 + \\ & + \int_{x_{(1)}}^{x_{(2)}} \left[ \frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta} \right]^2 f(x, \theta) dx + \frac{1}{P_3(\theta)} \left[ \frac{\partial P_3(\theta)}{\partial \theta} \right]^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Если выборка цензурирована только справа, то в выражении (1.14) исчезает левое слагаемое, если только слева – правое слагаемое. Это соотношение позволяет судить о потерях информации о параметре распределения в зависимости от степени цензурирования слева или справа.

Об эффективности оценивания параметров по цензурированной выборке относительно оценивания по полной выборке можно судить по величине  $J_c(\theta) / J(\theta)$ , где  $J(\theta)$  – количество информации Фишера в полной выборке [225, 218]. В табл. 1.1 приведены значения  $J_c(\theta) / J(\theta)$  в зависимости от степени цензурирования для распределений:

- экспоненциального с плотностью  $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ ;
- Вейбулла

$$f(x) = \frac{\theta}{\sigma} \left( \frac{x}{\sigma} \right)^{\theta} \exp \left\{ - \left( \frac{x}{\sigma} \right)^{\theta} \right\};$$

- нормального (логарифмически нормального)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\};$$

- Лапласа

$$f(x) = \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x|};$$

- Рэлея

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\};$$

- логистического

$$f(x) = \frac{\pi}{\sigma\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta)}{\sigma\sqrt{3}}\right\} \Bigg/ \left[1 + \exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta)}{\sigma\sqrt{3}}\right\}\right]^2;$$

- Коши

$$f(x) = \frac{\sigma}{\pi[\sigma^2 + (x-\theta)^2]};$$

- минимального

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{\frac{x-\theta}{\sigma} - \exp\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)\right\}$$

и максимального значения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{x-\theta}{\sigma} - \exp\left(-\frac{x-\theta}{\sigma}\right)\right\};$$

- гамма-распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma^\theta \Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-x/\sigma}.$$

В случае векторного параметра в таблице приведены значения отношения определителей соответствующих информационных матриц:  $\det \mathbf{J}_c(\theta) / \det \mathbf{J}(\theta)$ . В зависимости от закона цензурирование справа и слева различным образом влияет на потери информации о параметрах. Так, о параметре экспоненциального распределения при той же степени цензурирования слева в выборке сохраняется существенно больше информации, чем при цензурировании справа. Это же характерно для распределения Вейбулла. В случае гамма-распределения величина отношения  $J_c(\theta) / J(\theta)$  зависит от параметра формы  $\theta$  этого распределения и «перераспределяется» между параметрами закона с его ростом. В табл. 1.1 ее значения для гамма-распределения приведены для значений параметра формы 0.5 и 2.

Таблица 1.1

**Отношение количества информации Фишера в наблюдении цензурированной выборки к количеству информации в нецензурированной  $J_c(\theta) / J(\theta)$  ( $\det \mathbf{J}_c(\theta) / \det \mathbf{J}(\theta)$ )**

Наблюдаемая часть, %	О масштабном параметре распределений экспоненциального и Вейбулла, о параметрах сдвига распределений минимального и максимального <sup>1</sup> значения		О параметре формы распределения Вейбулла, о параметрах масштаба распределений минимального и максимального <sup>1</sup> значения		О двух параметрах распределения Вейбулла, о параметрах распределений минимального и максимального <sup>1</sup> значения	
	Цензурирование слева	Цензурирование справа	Цензурирование слева	Цензурирование справа	Цензурирование слева	Цензурирование справа
100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
60	0.9914	0.6000	0.7091	0.4343	0.6389	0.2658
50	0.9805	0.5000	0.6343	0.4011	0.5256	0.1771
40	0.9597	0.4000	0.5680	0.3878	0.4076	0.1093
30	0.9212	0.3000	0.5168	0.3859	0.2878	0.0595
20	0.8476	0.2000	0.4883	0.3814	0.1707	0.0257
10	0.6891	0.1000	0.4830	0.3405	0.0654	0.0063
5	0.5223	0.0500	0.4654	0.2718	0.0234	0.0015

Продолжение табл. 1.1

Наблюдаемая часть, %	О параметре сдвига нормального распределения	О параметре масштаба нормального распределения	О двух параметрах нормального распределения	О параметре масштаба распределения Лапласа	О параметре распределения Рэлея	
	Цензурирование слева <sup>2</sup>	Цензурирование слева <sup>2</sup>	Цензурирование слева <sup>2</sup>	Цензурирование слева <sup>2</sup>	Цензурирование слева	Цензурирование справа
100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
60	0.8753	0.5599	0.4399	0.6131	0.9914	0.6000
50	0.8183	0.5000	0.3296	0.6103	0.9805	0.5000
40	0.7467	0.4601	0.2311	0.5918	0.9597	0.4000
30	0.6550	0.4399	0.1457	0.5538	0.9212	0.3000
20	0.5336	0.4309	0.0754	0.4885	0.8476	0.2000
10	0.3591	0.4252	0.0239	0.3740	0.6891	0.1000
5	0.2318	0.3795	0.0073	0.2730	0.5223	0.0500

Наблюдаемая часть, %	О параметре сдвига логистического распределения	О параметре масштаба логистического распределения	О двух параметрах логистического распределения	О параметре сдвига распределения Коши	О параметре масштаба распределения Коши	О двух параметрах распределения Коши
	Цензурирование слева <sup>2</sup>	Цензурирование слева <sup>2</sup>	Цензурирование слева <sup>2</sup>	Цензурирование слева <sup>2</sup>	Цензурирование слева <sup>2</sup>	Цензурирование слева <sup>2</sup>
100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
60	0.9359	0.5828	0.5249	0.9388	0.7194	0.6691
50	0.8750	0.5000	0.3917	0.9053	0.5000	0.4526
40	0.7840	0.4447	0.2679	0.7520	0.3535	0.2449
30	0.6570	0.4195	0.1603	0.4708	0.3187	0.0953
20	0.4880	0.4160	0.0754	0.1835	0.3041	0.0213
10	0.2709	0.3944	0.0199	0.0264	0.1951	0.0014
5	0.1426	0.3293	0.0051	0.0034	0.1019	0.0001

Окончание табл. 1.1

Наблюдаемая часть, %	О параметре формы гамма-распределения ( $\theta = 0.5$ )		О параметре масштаба гамма-распределения ( $\theta = 0.5$ )		О двух параметрах гамма-распределения ( $\theta = 0.5$ )	
	Цензурирование слева	Цензурирование справа	Цензурирование слева	Цензурирование справа	Цензурирование слева	Цензурирование справа
100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
60	0.6693	0.9698	0.9984	0.4750	0.4756	0.3201
50	0.5819	0.9484	0.9955	0.3715	0.3589	0.2163
40	0.4902	0.9157	0.9876	0.2778	0.2522	0.1343
30	0.3927	0.8646	0.9681	0.1939	0.1586	0.0730
20	0.2865	0.7796	0.9208	0.1196	0.0812	0.0311
10	0.1651	0.6192	0.7925	0.0554	0.0251	0.0075
5	0.0935	0.4615	0.6321	0.0265	0.0076	0.0018

Наблюдаемая часть, %	О параметре формы гамма-распределения ( $\theta = 2$ )		О параметре масштаба гамма-распределения ( $\theta = 2$ )		О двух параметрах гамма-распределения ( $\theta = 2$ )	
	Цензурирование слева	Цензурирование справа	Цензурирование слева	Цензурирование справа	Цензурирование слева	Цензурирование справа
100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
60	0.7770	0.9353	0.9759	0.6895	0.4395	0.4171
50	0.7022	0.8985	0.9548	0.5981	0.3284	0.3071
40	0.6168	0.8475	0.9208	0.5005	0.2296	0.2108
30	0.5177	0.7758	0.8659	0.3957	0.1444	0.1292
20	0.3993	0.6697	0.7737	0.2815	0.0749	0.0642
10	0.2483	0.4955	0.6002	0.1543	0.0248	0.0190
5	0.1498	0.3470	0.4369	0.0825	0.0089	0.0054

<sup>1</sup> Для распределения максимального значения левое цензурирование меняется на правое.

<sup>2</sup> При левом и правом цензурировании ситуация идентична.

Если задаться максимально допустимой асимптотической дисперсией, величина которой определяется соотношением (1.13), то в зависимости от степени цензурирования можно оценить минимально необходимый объем выборки, при котором она должна быть не хуже заданной. Или, наоборот, по объему выборки оценить максимально возможную степень цензурирования, еще обеспечивающую требуемую точность оценивания.

Например, результаты исследования точности вычисления ОМП параметров распределения Вейбулла в зависимости от степени цензурирования справа или слева показали, что, поскольку при той же степени цензурирования слева в выборке сохраняется больше информации о параметрах распределения, это положительно сказывается и на точности оценивания.

Аналогичные результаты оценивания по цензурированным выборкам ОМП одновременно двух параметров логарифмически нормального распределения подтвердили, что, так как потери информации одинаковы при одной и той же степени цензурирования слева и справа, то это одинаково отражается и на точности оценивания параметров нормального и логарифмически нормального распределений.

Асимптотическая дисперсия является теоретической характеристикой точности оценивания. Реально же точность оценивания (дисперсия оценки) не в последнюю очередь зависит от особенностей случайной выборки (от возможного наличия в ней аномальных наблюдений, от того, действительно ли наблюдаемая выборка принадлежит предполагаемому закону).

#### **1.4.2. Экспериментальные оценки точности оценивания по цензурированным выборкам**

Реальную картину того, насколько точно можно оценить параметры закона по цензурированной выборке в зависимости от объема полной выборки  $n$ , дают результаты исследования методами статистического моделирования, представленные в табл. 1.2–1.7. Количество  $N$  моделируемых выборок, по которым исследовались законы распре-

деления оценок по выборкам объема  $n$ , во всех рассматриваемых случаях было взято равным 1000. В табл. 1.2 приведены полученные значения отношения дисперсии ОМП параметра масштаба экспоненциального распределения по полной выборке  $D[\hat{\theta}_n]$  к дисперсии ОМП по цензурированной  $D[\hat{\theta}_n^c]$  при различной степени цензурирования (различной величине наблюдаемой части выборки) и различном объеме полной выборки  $n$ :  $D[\hat{\theta}_n]/D[\hat{\theta}_n^c]$  (относительная эффективность оценивания).

При построении распределений оценок моделировались выборки по экспоненциальному закону с параметром масштаба  $\theta = 1$ . Находилась оценка по полной выборке, и по той же самой, но предварительно цензурированной выборке. В результате получалось две выборки оценок, каждая объемом  $N$ , по которым вычислялось отношение  $D[\hat{\theta}_n]/D[\hat{\theta}_n^c]$ . В табл. 1.2 представлены значения, усредненные по 100 таким экспериментам, в случае применения цензурирования II типа (задана точка цензурирования, определяющая наблюдаемую часть области определения случайной величины). В случае цензурирования I типа (точка цензурирования определяется последним наблюдаемым значением при цензурировании справа, первым – при цензурировании слева) результаты совершенно аналогичны и поэтому не приводятся.

Если сравнить полученные на основании моделирования и приведенные в табл. 1.2 оценки значений относительной эффективности со значениями асимптотической эффективности из соответствующих колонок табл. 1.1, то увидим, что результаты моделирования в целом хорошо подтверждают результаты, представленные в табл. 1.1.

Сравнивая значения, представленные в табл. 1.2, с соответствующими значениями асимптотической эффективности для экспоненциального закона при цензурировании слева и справа, приведенными в табл. 1.1, можно судить о возможной точности оценивания по соответствующей части наблюдаемой выборки в зависимости от объема полной выборки  $n$ .

Таблица 1.2

**Относительная эффективность  $D[\hat{\theta}_n]/D[\hat{\theta}_n^c]$  оценивания параметра экспоненциального распределения по цензурированным выборкам по сравнению с оцениванием по полной выборке в зависимости от объема выборки  $n$**

Наблюденная часть, %	$n = 2000$		$n = 1000$		$n = 500$	
	Цензурирование слева	Цензурирование справа	Цензурирование слева	Цензурирование справа	Цензурирование слева	Цензурирование справа
100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
60	0.9921	0.5975	0.9910	0.5968	0.9908	0.5930
50	0.9819	0.4968	0.9803	0.4964	0.9798	0.4930
40	0.9607	0.3971	0.9589	0.3967	0.9585	0.3940
30	0.9213	0.2969	0.9200	0.2959	0.9204	0.2925
20	0.8455	0.1977	0.8423	0.1959	0.8439	0.1929
10	0.6891	0.0988	0.6856	0.0957	0.6841	0.0926
5	0.5231	0.0481	0.5193	0.0458	0.5197	0.0421

Наблюденная часть, %	$n = 300$		$n = 200$		$n = 100$	
	Цензурирование слева	Цензурирование справа	Цензурирование слева	Цензурирование справа	Цензурирование слева	Цензурирование справа
100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
60	0.9912	0.5871	0.9912	0.5912	0.9906	0.5812
50	0.9795	0.4883	0.9799	0.4900	0.9789	0.4773
40	0.9587	0.3887	0.9593	0.3882	0.9581	0.3745
30	0.9218	0.2890	0.9204	0.2865	0.9189	0.2724
20	0.8470	0.1877	0.8461	0.1846	0.8432	0.1683
10	0.6872	0.0875	0.6849	0.0822	0.6830	0.0668
5	0.5196	0.0377	0.5196	0.0324	0.5148	0.0200

На рис. 1.2, 1.3 представлены построенные плотности оценок  $\hat{\theta}_n$  и  $\hat{\theta}_n^c$  параметра масштаба экспоненциального закона для  $n = 2000$  и

$n = 100$  при различной степени цензурирования справа. С уменьшением  $n$  и увеличением степени цензурирования растет асимметрия закона распределения  $\hat{\theta}_n^c$ .

Табл. 1.3, как и табл. 1.2, характеризует полученные в результате статистического моделирования значения относительной эффективности оценивания по цензурированным выборкам двух параметров нормального закона в зависимости от  $n$ . В таблице приведены значения  $\det D[\hat{\theta}_n]/\det D[\hat{\theta}_n^c]$  (сравните с соответствующими значениями эффективности, представленными в табл. 1.1). Рис. 1.4 и 1.5 иллюстрируют законы распределения оценок  $\hat{\mu}_n^c$  и  $\hat{\sigma}_n^c$  параметров нормального закона при различной степени цензурирования слева. При цензурировании справа для распределений оценок  $\hat{\mu}_n^c$  имеем картину зеркального отражения по отношению к распределениям, представленным на рис. 1.4.

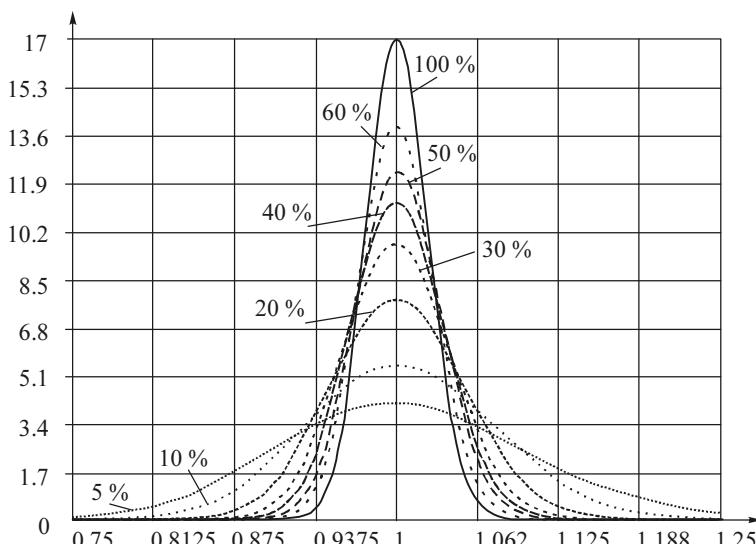


Рис. 1.2. Плотности распределения оценок масштабного параметра экспоненциального распределения при цензурировании справа при различной величине (%) наблюдаемой области определения случайной величины и полном объеме выборки  $n = 2000$

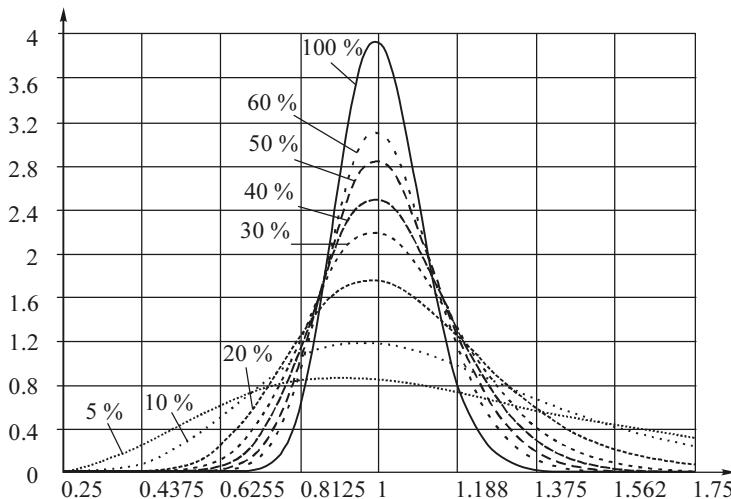


Рис. 1.3. Плотности распределения оценок масштабного параметра экспоненциального распределения при цензурировании справа при различной величине (%) наблюдаемой области определения случайной величины и полном объеме выборки  $n = 100$

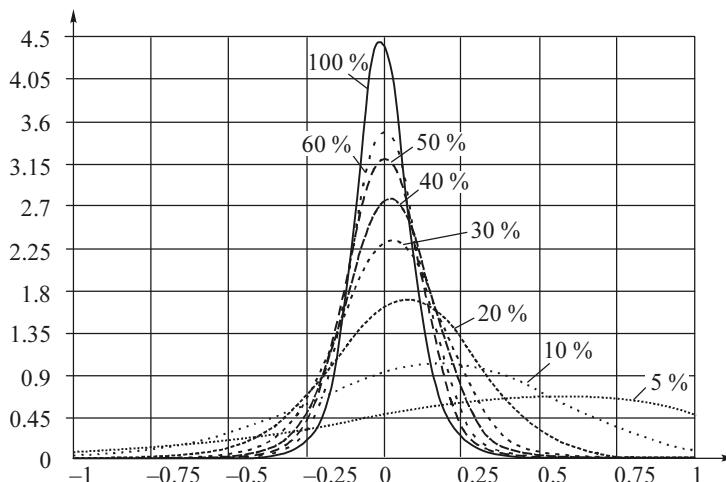


Рис. 1.4. Плотности распределения оценок параметра сдвига нормального распределения при цензурировании слева при различной величине (%) наблюдаемой области определения случайной величины и объеме выборки  $n = 100$

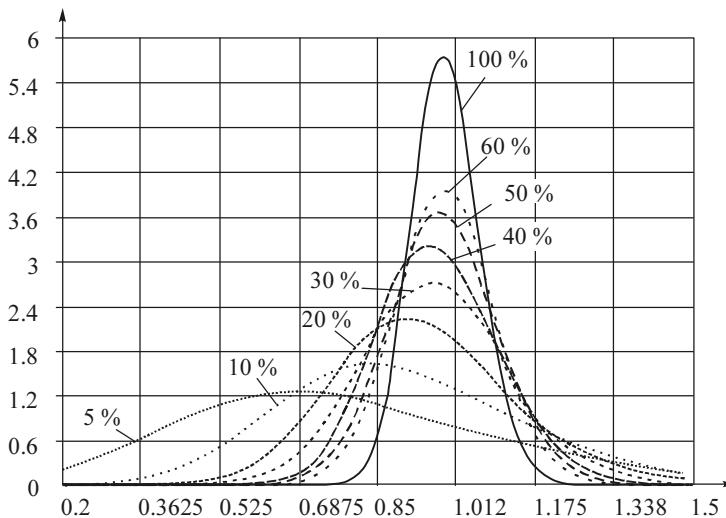


Рис. 1.5. Плотности распределения оценок масштабного параметра нормального распределения при цензурировании слева (справа) при различной величине (%) наблюдаемой области определения случайной величины и объеме выборки  $n = 100$

Таблица 1.3

**Относительная эффективность  $\det D[\hat{\theta}_n]/\det D[\hat{\theta}_n^c]$  оценивания двух параметров нормального распределения по цензурированным выборкам по сравнению с оцениванием по полной выборке в зависимости от объема выборки  $n$**

Наблю- даемая часть, %	$n = 2000$	$n = 1000$	$n = 500$	$n = 300$	$n = 200$	$n = 100$
	Цензури- рование слева	Цензури- рование слева	Цензури- рование слева	Цензури- рование слева	Цензури- рование слева	Цензури- рование слева
100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
60	0.4397	0.4364	0.4371	0.4377	0.4425	0.4479
50	0.3283	0.3268	0.3283	0.3280	0.3313	0.3370
40	0.2297	0.2295	0.2307	0.2307	0.2337	0.2363
30	0.1442	0.1447	0.1456	0.1456	0.1477	0.1497
20	0.0746	0.0756	0.0756	0.0756	0.0767	0.0775
10	0.0238	0.0241	0.0241	0.0244	0.0249	0.0257
5	0.0073	0.0075	0.0076	0.0077	0.0081	0.0087

Для определения возможной точности оценивания параметров по цензурированным выборкам исследовались распределения величин вида  $(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_n^c)/|\hat{\theta}_n|$ . Результаты показали, что эти распределения при малых  $n$  и большой степени цензурирования оказываются существенно асимметричными. На рис. 1.6 приведены распределения величины  $(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_n^c)/|\hat{\theta}_n|$  для масштабного параметра экспоненциального закона при объеме выборки  $n = 100$ .

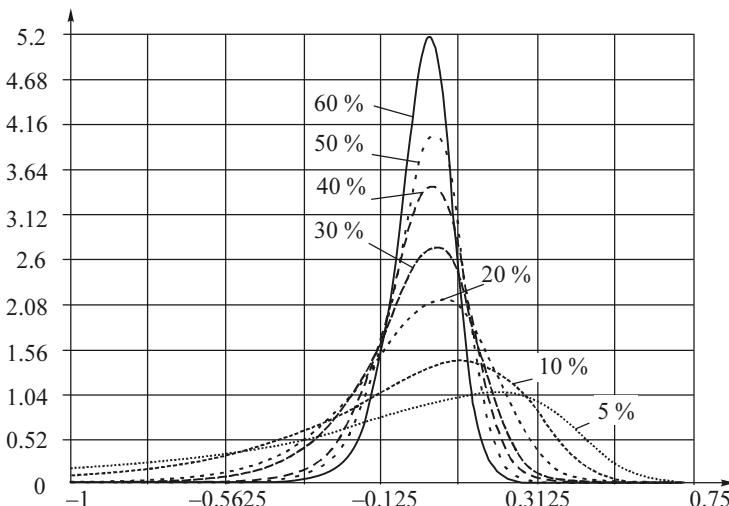


Рис. 1.6. Плотности распределения величины  $(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_n^c)/|\hat{\theta}_n|$  для оценок масштабного параметра экспоненциального закона при цензурировании справа при различной величине (%) наблюдаемой области определения случайной величины и объеме выборки  $n = 100$

В табл. 1.4 и 1.5 приведены значения выборочных среднего  $m$  и среднеквадратического отклонения  $s$  величин  $(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_n^c)/|\hat{\theta}_n|$  в случае экспоненциального закона при различном объеме выборок и различной степени цензурирования слева и справа. Приводимые в таблицах значения  $m$  позволяют судить о смещении оценок  $\hat{\theta}_n$ , а значения  $s$  –

о их точности. Анализируя результаты, можно отметить, что если при цензурировании слева оценки  $\hat{\theta}_n^c$  параметра масштаба экспоненциального закона практически несмещенные, то при цензурировании справа они оказываются существенно смещенными вправо. Причем смещение растет с уменьшением наблюдаемой части выборки и уменьшением полного объема выборки.

Таблица 1.4

**Точность оценивания параметра экспоненциального закона по цензурированной слева выборке (параметры нормального закона, аппроксимирующего распределение величин  $(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_n^c)/|\hat{\theta}_n|$ )**

Наблю- даемая часть, %	$n = 2000$		$n = 1000$		$n = 500$	
	$m$	$s$	$m$	$s$	$m$	$s$
60	-0.000002	0.002084	0.000005	0.002951	0.000011	0.004185
50	-0.000002	0.003160	0.000017	0.004474	0.000028	0.006359
40	0.000022	0.004594	0.000041	0.006488	0.000046	0.009195
30	0.000031	0.006567	0.000041	0.009237	0.000039	0.013084
20	0.000028	0.009519	0.000011	0.013465	-0.000011	0.019069
10	0.000027	0.015054	0.000026	0.021344	0.000169	0.030295
5	0.000138	0.021406	0.000265	0.030378	0.000426	0.043065
Наблю- даемая часть, %	$n = 300$		$n = 200$		$n = 100$	
	$m$	$s$	$m$	$s$	$m$	$s$
60	-0.000003	0.005424	0.000002	0.006677	-0.000015	0.009587
50	0.000048	0.008219	0.000050	0.010109	-0.000008	0.014462
40	0.000037	0.011891	0.000046	0.014588	-0.000016	0.020897
30	0.000069	0.016944	0.000047	0.020726	-0.000045	0.029737
20	0.000143	0.024710	0.000103	0.030260	-0.000183	0.043344
10	0.000434	0.039247	0.000413	0.048026	0.000766	0.068888
5	0.000983	0.055822	0.001226	0.068452	0.002209	0.098060

В табл. 1.6 и 1.7 показаны результаты, полученные при исследовании точности оценивания параметров нормального закона (величин

$(\hat{\mu}_n - \hat{\mu}_n^c) / |\hat{\mu}_n|$  и  $(\hat{\sigma}_n - \hat{\sigma}_n^c) / |\hat{\sigma}_n|$ ) по цензурированной слева выборке. В приводимых таблицах представлены значения выборочного среднего  $m$  и среднеквадратического отклонения  $s$  для величин  $(\hat{\mu}_n - \hat{\mu}_n^c) / |\hat{\mu}_n|$  и  $(\hat{\sigma}_n - \hat{\sigma}_n^c) / |\hat{\sigma}_n|$ . Как видим, в данном случае с уменьшением наблюдаемой части выборки и уменьшением объема выборки  $n$  увеличивается смещение обеих оценок  $\hat{\mu}_n^c$  и  $\hat{\sigma}_n^c$  и увеличивается дисперсия этих оценок. При этом цензурирование слева приводит к смещению оценки параметра сдвига вправо, а цензурирование справа – к смещению оценки параметра сдвига влево. Для параметра масштаба нормального распределения цензурирование слева или справа приводит к смещению оценки параметра масштаба влево. На рис. 1.7 приведены распределения величины  $(\hat{\mu}_n - \hat{\mu}_n^c) / |\hat{\mu}_n|$  для параметра сдвига нормального закона при объеме выборки  $n = 100$ . В данном случае распределения обладают большей симметрией.

Таблица 1.5

**Точность оценивания параметра экспоненциального закона по цензурированной справа выборке (параметры нормального закона, аппроксимирующего распределение величин  $(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_n^c) / |\hat{\theta}_n|$ )**

Наблюденная часть, %	$n = 2000$		$n = 1000$		$n = 500$	
	$m$	$s$	$m$	$s$	$m$	$s$
60	-0.000283	0.018337	-0.000567	0.025922	-0.001223	0.036768
50	-0.000544	0.022481	-0.000997	0.031739	-0.001971	0.045084
40	-0.000793	0.027471	-0.001559	0.038796	-0.003059	0.055144
30	-0.001192	0.034280	-0.002363	0.048529	-0.004836	0.069223
20	-0.001980	0.044961	-0.004161	0.063795	-0.008271	0.091130
10	-0.004348	0.067465	-0.009270	0.096770	-0.018644	0.139400
5	-0.009480	0.099287	-0.020121	0.143557	-0.040981	0.212319

Окончание табл. 1.5

Наблю- даемая часть, %	$n = 300$		$n = 200$		$n = 100$	
	$m$	$s$	$m$	$s$	$m$	$s$
60	-0.002452	0.047779	-0.003364	0.058586	-0.006644	0.084246
50	-0.003567	0.058578	-0.005075	0.071848	-0.010068	0.103733
40	-0.005528	0.071953	-0.007855	0.088306	-0.015163	0.128283
30	-0.008178	0.090040	-0.011865	0.111034	-0.023397	0.162466
20	-0.014229	0.119532	-0.020841	0.148083	-0.042400	0.221031
10	-0.031733	0.185528	-0.048134	0.235466	-0.100965	0.372713
5	-0.069873	0.290674	-0.108833	0.385617	-0.241192	0.698198

Таблица 1.6

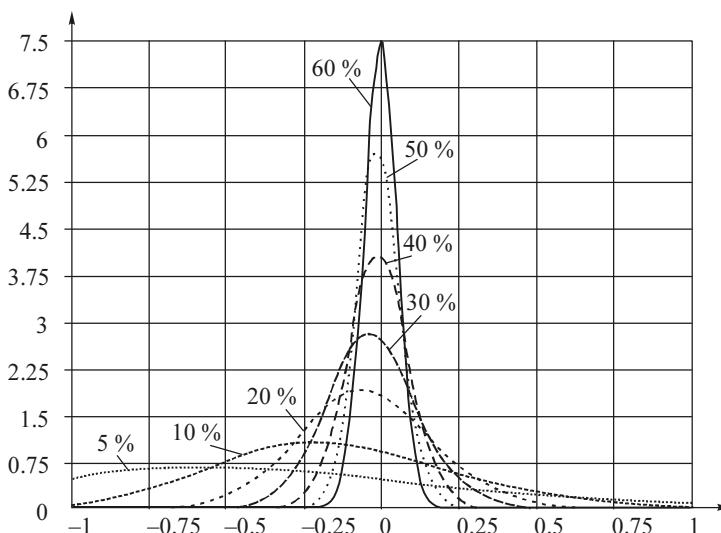
Точность оценивания параметра сдвига при оценивании двух параметров нормального распределения по цензурированной слева выборке  
 (параметры нормального закона, аппроксимирующего распределение

$$\text{величин} \left( \hat{\mu}_n - \hat{\mu}_n^c \right) / |\hat{\mu}_n|$$

Наблю- даемая часть, %	$n = 2000$		$n = 1000$		$n = 500$	
	$m$	$s$	$m$	$s$	$m$	$s$
60	-0.000130	0.005849	-0.000249	0.008289	-0.000543	0.011712
50	-0.000206	0.008053	-0.000397	0.011401	-0.000855	0.016089
40	-0.000315	0.011142	-0.000652	0.015747	-0.001418	0.022247
30	-0.000609	0.015972	-0.001158	0.022507	-0.002490	0.031800
20	-0.001235	0.024554	-0.002527	0.034453	-0.005017	0.048749
10	-0.003756	0.045795	-0.007507	0.064342	-0.014801	0.090982
5	-0.009395	0.079546	-0.018489	0.110924	-0.036738	0.155883

Окончание табл. 1.6

Наблю- даемая часть, %	$n = 300$		$n = 200$		$n = 100$	
	$m$	$s$	$m$	$s$	$m$	$s$
60	-0.000919	0.015129	-0.001462	0.018560	-0.002890	0.026229
50	-0.001405	0.020814	-0.002297	0.025483	-0.004708	0.035964
40	-0.002409	0.028741	-0.003838	0.035187	-0.007858	0.049750
30	-0.004198	0.041099	-0.006708	0.050139	-0.013674	0.070940
20	-0.008376	0.063085	-0.013165	0.077116	-0.026497	0.108959
10	-0.024488	0.116853	-0.036354	0.142373	-0.073941	0.198394
5	-0.061498	0.200117	-0.091063	0.239828	-0.183477	0.325247

Рис. 1.7. Плотности распределения величины  $\left| \frac{\hat{\mu}_n - \hat{\mu}_n^c}{|\hat{\mu}_n|} \right|$ 

для оценок параметра сдвига нормального закона при цензурировании слева при различной величине (%) наблюдаемой области определения случайной величины и объеме выборки  $n = 100$

Таблица 1.7

**Точность оценивания параметра масштаба при оценивании двух параметров нормального распределения по цензурированной слева выборке (параметры нормального закона, аппроксимирующего распределение величин  $(\hat{\sigma}_n - \hat{\sigma}_n^c) / |\hat{\sigma}_n|$ )**

Наблю- даемая часть, %	$n = 2000$		$n = 1000$		$n = 500$	
	$m$	$s$	$m$	$s$	$m$	$s$
60	0.000534	0.015743	0.001051	0.022335	0.002247	0.031518
50	0.000664	0.019273	0.001311	0.027307	0.002780	0.038528
40	0.000824	0.023623	0.001700	0.033387	0.003655	0.047159
30	0.001236	0.029663	0.002399	0.041830	0.005130	0.059091
20	0.002003	0.039086	0.004098	0.054940	0.008238	0.077698
10	0.004706	0.059113	0.009420	0.082993	0.018675	0.117320
5	0.009916	0.086922	0.019579	0.121334	0.038923	0.170599
Наблю- даемая часть, %	$n = 300$		$n = 200$		$n = 100$	
	$m$	$s$	$m$	$s$	$m$	$s$
60	0.003817	0.010675	0.005916	0.049804	0.011699	0.070180
50	0.004639	0.049781	0.007367	0.060886	0.014875	0.085616
40	0.006216	0.060927	0.009782	0.074509	0.019845	0.104950
30	0.008685	0.076342	0.013789	0.093060	0.027967	0.131060
20	0.013843	0.100448	0.021740	0.122499	0.043810	0.172353
10	0.031029	0.150643	0.046427	0.183212	0.094368	0.254147
5	0.065239	0.218615	0.096898	0.261510	0.195045	0.352171

Подчеркнем еще раз, что асимптотические свойства ОМП при цензурировании I и II типа одинаковы. Но при конечных объемах выборок отличие свойств оказывается существенным. Результаты, представленные в табл. 1.4–1.7 и иллюстрируемые рис. 1.2–1.7, соответствуют ситуации цензурирования II типа. В случае цензурирования I типа также прослеживаются четкие закономерности поведения оценок, которые, однако, отличаются от рассмотренных выше.

### 1.4.3. Влияние аномальных измерений на оценки по цензурированным выборкам

Метод максимального правдоподобия наиболее хорошо адаптируется к форме регистрации наблюдений (группированные наблюдения, частично группированные, цензурированные), но это не означает, что в любой ситуации он оказывается наилучшим, так как ОМП в недостаточной мере обладают свойствами робастности. При увеличении степени цензурирования ОМП становятся более чувствительны к имеющимся в наблюдаемой части выборки отклонениям от предполагаемого закона распределения.

Исследование потерь информации, происходящих при дополнительном группировании наблюдаемой области цензурированной справа случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону, показало, что при большой степени цензурирования разбиение области наблюдения на интервалы практически не сопровождается дополнительными потерями. Таким образом, количества информации Фишера в выборке, сильно цензурированной справа точкой  $x_{(1)}$ , и в выборке, сгруппированной в два интервала с разделяющей их границей  $x_{(1)}$ , отличаются незначительно. Это означает, что ОМП параметра экспоненциального закона по сгруппированным в два интервала данным, получаемая в качестве решения уравнения (1.12), в котором будет отсутствовать среднее слагаемое, и имеющая вид [191]

$$\hat{\theta} = \frac{1}{x_{(1)}} \ln \frac{n_1 + n_2}{n_2},$$

обладает практически той же асимптотической дисперсией, что и ОМП по цензурированной выборке, но является более робастной.

На получаемые оценки параметров существенно влияет наличие в выборке аномальных измерений. Многочисленные вычислительные эксперименты показали, что присутствие аномальных измерений в наблюдаемой области сильно цензурированной выборки отражается на оценках еще более заметно.

В качестве примера для выборки, смоделированной по распределению Вейбулла объемом 1000 наблюдений, вычислили ОМП параметров ( $\theta = 1.9468$ ,  $\sigma = 0.9792$ ). Затем два правых наблюдения 2.4451 и 2.7853 были заменены на 12.4451 и 12.7853. Оценки максимального

правдоподобия, вычисленные по полной и цензурированным слева выборкам, представлены в левом столбце табл. 1.8 и, как видим, получаются очень плохими.

Таблица 1.8

**Влияние аномальных наблюдений на точность оценивания параметров распределения Вейбулла по цензурированной слева выборке ( $n = 1000$ )**

Наблю- даемая часть, %	ОМП по цензурированной слева выборке		ОМП по выборке, цензурированной с двух сторон		<i>MD</i> -оценки по цензурированной слева выборке	
	$\theta$	$\sigma$	$\theta$	$\sigma$	$\theta$	$\sigma$
100	1.5209	0.9895	2.0334	0.9799	1.9634	0.9813
60	1.4280	0.9539	1.9644	0.9821	1.9533	0.9805
50	1.3830	0.9314	1.9564	0.9807	1.9407	0.9794
40	1.3285	0.8979	1.9381	0.9771	1.9563	0.9814
30	1.2621	0.8579	1.9955	0.9902	2.0162	0.9896
20	1.1338	0.7606	1.8969	0.9634	1.8574	0.9566
10	0.9569	0.5903	1.9288	0.9723	1.9217	0.9709
5	0.7446	0.3754	1.8041	0.9264	1.7649	0.9175

Если выборку процензуроовать и справа, то получаемые ОМП должны стать более робастными [223, 272]. Выборки, цензурированные слева, дополнительно были процензуроированы справа точкой 2.13, правее которой попало 10 наблюдений. Результаты вычислений по выборке, цензурированной с двух сторон (степень цензурирования слева менялась, как и ранее), приведены во второй колонке этой же таблицы.

*L*-оценки (с использованием выборочных квантилей) и *MD*-оценки обладают лучшими свойствами робастности по сравнению с ОМП [351]. *MD*-оценки получаются при минимизации расстояния между эмпирической и теоретической функциями распределения. В качестве меры близости эмпирического и теоретического распределений можно использовать статистики непараметрических критериев согласия. Особенностью получения *MD*-оценок по цензурированным данным является неопределенность поведения эмпирической функции распределения на интервалах цензурирования. Чтобы устранить эту неопределенность, необходимо сделать предположения о характере согласия наблюдений и теоретической модели. Так, например, если предположить, что в интервалах цензурирования эмпирическая функ-

ция распределения проходит на наименьшем расстоянии от теоретической, то мы получим оценку «крайнего оптимиста», если же предположить обратное (на максимально возможном расстоянии), то получим оценку «крайнего пессимиста». В последней колонке табл. 1.8 представлены *MD*-оценки параметров, полученные минимизацией статистики, используемой в критерии  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова, с точки зрения «крайнего оптимиста».

Как видим, на робастных оценках и при сильно цензурированных выборках в меньшей степени отражается наличие аномальных измерений.

#### **1.4.4. Цензурированные выборки и оптимальное группирование**

При исследованиях надежности нередкой оказывается ситуация, когда в наблюдаемой области сильно цензурированной выборки (например, справа) точные моменты выхода изделий из строя не могут фиксироваться. В этом случае работоспособность проверяется в конкретные заданные моменты времени. По существу, из-за условий регистрации наблюдений имеется возможность получить только полностью группированную выборку, по которой и приходится оценивать параметры распределения.

В связи с рассмотренной ситуацией нельзя не сделать следующего замечания. Совершенно непонятно, почему в п. 5.1.5 руководящего документа по стандартизации РД 50-690–89 [304] в такой ситуации рекомендуется использовать биномиальное распределение. Ничто не мешает определять параметры надежности, опираясь на тот закон распределения, модель которого наиболее подходит для конкретной ситуации. Например, для вычисления ОМП параметров достаточно численно решить систему вида (1.5), в которой в левой части будет только первое слагаемое.

Если проверка работоспособности может проводиться только в фиксированные моменты времени, возникает естественный вопрос: как при заданной степени цензурирования выбирать моменты регистрации так, чтобы потери информации о наблюдаемом законе (о параметрах надежности) были минимальны? Можно решить задачу асимптотически оптимального группирования (АОГ), при которой минимизируются потери в количестве информации Фишера (минимизируется асим-

птическая дисперсия оценки параметра по группированным данным или асимптотическая обобщенная дисперсия оценки вектора параметров) [211, 272, 215, 216]. Однако в данном случае из-за заданной степени цензурирования справа будем иметь задачу с дополнительным ограничением вида  $P_k(\theta) = \text{const}$  (или  $x_{(k)} = \text{const}$ ):

$$\max_{x_{(0)} < x_{(1)} < \dots < x_{(k-1)} < x_{(k)}} |\mathbf{J}_\Gamma(\theta)|, \quad (1.15)$$

$$P_k(\theta) = \text{const},$$

где информационная матрица Фишера по группированным данным

$$\mathbf{J}_\Gamma(\theta) = \left[ \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial \ln P_i(\theta)}{\partial \theta_l} \frac{\partial \ln P_i(\theta)}{\partial \theta_r} \right) P_i(\theta) \right] = \sum_{i=1}^k \frac{\nabla P_i(\theta) \nabla P_i^T(\theta)}{P_i(\theta)}.$$

Для многих распределений решение задачи АОГ может быть получено в виде, инвариантном относительно параметров распределений. Например, в табл. 1.9 представлены решения задачи АОГ для масштабного параметра экспоненциального распределения при заданной степени цензурировании справа, где оптимальные квантили заданы в виде  $t_{(i)} = \theta x_{(i)}$ . Решение аналогичной задачи при цензурировании слева приведено в табл. 1.10. В последнем случае дополнительное ограничение в задаче (1.15) принимает вид  $P_l(\theta) = \text{const}$  (или  $x_{(1)} = \text{const}$ ). В таблицах указано, какая часть информации сохраняется в цензурированной выборке по отношению к полной, а также относительная информация  $A = J_\Gamma(\theta) / J_c(\theta)$ , характеризующая, какое количество информации сохраняется при группировании наблюдаемой области. Эти же таблицы дают решение задачи АОГ для масштабного параметра

распределения Вейбулла при  $t_{(i)} = \left( \frac{x_{(i)}}{\sigma} \right)^\theta$ , а при  $t_{(i)} = \frac{1}{2} \left( \frac{x_{(i)}}{\sigma} \right)^2$  – для

параметра распределения Рэлея. Отметим, что при той же степени цензурирования слева в выборке сохраняется существенно больше информации о соответствующем параметре распределения, чем при цензурировании справа.

Таблица 1.9

**Асимптотически оптимальное группирование наблюдаемой области слева при цензурировании справа для параметров распределений экспоненциального, Рэлея и масштабного параметра Вейбулла**

$k$	$t_{(1)}$	$t_{(2)}$	$t_{(3)}$	$t_{(4)}$	$t_{(5)}$	$t_{(6)}$	$t_{(7)}$	$t_{(8)}$	$A$
Доступны наблюдению 50 % выборки: $J_c^{\Pi}(\theta) = 0.5J(\theta)$									
2	0.6931								0.9609
3	0.4339	0.6931							0.9874
4	0.1832	0.4087	0.6931						0.9954
5	0.1204	0.2708	0.4550	0.6931					0.9973
6	0.1124	0.2486	0.3534	0.4984	0.6931				0.9983
7	0.1003	0.2076	0.3123	0.4022	0.5208	0.6931			0.9988
8	0.0990	0.2175	0.3040	0.3859	0.4574	0.5726	0.6931		0.9991
9	0.0791	0.1571	0.2372	0.3094	0.3767	0.4706	0.5628	0.6931	0.9993
Доступны наблюдению 40 % выборки: $J_c^{\Pi}(\theta) = 0.4J(\theta)$									
2	0.5108								0.9785
3	0.1660	0.5108							0.9930
4	0.1744	0.3260	0.5108						0.9976
5	0.1392	0.2566	0.3498	0.5108					0.9985
6	0.0922	0.1832	0.2937	0.3750	0.5108				0.9991
7	0.0684	0.1497	0.2222	0.3026	0.3993	0.5108			0.9994
8	0.0810	0.1543	0.2286	0.2858	0.3376	0.4135	0.5108		0.9995
9	0.0547	0.1162	0.1911	0.2484	0.3063	0.3562	0.4207	0.5108	0.9996
Доступны наблюдению 30 % выборки: $J_c^{\Pi}(\theta) = 0.3J(\theta)$									
2	0.3567								0.9895
3	0.1035	0.3567							0.9961
4	0.1028	0.2000	0.3567						0.9987
5	0.1087	0.1979	0.2831	0.3567					0.9993
6	0.0685	0.1311	0.1843	0.2597	0.3567				0.9995
7	0.0530	0.1180	0.1900	0.2378	0.2821	0.3567			0.9997
8	0.0494	0.0994	0.1482	0.1914	0.2483	0.2891	0.3567		0.9998
9	0.0490	0.0923	0.1264	0.1649	0.2149	0.2449	0.2980	0.3567	0.9998

Окончание табл. 1.9

$k$	$t_{(1)}$	$t_{(2)}$	$t_{(3)}$	$t_{(4)}$	$t_{(5)}$	$t_{(6)}$	$t_{(7)}$	$t_{(8)}$	$A$
Доступны наблюдению 20 % выборки: $J_c^{\Pi}(\theta) = 0.2J(\theta)$									
2	0.2231								0.9959
3	0.0830	0.2231							0.9988
4	0.0608	0.1222	0.2231						0.9995
5	0.0656	0.1158	0.1552	0.2231					0.9997
6	0.0342	0.0704	0.1226	0.1646	0.2231				0.9998
7	0.0369	0.0762	0.1071	0.1344	0.1738	0.2231			0.9999
8	0.0311	0.0613	0.0943	0.1227	0.1463	0.1788	0.2231		0.9999
9	0.0279	0.0560	0.0841	0.1101	0.1332	0.1651	0.1856	0.2231	0.9999
Доступны наблюдению 10 % выборки: $J_c^{\Pi}(\theta) = 0.1J(\theta)$									
2	0.1054								0.9991
3	0.0396	0.1054							0.9997
4	0.0271	0.0579	0.1054						0.9999
5	0.0231	0.0503	0.0707	0.1054					0.9999
6	0.0241	0.0468	0.0652	0.0799	0.1054				1.0000
7	0.0180	0.0376	0.0523	0.0649	0.0824	0.1054			1.0000
8	0.0156	0.0304	0.0454	0.0584	0.0694	0.0843	0.1054		1.0000
9	0.0132	0.0266	0.0400	0.0523	0.0632	0.0779	0.0880	0.1054	1.0000
Доступны наблюдению 5 % выборки: $J_c^{\Pi}(\theta) = 0.05J(\theta)$									
2	0.0513								0.9998
3	0.0280	0.0513							0.9999
4	0.0162	0.0290	0.0513						1.0000
5	0.0108	0.0244	0.0345	0.0513					1.0000
6	0.0118	0.0228	0.0317	0.0389	0.0513				1.0000
7	0.0085	0.0179	0.0252	0.0313	0.0399	0.0513			1.0000
8	0.0079	0.0154	0.0224	0.0286	0.0340	0.0411	0.0513		1.0000
9	0.0065	0.0129	0.0196	0.0256	0.0309	0.0379	0.0429	0.0513	1.0000

Таблица 1.10

**Асимптотически оптимальное группирование наблюдаемой области справа при цензурировании слева для параметров распределений экспоненциального, Рэлея и масштабного параметра Вейбулла**

$k$	$t_{(1)}$	$t_{(2)}$	$t_{(3)}$	$t_{(4)}$	$t_{(5)}$	$t_{(6)}$	$t_{(7)}$	$t_{(8)}$	$A$
Доступны наблюдению 50 % выборки: $J_c^{\Pi}(\theta) = 0.9805J(\theta)$									
2	0.6931								0.4900
3	0.6931	2.2895							0.8203
4	0.6931	1.7722	3.5899						0.9069
5	0.6931	1.4681	2.4594	4.0684					0.9444
6	0.6931	1.3058	2.0665	3.0717	4.7206				0.9627
7	0.6931	1.1940	1.7910	2.5409	3.5576	5.1612			0.9733
8	0.6931	1.1359	1.6428	2.2527	2.9876	4.0477	5.6467		0.9799
9	0.6931	1.0754	1.5134	2.0258	2.6431	3.4202	4.4732	6.1480	0.9843
Доступны наблюдению 40 % выборки: $J_c^{\Pi}(\theta) = 0.9597J(\theta)$									
2	0.9163								0.5832
3	0.9163	2.5108							0.8531
4	0.9163	2.0482	3.1974						0.9241
5	0.9163	1.7287	2.8724	4.4903					0.9540
6	0.9163	1.5346	2.3122	3.3683	4.9807				0.9695
7	0.9163	1.4490	2.0621	2.8736	3.9904	5.9297			0.9777
8	0.9163	1.3647	1.8877	2.5157	3.2907	4.3388	6.0731		0.9835
9	0.9163	1.2973	1.7333	2.2419	2.8531	3.6201	4.6549	6.2863	0.9872
Доступны наблюдению 30 % выборки: $J_c^{\Pi}(\theta) = 0.9212J(\theta)$									
2	1.2040								0.6744
3	1.2040	2.8102							0.8852
4	1.2040	2.2122	3.8074						0.9415
5	1.2040	1.9801	3.0371	4.6433					0.9645
6	1.2040	1.8586	2.7050	3.8781	5.7241				0.9755
7	1.2040	1.7351	2.3713	3.2031	4.2953	6.0054			0.9827
8	1.2040	1.6348	2.1406	2.7479	3.4973	4.5119	6.0949		0.9872
9	1.2040	1.5884	2.0288	2.5438	3.1628	3.9388	4.9825	6.6065	0.9900

Окончание табл. 1.10

<i>k</i>	<i>t</i> <sub>(1)</sub>	<i>t</i> <sub>(2)</sub>	<i>t</i> <sub>(3)</sub>	<i>t</i> <sub>(4)</sub>	<i>t</i> <sub>(5)</sub>	<i>t</i> <sub>(6)</sub>	<i>t</i> <sub>(7)</sub>	<i>t</i> <sub>(8)</sub>	<i>A</i>
Доступны наблюдению 20 % выборки: $J_c^{\Pi}(\theta) = 0.8476J(\theta)$									
2	1.6094								0.7640
3	1.6094	3.2052							0.9168
4	1.6094	2.5527	4.0551						0.9573
5	1.6094	2.3702	3.3916	4.9465					0.9743
6	1.6094	2.2474	3.0740	4.1902	5.9068				0.9825
7	1.6094	2.1365	2.7799	3.5935	4.6947	6.2622			0.9875
8	1.6094	2.0453	2.5554	3.1697	3.9425	4.9869	6.6489		0.9907
9	1.6094	1.9946	2.4359	2.9507	3.5661	4.3295	5.3401	6.9269	0.9927
Доступны наблюдению 10 % выборки: $J_c^{\Pi}(\theta) = 0.6891J(\theta)$									
2	2.3026								0.8549
3	2.3026	3.9030							0.9489
4	2.3026	3.4216	5.2016						0.9736
5	2.3026	3.0606	4.1061	5.7826					0.9842
6	2.3026	2.9362	3.7419	4.8317	6.5212				0.9893
7	2.3026	2.8268	3.4606	4.2576	5.3345	7.0163			0.9923
8	2.3026	2.7403	3.2527	3.8684	4.6373	5.6656	7.2511		0.9943
9	2.3026	2.6756	3.1019	3.5995	4.1983	4.9508	5.9689	7.5623	0.9955
Доступны наблюдению 5 % выборки: $J_c^{\Pi}(\theta) = 0.5223J(\theta)$									
2	2.9957								0.9043
3	2.9957	4.7649							0.9658
4	2.9957	4.0105	5.6138						0.9828
5	2.9957	3.8010	4.8728	6.5195					0.9895
6	2.9957	3.6452	4.4619	5.5364	7.1709				0.9929
7	2.9957	3.4975	4.1010	4.8599	5.8867	7.5010			0.9950
8	2.9957	3.4223	3.9204	4.5201	5.2754	6.2944	7.8971		0.9962
9	2.9957	3.3695	3.7966	4.2949	4.8931	5.6436	6.6566	8.2499	0.9971

В ходе исследований были получены решения задачи АОГ наблюдаемой области (левой части при цензурировании справа и правой части при цензурировании слева) для ряда законов распределения. Анализ полученных таблиц АОГ позволяет отметить, что с ростом степени цензурирования наблюдаемые значения случайной величины несут все меньшую часть информации из сохранившейся в цензурированной выборке и все большая ее часть содержится в квантили, определяющей

область цензурирования (в количестве наблюдений в этой области). Этим, в частности, определяется достаточно высокая точность оценивания параметра экспоненциального закона с использованием этой единственной квентили.

Применение АОГ в ситуации, когда моменты отказов фиксировать-ся не могут, позволяет получать ОМП параметров по группированным данным, практически не уступающие по асимптотическим свойствам оценкам по цензурированным. Конечно, для того чтобы использовать решение задачи АОГ, надо знать значения параметров, которые-то как раз и требуется оценить. В этом случае возможен следующий выход. В задачах контроля качества или испытаниях надежности область значений параметров обычно бывает известна по результатам предыдущих экспериментов. Тогда можно воспользоваться этой информацией для выбора  $x_{(i)}$  по прогнозируемым значениям  $\theta$ . При не слишком больших ошибках прогноза выигрыш все равно будет ощутим [191].

#### **1.4.5. Проблемы и надежды, связанные с анализом цензурированных выборок**

В аналитически простом виде выражения для ОМП параметров по цензурированным выборкам получаются лишь в некоторых частных случаях. Более целесообразно определять оценки численными методами, для чего, вообще говоря, нет принципиальных трудностей.

Потери в информации Фишера, связанные с цензурированием, отражаются на качестве оценок и возможности построения адекватной модели наблюдаемого закона. Однако во многих случаях, несмотря на высокую степень цензурирования, потери в информации не очень большие и возможность построения адекватной модели сохраняется.

При ограниченных объемах выборок и сильном цензурировании распределения ОМП параметров оказываются существенно асимметричными и медленно сходятся к соответствующему асимптотическому нормальному закону. Наибольшая неприятность связана со смещением ОМП параметров, вычисляемых по цензурированным выборкам, что в конечном счете не позволяет идентифицировать закон распределения. Асимметричность законов распределения оценок и их смещение служат серьезным препятствием к созданию эффективных процедур проверки сложных гипотез о согласии эмпирического рас-

пределения, соответствующего цензурированной выборке, некоторому теоретическому закону.

Однако эта проблема не является непреодолимой, так как имеется реальная возможность исследования законов распределения оценок (например, методами статистического моделирования), построения для вычисляемых оценок поправок на смещение в виде функций от объема выборки и степени цензурирования. Такие исследования проводились в [345]. Поправки, нейтрализующие смещение, позволяют находить несмешенные оценки параметров, а следовательно, строить критерии согласия для проверки сложных гипотез.

## 1.5. Оптимальные $L$ -оценки по выборочным квантилям

### 1.5.1. Построение $L$ -оценок параметров сдвига и масштаба

Дз. Огава, опираясь на асимптотическое распределение выборочных квантилей ( $k - 1$  квантилей при  $k$  интервалах) [114], в работах [118, 307] получил асимптотическое распределение выборочных квантилей для законов, определяемых только параметрами сдвига  $\mu$  и масштаба  $\sigma$ , с функцией распределения  $F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$  и функцией плотности  $\frac{1}{\sigma}f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ . Им же (см. стр. 54–60, [307]) методом наименьших квадратов построены «оптимальные линейные несмешенные оценки» параметров сдвига и масштаба, в основе которых лежат значения выборочных квантилей.

При построении оценок используются квантили  $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(k-1)}$  рассматриваемого закона, которые делят область определения случайной величины в соответствии с заданными вероятностями  $P_i = F(t_i) - F(t_{i-1})$  попадания наблюдений в интервалы, где

$$t_i = \frac{x_{(i)} - \mu}{\sigma}.$$

При известном параметре  $\sigma$  оценка параметра  $\mu$  имеет вид [307]

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{K_1} Z - \sigma \frac{K_3}{K_1}, \quad (1.16)$$

где

$$Z = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - f_{i-1})(f_i \hat{x}_{(i)} - f_{i-1} \hat{x}_{(i-1)})}{P_i}; \quad (1.17)$$

$$K_1 = \sigma^2 J_\Gamma(\mu) = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - f_{i-1})^2}{P_i}; \quad (1.18)$$

$$K_3 = \sigma^2 J_\Gamma(\mu, \sigma) = \sum_{i=1}^k \frac{(f_{i-1} - f_i)(f_{i-1} t_{i-1} - f_i t_i)}{P_i}; \quad (1.19)$$

$f_i = f(t_i)$ ,  $t = (x - \mu) / \sigma$ ,  $P_i = F(t_i) - F(t_{i-1})$ ,  $f_0 = f_k = 0$ . Здесь  $\hat{x}_{(i)}$  – оценка по наблюдаемой выборке такой квантили закона, что  $F\left(\frac{x_{(i)} - \mu}{\sigma}\right) = F(t_i)$ , где  $t_i$  – соответствующая квантиль стандартного распределения с нулевым параметром сдвига и единичным масштабным. Через  $J_\Gamma(\cdot)$  обозначено количество информации Фишера о соответствующем параметре по группированным данным. В общем случае информационная матрица Фишера о векторе параметров распределения  $\theta$  по группированным наблюдениям определяется выражением

$$\mathbf{J}_\Gamma(\theta) = \sum_{i=1}^k \frac{\nabla P_i(\theta) \nabla^T P_i(\theta)}{P_i(\theta)},$$

где  $P_i(\theta) = \int_{x_{(i-1)}}^{x_{(i)}} f(x, \theta) dx$  – вероятность попадания наблюдения в интервал. В случае  $\theta^T = (\mu, \sigma)$ , это будет матрица

$$\mathbf{J}_\Gamma(\mu, \sigma) = \begin{bmatrix} J_\Gamma(\mu) & J_\Gamma(\mu, \sigma) \\ J_\Gamma(\mu, \sigma) & J_\Gamma(\sigma) \end{bmatrix}.$$

При известном параметре  $\mu$  оценка параметра  $\sigma$  определяется выражением [307]

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{K_2} Y - \mu \frac{K_3}{K_2}, \quad (1.20)$$

где

$$Y = \sum_{i=1}^k \frac{(t_i f_i - t_{i-1} f_{i-1})(f_i x_{(i)} - f_{i-1} x_{(i-1)})}{P_i}; \quad (1.21)$$

$$K_2 = \sigma^2 J_\Gamma(\sigma) = \sum_{i=1}^k \frac{(t_i f_i - t_{i-1} f_{i-1})^2}{P_i}. \quad (1.22)$$

При симметричных функциях плотности и симметричных квантилях второе слагаемое в формулах (1.16) и (1.20) равно нулю.

Если неизвестны оба параметра, то оценки параметров сдвига и масштаба представлены соотношениями [307]:

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{\Delta} (K_2 Z - K_3 Y), \quad (1.23)$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{\Delta} (-K_3 Z + K_1 Y), \quad (1.24)$$

где  $\Delta = K_1 K_2 - K_3^2$ .

Соотношения (1.16), (1.20), (1.23) и (1.24) можно преобразовать в совсем простые зависимости [222, 272]. Формулу (1.16) для оценивания  $\mu$  при известном  $\sigma$  можно привести к виду

$$\tilde{\mu} = \alpha_0 \sigma + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \hat{x}_{(i)}, \quad (1.25)$$

где

$$\alpha_0 = -\frac{K_3}{K_1}, \quad \alpha_1 = \alpha'_1 / K_1 = \left( \frac{f_1^2}{P_1} + \frac{f_1^2 - f_1 f_2}{P_2} \right) / K_1;$$

$$\alpha_i = \alpha'_i / K_1 = \left( \frac{f_i^2 - f_i f_{i-1}}{P_i} + \frac{f_i^2 - f_i f_{i+1}}{P_{i+1}} \right) / K_1, \quad i = \overline{2, (k-2)};$$

$$\alpha_{k-1} = \alpha'_{k-1} / K_1 = \left( \frac{f_{k-1}^2 - f_{k-1} f_{k-2}}{P_{k-1}} + \frac{f_{k-1}^2}{P_k} \right) / K_1.$$

Формулу (1.19) для оценивания  $\sigma$  при известном  $\mu$  представить в виде

$$\tilde{\sigma} = \beta_0 \mu + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \hat{x}_{(i)}, \quad (1.26)$$

где

$$\beta_0 = -\frac{K_3}{K_2}, \quad \beta_1 = \beta'_1 / K_2 = \left( \frac{t_1 f_1^2}{P_1} + \frac{t_1 f_1^2 - t_2 f_1 f_2}{P_2} \right) / K_2;$$

$$\beta_i = \beta'_i / K_2 = \left( \frac{t_i f_i^2 - t_{i-1} f_i f_{i-1}}{P_i} + \frac{t_i f_i^2 - t_{i+1} f_i f_{i+1}}{P_{i+1}} \right) / K_2, \quad i = \overline{2, (k-2)};$$

$$\beta_{k-1} = \beta'_{k-1} / K_2 = \left( \frac{t_{k-1} f_{k-1}^2 - t_{k-2} f_{k-1} f_{k-2}}{P_{k-1}} + \frac{t_{k-1} f_{k-1}^2}{P_k} \right) / K_2.$$

Аналогично формулы (1.22) и (1.23) можно преобразовать к виду

$$\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i \hat{x}_{(i)}, \quad (1.27)$$

$$\tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^{k-1} v_i \hat{x}_{(i)}, \quad (1.28)$$

где

$$\gamma_i = \left( \alpha_i' K_2 - \beta_i' K_3 \right) / \Delta;$$

$$v_i = \left( -\alpha_i' K_3 + \beta_i' K_1 \right) / \Delta.$$

### 1.5.2. Выбор квантилей стандартного распределения и вычисление коэффициентов $L$ -оценок

Значения коэффициентов  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $v_i$  в формулах (1.25)–(1.28) зависят от выбора квантилей  $t_i$  стандартного распределения (от выбора вероятностей  $P_1$ ,  $P_2$ , ...,  $P_k$ ).  $L$ -оценки (1.24)–(1.27) являются асимптотически эффективными [307]. Асимптотическая дисперсионная матрица вектора  $L$ -оценок параметров  $\theta^T = (\mu, \sigma)$  определяется соотношением

$$D(\theta) = n^{-1} \mathbf{J}_\Gamma^{-1}(\theta),$$

где  $\mathbf{J}_\Gamma(\theta) = \sum_{i=1}^k \frac{\nabla P_i(\theta) \nabla^T P_i(\theta)}{P_i(\theta)}$  – информационная матрица Фишера

вектора параметров распределения по группированным наблюдениям.

Так как рассматриваемые оценки асимптотически эффективны, то использование квантилей (границных точек интервалов), соответствующих АОГ, при котором минимизируются потери в информации Фишера, связанные с группированием [211, 191], обеспечивает оптимальные свойства этих оценок [211]: минимум асимптотической дисперсии, а в случае оценивания сразу двух параметров – минимум обобщенной асимптотической дисперсии.

В частных случаях решение задачи оптимального выбора квантилей для построения  $L$ -оценок рассматривалось в ряде работ. В [307, 39] рассматривались оценки параметров для нормального распределения, в [307] – для однопараметрического экспоненциального распределения, в [127] – для двухпараметрического экспоненциального распределения, в [53] – для параметров логистического распределения, в [14] – для параметров распределения Коши, в [57] – для параметров распределения экстремальных значений. Приближенный подход к решению такой задачи рассматривался в [126]. Причем в случае одновременного оценивания параметров  $\mu$  и  $\sigma$  оптимальные наборы граничных точек определялись исходя из минимума величины  $D[\tilde{\mu}] + cD[\tilde{\sigma}]$ , ( $c = 1, 2, 3, \dots$ ), а не минимума  $\det \mathbf{J}_{\Gamma}^{-1}(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma})$ , как в [191].

Опираясь на построенную нами совокупность таблиц асимптотически оптимального группирования [191, 190, 301], значения коэффициентов  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $\nu_i$  при различном числе используемых квантилей для параметров законов распределений, упоминаемых в данном разделе, мы получили в работе [222] (64 таблицы) и вместе с таблицами асимптотически оптимального группирования (58 таблиц) привели в приложениях **A** и **C**. Численные аспекты построения и свойства полученных  $L$ -оценок подробно исследовались в работе [272]. В табл. 1.11 приведены указания на используемые таблицы оптимальных вероятностей в приложении **A** и таблицы коэффициентов  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $\nu_i$  в приложении **C**. Эти указания позволяют ориентироваться в выборе коэффициентов при построении  $L$ -оценок.

Следует иметь в виду, что в случае распределений экспоненциального, Лапласа и совокупности распределений модулей многомерных нормальных величин существуют (построены) таблицы асимптотически оптимального группирования только для параметров масштаба этих распределений. Поэтому построенные таблицы коэффициентов и для оценок параметров масштаба, и для оценок параметров сдвига получены при использовании таблиц оптимальных вероятностей относительно параметров масштаба. В этой связи оценки параметров сдвига для этих распределений, как правило, существенно уступают по асимптотической эффективности оценкам параметров масштаба.

Таблица 1.11

**Указания на таблицы оптимальных вероятностей и таблицы с коэффициентами, используемые при вычислении  $L$ -оценок**

Распределение (плотность)	Оценива- емый пара- метр	Но- мер фор- мулы	Таблица вероят- ностей	Таб- лица коэф- фици- ентов
Нормальное $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$\mu$ (известно $\sigma$ ) $\sigma$ (известно $\mu$ ) $\mu$ $\sigma$	1.25 1.26 1.27 1.28	A.25 A.27 A.29 A.29	C.1 C.2 C.3 C.4
Логарифмически нормальное ( $\ln$ ) <sup>1</sup> $f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$\mu$ (известно $\sigma$ ) $\sigma$ (известно $\mu$ ) $\mu$ $\sigma$	1.25 1.26 1.27 1.28	A.25 A.27 A.29 A.29	C.1 C.2 C.3 C.4
Логарифмически нормальное ( $\lg$ ) <sup>2</sup> $f(x) = \frac{1}{\sigma x \ln 10 \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\lg x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$\mu$ (известно $\sigma$ ) $\sigma$ (известно $\mu$ ) $\mu$ $\sigma$	1.25 1.26 1.27 1.28	A.25 A.27 A.29 A.29	C.1 C.2 C.3 C.4
Логистическое $f(x) = \frac{\pi}{\sigma\sqrt{3}} \frac{\exp\left\{-\frac{\pi(x-\mu)}{\sigma\sqrt{3}}\right\}}{\left[1 + \exp\left\{-\frac{\pi(x-\mu)}{\sigma\sqrt{3}}\right\}\right]^2}$	$\mu$ (известно $\sigma$ ) $\sigma$ (известно $\mu$ ) $\mu$ $\sigma$	1.25 1.26 1.27 1.28	Равные A.43 A.45 A.45	C.5 C.6 C.7 C.8
Коши $f(x) = \frac{\sigma}{\pi[\sigma^2 + (x-\mu)^2]}$	$\mu$ (известно $\sigma$ ) $\sigma$ (известно $\mu$ ) $\mu$ $\sigma$	1.25 1.26 1.27 1.28	A.39 A.37 Равные Равные	C.9 C.10 C.11 C.12

Продолжение табл. 1.11

Распределение (плотность)	Оценива- емый па- раметр	Но- мер фор- мулы	Таблица вероят- ностей	Таб- лица коэф- фици- ентов
Минимального значения $f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ \frac{x-\mu}{\sigma} - \exp \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right\}$	$\mu$ (известно) $\sigma$ (известно) $\sigma$ (известно) $\mu$ $\mu$ $\sigma$	1.25 1.26 1.27 1.28	A.2 A.21 A.23 A.23	C.13 C.14 C.15 C.16
Максимального значения $f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{x-\mu}{\sigma} - \exp \left( -\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right\}$	$\mu$ (известно) $\sigma$ (известно) $\sigma$ (известно) $\mu$ $\mu$ $\sigma$	1.25 1.26 1.27 1.28	A.31 A.33 A.35 A.35	C.17 C.18 C.19 C.20
Экспоненциальное (показательное) $f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -(x-\mu) / \sigma \right\}$	$\mu$ (известно) $\sigma$ (известно) $\sigma$ (известно) $\mu$ $\mu$ $\sigma$	1.25 1.26 1.27 1.28	A.2 A.2 A.2 A.2	C.21 C.22 C.23 C.24
Модуля многомерного нормально- го вектора ( $m = 1$ , полунармальное) $f(x) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$	$\mu$ (известно) $\sigma$ (известно) $\sigma$ (известно) $\mu$ $\mu$ $\sigma$	1.25 1.26 1.27 1.28	A.7 A.7 A.7 A.7	C.25 C.26 C.27 C.28
Модуля многомерного нормально- го вектора ( $m = 2$ , Рэлея) $f(x) = \frac{x-\mu}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$	$\mu$ (известно) $\sigma$ (известно) $\sigma$ (известно) $\mu$ $\mu$ $\sigma$	1.25 1.26 1.27 1.28	A.2 A.2 A.2 A.2	C.29 C.30 C.31 C.32
Модуля многомерного нормально- го вектора ( $m = 3$ , Максвелла) $f(x) = \frac{2(x-\mu)^2}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$	$\mu$ (известно) $\sigma$ (известно) $\sigma$ (известно) $\mu$ $\mu$ $\sigma$	1.25 1.26 1.27 1.28	A.5 A.5 A.5 A.5	C.33 C.34 C.35 C.36

Продолжение табл. 1.11

Распределение (плотность)	Оценивае- мый па- раметр	Но- мер фор- мулы	Таблица вероят- ностей	Таб- лица коэф- фици- ентов
Модуля многомерного нормально-го вектора ( $m = 4$ ) $f(x) = \frac{2(x-\mu)^{m-1}}{(2\sigma^2)^{m/2} \Gamma(m/2)} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$\mu$ (известно) $\sigma$ (известно) $\mu$ $\mu$ $\sigma$	1.25 1.26 1.27 1.28	A.9 A.9 A.9 A.9	C.37 C.38 C.39 C.40
Модуля многомерного нормально-го вектора ( $m = 5$ ) $f(x) = \frac{2(x-\mu)^{m-1}}{(2\sigma^2)^{m/2} \Gamma(m/2)} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$\mu$ (известно) $\sigma$ (известно) $\mu$ $\mu$ $\sigma$	1.25 1.26 1.27 1.28	A.11 A.11 A.11 A.11	C.41 C.42 C.43 C.44
Модуля многомерного нормально-го вектора ( $m = 6$ ) $f(x) = \frac{2(x-\mu)^{m-1}}{(2\sigma^2)^{m/2} \Gamma(m/2)} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$\mu$ (известно) $\sigma$ (известно) $\mu$ $\mu$ $\sigma$	1.25 1.26 1.27 1.28	A.13 A.13 A.13 A.13	C.45 C.46 C.47 C.48
Модуля многомерного нормально-го вектора ( $m = 7$ ) $f(x) = \frac{2(x-\mu)^{m-1}}{(2\sigma^2)^{m/2} \Gamma(m/2)} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$\mu$ (известно) $\sigma$ (известно) $\mu$ $\mu$ $\sigma$	1.25 1.26 1.27 1.28	A.15 A.15 A.15 A.15	C.49 C.50 C.51 C.52
Модуля многомерного нормально-го вектора ( $m = 8$ ) $f(x) = \frac{2(x-\mu)^{m-1}}{(2\sigma^2)^{m/2} \Gamma(m/2)} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$\mu$ (известно) $\sigma$ (известно) $\mu$ $\mu$ $\sigma$	1.25 1.26 1.27 1.28	A.17 A.17 A.17 A.17	C.53 C.54 C.55 C.56
Модуля многомерного нормально-го вектора ( $m = 9$ ) $f(x) = \frac{2(x-\mu)^{m-1}}{(2\sigma^2)^{m/2} \Gamma(m/2)} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$\mu$ (известно) $\sigma$ (известно) $\mu$ $\mu$ $\sigma$	1.25 1.26 1.27 1.28	A.19 A.19 A.19 A.19	C.57 C.58 C.59 C.60

Окончание табл. 1.11

Распределение (плотность)	Оценива- емый па- раметр	Но- мер фор- мулы	Таблица вероят- ностей	Таб- лица коэф- фици- ентов
Лапласа <sup>3</sup> $f(x) = \frac{1}{2\sigma} \exp\{- x - \mu /\sigma\}$	$\mu$ (известно $\sigma$ ) $\sigma$ (известно $\mu$ ) $\mu$ $\sigma$	1.25 1.26 1.27 1.28	A.48 A.48 A.48 A.48	C.61 C.62 C.63 C.64

<sup>1</sup> В формулах (1.25)–(1.28)  $\hat{x}_{(i)}$  заменяется на  $\ln \hat{x}_{(i)}$ .

<sup>2</sup> В формулах (1.25)–(1.28)  $\hat{x}_{(i)}$  заменяется на  $\lg \hat{x}_{(i)}$ .

<sup>3</sup> Коэффициенты в табл. С.61–С.64 соответствуют первому варианту (первой строке) оптимальных вероятностей из табл. А.48 при соответствующем  $k$ .

Симметричность коэффициентов в формулах (1.25)–(1.28) для симметричных распределений определяется симметричностью оптимальных граничных точек интервалов. В книге [193] при обзоре работ по построению рассматриваемых  $L$ -оценок высказано предположение о симметричности оптимальных квантилей для параметра  $\sigma$  нормального распределения. Однако для параметров масштаба при известном параметре сдвига и четном  $k$  задача асимптотически оптимального группирования обычно имеет два решения с несимметричными значениями квантилей. В таких случаях пара этих решений зеркальна относительно центра симметрии распределения. Поэтому не единственным является оптимальный набор коэффициентов в формулах (1.26).

Для вычисления предлагаемых оптимальных  $L$ -оценок достаточно в соотношения (1.25)–(1.28) с известными коэффициентами подставить значения выборочных квантилей  $\hat{x}_{(i)}$ , которые определяются таким образом, чтобы имеющаяся выборка оказалась разбитой на части с числом наблюдений  $n_i$ , пропорциональным вероятности  $P_i$  попадания в соответствующий интервал при асимптотически оптимальном группировании ( $n_i \approx nP_i$ ). Таким образом,  $\hat{x}_{(i)}$  должно быть выбрано из условия

$$X_{([nP^i])} \leq \hat{x}_{(i)} \leq X_{([nP^i]+1)},$$

где  $X_{(l)}$  – члены вариационного ряда  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ , построенного по исходной выборке;  $P^i = \sum_{j=1}^i P_j$ ;  $[\cdot]$  – означает целую часть числа, а  $P_j$  – выбираются из соответствующей строки таблицы оптимальных вероятностей. Например, в качестве  $\hat{x}_{(i)}$  могут быть взяты средние значения между соответствующими соседними членами вариационного ряда.

Асимптотические свойства  $L$ -оценок тем лучше, чем большее количество выборочных квантилей в них использовано. Практически количество используемых квантилей (число интервалов) ограничивается сверху объемом выборки и следующими соображениями. Во-первых, очевидно, что число интервалов  $k$  следует выбирать так, чтобы минимальное произведение  $nP_i$  при данном  $k$  было больше единицы (3...5, но лучше больше – 5...10). Это связано с ожидаемым числом попадания наблюдений, как правило, в крайние интервалы и определяет возможность нахождения соответствующей выборочной квантили. Во-вторых, число интервалов  $k$  ограничивается сверху максимальным числом интервалов, для которого построены соответствующие таблицы АОГ [191, 190]. Для случая оценивания одного параметра величина  $k$  ограничена 10 или 11 интервалами, для случая двух параметров – 15 интервалами. Использование большего числа интервалов нецелесообразно, поскольку в первом случае в группированной выборке сохраняется 94...98 % информации Фишера (это соответствует увеличению среднеквадратического отклонения оценки по группированным наблюдениям по сравнению с оцениванием по негруппированным на 3...1 %), а во втором случае – примерно 95 % информации.

Например, при необходимости оценивания по выборке двух параметров нормального закона исходя из рекомендаций  $nP_i \geq 3...5$  для интервала с минимальной вероятностью попадания и опираясь на табл. А.29 приложения А, мы получим рекомендуемые значения числа интервалов, представленные в табл. 1.12.

Таким образом, вся процедура вычисления  $L$ -оценок состоит в построении по имеющейся выборке вариационного ряда, определении  $\hat{x}_{(i)}$  и выполнении десятка арифметических операций по формулам (1.25), (1.26) или (1.27) и (1.28). Причем с увеличением объема выбор-

ки растет лишь число операций, требуемое для сортировки выборки по возрастанию.

Таблица 1.12

**Рекомендуемые значения числа интервалов при оценивании по выборке двух параметров нормального закона в зависимости от объема выборки**

Объем выборки $n$	Число интервалов $k$	Объем выборки $n$	Число интервалов $k$
$\leq 37$	3	390...650	$\leq 10$
36...60	$\leq 4$	510...850	$\leq 11$
67...111	$\leq 5$	640...1070	$\leq 12$
100...167	$\leq 6$	810...1350	$\leq 13$
152...254	$\leq 7$	1000...1670	$\leq 14$
213...355	$\leq 8$	1200 и более	$\leq 15$
294...490	$\leq 9$		

**Пример.** Для нормального распределения при  $k = 9$  соотношение (1.25) принимает вид

$$\tilde{\mu} = 0.056339(\hat{x}_{(1)} + \hat{x}_{(8)}) + 0.111523(\hat{x}_{(2)} + \hat{x}_{(7)}) + \\ + 0.154649(\hat{x}_{(3)} + \hat{x}_{(6)}) + 0.177489(\hat{x}_{(4)} + \hat{x}_{(5)}),$$

соотношение (1.26) –

$$\tilde{\sigma} = 0.031157(\hat{x}_{(8)} - \hat{x}_{(1)}) + 0.072629(\hat{x}_{(7)} - \hat{x}_{(2)}) + \\ + 0.116643(\hat{x}_{(6)} - \hat{x}_{(3)}) + 0.147029(\hat{x}_{(5)} - \hat{x}_{(4)}),$$

соотношения (1.27) и (1.28) (см. табл. А.25–А.29) –

$$\tilde{\mu} = 0.021547(\hat{x}_{(1)} + \hat{x}_{(8)}) + 0.068108(\hat{x}_{(2)} + \hat{x}_{(7)}) + \\ + 0.148605(\hat{x}_{(3)} + \hat{x}_{(6)}) + 0.261739(\hat{x}_{(4)} + \hat{x}_{(5)}),$$

$$\tilde{\sigma} = 0.052747(\hat{x}_{(8)} - \hat{x}_{(1)}) + 0.114684(\hat{x}_{(7)} - \hat{x}_{(2)}) + \\ + 0.153492(\hat{x}_{(6)} - \hat{x}_{(3)}) + 0.090860(\hat{x}_{(5)} - \hat{x}_{(4)}).$$

Если мы оцениваем оба параметра, для определения  $\hat{x}_{(i)}$  вероятности  $P_i$  выбираются из табл. А.29. И при объеме выборки в 1000 наблюдений в качестве  $\hat{x}_{(i)}$ ,  $i = \overline{1, 8}$ , можно взять средние значения между

следующими парами членов вариационного ряда:  $X_{(10)} - X_{(11)}$ ,  $X_{(52)} - X_{(53)}$ ,  $X_{(153)} - X_{(154)}$ ,  $X_{(350)} - X_{(351)}$ ,  $X_{(649)} - X_{(650)}$ ,  $X_{(846)} - X_{(847)}$ ,  $X_{(947)} - X_{(948)}$ ,  $X_{(989)} - X_{(990)}$ .

### 1.5.3. Точность оценивания квантилей и $L$ -оценок

Оптимальные  $L$ -оценки параметров сдвига и масштаба являются асимптотически эффективными. На практике же мы имеем дело с выборками ограниченного объема. Понятно, что и точность оценивания квантилей  $\hat{x}_{(i)}$ , и точность вычисления  $L$ -оценок зависят от объема выборки  $n$ . В качестве основного возражения против использования  $L$ -оценок обычно выдвигают возможную значительную неточность в определении выборочных квантилей  $\hat{x}_{(i)}$ , которая должна отражаться на точности  $L$ -оценок.

Методами статистического моделирования нами были исследованы законы распределения выборочных квантилей и получаемых  $L$ -оценок в зависимости от конкретных объемов выборок  $n$  и числа используемых квантилей для различных законов наблюдаемых случайных величин. Например, на рис. 1.8 приведены центрированные плотности выборочных квантилей  $\hat{x}_{(1)} \div \hat{x}_{(5)}$  и  $L$ -оценок  $\tilde{\sigma}$ , построенных по этим выборочным квантилям. Плотности центрированы относительно истинных значений квантилей  $x_{(i)}$  и параметра  $\sigma = \sigma_0$ . Рассматривался случай оценивания масштабного параметра  $\sigma$  экспоненциального закона при использовании пяти квантилей (число интервалов  $k = 6$ ) при объемах выборок  $n = 1000$ . Экспоненциальный закон моделировался с масштабным параметром  $\sigma = 1$ . Значения асимптотически оптимальных квантилей  $x_{(i)}$ ,  $i = \overline{1, 5}$ , для данной ситуации соответственно равны 0.4993; 1.0997; 1.8538; 2.8714; 4.4650 (табл. А.1 приложения А). Значения соответствующих вероятностей попадания в интервалы между  $x_{(i)}$  – 0.3930; 0.2740; 0.1763; 0.1000; 0.0451; 0.0116 (табл. А.2 приложения А). Значение  $L$ -оценки  $\tilde{\sigma}$  определялось по формуле

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma} = & -0.81488\mu + 0.347021\hat{x}_{(1)} + 0.232423\hat{x}_{(2)} + \\ & + 0.140462\hat{x}_{(3)} + 0.071103\hat{x}_{(4)} + 0.023870\hat{x}_{(5)}.\end{aligned}$$

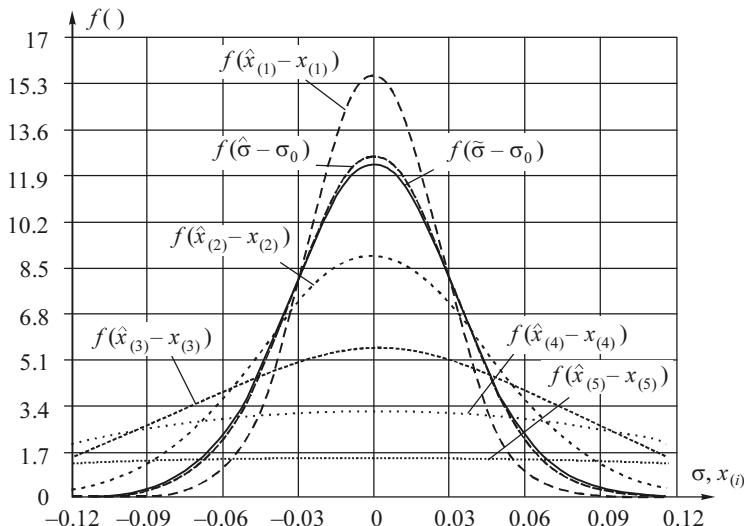


Рис. 1.8. Центрированные плотности распределения выборочных асимптотически оптимальных квантилей и  $L$ -оценок масштабного параметра экспоненциального распределения при объемах выборок  $n = 1000$

Для построения приведенных на рисунке законов распределения формировались выборки оценок из  $N = 2000$  значений, каждое из которых находилось по выборке объема  $n$  случайных величин, распределенных по экспоненциальному закону. Представляемые плотности построены по ансамблю реализаций (усреднены по 100 экспериментам), т. е. общий объем смоделированных оценок, по которому строилось соответствующее распределение на рис. 1.8, составлял величину  $2000 \times 100 = 200\,000$  наблюдений.

Для моделируемых эмпирических распределений наилучшими моделями оказался нормальный закон. О степени близости к нормальному закону эмпирических распределений  $L$ -оценок можно судить по усредненным (по 10 экспериментам) значениям статистик  $S^*$  критериев согласия  $\chi^2$  Никулина [301, 287, 288, 284], Колмогорова [302],  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова [302],  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга [302] и соответствующим вероятностям  $P\{S > S^*\}$  (достигаемому уровню значимости), получаемым при проверке сложных гипотез (табл. 1.13).

Для сравнения на рисунке построена также плотность асимптотического распределения оценки максимального правдоподобия (ОМП)  $\hat{\sigma}$  по точечной выборке (по негруппированным наблюдениям). Сравнивая плотность асимптотически эффективной ОМП по точечной выборке с плотностью  $L$ -оценки, видим, что последние мало уступают ОМП. Это естественно, так как в данном случае при асимптотически оптимальном группировании сохраняется 94,76 % информации Фишера о параметре масштаба  $\sigma$ . Следовательно, стандартное отклонение предельного распределения  $f(\hat{\sigma})$  превышает стандартное отклонение распределения  $f(\hat{\sigma})$  не более чем на 2.73 %.

Таблица 1.13

**Усредненные значения статистик критериев согласия и достигаемый уровень значимости при проверке сложных гипотез о согласии с нормальным законом**

Критерий	Значение статистики критерия $S^*$	$P\{S > S^*\}$
$\chi^2$ Нikuлина	1.09009	0.8958
Колмогорова	0.52249	0.7490
$\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова	0.04516	0.5877
$\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга	0.43316	0.2903

Рисунок наглядно демонстрирует, что несмотря на относительно невысокую точность оценивания квантилей  $x_{(5)}$ ,  $x_{(4)}$  и  $x_{(3)}$ , мы имеем достаточно высокую точность оценивания параметра масштаба  $\sigma$  наблюданного экспоненциального закона. При этом очевидно, что эти оценки не многим уступают ОМП по негруппированным наблюдениям, имея существенное преимущество в рабочности.

О точности статистического моделирования можно судить, например, по следующим фактам. Стандартное отклонение теоретического асимптотического нормального распределения  $f(\hat{\sigma} - \sigma_0)$  (для ОМП по негруппированным наблюдениям при объеме выборки  $n = 1000$  и значении  $\sigma_0 = 1$ ), определяемое из соотношения  $D(\sigma_0) = n^{-1} \mathbf{J}^{-1}(\sigma_0)$ ,

равно 0.031623. Стандартное отклонение распределения  $f(\hat{\sigma} - \sigma_0)$ , построенного в результате моделирования, также нормального, равно 0.0316. По существу, распределение, полученное в результате моделирования, совпадает с асимптотическим. Аналогично для  $L$ -оценок стандартное отклонение асимптотического нормального распределения  $f(\tilde{\sigma} - \sigma_0)$ , определяемое соотношением для асимптотической дисперсии, равно 0.032465. Для соответствующего распределения, полученного в результате моделирования и представленного на рис. 1.8, стандартное отклонение равно 0.0324. В обоих случаях наблюдаем совпадение трех значащих цифр.

**Точность  $L$ -оценок в зависимости от объема выборок.** В связи с потерей информации при группировании  $L$ -оценки имеют большее рассеяние, чем асимптотически эффективные оценки, построенные по негруппированным данным. Например, в табл. 1.14 в процентах показано увеличение среднего квадратического отклонения асимптотического распределения  $L$ -оценок по сравнению со средним квадратическим отклонением асимптотически эффективных оценок по негруппированным наблюдениям в зависимости от числа интервалов  $k$  для параметров сдвига и масштаба нормального закона (при оценивании только одного из них). Эти значения характеризуют асимптотическую точность оценивания.

Таблица 1.14

**Увеличение среднего квадратического отклонения асимптотического распределения  $L$ -оценок по сравнению с асимптотически эффективными оценками по негруппированным наблюдениям**

$k$	Для параметра сдвига, %	Для параметра масштаба, %
2	25.63	81.31
3	11.12	23.83
4	6.45	16.58
5	4.25	10.14
6	3.03	7.91
7	2.28	5.74
8	1.77	4.73
9	1.42	3.73
10	1.16	3.18

Состоятельность оценок и характер изменения точности  $L$ -оценок с ростом конечного объема выборок  $n$  при фиксированном числе используемых квантилей демонстрирует рис. 1.9. На рисунке приведены плотности оценок  $\tilde{\mu}$  параметра нормального закона, центрированные относительно истинных значений параметра  $\mu_0$ , для случая  $k=3$  в зависимости от  $n$ , когда при построении  $L$ -оценок используются всего две выборочные квантили, соответствующие асимптотически оптимальному группированию, при одновременном оценивании параметров  $\mu$  и  $\sigma$ . Выборки нормального закона объема  $n$  генерировались с параметрами  $\mu_0 = 0$  и  $\sigma_0 = 1$ .

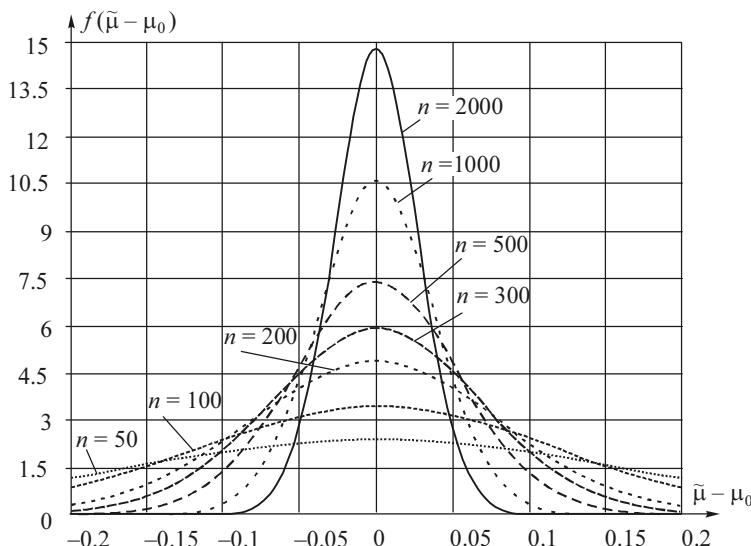


Рис. 1.9. Плотности распределения  $L$ -оценок  $\tilde{\mu}$  при  $k=3$   
в зависимости от  $n$

О сравнительной точности оценивания можно судить по значениям среднеквадратичного отклонения закона, описывающего распределение соответствующих оценок при конкретных объемах выборок. Значения среднего квадратичного отклонения характеризуют рассеяние оценок. Например, в табл. 1.15 для различных объемов выборок представлены значения среднеквадратичных отклонений (СКО) для ОМП по негруппированным наблюдениям  $\hat{\mu}$  и  $\hat{\sigma}$  и для  $L$ -оценок  $\tilde{\mu}$  и

б параметров сдвига и масштаба логистического закона при  $k = 5$ . Характеристики рассеяния для ОМП по группированным наблюдениям в данном случае совпадают с характеристиками рассеяния  $L$ -оценок.

Таблица 1.15

Среднеквадратические отклонения оценок в зависимости от  $n$ 

Объем выборки $n$	ОМП по точечной выборке		$L$ -оценки	
	СКО $\hat{\mu}$	СКО $\hat{\sigma}$	СКО $\tilde{\mu}$	СКО $\tilde{\sigma}$
100	0.0947	0.0833	0.0997	0.0927
300	0.0550	0.0482	0.0577	0.0541
500	0.0426	0.0373	0.0446	0.0420
1000	0.0301	0.0264	0.0315	0.0297
2000	0.0214	0.0187	0.0224	0.0210

$L$ -оценки асимптотически эквивалентны ОМП по группированным наблюдениям: асимптотические дисперсионные матрицы этих оценок определяются соотношением  $D(\theta) = n^{-1} \mathbf{J}_\Gamma^{-1}(\theta)$ . Однако при конечных объемах выборок  $n$  разница между свойствами этих оценок все же заметна. В общем случае ОМП по группированным наблюдениям несколько точнее. Исследования конечных выборок оценок параметров сдвига и масштаба, рассматриваемых в данной работе законов, показали, что всегда  $D[\hat{\mu}_\Gamma] \leq D[\tilde{\mu}]$  и  $D[\hat{\sigma}_\Gamma] \leq D[\tilde{\sigma}]$ , а при  $n \geq 2000$  дисперсионные матрицы оценок практически совпадают. Однако если это преимущество и оказывается за ОМП по группированным наблюдениям, то оно незначительно.

**Точность  $L$ -оценок в зависимости от числа используемых квантилей.** Характер изменения точности  $L$ -оценок с ростом числа используемых квантилей при фиксированном объеме выборки  $n$  показывает рис. 1.10.

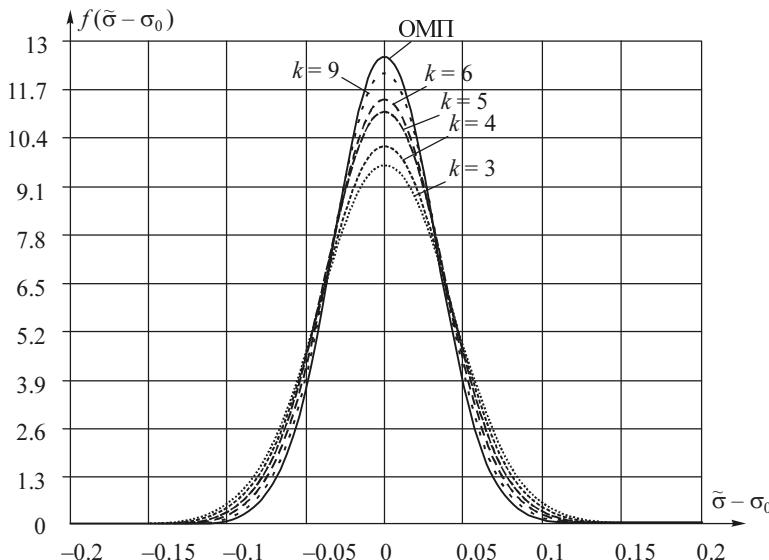


Рис. 1.10. Плотности распределения  $L$ -оценок  $\tilde{\sigma}$  при  $n = 500$  в зависимости от  $k$

На этом рисунке приведены центрированные относительно истинного значения  $\sigma_0$  плотности оценок  $\tilde{\sigma}$  параметра нормального закона при объеме выборки  $n = 500$  и различном числе  $k - 1$  используемых выборочных квантилей для случая одновременного оценивания двух параметров закона. Выборки нормального закона, как и в предыдущем случае, генерировались с параметрами  $\mu_0 = 0$  и  $\sigma_0 = 1$ . Для сравнения на рисунке представлено центрированное распределение ОМП  $\tilde{\sigma}$ , полученное также в результате моделирования. Сохраняющееся различие в законах распределения ОМП и  $L$ -оценок при  $k = 9$  связано с величиной относительной асимптотической информации о параметрах закона  $\det J_{\Gamma}(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) / \det J(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ . Эта величина определяет часть информации, сохраняющейся при группировании выборки (при переходе к выборочным квантилям), и составляет в данном случае величину 0.8753.

### 1.5.4. Пример построения $L$ -оценок

Выборка в 200 наблюдений представлена следующим вариационным рядом:

-3.9974	-3.4223	-3.3518	-3.2468	-2.9512	-2.8614	-2.5131	-2.4703	-2.3764	-2.3248
-2.2861	-2.2051	-2.1274	-2.1121	-2.0838	-1.9483	-1.9223	-1.8914	-1.8881	-1.8852
-1.5887	-1.5686	-1.5290	-1.5257	-1.4929	-1.4806	-1.4768	-1.4729	-1.4664	-1.3564
-1.3375	-1.2893	-1.2512	-1.2049	-1.1740	-1.1588	-1.1150	-1.1073	-1.0652	-1.0159
-0.9794	-0.9748	-0.9503	-0.9307	-0.9283	-0.8931	-0.8174	-0.7629	-0.7618	-0.6671
-0.5973	-0.5670	-0.5330	-0.5286	-0.5280	-0.5210	-0.5066	-0.5064	-0.3962	-0.3913
-0.3488	-0.3481	-0.3224	-0.3082	-0.2172	-0.2117	-0.1785	-0.1188	-0.1059	-0.0826
0.0369	0.1151	0.1191	0.1206	0.1247	0.1866	0.2199	0.2750	0.2986	0.3649
0.4088	0.4244	0.4301	0.4643	0.4831	0.4901	0.5307	0.5840	0.6085	0.6268
0.6550	0.6613	0.6718	0.6879	0.7179	0.7194	0.8400	0.8587	0.8688	0.9319
0.9336	1.0087	1.0119	1.0192	1.0344	1.0410	1.0414	1.1076	1.1365	1.1450
1.1866	1.2009	1.2240	1.2395	1.3081	1.3413	1.3523	1.3600	1.3729	1.4650
1.4823	1.4885	1.5101	1.6124	1.6513	1.6823	1.7244	1.7244	1.7304	1.7321
1.7458	1.8288	1.8693	1.9080	1.9563	1.9689	1.9811	2.0209	2.0361	2.0434
2.0463	2.0628	2.1042	2.1247	2.2191	2.3264	2.3522	2.3588	2.3621	2.3760
2.3832	2.3922	2.3946	2.4012	2.4455	2.4535	2.4708	2.5525	2.5860	2.6366
2.6404	2.7468	2.7797	2.7945	2.8180	3.0140	3.0515	3.0643	3.0763	3.0835
3.1301	3.1541	3.2029	3.2392	3.3662	3.4533	3.4705	3.5160	3.5551	3.6222
3.6795	3.8301	3.9971	4.0461	4.1126	4.1293	4.2046	4.2724	4.3496	4.3900
4.6509	4.8979	4.9145	5.0427	5.0430	5.1736	5.4432	5.4817	5.5030	6.3378

В предположении, что выборка принадлежит нормальному закону, найдем оптимальные  $L$ -оценки его параметров. Число интервалов выбираем максимально возможным. Учитывая ограничение  $\min_i nP_i > 1$ ,

стараемся, чтобы, по крайней мере, выполнялось неравенство  $nP_i > 3\dots 5$ . По табл. А.29 приложения А останавливаемся на числе интервалов  $k = 7$ , так как в этом случае  $nP_1 = nP_7 = 3.94$ . Разбивая упорядоченную выборку на интервалы пропорционально  $nP_i$  при  $k = 7$ , находим граничные точки интервалов (оценки квантилей) как средние значения между наблюдениями, попавшими в смежные интервалы:

$$\hat{x}_{(1)} = (X_{(3)} + X_{(4)})/2 = (-3.3518 - 3.2468)/2 = -3.2993;$$

$$\hat{x}_{(2)} = (X_{(20)} + X_{(21)})/2 = (-1.8852 - 1.5887)/2 = -1.73695;$$

$$\hat{x}_{(3)} = (X_{(62)} + X_{(63)})/2 = (-0.3481 - 0.3224)/2 = -0.33525;$$

$$\hat{x}_{(4)} = (X_{(137)} + X_{(138)})/2 = (1.9811 + 2.0209)/2 = 2.001;$$

$$\hat{x}_{(5)} = (X_{(179)} + X_{(180)})/2 = (3.5551 + 3.6222)/2 = 3.58865;$$

$$\hat{x}_{(6)} = (X_{(196)} + X_{(197)})/2 = (5.1736 + 5.4432)/2 = 5.3084.$$

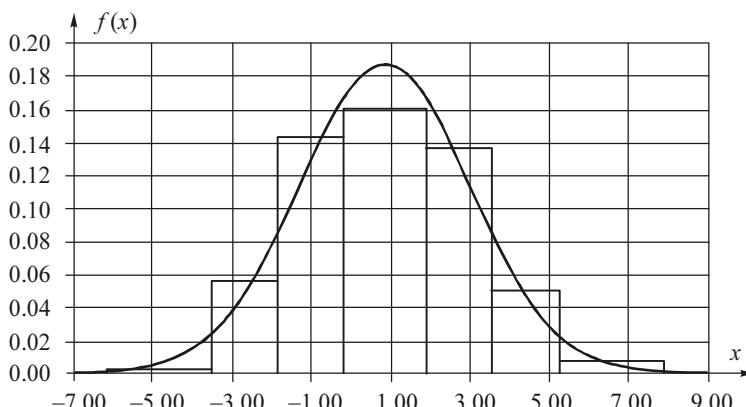
Используя коэффициенты из табл. С.3 приложения **C**, находим оценку параметра сдвига

$$\tilde{\mu} = 0.04318(\hat{x}_{(1)} + \hat{x}_{(6)}) + 0.141936(\hat{x}_{(2)} + \hat{x}_{(5)}) + \\ + 0.314884(\hat{x}_{(3)} + \hat{x}_{(4)}) \approx 0.8741,$$

и, используя коэффициенты из табл. С.4 приложения **C**, – оценку параметра масштаба

$$\tilde{\sigma} = 0.095717(\hat{x}_{(6)} - \hat{x}_{(1)}) + 0.186279(\hat{x}_{(5)} - \hat{x}_{(2)}) + \\ + 0.136715(\hat{x}_{(4)} - \hat{x}_{(3)}) \approx 2.1353.$$

На рис. 1.11 представлены плотность полученного нормального закона и гистограмма, построенная при асимптотически оптимальном группировании [191, 190, 301].



*Рис. 1.11. Гистограмма и плотность нормального закона, построенные с использованием  $L$ -оценок*

В табл. 1.16 приведены значения статистик непараметрических критериев Колмогорова,  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова,  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга и соответствующие значения вероятностей  $P\{S > S^*\}$  (достигаемых уровней значимости) при проверке сложных гипотез о согласии эмпирического распределения с полученным нормальным.

Таблица 1.16

**Результаты проверки сложных гипотез о согласии с нормальным законом**

Критерий	При $\tilde{\mu} = 0.8741$ ; $\tilde{\sigma} = 2.1353$		При $\hat{\mu} = 0.9228$ , $\hat{\sigma} = 2.0857$	
	Значение статистики	$P\{> S^*\}$	Значение статистики	$P\{> S^*\}$
Колмогорова	0.4506	0.9492	0.6256	0.4611
$\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова	0.0296	0.9006	0.0454	0.5838
$\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга	0.2701	0.8004	0.3238	0.5276

Значения вероятностей  $P\{S > S^*\}$ , приведенные в таблице, вычислены в соответствии с построенным распределениями статистик данных критериев согласия для случая применения  $L$ -оценок. Распределения статистик непараметрических критериев согласия в случае применения  $L$ -оценок отличаются от распределений статистик при проверке сложных гипотез с использованием ОМП [302] и сдвинуты вправо относительно последних. Поэтому при одних и тех же значениях статистик  $S^*$  величины достижимых уровней значимости  $P\{S > S^*\}$  в случае использования  $L$ -оценок всегда будут выше.

Вычисленные по этой же выборке ОМП параметров нормального закона (по негруппированным наблюдениям) равны соответственно  $\hat{\mu} = 0.9228$ ,  $\hat{\sigma} = 2.0857$ . Результаты проверки согласия также приведены в табл. 1.16. В данном случае при вычислении вероятностей  $P\{S > S^*\}$  использованы распределения статистик из [302]. Как можно заметить, в этом примере в случае  $L$ -оценок мы получаем закон, который лучше согласуется с эмпирическим распределением по сравнению с использованием ОМП (сравните по значениям статистик соответст-

вующих критериев в табл. 1.16). Вообще говоря, такая ситуация не типична, но данный пример подчеркивает устойчивость  $L$ -оценок к некоторым отклонениям от предполагаемого закона не только на «хвостах», но и в середине области определения случайной величины. Интересно, что в этом случае при  $k = 6$  и  $k = 5$  получаемые  $L$ -оценки также оказываются предпочтительнее ОМП в смысле близости эмпирического распределения к соответствующему теоретическому по рассматриваемым критериям согласия.

## 1.6. Робастность оценок

### 1.6.1. Подходы к построению робастных оценок

В статистике под робастностью понимают *нечувствительность к малым отклонениям от предположений* [337]. Естественно, что при условии сохранения хороших качеств оценок лучше всего использовать робастные методы оценивания.

В выборке могут присутствовать отклонения от предположений двух видов. Допустим, что наблюдаемая выборка действительно принадлежит тому закону распределения, оценки которого мы пытаемся найти. В этом случае отклонения могут быть связаны с аномальными наблюдениями, появление которых в выборке определяется самыми различными причинами, в том числе засорением значениями, принадлежащими другому закону. Если не учитывать наличие аномальных наблюдений, попытки оценивания параметров распределения могут привести к самым плачевным результатам.

Что же делать? Естественно, надо отбраковать аномальные измерения, а затем искать оценки параметров. К сожалению, реализовать отбраковку наблюдений в общем случае совсем не просто. Наблюдения, аномальные с позиций одного закона распределения, являются естественным проявлением закономерностей второго.

При отсутствии надежной процедуры отбраковки или практических соображений, связанных с физикой наблюдаемой величины, пытаются выйти из положения одним из следующих способов. В одном случае *усекают* выборку, отбрасывая определенную часть минимальных и/или максимальных наблюдений, и по оставшейся части оценивают параметры распределения, т. е. используют так называемые  $\alpha$ -урезанные оценки (отбрасывается  $\alpha n / 2$  наименьших и  $\alpha n / 2$  наибольших значений выборки [351]). Во втором – перед процедурой

оценивания *винзоризуют* выборку [337]: всем наблюдениям левее и/или правее определенных значений присваиваются одинаковые значения. Эти два подхода используются при обработке наблюдений еще с XIX века и связаны с именами Пуанкаре [197] и Винзора [141]. Обе эти процедуры далеко не всегда приводят к положительным результатам. Кроме того, в обоих случаях мы имеем дело с новой генеральной совокупностью, которой принадлежит видоизмененная выборка.

Более правильным следует считать третий подход, когда выборку цензурируют. Для наблюдений, попавших левее и/или правее определенных значений, фиксируют лишь факт попадания в соответствующий интервал, опуская конкретные значения этих наблюдений. По такой цензурированной выборке оценивают параметры закона.

Другая ситуация. В выборке может не быть аномальных наблюдений, но наблюдаемый закон распределения отличается от предполагаемого. Такая ситуация присутствует практически всегда, поскольку множество законов распределения вероятностей бесконечно, а количество моделей, используемых на практике для описания наблюдаемых случайных величин, весьма ограничено. Чем существенней вид предполагаемой модели отличается от реально наблюдаемого закона, тем сильнее это отражается на оценках параметров.

Очевидно, что в наблюдаемых на практике выборках и закон, пусть мало, но отличается от используемой модели, и обычно присутствуют аномальные наблюдения. Поэтому применение цензурирования, одностороннего или двустороннего, далеко не всегда приносит желаемый эффект.

Вопросам построения и исследования робастных оценок посвящено очень много работ (см., например [337, 314]). В данном случае не преследовалась цель анализа всей совокупности подходов к построению робастных методов оценивания. Анализируется только робастность оценок максимального правдоподобия по группированным и негруппированным наблюдениям.

## 1.6.2. Группирование наблюдений как способ получения робастных оценок

В работах [223, 262] подчеркивается высокая устойчивость ОМП по группированным наблюдениям к наличию в выборке аномальных измерений, к отклонению реально наблюдаемого закона от предполагаемого, к засорению выборки данными, принадлежащими

другому закону. Это подтверждается опытом эксплуатации версий программной системы [224] и многочисленными результатами модельных экспериментов.

Метод максимального правдоподобия – один из наиболее популярных и эффективных методов оценивания параметров распределений. Иногда даже приходится сталкиваться с необоснованными утверждениями, что ОМП являются робастными и именно поэтому предпочтительно использовать именно их. Однако практический опыт и результаты исследований заставляют подчеркнуть (возможно, очевидное для многих), что в общем случае ОМП параметров распределений не являются робастными.

Проиллюстрируем сказанное следующими примерами. Это можно было бы сделать с одинаковым эффектом на различных законах распределения, но, учитывая роль нормального распределения в теории и приложениях математической статистики, приведем примеры именно с нормальным законом.

В первом примере иллюстрируется влияние аномальных ошибок на ОМП параметров нормального распределения, а во втором параметры нормального закона оцениваются по выборке, принадлежащей другому закону распределения. Для чистоты эксперимента выборки моделируются в соответствии с заданными законами.

**Пример 1.** Выборка из примера в разд. 1.5.4. На рис. 1.12 приведены результаты статистического анализа смоделированной выборки. Вычисленные значения ОМП  $\hat{\mu} = 0.9228$  и  $\hat{\sigma} = 2.0805$ .

На этом и следующем рисунках приведены значения статистик  $\chi^2$  Нikuлина, Колмогорова,  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова и  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга, вычисляемые при проверке гипотез о согласии, и вероятности  $P\{S > S^*\}$  (достигаемые уровни значимости), где  $S^*$  – вычисленное значение соответствующей статистики. Гипотеза о согласии не отвергается, если  $P\{S > S^*\} > \alpha$ , где  $\alpha$  – задаваемый уровень значимости. При вычислении вероятностей вида  $P\{S > S^*\}$  для непараметрических критериев Колмогорова,  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова и  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга учитывается, что осуществляется проверка сложной гипотезы [302]. Как видим, согласие с нормальным законом очень хорошее.

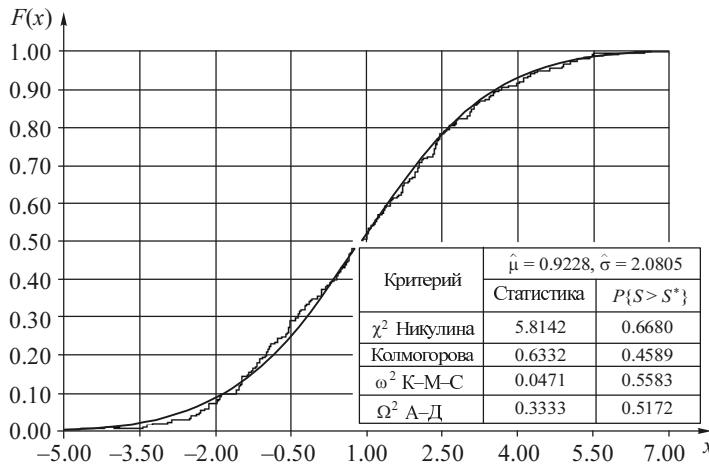


Рис. 1.12. Результаты статистического анализа исходной выборки по негруппированным данным

Теперь допустим, что в выборку «вкрадлось» всего три аномальных наблюдения (в результате замены трех первых наблюдений:  $-3.9974$  на  $-23.9974$ ,  $-3.4223$  на  $-23.4223$ ,  $-3.3518$  на  $-23.3518$ ). Результаты анализа с теоретической и эмпирической функциями распределения приведены на рис. 1.13.

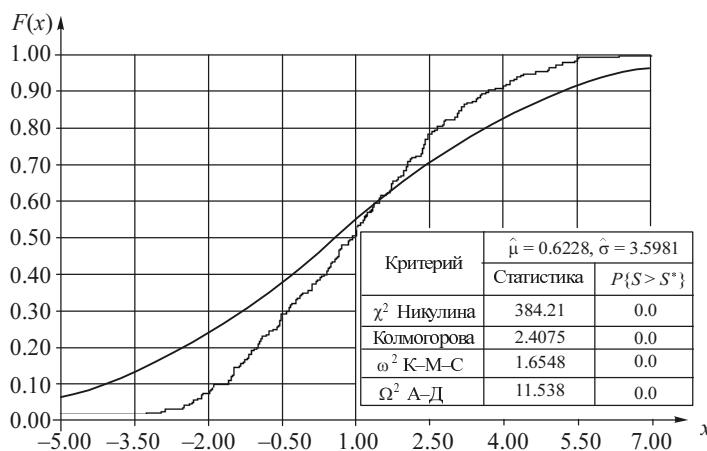


Рис. 1.13. Эмпирическая функция и теоретическая функция нормального распределения, полученная по выборке с аномальными наблюдениями

Полученные ОМП параметров нормального распределения  $\hat{\mu} = 0.6228$  и  $\hat{\sigma} = 3.5981$ . Особенно заметно наличие аномальных наблюдений повлияло на оценку среднеквадратичного отклонения. По всем критериям гипотеза о согласии с нормальным законом распределения будет отклонена, а если разбить выборку на 10 равночастотных интервалов и вычислить ОМП по группированным данным, получим  $\hat{\mu}_G = 0.9308$ ,  $\hat{\sigma}_G = 2.1021$ . В результате картина будет похожа на представленную на рис. 1.12.

**Пример 2.** Этот пример связан с использованием нормального закона распределения в ситуации, когда выборка принадлежит закону с более «тяжелыми» хвостами. В данном случае выборка в 200 наблюдений сгенерирована в соответствии с распределением Коши.

-45.2937	-2.0296	-1.1268	-0.6583	-0.2726	0.0113	0.2915	0.5272	1.0278	2.0088
-26.4403	-2.0239	-1.0569	-0.6468	-0.2568	0.0231	0.3067	0.5614	1.0398	2.2309
-20.7705	-1.9984	-1.0429	-0.6243	-0.2260	0.0342	0.3330	0.5817	1.0493	2.2339
-15.0800	-1.9822	-1.0354	-0.5832	-0.1923	0.0371	0.3409	0.6279	1.0808	2.4880
-14.5809	-1.9444	-1.0308	-0.5732	-0.1834	0.0596	0.3425	0.6354	1.1201	2.6831
-14.4622	-1.9245	-0.9885	-0.5731	-0.1731	0.0633	0.3516	0.6499	1.1426	2.8892
-12.8093	-1.6262	-0.9835	-0.5719	-0.1694	0.0933	0.3522	0.6645	1.2357	3.1639
-9.7287	-1.6092	-0.8873	-0.5698	-0.1687	0.1267	0.3701	0.6664	1.2836	3.4871
-6.4209	-1.6071	-0.8206	-0.5567	-0.1027	0.1339	0.3772	0.6693	1.2951	3.9325
-6.0280	-1.5984	-0.8128	-0.5509	-0.0994	0.1645	0.3801	0.6705	1.3060	4.3895
-5.1834	-1.5470	-0.7977	-0.5332	-0.0986	0.1780	0.3872	0.6901	1.3257	5.4103
-4.1213	-1.5159	-0.7761	-0.4832	-0.0792	0.1933	0.3891	0.6921	1.3560	6.9372
-3.6652	-1.4773	-0.7673	-0.4712	-0.0681	0.2078	0.4393	0.6990	1.4106	7.0897
-3.1371	-1.4189	-0.7540	-0.4585	-0.0669	0.2096	0.4463	0.8561	1.4114	7.1409
-3.0395	-1.4083	-0.7421	-0.3674	-0.0644	0.2137	0.4471	0.8667	1.5209	7.6616
-3.0078	-1.3048	-0.7406	-0.3544	-0.0158	0.2327	0.4717	0.9044	1.6418	11.9482
-2.8316	-1.2860	-0.7189	-0.3491	-0.0084	0.2478	0.4804	0.9195	1.6820	14.2668
-2.6218	-1.2635	-0.7163	-0.3469	-0.0023	0.2576	0.4905	0.9245	1.7308	20.2107
-2.1528	-1.1745	-0.6988	-0.3435	0.0027	0.2588	0.4919	1.0072	1.8070	25.4725
-2.0362	-1.1631	-0.6783	-0.2857	0.0073	0.2883	0.5103	1.0174	1.9591	257.195

Попытка построить нормальный закон по исходной негруппированной выборке приводит к ОМП параметров нормального закона  $\hat{\mu} = 0.9075$  и  $\hat{\sigma} = 18.9898$ . При вычислении ОМП по группированным данным с разбиением выборки на 10 равночастотных интервалов получаем  $\hat{\mu}_G = -0.0251$  и  $\hat{\sigma}_G = 1.4800$ . На рис. 1.14 приведены эмпирическая функция распределения и две теоретические функции нормального закона с соответствующими значениями параметров. Конечно, ни о какой близости эмпирической функции с теоретической функцией

нормального закона с параметрами  $\hat{\mu}_\Gamma = -0.0251$  и  $\hat{\sigma}_\Gamma = 1.4800$  говорить не приходится, но картина говорит сама за себя.

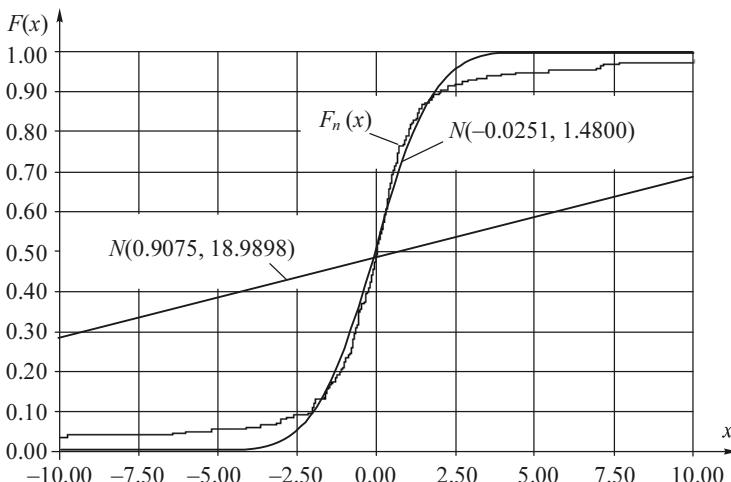


Рис. 1.14. Эмпирическая функция распределения  $F_n(x)$ , построенная по выборке, принадлежащей распределению Коши, и функции распределения нормального закона с ОМП параметрами, вычисленными по негруппированным и группированным данным

Таким образом, чтобы снизить влияние аномальных ошибок и отклонений наблюдаемых выборок от предполагаемого закона на вычисляемые оценки параметров, можно использовать перед вычислением оценок параметров процедуру предварительного группирования наблюдений. Группирование данных позволяет резко снизить влияние аномальных наблюдений, а иногда практически исключить последствия присутствия их в выборке. Резко снижается влияние на оценки параметров и отклонений вида наблюдаемого закона от предполагаемого.

Естественно, мы предлагаем использовать оценки по группированным данным не вместо оценок по негруппированным наблюдениям, а вместе с ними. Качество тех и других зависит от степени засоренности выборки аномальными наблюдениями или близости к предполагаемому закону распределения.

Остается вопрос: как группировать? Можно различным образом. Не стоит, конечно, рассматривать крайние случаи: сгруппировать

можно и так, что в группированной выборке не останется никакой информации о законе и его параметрах. Реально на интервалы разбивают область, определяемую размахом выборки. Это могут быть или интервалы равной длины, или интервалы равной вероятности (равной частоты), или асимптотически оптимальные интервалы, или интервалы, сформированные по какому-то другому принципу. Обычно наиболее устойчивыми к отклонениям оказываются оценки при разбиении выборки на интервалы равной вероятности. В то же время в случае асимптотически оптимального группирования потери информации о параметрах закона распределения, связанные с группированием, существенно меньше, чем при равновероятном. Если мы знаем, что отклонения от наших предположений в выборке минимальны, то использование полученных таблиц АОГ позволяет резко сократить объемы хранимых данных без существенной потери информации о законе распределения. Но все-таки в общем случае здесь следует ожидать большей чувствительности оценок к отклонениям от предположений.

С другой стороны, достаточно часто мешающая информация, связанная с засорением выборки, меньше влияет на оценки, чем потери информации от группирования при асимптотически оптимальном группировании. В некоторых случаях оценки с использованием асимптотически оптимального группирования оказываются так же устойчивы, как и при равновероятном, и при этом показывают лучшие результаты. Поэтому рекомендуется вычислять две оценки по группированным данным с использованием как оптимального, так и равновероятного группирования и остановиться на той оценке, которая дает лучшее согласие с исходной выборкой.

Существенное различие в оценках, вычисляемых по негруппированным и сгруппированным данным, может служить сигналом о том, что между имеющимися данными и нашими предположениями (знаниями о виде закона распределения) имеются некоторые разногласия: либо налицо засорение выборки, либо в измерения вкraлись ошибки, либо наши предположения о виде закона распределения (о модели) неверны. Робастность ОМП по группированным данным позволяет использовать эти оценки в процедуре параметрической отбраковки аномальных наблюдений (см. раздел 10.7).

### 1.6.3. Функции влияния и робастность оценок

В работах [223, 262, 272] и в предыдущих разделах подчеркивается высокая устойчивость ОМП по группированным наблюдениям к наличию в выборке аномальных измерений, к отклонению реально наблюдаемого закона от предполагаемого, к засорению выборки данными, принадлежащими другому закону. Все это подтверждается опытом эксплуатации программной системы [224] и многочисленными результатами модельных экспериментов. В данном разделе, основные результаты которого изложены в [252], свойство робастности ОМП исследуется с позиций *функции влияния*, предложенной Хэмпелом [55]. Именно анализ функций влияния ОМП параметров различных распределений, в том числе того множества распределений, которое включено в программную систему [224], позволяет утверждать, что ОМП по негруппированным данным, вопреки бытующему порой заблуждению, в большинстве своем являются неробастными. В то же время ОМП по группированным данным всегда оказываются робастными.

Влияние еще одного наблюдения на очень большую выборку может характеризоваться функцией (кривой) влияния, которая определяется следующим образом [337]:

$$IF(x; F, T) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T((1-s)F + s\delta_x) - T(F)}{s},$$

где  $\delta_x$  – единичная масса в точке  $x$ ;  $F$  – функция распределения, к которому принадлежит выборка;  $T(F)$  – вычисляемая статистика.

Функция влияния позволяет оценить относительное влияние отдельного наблюдения на значение статистики критерия или оценку параметров. Если функция влияния не ограничена, то резко выделяющиеся наблюдения могут приводить к существенным изменениям оценок или статистик. Чувствительность к большой ошибке может характеризоваться величиной

$$\gamma^* = \sup_x |IF(x; F, T)|.$$

Для асимптотически эффективных оценок, к которым относятся оценки максимального правдоподобия по негруппированным данным, функция влияния удовлетворяет равенству [337]

$$IF(x; F_\theta, T) = J^{-1}(F_\theta) \frac{\partial \ln f_\theta}{\partial \theta}, \quad (1.29)$$

где  $J(F_\theta)$  – количество информации Фишера.

Для оценок типа максимального правдоподобия ( $M$ -оценок), где всякая оценка  $T_n$  определяется как решение экстремальной задачи на минимум вида

$$\sum_{i=1}^n \rho(x_i; T_n) \rightarrow \min$$

или как решение неявного уравнения

$$\sum_{i=1}^n \psi(x_i; T_n) = 0,$$

где  $\rho$  – произвольная функция,  $\psi(x; \theta) = \partial \rho(x; \theta) / \partial \theta$ , функция влияния имеет вид [351]

$$IF(x; F, T) = -\frac{\psi(x; T)}{\lambda'_F(T(F))}, \quad -\infty < x < \infty,$$

где

$$\lambda'_F(T(F)) = \frac{d}{dt} \int \psi(x; t) dF(x), \quad -\infty < t < \infty.$$

В случае ОМП по группированным данным

$$\psi(x; \theta) = \frac{\partial \ln P_i(\theta)}{\partial \theta}, \quad x_{i-1} < x < x_i,$$

$$\lambda'_F(\theta) = \frac{d}{d\theta} \int \psi(x; \theta) dF(x) = \sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial^2 \ln P_j(\theta)}{\partial \theta^2} \right) P_j(\theta)$$

и функция влияния будет иметь вид

$$IF(x; F, \theta) = -\frac{\frac{\partial \ln P_i(\theta)}{\partial \theta}}{\sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial^2 \ln P_j(\theta)}{\partial \theta^2} \right) P_j(\theta)}, \quad x_{i-1} < x < x_i. \quad (1.30)$$

Для оценок, использующих квантили, соответствующие асимптотически оптимальному группированию [222], и являющихся одним из частных случаев  $L$ -оценок, функция влияния имеет вид [351]

$$IF(x; F, T) = \sum_{j=1}^{k-1} a_j \left( p_j - c(F^{-1}(p_j) - x) \right) / f(F^{-1}(p_j)), \quad (1.31)$$

где  $a_j$  – коэффициенты при выборочных квантилях в формуле для вы-

числения  $L$ -оценок;  $p_j = \sum_{l=1}^j P_l(\theta)$ ,  $c(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases}$

Были рассмотрены функции влияния для оценок параметров множества распределений, включенных в программную систему [224].

Приводимые ниже функции влияния построены при конкретных значениях параметров и характеризуют качественную картину их поведения на области определения случайных величин. На рис. 1.15, 1.16 представлены функции влияния для оценок параметров сдвига и масштаба нормального распределения, определяемых методом максимального правдоподобия по негруппированным и сгруппированным данным. Функция влияния для ОМП параметра сдвига по негруппированным данным имеет вид

$$IF(x; F_\theta, \theta_0) = x - \theta_0,$$

для ОМП параметра масштаба

$$IF(x; F_\theta, \theta_1) = \frac{1}{2} \left[ \frac{(x - \theta_0)^2}{\theta_1} - \theta_1 \right].$$

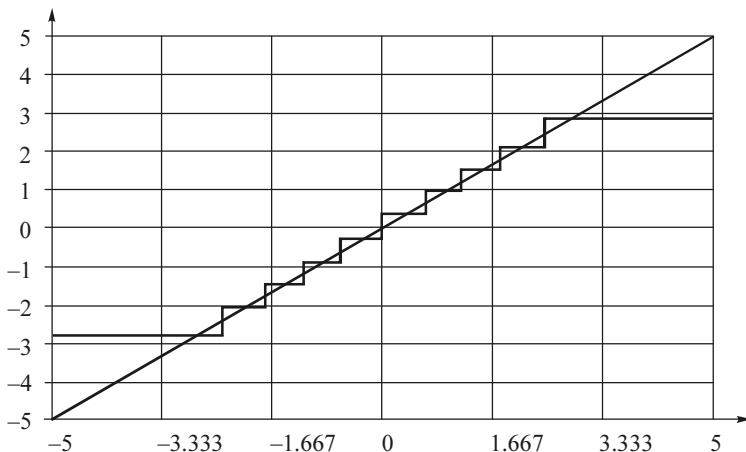


Рис. 1.15. Функции влияния для параметра сдвига нормального распределения по негруппированным (прямая) и сгруппированным данным (ступенчатая линия)

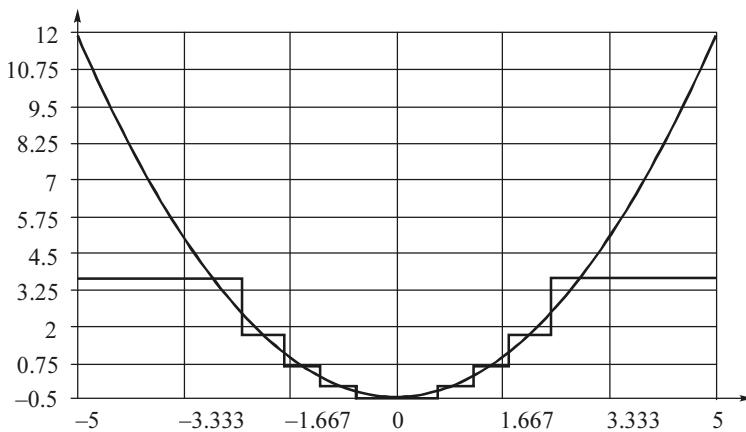


Рис. 1.16. Функции влияния для параметра масштаба нормального распределения по негруппированным и сгруппированным данным (ступенчатая линия)

Функции влияния не ограничены, и этим определяется чувствительность данных оценок к ошибкам измерения и засорению выборки. Напротив, функции влияния оценок параметров нормального распределения по группированным данным ограничены. Это еще раз

подчеркивает высокую устойчивость получаемых по группированным наблюдениям оценок, подтверждаемую практикой. На этих и последующих рисунках функции влияния для ОМП по группированным данным соответствуют случаю использования асимптотически оптимального группирования.

Аналогично на рис. 1.17, 1.18 приведены функции влияния для параметров распределения Вейбулла. Функция влияния для ОМП основного параметра по негруппированным данным имеет вид

$$IF(x; F_0, \theta_0) = \frac{\theta_0 [(1-t)\ln t + 1]}{1 + \pi / 6 + C^2 - 2C},$$

где  $C$  – постоянная Эйлера и  $t = \left( \frac{x - \theta_2}{\theta_1} \right)^{\theta_0}$ , для ОМП параметра масштаба

$$IF(x; F_0, \theta_1) = \frac{\theta_1}{\theta_0} (t - 1).$$

Для основного параметра функция влияния по негруппированным данным не ограничена снизу на левой и правой границе области определения случайной величины, для масштабного параметра – не ограничена сверху на правой границе. В то же время для группированных наблюдений функции влияния являются ступенчатыми ограниченными функциями.

Совершенно другую картину мы наблюдаем для ОМП по негруппированным наблюдениям для параметров распределения Коши (рис. 1.19, 1.20). Функция влияния для ОМП параметра сдвига по негруппированным данным имеет вид

$$IF(x; F_\theta, \theta_1) = \frac{4\theta_0 t}{1 + t^2},$$

где  $t = \frac{x - \theta_1}{\theta_0}$ .

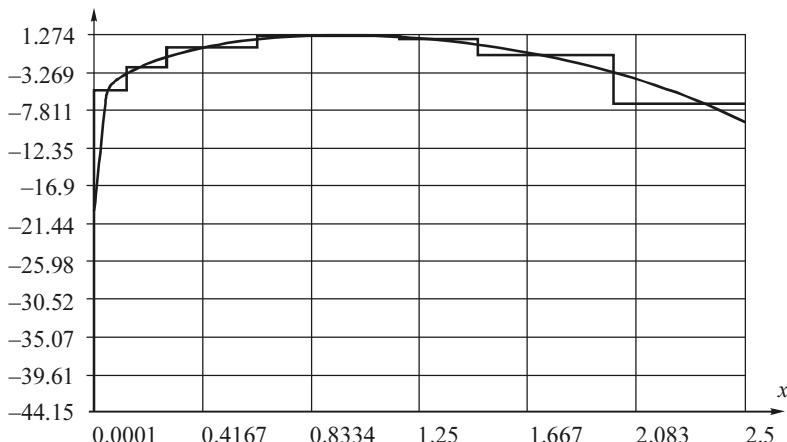


Рис. 1.17. Функции влияния для основного параметра распределения Вейбулла по негруппированным и сгруппированным данным (ступенчатая линия)

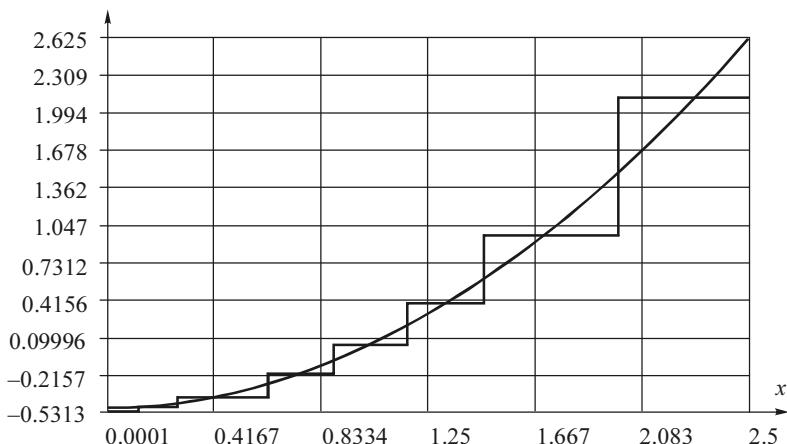


Рис. 1.18. Функции влияния для параметра масштаба распределения Вейбулла по негруппированным и сгруппированным данным

Для ОМП параметра масштаба

$$IF(x; F_\theta, \theta_0) = 2\theta_0 \left( 1 - \frac{2}{1+t^2} \right).$$

Их функции влияния ограничены на области определения случайной величины, что говорит о робастности этих оценок, их устойчивости к грубым ошибкам измерений.

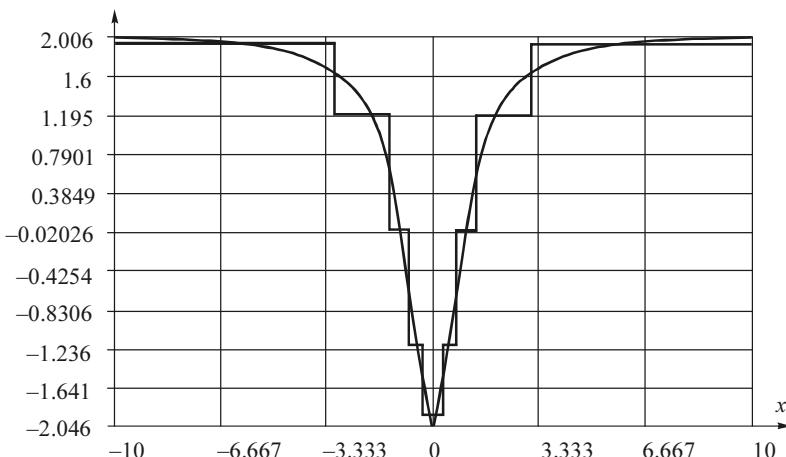


Рис. 1.19. Функции влияния для параметра масштаба распределения Коши по негруппированным (непрерывная) и сгруппированным данным (ступенчатая линия)

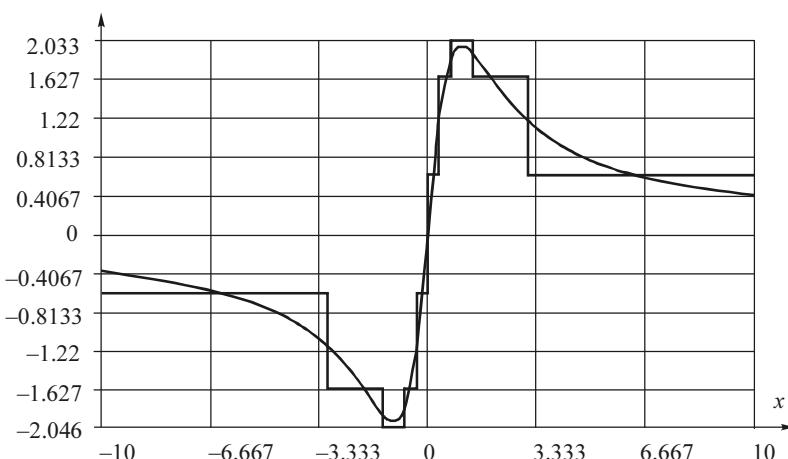


Рис. 1.20. Функции влияния для параметра сдвига распределения Коши по негруппированным и сгруппированным данным

Для логистического распределения функция влияния ОМП параметра масштаба по негруппированным данным имеет вид

$$IF(x; F_\theta, \theta_1) = \frac{9\theta_1}{\pi^2 + 3} \left( t - 1 - 2 \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} \right),$$

где  $t = \frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}}$  (рис. 1.21).

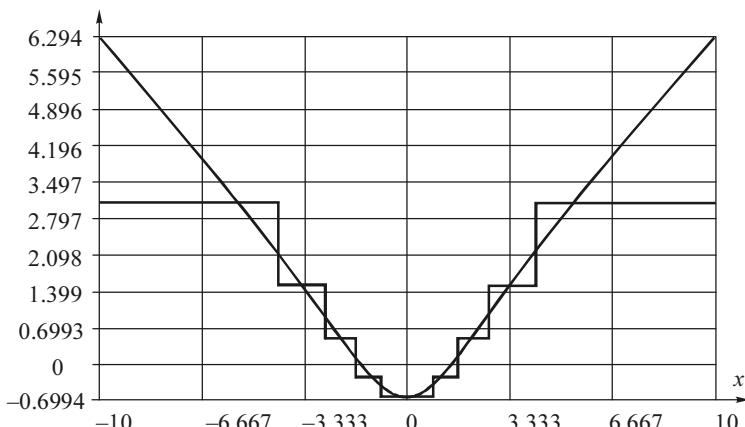


Рис. 1.21. Функции влияния для параметра масштаба логистического распределения по негруппированным и сгруппированным данным (ступенчатая линия)

Из ее неограниченности следует, что соответствующая оценка неробастна. В то же время функция влияния ОМП параметра сдвига

$$IF(x; F_\theta, \theta_0) = 3\theta_0 \left( 1 - 2 \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}} \right)$$

ограничена сверху и снизу (рис. 1.22), что свидетельствует о робастности ОМП этого параметра.

Ситуация, которую мы наблюдаем для функций влияния ОМП по негруппированным наблюдениям параметров распределений Коши и логистического (параметр сдвига), оказывается, скорее, исключением из правил. На момент исследования в программной системе [224] в

процессе анализа использовалось в совокупности 26 законов и семейств непрерывных распределений. Для ОМП параметров остальных законов распределения функции влияния оказались неограниченными, откуда следует *неробастность* этих оценок. В то же время *функции влияния для ОМП по группированным данным всегда представляют собой ограниченные ступенчатые зависимости*, что свидетельствует о *робастности* этих оценок.

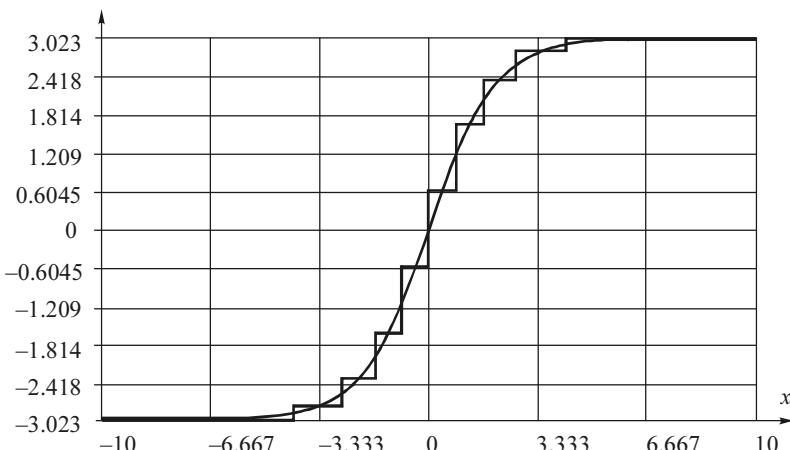


Рис. 1.22. Функции влияния для параметра сдвига логистического распределения по негруппированным и сгруппированным данным (ступенчатая линия)

Функции влияния  $L$ -оценок с использованием оптимальных порядковых статистик, как следует из вида соотношения (1.31), также представляют собой ступенчатые ограниченные зависимости, что говорит о *робастности* этих оценок. Это же подтверждают и проведенные эксперименты по моделированию выборок, их засорению, оцениванию параметров и анализу.

## 1.7. Выводы

Подводя итог всему сказанному, зафиксируем основные факты. На основании анализа функций влияния оценок по негруппированным и группированным выборкам показано, что за редким исключением ОМП по негруппированным наблюдениям являются *неробастными*.

Робастность ОМП параметров распределения Коши и ОМП параметра сдвига логистического закона, функции влияния которых ограничены, является, скорее, исключением из правил. Напротив, ОМП по группированным данным и оптимальные  $L$ -оценки параметров сдвига и масштаба по выборочным квантилям для больших выборок устойчивы как к аномальным ошибкам измерений, так и к отклонениям наблюдаемого закона от предполагаемого.

Предлагаемые вниманию исследователей оптимальные  $L$ -оценки параметров сдвига и масштаба по выборочным квантилям являются наилучшими в своем классе. Применение готовых таблиц вероятностей попадания в интервал, соответствующих асимптотически оптимальному группированию (приложение А), и формул (1.25)–(1.28), опирающихся на вычисленные таблицы коэффициентов (приложение С), делает процесс вычисления этих оценок очень простым. Не требуется специального программного обеспечения. Исключая процесс формирования вариационного ряда, который элементарно реализуется сортировкой выборки в любой электронной таблице, все вычисления ограничиваются десятком арифметических операций.

$L$ -оценки обладают одинаковыми асимптотическими свойствами с оценками по группированным наблюдениям: максимального правдоподобия; по методу минимума  $\chi^2$ ; модифицированному методу минимума  $\chi^2$ , получаемыми минимизацией расстояния Хеллингера или дивергенции Кульбака–Лейблера [303].  $L$ -оценки выгодно отличаются от перечисленных тем, что при их вычислении не требуется реализация итерационного процесса.

При условии, что соответствующая параметрическая модель хорошо описывает закон распределения наблюдаемой случайной величины, можно достаточно точно оценивать параметры закона даже при очень сильно цензурированных выборках. Идентифицировать параметрическую модель по малой выборке чрезвычайно сложно, так как можно указать (подобрать) множество моделей, одинаково хорошо описывающих выборочные данные с позиций различных критериев согласия. Особенности генеральной совокупности более четко проявляются с ростом объема выборки. Поэтому очевидно, что при больших объемах выборки можно достаточно точно находить оценки при большей степени цензурирования.

Цензурирование справа и слева для несимметричных законов может быть связано с различными потерями в количестве информации

Фишера. Чем больше потери, тем больше асимптотическая дисперсия вычисляемых оценок. Величина потерь адекватно отражается на точности оценивания параметров.

При сильном цензурировании мы оцениваем параметры закона по левому или правому «хвосту» эмпирической функции распределения. И в этом случае на оценках в большей степени могут оказываться имеющиеся в выборке случайные отклонения от предполагаемого закона. Особенно резко это будет проявляться при малых объемах выборок. Поэтому естественно, что предпочтительным является использование робастных оценок, в том числе ОМП по группированным наблюдениям,  $L$ -оценок и  $MD$ -оценок.

---

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ ТИПА $\chi^2$

---

### 2.1. Введение

Проверка статистических гипотез о согласии эмпирических данных с теоретическим законом распределения с применением критериев согласия типа  $\chi^2$  обусловлена рядом условий, которые обеспечивают корректное решение задачи. К сожалению, не в каждом источнике, который используется исследователем в качестве руководства, находят отражение эти условия. Поэтому, несмотря на кажущуюся простоту, практика использования критериев согласия типа  $\chi^2$  изобилует примерами его некорректного или неэффективного применения, особенно при проверке сложных гипотез.

Анализ примеров «неудачного» применения критериев типа  $\chi^2$  позволяет выделить две группы причин, которые могут приводить к неверным статистическим выводам. Во-первых, это часто совершаемые принципиальные ошибки, при которых использование  $\chi^2_{k-m-1}$ -распределения в качестве предельного оказывается неправомерным. Во-вторых, действия, использующие возможности критерия не наилучшим образом. В первом случае возрастает вероятность ошибки первого рода  $\alpha$  (отклонить верную проверяемую гипотезу), во втором – вероятность ошибки второго рода  $\beta$  (принять проверяемую гипотезу при справедливости конкурирующей).

Число моделей непрерывных законов распределений, используемых в задачах статистического анализа (при контроле качества, исследованиях надежности и т. д.), немногим превышает 100, а для описания наблюдаемых случайных величин в прикладных исследованиях в

основном применяют около 30 параметрических законов и семейств распределений.

Это не покрывает многообразия случайных величин, встречаемых на практике. Корректное применение критериев согласия часто приводит (и должно приводить) к отклонению гипотез о принадлежности выборки удобному и привычному закону распределения, например нормальному, так как законы реальных случайных величин, являющиеся следствием многочисленных причин, сложнее тех моделей, которые зачастую используют для их описания. Следовательно, и модели должны быть более сложными.

Целью первичной обработки экспериментальных наблюдений обычно является выбор закона распределения, наиболее хорошо описывающего случайную величину, выборку которой наблюдают. На сколько хорошо наблюдаемая выборка описывается теоретическим законом, проверяют с помощью различных критериев согласия. Цель проверки гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим – это стремление удостовериться в том, что данная модель теоретического закона не противоречит наблюдаемым данным и использование ее не приведет к существенным ошибкам при вероятностных расчетах. Некорректное использование критериев согласия может приводить к необоснованному принятию (чаще всего) или необоснованному отклонению проверяемой гипотезы.

Различают простые и сложные гипотезы о согласии. Простая проверяемая гипотеза имеет вид  $H_0: f(x, \theta) = f(x, \theta_0)$ , где  $f(\cdot)$  – функция плотности,  $\theta_0$  – известный скалярный или векторный параметр теоретического распределения, с которым проверяют согласие. Сложная гипотеза имеет вид  $H_0: f(x) \in \{f(x, \theta), \theta \in \Theta\}$ , где  $\Theta$  – пространство параметров. Если процесс вычисления оценки  $\hat{\theta}$  скалярного или векторного параметра закона не опирается на ту же выборку, по которой проверяют гипотезу о согласии, то алгоритм применения критерия согласия при проверке сложной гипотезы не отличается от проверки простой гипотезы. В противном случае применение критерия согласия при проверке сложной гипотезы имеет существенные отличия.

Схема процедуры проверки гипотезы следующая. В соответствии с применяемым критерием согласия вычисляют значение  $S^*$  статистики критерия  $S$  как некоторой функции от выборки и теоретического

закона распределения с плотностью  $f(x, \theta_0)$  [или  $f(x, \hat{\theta})$  при сложной гипотезе]. Для используемых на практике критериев асимптотические (предельные) распределения  $G(S|H_0)$  соответствующих статистик при условии истинности гипотезы  $H_0$  обычно известны. В общем случае для простых и сложных гипотез эти распределения различаются. Далее в принятой практике статистического анализа обычно полученное значение статистики  $S^*$  сравнивают с критическим значением  $S_\alpha$  при заданном уровне значимости  $\alpha$ . Нулевую гипотезу отвергают, если  $S^* > S_\alpha$  (рис. 2.1).

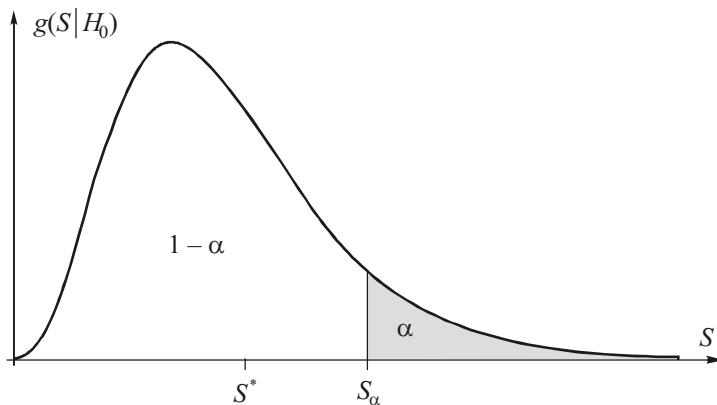


Рис. 2.1. Плотность распределения статистики при истинной гипотезе  $H_0$

Критическое значение  $S_\alpha$ , определяемое в случае одномерной статистики из уравнения

$$\alpha = \int_{S_\alpha}^{\infty} g(s|H_0)ds,$$

где  $g(s|H_0)$  – условная плотность распределения статистики, обычно берут из соответствующей статистической таблицы или вычисляют.

Больше информации о степени согласия можно почерпнуть из «достигаемого уровня значимости»: величины вероятности возможно-

го превышения полученного значения статистики при истинности нулевой гипотезы  $P\{S > S^*\} = \int_{S^*}^{\infty} g(s|H_0) ds$ . Именно эта вероятность позволяет судить о том, насколько хорошо выборка согласуется с теоретическим распределением, так как по существу представляет собой вероятность истинности нулевой гипотезы (рис. 2.2). Гипотезу о согласии не отвергают, если  $P\{S > S^*\} > \alpha$ .

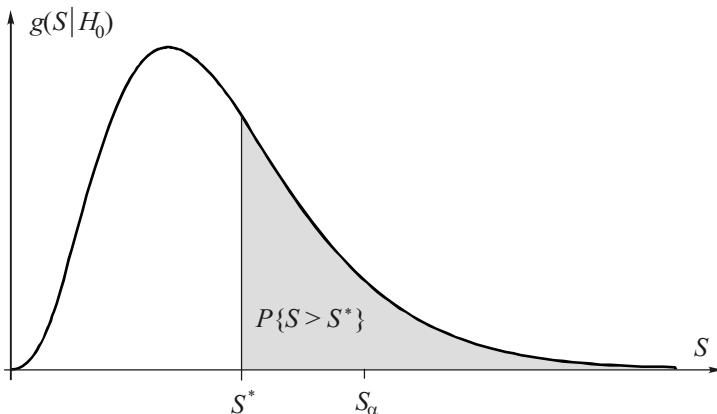


Рис. 2.2. Плотность распределения статистики при истинной гипотезе  $H_0$  и достигаемый уровень значимости

Задачи оценивания параметров и проверки гипотез опираются на выборки независимых случайных величин. Случайность самой выборки предопределяет, что возможны и ошибки в результатах статистических выводов. С результатами проверки гипотез связывают ошибки двух видов: ошибка первого рода состоит в том, что отклоняют гипотезу  $H_0$ , когда она верна; ошибка второго рода состоит в том, что принимают гипотезу  $H_0$ , в то время как справедлива конкурирующая гипотеза  $H_1$ . Величина  $\alpha$  задает вероятность ошибки первого рода. Обычно в критериях согласия не рассматривают конкретную конкурирующую гипотезу. Тогда можно считать, что конкурирующая гипотеза имеет вид  $H_1: f(x, \theta) \neq f(x, \theta_0)$ . Если же гипотеза  $H_1$  задана и имеет, например, вид  $H_1: f(x, \theta) = f_1(x, \theta_1)$ , то задание вели-

чины  $\alpha$  определяет для используемого критерия проверки гипотез и вероятность ошибки второго рода  $\beta$ . На рис. 2.3  $g(s|H_0)$  отображает плотность распределения статистики  $S$  при истинности гипотезы  $H_0$ , а  $g(s|H_1)$  – плотность распределения при справедливости  $H_1$ .

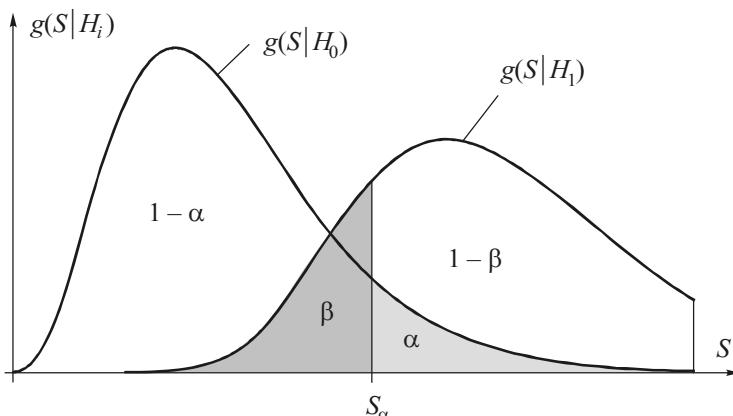


Рис. 2.3. Плотности распределения статистик при справедливости гипотез  $H_0$  и  $H_1$

Мощность критерия представляет собой величину  $1 - \beta$ . Очевидно, что чем выше мощность используемого критерия при заданном значении  $\alpha$ , тем лучше он различает гипотезы  $H_0$  и  $H_1$ . Особенno важно, чтобы этот критерий хорошо различал близкие конкурирующие гипотезы. Графически требование максимальной мощности критерия означает, что на рис. 2.3 плотности  $g(s|H_0)$  и  $g(s|H_1)$  должны быть максимально «раздвинуты».

## 2.2. Критерии типа $\chi^2$ при простых гипотезах

Предположим, что  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  – выборка значений наблюдаемой случайной величины объема  $n$ . Процедура проверки гипотез с использованием критериев типа  $\chi^2$  предусматривает группирование

наблюдений. Область определения случайной величины разбивают на  $k$  непересекающихся интервалов граничными точками

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k,$$

где  $x_0$  – нижняя грань области определения случайной величины;  $x_k$  – верхняя грань. В соответствии с заданным разбиением подсчитывают число  $n_i$  выборочных значений, попавших в  $i$ -й интервал, и вероятно-

сти попадания в интервал  $P_i(\theta) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \theta) dx$ , соответствующие тео-

ретическому закону с функцией плотности  $f(x, \theta)$ . При проверке про-  
стой гипотезы известны как вид функции плотности, так и все  
параметры закона (известен скалярный или векторный параметр  $\theta$ ).

При этом  $n = \sum_{i=1}^k n_i$ ,  $\sum_{i=1}^k P_i(\theta) = 1$ . В основе статистик, используемых в

критериях согласия типа  $\chi^2$ , лежит измерение отклонений  $n_i / n$  от  $P_i(\theta)$ .

К критериям такого рода, в частности, относят критерий  $\chi^2$  Пир-  
сона, критерий отношения правдоподобия [205] и критерии типа  $\chi^2$   
[287, 288, 284, 1].

Статистику критерия согласия  $\chi^2$  Пирсона вычисляют по формуле

$$X_n^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(n_i / n - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}. \quad (2.1)$$

В случае проверки простой гипотезы в пределе при  $n \rightarrow \infty$  эта стати-  
стика подчиняется  $\chi_r^2$ -распределению с  $r = k - 1$  степенями свободы,  
если верна нулевая гипотеза. Плотность  $\chi_r^2$ -распределения описывает-  
ся формулой

$$g(s) = \frac{1}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} s^{r/2-1} e^{-s/2}. \quad (2.2)$$

Если верна конкурирующая гипотеза  $H_1$  и выборка соответствует распределению с плотностью  $f_1(x, \theta_1)$  с параметром  $\theta_1$ , то эта же статистика в пределе подчиняется нецентральному  $\chi_r^2$ -распределению с тем же числом степеней свободы  $r = k - 1$  и параметром нецентральности

$$v = n \sum_{i=1}^k \frac{(P_i^1(\theta_1) - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}, \quad (2.3)$$

где  $P_i^1(\theta_1)$  – вероятность попадания в интервал при справедливой гипотезе  $H_1$ . Плотность нецентрального  $\chi_r^2$ -распределения имеет вид [205]

$$g(s, v) = \frac{e^{-(s+v)/2} s^{(r-2)/2}}{2^{r/2} \Gamma[(r-1)/2] \Gamma(1/2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^k s^k}{(2k)!} B\left\{\frac{1}{2}(r-1), \frac{1}{2} + k\right\}, \quad (2.4)$$

где  $B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) / \Gamma(\alpha + \beta)$  – бета-функция.

При заданном уровне значимости  $\alpha$  нулевая гипотеза о согласии не должна быть отвергнута, если

$$P\left\{X_n^2 > X_n^{2*}\right\} = \frac{1}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} \int_{X_n^{2*}}^{\infty} s^{r/2-1} e^{-s/2} ds > \alpha, \quad (2.5)$$

где  $X_n^{2*}$  – вычисленное в соответствии с формулой (2.1) значение статистики.

В критерии отношения правдоподобия использована статистика [205]

$$S_{\text{ОП}} = -2 \ln l = -2 \sum_{i=1}^k n_i \ln \left( \frac{P_i(\theta)}{n_i/n} \right), \quad (2.6)$$

которая при верной нулевой гипотезе также асимптотически распределена как  $\chi_r^2$  с  $r = k - 1$  степенями свободы. Если верна конкурирующая гипотеза  $H_1$  и выборка соответствует распределению

с плотностью  $f_1(x, \theta_1)$  и параметром  $\theta_1$ , мерой близости сравниваемых законов является величина

$$v = 2n \sum_{i=1}^k P_i^1(\theta_1) \ln \left( \frac{P_i^1(\theta_1)}{P_i(0)} \right). \quad (2.7)$$

### 2.3. Критерий типа $\chi^2$ при сложных гипотезах

При справедливости  $H_0$  в случае проверки сложной гипотезы и при условии, что оценки параметров находятся в результате минимизации статистики  $X_n^2$  по этой же самой выборке, статистика  $X_n^2$  асимптотически распределена как  $\chi_r^2$  с числом степеней свободы  $r = k - m - 1$ , где  $m$  – число оцененных параметров. Статистика  $X_n^2$  имеет это же распределение, если в качестве метода оценивания выбирают метод максимального правдоподобия и оценки вычисляют по сгруппированным данным в результате максимизации по  $\theta$  функции правдоподобия

$$L(\theta) = \gamma \prod_{i=1}^k P_i^{n_i}(\theta), \quad (2.8)$$

где  $\gamma$  – некоторая константа и  $P(\theta) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \theta) dx$  – вероятность падания наблюдения в  $i$ -й интервал значений, зависящая от  $\theta$ .

При вычислении оценок максимального правдоподобия (ОМП) по негруппированным данным эта же статистика распределена как сумма независимых слагаемых  $\chi_{k-m-1}^2 + \sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_j^2$ , где  $\xi_1, \dots, \xi_m$  – стандартные нормальные случайные величины, независимые одна от другой и от

$\chi_{k-m-1}^2$ , а  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  – некоторые числа между 0 и 1 [287, 19, 341], представляющие собой корни уравнения

$$|(1-\lambda)\mathbf{J}(\theta) - \mathbf{J}_\Gamma(\theta)| = 0.$$

В данном уравнении  $\mathbf{J}(\theta)$  – информационная матрица Фишера по негруппированным наблюдениям с элементами, определяемыми соотношением

$$J(\theta_l, \theta_j) = \int \left( \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_l} \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_j} \right) f(x, \theta) dx, \quad (2.9)$$

а  $\mathbf{J}_\Gamma(\theta)$  – информационная матрица по группированным наблюдениям

$$\mathbf{J}_\Gamma(\theta) = \sum_{i=1}^k \frac{\nabla P_i(\theta) \nabla^T P_i(\theta)}{P_i(\theta)}. \quad (2.10)$$

Функция распределения статистики лежит между  $\chi_{k-1}^2$ - и  $\chi_{k-m-1}^2$ -распределениями. В этом случае, принимая нулевую гипотезу, следует удостовериться, что статистика  $X_n^2$  не превышает критических значений  $\chi_{k-m-1, \alpha}^2$  и  $\chi_{k-1, \alpha}^2$ , где  $\alpha$  – задаваемый уровень значимости. И если  $\chi_{k-m-1, \alpha}^2 < X_n^2 < \chi_{k-1, \alpha}^2$ , то, принимая или отклоняя гипотезу о согласии, можно с одинаковым риском совершить ошибку.

Все сказанное относится и к критерию отношения правдоподобия.

Влияние способа группирования на распределения этих статистик при использовании оценок максимального правдоподобия по негруппированным данным рассмотрено в разделе 2.7.

## 2.4. Статистика типа $\chi^2$ Никулина

В работах [287, 288, 284, 1] предложено видоизменение стандартной статистики  $X_n^2$ , при котором предельное распределение есть обычное  $\chi_{k-1}^2$ -распределение (число степеней свободы не зависит от числа оцениваемых параметров). Неизвестные параметры распределе-

ния  $F(x, \theta)$  в этом случае следует оценивать по негруппированным данным методом максимального правдоподобия. При этом вектор  $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_k)^T$  предполагают заданным и граничные точки интервалов определяют по соотношениям  $x_i(\theta) = F^{-1}(P_1 + \dots + P_i)$ ,  $i = \overline{1, (k-1)}$ . Предложенная статистика имеет вид [291]

$$Y_n^2(\theta) = X_n^2 + n^{-1} \mathbf{a}^T(\theta) \mathbf{\Lambda}(\theta) \mathbf{a}(\theta), \quad (2.11)$$

где  $X_n^2$  вычислена по формуле (2.1); матрица

$$\mathbf{\Lambda}(\theta) = \left\| J(\theta_l, \theta_j) - \sum_{i=1}^k \frac{w_{\theta_l i} w_{\theta_j i}}{p_i} \right\|^{-1},$$

элементы и размерность которой определяются оцениваемыми компонентами вектора параметров  $\theta$ ;  $J(\theta_l, \theta_j)$  – элементы информационной матрицы  $\mathbf{J}(\theta)$  по негруппированным данным (2.9);  $a_{\theta_l} = w_{\theta_l 1} n_1 / P_1 + \dots + w_{\theta_l k} n_k / P_k$  – элементы вектора  $\mathbf{a}(\theta)$ , и

$$w_{\theta_l i} = -f[x_i(\theta), \theta] \frac{\partial x_i(\theta)}{\partial \theta_l} + f[x_{i-1}(\theta), \theta] \frac{\partial x_{i-1}(\theta)}{\partial \theta_l}. \quad (2.12)$$

Для распределений, которые полностью определяются только параметрами сдвига и масштаба, справедливо соотношение

$$\left\| \sum_{i=1}^k \frac{w_{\theta_l i} w_{\theta_j i}}{P_i} \right\| = \sum_{i=1}^k \frac{\nabla P_i(\theta) \nabla^T P_i(\theta)}{P_i(\theta)} = \mathbf{J}_\Gamma(\theta) \quad (2.13)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{\Lambda}(\theta) = [\mathbf{J}(\theta) - \mathbf{J}_\Gamma(\theta)]^{-1}. \quad (2.14)$$

Действительно, для законов с параметром сдвига  $\theta_1$  и масштаба  $\theta_2$  с функцией распределения  $F((x - \theta_1)/\theta_2)$  и плотностью

$\frac{1}{\theta_2} f((x - \theta_1)/\theta_2)$  элементы информационной матрицы  $\mathbf{J}_\Gamma(\theta)$  имеют вид

$$J_\Gamma(\theta_1, \theta_1) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\theta_2^2 P_i(\theta)} (-f(t_i) + f(t_{i-1}))^2,$$

$$J_\Gamma(\theta_2, \theta_2) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\theta_2^2 P_i(\theta)} (-t_i f(t_i) + t_{i-1} f(t_{i-1}))^2,$$

$$J_\Gamma(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\theta_2^2 P_i(\theta)} (-f(t_i) + f(t_{i-1}))(-t_i f(t_i) + t_{i-1} f(t_{i-1})),$$

где  $t_i = (x_i - \theta_1) / \theta_2$ . Тогда

$$w_{\theta_1 i} = \frac{1}{\theta_2} (-f(t_i) + f(t_{i-1})),$$

$$w_{\theta_2 i} = \frac{1}{\theta_2} (-t_i f(t_i) + t_{i-1} f(t_{i-1})).$$

Если проверяемая гипотеза  $H_0$  о принадлежности наблюдаемого закона параметрическому семейству  $f(x, \theta)$  неверна и на самом деле справедлива конкурирующая гипотеза  $H_1$ , которой соответствует распределение с плотностью  $f_1(x, \theta) = f(x, \theta) + \delta(x, \theta) / \sqrt{n}$ , статистика  $Y_n^2(\theta)$  в пределе подчиняется нецентральному  $\chi_{k-1}^2$ -распределению с параметром нецентральности [288]

$$v(\theta) = \sum_{i=1}^k \frac{c_i^2(\theta)}{P_i(\theta)} + d^T(\theta) \Lambda(\theta) d(\theta), \quad (2.15)$$

где  $c_i(\theta) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \delta(x, \theta) dx$ ,  $d_{\theta_l} = w_{\theta_1 l} c_1(\theta) / P_1 + \dots + w_{\theta_l k} c_k(\theta) / P_k$  – элементы вектора  $d(\theta)$ , соответствующие оцениваемым компонентам

вектора  $\theta$ , а размерность вектора равна числу оцениваемых параметров.

Другим примером модифицированного критерия типа  $\chi^2$  является критерий **Никулина–Джапаридзе** [192, 37]. Статистика критерия Никулина–Джапаридзе отличается от статистики критерия Пирсона также только при проверке сложных гипотез и имеет вид [37]

$$U^2(\theta) = X_n^2 - nL^T(\theta)\mathbf{J}^{-1}(\theta)L(\theta),$$

$$L(\theta) = (l_1(\theta), \dots, l_s(\theta)),$$

$$l_j(\theta) = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{nP_i(\theta)} \frac{\partial P_i(\theta)}{\partial \theta_j},$$

где  $m$  – число параметров закона, оцениваемых методом максимального правдоподобия по негруппированным данным;  $\mathbf{J}(\theta)$  – информационная матрица Фишера. При справедливости  $H_0$  статистика Никулина–Джапаридзе подчиняется  $\chi^2$ -распределению с числом степеней свободы  $k - m - 1$ .

Определенная трудность в широком применении модифицированных критериев согласия типа  $\chi^2$  заключается в отсутствии специализированного программного обеспечения.

О применении критериев Никулина (Никулина–Рао–Робсона [142]) и Никулина–Джапаридзе в приложениях упоминаний в публикациях практически не содержится. Дело в том, что их применение требует определенной подготовки и наличия программного обеспечения. В отсутствие последнего в приложениях идут по легкому пути, используя не совсем корректно более известные, но менее эффективные критерии.

## 2.5. Связь мощности критериев со способом группирования наблюдений

Очевидно, что группирование наблюдений приводит к потере информации и эти потери зависят от выбора способа группирования данных. Следуя рекомендациям различных литературных источников,

на практике обычно строят интервалы равной длины или в лучшем случае интервалы равной вероятности. Потери информации о законе распределения в этих ситуациях различны, различна и способность критериев распознавать близкие гипотезы.

Мерой внутренней близости распределений случайных величин служит фишеровская информация, что связано с мощностью различия между близкими значениями параметра. Так как в любой статистике не больше информации, чем в исходной выборке, то мощность различия с помощью статистики не больше, чем с помощью всей выборки. Следовательно, если нужно выбирать между несколькими статистиками, надо предпочесть ту, для которой потери фишеровской информации минимальны [303].

Предположим, что конкурирующей гипотезе  $H_1$  соответствует распределение того же типа, что и  $H_0$ , но с параметром  $\theta_1$ . Можно показать, разлагая  $P_i(\theta_1)$  в соотношении (2.3) в ряд Тейлора при малых  $\delta\theta = \theta_1 - \theta$  и пренебрегая членами высшего порядка, что

$$\begin{aligned} v &\approx n \sum_{i=1}^k \frac{\left[ P_i(\theta) + \nabla^T P_i(\theta) \delta\theta - P_i(\theta) \right]^2}{P_i(\theta)} = n \sum_{i=1}^k \frac{\delta\theta^T \nabla P_i(\theta) \nabla^T P_i(\theta) \delta\theta}{P_i(\theta)} = \\ &= n \delta\theta^T \left( \sum_{i=1}^k \frac{\nabla P_i(\theta) \nabla^T P_i(\theta)}{P_i(\theta)} \right) \delta\theta = n \delta\theta^T \mathbf{J}_\Gamma(\theta) \delta\theta, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$\mathbf{J}_\Gamma(\theta) = \sum_{i=1}^k \frac{\nabla P_i(\theta) \nabla^T P_i(\theta)}{P_i(\theta)}$$

– информационная матрица Фишера по группированным данным. Мощность критерия  $\chi^2$  Пирсона представляет собой неубывающую функцию от  $v$ . Матрица потерь информации, вызванных группированием,  $\Delta \mathbf{J} = \mathbf{J}(\theta) - \mathbf{J}_\Gamma(\theta)$ , где  $\mathbf{J}(\theta)$  – информационная матрица Фишера по негруппированным наблюдениям, является неотрицательно определенной, и, следовательно,  $\delta\theta^T \Delta \mathbf{J} \delta\theta \geq 0$ . Так как

$\delta\theta^T \mathbf{J}_\Gamma(\theta) \delta\theta = \delta\theta^T \mathbf{J}(\theta) \delta\theta - \delta\theta^T \Delta \mathbf{J} \delta\theta$ , то очевидно, что с ростом потерь информации падает и мощность критерия при близких конкурирующих гипотезах.

Аналогично с ростом правой части соотношения (2.7) увеличивается мощность критерия отношения правдоподобия. Действуя, как и в предыдущем случае, и пренебрегая членами высшего порядка, можно будет иметь

$$v \approx 2n \sum_{i=1}^k \left( P_i(\theta) + \nabla^T P_i(\theta) \delta\theta \right) \ln \left( 1 - \frac{\nabla^T P_i(\theta) \delta\theta}{P_i(\theta)} \right).$$

Далее, раскладывая  $\ln(1+x)$  по формуле Тейлора и вновь пренебрегая членами выше второго порядка, можно получить

$$\begin{aligned} v &\approx 2n \sum_{i=1}^k \left( P_i(\theta) + \delta\theta^T \nabla P_i(\theta) \right) \left[ \frac{\nabla^T P_i(\theta) \delta\theta}{P_i(\theta)} - \frac{\delta\theta^T \nabla P_i(\theta) \nabla^T P_i(\theta) \delta\theta}{2P_i^2(\theta)} \right] \approx \\ &\approx 2n \sum_{i=1}^k \left( \delta\theta^T \nabla P_i(\theta) + \frac{\delta\theta^T \nabla P_i(\theta) \nabla^T P_i(\theta) \delta\theta}{2P_i(\theta)} \right) = \\ &= n \delta\theta^T \left[ \sum_{i=1}^k \frac{\nabla P_i(\theta) \nabla^T P_i(\theta)}{P_i(\theta)} \right] \delta\theta = N \delta\theta^T \mathbf{J}_\Gamma(\theta) \delta\theta. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Это соотношение аналогично соотношению (2.16).

Выражение (2.14) показывает, что свойства критерия, задаваемого статистикой (2.11), также зависят от потерь информации при группировании.

## 2.6. Асимптотически оптимальное группирование

На основании соотношений (2.16), (2.17) можно утверждать, что чем меньше потери информации, связанные с группированием наблюдений, тем выше мощность соответствующих критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах.

Потери от группирования можно уменьшить, решая задачу асимптотически оптимального группирования и подбирая граничные точки так, чтобы  $\mathbf{J}_\Gamma(\theta)$  стремилась к информационной матрице по негруппированным данным  $\mathbf{J}(\theta)$ . В случае скалярного параметра эта задача сводится к максимизации количества информации Фишера о параметре по группированной выборке

$$\max_{x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k} \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial \ln P_i(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 P_i(\theta), \quad (2.18)$$

а в случае вектора параметров за критерии оптимальности могут быть приняты различные функционалы от информационной матрицы Фишера. Наиболее естественно максимизировать определитель информационной матрицы, т. е. решать задачу

$$\max_{x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k} \det \mathbf{J}_\Gamma(\theta). \quad (2.19)$$

Применяя на практике критерии типа  $\chi^2$ , наиболее часто используют интервалы равной длины или в лучшем случае интервалы равной вероятности. Выбор равновероятного группирования обоснован определенностью этой процедуры разбиения и ее оптимальностью при отсутствии конкретных альтернатив [207]. Однако при использовании и равновероятного, и равномерного группирования мощность критериев  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия обычно далека от максимально возможной.

В общем случае информационная матрица Фишера зависит не только от граничных точек  $x_i$ , но и от параметров исследуемого распределения. Однако для достаточно широкого ряда распределений при решении задач асимптотически оптимального группирования граничные точки интервалов удается получить в виде, инвариантном относительно параметров распределений, и на их основе формировать таблицы асимптотически оптимального группирования.

Применение асимптотически оптимального группирования в критериях согласия типа  $\chi^2$  впервые было предложено в работе [188].

Совокупность таблиц асимптотически оптимального группирования, построенная в [183, 220, 219, 242, 217, 191] в результате решения задач (2.18) и (2.19) для распределений экспоненциального, полунармально-го, Рэлея, Максвелла, модуля многомерного нормального вектора, Па-рето, Эрланга, Лапласа, нормального, логарифмически-нормальных ( $\ln$  и  $\lg$ ), Коши, Вейбулла, распределений минимального и максимального значения, двойного показательного, гамма-распределения, представле-на в приложении А. Таблицы приложения А.1–А.58 могут быть ис-пользованы как при проверке гипотез, так и при оценивании. Получен-ные таблицы используют в программной системе [224] при проверке согласия по критериям  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия и при вычислении робастных оценок.

Для многих законов распределений граничные точки интервалов не могут быть выражены в виде, инвариантном относительно параметров распределений, т. е. они остаются функциями этих параметров. Это касается, например, таких законов, как гамма- и бета-распределения [183, 217], экспоненциального семейства распределений. В этом случае формирование таблиц асимптотически оптимального группирования теряет смысл. Однако можно решать задачу асимптотически опти-мального группирования при конкретных значениях параметров в про-цессе проверки гипотез о согласии, как это реализуется в таких ситуа-циях в программной системе [224].

Положительный эффект применения асимптотически оптимально-го группирования на результатах статистического анализа проявляется при малых отклонениях выборки от предположений.

При проверке простых гипотез и использовании асимптотически оптимального группирования критерии  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия оказываются мощнее непараметрических критериев Колмогорова, Смирнова,  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова и  $\Omega^2$  Андер-сона–Дарлинга против близких конкурирующих гипотез, лучше улав-ливают малые отклонения от предположений в наблюдаемых данных [215, 216, 74].

## 2.7. Характер влияния способов группирования и метода оценивания на распределения статистик типа $\chi^2$

Вычисленные по конкретной выборке значения статистик типа  $\chi^2$  очень сильно зависят от того, как сгруппированы данные. При выборе интервалов группирования одним способом нулевая гипотеза  $H_0$  о согласии может быть отвергнута, другим – принята. При практическом использовании критериев согласия выбирают либо интервалы равной длины, либо интервалы равной вероятности (равной частоты), либо асимптотически оптимальные интервалы [188, 191, 224, 215, 216, 74, 191]. Использование интервалов равной вероятности было предложено еще в работе [104]. Разбиение области определения случайной величины (размаха выборки) на интервалы равной длины неоднозначно. Более определенными способами являются равновероятное и асимптотически оптимальное группирования. При асимптотически оптимальном группировании мощность этих критериев относительно близких конкурирующих гипотез максимальна [188, 215, 216, 74, 190].

Для статистики  $X_n^2$  Пирсона, вычисляемой в соответствии с формулой (2.1), при справедливой простой гипотезе  $H_0$  предельное распределение  $G(X_n^2 | H_0)$  есть  $\chi^2$ -распределение с числом степеней свободы  $k - 1$ . При сложной гипотезе, если по выборке оценивали  $m$  параметров закона, статистика подчиняется  $\chi_r^2$ -распределению с  $k - m - 1$  степенями свободы. При справедливой альтернативной гипотезе  $H_1$  предельное распределение  $G(X_n^2 | H_1)$  представляет собой нецентральное  $\chi^2$ -распределение с тем же числом степеней свободы и параметром нецентральности, определяемым соотношением (2.3).

В случае проверки сложных гипотез и оценивания по выборке параметров распределений использование в качестве предельных  $\chi_{k-m-1}^2$ -распределений справедливо лишь при определении оценок параметров по сгруппированным данным [205].

Все сказанное относится и к критерию отношения правдоподобия, статистика которого определяется формулой (2.6).

Выбор способа группирования, в том числе равновероятного или асимптотически оптимального, отражается на предельных распределениях статистик критериев  $G(S|H_1)$  (при верной конкурирующей гипотезе). При использовании асимптотически оптимального группирования распределения  $G(S|H_0)$  и  $G(S|H_1)$  в случае близких альтернатив максимально «раздвинуты» относительно друг друга [215, 216, 74, 190]. Это справедливо как при проверке простых, так и при проверке сложных гипотез.

В случае проверки простых гипотез распределения  $G(S|H_0)$  статистик критериев  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия при любом разумном способе группирования [равновероятном (РВГ), асимптотически оптимальном (АОГ), равной длины] хорошо согласуются с соответствующим  $\chi^2_{k-1}$ -распределением [260, 255, 97].

При проверке сложных гипотез предельные распределения статистик критериев  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия могут зависеть не только от числа оцененных параметров, но и от способа группирования, вида наблюдаемого закона распределения  $f(x, \theta)$ , метода оценивания и типа оцениваемого параметра.

В частности, при проверке сложных гипотез и использовании ОМП по негруппированным наблюдениям распределения  $G(S|H_0)$  статистик данных критериев существенно зависят от способа группирования.

В работах [260, 255, 97] методами статистического моделирования были проведены исследования законов распределения статистик типа  $\chi^2$  при простых и различных сложных гипотезах, при справедливости гипотезы  $H_0$  и справедливости конкурирующей гипотезы  $H_1$ , при равновероятном и асимптотически оптимальном группировании.

Например, на рис. 2.4–2.7 сопоставлены полученные в результате моделирования эмпирические распределения статистик (при вычислении ОМП по негруппированным наблюдениям) с соответствующими  $\chi^2_{k-m-1}$ -распределениями. Цифрой 1 на указанных рисунках отмечено распределение статистики при асимптотически оптимальном группировании, цифрой 2 – при равновероятном группировании.

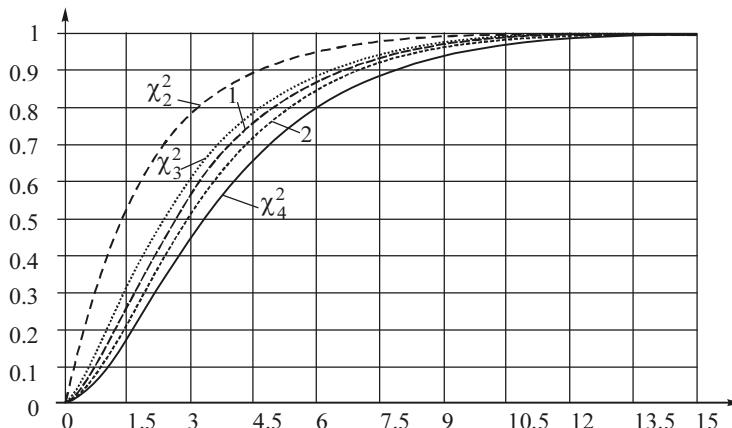


Рис. 2.4. Распределение статистики  $X_n^2$  при пяти интервалах группирования и оценивании масштабного параметра нормального распределения

На рис. 2.4–2.6 в качестве примера представлены распределения статистики  $X_n^2$  при справедливой гипотезе  $H_0$  для пяти интервалов группирования и оценивании по негруппированным данным параметров нормального распределения.

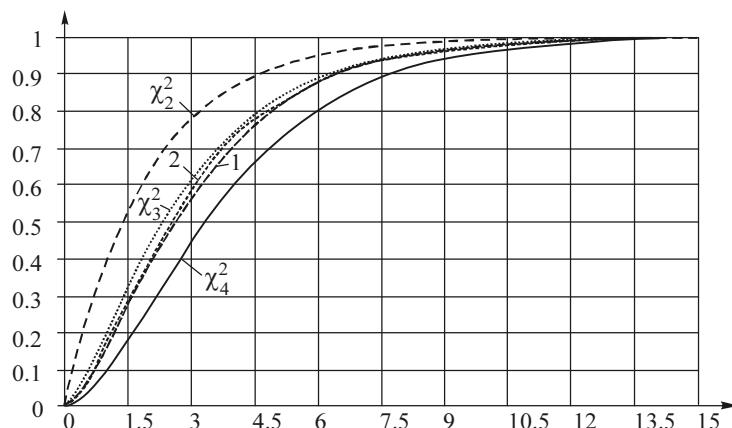


Рис. 2.5. Распределение статистики  $X_n^2$  при пяти интервалах группирования и оценивании параметра сдвига нормального распределения

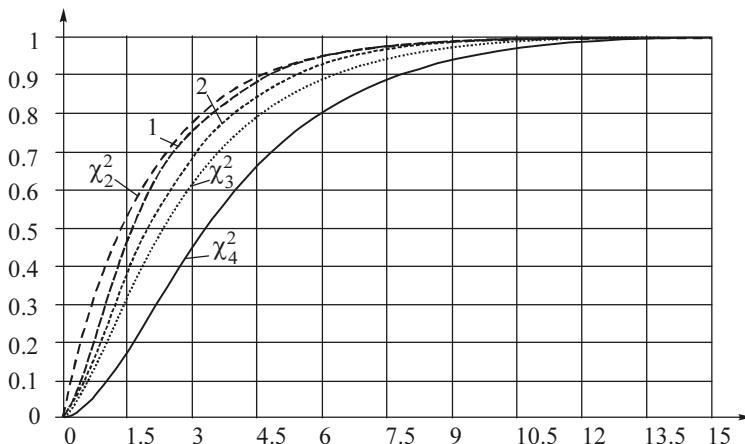


Рис. 2.6. Распределение статистики  $X_n^2$  при пяти интервалах группирования и оценивании двух параметров нормального распределения

Для сравнения на рис. 2.7 показаны распределения статистики  $S_{\text{ОП}}$  при пяти интервалах группирования и оценивании обоих параметров нормального распределения при асимптотически оптимальном и равновероятном группировании.

Результаты моделирования и анализа показали [260, 255, 97], что распределения статистик критериев  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия при проверке сложных гипотез и вычислении оценок по негруппированным данным существенно отличаются при различных способах группирования. Эмпирический закон распределения статистики при асимптотически оптимальном группировании ближе к  $\chi^2_{k-m-1}$ -распределению, чем при равновероятном группировании. Более того, распределения статистик зависят не только от числа оцененных по выборке параметров, но и от того, какой параметр оценивали. Например, оценивание параметра сдвига приводит к более значительному изменению распределения статистики, чем оценивание масштабного параметра. Распределения статистик зависят и от вида наблюдаемого закона. Но эта зависимость не проявляется так резко, как в случае применения для проверки сложных гипотез непараметрических критериев, например типа Колмогорова.

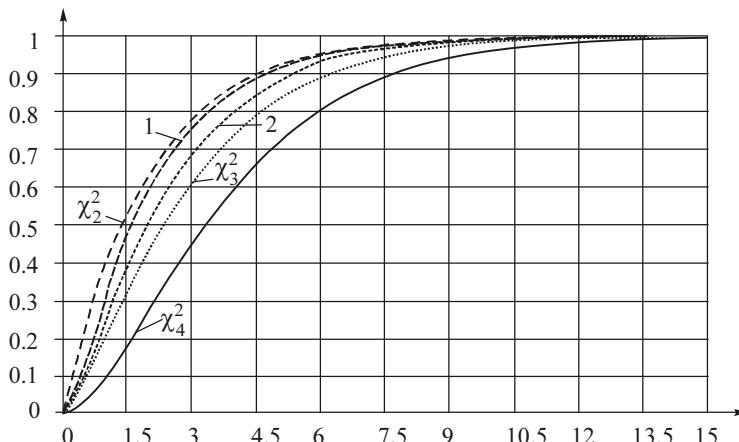


Рис. 2.7. Распределение статистики  $S_{\text{OP}}$  при пяти интервалах группирования и оценивании двух параметров нормального распределения

Эмпирические распределения статистики отношения правдоподобия оказываются ближе к  $\chi^2_{k-m-1}$ -распределению, чем соответствующие эмпирические распределения статистики  $\chi^2$  Пирсона.

$\chi_r^2$ -распределение с числом степеней свободы  $r$  является частным случаем гамма-распределения с основным параметром (формы), равным  $r/2$ , и с масштабным – 2. Оценивание одного из параметров учитывается уменьшением числа степеней свободы на 1. Так, если измерять изменение предельного закона «в степенях свободы», то оценивание по негруппированным наблюдениям даже параметра сдвига обычно приводит к изменению «числа степеней» на значение, меньшее 1, еще к меньшему изменению в степенях свободы приводит оценивание масштабного параметра. При оценивании по негруппированным наблюдениям двух параметров закона различие между  $\chi_r^2$ -распределением и действительным распределением статистики еще более значимо. Таким образом, при вычислении оценок параметров по негруппированным наблюдениям использование в критериях согласия  $\chi^2_{k-m-1}$ -распределения чревато занижением вероятности вида  $P\{S > S^*\}$  и определенным риском отвергнуть верную гипотезу  $H_0$ .

Занижение  $P\{S > S^*\}$  более существенно при малом числе интервалов группирования. В целом этот риск существенно меньше в случае применения асимптотически оптимального группирования.

Полученные в результате моделирования эмпирические законы распределения статистик рассматриваемых критериев практически всегда с достаточно высокой точностью описываются гамма-распределением.

Использование в критериях согласия  $\chi^2$ -распределения для вычисления вероятности вида  $P\{S > S^*\}$  связано с риском отвергнуть верную гипотезу  $H_0$ . В случае применения асимптотически оптимального группирования этот риск существенно меньше. В качестве примера в табл. 2.1 приведены значения вероятностей  $P\{S > S^*\}$  для различных значений статистики  $S^*$ , вычисленные по  $\chi^2_4$ -распределению и в соответствии с «действительными» распределениями статистик при семи интервалах группирования и оценивании двух параметров нормального распределения. Эти данные вместе с другими результатами позволяют судить о том, что в случае применения асимптотически оптимального группирования и использования  $\chi^2_{k-m-1}$ -распределения ошибки при вычислении вероятности  $P\{S > S^*\}$  практически незначимы.

Таблица 2.1

Значения вероятностей вида  $P\{S > S^*\}$ 

Значение $S^*$	$\chi^2_4$ -распределение	Распределение статистики $S_{\text{ОП}}$		Распределение статистики $X_n^2$	
		При АОГ	При РВГ	При АОГ	При РВГ
3	0.5578	0.5876	0.6293	0.5914	0.6304
4	0.4060	0.4303	0.4700	0.4356	0.4716
5	0.2873	0.3049	0.3384	0.3108	0.3403
6	0.1991	0.2108	0.2370	0.2165	0.2389
7	0.1359	0.1430	0.1626	0.1481	0.1643
8	0.0916	0.0956	0.1096	0.0999	0.1111
9	0.0611	0.0632	0.0729	0.0666	0.0741
10	0.0404	0.0413	0.0480	0.0440	0.0489
11	0.0266	0.0268	0.0313	0.0288	0.0320
12	0.0173	0.0173	0.0202	0.0187	0.0207
13	0.0113	0.0110	0.0130	0.0120	0.0133

Исследование распределений статистик при вычислении ОМП по негруппированным данным и дальнейшем увеличении числа интервалов показало возрастающую близость распределений статистик к  $\chi^2_{k-m-1}$ -распределениям. Следовательно, при использовании  $\chi^2_{k-m-1}$ -распределения для вычисления вероятностей вида  $P\{S > S^*\}$  с ростом числа интервалов (при достаточном объеме выборки) ошибки будут уменьшаться.

Как отражается способ группирования на предельных распределениях статистики  $X_n^2$  при справедливости конкурирующей гипотезы  $H_1$ , показано на рис. 2.8 и 2.9, где приведены полученные в результате моделирования функции распределения  $G(S|H_1)$  при использовании асимптотически оптимального (АОГ) и равновероятного (РВГ) группирования, когда гипотеза  $H_0$  соответствует нормальному закону распределения, а гипотеза  $H_1$  – логистическому. Эти два закона достаточно близки и трудноразличимы с помощью критериев согласия. На рис. 2.8 приведены эмпирические распределения статистики при простой гипотезе  $H_0$ , а на рис. 2.9 – при сложной. Число интервалов группирования – 7. Из рис. 2.8, 2.9 видно, насколько выше мощность критерия при асимптотически оптимальном группировании по сравнению с равновероятным.

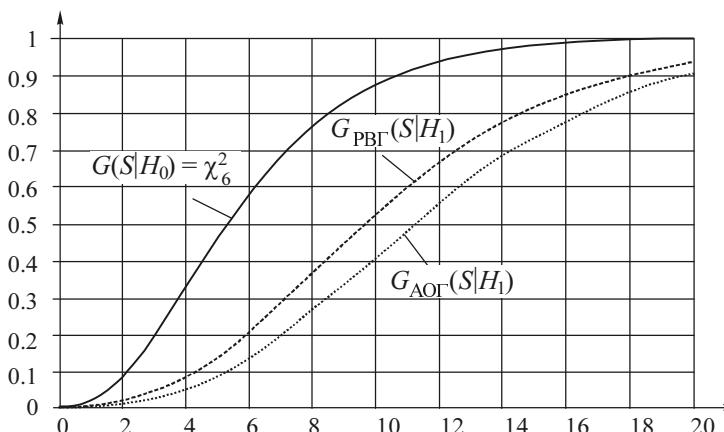


Рис. 2.8. Распределения статистики  $X_n^2$  при проверке простой гипотезы  $H_0$

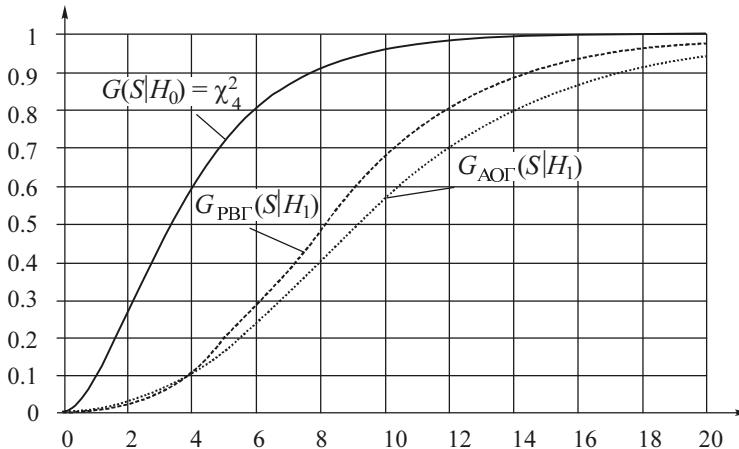


Рис. 2.9. Распределения статистики  $X_n^2$  при проверке сложной гипотезы  $H_0$

Распределения  $G(S|H_0)$  и  $G(S|H_1)$  статистики  $Y_n^2(\theta)$ , определяемой соотношением (2.11) при использовании оценок максимального правдоподобия параметров по негруппированным данным, несущественно зависят от способа группирования. Исследование этих распределений методами статистического моделирования показало хорошее согласие  $G(S|H_0)$  с  $\chi_{k-1}^2$ -распределениями и при равновероятном и при асимптотически оптимальном группировании. При выборе различных способов группирования нет большой разницы между соответствующими распределениями статистики  $G(S|H_1)$ . При малом числе интервалов критерий оказывается несколько мощнее в случае равновероятного группирования.

Таким образом, по поводу распределений статистик критериев типа  $\chi^2$  можно сделать следующие выводы.

Если по наблюдаемой выборке не оценивали параметры закона (простая гипотеза), то распределения статистик типа  $\chi^2$  при справедливой гипотезе  $H_0$  достаточно хорошо согласуются с  $\chi_{k-1}^2$  как при равновероятном, так и при асимптотически оптимальном группировании. Различия между распределениями статистик при равновероятном

и асимптотически оптимальном группировании заметны, но незначимы. Распределения статистик при равновероятном группировании в целом оказываются ближе к  $\chi^2_{k-1}$ -распределению.

В условиях, когда оценки параметров определяют по негруппированным наблюдениям, распределения этих статистик хорошо согласуются с гамма-распределениями.

а) Распределения статистик критериев отношения правдоподобия и  $\chi^2$  Пирсона существенно зависят от способа группирования, особенно при малом числе интервалов.

б) Распределения статистик зависят не только от числа оцененных по выборке параметров, но и от того, какой параметр оценивали. В частности, оценивание параметра сдвига приводит к более значительному изменению распределений статистик, чем оценивание масштабного параметра. Картина аналогична той, что наблюдается для распределений статистик типа Колмогорова,  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова и  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга при проверке сложных гипотез [258, 98].

в) Эмпирические распределения статистики отношения правдоподобия оказываются ближе к предельному теоретическому  $\chi^2_{k-m-1}$ -распределению, чем соответствующие эмпирические распределения статистики  $\chi^2$  Пирсона.

г) В целом при малом числе интервалов и оценивании  $m$  параметров число степеней свободы предельного распределения уменьшается на «число степеней свободы», меньшее  $m$ . При этом эмпирический закон распределения статистики при асимптотически оптимальном группировании ближе к теоретическому  $\chi^2_{k-m-1}$ -распределению, чем при равновероятном группировании.

д) С ростом числа интервалов  $k$  разность между функцией распределения  $\chi^2_{k-m-1}$  и действительными функциями распределения статистик отношения правдоподобия и  $\chi^2$  Пирсона в случае асимптотически оптимального группирования убывает существенно быстрее.

е) Анализ показал, что при использовании для вычисления вероятностей  $P\{S > S^*\}$  функции распределения  $\chi^2_{k-m-1}$  при асимптотически оптимальном группировании и малом числе интервалов ( $k < 10$ ) при малых значениях  $P\{S > S^*\}$  (именно при малых вероятностях прини-

мают решение отклонить гипотезу  $H_0$  или нет) погрешность имеет значения, которые несущественны для практических задач, т. е. в этом случае, используя  $\chi_{k-m-1}^2$ -распределение, не совершают большой ошибки. В то же время ошибка в определении критического значения  $S_\alpha$  может быть достаточно большой. Поэтому целесообразно принимать решение по достигнутому уровню значимости: значению вероятности  $P\{S > S^*\}$ .

ж) С ростом числа интервалов (при соответствующем объеме выборки) отличие распределений статистик  $X_n^2$  и  $S_{\text{ОП}}$  от распределений  $\chi_{k-m-1}^2$  и при асимптотически оптимальном, и при равновероятном группировании становится несущественным.

При справедливости конкурирующей гипотезы  $H_1$  распределения статистик  $X_n^2$  и отношения правдоподобия и при простых, и при сложных гипотезах сильно зависят от способа группирования.

При близких альтернативах разность  $G(S|H_0) - G(S|H_1)$  для этих статистик максимальна в случае использования асимптотически оптимального группирования, следовательно, максимальна мощность критерия.

Зависимость распределений  $G(S|H_1)$  статистики  $Y_n^2$  Никулина от выбранного способа группирования выражена менее ярко, причем при малом числе интервалов предпочтительней может оказаться равновероятное группирование, а с ростом числа интервалов – асимптотически оптимальное.

## 2.8. Выбор числа интервалов

Число интервалов группирования, используемое (и рекомендуемое) при вычислении оценок параметров, построении гистограмм, вычислении статистик типа отношения правдоподобия или  $\chi^2$  Пирсона, колеблется в очень широких пределах. Большинство рекомендемых формул для оценки числа интервалов  $k$  носит эмпирический характер и обычно дает завышенные значения.

Определение числа интервалов связано с объемом выборки. Целый ряд рекомендаций из различных источников по выбору числа интервалов  $k$  приведен в [290].

При выборе интервалов равной длины определяющим является требование, чтобы число наблюдений, попавших в интервалы, было не слишком малым и сравнимым. Такое требование выдвигают в связи с опасением, что в противном случае распределение статистики типа  $\chi^2$  не будет являться  $\chi_r^2$ -распределением. При этом наиболее часто рекомендуют, чтобы число наблюдений, попавших в интервал, было не менее десяти. В [20] отмечено, что на практике допустимо, чтобы число наблюдений в крайних интервалах было менее пяти. В работах [104, 105], посвященных изучению мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона, в случае унимодального распределения допускается уменьшать ожидаемые частоты попадания наблюдений для одного или двух интервалов до единицы и даже ниже. Статистическое моделирование подтверждает, что и в такой ситуации распределения статистик типа  $\chi^2$  хорошо согласуются с соответствующими  $\chi_r^2$ -распределениями.

Во многих источниках, например в [138], можно найти упоминание эвристической формулы Старджесса для определения «оптимального» числа интервалов

$$k = \log_2 n + 1 = 3,3 \lg n + 1 .$$

В [350] для определения «оптимального» числа интервалов рекомендуют формулу Брукса и Каррузера

$$k = 5 \lg n .$$

В [59] рекомендуют соотношение

$$k = \sqrt{n} .$$

В [105] для равновероятных интервалов их число устанавливают порядка

$$k \approx 4\sqrt[5]{2}(n/t)^{0.4} ,$$

где  $t$  – квантиль стандартного нормального распределения для заданного уровня значимости. В ряде работ приводят модификации данной формулы. В [321] предлагают значение

$$k = 4 \lg n ,$$

а в [329] – дальнейшее развитие этого соотношения

$$k = 5 \lg n - 5 .$$

В исследовании [152] получено соотношение

$$k = \frac{4}{N} \lg \frac{n}{10} ,$$

где  $N = 1/\sqrt{\mu_4/\sigma^4}$  – значение контрэксцесса;  $\mu_4$  – четвертый центральный момент;  $\sigma$  – среднее квадратичное отклонение.

При больших объемах выборок  $n$  разброс значений  $k$ , задаваемых различными формулами, достаточно велик. Поэтому на практике при выборе числа интервалов больше руководствуются тем, чтобы в интервалы попадало число наблюдений не менее 5...10. Так, например, в рекомендациях ВНИИМетрологии [168] в зависимости от  $n$  предлагаются следующие значения  $k$ :

$n$	$k$
40...100	7...9
100...500	8...12
500...1000	10...16
1000...10000	12...22

Все перечисленные рекомендации опирались на предположение, что  $k$  следует выбирать таким образом, чтобы вид гистограммы был как можно ближе к плавной кривой плотности распределения генеральной совокупности. В [338] показано, что уклонение гистограммы от плотности распределения в лучшем случае имеет порядок  $1/\sqrt[3]{n}$ , достигаемый при числе интервалов  $k$  порядка  $\sqrt[3]{n}$ .

Очевидно, что «оптимальное» значение  $k$  зависит не только от объема выборки, но и от вида закона распределения и от способа группирования.

При асимптотически оптимальном группировании относительно скалярного параметра при 10 или 11 интервалах в группированной выборке сохраняется около 98 % информации, при оптимальном группировании относительно вектора параметров (два параметра) для 15 интервалов – около 95 %. Дальнейшее увеличение числа интервалов существенного значения не имеет.

Конкретное число интервалов при асимптотически оптимальном группировании можно выбирать исходя из следующих соображений. При оптимальном группировании вероятности попадания в интервалы в общем случае не равны. Обычно минимальны вероятности попадания в крайние интервалы. Поэтому  $k$  желательно выбирать из условия  $nP_i(\theta) \geq 5 \dots 10$  для любого интервала при оптимальном группировании. По крайней мере, минимальная ожидаемая частота должна быть больше 1. В случае использования равновероятного группирования порядок  $k$  должен быть примерно таким же, как и при асимптотически оптимальном группировании.

Все наиболее разумные рекомендации по выбору числа интервалов, в том числе в случае асимптотически оптимального группирования, исходят из того, чтобы при данном  $n$  описать плотность распределения ее непараметрической оценкой (гистограммой) как можно лучше. Но ни одна из рекомендаций, за исключением [104, 105], не подходит к выбору  $k$  с позиций мощности критерия согласия! Не опираются на требование построения наиболее мощного критерия при близких конкурирующих гипотезах, хотя известно, что при заданном объеме выборки, заданных конкурирующих гипотезах  $H_0$  и  $H_1$ , выбранном способе группирования и фиксированном уровне значимости  $\alpha$  с ростом числа интервалов  $k$  мощность критериев  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия падает [344, 166].

Об изменении мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона с ростом числа интервалов при проверке простой гипотезы можно судить по рис. 2.10. Через  $X_n^2$  обозначена статистика, вычисляемая в соответствии с формулой (2.1). На рис. 2.10 представлены полученные экспериментально распределения статистики  $G^k(X_n^2|H_0)$  и  $G^k(X_n^2|H_1)$  при числе интервалов  $k = 7, 10, 15, 20$  и объеме выборки  $n = 500$ , когда гипотеза  $H_0$  соответствует нормальному закону, а  $H_1$  – логистиче-

скому (два очень близких закона). На рисунке приведены распределения статистики при равновероятном группировании. Ордината нижнего конца соответствующей вертикальной черты определяет значение  $\beta$  (вероятность ошибки второго рода) при уровне значимости  $\alpha = 0,1$  для соответствующего числа интервалов. Мощность равна  $1 - \beta$ . Как видно, в полном соответствии с результатами работ [344, 166] при увеличении числа интервалов мощность критерия падает. При асимптотически оптимальном группировании и таких числах интервалов для данной пары конкурирующих гипотез соответствующая мощность выше.

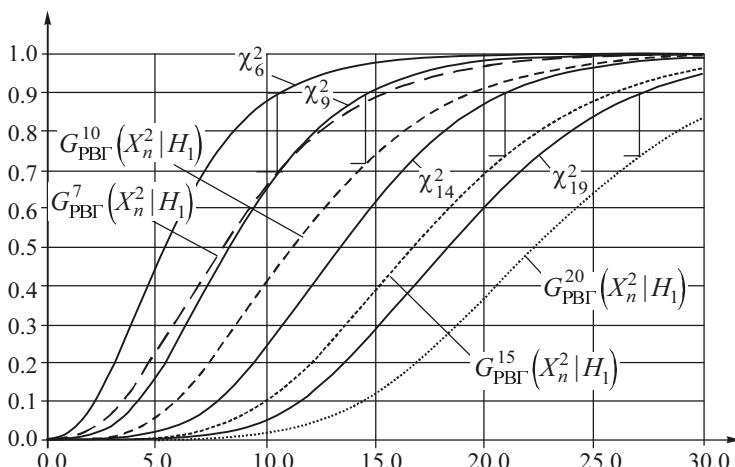


Рис. 2.10. Распределения статистики  $X_n^2$  при проверке простой гипотезы:

$H_0$  – нормальный закон,  $H_1$  – логистический закон,  $k = 7, 10, 15, 20$

Аналогичные изменения мощности критерия для статистики  $X_n^2$  в зависимости от числа интервалов при проверке сложной гипотезы иллюстрирует рис. 2.11. Здесь также с ростом  $k$  мощность критерия падает.

Мощность критерия Никулина с использованием статистики  $Y_n^2$  с ростом  $k$  уменьшается существенно медленней (рис. 2.12) и она выше, чем мощность критерия  $\chi^2$  Пирсона.

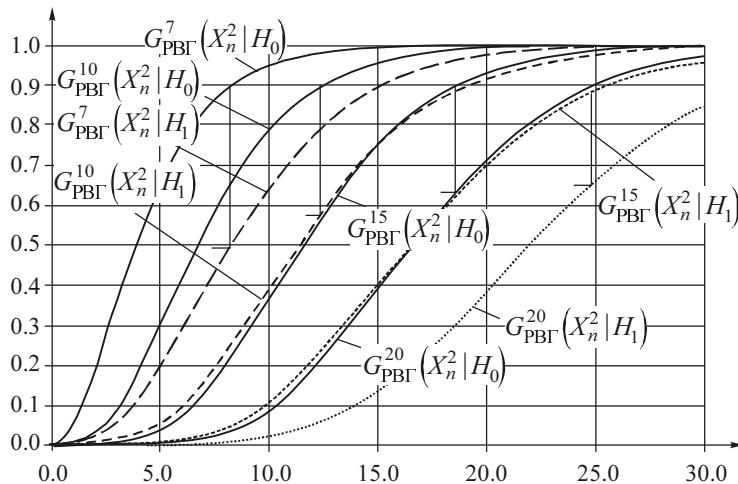


Рис. 2.11. Распределения статистики  $X_n^2$  при проверке сложной гипотезы:

$H_0$  – нормальный закон,  $H_1$  – логистический закон,  $k = 7, 10, 15, 20$

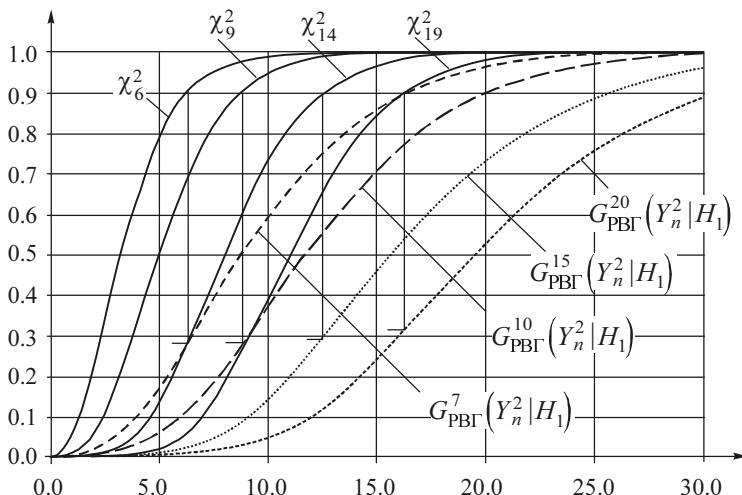


Рис. 2.12. Распределения статистики  $Y_n^2$  при проверке сложной гипотезы:

$H_0$  – нормальный закон,  $H_1$  – логистический закон,  $k = 7, 10, 15, 20$

В табл. 2.2 представлены значения мощности критериев  $\chi^2$  Пирсона и типа  $\chi^2$  Никулина при рассматриваемой альтернативе ( $H_0$  – нормальный закон,  $H_1$  – логистический закон) при различном числе интервалов  $k$  в случае простых и сложных гипотез. В колонке 2 даны значения мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона при проверке простой гипотезы, полученные по результатам моделирования (экспериментально). В колонке 3 приведены теоретические значения мощности, вычисленные при условии, что  $G(X_n^2|H_0)$  представляет собой  $\chi_{k-1}^2$ -распределение, а  $G(X_n^2|H_1)$  – соответствующее нецентральное распределение. Колонка 4 содержит значения мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона при проверке сложной гипотезы, полученные по результатам моделирования при использовании ОМП по негруппированным наблюдениям. В колонке 5 приведены теоретические значения мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона при проверке сложной гипотезы, вычисленные при условии, что  $G(X_n^2|H_0)$  представляет собой  $\chi_{k-3}^2$ -распределение (оценки параметров вычисляют при минимизации статистики  $X_n^2$ ), а  $G(X_n^2|H_1)$  – соответствующее нецентральное распределение. В колонке 6 даны значения мощности критерия Никулина, полученные в результате моделирования распределений статистики  $Y_n^2$ , а в колонке 7 – расчетные значения мощности этой статистики при рассматриваемой паре гипотез  $H_0$  и  $H_1$ .

В табл. 2.2 приведены значения мощности критериев для  $k$  от 6 до 30. Проследив изменение мощности критериев при  $k < 6$ , можно убедиться, что если мощность критерия  $\chi^2$  Пирсона с уменьшением числа интервалов продолжает возрастать, то мощность критерия Никулина со статистикой  $Y_n^2$  при  $k \leq 6$  начинает падать. Это свидетельствует о том, что для критерия Никулина существует оптимальное число интервалов, при котором его мощность максимальна.

Таблица 2.2

**Значения мощности критериев  $\chi^2$  Пирсона и типа  $\chi^2$  Никулина при уровне значимости  $\alpha = 0.1$  ( $H_0$  – нормальный закон,  $H_1$  – логистический закон)**

$k$	В случае простой гипотезы		В случае сложной гипотезы			
	Для статистики $X_n^2 = Y_n^2$		Для статистики $X_n^2$		Для статистики $Y_n^2$	
	по результатам моделирования	теоретическая	по результатам моделирования (при использовании ОМП)	теоретическая (при использовании оценок $\min X_n^2$ )	по результатам моделирования	теоретическая
1	2	3	4	5	6	7
6	0.46	0.449	0.53	0.526	0.70	0.739
7	0.43	0.427	0.49	0.488	0.71	0.750
8	0.42	0.409	0.45	0.459	0.71	0.755
9	0.38	0.395	0.43	0.436	0.71	0.756
10	0.38	0.383	0.43	0.418	0.71	0.756
11	0.37	0.373	0.41	0.403	0.71	0.754
12	0.35	0.364	0.41	0.391	0.70	0.752
13	0.35	0.357	0.38	0.381	0.70	0.749
14	0.34	0.351	0.38	0.373	0.69	0.746
15	0.33	0.345	0.38	0.365	0.69	0.742
16	0.33	0.340	0.38	0.359	0.69	0.738
17	0.32	0.336	0.37	0.353	0.69	0.734
18	0.32	0.332	0.37	0.348	0.69	0.730
19	0.32	0.328	0.35	0.343	0.68	0.726
20	0.31	0.325	0.35	0.339	0.68	0.722
21	0.31	0.322	0.34	0.335	0.67	0.718
22	0.31	0.319	0.34	0.331	0.67	0.714
23	0.31	0.317	0.34	0.328	0.66	0.710
24	0.30	0.314	0.34	0.325	0.66	0.707
25	0.30	0.312	0.34	0.322	0.66	0.703
26	0.30	0.310	0.33	0.320	0.65	0.699
27	0.30	0.308	0.33	0.317	0.65	0.695
28	0.30	0.306	0.32	0.315	0.65	0.692
29	0.30	0.304	0.32	0.313	0.65	0.688
30	0.30	0.302	0.32	0.310	0.65	0.684

В [268] мощность критериев типа  $\chi^2$  в зависимости от выбираемого числа интервалов  $k$  была исследована при различных проверяемых гипотезах  $H_0$  и различных конкурирующих гипотезах  $H_1$  при разных объемах выборок. Мощность для критериев типа  $\chi^2$  может быть вычислена в соответствии с формулой [163]:

$$1 - \beta = P(v|r, \alpha) = \\ = e^{-v/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^j}{j! 2^{2j-1+r/2} \Gamma(j+r/2)} \int_{\chi_{r,\alpha}^2}^{\infty} y^{2j-1+r} e^{-y^2/2} dy, \quad (2.20)$$

где  $v$  – параметр нецентральности, определяемый формулами (2.3), (2.7) или (2.15);  $\chi_{r,\alpha}^2$  представляет собой  $(1-\alpha)$ -процентную точку  $\chi^2$ -распределения с  $r$  степенями свободы ( $\alpha$  – заданная вероятность ошибки первого рода,  $\beta$  – вероятность ошибки второго рода).

Максимальную мощность критерии  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия зачастую имеют или при минимально возможном числе интервалов, определяемом условием  $r = k - m - 1 \geq 1$ , или при оптимальном числе интервалов, близком к минимально возможному. Оптимальное число интервалов для критерия Никулина обычно больше, чем для критериев  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия, и не превышает значения  $\sqrt[3]{n}$ .

В работе [269] исследование мощности критериев Пирсона и Никулина как функции от объемов выборок  $n$  и числа интервалов  $k$  было проведено и аналитически, и методами статистического моделирования. Причем результаты аналитических вычислений мощности в соответствии с соотношением (2.20) полностью подтвердились оценками мощности, полученными на основании моделирования.

Все приводимые ниже функции мощности строились при уровне значимости  $\alpha = 0.1$ . Объемы выборок на рисунках обозначены  $n$ .

На рис. 2.13 и в табл. 2.3 в зависимости от числа  $k$  равновероятных интервалов при различных  $n$  представлены функции мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона при проверке простой гипотезы о согласии с

экспоненциальным законом  $\left( H_0 : f(x) = \theta \exp\{-\theta x\} \text{ при } \theta = 1; H_1 : f(x) = \theta \exp\{-\theta x\} \text{ при } \theta = 1.05 \right)$ .

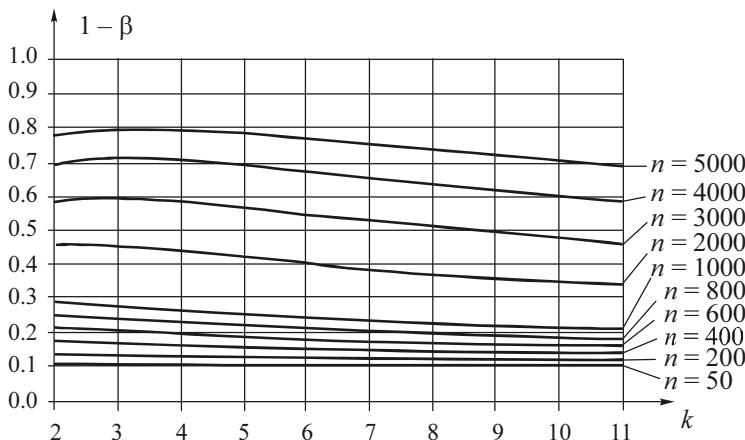


Рис. 2.13. Функции мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона при проверке простой гипотезы о согласии с экспоненциальным законом при равновероятном группировании

На рис. 2.14 и в табл. 2.4 приведены аналогичные функции при использовании асимптотически оптимального группирования. Асимптотически оптимальные граничные точки, минимизирующие потери в информации Фишера, представлены в табл. А.1 приложения А. И в том и в другом случае с ростом  $k$  мощность падает, но в случае асимптотически оптимального группирования она выше, чем при равновероятном.

На рис. 2.15 и в табл. 2.5 приведены функции мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона в случае разбиения области определения случайной величины на интервалы равной вероятности при проверке простой гипотезы о согласии с нормальным законом

$$H_0: f(x) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - \theta_0)^2}{2\theta_1^2}\right\}$$

при  $\theta_0 = 0, \theta_1 = 1$  против  $H_1$ : нормальный закон при  $\theta_0 = 0.05, \theta_1 = 1.05$ .

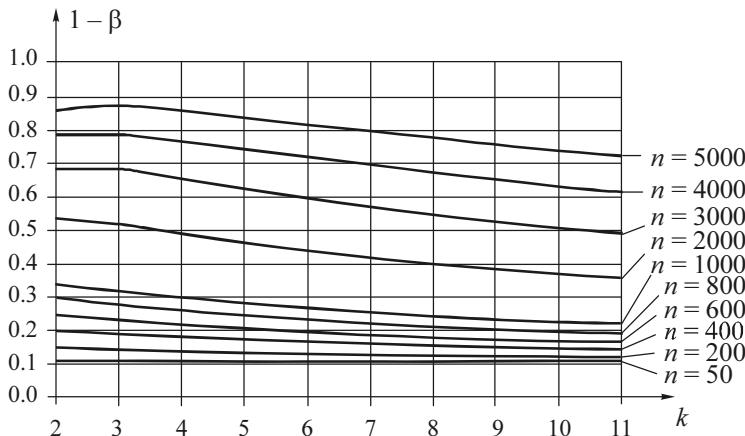


Рис. 2.14. Функции мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона при проверке простой гипотезы о согласии с экспоненциальным законом при асимптотически оптимальном группировании

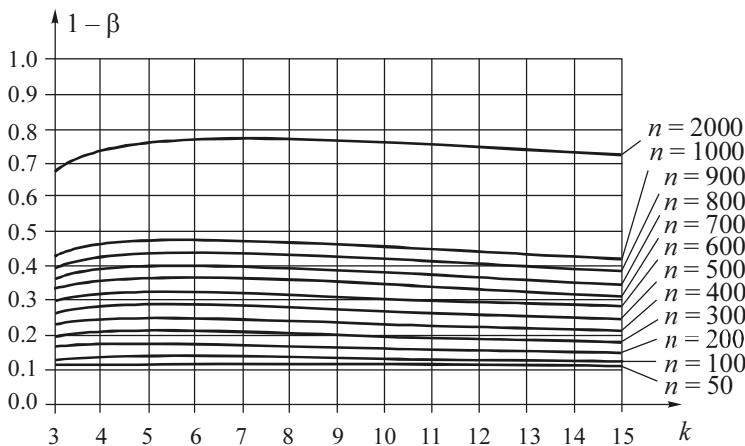


Рис. 2.15. Функции мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона при проверке простой гипотезы о согласии с нормальным законом при равновероятном группировании

На рис. 2.16 и в табл. 2.6 представлены аналогичные функции мощности в случае использования асимптотически оптимального группирования. Асимптотически оптимальные граничные точки, миними-

зирующие потери в информации Фишера, представлены в табл. А.28 приложения А.

На рис. 2.17–2.20 представлены функции мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона при проверке простых и сложных гипотез о согласии с нормальным законом

$$H_0: f(x) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \theta_0)^2}{2\theta_1^2} \right\}$$

при логистическом законе в качестве конкурирующей гипотезы

$$H_1: f(x) = \frac{\pi}{\theta_1 \sqrt{3}} \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}} \right\} / \left[ 1 + \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}} \right\} \right]^2$$

при значениях параметров  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_1 = 1$ .

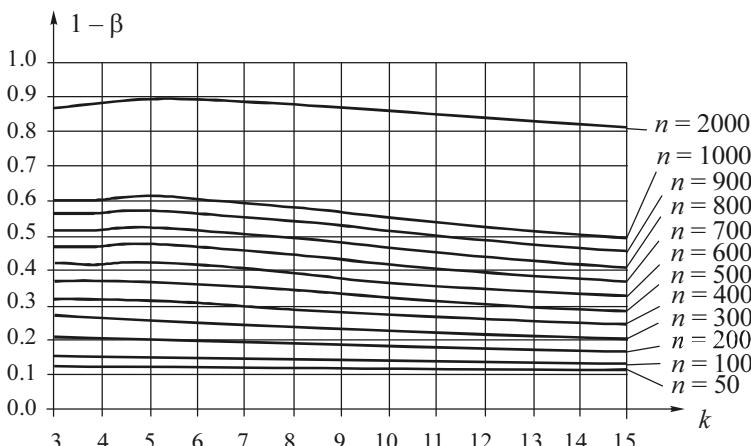


Рис. 2.16. Функции мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона при проверке простой гипотезы о согласии с нормальным законом при асимптотически оптимальном группировании

На рис. 2.17 представлены функции мощности для случая равновероятного группирования и проверки простой гипотезы, соответствующей нормальному закону с параметрами  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_1 = 1$ . На рис. 2.18 – то же, но при проверке сложной гипотезы. Как видим, и здесь с ростом

$k$  мощность падает. При проверке простой гипотезы функция мощности критерия Пирсона для  $n > 100$  принимает максимальное значение при  $k = 4$ , и при дальнейшем увеличении объема выборки это оптимальное число интервалов не изменяется.

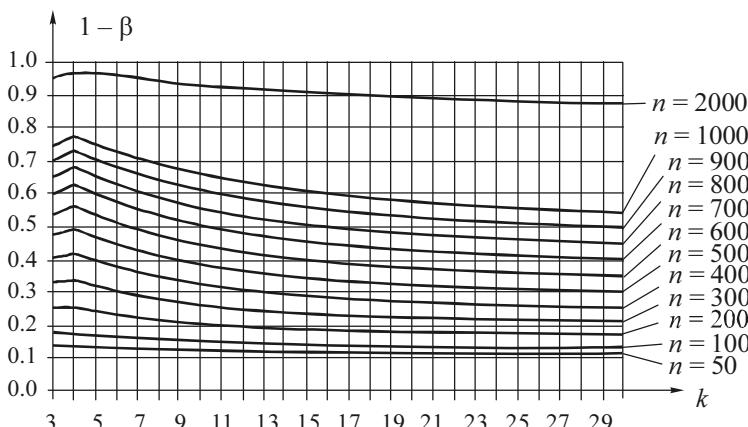


Рис. 2.17. Функции мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона при проверке простой гипотезы о согласии с нормальным законом при равновероятном группировании и альтернативе, соответствующей логистическому закону

В случае проверки сложной гипотезы и оценивания по выборке параметров гипотетического распределения функция мощности критерия Пирсона принимает наибольшее значение при минимально возможном числе интервалов  $k = 4$  и далее монотонно убывает с ростом  $k$  (рис. 2.18).

На рис. 2.19 отражены функции мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона для приведенной выше альтернатив при проверке простой гипотезы, а на рис. 2.20 – при проверке сложной в случае применения асимптотически оптимального группирования. Здесь функции мощности представляют собой более интересную картину с провалами при  $k = 4$  и  $k = 6$ . Эти провалы свидетельствуют о том, что при таких комбинациях граничных точек, несмотря на минимальные потери в информации Фишера, две рассматриваемые конкурирующие гипотезы плохо различаются. При дальнейшем росте  $k$  мощность критерия увеличивается.

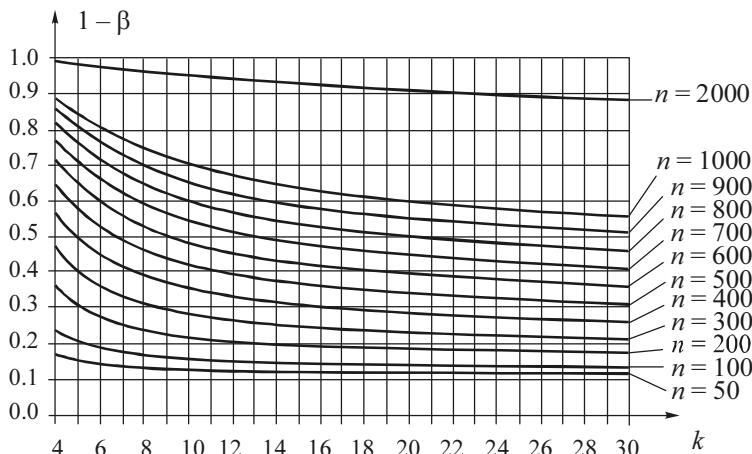


Рис. 2.18. Функции мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона при проверке сложной гипотезы о согласии с нормальным законом при равновероятном группировании и альтернативе, соответствующей логистическому закону

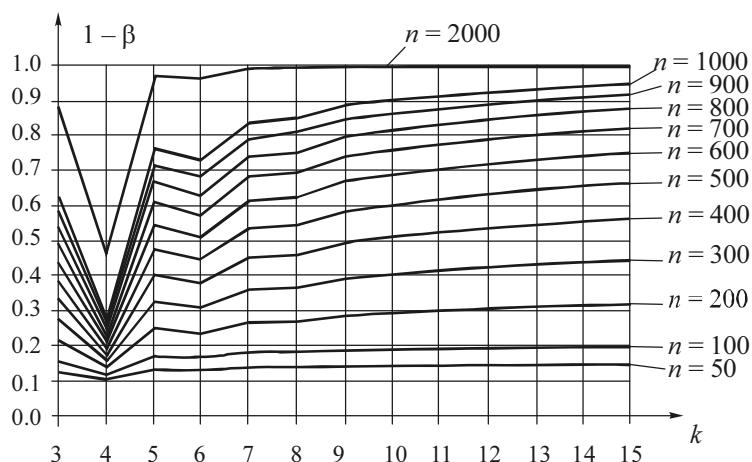


Рис. 2.19. Функции мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона при проверке простой гипотезы о согласии с нормальным законом при асимптотически оптимальном группировании и альтернативе, соответствующей логистическому закону

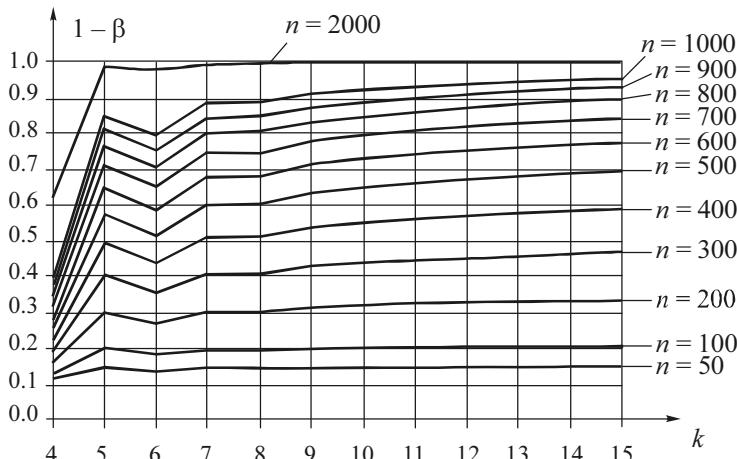


Рис. 2.20. Функции мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона при проверке сложной гипотезы о согласии с нормальным законом при асимптотически оптимальном группировании и альтернативе, соответствующей логистическому закону

Функция мощности критерия типа  $\chi^2$  Никулина, как следует из рис. 2.21 и табл. 2.7, на области значений  $k$ , содержащей максимальное значение мощности, является выпуклой вверх функцией.

Отметим, что статистическое моделирование распределений статистик, которое проводилось нами в целях контроля результатов, полностью подтверждает аналитические расчеты, проиллюстрированные на приводимых рисунках.

Таким образом, выбирая число интервалов в критериях типа  $\chi^2$ , следует осознавать, что увеличение их числа не приводит к росту мощности критерия. Рекомендуется выбирать число интервалов  $k$  так, чтобы для любого интервала при оптимальном группировании выполнялось условие  $nP_i(\theta) \geq 5 \dots 10$ . По крайней мере, минимальная ожидаемая частота должна быть больше 1. При этом следует опираться на соответствующую таблицу асимптотически оптимального группирования из приложения А. Указания на соответствующую таблицу асимптотически оптимального группирования даны в табл. 2.3. Снизу значение  $k$  ограничено условием  $k \geq m + 2$ .

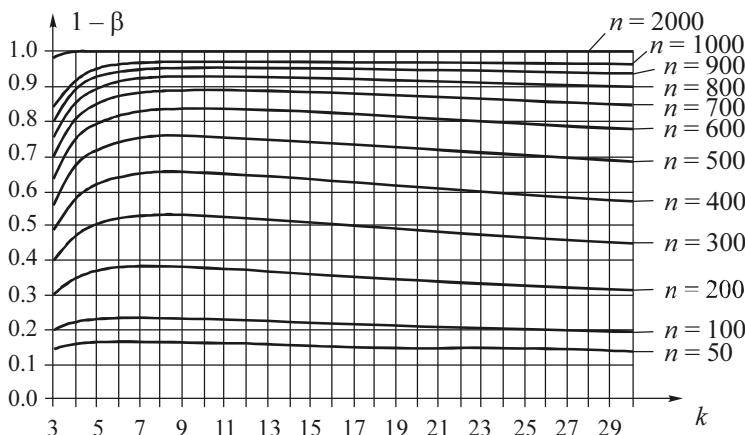


Рис. 2.21. Функции мощности критерия типа  $\chi^2$  Никулина при проверке сложной гипотезы о согласии с нормальным законом при равновероятном группировании и альтернативе, соответствующей логистическому закону

Если заданы конкретная конкурирующая гипотеза и объем выборки  $n$ , можно выбрать оптимальное число интервалов  $k$  так, чтобы максимизировать соотношение (2.20).

**Некоторые выводы.** При проверке согласия опытного распределения с теоретической моделью нас в первую очередь должна интересовать возможность с помощью критерия уловить отклонения в наблюдаемых данных, которые говорят о предпочтительности некоторой другой достаточно близкой к проверяемой модели, т. е. возможность различать близкие гипотезы. Это означает, что мы должны использовать критерии, которые обладают наибольшей мощностью относительно близких конкурирующих гипотез.

Максимизировать мощность критериев  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия можно двумя путями: выбирая в качестве способа разбиения на интервалы асимптотически оптимальное группирование и подбирая «оптимальное» число интервалов  $k$ .

Мощность критерия Никулина можно максимизировать только за счет выбора «оптимального» числа интервалов и предпочтительного способа группирования, так как при малом числе интервалов предпочтительнее разбиение на интервалы равной вероятности, а при возрастании числа интервалов преимущество оказывается за асимптотически оптимальным.

Таблица 2.3

**Теоретические значения мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона в случае проверки простой гипотезы о согласии с экспоненциальным законом при равновероятном группировании**

$k$	$n = 50$	$n = 200$	$n = 400$	$n = 600$	$n = 800$	$n = 1000$	$n = 2000$	$n = 3000$	$n = 4000$	$n = 5000$
2	0.1098	0.1391	0.1776	0.2154	0.2524	0.2884	0.4524	0.5876	0.6949	0.7775
3	0.1089	0.1360	0.1725	0.2092	0.2459	0.2823	0.4538	0.5993	0.7145	0.8015
4	0.1080	0.1324	0.1658	0.2000	0.2345	0.2692	0.4376	0.5853	0.7047	0.7957
5	0.1072	0.1294	0.1601	0.1917	0.2240	0.2568	0.4193	0.5663	0.6879	0.7824
6	0.1066	0.1270	0.1554	0.1848	0.2151	0.2460	0.4019	0.5468	0.6695	0.7668
7	0.1061	0.1251	0.1515	0.1790	0.2075	0.2366	0.3861	0.5282	0.6511	0.7505
8	0.1057	0.1234	0.1482	0.1741	0.2010	0.2286	0.3719	0.5108	0.6334	0.7343
9	0.1054	0.1221	0.1454	0.1700	0.1954	0.2217	0.3592	0.4948	0.6166	0.7185
10	0.1051	0.1209	0.1431	0.1663	0.1906	0.2156	0.3478	0.4801	0.6007	0.7033
11	0.1048	0.1199	0.1410	0.1632	0.1863	0.2102	0.3375	0.4665	0.5858	0.6888

**Теоретические значения мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона в случае проверки простой гипотезы о согласии с экспоненциальным законом при асимптотически оптимальном группировании**

$k$	$n = 50$	$n = 200$	$n = 400$	$n = 600$	$n = 800$	$n = 1000$	$n = 2000$	$n = 3000$	$n = 4000$	$n = 5000$
2	0.1127	0.1503	0.1996	0.2475	0.2939	0.3386	0.5342	0.6822	0.7885	0.8621
3	0.1109	0.1438	0.1883	0.2329	0.2772	0.3208	0.5200	0.6771	0.7909	0.8688
4	0.1094	0.1380	0.1774	0.2176	0.2582	0.2987	0.4910	0.6501	0.7697	0.8537
5	0.1082	0.1337	0.1689	0.2053	0.2425	0.2800	0.4630	0.6211	0.7445	0.8340
6	0.1074	0.1304	0.1624	0.1956	0.2298	0.2647	0.4383	0.5938	0.7194	0.8134
7	0.1068	0.1278	0.1571	0.1879	0.2196	0.2521	0.4169	0.5690	0.6955	0.7929
8	0.1063	0.1257	0.1529	0.1815	0.2111	0.2416	0.3983	0.5467	0.6732	0.7732
9	0.1058	0.1240	0.1494	0.1762	0.2040	0.2327	0.3821	0.5265	0.6525	0.7543
10	0.1055	0.1225	0.1465	0.1717	0.1979	0.2251	0.3678	0.5083	0.6333	0.7364
11	0.1052	0.1213	0.1439	0.1678	0.1927	0.2185	0.3552	0.4919	0.6156	0.7195

Таблица 2.5

**Теоретические значения мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона в случае проверки простой гипотезы о согласии с нормальным законом при равновероятном группировании**

$k$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 400$	$n = 500$	$n = 600$	$n = 700$	$n = 800$	$n = 900$	$n = 1000$	$n = 2000$
3	0.1167	0.1335	0.1675	0.2017	0.2359	0.2699	0.3035	0.3366	0.3691	0.4008	0.4317	0.6860
4	0.1175	0.1353	0.1719	0.2092	0.2469	0.2847	0.3223	0.3594	0.3958	0.4314	0.4660	0.7404
5	0.1173	0.1351	0.1720	0.2100	0.2488	0.2879	0.3270	0.3658	0.4040	0.4413	0.4775	0.7619
6	0.1168	0.1343	0.1705	0.2083	0.2471	0.2865	0.3260	0.3654	0.4043	0.4423	0.4794	0.7700
7	0.1163	0.1332	0.1686	0.2057	0.2440	0.2831	0.3225	0.3619	0.4009	0.4392	0.4766	0.7715
8	0.1157	0.1321	0.1664	0.2027	0.2402	0.2787	0.3177	0.3568	0.3957	0.4340	0.4714	0.7695
9	0.1152	0.1310	0.1643	0.1996	0.2363	0.2741	0.3125	0.3511	0.3896	0.4277	0.4651	0.7654
10	0.1146	0.1299	0.1623	0.1966	0.2325	0.2694	0.3071	0.3452	0.3832	0.4210	0.4581	0.7600
11	0.1142	0.1290	0.1604	0.1937	0.2287	0.2649	0.3018	0.3393	0.3768	0.4141	0.4509	0.7538
12	0.1137	0.1281	0.1586	0.1910	0.2251	0.2605	0.2967	0.3334	0.3704	0.4072	0.4437	0.7472
13	0.1133	0.1273	0.1569	0.1885	0.2217	0.2563	0.2917	0.3278	0.3642	0.4005	0.4365	0.7402
14	0.1129	0.1265	0.1553	0.1861	0.2185	0.2523	0.2870	0.3224	0.3582	0.3940	0.4296	0.7330
15	0.1126	0.1258	0.1538	0.1838	0.2155	0.2485	0.2825	0.3172	0.3524	0.3877	0.4228	0.7258

Таблица 2.6

**Теоретические значения мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона в случае проверки простой гипотезы о согласии с нормальным законом при асимптотически оптимальном группировании**

$k$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 400$	$n = 500$	$n = 600$	$n = 700$	$n = 800$	$n = 900$	$n = 1000$	$n = 2000$
3	0.1273	0.1550	0.2108	0.2664	0.3212	0.3743	0.4255	0.4744	0.5206	0.5641	0.6048	0.8693
4	0.1254	0.1515	0.2050	0.2596	0.3140	0.3676	0.4197	0.4698	0.5175	0.5626	0.6049	0.8778
5	0.1249	0.1507	0.2044	0.2597	0.3156	0.3709	0.4249	0.4770	0.5266	0.5735	0.6173	0.8929
6	0.1233	0.1476	0.1987	0.2519	0.3060	0.3602	0.4135	0.4653	0.5149	0.5620	0.6063	0.8893
7	0.1220	0.1452	0.1940	0.2453	0.2980	0.3510	0.4036	0.4548	0.5043	0.5515	0.5961	0.8854
8	0.1208	0.1427	0.1891	0.2382	0.2890	0.3404	0.3916	0.4419	0.4908	0.5376	0.5822	0.8778
9	0.1197	0.1405	0.1848	0.2319	0.2808	0.3305	0.3804	0.4297	0.4778	0.5242	0.5686	0.8697
10	0.1188	0.1386	0.1808	0.2259	0.2729	0.3211	0.3696	0.4177	0.4649	0.5107	0.5547	0.8606
11	0.1179	0.1368	0.1773	0.2205	0.2658	0.3124	0.3595	0.4065	0.4528	0.4979	0.5414	0.8511
12	0.1171	0.1352	0.1738	0.2153	0.2589	0.3038	0.3495	0.3952	0.4405	0.4848	0.5277	0.8406
13	0.1164	0.1338	0.1711	0.2111	0.2532	0.2968	0.3412	0.3859	0.4303	0.4739	0.5164	0.8316
14	0.1158	0.1325	0.1684	0.2070	0.2477	0.2899	0.3331	0.3767	0.4201	0.4629	0.5048	0.8218
15	0.1153	0.1314	0.1659	0.2032	0.2426	0.2835	0.3255	0.3680	0.4105	0.4526	0.4938	0.8121

Таблица 2.7

**Теоретические значения мощности критерия типа  $\chi^2$  Никулина при проверке сложной гипотезы о согласии с нормальным законом при равновероятном группировании и альтернативе, соответствующей логистическому закону**

$k$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 400$	$n = 500$	$n = 600$	$n = 700$	$n = 800$	$n = 900$	$n = 1000$	$n = 2000$
3	0.15009	0.20093	0.30197	0.39866	0.48818	0.56898	0.64044	0.70258	0.75585	0.80096	0.83876	0.984880
4	0.16129	0.22521	0.35389	0.47530	0.58339	0.67556	0.75158	0.81261	0.86051	0.89740	0.92534	0.997981
5	0.16473	0.23371	0.37447	0.50700	0.62283	0.71871	0.79483	0.85323	0.89681	0.92856	0.95123	0.999382
6	0.16544	0.23635	0.38291	0.52137	0.64148	0.73937	0.81540	0.87221	0.91332	0.94225	0.96216	0.999710
7	0.16501	0.23638	0.38559	0.52745	0.65030	0.74968	0.82594	0.88201	0.92181	0.94922	0.96762	0.999825
8	0.16407	0.23514	0.38528	0.52909	0.65386	0.75452	0.83126	0.88717	0.92638	0.95301	0.97059	0.999876
9	0.16291	0.23228	0.38333	0.52821	0.65437	0.75618	0.83360	0.88971	0.92878	0.95507	0.97225	0.999903
10	0.16168	0.23113	0.38046	0.52582	0.65301	0.75588	0.83409	0.89064	0.92986	0.95611	0.97313	0.999917
11	0.16043	0.22886	0.37709	0.52252	0.65049	0.75432	0.83338	0.89053	0.93009	0.95649	0.97353	0.999924
12	0.15921	0.22656	0.37346	0.51868	0.64721	0.75193	0.83186	0.88971	0.92975	0.95642	0.97360	0.999927
13	0.15803	0.22430	0.36971	0.51452	0.64344	0.74897	0.82979	0.88840	0.92900	0.95604	0.97344	0.999924
14	0.15690	0.22210	0.36594	0.51018	0.63937	0.74564	0.82732	0.88673	0.92795	0.95543	0.97311	0.999916
15	0.15583	0.21997	0.36221	0.50576	0.63511	0.74204	0.82458	0.88479	0.92668	0.95464	0.97266	0.999902

Окончание табл. 2.7

$k$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 400$	$n = 500$	$n = 600$	$n = 700$	$n = 800$	$n = 900$	$n = 1000$	$n = 2000$
16	0.15481	0.21793	0.35854	0.50133	0.63075	0.73828	0.82164	0.88267	0.92524	0.95372	0.97210	0.999880
17	0.15384	0.21598	0.35496	0.49693	0.62633	0.73440	0.81855	0.88040	0.92367	0.95270	0.97147	0.999850
18	0.15293	0.21411	0.35148	0.49259	0.62190	0.73045	0.81537	0.87802	0.92201	0.95160	0.97077	0.999809
19	0.15206	0.21233	0.34811	0.48832	0.61750	0.72648	0.81212	0.87556	0.92026	0.95042	0.97001	0.999756
20	0.15123	0.21062	0.34485	0.48414	0.61313	0.72249	0.80882	0.87304	0.91845	0.94920	0.96922	0.999690
21	0.15045	0.20899	0.34169	0.48005	0.60881	0.71851	0.80549	0.87047	0.91660	0.94792	0.96839	0.999609
22	0.14971	0.20744	0.33865	0.47606	0.60456	0.71455	0.80216	0.86787	0.91470	0.94661	0.96752	0.999512
23	0.14899	0.20595	0.33571	0.47218	0.60038	0.71062	0.79882	0.86525	0.91277	0.94527	0.96663	0.999397
24	0.14832	0.20452	0.33287	0.46839	0.59627	0.70673	0.79549	0.86262	0.91082	0.94390	0.96571	0.999263
25	0.14767	0.20315	0.33013	0.46471	0.59224	0.70288	0.79217	0.85998	0.90885	0.94251	0.96478	0.999108
26	0.14705	0.20185	0.32748	0.46113	0.58829	0.69909	0.78887	0.85733	0.90686	0.94110	0.96382	0.998931
27	0.14646	0.20059	0.32493	0.45764	0.58443	0.69534	0.78560	0.85469	0.90486	0.93967	0.96285	0.998732
28	0.14590	0.19938	0.32246	0.45425	0.58064	0.69165	0.78235	0.85205	0.90286	0.93823	0.96186	0.998508
29	0.14536	0.19822	0.32007	0.45095	0.57693	0.68802	0.77913	0.84942	0.90085	0.93678	0.96087	0.998259
30	0.14483	0.19710	0.31776	0.44774	0.57330	0.68443	0.77594	0.84680	0.89884	0.93532	0.95986	0.997984

Найти «оптимальное» число интервалов  $k$  для соответствующего критерия можно, максимизировав по  $k$  соотношение (2.20). При этом фиксируются пара конкурирующих гипотез, способ группирования, объем выборки  $n$  и вероятность ошибки первого рода  $\alpha$ .

Мощность критериев  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия часто оказывается максимальной относительно близких конкурирующих гипотез, если выборку разбивать на минимально возможное число интервалов группирования. С ростом же числа интервалов мощность критериев падает. Этот факт ускользает от внимания большинства исследователей, использующих данный критерий, и совсем не упоминается в рекомендациях различного уровня.

В некоторых ситуациях, т. е. при конкретных парах конкурирующих гипотез, функции мощности критериев  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия оказываются выпуклыми вверх по  $k$  и существует «оптимальное» значение числа интервалов. Однако это «оптимальное» значение обычно достаточно мало отличается от минимально возможного и незначительно изменяется в сторону увеличения при значительном росте объема выборки  $n$ . Прослеживается зависимость «оптимальной» величины  $k$  не только от объема выборки, пары конкурирующих гипотез, но и от способа группирования.

Функция мощности критерия Никиулина обычно оказывается выпуклой вверх по  $k$ . Поэтому «оптимальное» число интервалов обычно существует. Это «оптимальное» значение растет с увеличением объема выборки. Но его величина также меньше значений, рекомендуемых любыми действующими регламентирующими документами и справочными источниками.

И еще одно замечание. В последние годы в сознании многих исследователей сформировалось устоявшееся мнение о критериях типа  $\chi^2$  как о плохих критериях согласия. Поэтому естествен вопрос: зачем использовать критерии типа  $\chi^2$ , если есть критерии Колмогорова и  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова? Имеется как минимум две причины, обосновывающие рекомендации применять критерии типа  $\chi^2$ . Во-первых, в случае проверки простых гипотез и использовании в критериях типа  $\chi^2$  асимптотически оптимального группирования с пози-

ций наибольшей мощности относительно близких альтернатив критерии типа  $\chi^2$  оказываются предпочтительнее непараметрических критериев согласия Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга [237, 79].

Во–вторых, непараметрические критерии при проверке сложных гипотез теряют «свободу от распределения», в то время как для критериев Никулина и  $\chi^2$  Пирсона предельные распределения статистик при проверке сложных гипотез известны. Конечно, для некоторых частных случаев проверки сложных гипотез различными способами получены модели предельных распределений статистик критериев типа Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсонна–Дарлинга. Однако это далеко не снимает остроту проблемы.

Есть и третий довод. Критерии согласия используют различные меры близости распределений, по–разному улавливают различные отклонения в наблюдаемых данных от предполагаемых законов распределений. Поэтому не следует обеднять методику статистического анализа, отказываясь от какого–либо из зарекомендовавших себя критериев. Лучше всего использовать их совокупность.

Более подробная информация о сравнительном анализе мощности критериев согласия приведена в разделе 4.

## 2.9. Рекомендации по использованию асимптотически оптимального группирования в критериях согласия

Применяя критерии согласия типа  $\chi^2$ , можно по–разному разбивать область определения случайной величины на интервалы: равной длины, равных вероятностей или асимптотически оптимальные. Использование асимптотически оптимальных интервалов обеспечивает максимальную мощность применяемого критерия против близких альтернатив, снижает риск принятия неверной нулевой гипотезы  $H_0$ .

Если гипотеза  $H_0$  справедлива или, наоборот, совершенно не соответствует характеру выборки, то выводы по критериям согласия при равновероятном, равноотстоящем и асимптотически оптимальном

группировании обычно оказываются очень близкими по вычисляемому значению вероятности  $P\{S > S^*\} > \alpha$ . И гипотезу  $H_0$  при любом группировании однозначно принимают или однозначно отвергают.

В случае равновероятного и равноотстоящего группирования наличие в выборке малых отклонений от предположений (от гипотезы  $H_0$ ) оказывается незамеченным критерием, а в случае асимптотически оптимального группирования эти отклонения будут заметны, что в принципе снижает риск принятия неверной нулевой гипотезы  $H_0$ .

Применяя критерии согласия типа  $\chi^2$ , не обязательно использовать только асимптотически оптимальное группирование наблюдений. Можно использовать и равновероятное группирование, и разбиение на интервалы равной длины. Но тогда следует помнить, что в этом случае критерии типа  $\chi^2$  будут хуже различать близкие гипотезы (близкие альтернативы).

В приложении А приведены таблицы асимптотически оптимального группирования (АОГ) для ряда распределений. Представлены таблицы двух видов. В таблицах первого вида содержатся граничные точки, инвариантные относительно параметров распределения, в таблицах второго – вероятности попадания в соответствующие интервалы.

Порядок использования асимптотически оптимального группирования в связи с конкретным законом распределения определяется табл. 2.8. В строках таблицы отражены функция плотности закона распределения, количество информации Фишера о соответствующем параметре по группированным и негруппированным данным, указаны номера таблиц в приложении А, в которых содержатся оптимальные для данной ситуации граничные точки в виде  $t_i = \phi(x_i, \theta)$ , инвариантном относительно  $\theta$ , и соответствующие значения вероятностей  $P_i$  попадания наблюдений в  $i$ -й интервал.

Для тех законов распределения, для которых таблицы асимптотически оптимального группирования отсутствуют, поскольку решение задачи асимптотически оптимального группирования нельзя получить в виде, инвариантном относительно параметров распределений (например, для распределений типа Накагами, бета-распределений), в соответствующих колонках табл. 2.8 стоят прочерки (тире). В таких случаях, чтобы применить асимптотически оптимальное группирование, можно рекомендовать решение задач вида (2.18), (2.19) в процессе

проверки согласия при определенных значениях параметров, используя содержащиеся в табл. 2.8 выражения для элементов информационной матрицы Фишера по группированным данным.

Для законов распределения, определяемых одним параметром (экспоненциального, Парето, Рэлея и т. п.), одну и ту же пару таблиц асимптотически оптимального группирования ( $t_i$  и  $P_i$ ) используют при проверке простых и сложных гипотез.

Для законов распределения, определяемых двумя параметрами, в случае сложной гипотезы и оценивания только одного параметра требуемая пара таблиц асимптотически оптимального группирования указана в строке для этого параметра. В случае сложной гипотезы и оценивания двух параметров или в случае простой гипотезы используют пару таблиц, указанных в строке с двумя параметрами. В колонках для количества информации Фишера по группированным и негруппированным данным в такой строке даны выражения для недиагональных элементов соответствующих информационных матриц  $J(\theta_i, \theta_j)$ , а  $J(\theta_i, \theta_j) = J(\theta_j, \theta_i)$ . Например, при оценивании по выборке только параметра сдвига нормального закона следует использовать пару табл. А.24–А.25, при оценивании только параметра масштаба – пару табл. А.26–А.27, а при проверке простых гипотез и сложных гипотез, сопровождаемых оцениванием по данной выборке двух параметров нормального закона, – пару табл. А.28–А.29.

В работах [169, 170, 171] задача асимптотически оптимального группирования была решена для критериев  $A$ - и  $E$ -оптимальности:

$$\max_{x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k} Sp\mathbf{J}_\Gamma(\theta),$$

$$\max_{x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k} \min_{i=1,r} \lambda_i(\mathbf{J}_\Gamma(\theta)).$$

В разделе 4.9 будет показано, что при  $A$ -оптимальном группировании мощность критерия Пирсона, хотя и незначительно, но выше, чем при  $D$ -оптимальном. В табл. А.59 – А.66 приложения А представлены граничные точки интервалов и соответствующие вероятности попадания в интервал при  $A$ -оптимальном группировании для некоторых распределений.

Таблица 2.8  
**Функции плотности распределений, элементы информационных матриц Фишера по группированнм и негруппированным наблюдениям, соответствующие таблицы асимптотически оптимального группирования**

Функция плотности распределения	Параметр распределения	Количество информации Фишера для параметра по наблюдениям группированным	Номер таблицы АОГ
1. Экспоненциальное $\frac{1}{\theta_0} e^{-(x-\theta_1)/\theta_0}$ $x \in (\theta_1, \infty)$ $t_i = (x - \theta_1) / \theta_0$	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left( t_i e^{-t_i} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}} \right)^2}{e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i}}$	A.2 A.1
2. Полунормальное $\frac{2}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta_1)^2/2\theta_0^2}$ $x \in (\theta_1, \infty)$ $t_i = (x_i - \theta_1) / \theta_0$	$\theta_0$	$\frac{2}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left( t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2/2} - t_i e^{-t_i^2/2} \right)^2}{\pi \{ \Phi_0(t_i) - \Phi_0(t_{i-1}) \}}$ $\Phi_0(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t'^2/2} dt$	A.7 A.6
3. Рэлея $\frac{(x-\theta_1)}{\theta_0^2} e^{-(x-\theta_1)^2/2\theta_0^2}$ $x \in (\theta_1, \infty)$ $t_i = (x_i - \theta_1) / \theta_0$	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left( t_{i-1}^2 e^{-t_{i-1}^2/2} - t_i^2 e^{-t_i^2/2} \right)^2}{e^{-t_{i-1}^2/2} - e^{-t_i^2/2}}$	A.2 A.3

Продолжение табл. 2.8

Функция плотности распределения	Параметр распределения	Количество информации Фишера для параметра по наблюдениям		Номер таблицы АОГ
		группированным	негруппированным	
4. Максвелла $\frac{2(x-\theta_1)^2}{\theta_0^3 \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta_1)^2/2\theta_0^2}$ $x \in (\theta_1, \infty)$ $t_i = (x_i - \theta_1) / \theta_0$	$\theta_0$	$\frac{4}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left[ t_{i-1}^3 \Phi(t_{i-1}) - t_i^3 \Phi(t_i) \right]^2}{\Phi_0(t_i) - 2t_i \Phi(t_i) - \Phi_0(t_{i-1}) + 2t_{i-1} \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{6}{\theta_0^2}$	A.4 A.5
5. Модуля нормального вектора $\frac{2(x-\theta_1)^{m-1}}{(2\theta_0^2)^{m/2} \Gamma(m/2)} e^{-(x-\theta_1)^2/2\theta_0^2}$ $x \in (\theta_1, \infty)$ $t_i = (x_i - \theta_1) / \theta_0$ $\xi = 2^{m/2-1} \Gamma(m/2)$	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left( t_{i-1}^m e^{-t_{i-1}^2/2} - t_i^m e^{-t_i^2/2} \right)^2}{\xi^2 [F(t_i) - F(t_{i-1})]}$ , при четном $m$ $F(t) = 1 - e^{-t^2/2} \left( 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \dots + \frac{t^{m-2}}{2^{m/2-1} \Gamma(m/2)} \right)$ , при нечетном	$\frac{2m}{\theta_0^2}$	A.8 A.9 A.10 A.11 A.12 A.13 A.14 A.15 A.16 A.17 A.18 A.19

<b>6. Парето</b> $\theta_0 \theta_1^{x-\theta_0-1}$ $x \in (\theta_1, \infty)$ $t_i = -\ln s_i = \theta_0 \ln(x_i / \theta_1)$	$\theta_0$ $\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{(s_{i-1} \ln s_{i-1} - s_i \ln s_i)^2}{s_{i-1} - s_i} =$ $= \frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left( t_i e^{-t_i} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}} \right)^2}{e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i}}$	$\frac{1}{\theta_0^2}$ A.1 A.2
<b>7. Эрланга порядка <math>m</math></b> $\frac{\theta_1^m}{\Gamma(m)} (x-\theta_2)^{m-1} e^{-\theta_1(x-\theta_2)}$ $x \in (\theta_1, \infty)$ $t_i = \theta_1(x_i - \theta_2)$	$\theta_1$ $\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left( t_i^m e^{-t_i} - t_{i-1}^m e^{-t_{i-1}} \right)^2}{\Gamma(m) \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{m-1} e^{-t} dt}$	$\frac{m}{\theta_1^2}$ A.54 —
<b>8. Лапласа</b> $\frac{\theta_0 - \theta_0  x-\theta_1 }{2} e^{-\theta_0  x-\theta_1 }$ $x \in (-\infty, \infty)$ $t_i = \theta_0(x_i - \theta_1)$	$\theta_0$ $P_i(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( e^{t_i} - e^{t_{i-1}} \right), & t_i < 0; \\ \frac{1}{2} \left( e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i} \right), & t_{i-1} > 0; \\ 1 - \frac{1}{2} \left( e^{-t_i} + e^{t_{i-1}} \right), & t_{i-1} < 0 < t_i \end{cases}$	$\frac{1}{\theta_0^2}$ A.46 A.47 A.48 A.49

Продолжение табл. 2.8

Функция плотности распределения	Параметр распределения	Количество информации Фишера для параметра по наблюдениям	Номер таблицы АОГ
9. Нормальное	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k [\phi(t_{i-1}) - \phi(t_i)]^2$	A.24 A.25
$\frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta_0)^2}{2\theta_1^2}}$ $x \in (-\infty, \infty)$	$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ , $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-t'^2/2} dt$		
$t_i = \frac{x_i - \theta_0}{\theta_1}$	$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[t_{i-1}\phi(t_{i-1}) - t_i\phi(t_i)]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	A.26 A.27
10. Логарифмически нормальное (ln)	$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})][t_{i-1}\phi(t_{i-1}) - t_i\phi(t_i)]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	A.28 A.29
$\frac{1}{x\theta_1 \sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x - \theta_0)^2/2\theta_1^2}$ $x \in (0, \infty)$	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[\phi(t_{i-1}) - \phi(t_i)]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	A.24 A.25
$t_i = \frac{\ln x_i - \theta_0}{\theta_1}$	$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[t_{i-1}\phi(t_{i-1}) - t_i\phi(t_i)]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	A.26 A.27
	$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})][t_{i-1}\phi(t_{i-1}) - t_i\phi(t_i)]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	A.28 A.29

11. Логарифмически нормальное (lg)	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[\phi(t_{i-1}) - \phi(t_i)]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{1}{\theta_1^2}$	A.24	A.25
	$x \in (0, \infty)$	$t_i = \frac{\lg x_i - \theta_0}{\theta_1}$			
12. Коши	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{2}{\theta_1^2}$	A.26	A.27
	$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})][t_{i-1}\phi(t_{i-1}) - t_i\phi(t_i)]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	0	A.28	A.29
$\frac{\theta_0}{\pi [\theta_0^2 + (x - \theta_1)^2]}$	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\pi \arctg t_i - \arctg t_{i-1}} \left[ \frac{t_{i-1}}{1+t_{i-1}^2} - \frac{t_i}{1+t_i^2} \right]^2$	$\frac{1}{2\theta_1^2}$	A.36	A.37
	$x \in (-\infty, \infty)$	$t_i = (x_i - \theta_1)/\theta_0$			
$\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\pi \arctg t_i - \arctg t_{i-1}} \left[ \frac{1}{1+t_{i-1}^2} - \frac{1}{1+t_i^2} \right]^2$	$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\pi \arctg t_i - \arctg t_{i-1}} \left( \frac{t_{i-1}}{1+t_{i-1}^2} - \frac{t_i}{1+t_i^2} \right) \left( \frac{1}{1+t_{i-1}^2} - \frac{1}{1+t_i^2} \right)$	$\frac{1}{2\theta_1^2}$	A.38	A.39
	$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\pi \theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left( \frac{t_{i-1}}{1+t_{i-1}^2} - \frac{t_i}{1+t_i^2} \right) \left( \frac{1}{1+t_{i-1}^2} - \frac{1}{1+t_i^2} \right)}{\arctg t_i - \arctg t_{i-1}}$	0	A.40	$P_i = \frac{1}{k}$

Продолжение табл. 2.8

Функция плотности распределения	Параметр распределения	Количество информации Фишера для параметра по наблюдениям	Номер таблицы АОГ
13. Логистическое	$\theta_0$	группированным $\frac{\pi}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \left[ \frac{e^{-t_i}}{(1+e^{-t_i})^2} - \frac{e^{-t_{i-1}}}{(1+e^{-t_{i-1}})^2} \right]^2$	$t_i$ $P_i$
$\frac{\pi}{\theta_1\sqrt{3}} \times \exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1\sqrt{3}}\right\}$ $\times \left[1 + \exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1\sqrt{3}}\right\}\right]^2$ $x \in (-\infty, \infty)$	$t_i = \pi(x_i - \theta_0) / \theta_1\sqrt{3}$	$\frac{\pi^2}{\theta_1^2} 9$ $\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \left[ \frac{t_i e^{-t_i}}{(1+e^{-t_i})^2} - \frac{t_{i-1} e^{-t_{i-1}}}{(1+e^{-t_{i-1}})^2} \right]^2$	A.41 A.42 $\frac{1}{\theta_1^2} 9$ A.43

$\theta_0, \theta_1$	$\frac{\pi^2}{\theta_1^2 \sqrt{3}} \sum_{i=1}^k \left[ \frac{\left(1+e^{-t_i}\right)^2}{\left(1+e^{-t_i}\right)^{-1} - \left(1+e^{-t_{i-1}}\right)^{-1}} \times \right.$ $\left. \times \left[ \frac{e^{-t_i}}{\left(1+e^{-t_i}\right)^2} - \frac{e^{-t_{i-1}}}{\left(1+e^{-t_{i-1}}\right)^2} \right] \right]$	0	A.44	A.45
14. Вейбулла	$\theta_0$ $\frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left[ t_i \ln t_i e^{-t_i} - t_{i-1} \ln t_{i-1} e^{-t_{i-1}} \right]^2}{e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i}}$	$\frac{1}{\theta_0^2} \times$ $\left( 1 + \frac{\pi^2}{6} + C^2 - 2C \right)$	A.20	A.21
$t_i = [x_i - \theta_2]/\theta_1$ $C = 0.577215664 -$ постоянная Эйлера	$\theta_1$ $\frac{\theta_0^2}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left[ t_{i-1} e^{-t_{i-1}} - t_i e^{-t_i} \right]^2}{e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i}}$	$\frac{\theta_0^2}{\theta_1^2}$	A.1	A.2
$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{\left( t_{i-1} e^{-t_{i-1}} - t_i e^{-t_i} \right) \left( t_i \ln t_i e^{-t_i} - t_{i-1} \ln t_{i-1} e^{-t_{i-1}} \right)}{e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i}}$	$\frac{1}{\theta_1} (C-1)$	A.22	A.23

Продолжение табл. 2.8

Функция плотности распределения	Параметр распределения	Количество информации Фишера для параметра по наблюдениям	Номер таблицы АОГ
15. Минимального значения	группированным	негруппированным	
$\frac{1}{\theta_1} \exp \left\{ \frac{x - \theta_0}{\theta_1} - \exp \left( \frac{x - \theta_0}{\theta_1} \right) \right\}$ $x \in (-\infty, \infty)$ , $t_i = \exp(s_i)$ , $s_i = \frac{x_i - \theta_0}{\theta_1}$	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left[ t_{i-1} e^{-t_{i-1}} - t_i e^{-t_i} \right]^2}{e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i}}$	A.1 A.2
	$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left[ t_{i-1} s_{i-1} e^{-t_{i-1}} - t_i s_i e^{-t_i} \right]^2}{e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i}}$	A.20 A.21
	$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left( t_{i-1} e^{-t_{i-1}} - t_i e^{-t_i} \right) \left( t_{i-1} s_{i-1} e^{-t_{i-1}} - t_i s_i e^{-t_i} \right)}{e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i}}$	A.22 A.23
$\frac{1}{\theta_1} \exp \left\{ -\frac{x - \theta_0}{\theta_1} - \exp \left( -\frac{x - \theta_0}{\theta_1} \right) \right\}$ $x \in (-\infty, \infty)$ , $t_i = \exp(s_i)$ , $s_i = \frac{x_i - \theta_0}{\theta_1}$	$\theta_0$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left[ t_{i-1} e^{-t_{i-1}} - t_i e^{-t_i} \right]^2}{e^{-t_{i-1}} - e^{-t_i}}$	A.30 A.31
	$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left[ t_i s_i e^{-t_i} - t_{i-1} s_{i-1} e^{-t_{i-1}} \right]^2}{e^{-t_i} - e^{-t_{i-1}}}$	A.32 A.33

	$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left( t_{i-1} e^{-t_{i-1}} - t_i e^{-t_i} \right) \left( t_i s_i e^{-t_i} - t_{i-1} s_{i-1} e^{-t_{i-1}} \right)}{e^{-t_i} - e^{-t_{i-1}}} \quad A.35$	$\frac{1}{\theta_1^2} (C-1) \quad A.34$
17. Двойное показательное	$f(x) = \theta_0 \theta_1 \exp \left\{ -(x-\theta_2) \theta_0 - \theta_1 \exp \left[ -(x-\theta_2) \theta_0 \right] \right\}$ $x \in (-\infty, \infty)$	$\theta_0 \quad \frac{1}{\theta_0^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left[ t_i s_i e^{-t_i} - t_{i-1} s_{i-1} e^{-t_{i-1}} \right]^2}{e^{-t_i} - e^{-t_{i-1}}} \quad A.51$ $t_i = \theta_1 \exp \left\{ -s_i \right\}$ $s_i = \theta_0 (x_i - \theta_2)$	$\frac{1}{\theta_0^2} \left[ \ln^2 \theta_1 + 2(C-1) \ln \theta_1 + 1 + \frac{\pi}{6} + C^2 - 2C \right] \quad A.50$
	$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left[ t_{i-1} e^{-t_{i-1}} - t_i e^{-t_i} \right]^2}{e^{-t_i} - e^{-t_{i-1}}} \quad A.1 \quad A.31$	$\frac{1}{\theta_1^2} \times \frac{1}{\theta_0 \theta_1} \times \frac{\theta_0 \theta_1}{\sum_{i=1}^k \frac{\left( t_i s_i e^{-t_i} - t_{i-1} s_{i-1} e^{-t_{i-1}} \right) \left( t_{i-1} e^{-t_{i-1}} - t_i e^{-t_i} \right)}{e^{-t_i} - e^{-t_{i-1}}}} \times (1 - C - \ln \theta_2) \quad A.52 \quad A.35$
18. Накагами	$\frac{2}{\Gamma(\theta_1)} \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^{\theta_1} (x-\theta_2)^{2\theta_1-1} \times \exp \left\{ -\frac{\theta_1 (x-\theta_2)^2}{\theta_0^2} \right\}$	$\theta_0 \quad \frac{4}{\theta_0^2 \Gamma(\theta_1)} \sum_{i=1}^k \frac{\left[ \theta_{i-1} s_{i-1} e^{-t_{i-1}} - \theta_i s_i e^{-t_i} \right]^2}{t_i^{2\theta_1-1} e^{-t_i} dt} \quad -$	$\frac{4\theta_1}{\theta_0^2} \quad -$

Продолжение табл. 2.8

Функция плотности распределения	Параметр распределения	Количество информации Фишера для параметра по наблюдениям группированным	Номер таблицы АОГ
$x \in (0_2, \infty)$	$t_i = \frac{\theta_1(x_i - \theta_2)^2}{\theta_0^2}$	$\frac{1}{\Gamma(\theta_1)} \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_1-1} e^{-t} \ln t dt + \frac{1}{\theta_1} \left( t_i^{\theta_1} e^{-t_i} - t_{i-1}^{\theta_1} e^{-t_{i-1}} \right) - \right.$ $\left. -\psi(\theta_1) \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_1-1} e^{-t} dt \right\}^2 \Bigg/ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_1-1} e^{-t} dt$	$t_i$ $P_i$
$\psi(\theta_1) = \Gamma'(\theta_1)/\Gamma(\theta_1)$	$\theta_1$	$\frac{2}{\Gamma(\theta_1)} \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_1-1} e^{-t} \ln t dt + \frac{1}{\theta_1} \left( t_i^{\theta_1} e^{-t_i} - t_{i-1}^{\theta_1} e^{-t_{i-1}} \right) - \right.$ $\left. -\psi(\theta_1) \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_1-1} e^{-t} dt \right\} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_1-1} e^{-t} dt \right\} \Bigg/ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_1-1} e^{-t} dt$	$\psi'(\theta_1) - \frac{1}{\theta_1}$ — —
19. Гамма-распределение	$\frac{\theta_1^{\theta_0}}{\Gamma(\theta_0)} (x - \theta_2)^{\theta_0-1} \times e^{-\theta_1(x-\theta_2)}$	$\theta_0$ $\frac{1}{\Gamma(\theta_0)} \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} e^{-t} \ln t dt - \right.$ $\left. \psi'(\theta_0) \right\}$	A.53 A.54

$x \in (\theta_2, \infty)$	$\left  -\psi(\theta_0) \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} e^{-t} dt \right ^2 / \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} e^{-t} dt$		
$t_i = \theta_1(x_i - \theta_2)$	$\frac{1}{\theta_1^2 \Gamma(\theta_0)} \sum_{i=1}^k \left[ t_i^{\theta_0} e^{-t_i} - t_{i-1}^{\theta_0} e^{-t_{i-1}} \right]^2 / \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} e^{-t} dt$	$\frac{\theta_0}{\theta_1^2}$	A.55 A.56
$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1 \Gamma(\theta_0)} \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} e^{-t} \ln t dt - \left[ t_i^{\theta_0} e^{-t_i} - t_{i-1}^{\theta_0} e^{-t_{i-1}} \right] \right\} / \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} e^{-t} dt$	$-\frac{1}{\theta_1}$	A.57 A.58
20. Бета-распределение первого рода	$\frac{1}{B(\theta_0, \theta_1)} \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} \ln t dt - \left[ \psi(\theta_0) - \psi(\theta_0 + \theta_1) \right] \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} dt \right\}^2 / \sqrt{\int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} dt}$	$\psi'(\theta_0) - \psi'(\theta_0 + \theta_1)$	-
$\frac{1}{\theta_3 B(\theta_0, \theta_1)} \times \left( \frac{x - \theta_2}{\theta_3} \right)^{\theta_0-1} \times \left( 1 - \frac{x - \theta_2}{\theta_3} \right)^{\theta_1-1}$	$\theta_0$	$-$	$-$

Продолжение табл. 2.8

Функция плотности распределения	Параметр распределения	Количество информации Фишера для параметра по наблюдениям группированным	Номер таблицы АОГ
$x \in [\theta_2, \theta_2 + \theta_3]$ $B(\theta_0, \theta_1) = \Gamma(\theta_0)\Gamma(\theta_1)/\Gamma(\theta_0 + \theta_1)$ $t_i = (x_i - \theta_2)/\theta_3$		$\frac{1}{B(\theta_0, \theta_1)} \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} \ln(1-t) dt - \right. \\ \left. - [\psi(\theta_1) - \psi(\theta_0 + \theta_1)] \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} dt \right\}^2 / \\ \left. \begin{array}{l} \psi'(\theta_1) - \\ - \psi'(\theta_0 + \theta_1) \end{array} \right)$	$t_i$ $P_i$
	$\theta_1$	$\left. \begin{array}{l} \sqrt{\int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} dt} \\ : \end{array} \right.$	
	$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{B(\theta_0, \theta_1)} \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} \ln t dt - \right. \\ \left. - [\psi(\theta_0) - \psi(\theta_0 + \theta_1)] \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} dt \right\} \times \\ \times \left. \begin{array}{l} \sqrt{\int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} \ln(1-t) dt} \\ : \end{array} \right.$	



Продолжение табл. 2.8

Функция плотности распределения	Параметр распределения	Количество информации Филпера для параметра по наблюдениям группированным	Номер таблицы АОГ
$t_i = \frac{\theta_2(x_i - \theta_3)}{1 + \theta_2(x_i - \theta_3)}$	$\theta_0, \theta_1$	См. соответствующие соотношения для бета-распределения первого рода	$- \gg -$
	$\theta_2$	$\frac{1}{\theta_2^2 B(\theta_0, \theta_1)} \sum_{i=1}^k \left\{ \theta_0 \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} dt - \right.$ $\left. - (\theta_0 + \theta_1) \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0} (1-t)^{\theta_1-1} dt \right\}^2 /$ $\left( \theta_0 \theta_1 / \theta_2^2 (\theta_0 + \theta_1 + 1) \right)$	$-$
	$\theta_0, \theta_2$	$\frac{1}{\theta_2 B(\theta_0, \theta_1)} \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} dt / \right.$ $\left. \theta_2 (\theta_0 + \theta_1) \right)$	$-$

	$\times \left( \theta_0 \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} dt - (\theta_0 + \theta_1) \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0} (1-t)^{\theta_1-1} dt \right)$			
$\theta_1, \theta_2$	$\frac{1}{\theta_2 B(\theta_0, \theta_1)} \sum_{i=1}^k \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} \ln(1-t) dt \right/$ $\left. \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} dt - (\psi(\theta_1) - \psi(\theta_0 + \theta_1)) \right\} \times$ $\times \left( \theta_0 \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1} dt - (\theta_0 + \theta_1) \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{\theta_0} (1-t)^{\theta_1-1} dt \right)$	$\frac{\theta_0}{\theta_2(\theta_0 + \theta_1)}$ $-$ $-$	A.25	
23. Распределение Sb-Джонсона	$\frac{\sqrt{2\pi(x-\theta_3)(\theta_2+\theta_3-x)}}{\theta_1\theta_2} \times$ $\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \theta_0 - \theta_1 \ln \frac{x-\theta_3}{\theta_2+\theta_3-x} \right]^2 \right\}$ $x \in [\theta_3, \theta_2 + \theta_3]$	$\theta_0$ $\sum_{i=1}^k \frac{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	1	A.24
$t_i = \theta_0 + \theta_1 \ln \frac{x_i - \theta_3}{\theta_2 + \theta_3 - x_i}$	$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[(t_i - \theta_0)\varphi(t_i) - (t_{i-1} - \theta_0)\varphi(t_{i-1})]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{2 + \theta_0^2}{\theta_1^2}$	A.27

Продолжение табл. 2.8

Функция плотности распределения	Параметр распределения	Количество информации Фишера для параметра по наблюдениям группированным	Номер таблицы АОГ
	$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{[(t_i - \theta_0)\phi(t_i) - (t_{i-1} - \theta_0)\phi(t_{i-1})][\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	A.29
24. Распределение Ст-Джонсона	$\frac{\theta_1}{\sqrt{2\pi(x-\theta_3)}} \times \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0 + \theta_1 \ln \frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right]^2\right\}$	$\sum_{i=1}^k \frac{[\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	A.24 A.25
$x \in [\theta_3, \infty)$	$\theta_1$	$\frac{1}{\theta_1^2} \sum_{i=1}^k \frac{[(t_i - \theta_0)\phi(t_i) - (t_{i-1} - \theta_0)\phi(t_{i-1})]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	A.26 A.27
$t_i = \theta_0 + \theta_1 \ln \frac{x_i - \theta_3}{\theta_2}$	$\theta_0, \theta_1$	$\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^k \frac{[(t_i - \theta_0)\phi(t_i) - (t_{i-1} - \theta_0)\phi(t_{i-1})][\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	A.28 A.29
	$\theta_2$	$\frac{\theta_1^2}{\theta_2^2} \sum_{i=1}^k \frac{[\phi(t_{i-1}) - \phi(t_i)]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	A.24 A.25

$\theta_0, \theta_2$	$\frac{\theta_1}{\theta_2} \sum_{i=1}^k \frac{[\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})][\phi(t_{i-1}) - \phi(t_i)]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$-\frac{\theta_1}{\theta_2}$	-	-
$\theta_1, \theta_2$	$\frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^k \frac{[(t_i - \theta_0)\phi(t_i) - (t_{i-1} - \theta_0)\phi(t_{i-1})][\phi(t_{i-1}) - \phi(t_i)]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{\theta_0}{\theta_2}$	-	-
25. Распределение Su-Jacksona	$\frac{\theta_1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{(x - \theta_3)^2 + \theta_2^2}} \times$ $\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta_0 + \theta_1 \ln \left\{ \frac{x - \theta_3}{\theta_2} + \sqrt{\left( \frac{x - \theta_3}{\theta_2} \right)^2 + 1} \right\}^2 \right\}$ $x \in (-\infty, \infty)$ $t_i = \theta_0 + \theta_1 \ln \left\{ s_i + \sqrt{s_i^2 + 1} \right\}$ $s_i = (x_i - \theta_3) / \theta_2$	$\theta_0$ $\sum_{i=1}^k \frac{[\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})]^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	1	A.24 A.25

Продолжение табл. 2.8

Функция плотности распределения	Параметр распределения	Количество информации Фишера для параметра по наблюдениям	Номер таблицы АОГ
		группированный	негруппированный
$\theta_2$	$\frac{\theta_1^2}{\theta_2^2} \sum_{i=1}^k \frac{\left( \frac{s_{i-1}\phi(t_{i-1})}{\sqrt{s_{i-1}^2 + 1}} - \frac{s_i\phi(t_i)}{\sqrt{s_i^2 + 1}} \right)^2}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$\frac{1+\theta_1^2}{\theta_2^2} - \frac{\theta_1^3}{\theta_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{(s^2+1)^{3/2}} ds$	$t_i$ $P_i$
$\theta_0, \theta_2$	$\frac{\theta_1}{\theta_2} \sum_{i=1}^k \frac{\left[ \phi(t_i) - \phi(t_{i-1}) \right] \left[ \frac{\phi(t_{i-1})s_{i-1}}{\sqrt{s_{i-1}^2 + 1}} - \frac{\phi(t_i)s_i}{\sqrt{s_i^2 + 1}} \right]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})}$	$-\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{(s^2+1)^{3/2}} ds$	
$\theta_1, \theta_2$	$\frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^k \frac{\left[ (t_i - \theta_0)\phi(t_i) - (t_{i-1} - \theta_0)\phi(t_{i-1}) \right]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})} \times \left[ \frac{\phi(t_{i-1})s_{i-1}}{\sqrt{s_{i-1}^2 + 1}} - \frac{\phi(t_i)s_i}{\sqrt{s_i^2 + 1}} \right]$	$\theta_0 \theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s\phi(t)}{s^2+1} ds -$ $-2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s\phi(t)}{(s^2+1)^{3/2}} ds$	

$\theta_3$	$\frac{\theta_1^2 \sum_{i=1}^k \left[ \frac{\phi(t_{i-1})}{\sqrt{s_{i-1}^2 + 1}} - \frac{\phi(t_i)}{\sqrt{s_i^2 + 1}} \right]^2}{\theta_2^2 (\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1}))}$	$\frac{\theta_1^3}{\theta_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{(s^2 + 1)^{3/2}} ds$	-	-
$\theta_0, \theta_3$	$\frac{\theta_1 \sum_{i=1}^k \left[ [\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})] \left[ \frac{\phi(t_{i-1})}{\sqrt{s_{i-1}^2 + 1}} - \frac{\phi(t_i)}{\sqrt{s_i^2 + 1}} \right] \right]}{\theta_2 (\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1}))}$	$- \frac{\theta_1^2}{\theta_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{s^2 + 1} ds$	-	-
$\theta_1, \theta_3$	$\frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^k \frac{[(t_i - \theta_0)\phi(t_i) - (t_{i-1} - \theta_0)\phi(t_{i-1})]}{\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})} \times$ $\times \left[ \frac{\phi(t_{i-1})}{\sqrt{s_{i-1}^2 + 1}} - \frac{\phi(t_i)}{\sqrt{s_i^2 + 1}} \right]$	$\frac{\theta_0 \theta_1}{\theta_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{s^2 + 1} ds$	-	-
$\theta_2, \theta_3$	$\left[ \frac{\phi(t_{i-1}) s_{i-1}}{\sqrt{s_{i-1}^2 + 1}} - \frac{\phi(t_i) s_i}{\sqrt{s_i^2 + 1}} \right] \left[ \frac{\phi(t_{i-1})}{\sqrt{s_{i-1}^2 + 1}} - \frac{\phi(t_i)}{\sqrt{s_i^2 + 1}} \right]$	$\frac{\theta_1^3}{\theta_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s \phi(t)}{(s^2 + 1)^{3/2}} ds +$ $+ \frac{5\theta_1}{\theta_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s \phi(t)}{(s^2 + 1)^{5/2}} ds$	-	-

Продолжение табл. 2.8

Функция плотности распределения	Параметр распределения	Количество информации Фишера для параметра по наблюдениям группированным	Номер таблицы АОГ негруппированым	$t_i$	$P_i$
26. Класс экспоненциальных распределений	$\frac{\theta_2}{2\theta_1\Gamma(1/\theta_2)} \times \exp\left\{-\left(\frac{ x-\theta_0 }{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right\}$	$\theta_2^2 \frac{2\left(e^{- t_{i-1} \theta_2} - e^{- t_i \theta_2}\right)^2}{\theta_1^2\Gamma(1/\theta_2)\sum_{i=1}^k \gamma_i \operatorname{sign} t_i - \gamma_{i-1} \operatorname{sign} t_{i-1}}$	$\theta_2^2 \Gamma\left(2 - \frac{1}{\theta_2}\right)$ $\theta_1^2 \Gamma(1/\theta_2)$	-	-
$x \in (-\infty, \infty)$	$t_i = \frac{x_i - \theta_0}{\theta_1}$	$\theta_2^2 \frac{\left(t_{i-1}e^{- t_{i-1} \theta_2} - t_i e^{- t_i \theta_2}\right)^2}{2\theta_1^2\Gamma(1/\theta_2)\sum_{i=1}^k \gamma_i \operatorname{sign} t_i - \gamma_{i-1} \operatorname{sign} t_{i-1}}$	$\frac{\theta_2}{\theta_1^2}$	-	-
$\gamma_i = \int_0^{ t_i ^{\theta_2}} y^{1/\theta_2 - 1} e^{-y} dy$	$\theta_0, \theta_1$	$\frac{\theta_2^2}{2\theta_1^2\Gamma(1/\theta_2)} \times \sum_{i=1}^k \frac{\left(e^{- t_{i-1} \theta_2} - e^{- t_i \theta_2}\right) \left(t_{i-1}e^{- t_{i-1} \theta_2} - t_i e^{- t_i \theta_2}\right)}{\gamma_i \operatorname{sign} t_i - \gamma_{i-1} \operatorname{sign} t_{i-1}}$	0	-	-

$\gamma'_i = \int_0^{ t_i ^{\theta_2}} y^{1/\theta_2 - 1} e^{-y} \ln y dy$	$\frac{1}{2\Gamma(1/\theta_2)} \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{1}{\theta_2^2} [\gamma'_i \operatorname{sign} t_i - \gamma'_{i-1} \operatorname{sign} t_{i-1} + \psi(1/\theta_2)(\gamma_i \operatorname{sign} t_i - \gamma_{i-1} \operatorname{sign} t_{i-1})] + t_i e^{- t_i ^{\theta_2}} \ln  t_i  - t_{i-1} e^{- t_{i-1} ^{\theta_2}} \ln  t_{i-1}  \right\}^2 / \left( \gamma_i \operatorname{sign} t_i - \gamma_{i-1} \operatorname{sign} t_{i-1} \right)$	$\frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \sum_{i=1}^k \left( e^{- t_{i-1} ^{\theta_2}} - e^{- t_i ^{\theta_2}} \right) \times \left\{ \frac{1}{\theta_2^2} [\gamma'_i \operatorname{sign} t_i - \gamma'_{i-1} \operatorname{sign} t_{i-1} + \psi(1/\theta_2)(\gamma_i \operatorname{sign} t_i - \gamma_{i-1} \operatorname{sign} t_{i-1})] + t_i e^{- t_i ^{\theta_2}} \ln  t_i  - t_{i-1} e^{- t_{i-1} ^{\theta_2}} \ln  t_{i-1}  \right\} / \left( \gamma_i \operatorname{sign} t_i - \gamma_{i-1} \operatorname{sign} t_{i-1} \right)$
$\theta_2$		$\theta_0, \theta_2$

Окончание табл. 2.8

Функция плотности распределения	Параметр распределения	Количество информации Фишера для параметра по наблюдениям группированным	Номер таблицы АОГ негруппированным	$t_i$	$P_i$
		$\frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \sum_{i=1}^k \left( t_{i-1} e^{- t_{i-1} ^{\theta_2}} - t_i e^{- t_i ^{\theta_2}} \right) \times$ $\times \left\{ \frac{1}{\theta_2^2} \left[ \gamma'_i \text{sign} t_i - \gamma'_{i-1} \text{sign} t_{i-1} + \right. \right.$ $-\psi(1/\theta_2) (\gamma_i \text{sign} t_i - \gamma_{i-1} \text{sign} t_{i-1}) \Big] +$ $\left. \left. + t_i e^{- t_i ^{\theta_2}} \ln  t_i  - t_{i-1} e^{- t_{i-1} ^{\theta_2}} \ln  t_{i-1}  \right\} \right/ \\ \left( \gamma_i \text{sign} t_i - \gamma_{i-1} \text{sign} t_{i-1} \right)$	$-\frac{1+\theta_2+\Psi(1/\theta_2)}{\theta_1\theta_2}$	—	—

## 2.10. Примеры использования таблиц асимптотически оптимального группирования

Ниже на примерах рассмотрено применение асимптотически оптимального группирования в случае простых и сложных гипотез.

**Пример 2.1.** Проверяют простую гипотезу о принадлежности выборки экспоненциальному закону распределения. Упорядоченная выборка объемом 200 наблюдений имеет вид

0.0005	0.0095	0.0189	0.0200	0.0225	0.0261	0.0339	0.0343	0.0463	0.0509
0.0625	0.0748	0.0797	0.0802	0.0857	0.0887	0.1049	0.1065	0.1276	0.1395
0.1465	0.1539	0.1565	0.1582	0.1584	0.1648	0.1679	0.1681	0.1689	0.1818
0.1940	0.1944	0.1950	0.1976	0.1992	0.2064	0.2260	0.2277	0.2311	0.2433
0.2441	0.2442	0.2509	0.2522	0.2566	0.2683	0.2840	0.3006	0.3025	0.3052
0.3056	0.3098	0.3158	0.3286	0.3288	0.3297	0.3396	0.3490	0.3578	0.3650
0.3728	0.3755	0.3823	0.3834	0.4017	0.4093	0.4135	0.4259	0.4419	0.4486
0.4487	0.4503	0.4587	0.4699	0.4711	0.4802	0.4814	0.4818	0.4981	0.4984
0.4989	0.5005	0.5085	0.5191	0.5279	0.5301	0.5328	0.5331	0.5389	0.5392
0.5432	0.5455	0.5548	0.5801	0.6001	0.6009	0.6694	0.6803	0.6817	0.6838
0.6844	0.6995	0.7127	0.7358	0.7515	0.7566	0.7699	0.7953	0.8048	0.8072
0.8116	0.8232	0.8271	0.8323	0.8771	0.8908	0.8949	0.9272	0.9571	0.9593
0.9682	0.9708	0.9761	0.9881	0.9931	1.0110	1.0188	1.0364	1.0447	1.0612
1.0683	1.0909	1.0984	1.1030	1.1068	1.1076	1.1100	1.1493	1.1562	1.1634
1.1702	1.1866	1.1964	1.2006	1.2103	1.2325	1.2607	1.2945	1.3185	1.3437
1.3918	1.4287	1.4398	1.4505	1.5068	1.5126	1.5491	1.5501	1.5681	1.5933
1.6323	1.6446	1.6686	1.6782	1.6816	1.6839	1.7054	1.7335	1.7560	1.7629
1.7677	1.7681	1.9750	1.9840	1.9873	2.0031	2.0870	2.0877	2.0957	2.1226
2.1382	2.1925	2.1950	2.2029	2.2315	2.2318	2.3487	2.4474	2.5498	2.8392
2.9899	3.0846	3.1179	3.3316	3.5926	3.5937	3.6218	4.0604	4.8403	6.0534

Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0 : f(x, \theta) = \frac{1}{\theta_0} e^{-(x-\theta_1)/\theta_0}$$

при  $\theta_0 = 1$ ,  $\theta_1 = 0$ .

Оптимальные граничные точки в виде  $t_i = (x_i - \theta_1) / \theta_0$  берут из табл. А.1. Выбирают число интервалов  $k = 5$ , так как  $P_k n = 0.0189 \cdot 200 > 3$ , а при большем числе интервалов ожидаемые частоты попадания в крайний интервал будут еще меньше. При  $k = 5$

значения  $t_i$  соответственно: 0.6004; 1.3545; 2.3720; 3.9657. При  $\theta_0 = 1$  и  $\theta_1 = 0$  значения  $x_i$  совпадают со значениями  $t_i$ . Соответствующие такому разбиению вероятности попадания наблюдений в интервалы берут из табл. А.2: 0.4514; 0.2905; 0.1648; 0.0744; 0.0189. По выборке находят числа наблюдений  $n_i$ , попавших в интервалы: 95, 55, 37, 10, 3. В соответствии с формулой (2.1) вычисляют значение статистики  $X_n^2 = 2.6672$ . При справедливости  $H_0$  статистика подчиняется  $\chi_4^2$ -распределению и при значениях уровня значимости

$$\alpha < P\{X_n^2 > 2.6672\} = \frac{1}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} \int_{2.8694}^{\infty} s^{r/2-1} e^{-s/2} ds = 0.6150$$

гипотеза  $H_0$  будет принята. Вычисляемое в соответствии с (2.3) значение статистики отношения правдоподобия  $S_{\text{ОП}} = 2.8694$ ;  $P\{S_{\text{ОП}} > 2.8694\} = 0.5799$ . И таким образом, в соответствии с данным критерием также нет оснований для отклонения гипотезы  $H_0$ . На рис. 2.22 представлены плотность, гистограмма и результаты проверки согласия.

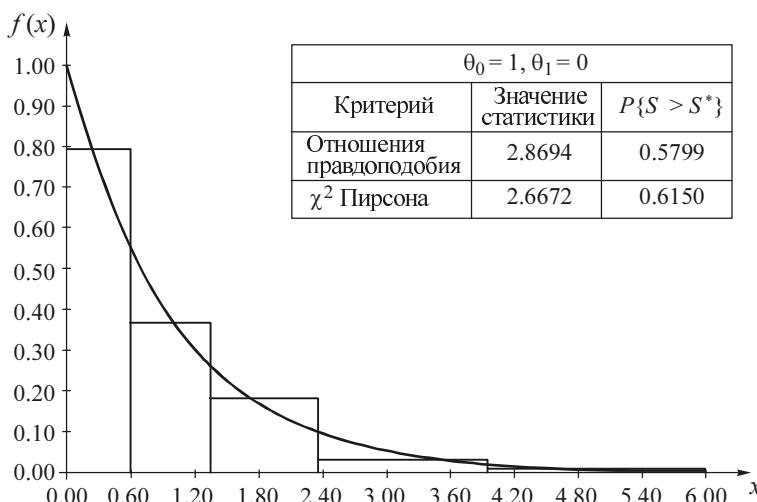


Рис. 2.22. Результаты проверки согласия к примеру 2.1

**Пример 2.2.** Проверяют сложную гипотезу о принадлежности выборки экспоненциальному закону распределения. Упорядоченная выборка объемом 300 наблюдений имеет вид

0.0204	0.0242	0.0336	0.0342	0.0410	0.0511	0.0539	0.0859	0.0888	0.0925
0.0970	0.0996	0.1006	0.1039	0.1065	0.1067	0.1158	0.1170	0.1185	0.1188
0.1206	0.1207	0.1215	0.1260	0.1336	0.1336	0.1389	0.1462	0.1518	0.1565
0.1641	0.1664	0.1677	0.1738	0.1785	0.1812	0.1823	0.1889	0.2002	0.2032
0.2042	0.2074	0.2143	0.2221	0.2223	0.2265	0.2299	0.2335	0.2351	0.2408
0.2413	0.2424	0.2566	0.2576	0.2676	0.2697	0.2745	0.2749	0.2766	0.2780
0.2785	0.2826	0.2839	0.2909	0.2936	0.3029	0.3097	0.3251	0.3280	0.3352
0.3593	0.3597	0.3675	0.3688	0.3751	0.3816	0.3831	0.3875	0.3934	0.4049
0.4057	0.4057	0.4127	0.4133	0.4146	0.4212	0.4225	0.4231	0.4236	0.4363
0.4381	0.4414	0.4493	0.4553	0.4649	0.4712	0.4733	0.4798	0.4816	0.4817
0.4837	0.4880	0.4890	0.4917	0.4927	0.4982	0.5044	0.5081	0.5092	0.5135
0.5245	0.5301	0.5350	0.5351	0.5430	0.5432	0.5534	0.5609	0.5636	0.5637
0.5747	0.5806	0.5891	0.5898	0.5926	0.5962	0.6099	0.6137	0.6423	0.6670
0.6696	0.6713	0.6759	0.6885	0.6910	0.6913	0.6990	0.7043	0.7089	0.7150
0.7180	0.7189	0.7197	0.7226	0.7343	0.7530	0.7627	0.7635	0.7639	0.7822
0.7883	0.7889	0.7930	0.7943	0.7972	0.7979	0.8190	0.8191	0.8214	0.8234
0.8289	0.8291	0.8327	0.8382	0.8400	0.8408	0.8466	0.8571	0.8655	0.8679
0.8770	0.8895	0.8898	0.8925	0.8971	0.9041	0.9106	0.9134	0.9216	0.9234
0.9279	0.9395	0.9430	0.9458	0.9550	0.9625	0.9693	0.9792	0.9855	0.9877
1.0074	1.0127	1.0130	1.0172	1.0225	1.0227	1.0254	1.0520	1.0537	1.0720
1.0761	1.1009	1.1041	1.1071	1.1183	1.1586	1.1630	1.1719	1.1766	1.1909
1.1980	1.1986	1.2061	1.2169	1.2240	1.2298	1.2633	1.2698	1.2722	1.2749
1.2990	1.3150	1.3262	1.3345	1.3366	1.3369	1.3409	1.3423	1.3456	1.3501
1.3507	1.3518	1.3765	1.3791	1.3836	1.4011	1.4236	1.4339	1.4583	1.4630
1.4872	1.4935	1.5021	1.5291	1.5326	1.5347	1.5360	1.5503	1.5638	1.5642
1.5727	1.5934	1.6162	1.6165	1.6488	1.6543	1.6668	1.6916	1.7138	1.7300
1.7316	1.7339	1.7905	1.8173	1.8480	1.8725	1.8863	1.9178	1.9426	1.9720
1.9804	2.0209	2.0388	2.0816	2.1159	2.1169	2.1566	2.1732	2.1754	2.2319
2.2391	2.2620	2.3139	2.3222	2.3830	2.4445	2.4560	2.4864	2.5580	2.5796
2.7214	2.7843	3.0117	3.1078	3.1312	3.1805	3.2445	3.4491	3.6123	4.9320

Проверяемая гипотеза

$$H_0 : f(x) \in \left\{ f(x, \theta) = \frac{1}{\theta_0} e^{-(x-\theta_1)/\theta_0}, \theta_0 \in (0, \infty), \theta_1 = 0 \right\}.$$

При этом  $\theta_0$  оценивают по выборке.

Оценка максимального правдоподобия  $\hat{\theta}_0 = 0.937338$ . Оптимальные граничные точки в виде  $t_i = (x_i - \theta_1) / \theta_0$ , как и в предыдущем слу-

чае, берут из табл. А.1 при  $k = 5$ : 0.6004; 1.3545; 2.3720; 3.9657. При  $\theta_0 = 0.937338$  и  $\theta_1 = 0$  вычисляют значения  $x_i = t_i\theta_0 + \theta_1$ : 0.5628; 1.2696; 2.2234; 3.7172. Вероятности попадания наблюдений в интервалы из табл. А.2: 0.4514; 0.2905; 0.1648; 0.0744; 0.0189. По выборке находят числа наблюдений  $n_i$ , попавших в соответствующие интервалы (118, 99, 62, 20, 1). В соответствии с соотношением (2.1) вычисляют значение статистики  $X_n^2 = 11.145$ . При справедливости гипотезы  $H_0$  статистика приближенно подчиняется  $\chi_3^2$ -распределению. Вероятность

$$P\{X_n^2 > 11.145\} = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} \int_{11.145}^{\infty} s^{r/2-1} e^{-s/2} ds = 0.010967.$$

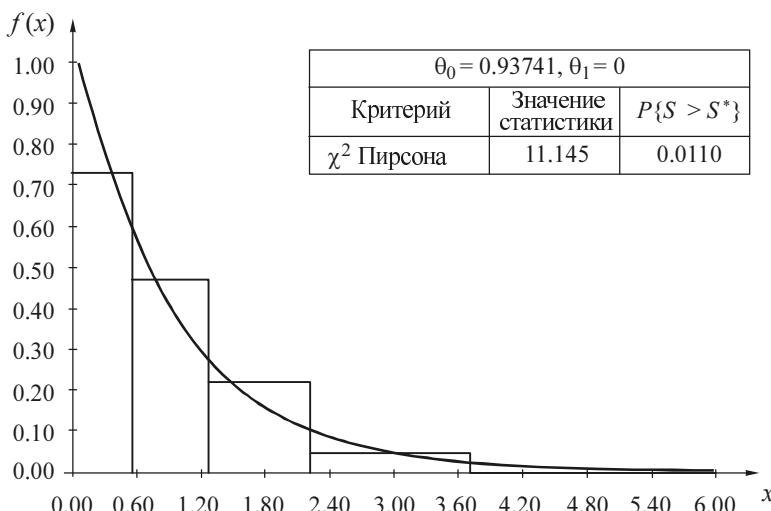


Рис. 2.23. Результаты проверки согласия к примеру 2.2

Уже при значениях  $\alpha = 0.05$  нет оснований для принятия гипотезы  $H_0$ , но есть основание проверить и другие распределения. Результаты проверки гипотезы о согласии иллюстрирует рис. 2.23.

**Пример 2.3.** Проверяют простую гипотезу о принадлежности выборки нормальному закону распределения. Упорядоченная выборка объемом 300 наблюдений имеет вид

-5.1852	-3.7318	-3.2899	-3.1038	-2.9031	-2.7243	-2.7011	-2.6448	-2.5168	-2.4975
-2.4858	-2.4268	-2.1459	-1.9894	-1.9467	-1.9348	-1.9273	-1.8873	-1.8383	-1.8217
-1.6802	-1.6713	-1.6704	-1.6420	-1.6322	-1.6315	-1.6005	-1.5491	-1.5238	-1.5204
-1.4727	-1.4546	-1.3420	-1.3233	-1.3225	-1.3150	-1.3097	-1.2917	-1.2767	-1.2046
-1.1606	-1.1334	-1.1259	-1.0769	-1.0659	-1.0446	-1.0258	-1.0138	-1.0077	-0.9914
-0.9818	-0.9546	-0.9511	-0.9167	-0.8927	-0.8758	-0.8311	-0.8302	-0.8171	-0.7794
-0.7571	-0.7228	-0.7211	-0.7064	-0.6991	-0.6873	-0.6743	-0.6442	-0.6440	-0.5798
-0.5421	-0.5308	-0.5108	-0.4845	-0.4491	-0.4294	-0.4212	-0.3943	-0.3251	-0.2607
-0.2506	-0.2351	-0.2201	-0.1698	-0.1326	-0.1217	-0.0368	-0.0194	0.0014	0.0108
0.0470	0.0748	0.0822	0.1281	0.1284	0.1455	0.1498	0.1539	0.1564	0.1895
0.1949	0.2079	0.2402	0.2643	0.2669	0.3104	0.3616	0.3723	0.4415	0.4929
0.5315	0.5318	0.5350	0.5359	0.5396	0.5843	0.5877	0.5944	0.6205	0.6279
0.6345	0.6391	0.6416	0.6445	0.6592	0.6630	0.6990	0.7361	0.7419	0.7426
0.7472	0.7511	0.7658	0.8359	0.8499	0.8681	0.9283	0.9368	0.9504	0.9657
0.9782	1.0158	1.0381	1.0505	1.0702	1.0873	1.0913	1.1313	1.1750	1.1908
1.2197	1.2347	1.2620	1.2799	1.3040	1.3160	1.3186	1.3245	1.3529	1.3729
1.3857	1.3979	1.4047	1.4101	1.4194	1.4485	1.4515	1.4782	1.4850	1.5759
1.6056	1.6076	1.6220	1.6223	1.6311	1.6395	1.6476	1.6610	1.6793	1.6800
1.6908	1.7208	1.7356	1.7358	1.7359	1.7550	1.8296	1.8573	1.8757	1.9448
1.9451	1.9924	2.0045	2.0153	2.0338	2.0400	2.0557	2.1055	2.1161	2.1224
2.1237	2.2229	2.2289	2.2432	2.2600	2.2989	2.3003	2.3088	2.3315	2.3659
2.4024	2.4152	2.4187	2.4600	2.4914	2.5100	2.5145	2.5311	2.5515	2.5706
2.5916	2.6982	2.7127	2.7282	2.7553	2.7778	2.8131	2.8296	2.8364	2.8445
2.8552	2.9012	2.9126	2.9517	3.0283	3.0510	3.1031	3.1199	3.1451	3.1453
3.1539	3.1633	3.2561	3.2995	3.3040	3.3056	3.3152	3.3159	3.3208	3.3567
3.4532	3.5665	3.5775	3.5782	3.5858	3.6054	3.6368	3.6435	3.6630	3.6788
3.6798	3.6985	3.6993	3.7203	3.7421	3.8047	3.8366	3.8389	3.9597	3.9682
3.9784	3.9828	3.9894	4.1512	4.1674	4.1887	4.2089	4.4316	4.4451	4.5262
4.5282	4.5397	4.5459	4.5898	4.6170	4.6560	4.6902	4.7263	4.7912	5.0490
5.1871	5.2678	5.4110	5.5609	5.6245	5.6484	5.6736	5.7743	6.1626	6.2185

Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0 : f(x, \theta) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta_0)^2 / 2\theta_1^2}$$

при  $\theta_0 = 1$ ,  $\theta_1 = 2$ .

Оптимальные граничные точки в виде  $t_i = (x_i - \theta_0) / \theta_1$  берут из табл. А.28 при  $k = 7$   $(-2.0600; -1.2647; -0.4918; 0.4918; 1.2647; 2.0600)$ , так как из табл. А.29  $P_k n = 0,0197 \cdot 300 > 5$ . При  $\theta_0 = 1$ ,  $\theta_1 = 2$   $x_i$  принимают значения  $(-3.12; -1.5294; 0.0164; 1.9836; 3.5294; 5.12)$ . Вероятности попадания наблюдений в интервалы из табл. А.29: 0.0197; 0.0833; 0.2084; 0.3772; 0.2084; 0.0833; 0.0197. По выборке находим количества наблюдений  $n_i$ , попавших в соответствующие интервалы  $(3, 25, 62, 101, 60, 39, 10)$ . В соответствии с соотношением (2.1) вычисляют значение статистики  $X_n^2 = 13.532$ . При справедливости гипотезы  $H_0$  статистика подчиняется  $\chi_6^2$ -распределению. Вероятность  $P\{X_n^2 > 13.532\} = 0.0353$ . При значениях уровня значимости  $\alpha > 0.0353$  гипотеза  $H_0$  будет отклонена. Результаты проверки гипотезы о согласии показаны на рис. 2.24.

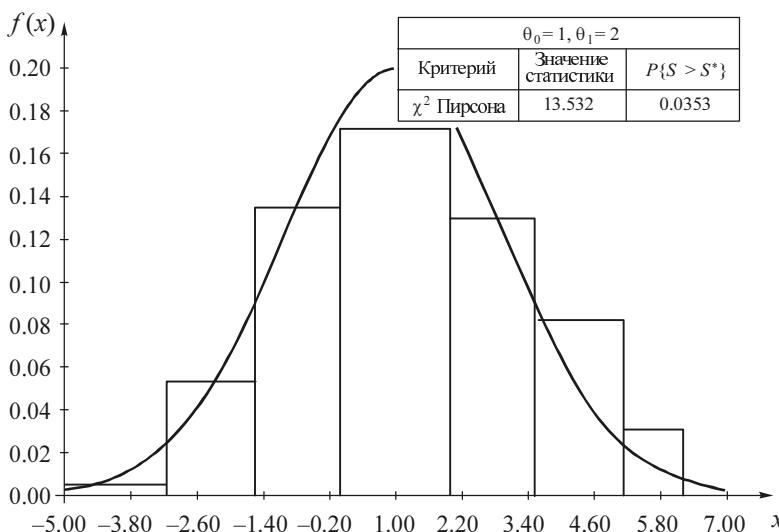


Рис. 2.24. Результаты проверки согласия к примеру 2.3

**Пример 2.4.** Проверяют сложную гипотезу о принадлежности выборки из примера 2.3 нормальному закону. По выборке оценивают параметр сдвига. Параметр масштаба  $\theta_1 = 2$ .

Вычисленная по выборке ОМП параметра сдвига  $\hat{\theta}_0 = 1.2097$ . Оставляют  $k = 7$ , так как из табл. А.25  $P_k n = 0.0536 \cdot 300 > 15$ . Оптимальные граничные точки в виде  $t_i = (x_i - \theta_0) / \theta_1$  берут из табл. А.24.  $(-1.6108; -0.8744; -0.2803; 0.2803; 0.8744; 1.6108)$ . При  $\theta_0 = 1.2097$ ;  $\theta_1 = 2$   $x_i$  принимают значения  $-2.0119; -0.5391; 0.6491; 1.7703; 2.9585; 4.4313$ . Вероятности попадания наблюдений в интервалы из табл. А.25:  $0.0536; 0.1373; 0.1987; 0.2208; 0.1987; 0.1373; 0.0536$ . По выборке находят числа наблюдений  $n_i$ , попавших в соответствующие интервалы  $(13, 58, 53, 62, 48, 33, 23)$ . В соответствии с соотношением (2.1) вычисляют значение статистики  $X_n^2 = 13.752$ . При справедливости  $H_0$  статистика приближенно подчиняется  $\chi^2_5$ -распределению. Вероятность  $P\{X_n^2 > 13.752\} = 0.0173$ . При значениях уровня значимости  $\alpha > 0.0173$  гипотеза  $H_0$  будет отклонена. Результаты проверки гипотезы о согласии иллюстрирует рис. 2.25.

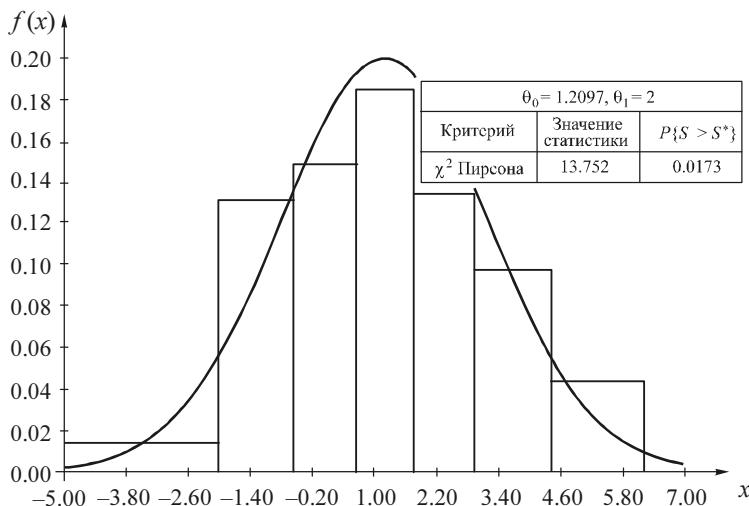


Рис. 2.25. Результаты проверки согласия к примеру 2.4

**Пример 2.5.** Проверяют сложную гипотезу о принадлежности выборки из примера 2.3 нормальному закону распределения. По выборке

оценивают масштабный параметр (стандартное отклонение). Параметр сдвига  $\theta_0 = 1$ .

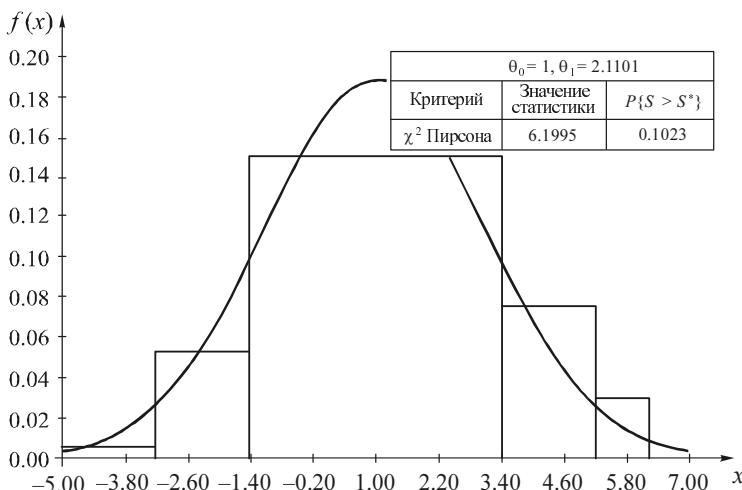


Рис. 2.26. Результаты проверки согласия к примеру 2.5

По выборке вычислена ОМП параметра масштаба  $\hat{\theta}_0 = 2.1101$ . Выбирают  $k = 5$ , так как из табл. А.27  $P_k n = 0,023 \cdot 300 > 6$  и при большем числе интервалов ожидаемое число попаданий наблюдений в крайние интервалы не превышает 3. Оптимальные граничные точки в виде  $t_i = (x_i - \theta_0) / \theta_1$  берут из табл. А.26:  $-1.9956; -1.1401; 1.1401; 1.9958$ . При  $\theta_0 = 1, \theta_1 = 2.1101$   $x_i$  принимают значения  $-3.21092; -1.40573; 3.405725; 5.211338$ . Вероятности попадания наблюдений в интервалы из табл. А.27:  $0.0230; 0.1041; 0.7458; 0.1041; 0.0230$ . По выборке находят числа наблюдений  $n_i$ , попавших в соответствующие интервалы  $(3, 29, 221, 41, 9)$ . В соответствии с соотношением (2.1) вычисляют значение статистики  $X_n^2 = 6.1995$ . При справедливости  $H_0$  статистика приближенно подчиняется  $\chi_3^2$ -распределению. Вероятность  $P\{X_n^2 > 6.1995\} = 0.1023$ . При значениях уровня значимости  $\alpha < 0.1$  нет оснований для отклонения гипотезы  $H_0$ . Результаты проверки гипотезы о согласии показаны на рис. 2.26.

**Пример 2.6.** Проверяют сложную гипотезу о принадлежности выборки из примера 2.3 нормальному закону распределения. Проверяемая гипотеза имеет вид  $H_0$ :

$$f(x) \in \left\{ f(x, \theta) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta_0)^2/2\theta_1^2}, \theta_0 \in (-\infty, \infty), \theta_1 \in (0, \infty) \right\}.$$

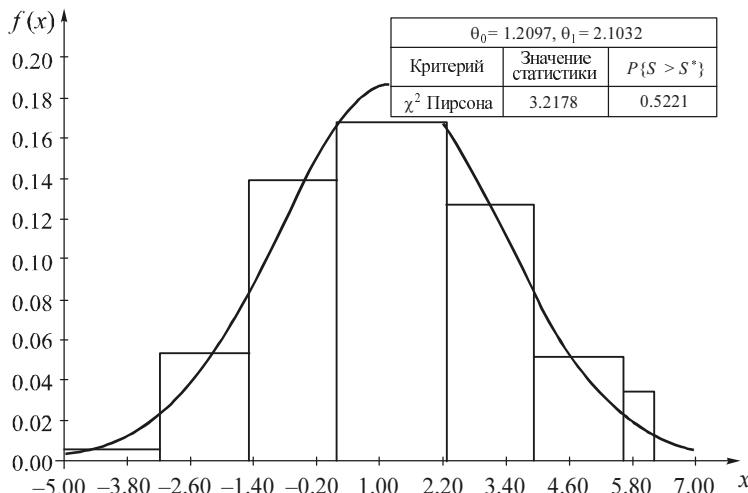


Рис. 2.27. Результаты проверки согласия к примеру 2.6

По выборке оценивают оба параметра нормального распределения. Полученные ОМП параметров  $\hat{\theta}_0 = 1.2097$ ;  $\hat{\theta}_1 = 2.1032$ . Как и в примере 2.3, оптимальные граничные точки в виде  $t_i = (x_i - \theta_0) / \theta_1$  берут из табл. А.28 при  $k = 7$  ( $-2.0600; -1.2647; -0.4918; 0.4918; 1.2647; 2.0600$ ), так как из табл. А.29  $P_k n = 0.0197 \cdot 300 > 5$ . При  $\theta_0 = 1.2097$ ;  $\theta_1 = 2.1032$   $x_i$  принимают значения  $-3.1435; -1.4629; 0.1704; 2.2490; 3.8823; 5.5629$ . Вероятности попадания наблюдений в интервал из табл. А.29: 0.0197; 0.0833; 0.2084; 0.3772; 0.2084; 0.0833; 0.0197. По выборке находят числа наблюдений  $n_i$ , попавших в соответствующие интервалы (3, 29, 67, 105, 64, 26, 6). В соответствии с соотношением (2.1) вычисляют значение статистики  $X_n^2 = 3.2178$ . При справедливо-

сти гипотезы  $H_0$  статистика приближенно подчиняется  $\chi^2_4$ -распределению. Вычисленное значение вероятности  $P\{X_n^2 > 3.2178\} = 0.5221$  подтверждает хорошее согласие экспериментальных данных с теоретическим распределением по данному критерию. При значениях уровня значимости  $\alpha < 0.5221$  гипотеза  $H_0$  будет принята. Результаты проверки гипотезы о согласии иллюстрирует рис. 2.27.

**Пример 2.7.** Проверяют сложную гипотезу о принадлежности выборки, представленной в примере 2.2, распределению Вейбулла. Проверяют гипотезу

$$H_0: f(x) \in \left\{ f(x, \theta) = \frac{\theta_0(x - \theta_2)^{\theta_0-1}}{\theta_1^{\theta_0}} \exp\left[-\left(\frac{x - \theta_2}{\theta_1}\right)^{\theta_0}\right], \right. \\ \left. \theta_0, \theta_1 \in (0, \infty), \theta_2 = 0 \right\}$$

при оценивании по выборке параметров  $\theta_0$  и  $\theta_1$  методом максимального правдоподобия.

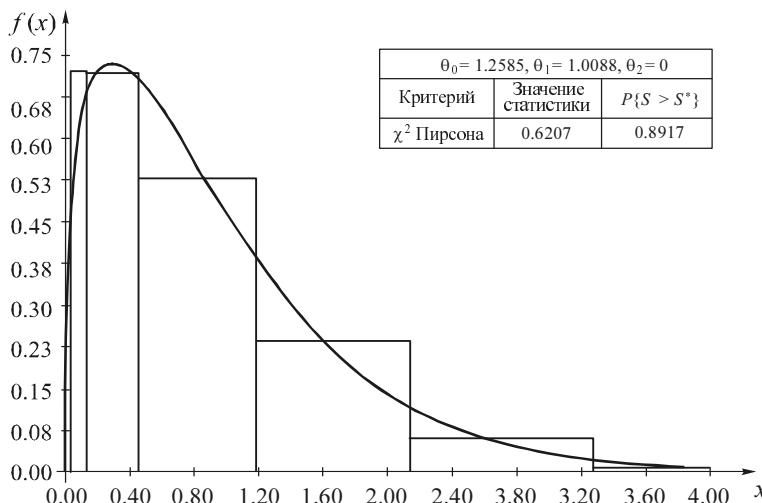


Рис. 2.28. Результаты проверки согласия к примеру 2.7

Вычисленные ОМП  $\hat{\theta}_0 = 1.2585$ ,  $\hat{\theta}_1 = 1.0088$ . Для того чтобы ожидаемое число наблюдений, попавших в интервал с наименьшей вероятностью, было не очень малым, по табл. А.23 выбирают  $k = 6$ . В этом случае  $P_k n = 0,0122 \cdot 300 > 3$ . Из табл. А.22 в виде  $t_i = [(x_i - \theta_2)/\theta_1]^{\theta_0}$  берут оптимальные граничные точки: 0.0772; 0.3649; 1.2269; 2.5726; 4.4096. При значениях параметров  $\theta_0 = 1.2585$ ;  $\theta_1 = 1.0088$ ;  $\theta_2 = 0$  по значениям  $t_i$  определяем граничные точки интервалов

$$x_i = \theta_2 + \exp\left(\frac{1}{\theta_0} \ln t_i + \ln \theta_1\right):$$

0.1318; 0.4528; 1.1868; 2.1374; 3.2798. Вероятности попадания наблюдений в интервал из табл. А.23: 0.0743; 0.2314; 0.4011; 0.2169; 0.0641; 0.0122. По выборке находят числа наблюдений  $n_i$ , попавших в соответствующие интервалы (24, 69, 116, 67, 21, 3). Значение статистики  $X_n^2 = 0.6207$ . При справедливости гипотезы  $H_0$  статистика приближенно подчиняется  $\chi_3^2$ -распределению. Так как вычисленная вероятность  $P\{X_n^2 > 0.6207\} = 0.8917$ , то это свидетельствует об очень хорошем согласии данных с теоретическим распределением. Результаты проверки гипотезы иллюстрирует рис. 2.28.

## 2.11. Порядок применения критериев типа $\chi^2$ при проверке простой гипотезы

При проверке простой гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим распределением случайной величины  $X$  действуют следующим образом.

1. Формулируют проверяемую гипотезу, выбирая теоретическое распределение случайной величины  $F(x, \theta)$ , согласие которого с опытным распределением этой величины следует проверить.

2. Из совокупности отбирают случайную выборку объемом  $n$ .

3. В зависимости от объема выборки  $n$  в соответствии с рекомендациями раздела 2.8 выбирают число интервалов  $k$ .

4. Выбирают граничные точки интервалов группирования:

а) интервалы можно выбирать равной длины, в этом случае необходимо подсчитать число  $n_i$  и определить значения вероятностей  $P_i(\theta)$ ;

б) интервалы можно выбирать равновероятными, тогда  $P_i(\theta) = 1/k$ , но необходимо вычислить значения граничных точек  $x_i$ , разделяющих интервалы;

в) можно разбивать выборку на интервалы в соответствии с асимптотически оптимальным группированием для данного закона распределения (см. раздел 2.9, табл. 2.8). Такое разбиение предпочтительно, поскольку повышает способность критерия различать близкие гипотезы.

5. После подсчета  $n_i$  и  $P_i(\theta)$  в соответствии с выбранным критерием проверки вычисляют значение статистики  $S^*$  критерия по формуле (2.1) или (2.6).

6. В соответствии с  $\chi_{k-1}^2$ -распределением по формуле (2.5) вычисляют значение  $P\{S > S^*\}$ . Если  $P\{S > S^*\} > \alpha$ , где  $\alpha$  – задаваемый уровень значимости, то нет оснований для отклонения проверяемой гипотезы. В противном случае проверяемую гипотезу  $H_0$  отвергают.

Можно вычисленное значение статистики  $S^*$  сравнить с критическим значением  $S_{r,\alpha}$ , где  $r = k - 1$  – число степеней свободы, определяемым из уравнения

$$g_1(s) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} s^{k/2-1} e^{-s/2}.$$

Значения  $S_{r,\alpha}$  приведены в приложении А. Гипотезу о согласии отвергают, если значение статистики попадает в критическую область, т. е. при  $S^* > S_{r,\alpha}$ .

## 2.12. Порядок применения критериев типа $\chi^2$ при проверке сложной гипотезы

1. При проверке сложной гипотезы и вычислении оценок параметров по группированным данным в результате минимизации статистик, задаваемых формулами (2.1) и (2.6), или в результате максимизации функции правдоподобия (2.8) порядок проверки аналогичен случаю простой гипотезы (см. разд. 2.11) с заданием числа степеней свободы  $r = k - m - 1$ , где  $m$  – число оцененных по данной выборке параметров. При этом остаются в силе рекомендации по способам группирования.

2. При проверке сложной гипотезы и вычислении оценок максимального правдоподобия по исходным негруппированным выборочным данным и использовании для проверки гипотезы статистики (2.11) число степеней свободы предельного распределения  $r = k - 1$ .

3. При вычислении оценок максимального правдоподобия по исходным негруппированным выборочным данным и применении для проверки гипотезы статистики, определяемой формулой (2.1) или (2.6), руководствуются следующими соображениями:

а) значения  $S_{r,\alpha}$  процентных точек  $\chi_r^2$ -распределения при числе степеней свободы  $r = k - m - 1$  меньше, чем значения процентных точек действительных предельных распределений статистик (2.1) и (2.6) для такой ситуации (см. раздел 2.7). Поэтому если  $S^* < S_{r,\alpha}$ , то гипотеза  $H_0$  о согласии при заданном уровне значимости  $\alpha$  заведомо не должна быть отвергнута;

б) значения процентных точек действительных распределений статистик (2.1) и (2.6) существенно отличаются от процентных точек  $\chi_r^2$ -распределения при числе степеней свободы  $r = k - m - 1$ .

При больших значениях  $S^*$  вероятности вида  $P\{S > S^*\}$ , вычисляемые в соответствии с  $\chi_r^2$ -распределением по формуле (2.5), достаточно близки к вероятностям  $P\{S > S^*\}$ , соответствующим действительным распределениям статистик.

При малых значениях  $S^*$  вероятности, вычисляемые по формуле (2.5), много меньше действительных значений  $P\{S > S^*\}$  (см. разд. 2.7). Поэтому если приближенное значение, вычисленное по формуле (2.5), больше значения  $\alpha$ , то заведомо  $P\{S > S^*\} > \alpha$  и проверяемая гипотеза о согласии не должна быть отвергнута.

## 2.13. Выводы

Таким образом, если вы, применяя критерии типа  $\chi^2$ , стремитесь обеспечить корректность статистических выводов при обработке измерительной информации, необходимо обратить внимание на следующие три момента.

Во-первых, на то, по каким данным вычисляются оценки при проверке сложных гипотез. Предельными  $\chi_{k-m-1}^2$ -распределениями для критериев  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия можно пользоваться только при оценивании параметров по группированным наблюдениям. Если вы в силу понятных причин отдаете предпочтение ОМП по точечным наблюдениям, целесообразней воспользоваться критерием Никулина (Рао–Робсона–Никулина). Используя в данной ситуации критерии  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия, следует помнить, что величина вероятности  $P\{\chi^2 > X_n^2\}$ , вычисленная в соответствии с  $\chi_{k-m-1}^2$ -распределением, оказывается заниженной по сравнению с истинной.

Во-вторых, на то, каким образом разбить область определения случайной величины на интервалы. Использование асимптотически оптимального группирования максимизирует мощность критериев  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия по отношению к близким гипотезам в случае простых и сложных гипотез. Кроме того, применение таблиц асимптотически оптимального группирования благодаря тому, что они содержат значения вероятностей попадания в интервал, облегчает и процесс вычислений. В случае критерия Никулина можно воспользово-

ваться или асимптотически оптимальным группированием, или разбиением на интервалы равных вероятностей.

В-третьих, на выбор числа интервалов. Выбор слишком большого числа интервалов приводит к падению мощности. Оптимальное число интервалов  $k$  зависит от объема выборки  $n$  и от конкретной пары конкурирующих гипотез  $H_0$  и  $H_1$ . Чаще всего оптимальное  $k$  оказывается существенно меньше значений, рекомендуемых различными регламентирующими документами и задаваемых множеством эмпирических формул, представленных в [290]. Максимальная мощность критериев при заданном объеме выборки  $n$  часто достигается при минимально возможном или достаточно малом числе интервалов  $k$ . Если вас интересует конкретная пара конкурирующих гипотез, относительно которых часто приходится принимать решение, воспользуйтесь соотношением (2.20) для подбора оптимального числа интервалов  $k$  при заданном объеме выборки  $n$ . Если это окажется затруднительным, можно при выборе числа интервалов опираться на таблицы асимптотически оптимального группирования, выбирая  $k$  таким образом, чтобы ожидаемое число наблюдений, попадающих в любой интервал при асимптотически оптимальном группировании, было не очень малым:  $nP_i \geq 5\dots 10$ . Как показывает практика, в этом случае число  $k$  обычно оказывается близким к оптимальному.

Выполнив первое условие, мы будем иметь возможность точно вычислять значение статистики критерия, соответствующее задаваемой величине вероятности ошибки первого рода  $\alpha$  (или вычислять достижимый уровень значимости по предельному распределению статистики  $G(S | H_0)$ ). Выбрав же оптимальное число интервалов и подобрав оптимальное разбиение области определения случайной величины на интервалы, мы получим критерий максимальной мощности, наилучшим образом различающий конкретные конкурирующие гипотезы (обеспечивающий минимальную вероятность ошибки второго рода  $\beta$  при заданной вероятности ошибки первого рода  $\alpha$ ).

Результаты исследований критериев типа  $\chi^2$  были использованы нами при подготовке рекомендаций по стандартизации Р 50.1.033–2001 [301]. Анализ ошибок, наиболее часто совершаемых при применении критериев согласия типа  $\chi^2$ , посвящена работа [221].

Следует отметить, что материал, изложенный в данном разделе, не охватывает всех тонкостей применения критериев типа  $\chi^2$ . Много полезного относительно их использования и обширную библиографию можно найти в книге [52]. Но и это множество работ пока не даст ответа на все вопросы, которые могут возникнуть и возникают в связи с применением критериев данного типа

---

### 3. ПРИМЕНЕНИЕ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ

---

#### 3.1. Введение

**К** сожалению, практика богата большим числом примеров некорректного использования непараметрических критериев согласия, особенно в литературных источниках учебного характера. Наиболее типичные ошибки связаны с применением классических результатов, имеющих силу при проверке простых гипотез, для ситуаций, соответствующих проверке сложных гипотез [221, 72].

Напомним, простая проверяемая гипотеза имеет вид  $H_0: F(x) = F(x, \theta)$ , где  $F(x, \theta)$  – функция распределения вероятностей, с которой проверяют согласие наблюдаемой выборки, а  $\theta$  – известное значение параметра (скалярного или векторного).

Сложная проверяемая гипотеза имеет вид  $H_0: F(x) \in \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$ , где  $\Theta$  – область определения параметра  $\theta$ . Проблемы возникают, если при проверке сложной гипотезы оценку параметра распределения  $\hat{\theta}$  вычисляют по той же самой выборке, по которой проверяют согласие. Если оценку  $\hat{\theta}$  вычисляют по некоторой другой выборке, то применение критерия не отличается от ситуации с проверкой простой гипотезы.

Далее, как правило, мы будем предполагать, что при проверке сложных гипотез оценка параметра  $\hat{\theta}$  вычисляется по этой же выборке.

Очевидно, что на практике при обработке результатов измерений с проблемой проверки сложных гипотез чаще всего сталкиваются именно в такой ситуации, поскольку сначала оценивают по выборке пара-

метры модели, чтобы лучше подогнать ее к наблюдаемым данным, а потом проверяют адекватность полученной модели.

В процессе проверки согласия по выборке вычисляют значение  $S^*$  статистики используемого критерия. Затем, для того чтобы сделать вывод о принятии или отклонении гипотезы  $H_0$ , необходимо знать условное распределение  $G(S|H_0)$  статистики  $S$  критерия при справедливости  $H_0$ . И если вероятность

$$P\{S > S^*\} = \int_{S^*}^{+\infty} g(s|H_0) ds \quad (3.1)$$

достаточно большая, по крайней мере,  $P\{S > S^*\} > \alpha$ , где  $g(s|H_0)$  – условная плотность, а  $\alpha$  – задаваемый уровень значимости (вероятность ошибки первого рода – отклонить справедливую гипотезу  $H_0$ ), то принято считать, что нет оснований для отклонения гипотезы  $H_0$ .

Если в процессе анализа выборки рассматривают некоторую конкурирующую гипотезу  $H_1: F(x) = F_1(x, \theta)$ , то с ней связывают условное распределение  $G(S|H_1)$  и вероятность ошибки второго рода  $\beta$  (принять гипотезу  $H_0$ , в то время как верна гипотеза  $H_1$ ). Задание значения  $\alpha$  для применяемого критерия согласия однозначно определяет и значение  $\beta$ :

$$\alpha = \int_{S_\alpha}^{+\infty} g(s|H_0) ds, \quad (3.2)$$

$$\beta = \int_0^{S_\alpha} g(s|H_1) ds. \quad (3.3)$$

При этом чем больше мощность критерия  $1 - \beta$ , тем лучше он различает соответствующие гипотезы.

## 3.2. Распределения статистик непараметрических критериев согласия при простых гипотезах

### 3.2.1. Критерий Колмогорова

В случае простых гипотез предельные распределения статистик рассматриваемых критериев согласия Колмогорова, Смирнова,  $\omega^2$  и  $\Omega^2$  Мизеса известны и не зависят от вида наблюдаемого закона распределения и, в частности, от его параметров. Считают, что эти критерии являются «свободными от распределения». Это достоинство предопределило широкое использование данных критериев в различных приложениях.

Предельное распределение статистики

$$D_n = \sup_{|x|<\infty} |F_n(x) - F(x, \theta)|, \quad (3.4)$$

где  $F_n(x)$  – эмпирическая функция распределения;  $F(x, \theta)$  – теоретическая функция распределения;  $n$  – объем выборки, было получено Колмогоровым в [67]. При  $n \rightarrow \infty$  функция распределения статистики  $\sqrt{n} \cdot D_n$  сходится равномерно к функции распределения Колмогорова

$$K(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 s^2}. \quad (3.5)$$

При проверке гипотез с применением критерия Колмогорова рекомендуется использовать статистику с поправкой Большева [161, 162] в форме [163]

$$S_K = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}}, \quad (3.6)$$

где

$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-), \quad (3.7)$$

$$D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_i, \theta) \right\}; \quad (3.8)$$

$$D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ F(x_i, \theta) - \frac{i-1}{n} \right\}, \quad (3.9)$$

$n$  – объем выборки;  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – упорядоченные по возрастанию выборочные значения;  $F(x, \theta)$  – функция закона распределения, согласие с которым проверяют. Распределение величины  $S_K$  при простой гипотезе в пределе подчиняется закону Колмогорова с функцией распределения  $K(S)$ .

Если для вычисленного по выборке значения статистики  $S_K^*$  выполняется неравенство

$$P\left\{S > S_K^*\right\} = 1 - K\left(S_K^*\right) > \alpha,$$

то нет оснований для отклонения гипотезы  $H_0$ .

### 3.2.2. Критерий Смирнова

В критерии Смирнова используют статистику

$$D_n^+ = \sup_{|x|<\infty} (F_n(x) - F(x, \theta)) \quad (3.10)$$

или статистику

$$D_n^- = - \inf_{|x|<\infty} (F_n(x) - F(x, \theta)), \quad (3.11)$$

значения которых вычисляют по эквивалентным соотношениям (3.8), (3.9).

Реально в критерии обычно используют статистику [163]

$$S_m = \frac{(6nD_n^+ + 1)^2}{9n}, \quad (3.12)$$

которая при простой гипотезе в пределе подчиняется распределению  $\chi^2$  с числом степеней свободы, равным 2.

Гипотезу  $H_0$  не отвергают, если для вычисленного по выборке значения статистики  $S_m^*$

$$P\left\{S_m > S_m^*\right\} = \int_{S_m^*}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = e^{-S_m^*/2} > \alpha.$$

### 3.2.3. Критерии $\omega^2$

В критериях типа  $\omega^2$  расстояние между гипотетическим и истинным распределениями рассматривают в квадратичной метрике.

Проверяемая гипотеза  $H_0$  имеет вид [163]

$$H_0: \int_{-\infty}^{\infty} \{E[F_n(x)] - F(x)\}^2 \psi(F(x)) dF(x) = 0 \quad (3.13)$$

при конкурирующей гипотезе

$$H_1: \int_{-\infty}^{\infty} \{E[F_n(x)] - F(x)\}^2 \psi(F(x)) dF(x) > 0, \quad (3.14)$$

где  $E[\cdot]$  – оператор математического ожидания;  $\psi(t)$  – заданная на отрезке  $0 \leq t \leq 1$  неотрицательная функция, относительно которой предполагают, что  $\psi(t)$ ,  $t\psi(t)$ ,  $t^2\psi(t)$  интегрируемы на отрезке  $0 \leq t \leq 1$  [6]. Статистику критерия [163] выражают соотношением

$$\begin{aligned} \omega_n^2 [\psi(F)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \{E[F_n(x)] - F(x)\}^2 \psi(F(x)) dF(x) = \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ g[F(x_i)] - \frac{2i-1}{2n} f[F(x_i)] \right\} + \int_0^1 (1-t)^2 \psi(t) dt, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$f(t) = \int_0^t \psi(s) ds, \quad g(t) = \int_0^t s \psi(s) ds.$$

При выборе  $\psi(t) \equiv 1$  для критерия  $\omega^2$  Мизеса получают статистику вида (статистику **Крамера–Мизеса–Смирнова**)

$$S_{\omega} = n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left\{ F(x_i, \theta) - \frac{2i-1}{2n} \right\}^2, \quad (3.16)$$

которая при простой гипотезе в пределе подчиняется закону с функцией распределения  $a1(s)$ , имеющей вид [163]

$$\begin{aligned} a1(s) = & \frac{1}{\sqrt{2s}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1/2)\sqrt{4j+1}}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)} \exp\left\{-\frac{(4j+1)^2}{16s}\right\} \times \\ & \times \left\{ I_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{(4j+1)^2}{16s}\right] - I_1\left[\frac{(4j+1)^2}{16s}\right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где  $I_{-\frac{1}{4}}(\cdot), I_1(\cdot)$  – модифицированные функции Бесселя,

$$I_v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{v+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)}, |z| < \infty, |\arg z| < \pi. \quad (3.18)$$

При выборе  $\psi(t) \equiv 1/t(1-t)$  для критерия  $\Omega^2$  Мизеса статистика приобретает вид (статистика **Андерсона–Дарлинга** [6, 5])

$$\begin{aligned} S_{\Omega} = n\Omega_n^2 = & \\ = & -n - 2 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2i-1}{2n} \ln F(x_i, \theta) + \left(1 - \frac{2i-1}{2n}\right) \ln(1 - F(x_i, \theta)) \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В пределе эта статистика подчиняется закону с функцией распределения  $a2(s)$ , имеющей вид [163]

$$a2(s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{s} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(j+1/2)(4j+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)} \exp\left\{-\frac{(4j+1)^2\pi^2}{8s}\right\} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \exp \left\{ \frac{s}{8(y^2 + 1)} - \frac{(4j+1)^2 \pi^2 y^2}{8s} \right\} dy. \quad (3.20)$$

Гипотезы о согласии не отвергают, если выполнены неравенства

$$P\left\{S_{\omega} > S_{\omega}^*\right\} = 1 - \alpha 1\left(S_{\omega}^*\right) > \alpha \text{ и } P\left\{S_{\Omega} > S_{\Omega}^*\right\} = 1 - \alpha 2\left(S_{\Omega}^*\right) > \alpha$$

или вычисленные значения статистик не превышают критических для заданного уровня значимости  $\alpha$ .

### 3.3. Непараметрические критерии согласия при сложных гипотезах

#### 3.3.1. Потеря критериями свойства «свободы от распределения»

При проверке сложных гипотез, когда по той же самой выборке оценивают параметры наблюдаемого закона распределения вероятностей, непараметрические критерии согласия Колмогорова, Смирнова,  $\omega^2$  и  $\Omega^2$  Мизеса теряют свойство «свободы от распределения». В этом случае предельные распределения статистик этих критериев будут зависеть от закона, которому подчинена наблюдаемая выборка. Более того, распределения статистик непараметрических критериев согласия зависят и от используемого метода оценивания параметров. Следует также учитывать, что распределения статистик существенно зависят от объема выборки.

Игнорирование того, что проверяют сложную гипотезу и что в сложных гипотезах имеются различия, приводит к некорректному применению непараметрических критериев согласия и, как следствие, к неверным статистическим выводам. Различия в предельных распределениях тех же самых статистик при проверке простых и сложных гипотез настолько существенны, что пренебрегать этим абсолютно недопустимо [294, 164, 210].

Точной отсчета, с которой были начаты исследования предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при сложных гипотезах, послужила работа [64].

Существует ряд подходов к использованию непараметрических критериев согласия в этом случае. При достаточно большой выборке ее можно разбить на две части и по одной из них оценивать параметры, а по другой – проверять согласие. В случае больших объемов выборки такой прием оправдан [34]. Но если объем выборки относительно невелик, то способ разбиения ее на две части будет отражаться и на оценках параметров, и на распределениях статистик критериев согласия.

В дальнейшем для решения данной проблемы использовались различные подходы: предельные распределения статистик исследовались аналитическими и численными методами [27, 28, 101, 102, 36, 35, 38, 117, 289]. Для случая принадлежности выборки нормальному закону предельные распределения статистики критерия  $\omega^2$  Мизеса при использовании оценок максимального правдоподобия для оценивания одного или обоих параметров закона были исследованы в [281] аналитическими методами.

В некоторых частных случаях проверки сложных гипотез, например при оценивании параметров распределений экспоненциального, нормального, экстремальных значений, Вейбулла и некоторых других законов, таблицы процентных точек для предельных распределений статистик непараметрических критериев были получены с использованием методов статистического моделирования [119, 136, 135, 18].

В [331, 333, 330, 306, 332] для статистик типа Колмогорова–Смирнова и некоторых законов, соответствующих гипотезе  $H_0$ , получены формулы для приближенного вычисления вероятностей «согласия» вида  $P\{S > S^*\}$ , где  $S^*$  – вычисленное по выборке значение соответствующей статистики  $S$ . Полученные формулы дают достаточно хорошие приближения при малых значениях соответствующих вероятностей.

В [260, 258, 98, 89, 257] в результате компьютерного моделирования распределений статистик непараметрических критериев для ряда законов, соответствующих гипотезе  $H_0$ , найдены аналитически простые модели, которые хорошо аппроксимируют предельные распределения статистик непараметрических критериев согласия в случае проверки сложных гипотез и оценивания по выборке параметров методом максимального правдоподобия. В [251, 256] методами статистического моделирования исследовано влияние на распределения

статистик непараметрических критериев согласия при простых и сложных гипотезах объема наблюдаемой выборки и применяемого метода оценивания параметров. В [256, 89] получены аналитически простые модели предельных распределений статистик непараметрических критериев для случая, когда при проверке сложных гипотез оценки параметров находятся в результате минимизации статистики используемого критерия.

Построенные на настоящий момент таблицы процентных точек и предельные распределения статистик непараметрических критериев (некоторые из них вошли в [31]), ограничены относительно узким кругом сложных гипотез. Предельные распределения статистик (или процентные точки распределений) при проверке сложных гипотез получены лишь для порядка 20 законов, в то время как множество вероятностных моделей, используемых в приложениях для описания реальных случайных величин, существенно шире.

### 3.3.2. Методика компьютерного анализа статистических закономерностей

Очевидно, что бесконечное множество случайных величин, с которым приходится сталкиваться на практике, не может быть описано ограниченным подмножеством моделей законов распределений, наиболее часто используемых для описания реальных наблюдений в приложениях. Любой исследователь для конкретной наблюдаемой величины может предложить (построить) свою параметрическую модель закона, наиболее адекватно, с его точки зрения, описывающую эту случайную величину. После оценки по данной выборке параметров модели возникает необходимость проверки сложной гипотезы об адекватности выборочных наблюдений и построенного закона с использованием критериев согласия.

Множество всех сложных гипотез бесконечно, и заранее иметь распределения  $G(S|H_0)$  для любой сложной гипотезы  $H_0$  практически невозможно. Именно поэтому найденные различным образом предельные распределения статистик непараметрических критериев согласия представлены в литературных источниках лишь для ограниченного ряда распределений, наиболее часто используемых в приложениях, особенно в задачах контроля качества и исследования надежности. Что же делать, если для описания выборки используется закон

распределения вероятностей  $F(x, \theta)$  и найдена оценка его параметра  $\hat{\theta}$ , а для проверки сложной гипотезы  $H_0: F(x) \in \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$  исследователю неизвестно распределение  $G(S|H_0)$  статистики соответствующего критерия согласия?

Наиболее целесообразно воспользоваться методикой компьютерного анализа статистических закономерностей, хорошо зарекомендовавшей себя при моделировании распределений статистик критериев [260, 258, 98, 251, 256, 261, 255, 97].

Для этого следует в соответствии с законом  $F(x, \hat{\theta})$  смоделировать  $N$  выборок того же объема  $n$ , что и выборка, для которой необходимо проверить гипотезу  $H_0: F(x) \in \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$ . Далее для каждой из  $N$  выборок вычислить оценки тех же параметров закона, а затем – значение статистики  $S$  соответствующего критерия согласия. В результате будет получена выборка значений статистики  $S_1, S_2, \dots, S_N$  с законом распределения  $G(S_n|H_0)$  для проверяемой гипотезы  $H_0$ . По этой выборке при достаточно большом  $N$  можно построить достаточно гладкую эмпирическую функцию распределения  $G_N(S_n|H_0)$ , которой можно непосредственно воспользоваться для вывода о том, есть ли основания для отклонения гипотезы  $H_0$ . При необходимости можно по  $G_N(S_n|H_0)$  построить приближенную аналитическую модель, аппроксимирующую  $G_N(S_n|H_0)$ , и тогда, опираясь уже на эту модель, принимать решение относительно проверяемой гипотезы  $H_0$ .

Как показывает практика, хорошей аналитической моделью для  $G_N(S_n|H_0)$  часто оказывается один из следующих четырех законов: логарифмически нормальный, гамма-распределение, распределение Su-Джонсона или распределение S1-Джонсона [258, 98, 261]. Во всяком случае, всегда можно, опираясь на ограниченное множество законов распределения, построить модель в виде смеси законов [262, 90, 263].

Реализация такой процедуры компьютерного анализа распределения статистики не содержит ни принципиальных, ни практических трудностей. Уровень вычислительной техники позволяет очень быстро получить результаты моделирования, а реализация алгоритма под силу инженеру, владеющему навыками программирования.

В то же время подобная методика анализа распределений статистик имеет и недостатки, связанные с ограниченной точностью построения закона распределения статистики и возможным влиянием качества используемого датчика псевдослучайных чисел [292]. Поэтому при ее реализации следует непременно контролировать качество датчиков, генерирующих числа в соответствии с требуемыми законами «наблюдаемых» случайных величин. Современные системы программирования включают в себя достаточно хорошие датчики, генерирующие псевдослучайные числа, распределенные по равномерному закону. При необходимости построения собственного датчика можно воспользоваться алгоритмами моделирования, изложенными в [196].

Точность построения закона распределения статистики на основании  $G_N(S_n|H_0)$ , конечно, можно повышать, увеличивая  $N$ . По оценкам [260, 258, 98, 251, 256, 261], отклонения смоделированного распределения от теоретического при  $N = 2000$  обычно имеют порядок  $\approx \pm 0,015$ . Если поставить такую цель, то, аппроксимируя эмпирические распределения теоретическими законами и усредняя их по реализациям (при многократном моделировании), можно, при необходимости, добиться более высокой точности построения закона распределения исследуемой статистики. Опираясь на построенное распределение  $G_N(S_n|H_0)$ , можно достаточно точно оценить значение  $P\{S > S^*\}$ , но значения процентных точек, полученные по  $G_N(S_n|H_0)$ , могут оказаться с существенной погрешностью. На практике же, проверяя различные гипотезы, чаще сравнивают полученное значение статистики  $S^*$  с соответствующей процентной точкой предельного распределения, что является менее информативным для принятия решения. Более предпочтительно принимать решение по достигнутому уровню значимости  $P\{S > S^*\}$ .

Во многих приводимых ниже примерах, иллюстрирующих распределения статистик критериев  $G_N(S_n|H_i)$ ,  $i = \overline{0,1}$ , в зависимости от различных факторов с применением изложенной методики число монтируемых выборок  $N$  принимали равным 2000, а их объем  $n$ , кроме особо отмеченных случаев, равным 1000.

Таблицы процентных точек и модели распределений статистик критериев, приводимые в приложении, строились по смоделирован-

ным выборкам статистик объемом  $N = 10^6$ . При таких  $N$  величина разности между истинным законом  $G(S|H_0)$  распределения статистики и смоделированным эмпирическим  $G_N(S|H_0)$  по модулю не превышает величины  $10^{-3}$ . При этом значения статистик критериев вычислялись по выборкам псевдослучайных величин, генерируемых в соответствии с наблюдаемым законом  $F(x, \theta)$ , объемом  $n = 10^3$ . В такой ситуации распределение  $G(S_n|H_0)$  практически совпадает с предельным  $G(S|H_0)$ . В задачах статистического анализа можно пользоваться представленными моделями, начиная с объемов выборок  $n > 25$ .

### **3.3.3. Факторы, влияющие на распределения статистик критериев при проверке сложных гипотез**

Распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез зависят от характера этой сложной гипотезы. На закон распределения статистики  $G(S|H_0)$  влияют следующие факторы, определяющие «сложность» гипотезы:

- вид наблюдаемого закона распределения  $F(x, \theta)$ , соответствующего истинной гипотезе  $H_0$ ;
- тип оцениваемого параметра и число оцениваемых параметров;
- в некоторых ситуациях конкретное значение параметра (например, в случае гамма-распределения);
- используемый метод оценивания параметров.

При малых объемах выборки  $n$  распределение  $G(S_n|H_0)$  зависит от величины  $n$ . Однако существенная зависимость распределения статистики от  $n$  наблюдается только при очень небольших объемах выборки. Уже при  $n \geq 15\dots 20$  распределение  $G(S_n|H_0)$  достаточно близко к предельному  $G(S|H_0)$  и зависимостью от  $n$  можно пренебречь.

В случае задания конкретной альтернативы [конкурирующей гипотезы  $H_1$ , которой соответствует распределение  $F_1(x, \theta)$ ] функция рас-

пределения статистики  $G(S|H_1)$  также зависит от всех перечисленных факторов. Но в отличие от  $G(S|H_0)$  распределение статистики  $G(S|H_1)$  при справедливой гипотезе  $H_1$  очень сильно зависит от объема выборки  $n$ . Именно благодаря этому с ростом  $n$  повышается способность критериев различать гипотезы и увеличивается мощность критериев.

### 3.3.4. Влияние объема выборки на распределения статистик непараметрических критериев при простых и сложных гипотезах

В большинстве источников, касающихся применения непараметрических критериев согласия (при проверке простых гипотез), как правило, упоминается, что предельными распределениями  $K(S)$ ,  $a1(S)$ ,  $a2(S)$  для соответствующих критериев можно пользоваться, начиная с объемов выборок  $n = 50\dots100$  наблюдений. В случае проверки простых гипотез предельными распределениями статистик критериев Колмогорова и Смирнова можно пользоваться при  $n > 20$  [163]. Исследование методами статистического моделирования зависимости распределений статистик всех рассматриваемых здесь непараметрических критериев от объема выборки при проверке различных как простых, так и сложных гипотез показывает, что это справедливо во всех случаях.

Например, рис. 3.1 иллюстрирует, как при увеличении объема выборки ( $n = 5, 10, 20$ ) меняется распределение  $G(S_n|H_0)$  статистики Колмогорова  $S_K$  в случае проверки простой гипотезы о принадлежности выборки нормальному закону. На этом рисунке отражено также предельное распределение статистики – функция распределения Колмогорова  $K(S)$ . Эмпирические распределения  $G_N(S_n|H_0)$  при больших  $n$  практически сливаются с  $K(S)$ , и на рисунке они не показаны. Как видно, при малых  $n$  распределение существенно отличается от предельного, но уже при  $n \geq 15\dots20$  ошибка при вычислении вероятности «согласия»  $P\{S > S^*\}$  оказывается достаточно малой.

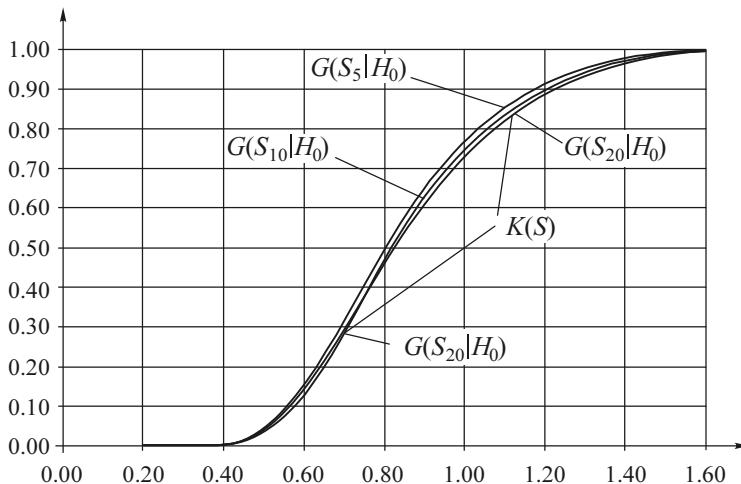


Рис. 3.1. Зависимость от  $n$  распределений  $G(S_n | H_0)$  статистики  $S_K$  Колмогорова при простой гипотезе ( $H_0$  – нормальное распределение):  $n = 5, 10, 20$ .  $K(S)$  – функция предельного распределения Колмогорова

Та же самая картина наблюдается в случае проверки сложных гипотез о согласии. На рис. 3.2 при  $n = 5, 10, 20, 1000$  показаны распределения  $G(S_n | H_0)$  статистики  $S_K$  в случае проверки аналогичной, но уже сложной, гипотезы о нормальности, когда по выборке вычисляют оценки максимального правдоподобия (ОМП) параметров нормального закона.

При малых  $n$  наибольшие отклонения от предельных распределений наблюдаются на «хвостах». И при простых, и при сложных гипотезах с ростом  $n$  распределения  $G(S_n | H_0)$  равномерно сходятся к предельному. Но если в случае простых гипотез с ростом  $n$  увеличивается вероятность больших значений статистик, то в случае сложных возрастают вероятности и больших, и малых значений статистик. Последнее замечание справедливо для распределений статистик  $S_K, S_\omega, S_\Omega$ .

Рис. 3.3 иллюстрирует изменения с ростом  $n$  распределений  $G(S_n | H_0)$  статистики Крамера–Мизеса–Смирнова  $S_\omega$  при проверке сложной гипотезы о нормальности и использовании при оценивании параметров метода максимального правдоподобия. Чтобы подчеркнуть

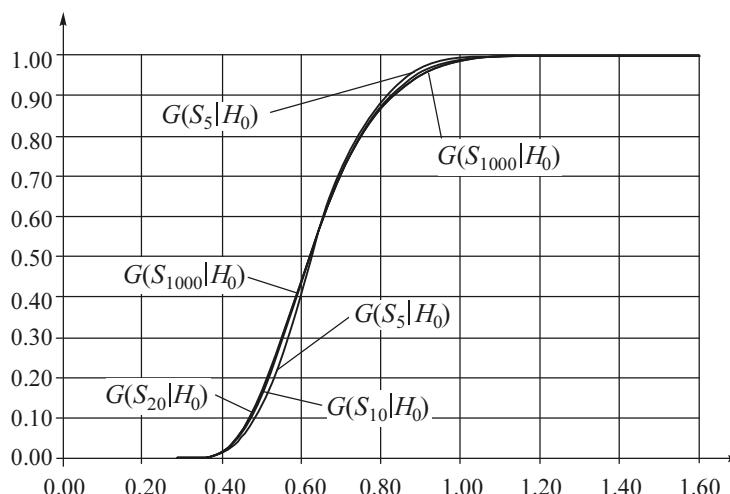


Рис. 3.2. Зависимость от  $n$  распределений  $G(S_n | H_0)$  статистики  $S_K$  Колмогорова при сложной гипотезе ( $H_0$  – нормальное распределение, ОМП):  $n = 5, 10, 20, 1000$

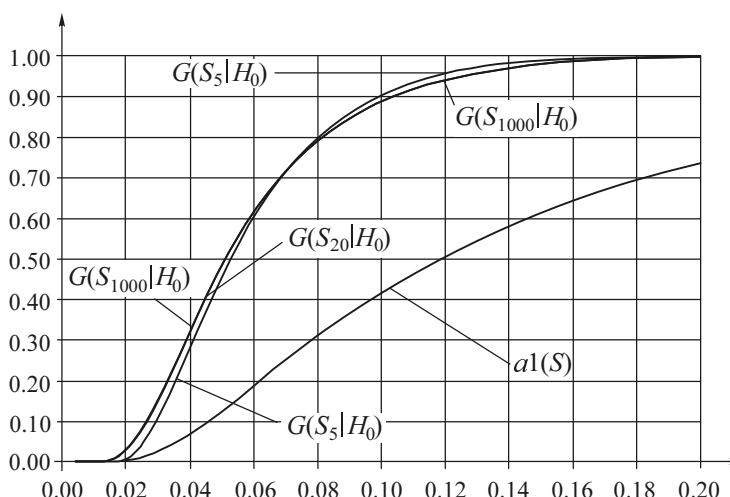


Рис. 3.3. Зависимость от  $n$  распределений  $G(S_n | H_0)$  статистики  $S_\omega$  Крамера–Мизеса–Смирнова при сложной гипотезе ( $H_0$  – нормальное распределение, ОМП):  $n = 5, 20, 1000$

разницу в распределениях статистик при простых и сложных гипотезах, на указанном рисунке приведены  $G(S_n | H_0)$  для  $n = 5, 20, 1000$  и  $a1(S)$  – предельная функция распределения статистики  $S_{\omega}$  при проверке простой гипотезы.

Таким образом, распределения  $G(S_n | H_0)$  статистик непараметрических критериев при простых и сложных гипотезах с ростом  $n$  очень быстро сходятся к предельным, и уже при  $n \geq 15...20$  можно, не опасаясь больших ошибок, пользоваться этими предельными законами при анализе данных.

Однако последний вывод не означает, что при малых объемах выборок с помощью этих критериев можно успешно различать близкие гипотезы. Для надежного различия близких законов распределения, в частности с помощью критерия согласия Колмогорова, может потребоваться выборка достаточно большого объема [292].

### **3.3.5. Влияние объема выборки на мощность непараметрических критериев при простых и сложных гипотезах**

И при проверке простых, и при проверке сложных гипотез распределения статистик  $G(S_n | H_0)$  непараметрических критериев согласия достаточно близки к предельным (не очень сильно отличаются) уже при объемах выборок  $n = 20...25$  наблюдений [258, 251]. Проблемы в другом.

При малых  $n$  бывает очень трудно различить пару близких конкурирующих гипотез  $H_0$  и  $H_1$ , так как очень близкими оказываются распределения  $G(S_n | H_0)$  и  $G(S_n | H_1)$ . Любой практик может заметить, что при малых  $n$  с равным успехом могут быть приняты гипотезы о согласии с целым рядом существенно отличающихся моделей законов. Способность любых статистических критериев различать гипотезы, т. е. их мощность, возрастает с увеличением объема выборок. В случае проверки простых гипотез различить два близких закона распределения, опираясь на непараметрические критерии согласия, очень проблематично. Это можно сделать достаточно надежно лишь при больших объемах выборок [292].

Например [221], рассмотрим две близкие гипотезы:  $H_0$  – нормальное распределение с плотностью

$$f_0(x) = \frac{1}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \theta_1)^2}{2\theta_0^2} \right\}$$

и параметрами  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_0 = 1$ ;  $H_1$  – логистическое с такими же параметрами  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_0 = 1$  и плотностью

$$f_1(x) = \frac{\pi}{\theta_0 \sqrt{3}} \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_1)}{\theta_0 \sqrt{3}} \right\} \left/ \left[ 1 + \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_1)}{\theta_0 \sqrt{3}} \right\} \right]^2 \right..$$

О близости этих законов распределения можно судить по рис. 3.4, на котором представлены их функции распределения. Эти два закона очень близки и, как правило, трудно различимы с помощью критериев согласия.

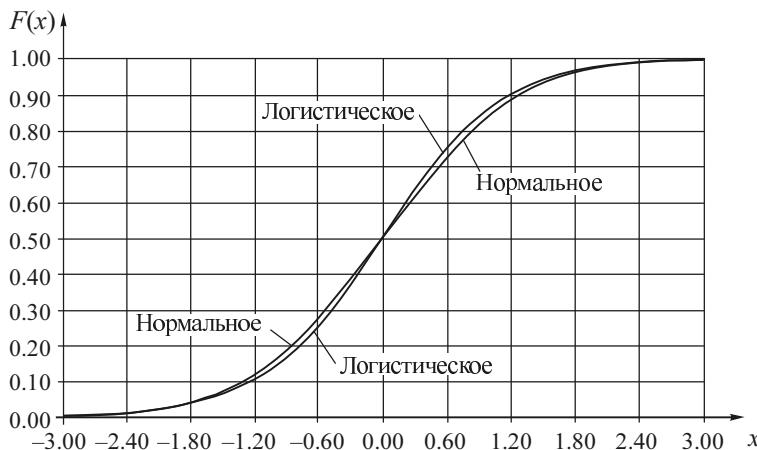


Рис. 3.4. Функции распределения нормального и логистического законов

Рис. 3.5 иллюстрирует зависимость от  $n$  распределений  $G(S_n(H_1))$  статистики  $S_K$  Колмогорова при проверке простой гипотезы. По рисунку видно, что при заданной вероятности ошибки первого рода (уровне значимости)  $\alpha = 0.1$  мощность критерия  $1 - \beta$ , где  $\beta$  – вероятность ошибки второго рода, составляет величины порядка 0.127

(всего!) при  $n = 100$ ; 0.215 при  $n = 300$ ; 0.309 при  $n = 500$ ; 0.544 при  $n = 1000$  и 0.861 при  $n = 2000$ .

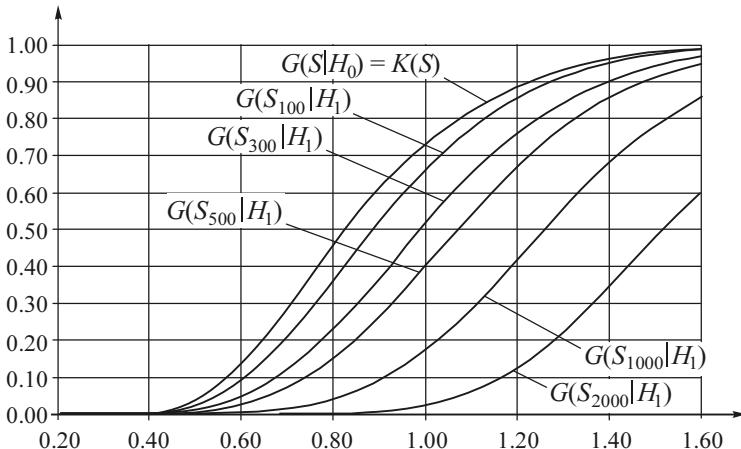


Рис. 3.5. Зависимость от  $n$  распределений  $G(S_n | H_1)$  статистики  $S_K$  Колмогорова при простой гипотезе ( $H_0$  – нормальное распределение,  $H_1$  – логистическое):  $n = 100, 300, 500, 1000, 2000$

На рис. 3.6 отражена аналогичная картина при проверке сложной гипотезы о согласии с нормальным законом с оцениванием параметров нормального закона методом максимального правдоподобия (при использовании ОМП) при той же конкурирующей гипотезе  $H_1$  по критерию типа Колмогорова. На рисунке представлены функция распределения  $G(S_n | H_0)$  и функции  $G(S_n | H_1)$  статистики Колмогорова при объемах выборок  $n = 20, 50, 100, 300, 500, 1000$  и  $2000$  наблюдений. При том же уровне значимости  $\alpha = 0.1$  мощность критерия оказывается существенно выше (в 2, 3 и более раза) и составляет величины порядка 0.142 при  $n = 20$ ; 0.181 при  $n = 50$ ; 0.236 при  $n = 100$ ; 0.351 при  $n = 200$ ; 0.459 при  $n = 300$ ; 0.646 при  $n = 500$ ; 0.905 при  $n = 1000$  и 0.997 при  $n = 2000$ . Это свидетельствует о том, что в случае проверки сложных гипотез те же близкие гипотезы могут различаться при средних объемах выборок.

На рис. 3.7, 3.8 для сравнения представлены распределения  $G(S_n | H_1)$  статистики  $S_{\omega}$  при проверке простой (рис. 3.7) и сложной гипотезы (рис. 3.8) для той же самой альтернативы  $H_0$  и  $H_1$ .

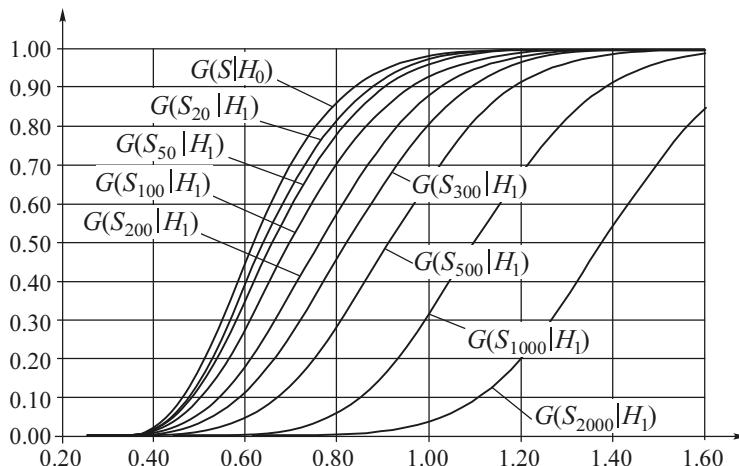


Рис. 3.6. Зависимость от  $n$  распределений  $G(S_n | H_1)$  статистики  $S_K$  Колмогорова при сложной гипотезе ( $H_0$  – нормальное распределение,  $H_1$  – логистическое, ОМП):  $n = 20, 50, 100, 200, 300, 500, 1000, 2000$

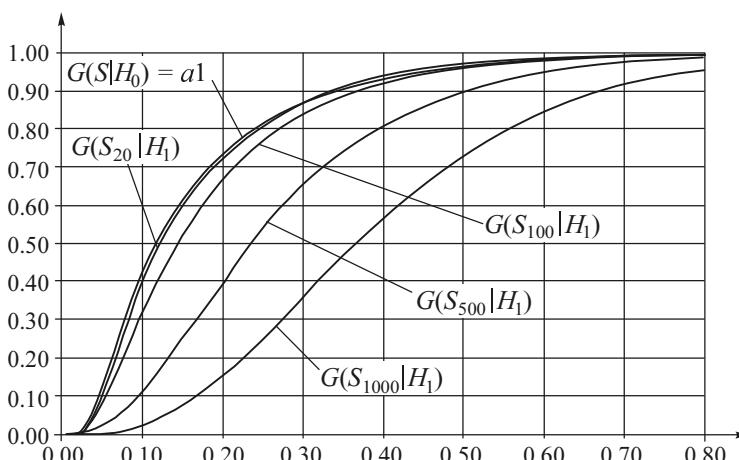


Рис. 3.7. Зависимость от  $n$  распределений  $G(S_n | H_1)$  статистики  $S_{\infty}$  Крамера–Мизеса–Смирнова при простой гипотезе ( $H_0$  – нормальное распределение,  $H_1$  – логистическое):  $n = 20, 100, 500, 1000$

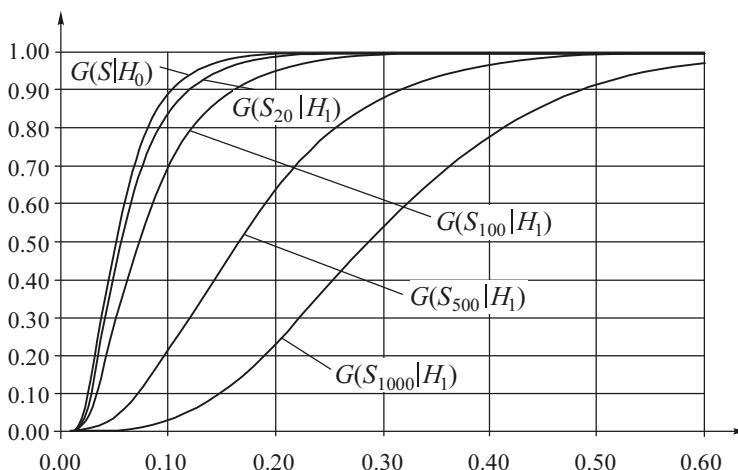


Рис. 3.8. Зависимость от  $n$  распределений  $G(S_n | H_1)$  статистики  $S_\omega$  Крамера–Мизеса–Смирнова при сложной гипотезе ( $H_0$  – нормальное распределение,  $H_1$  – логистическое, ОМП):  $n = 20, 100, 500, 1000$

Для данной пары конкурирующих гипотез в случае проверки сложной гипотезы  $H_0$  критерий согласия типа  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова обладает несколько большей мощностью при различении близких гипотез, чем критерий типа Колмогорова, а в случае простых – наоборот.

С точки зрения практического использования критериев важны два момента, которые подтверждены результатами исследований и хорошо иллюстрированы рис. 3.5–3.8. Во-первых, очевидно, что при малых выборках пытаться различать с помощью непараметрических критериев согласия близкие гипотезы (особенно простые) абсолютно бесполезно. Во-вторых, мощность непараметрических критериев при проверке сложных гипотез при тех же объемах выборок  $n$  всегда существенно выше, чем при проверке простых.

При проверке простых гипотез непараметрические критерии типа Колмогорова, Смирнова,  $\omega^2$  и  $\Omega^2$  Мизеса уступают по мощности критериям типа  $\chi^2$ , особенно, если в последних используется асимптотически оптимальное группирование [191, 250, 216, 217]. Но при проверке сложных гипотез непараметрические критерии оказываются

более мощными. Для того чтобы воспользоваться их преимуществами, надо только знать распределение  $G(S|H_0)$  при проверяемой сложной гипотезе.

### 3.3.6. Влияние метода оценивания на распределения статистик непараметрических критериев при сложных гипотезах

Распределения статистик критериев согласия существенно зависят от метода оценивания параметров, т. е. каждому типу оценок при конкретной сложной проверяемой гипотезе соответствует свое предельное распределение  $G(S|H_0)$  статистики. В данном случае по вполне очевидным причинам при проверке сложных гипотез сравним результаты использования ОМП и *MD*-оценок. *MD*-оценки получаются при минимизации некоторого расстояния между эмпирической и теоретической функцией распределения. Предпочтительность ОМП определяется их асимптотическими свойствами [123, 303], а *MD*-оценки более устойчивы к различным отклонениям от предполагаемого закона распределения, более робастны. В случае *MD*-оценивания оценки параметров могут строиться непосредственной минимизацией статистики используемого критерия согласия.

ОМП вычисляют в результате максимизации по  $\theta$  функции правдоподобия

$$L(\theta) = \gamma \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \quad (3.21)$$

или ее логарифма

$$\ln L(\theta) = \ln \gamma + \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta). \quad (3.22)$$

Чаще всего в случае скалярного параметра ОМП определяют как решение уравнения, а в случае векторного параметра – как решение системы уравнений правдоподобия вида

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_l} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta_l} = 0, \quad l = \overline{1, m}, \quad (3.23)$$

где  $m$  – размерность вектора параметров  $\theta$ . В общем случае эта система нелинейна и за редким исключением решается только численно.

В данном случае, как и в [260, 258, 251, 256, 261], при построении распределений статистик и исследовании их зависимости от метода оценивания ОМП вычисляли как решение системы (3.23). При практическом использовании критериев необходимо иметь в виду, что использование грубых приближений ОМП может отражаться на распределениях статистик и свойствах критериев [273].

При вычислении  $MD$ -оценок минимизируется соответствующее расстояние между эмпирическим и теоретическим распределениями. При использовании статистики Колмогорова  $S_K$  за оценку вектора параметров  $\theta$  принимают значения, минимизирующие эту статистику:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} S_K \quad (3.24)$$

( $MD$ -оценки  $S_K$ ). Аналогично при использовании статистики  $S_{\Omega}$  минимизируется по  $\theta$  статистика  $S_{\Omega}$ :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} S_{\Omega} \quad (3.25)$$

( $MD$ -оценки  $S_{\Omega}$ ). При использовании статистики  $S_{\Omega}$

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} S_{\Omega} \quad (3.26)$$

( $MD$ -оценки  $S_{\Omega}$ ).

Вид используемой оценки существенно влияет на распределения статистик критериев согласия. Степень влияния метода оценивания на распределение статистики иллюстрирует рис. 3.9, на котором показаны полученные в результате моделирования плотности распределения  $g(S_n | H_0)$  статистики  $S_K$  критерия типа Колмогорова при вычислении оценок параметра сдвига нормального распределения тремя различными методами: минимизацией статистики  $S_K$ , минимизацией статистики  $S_{\Omega}$  и методом максимального правдоподобия. Функция плотности распределения Колмогорова обозначена на рисунке как  $k(S)$ .

При использовании ОМП распределения статистик сильно зависят от соответствующего проверяемой гипотезе  $H_0$  закона  $F(x, \theta)$ . На рис. 3.10 приведены эмпирические распределения  $G(S_n | H_0)$  статистики Колмогорова  $S_K$ , когда при проверке сложной гипотезы два

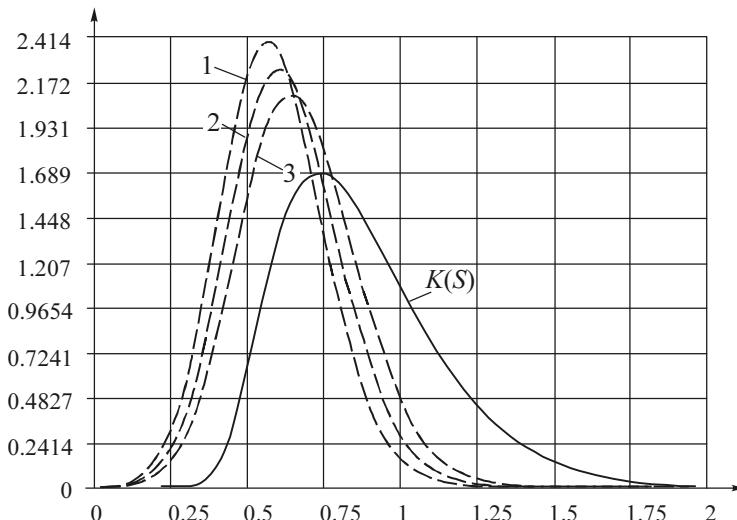


Рис. 3.9. Плотности распределения  $g(S_n | H_0)$  статистики  $S_K$  при проверке сложной гипотезы ( $H_0$  – нормальный закон, оценивается сдвиг: 1 – с использованием MD-оценок  $S_K$ ; 2 – MD-оценок  $S_\omega$ ; 3 – ОМП).  $k(s)$  – плотность распределения Колмогорова

параметра закона, соответствующего гипотезе  $H_0$ , оценивали с использованием метода максимального правдоподобия. При этом на рисунке показаны распределения статистики  $G(S_n | H_0)$ , когда гипотеза  $H_0$  соответствует законам: нормальному, логистическому, Лапласа с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2\theta_0} e^{-|x-\theta_1|/\theta_0},$$

распределению наименьшего значения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_0} \exp \left\{ \frac{x-\theta_1}{\theta_0} - \exp \left( \frac{x-\theta_1}{\theta_0} \right) \right\},$$

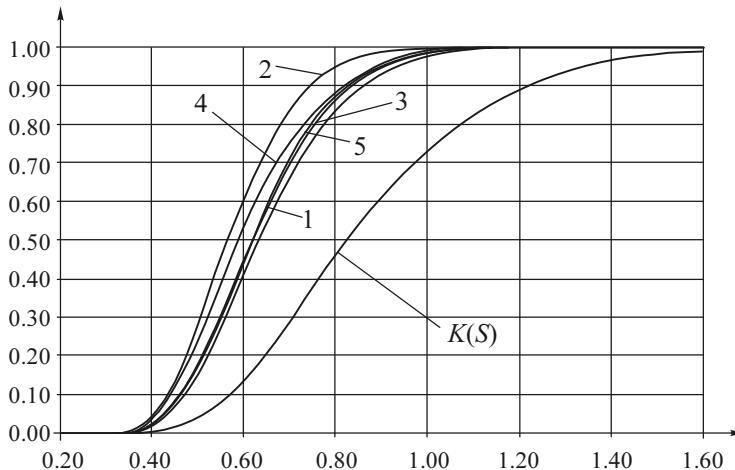


Рис. 3.10. Распределения  $G(S_n | H_0)$  статистики Колмогорова  $S_K$  при оценивании двух параметров закона, соответствующего гипотезе  $H_0$  (здесь и далее: 1 – нормального, 2 – логистического, 3 – Лапласа, 4 – наименьшего значения, 5 – Коши), при использовании ОМП.  $K(S)$  – функция распределения Колмогорова

распределению Коши с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_0}{\pi \left[ \theta_0^2 + (x - \theta_1)^2 \right]}.$$

При использовании  $MD$ -оценок, минимизирующих статистику применяемого критерия согласия, влияние закона  $F(x, \theta)$ , соответствующего проверяемой гипотезе  $H_0$ , проявляется менее значительно. На рис. 3.11 показаны распределения  $G(S_n | H_0)$  той же статистики  $S_K$  при проверке тех же гипотез, но с использованием  $MD$ -оценок параметров, полученных минимизацией по параметрам статистики  $S_K$ .

На рис. 3.12 приведены распределения статистики  $S_\omega$  для аналогичных гипотез  $H_0$  при использовании ОМП, а на рис. 3.13 – при использовании  $MD$ -оценок, минимизирующих по параметрам статистику  $S_\omega$ .

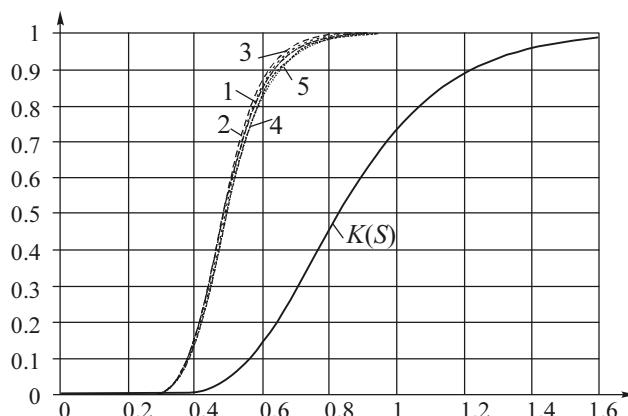


Рис. 3.11. Распределения  $G(S_n | H_0)$  статистики Колмогорова  $S_K$  при оценивании двух параметров закона, соответствующего гипотезе  $H_0$ , при использовании MD-оценок  $S_K$ .  $K(S)$  – функция распределения Колмогорова, предельная при простой гипотезе

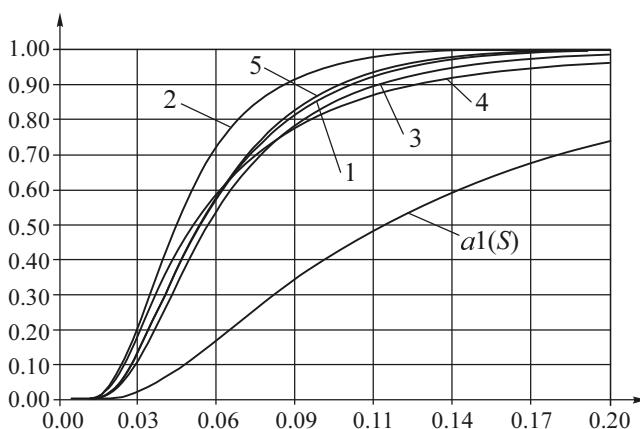


Рис. 3.12. Распределения  $G(S_n | H_0)$  статистики  $S_{\omega}$  Крамера–Мизеса–Смирнова при оценивании двух параметров закона, соответствующего гипотезе  $H_0$ , при использовании ОМП.  $a1(s)$  – функция распределения, предельная при простой гипотезе

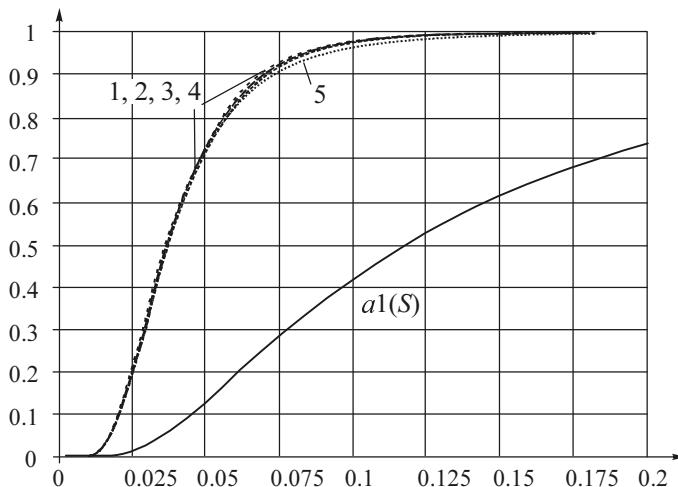


Рис. 3.13. Распределения  $G(S_n | H_0)$  статистики  $S_{\omega}$  Крамера–Мизеса–Смирнова при оценивании двух параметров закона, соответствующего гипотезе  $H_0$ , при  $MD$ -оценках  $S_{\omega}$

При использовании  $MD$ -оценок, минимизирующих по параметрам статистику  $S_{\omega}$ , эмпирические распределения смоделированных распределений  $G(S_n(H_0))$  практически совпадают для законов нормального, логистического, Лапласа, наименьшего значения, максимального значения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_0} \exp \left\{ -\frac{x-\theta_1}{\theta_0} - \exp \left( -\frac{x-\theta_1}{\theta_0} \right) \right\},$$

распределения Вейбулла с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_0 x^{\theta_0 - 1}}{\theta_1^{\theta_0}} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta_1}\right)^{\theta_0}\right\}$$

и хорошо аппроксимируются логарифмически нормальным законом с плотностью

$$f(s) = \frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln s - \mu)^2/2\sigma^2}$$

и параметрами  $\mu = -3,2702$ ;  $\sigma = 0,4719$ .

Распределения статистик критериев согласия при использовании *MD*-оценок (как и в случае использования ОМП) существенно зависят от того, какой параметр оценивался. На рис. 3.14 показаны распределения  $G(S_n | H_0)$  статистики  $S_\omega$  Крамера–Мизеса–Смирнова при использовании *MD*-оценок  $S_\omega$  и оценивании масштабного параметра закона, соответствующего гипотезе  $H_0$ . На рис. 3.15 представлены аналогичные распределения статистик, но при оценивании для тех же распределений параметра сдвига. Распределения статистик в случае оценивания параметра сдвига распределения максимального значения и масштабного параметра распределения Вейбулла совпадают с распределением статистики для распределения минимального значения.

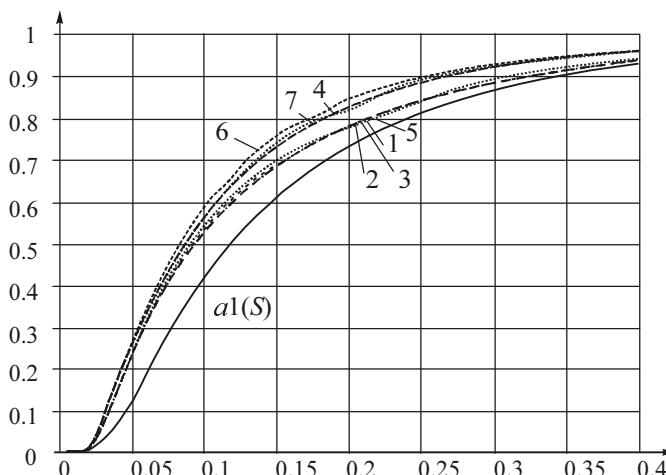


Рис. 3.14. Распределения  $G(S_n | H_0)$  статистики  $S_\omega$  Крамера–Мизеса–Смирнова при оценивании масштабного параметра закона, соответствующего гипотезе  $H_0$  (6 – максимального значения, 7 – Вейбулла, параметр формы), при использовании *MD*-оценок  $S_\omega$

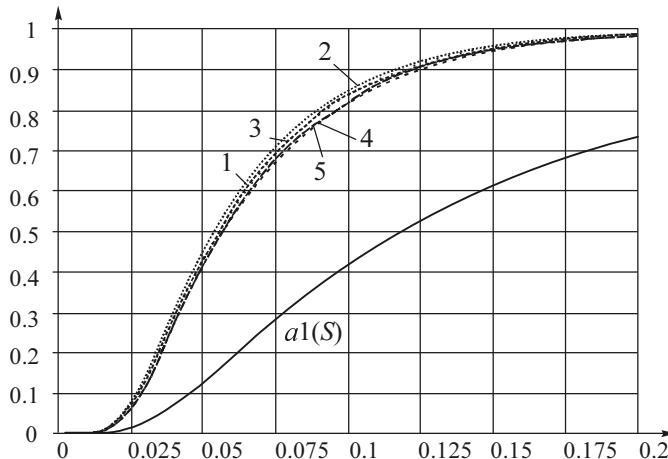


Рис. 3.15. Распределения  $G(S_n | H_0)$  статистики  $S_\omega$  Крамера–Мизеса–Смирнова при оценивании параметра сдвига, соответствующего гипотезе  $H_0$ , при  $MD$ -оценках  $S_\omega$

Если обратить внимание на рис. 3.16, на котором отображены распределения  $G(S_n | H_0)$  статистики  $S_\omega$  при проверке согласия с распределениями экспоненциальным  $f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$ , полунаормальным

$$f(x) = \frac{2}{\theta \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\theta^2},$$

Рэлея

$$f(x) = \frac{x}{\theta^2} e^{-x^2/2\theta^2},$$

Максвелла

$$f(x) = \frac{2x^2}{\theta^3 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}},$$

модуля  $m$ -мерного ( $m = 5$ ) нормального вектора

$$f(x) = \frac{2x^{m-1}}{(2\theta^2)^{m/2} \Gamma(m/2)} e^{-x^2/2\theta^2}$$

при оценивании масштабного параметра соответствующего закона с использованием  $MD$ -оценок  $S_{\omega}$ , то можно заметить, что распределения статистик близки к приведенным на рис. 3.15. Распределения статистик, показанные на рис. 3.16, например, достаточно хорошо аппроксимируются логарифмически нормальным законом с параметрами  $\mu = -2.8484$ ;  $\sigma = 0.5669$ .

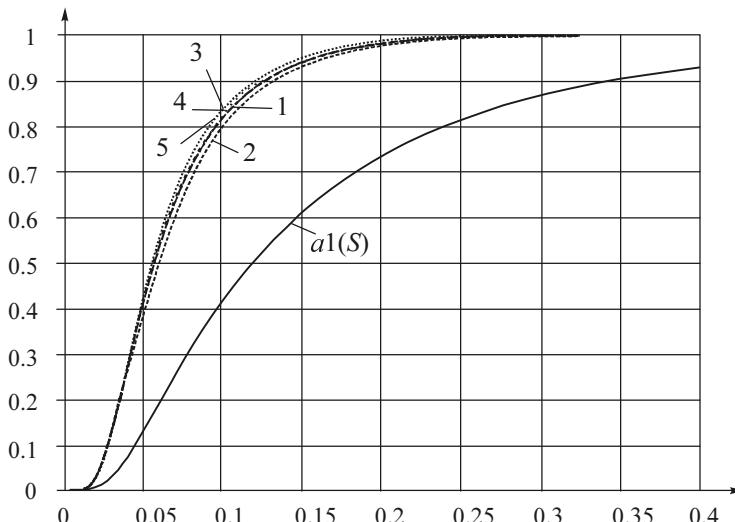


Рис. 3.16. Распределения  $G(S_n | H_0)$  статистики  $S_{\omega}$  Крамера–Мизеса–Смирнова при оценивании масштабного параметра закона, соответствующего гипотезе  $H_0$  (1 – экспоненциального, 2 – полунаormalного, 3 – Рэлея, 4 – Максвелла, 5 – модуля 5-мерного нормального вектора), при использовании  $MD$ -оценок  $S_{\omega}$

Таким образом, применяя непараметрические критерии согласия, следует непременно учитывать используемый метод оценивания. При этом в случае метода максимального правдоподобия распределения статистик  $G(S|H_0)$  очень сильно зависят от закона, соответствующего гипотезе  $H_0$ . Разброс распределений  $G(S|H_0)$  при использовании  $MD$ -оценок, минимизирующих статистику критерия, зависит от закона  $F(x, \theta)$ , соответствующего гипотезе  $H_0$ , в существенно меньшей степени.

Следует подчеркнуть, что вид используемых оценок очень сильно отражается на распределениях статистик непараметрических критериев согласия, а точность оценивания, как правило, в существенно меньшей степени [273].

### 3.3.7. Метод оценивания и мощность непараметрических критериев согласия

При использовании *MD*-оценок, минимизирующих статистику критерия, эмпирические распределения  $G(S_n | H_0)$ , соответствующие различным гипотезам  $H_0$ , имеют минимальный разброс, что означает определенную «свободу от распределения» для рассматриваемых критериев. Этот факт говорит в пользу использования *MD*-оценок при проверке сложных гипотез. Но если исследовать мощность рассматриваемых критериев при различных методах оценивания, то оказывается, что максимальную мощность непараметрические критерии при близких альтернативах имеют в случае оценивания параметров методом максимального правдоподобия [256].

Способность применяемого критерия различать конкурирующие гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  зависит от его мощности  $1 - \beta$  при заданном уровне значимости  $\alpha$ , т. е. от того, насколько существенно различаются распределения статистики  $G(S_n | H_0)$  и  $G(S_n | H_1)$ . При одинаковых объемах выборок  $n$  отличие распределений  $G(S_n | H_0)$  и  $G(S_n | H_1)$  в случае использования ОМП более значительно, а следовательно, критерий оказывается более мощным, чем в случае использования *MD*-оценок.

Например, рис. 3.17 иллюстрирует зависимость от  $n$  распределений  $G(S_n | H_1)$  статистики  $S_K$  Колмогорова при проверке сложной гипотезы при паре альтернатив  $H_0$  – нормальное распределение,  $H_1$  – логистическое и использовании *MD*-оценок  $S_K$ , а рис. 3.18 – зависимость от  $n$  распределений  $G(S_n | H_1)$  статистики  $S_{\omega}$  Крамера–Мизеса–Смирнова при использовании *MD*-оценок  $S_{\omega}$ .

Сравнивая рис. 3.17 с рис. 3.6, а рис. 3.18 с рис. 3.8, можно убедиться, что в случае использования метода максимального правдоподобия мощность критериев типа Колмогорова и типа  $\omega^2$  Мизеса много

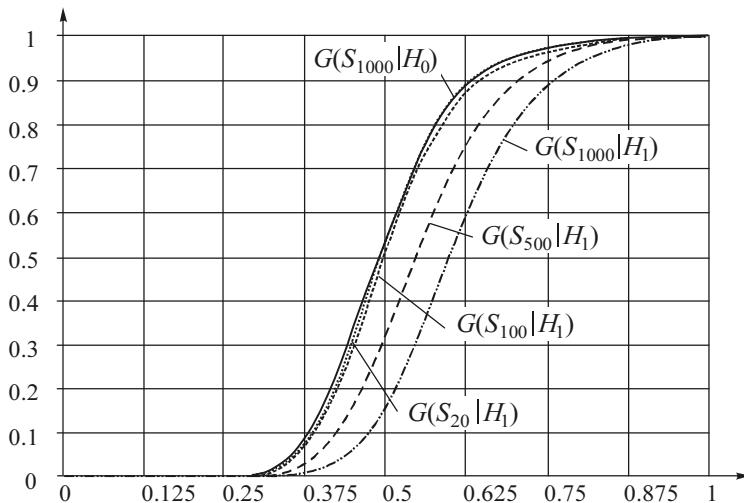


Рис. 3.17. Зависимость от  $n$  распределений  $G(S_n | H_1)$  статистики  $S_K$  Колмогорова при сложной гипотезе ( $H_0$  – нормальное распределение,  $H_1$  – логистическое, MD-оценки  $S_K$ ):  $n = 20, 100, 500, 1000$

выше, чем при использовании соответствующих MD-оценок. Аналогичная картина справедлива и для критерия типа  $\Omega^2$  Мизеса со статистикой  $S_\Omega$  Андерсона–Дарлинга.

Для сравнения по мощности непараметрических критериев согласия для рассматриваемой пары близких гипотез  $H_0$  и  $H_1$  при использовании ОМП на рис. 3.19 приведены распределения  $G(S_{1000} | H_0)$  и  $G(S_n | H_1)$  при  $n = 20, 100, 500, 1000$  для статистики  $S_\Omega$  Андерсона–Дарлинга, а на рис. 3.20 – для статистики  $S_m$  Смирнова.

Анализируя распределения на рис. 3.6, 3.8, 3.19 и 3.20, можно заметить, что наиболее мощным для данной пары гипотез является критерий  $\Omega^2$  со статистикой  $S_\Omega$  Андерсона–Дарлинга, затем критерий  $\omega^2$  со статистикой  $S_\omega$  Крамера–Мизеса–Смирнова, далее критерий Колмогорова со статистикой  $S_K$  и на последнем месте критерий Смирнова со статистикой  $S_m$ . Данное наблюдение о порядке предпочтения критериев хорошо согласуется с опытом их применения.

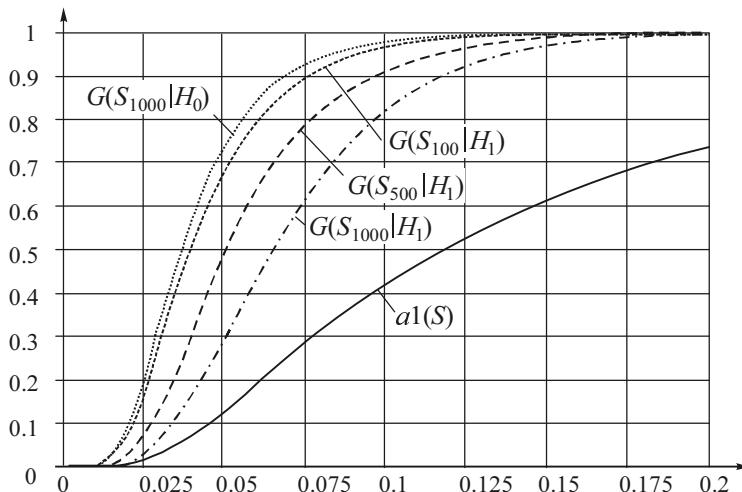


Рис. 3.18. Зависимость от  $n$  распределений  $G(S_n | H_1)$  статистики  $S_\Omega$  Крамера–Мизеса–Смирнова при сложной гипотезе ( $H_0$  – нормальное распределение,  $H_1$  – логистическое, MD-оценки  $S_\Omega$ ):  
 $n = 100, 500, 1000$

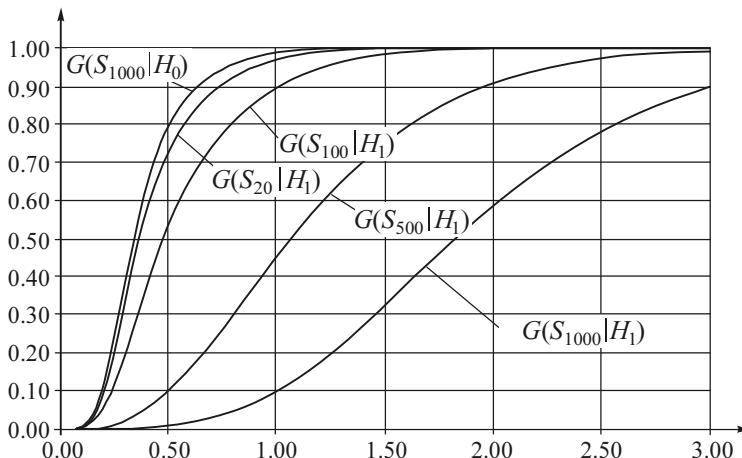


Рис. 3.19. Зависимость от  $n$  распределений  $G(S_n | H_1)$  статистики  $S_\Omega$  Андерсона–Дарлинга при сложной гипотезе ( $H_0$  – нормальное распределение,  $H_1$  – логистическое, ОМП):  $n = 20, 100, 500, 1000$

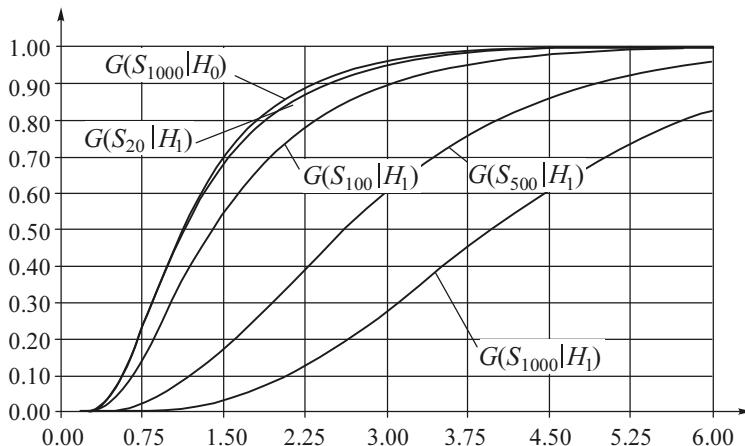


Рис. 3.20. Зависимость от  $n$  распределений  $G(S_n | H_1)$  статистики  $S_m$  Смирнова при сложной гипотезе ( $H_0$  – нормальное распределение,  $H_1$  – логистическое, ОМП):  $n = 20, 100, 500, 1000$

Почему мощность рассматриваемых критериев при проверке близких гипотез в случае ОМП выше, чем при  $MD$ -оценках, достаточно логично объясняет следующая версия. Использование  $MD$ -оценок, минимизирующих статистику критерия, приводит к распределению  $G(S | H_0)$  с меньшим параметром масштаба (к более крутой функции распределения), чем в случае ОМП. Но, с другой стороны,  $MD$ -оценки в отличие от ОМП являются робастными, они менее чувствительны к малым отклонениям выборки от предполагаемого закона распределения. Поэтому функция распределения  $G(S_n | H_1)$  оказывается еще более крутой по отношению к аналогичному распределению при использовании ОМП.

### 3.3.8. Зависимость распределений статистик непараметрических критериев от конкретных значений параметра

Для достаточно широкого перечня законов, часто используемых в приложениях для описания наблюдаемых случайных величин, распределения статистик непараметрических критериев согласия не зависят

сят от (истинных) значений конкретных параметров. Данное свойство облегчает проблему проверки сложных гипотез с использованием непараметрических критериев согласия относительно этих законов. К группе таких законов относятся распределения: экспоненциальное, полунармальное, Рэлея, Максвелла, Лапласа, нормальное, логнормальное, Коши, логистическое, логлогистическое, экстремальных значений (наибольшего и наименьшего), Вейбулла, Sb-Джонсона, S1-Джонсона, Su-Джонсона. Процентные точки и модели распределений непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно этих законов, уточненные в [226, 80, 227, 76] для случая использования ОМП, представлены в табл. В.7–В.23 приложения В.

В некоторых случаях предельные распределения  $G(S|H_0)$  рассматриваемых статистик при проверке сложных гипотез зависят от конкретных значений параметров распределения, с которым проверяют согласие [258, 239]. Например, это касается семейства гамма-распределений, семейств бета-распределений I, II и III рода, экспоненциального семейства распределений, обобщенного распределения Вейбулла, обратного гауссовского распределения и многих других, интересных для применения в приложениях, законов.

### 3.3.8.1. Распределения статистик

#### **непараметрических критериев согласия в случае проверки согласия с гамма-распределением**

Распределения  $G(S|H_0)$  непараметрических критериев в случае проверки согласия с гамма-распределением с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1^{\theta_0} \Gamma(\theta_0)} x^{\theta_0-1} e^{-x/\theta_1}$$

зависят от его параметра формы  $\theta_0$ . Для иллюстрации приведены лишь распределения  $G(S|H_0)$  статистики Колмогорова  $S_K$ . На рис. 3.21 показаны распределения статистики при оценивании по выборке параметра формы, на рис. 3.22 – масштабного параметра, на рис. 3.23 – двух параметров распределения.

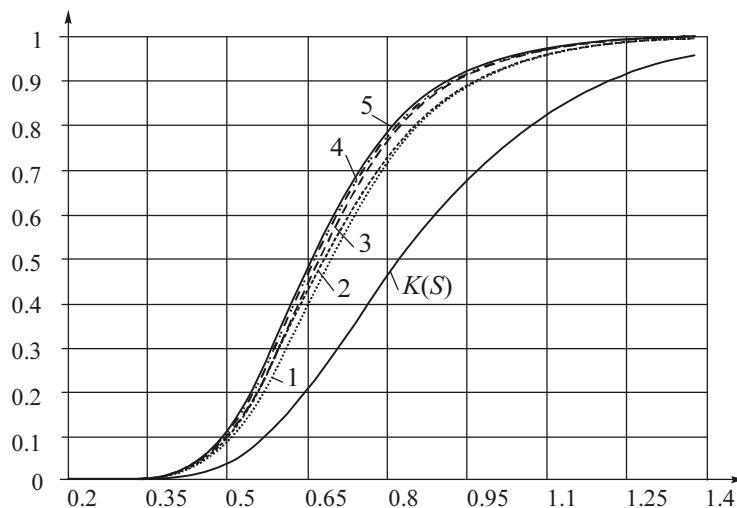


Рис. 3.21. Функции распределения статистики  $S_K$  Колмогорова при вычислении ОМП параметра формы гамма-распределения.  
 $K(S)$  – функция распределения Колмогорова

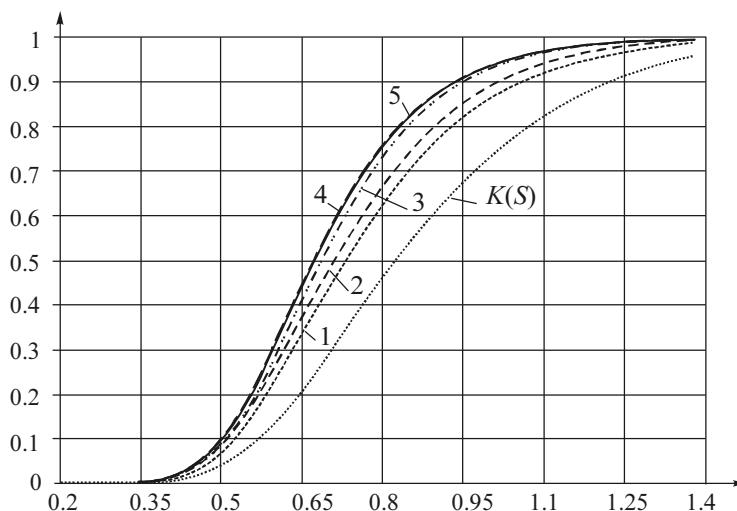


Рис. 3.22. Функции распределения статистики  $S_K$  Колмогорова при вычислении ОМП масштабного параметра гамма-распределения.  $K(S)$  – функция распределения Колмогорова

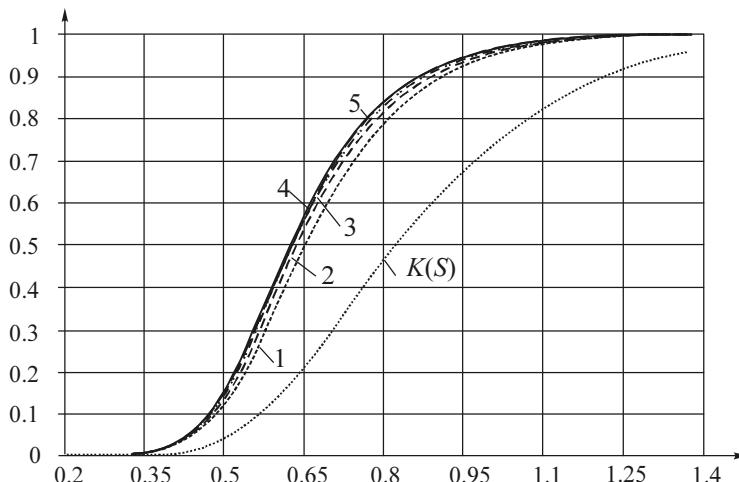


Рис. 3.23. Функции распределения статистики  $S_K$  Колмогорова при оценивании методом максимального правдоподобия одновременно двух параметров гамма-распределения.  $K(S)$  – функция распределения Колмогорова

На этих рисунках цифрами по порядку помечены функции распределения статистики: 1 – при  $\theta_0 = 0,5$ ; 2 – при  $\theta_0 = 1,0$ ; 3 – при  $\theta_0 = 2,0$ ; 4 – при  $\theta_0 = 3,0$ ; 5 – при  $\theta_0 = 5,0$ . Для сравнения приведена функция распределения Колмогорова  $K(S)$ . С ростом  $\theta_0$  предельные распределения статистик сходятся к предельным распределениям статистик для выборок из нормального закона. При значениях  $\theta_0 > 5$  эмпирические распределения статистик при оценивании двух параметров практически совпадают и хорошо согласуются с распределением соответствующей статистики для нормального закона.

Общая картина принципиально сохраняется и для распределений других статистик непараметрических критериев при проверке согласия с гамма-распределением.

Процентные точки и модели распределений непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно гамма-распределений, ранее приведенные в [302], были уточнены в работах [82, 227, 81, 76] и представлены в табл. В.24–В.28 приложения В.

### 3.3.8.2. Распределения статистик непараметрических критериев согласия в случае проверки согласия с двусторонним экспоненциальным распределением

В [239, 87] было рассмотрено применение непараметрических критериев согласия в случае интересного для применения в различных приложениях закона, называемого иногда двусторонним экспоненциальным распределением, иногда экспоненциальным семейством распределений.

Ошибки измерительных приборов и систем, базирующихся на различных физических принципах, часто не удается описать с помощью нормального закона распределения [290]. В таких ситуациях, в случае симметричности законов наблюдаемых случайных величин, достаточно хорошей моделью оказывается семейство распределений с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp\left\{-\left(\frac{|x - \theta_0|}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right\}. \quad (3.27)$$

Частными случаями этого закона при значениях параметра формы  $\theta_2$ , равных 2 и 1, соответственно являются распределения нормальное и Лапласа. Плотности закона при различных значениях параметра формы  $\theta_2$  приведены на рис. 3.24.

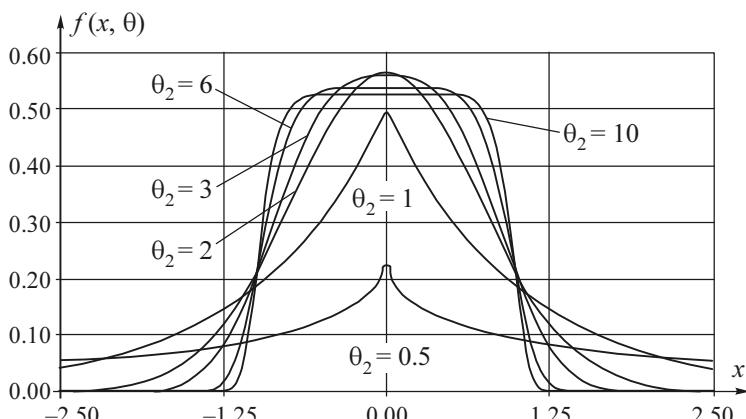


Рис. 3.24. Плотности распределения семейства (3.27) при различных значениях параметра  $\theta_2$

Семейство (3.27) в последнее время достаточно часто используется в качестве вероятностных моделей ошибок наблюдений в задачах регрессионного и дисперсионного анализа при нарушении классических предположений, когда закон распределения ошибок существенно отличается от нормального.

Статистическое моделирование и исследование получаемых эмпирических распределений статистик (3.6), (3.16) и (3.19) при справедливости гипотезы  $H_0$ , соответствующей закону (3.27), показали существенную и не совсем обычную зависимость распределений статистик  $G(S|H_0)$  от параметра формы  $\theta_2$ . Как правило, с ростом  $\theta_2$  от 0 до  $\approx 1.6$  происходит уменьшение масштабного параметра распределения статистики  $G(S|H_0)$ , а при дальнейшем росте  $\theta_2$  – увеличение масштабного параметра. При значениях  $\theta_2 > 7$  распределения статистик при соответствующих сложных гипотезах практически не меняются.

В частности, рис. 3.25 иллюстрирует зависимость распределений статистики типа Колмогорова от параметра формы  $\theta_2$  для случая, когда все три параметра распределения (3.27) оцениваются методом максимального правдоподобия. На рис. 3.26 представлена аналогичная картина, соответствующая оцениванию только двух параметров: сдвига  $\theta_0$  и масштаба  $\theta_1$  при известном параметре формы  $\theta_2$ .

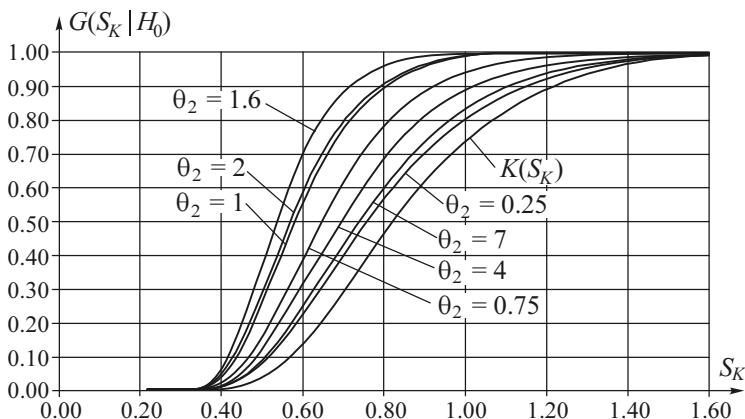


Рис. 3.25. Зависимость распределения статистики критерия типа Колмогорова от параметра формы  $\theta_2$  при оценивании всех трех параметров распределения (3.27)

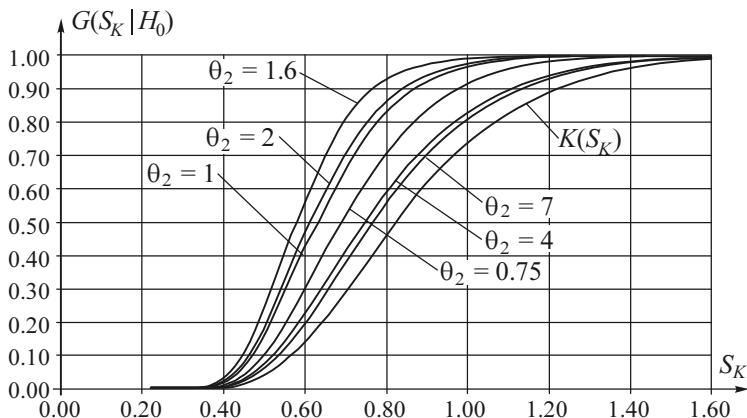


Рис. 3.26. Зависимость распределения статистики критерия типа Колмогорова от параметра формы  $\theta_2$  при оценивании только параметров сдвига и масштаба распределения (3.27)

Рис. 3.27 отражает характер зависимости распределения статистики критерия типа Колмогорова от числа и типа параметров, оцениваемых методом максимального правдоподобия, при значении параметра формы  $\theta_2 = 1.6$ . Этому значению параметра формы соответствуют самые «сдвинутые» влево распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке гипотез относительно закона (3.27). На рис. 3.27–3.30 соответствующие распределения  $G(S|H_0)$  помечены перечнем оцениваемых параметров.

Аналогичная картина для распределений статистики типа  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова представлена на рис. 3.28. Здесь же для сравнения приведена функция распределения  $a1(s)$ , которой подчиняется статистика в случае проверки простой гипотезы.

Для такой же ситуации на рис. 3.29 приведены распределения статистики критерия типа  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга при проверке сложных гипотез относительно закона (3.27) при параметре формы  $\theta_2 = 1.6$ , а также распределение  $a2(S)$ , которому в пределе подчиняется эта же статистика при проверке простых гипотез.

Для сравнения на рис. 3.30 приведена картина, аналогичная рис. 3.27, на которой отражена зависимость распределения статистики критерия типа Колмогорова от числа и типа параметров при значении параметра формы  $\theta_2 = 2$ . В этом случае плотность (3.27) соответствует нормальному закону.

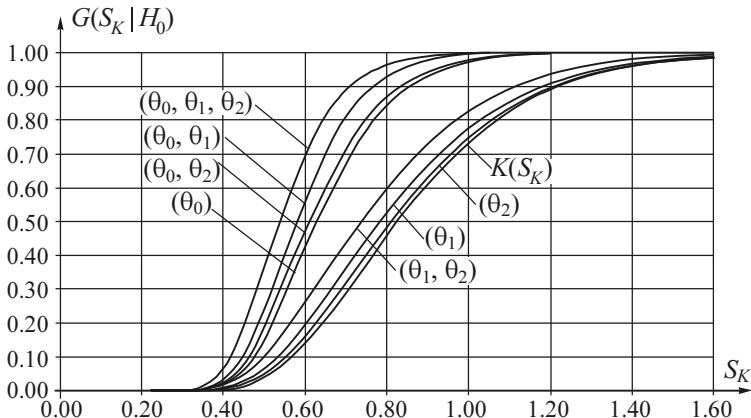


Рис. 3.27. Зависимость распределения статистики критерия типа Колмогорова от числа и типа оцениваемых методом максимального правдоподобия параметров при значении параметра формы  $\theta_2 = 1.6$

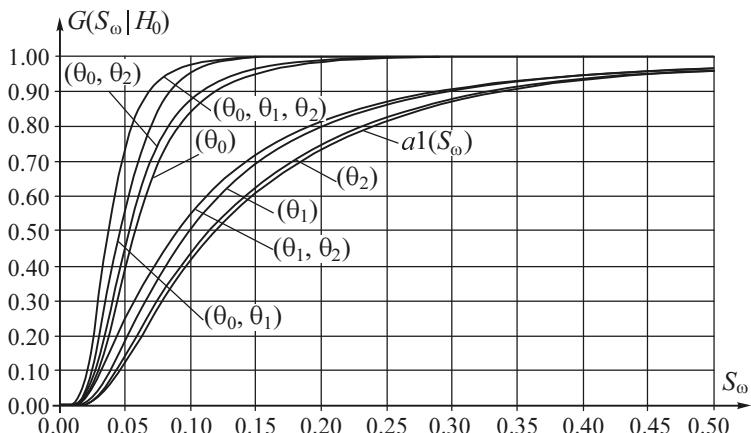


Рис. 3.28. Зависимость распределения статистики критерия типа  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова от числа и типа оцениваемых методом максимального правдоподобия параметров при значении параметра формы  $\theta_2 = 1.6$

Для проверки сложных гипотез о согласии с семейством (3.27) модели для распределений статистик  $G(S|H_0)$  критериев типа Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга в случае

использования ОМП были построены в [239, 87] при различных значениях параметра формы  $\theta_2$ . Позже процентные точки и модели были уточнены [82, 227, 81] и представлены в табл. В.29–В.37 приложения В.

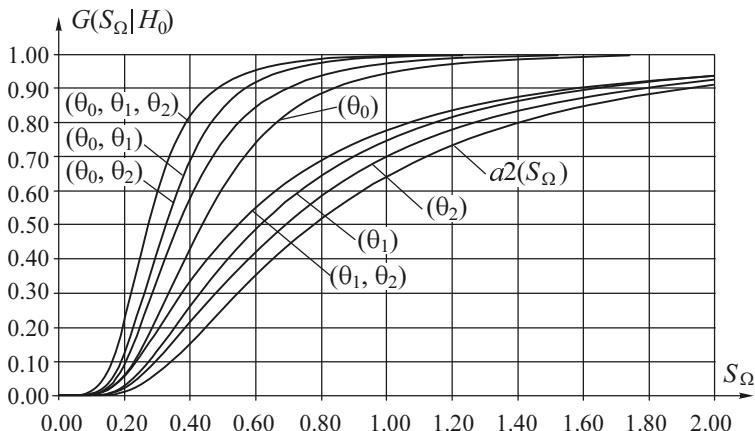


Рис. 3.29. Зависимость распределения статистики критерия типа  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга от числа и типа параметров, оцениваемых методом максимального правдоподобия, при значении параметра формы  $\theta_2 = 1.6$

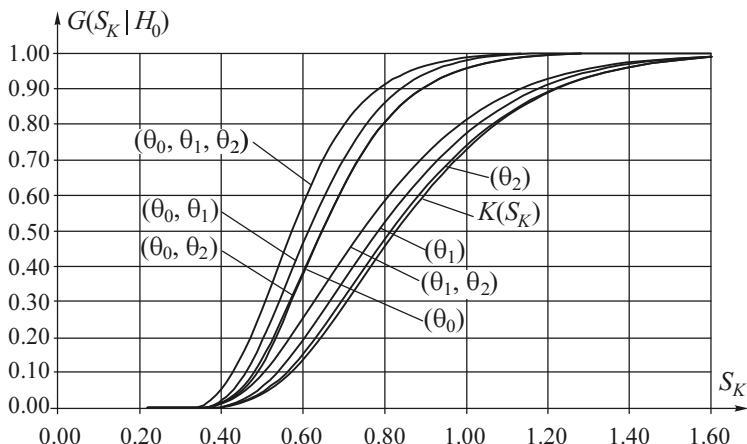


Рис. 3.30. Зависимость распределения статистики критерия типа Колмогорова от числа и типа оцениваемых методом максимального правдоподобия параметров при значении параметра формы  $\theta_2 = 2$

### **3.3.8.3. Распределения статистик**

**непараметрических критериев согласия в случае проверки согласия с обратным гауссовским законом**

Плотность обратного гауссовского распределения имеет вид

$$f(x) = \left( \frac{\theta_1}{2\pi x^3} \right)^{1/2} \exp\left( -\frac{\theta_1(x-\theta_0)^2}{2\theta_0^2 x} \right), \quad (3.28)$$

где параметры  $\theta_0, \theta_1 \in (0, \infty)$ ,  $x \in (0, \infty)$ . Особенный интерес к использованию данного закона проявляется в задачах анализа надежности, долговечности и выживания, когда имеются основания предполагать, что функция интенсивности отказов имеет колоколообразную форму.

При проверке сложных гипотез относительно обратного гауссовского закона распределения статистик  $G(S|H_0)$  критерии согласия зависят от конкретных значений двух параметров:  $\theta_0$  и  $\theta_1$ . Эту зависимость для распределений статистики критерия Андерсона–Дарлинга для случая использования ОМП демонстрирует рис. 3.31.

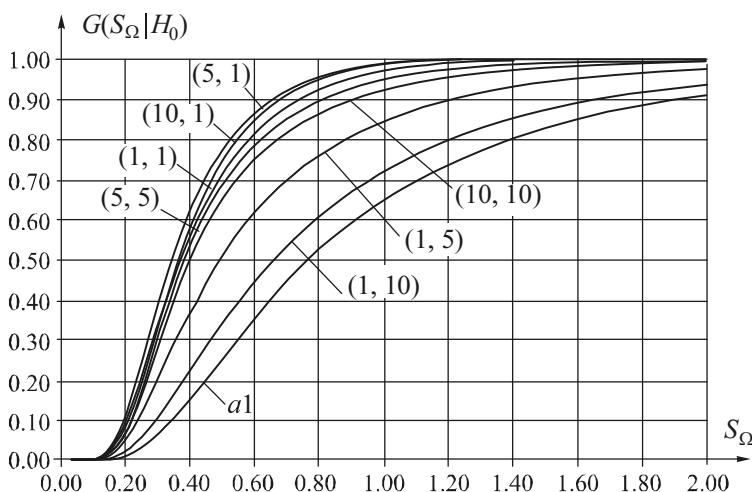


Рис. 3.31. Зависимость распределений статистики Андерсона–Дарлинга от значений  $\theta_0$  и  $\theta_1$  при использовании для оценивания параметров метода максимального правдоподобия

Задача исследования распределений статистик непараметрических критериев согласия для случая проверки сложных гипотез относительно обратного гауссовского закона решена в работах [95, 235] для достаточно большого диапазона значений параметров  $\theta_0$  и  $\theta_1$  семейства (3.28). Как правило, наилучшей моделью для распределений статистик оказывались распределения семейства бета-распределений третьего рода с функцией плотности

$$B_{III}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 B(\theta_0, \theta_1)} \frac{\left(\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0-1} \left(1 - \frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1-1}}{\left[1 + (\theta_2 - 1)\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0+\theta_1}}.$$

Построенные процентные точки и модели распределений статистик критериев Колмогорова,  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова,  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга для случая использования ОМП представлены в таблицах приложения В.

Найденные в [95, 235] верхние процентные точки и построенные модели для предельных распределений статистик критериев Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга в случае одновременного вычисления ОМП обоих параметров закона представлены в табл. В.38–В.40 приложения В.

### 3.3.8.4. Распределения статистик

#### непараметрических критериев согласия в случае проверки согласия с обобщенным распределением Вейбулла

Плотность обобщенного распределения Вейбулла (ОРВ) имеет вид

$$f(x; \theta_0, \theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_0}{\theta_1} \theta_2^{\theta_0} x^{\theta_0-1} \left(1 + \left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0}\right)^{\frac{1}{\theta_1}-1} e^{-\left(1 + \left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}}, \quad (3.29)$$

где  $x \geq 0$ ,  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2 > 0$  (рис. 3.32). Семейство (3.29) определяет множество различных законов. Специальными случаями ОРВ являются:

$\theta_1 = 1$  – семейство распределений Вейбулла;  $\theta_0 = 1$ ,  $\theta_1 = 1$  – экспоненциальное распределение.

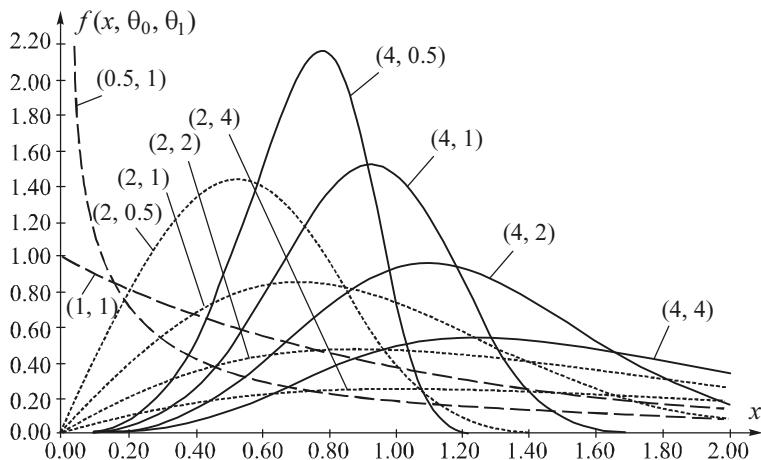


Рис. 3.32. Зависимость функции плотности (3.29) от значений параметров  $(\theta_0, \theta_1)$

Функция распределения закона имеет вид

$$F(x; \theta_0, \theta_1, \theta_2) = 1 - e^{-\left(1 + \left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}}.$$

Функция интенсивности отказов ОРВ (рис. 3.33) может быть монотонно возрастающей (при  $\theta_0 > 1$ ,  $\theta_0 > \theta_1$  и  $\theta_0 = 1$ ,  $\theta_1 < 1$ ), монотонно убывающей ( $0 < \theta_0 < 1$ ,  $\theta_0 < \theta_1$  и  $0 < \theta_0 < 1$ ,  $\theta_0 = \theta_1$ ),  $\cap$ -куполообразной ( $\theta_1 > \theta_0 > 1$ ),  $\cup$ -образной ( $0 < \theta_1 < \theta_0 < 1$ ) и имеет вид

$$\lambda(x) = \frac{\theta_0}{\theta_1} \theta_2^{\theta_1} x^{\theta_0-1} \left(1 + \left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0}\right)^{\frac{1}{\theta_1}-1}. \quad (3.30)$$

ОРВ используется в задачах исследования надежности и выживания.

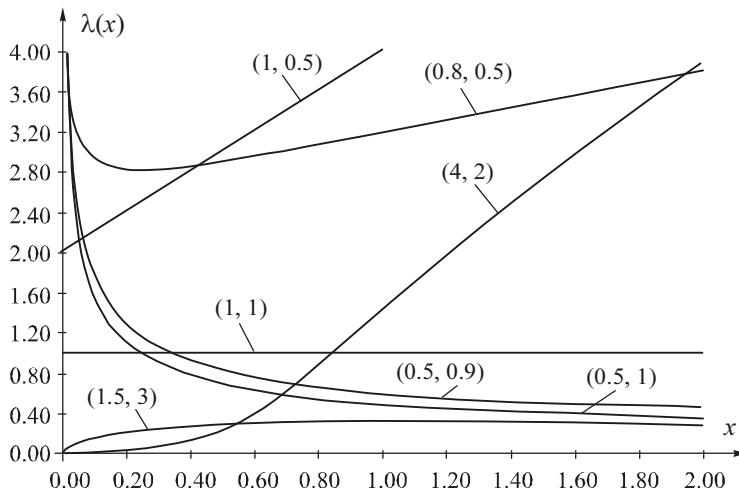


Рис. 3.33. Зависимость функции интенсивности (3.30) от значений параметров  $(\theta_0, \theta_1)$

В случае проверки сложных гипотез относительно ОРВ распределения статистик непараметрических критериев согласия  $G(S|H_0)$  зависят от конкретных значений истинного параметра  $\theta_1$ .

На рис. 3.34 и 3.35 можно наблюдать, как меняются распределения статистики  $S_\Omega$  критерия Андерсона–Дарлинга при проверке сложных гипотез относительно семейства (3.29). В случае оценивания трех параметров методом максимального правдоподобия (рис. 3.34) можно констатировать, что при росте параметра формы до значения  $\theta_1 \approx 2$  распределение статистики  $G(S|H_0)$  сдвигается влево. При дальнейшем росте параметра формы распределение статистики  $G(S|H_0)$  смещается в обратном направлении, вправо. В случае вычисления ОМП двух параметров (рис. 3.35) можно отметить, что при возрастании значений параметра формы  $\theta_1$  распределение статистики  $G(S|H_0)$  смещается вправо.

В [150, 2] для критериев Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга в случае использования метода максимального правдоподобия при определении оценок одного, двух или всех трех параметров закона найдены верхние процентные точки и

построены параметрические модели предельных распределений статистик.

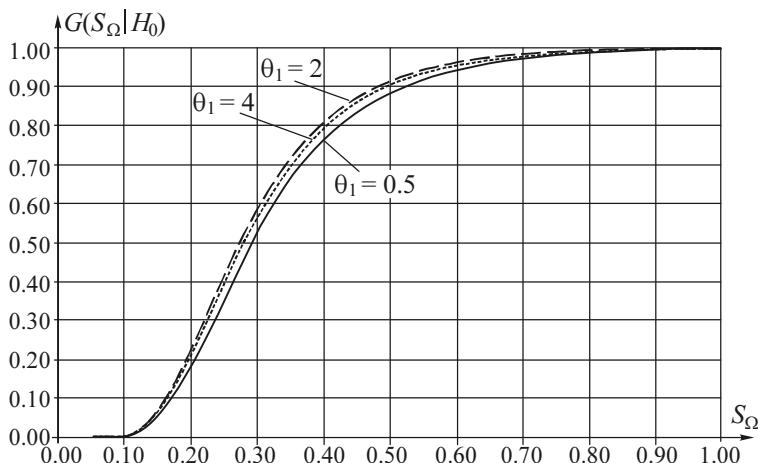


Рис. 3.34. Распределения статистики критерия Андерсона–Дарлинга при проверке сложных гипотез относительно семейства (3.29) и вычислении ОМП трех параметров ОРВ ( $\theta_0$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$ )

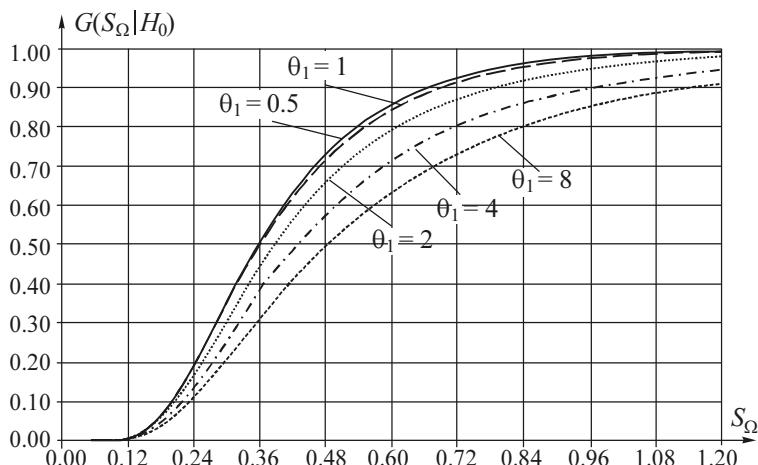


Рис. 3.35. Распределения статистики критерия Андерсона–Дарлинга при проверке сложных гипотез относительно семейства (3.29) и вычислении ОМП двух параметров ОРВ ( $\theta_0$  и  $\theta_1$ )

Распределения  $G(S|H_0)$  статистик в данном случае наилучшим образом аппроксимировались семейством бета-распределений третьего рода с функцией плотности

$$B_{III}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 B(\theta_0, \theta_1)} \frac{\left(\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0-1} \left(1 - \frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1-1}}{\left[1 + (\theta_2 - 1)\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0+\theta_1}}$$

или распределениями Sb-Джонсона с плотностью

$$\begin{aligned} Sb(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \\ &= \frac{\theta_1 \theta_2}{(x-\theta_3)(\theta_2 + \theta_3 - x)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \theta_0 - \theta_1 \ln \frac{x-\theta_3}{\theta_2 + \theta_3 - x} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Соответствующие результаты представлены в табл. В.41–В.49 приложения В.

### 3.3.8.5. Распределения статистик

#### **непараметрических критериев согласия в случае проверки согласия с семействами бета-распределений**

В данном разделе рассмотрено исследование распределений статистик  $G(S|H_0)$  критериев согласия Колмогорова,  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова,  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга при проверке гипотез относительно семейств бета-распределений I и II рода в случае применения для оценивания параметров этих законов метода максимального правдоподобия [94, 277].

Бета-распределение I рода имеет функцию плотности

$$f(x) = B_I(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{\theta_2 B(\theta_0, \theta_1)} \left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0-1} \left(1 - \frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_1-1}, \quad (3.31)$$

где  $B(\theta_0, \theta_1) = \Gamma(\theta_0)\Gamma(\theta_1)/\Gamma(\theta_0 + \theta_1)$  – бета-функция, параметры формы  $\theta_0, \theta_1 \in (0, \infty)$ , масштабный параметр  $\theta_2 \in (0, \infty)$ ,  $x \in [0, \theta_2]$ .

Функция плотности бета-распределения II рода описывается выражением

$$f(x) = B_{II}(\theta_0, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_2 B(\theta_0, \theta_1)} \frac{[x/\theta_2]^{\theta_0-1}}{[1+x/\theta_2]^{\theta_0+\theta_1}}, \quad (3.32)$$

где  $x \in [0, \infty)$ . Частным случаем бета-распределения II рода является  $F$ -распределение Фишера: для распределения Фишера с числом степеней свободы  $k$  и  $n$  имеем

$$F_{k,n} = B_{II}\left(\frac{k}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{k}\right).$$

При моделировании распределений статистик критериев согласия выборки псевдослучайных величин в соответствии с бета-распределениями генерировались объемом  $n = 10^3$ . По этим выборкам оценивалось соответствующее количество параметров закона и вычислялись соответствующие значения статистик. Выборки значений статистик критериев согласия Колмогорова,  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова,  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга формировались объемом  $N = 10^5$ , по которым в дальнейшем оценивались процентные точки распределений статистик и строились приближенные модели, аппроксимирующие предельные законы.

Распределения статистик непараметрических критериев при проверке сложных гипотез относительно бета-распределений существенно зависят от факта оценивания параметров и от конкретных значений параметров формы. Например, рис. 3.36 иллюстрирует изменение распределений статистики критерия Колмогорова в зависимости от количества оцененных параметров  $B_{II}(\theta_0, \theta_1)$ -распределения: одного из параметров формы  $\theta_0$  или  $\theta_1$ ; двух параметров формы  $\theta_0$  и  $\theta_1$ ; трех параметров  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Распределения  $G(S_K | H_0)$  статистики (3.6) Колмогорова показаны для случая  $\theta_0 = 10$  и  $\theta_1 = 10$ . На рисунке для сравнения приведено распределение Колмогорова  $K(S)$ , являющееся предельным в случае проверки простых гипотез.

Рис. 3.37 и 3.38 показывают изменение распределений статистик (3.16) Крамера–Мизеса–Смирнова и (3.19) Андерсона–Дарлинга в зависимости от значений параметров  $\theta_0$  и  $\theta_1$   $B_1(\theta_0, \theta_1)$ -распределения

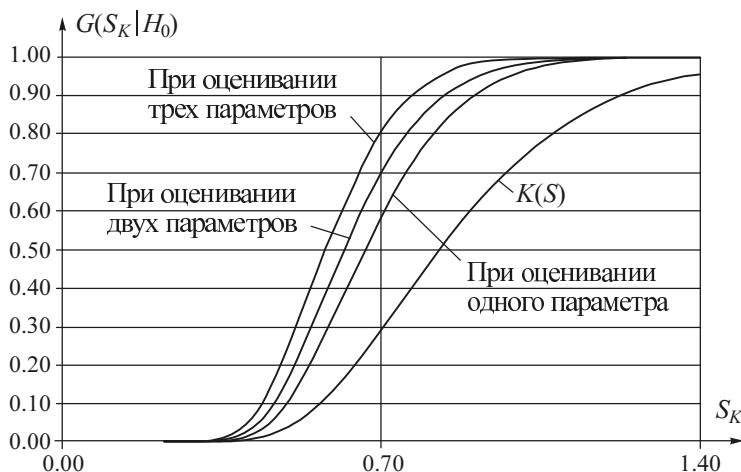


Рис. 3.36. Зависимость распределений статистики (3.6) Колмогорова от числа оцененных параметров  $B_{II}(\theta_0, \theta_1)$ -распределения (при оценивании:  $\theta_0$  или  $\theta_1$ ;  $\theta_0$  и  $\theta_1$ ;  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$ )  
для  $\theta_0 = \theta_1 = 10$

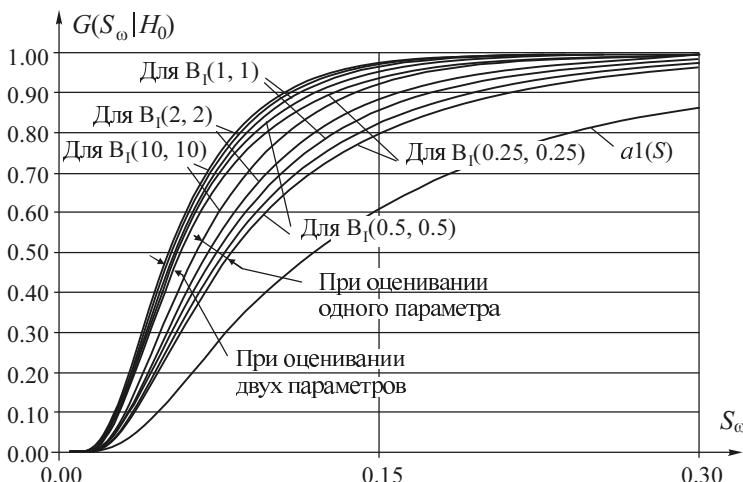


Рис. 3.37. Зависимость распределений статистики (3.16) Крамера-Мизеса-Смирнова от значений параметров  $\theta_0$  и  $\theta_1$   $B_I(\theta_0, \theta_1)$ -распределения (при оценивании двух или одного из параметров  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ )

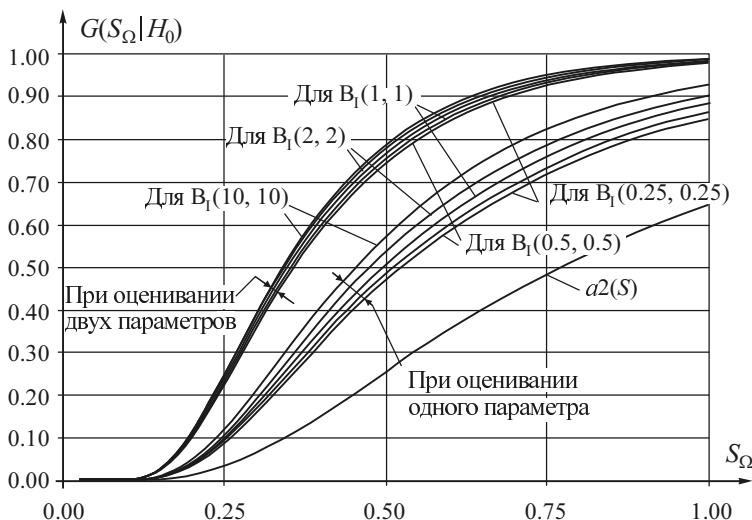


Рис. 3.38. Зависимость распределений статистики Андерсона–Дарлинга (3.19) от значений параметров  $\theta_0$  и  $\theta_1$ .  $B_1(\theta_0, \theta_1)$ -распределения (при оценивании двух или одного из параметров  $\theta_0, \theta_1$ )

при оценивании двух или одного из параметров  $\theta_0, \theta_1$ . При значениях  $\theta_0$  и  $\theta_1 > 10$  распределения  $G(S_\Omega | H_0)$  статистики (3.16) и  $G(S_\Omega | H_0)$  статистики (3.19) практически перестают меняться. Это же характерно для распределений статистики (3.6).

Следует подчеркнуть, что в случае проверки гипотез о согласии с  $B_{II}(\theta_0, \theta_1)$ -распределениями для статистик (3.6), (3.16), (3.19) имеем те же распределения  $G(S | H_0)$ , что и для  $B_1(\theta_0, \theta_1)$ -распределений.

Распределения  $G(S | H_0)$  статистик (3.6) Колмогорова, (3.16) Крамера–Мизеса–Смирнова и (3.19) Андерсона–Дарлинга, как правило, хорошо аппроксимируются одним из следующих семейств распределений: гамма-распределениями с функцией плотности

$$\gamma(\theta_0, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_1^{\theta_0}} \frac{1}{\Gamma(\theta_0)} (x - \theta_2)^{\theta_0 - 1} e^{-(x - \theta_2)/\theta_1};$$

распределениями Sb-Джонсона с плотностью

$$\begin{aligned} Sb(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \\ = \frac{\theta_1 \theta_2}{(x - \theta_3)(\theta_2 + \theta_3 - x)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \theta_0 - \theta_1 \ln \frac{x - \theta_3}{\theta_2 + \theta_3 - x} \right]^2 \right\}; \end{aligned}$$

распределениями Sl-Джонсона с плотностью

$$Sl(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{\theta_1}{\sqrt{2\pi}(x - \theta_3)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \theta_0 + \theta_1 \ln \frac{x - \theta_3}{\theta_2} \right]^2 \right\};$$

бета-распределениями третьего рода.

В работах [94, 277, 276] получены таблицы процентных точек и модели распределений статистик для непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно бета-распределений первого и второго рода при использовании оценок максимального правдоподобия (ОМП). Часть результатов при равных значениях двух оцениваемых параметров  $\theta_0$  и  $\theta_1$  представлена в табл. В.50–В.52 приложения **B**, а полная совокупность построенных моделей доступна в [276].

Интересно, что при оценивании двух параметров формы с ростом значений одного из них зависимость от значений этого параметра практически исчезает. Например, при  $\theta_0 = 1$  и росте значений  $\theta_1$  от 2 и выше хорошей моделью распределения  $G(S_K | H_0)$  статистики (3.6) Колмогорова является гамма-распределение  $\gamma(6,2541; 0,0622; 0,2640)$ , для распределения  $G(S_\Omega | H_0)$  статистики (3.19) Андерсона–Дарлинга – распределение Sl-Джонсона  $Sl(0,8373; 1,8500; 0,4800; 0,0450)$ . В этой же ситуации распределение  $G(S_\omega | H_0)$  статистики (3.16) Крамера–Мицеса–Смирнова хорошо аппроксимируется смесью законов Sl-Джонсона и нормального:

$$0,945 \cdot Sl(2,1117; 1,5484; 0,1740; 0,0075) + 0,055 \cdot N(0,0870; 0,0297).$$

Результаты, приводимые в таблицах приложения **B** и в [276], можно использовать при проверке сложных гипотез относительно бета-распределений III рода, когда оцениваются только параметры  $\theta_0$  и  $\theta_1$  этого закона.

## 3.4. Порядок проверки гипотез о согласии

### 3.4.1. Перечень распределений, для которых регламентирована проверка сложных гипотез

Результаты исследований распределений статистик непараметрических критериев согласия первоначально были сведены в рекомендации [259], затем на этой базе и результатах, полученных в [254], были подготовлены рекомендации по стандартизации [302]. Последующие исследования и уточнения моделей распределений статистик [239, 87, 82, 227, 81, 150, 2, 95, 235, 94, 277, 276] существенно дополняют и уточняют рекомендации по стандартизации [302]. Все эти результаты (модели распределений статистик и таблицы приближенных значений процентных точек) представлены в приложении **В**.

Порядок применения непараметрических критериев согласия при проверке простых и сложных гипотез с использованием моделей распределений статистик, приведенных в приложении **В**, рассмотрен в последующих разделах. Перечень теоретических законов, с которыми могут проверяться сложные гипотезы о согласии с эмпирическими распределениями с использованием непараметрических критериев, приведен в табл. 3.1. В табл. 3.2 содержатся указания на таблицы приложения **В**, в которых представлены соответствующие модели законов распределений статистик и процентные точки.

Наилучшей моделью для эмпирических законов распределения статистики соответствующего непараметрического критерия согласия, как правило, оказывался один из следующих законов распределения вероятностей (из множества более 30 типов законов): логарифмически нормальный, гамма-распределение, распределение Sl-Джонсона, распределение Su-Джонсона или бета-распределение III рода.

В таблицах приложения **В**, содержащих рекомендуемые для использования при проверке сложных гипотез распределения  $G(S|H_0)$ , через  $\ln N(\theta_1, \theta_0)$  обозначено логарифмически нормальное распределение с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{x\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x - \theta_1)^2/2\theta_0^2},$$

через  $\gamma(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$  – гамма-распределение с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1^{\theta_0} \Gamma(\theta_0)} (x - \theta_2)^{\theta_0 - 1} e^{-(x - \theta_2)/\theta_1},$$

через  $Sl(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$  – распределение Sl-Джонсона с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_1}{\sqrt{2\pi}(x - \theta_3)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \theta_0 + \theta_1 \ln \frac{x - \theta_3}{\theta_2} \right]^2 \right\},$$

через  $Su(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$  – распределение Su-Джонсона с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{(x - \theta_3)^2 + \theta_2^2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \theta_0 + \theta_1 \ln \left\{ \frac{x - \theta_3}{\theta_2} + \sqrt{\left( \frac{x - \theta_3}{\theta_2} \right)^2 + 1} \right\} \right]^2 \right\},$$

через  $B_{III}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$  – бета-распределение III рода с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 B(\theta_0, \theta_1)} \frac{\left( \frac{x - \theta_4}{\theta_3} \right)^{\theta_0 - 1} \left( 1 - \frac{x - \theta_4}{\theta_3} \right)^{\theta_1 - 1}}{\left[ 1 + (\theta_2 - 1) \frac{x - \theta_4}{\theta_3} \right]^{\theta_0 + \theta_1}}.$$

Табл. В.1–В.6, используемые при проверке простых гипотез и содержащие значения функций распределения классических статистик непараметрических критериев согласия и значения процентных точек, заимствованы в [163].

Табл. В.7–В.52 построены в результате применения методики компьютерного анализа статистических закономерностей, описанной в разделе 3.3.2.

Список распределений, приведенный в табл. 3.1, достаточно ограничен. Он включает в себя законы распределения, наиболее часто используемые в приложениях в качестве моделей законов реальных случайных величин. Более широкий набор параметрических моделей законов распределений, естественно, далеко не полный, предложен в справочнике [178]. В случае необходимости проверки сложной гипотезы относительно закона, не вошедшего в представленный перечень, для построения распределения статистики  $G(S|H_0)$ , соответствующего проверяемой гипотезе  $H_0$ , рекомендуется воспользоваться методикой компьютерного анализа, изложенной в разделе 3.3.2.

Таблица 3.1

**Перечень законов, для которых построены модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез**

№ п/п	Распределение случайной величины, область определения	Функция плотности
1	Экспоненциальное, $x \geq 0$	$\frac{1}{\theta_0} e^{-x/\theta_0}$
2	Полунормальное, $x \geq 0$	$\frac{2}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\theta_0^2}$
3	Рэлея, $x \geq 0$	$\frac{x}{\theta_0^2} e^{-x^2/2\theta_0^2}$
4	Максвелла, $x \geq 0$	$\frac{2x^2}{\theta_0^3 \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\theta_0^2}$
5	Лапласа, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{1}{2\theta_0} e^{-(x-\theta_1)/\theta_0}$
6	Нормальное, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_0^2}}$
7	Логнормальное, $x \in (0, \infty)$	$\frac{1}{x\theta_0 \sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x - \theta_1)^2/2\theta_0^2}$

Продолжение табл. 3.1

№ п/п	Распределение случайной величины, область определения	Функция плотности
8	Коши, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{\theta_0}{\pi \left[ \theta_0^2 + (x - \theta_1)^2 \right]}$
9	Логистическое, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{\pi}{\theta_0 \sqrt{3}} \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_1)}{\theta_0 \sqrt{3}} \right\} \Bigg/ \left[ 1 + \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_1)}{\theta_0 \sqrt{3}} \right\} \right]^2$
10	Наибольшего значения, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\theta_0} \exp \left\{ -\frac{x - \theta_1}{\theta_0} - \exp \left( -\frac{x - \theta_1}{\theta_0} \right) \right\}$
11	Наименьшего значения, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\theta_0} \exp \left\{ \frac{x - \theta_1}{\theta_0} - \exp \left( \frac{x - \theta_1}{\theta_0} \right) \right\}$
12	Вейбулла, $x \in (0, \infty)$	$\frac{\theta_0 x^{\theta_0 - 1}}{\theta_1^{\theta_0}} \exp \left\{ -\left( \frac{x}{\theta_1} \right)^{\theta_0} \right\}$
13	Sb-Джонсона, $x \in [\theta_3, \theta_2 + \theta_3]$	$\frac{\theta_1 \theta_2}{\sqrt{2\pi(x - \theta_3)(\theta_2 + \theta_3 - x)}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \theta_0 - \theta_1 \ln \frac{x - \theta_3}{\theta_2 + \theta_3 - x} \right]^2 \right\}$
14	Sl-Джонсона, $x \in [\theta_3, \infty)$	$\frac{\theta_1}{\sqrt{2\pi(x - \theta_3)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \theta_0 + \theta_1 \ln \frac{x - \theta_3}{\theta_2} \right]^2 \right\}$
15	Su-Джонсона, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{\theta_1}{\sqrt{2\pi \sqrt{(x - \theta_3)^2 + \theta_2^2}}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \theta_0 + \theta_1 \ln \left\{ \frac{x - \theta_3}{\theta_2} + \sqrt{\left( \frac{x - \theta_3}{\theta_2} \right)^2 + 1} \right\} \right]^2 \right\}$

Окончание табл. 3.1

№ п/п	Распределение случайной величины, область определения	Функция плотности
16	Гамма-распределение, $x \in (\theta_2, \infty)$	$\frac{1}{\theta_1^{\theta_0} \Gamma(\theta_0)} (x - \theta_2)^{\theta_0 - 1} e^{-(x - \theta_2)/\theta_1}$
17	Двусторонний экспо- ненциальный (3.27), $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp\left\{-\left(\frac{ x - \theta_0 }{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right\}$
18	Обратный гауссовский, $x \in (0, \infty)$	$\left(\frac{\theta_1}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\theta_1(x - \theta_0)^2}{2\theta_0^2 x}\right)$
19	Обобщенный Вейбулла, $x \in (0, \infty)$	$\frac{\theta_0}{\theta_1} \theta_2^{\theta_0} x^{\theta_0 - 1} \left(1 + \left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0}\right)^{\frac{1}{\theta_1} - 1} e^{-1 + \left(1 + \left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}}$
20	Бета-распределение I рода	$\frac{1}{\theta_2 B(\theta_0, \theta_1)} \left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0 - 1} \left(1 - \frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_1 - 1}$
21	Бета-распределение II рода	$\frac{1}{\theta_2 B(\theta_0, \theta_1)} \frac{[x/\theta_2]^{\theta_0 - 1}}{[1 + x/\theta_2]^{\theta_0 + \theta_1}}$
22	Бета-распределение III рода	$\frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 B(\theta_0, \theta_1)} \frac{\left(\frac{x - \theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0 - 1} \left(1 - \frac{x - \theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1 - 1}}{\left[1 + (\theta_2 - 1) \frac{x - \theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0 + \theta_1}}$

Таблица 3.2

**Указание таблиц с моделями распределений статистик и процентных точек**

№ п/п	Распределение случайной величины	Номера таблиц с моделями распределений статистик и процентных точек					
		Критерий Колмогорова	Критерий $\chi^2$ Крамера–Мильсса–Смирнова	Критерий $\phi^2$ Крамера–Мильсса–Смирнова	MD-оценки	OMPI	MD-оценки
1	Экспоненциальное	B.7, B.8	B.9, B.10	B.11, B.12	B.13, B.14	B.15, B.16	B.17, B.18
2	Полунормальное	B.7, B.8	B.9, B.10	B.11, B.12	B.13, B.14	B.15, B.16	B.17, B.18
3	Рэлея	B.7, B.8	B.9, B.10	B.11, B.12	B.13, B.14	B.15, B.16	B.17, B.18
4	Максвелла	B.7, B.8	B.9, B.10	B.11, B.12	B.13, B.14	B.15, B.16	B.17, B.18
5	Лапласа	B.7, B.8	B.9, B.10	B.11, B.12	B.13, B.14	B.15, B.16	B.17, B.18
6	Нормальное	B.7, B.8	B.9, B.10	B.11, B.12	B.13, B.14	B.15, B.16	B.17, B.18
7	Логнормальное	B.7, B.8	B.9, B.10	B.11, B.12	B.13, B.14	B.15, B.16	B.17, B.18
8	Копи	B.7, B.8	B.9, B.10	B.11, B.12	B.13, B.14	B.15, B.16	B.17, B.18
9	Логистическое	B.7, B.8	B.9, B.10	B.11, B.12	B.13, B.14	B.15, B.16	B.17, B.18
10	Наибольшего значения	B.7, B.8	B.9, B.10	B.11, B.12	B.13, B.14	B.15, B.16	B.17, B.18
11	Наименьшего значения	B.7, B.8	B.9, B.10	B.11, B.12	B.13, B.14	B.15, B.16	B.17, B.18
12	Вейбулла	B.7, B.8	B.9, B.10	B.11, B.12	B.13, B.14	B.15, B.16	B.17, B.18
13	Sb-Лийконсона		B.21	—	—	B.21	—
14	SL-Лийконсона		B.22	—	—	B.22	—
15	Su-Лийконсона		B.23	—	—	B.23	—
16	Гамма-распределение		B.24	—	B.27, B.28	B.25	—
17	Двусторонний экспоненциальный (3.27)		B.29–B.37	—	B.29–B.37	—	B.29–B.37
18	Обратный гауссовский	B.38	—	—	B.39	—	B.40
19	Обобщенный Вейбулла	B.41–B.49	—	—	B.41–B.49	—	B.41–B.49
20	Бета-распределение I рода	B.50	—	—	B.51	—	B.52
21	Бета-распределение II рода	B.50	—	—	B.51	—	B.52
22	Бета-распределение III рода	B.50	—	—	B.51	—	B.52

Для наиболее интересных для приложений параметрических законов распределения статистик непараметрических критериев согласия зависят от конкретных значений параметра или параметров этих законов. Очевидно, что заранее построить модели для распределений статистик критериев для любых комбинаций значений параметров нереально. Однако такие задачи могут решаться по мере поступления или распределения статистик и построение соответствующей приближенной модели могут осуществляться в «реальном времени» проверки сложной гипотезы.

В [265] показана возможность применения непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, типа  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова и  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга для проверки адекватности непараметрических моделей законов распределения. Было показано, что при использовании непараметрических оценок на распределения статистик критериев согласия влияет ряд факторов, определяющих сложную проверяемую гипотезу  $H_0$ : закон распределения наблюдаемой случайной величины, соответствующий  $H_0$ ; вид используемой ядерной функции; объем выборки; метод оценивания параметров размытости.

### **3.4.2. Порядок проверки простой гипотезы о согласии**

При проверке согласия опытного распределения с теоретическим распределением случайной величины  $X$  действуют следующим образом:

а) формулируют проверяемую гипотезу, выбирая теоретическое распределение случайной величины, согласие которого с опытным распределением этой величины следует проверить;

б) из совокупности отбирают случайную выборку объемом  $n$ . Полученные результаты наблюдений располагают в порядке их возрастания, так что в распоряжении имеют упорядоченную выборку значений (вариационный ряд)

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n ;$$

в) в соответствии с выбранным критерием проверки вычисляют значение статистики  $S^*$  критерия [по формулам (3.6), (3.12), (3.16) или (3.19)];

г) в соответствии с выбранным критерием проверки вычисляют значение  $P\{S > S^*\} = \int_{S^*}^{+\infty} g(s|H_0)ds = 1 - G(S^*(H_0))$ , где  $G(S(H_0))$  – распределение статистики критерия при справедливости гипотезы  $H_0$ . Если  $P\{S > S^*\} > \alpha$ , где  $\alpha$  – задаваемый уровень значимости, то нет оснований для отклонения проверяемой гипотезы. В противном случае проверяемую гипотезу  $H_0$  отвергают.

Можно вычисленное значение статистики  $S^*$  сравнить с критическим значением  $S_\alpha$ , определяемым из условия  $\alpha = \int_{S_\alpha}^{+\infty} g(s|H_0)ds$ . Гипотезу о согласии отвергают, если значение статистики попадает в критическую область, т. е. при  $S^* > S_\alpha$ .

### 3.4.2.1. Критерий Колмогорова при простой гипотезе

Порядок проверки простой гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим – в соответствии с разд. 3.4.2, пп а) – г).

В случае выбранного критерия Колмогорова:

- а) значение статистики Колмогорова  $S_K$  вычисляют по формуле (3.6) на основании формул (3.7)–(3.9);
- б) значение вероятности  $P\{S > S_K^*\} = 1 - K(S_K^*)$  вычисляют по функции распределения Колмогорова [формула (3.5)] или берут из табл. В.1;
- в) критические значения критерия  $S_\alpha$  при заданном  $\alpha$  могут быть взяты из табл. В.2.

### 3.4.2.2. Критерий Смирнова при простой гипотезе

Порядок проверки простой гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим – в соответствии с разд. 3.4.2, пп а) – г).

В случае выбранного критерия Смирнова:

- а) значение статистики Смирнова  $S_m$  вычисляется по формуле (3.12) на основании формул (3.8)–(3.9);

- б) значение вероятности  $P\{S_m > S_m^*\} = e^{-S_m^*/2}$  вычисляют по функции  $\chi_2^2$ -распределения (с двумя степенями свободы);  
 в) гипотезу  $H_0$  не отвергают, если для вычисленного по выборке значения статистики  $S_m^*$

$$P\{S_m > S_m^*\} = e^{-S_m^*/2} > \alpha.$$

#### 3.4.2.3. Критерий $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова при простой гипотезе

Порядок проверки простой гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим – в соответствии с разд. 3.4.2, пп а) – г).

В случае выбранного критерия Крамера–Мизеса–Смирнова:

- а) значение статистики Крамера–Мизеса–Смирнова  $S_\omega$  вычисляют по формуле (3.16);  
 б) значение вероятности  $P\{S_\omega > S_\omega^*\} = 1 - al(S_\omega^*)$  вычисляют по функции распределения  $al(S)$  (3.17) или берут из табл. В.3;  
 в) критические значения критерия  $S_\alpha$  при заданном  $\alpha$  могут быть взяты из табл. В.4;  
 г) гипотезу  $H_0$  не отвергают, если для вычисленного по выборке значения статистики  $S_\omega^*$

$$P\{S_\omega > S_\omega^*\} = 1 - al(S_\omega^*) > \alpha.$$

#### 3.4.2.4. Критерий $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга при простой гипотезе

Порядок проверки простой гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим – в соответствии с разд. 3.4.2, пп а) – г).

В случае выбранного критерия  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга:

- а) значение статистики Андерсона–Дарлинга  $S_\Omega$  вычисляют по формуле (3.19);

- б) значение вероятности  $P\{S_{\Omega} > S_{\Omega}^*\} = 1 - a2(S_{\Omega}^*) > \alpha$  вычисляют по функции распределения  $a2(S)$  (3.20) или берут из табл. В.5;
- в) критические значения критерия  $S_{\alpha}$  при заданном  $\alpha$  могут быть взяты из табл. В.6;
- г) гипотезу  $H_0$  не отвергают, если для вычисленного по выборке значения статистики  $S_{\Omega}^*$

$$P\{S_{\Omega} > S_{\Omega}^*\} = 1 - a2(S_{\Omega}^*) > \alpha.$$

### 3.4.3. Порядок проверки сложной гипотезы

При проверке согласия опытного распределения с теоретическим распределением случайной величины  $X$  действуют следующим образом:

а) формулируют проверяемую гипотезу, выбирая теоретическое распределение  $F(x, \theta)$  случайной величины, согласие которого с опытным распределением этой величины следует проверить. Перечень теоретических распределений, для которых возможна проверка сложных гипотез с использованием данных рекомендаций, приведен в разд. 3.4.1 (табл. 3.1);

б) из совокупности отбирают случайную выборку объемом  $n$ . Полученные результаты наблюдений располагают в порядке их возрастания, так что в распоряжении имеют упорядоченную выборку значений

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n;$$

в) по выборке вычисляют оценки параметров распределения  $F(x, \theta)$ , выбранного в соответствии с пунктом а) [оценки максимального правдоподобия на основании формул (3.21)–(3.23) или  $MD$ -оценки, минимизирующие статистику критерия на основании соответственно формул (3.24), (3.25) или (3.26)];

г) в соответствии с выбранным критерием проверки вычисляют значение статистики  $S^*$  критерия [по формулам (3.6), (3.12), (3.16) или (3.19)];

д) в соответствии с выбранным критерием проверки, теоретическим распределением  $F(x, \theta)$  и используемым методом оценивания по

табл. 3.2 определяют таблицу приложения **B**, содержащую модель распределения статистики или процентные точки. В соответствии с оцененным параметром или параметрами [в некоторых случаях в соответствии со значением параметра формы, например, гамма-распределение, семейство (3.27)] определяют распределение статистики критерия  $G(S|H_0)$  при справедливости гипотезы  $H_0$ ;

е) на основании выбранного в соответствии с пунктом д) распределения  $G(S|H_0)$  вычисляют значение

$$P\{S > S^*\} = \int_{S^*}^{+\infty} g(s|H_0)ds = 1 - G(S^*|H_0);$$

ж) если  $P\{S > S^*\} > \alpha$ , где  $\alpha$  – задаваемый уровень значимости, то нет оснований для отклонения проверяемой гипотезы. В противном случае проверяемую гипотезу  $H_0$  отвергают. Можно вычисленное значение статистики  $S^*$  сравнить с критическим значением  $S_\alpha$ , определяемым из условия  $\alpha = \int_{S_\alpha}^{+\infty} g(s|H_0)ds$ . Гипотезу о согласии не отвергают, если  $S^* < S_\alpha$ .

Если для закона, соответствующего проверяемой гипотезе, распределения статистик зависят от значения параметра формы (как в случае гамма-распределения) или от значений двух параметров (как в случае семейств бета-распределений), и значение параметра (или параметров) не совпадает с табличным, искомые значения  $P\{S > S^*\}$  или квантили  $S_\alpha$  определяют интерполяцией.

Если закон распределения, относительно которого проверяют гипотезу о согласии с использованием непараметрического критерия, не входит в перечень, приведенный в табл. 3.1, то для построения распределения статистики  $G(S|H_0)$ , соответствующего проверяемой гипотезе  $H_0$ , рекомендуется воспользоваться методикой компьютерного анализа, изложенной в разд. 3.3.2.

### 3.4.4. Примеры применения критериев согласия при простых и сложных гипотезах

**Пример 3.1.** Проверяют простую гипотезу о принадлежности выборки экспоненциальному закону. Упорядоченная выборка объемом 100 наблюдений имеет вид

0.0041	0.0051	0.0058	0.0074	0.0082
0.0110	0.0160	0.0191	0.0263	0.0279
0.0294	0.0323	0.0411	0.0452	0.0688
0.0741	0.0805	0.0809	0.1026	0.1124
0.1220	0.1226	0.1233	0.1317	0.1323
0.1368	0.1379	0.1475	0.1515	0.1598
0.1710	0.1789	0.2010	0.2014	0.2072
0.2102	0.2194	0.2205	0.2297	0.2300
0.2302	0.2373	0.2375	0.2397	0.2415
0.2492	0.2869	0.2908	0.2976	0.3058
0.3060	0.3073	0.3096	0.3278	0.3553
0.3620	0.3679	0.3833	0.3921	0.3985
0.4078	0.4080	0.4119	0.4169	0.4208
0.4568	0.4707	0.4880	0.4942	0.5214
0.5277	0.5878	0.6146	0.6180	0.6263
0.6415	0.6757	0.7156	0.7157	0.7207
0.7351	0.7485	0.7535	0.7541	0.7728
0.8875	0.9021	0.9581	0.9868	1.0440
1.2226	1.2402	1.2641	1.3034	1.3328
1.3553	1.4006	1.5586	1.6296	2.5018

Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0 : f(x) = \frac{1}{\theta_0} e^{-x/\theta_0}$$

при значении параметра  $\theta_0 = 0.5$ .

a) *Критерий Колмогорова*

В соответствии с разд. 3.4.1.1 вычисляют значение статистики Колмогорова по формуле (3.6):  $S_K^* = 0.8269$ . При этом значении статистики вычисляют вероятность  $P\{S > S_K^*\} = 1 - K(S_K^*) = 0.5011$ .

b) *Критерий Смирнова*

В соответствии с разд. 3.4.1.2 вычисляют значение статистики Смирнова по формуле (3.12):  $S_m^* = 2.7349$ . При этом значении статистики вычисляют вероятность  $P\{S_m > S_m^*\} = e^{-S_m^*/2} = 0.2548$ .

в) *Критерий  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова*

В соответствии с разд. 3.4.1.3 вычисляют значение статистики  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова по формуле (3.16):  $S_{\omega}^* = 0.1272$ . При этом значении статистики вычисляют вероятность  $P\{S_{\omega} > S_{\omega}^*\} = 1 - a1(S_{\omega}^*) = 0.4673$ .

г) *Критерий  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга*

В соответствии с разд. 3.4.1.4 вычисляют значение статистики  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга по формуле (3.19):  $S_{\Omega}^* = 0.8985$ . При таком значении статистики вычисляют вероятность  $P\{S_{\Omega} > S_{\Omega}^*\} = 1 - a2(S_{\Omega}^*) = 0.4151$ .

Как видно, при задании уровня значимости  $\alpha < 0.2548$  (для критерия Смирнова) нет оснований для отклонения проверяемой гипотезы по всем критериям согласия.

**Пример 3.2.** Проверяют сложную гипотезу о принадлежности выборки из примера 3.1 экспоненциальному закону

$$H_0 : f(x) \in \left\{ \frac{1}{\theta_0} e^{-x/\theta_0}, \theta_0 \in (0, \infty) \right\}.$$

Вычисленная по выборке оценка максимального правдоподобия параметра  $\hat{\theta}_0 = 0.4465$ .

а) *Критерий типа Колмогорова*

В соответствии с разд. 3.4.2.1 вычисляют значение статистики типа Колмогорова по формуле (3.6):  $S_K^* = 0.5188$ . Из табл. В.7 находят, что распределение статистики критерия хорошо аппроксимируется гамма-распределением с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1^{\theta_0} \Gamma(\theta_0)} (x - \theta_2)^{\theta_0 - 1} e^{-(x - \theta_2)/\theta_1}$$

с параметрами  $\theta_0 = 5.1092$ ;  $\theta_1 = 0.0861$ ;  $\theta_2 = 0.295$ . При найденном значении статистики по гамма-распределению вычисляют вероятность  $P\{S > S_K^*\} = 0.8884$ .

**б) Критерий типа Смирнова**

В соответствии с разд. 3.4.2.2 вычисляют значение статистики типа Смирнова по формуле (3.12):  $S_m^* = 1.0767$ . Из табл. В.11 видно, что распределение статистики критерия аппроксимируется логарифмически нормальным распределением с параметрами  $\theta_0 = 0.6951$ ;  $\theta_1 = 0.226$ . При найденном значении статистики вычисляют вероятность  $P\{S_m > S_m^*\} = 0.5866$ .

**в) Критерий типа  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова**

В соответствии с разд. 3.4.2.3 вычисляют значение статистики типа  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова по формуле (3.16):  $S_\omega^* = 0.035$ . Из табл. В.13 видно, что распределение статистики критерия аппроксимируется распределением Сб-Джонсона с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_1 \theta_2}{\sqrt{2\pi}(x - \theta_3)(\theta_2 + \theta_3 - x)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0 - \theta_1 \ln \frac{x - \theta_3}{\theta_2 + \theta_3 - x}\right]^2\right\}$$

и параметрами  $\theta_0 = 3.3738$ ;  $\theta_1 = 1.2145$ ;  $\theta_2 = 1.0792$ ;  $\theta_3 = 0.0110$ . При найденном значении статистики по распределению Сб-Джонсона вычисляют вероятность  $P\{S_\omega > S_\omega^*\} = 0.8890$ .

**г) Критерий типа  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга**

В соответствии с разд. 3.4.2.4 вычисляют значение статистики  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга по формуле (3.19):  $S_\Omega^* = 0.386$ . Из табл. В.17 находят, что распределение статистики критерия аппроксимируется распределением Сб-Джонсона с параметрами  $\theta_0 = 3.8386$ ;  $\theta_1 = 1.3429$ ;  $\theta_2 = 7.5$ ;  $\theta_3 = 0.09$ . При найденном значении статистики по распределению Сб-Джонсона вычисляют вероятность  $P\{S_\Omega > S_\Omega^*\} = 0.6729$ .

По всем критериям согласие выборки с экспоненциальным законом очень хорошее.

**Пример 3.3.** Проверяют простую гипотезу о принадлежности выборки нормальному закону. Упорядоченная выборка объемом 100 наблюдений имеет вид

-0.6679	-0.4652	0.0056	0.0078	0.0167
0.0362	0.1189	0.1556	0.1831	0.2037
0.2829	0.2852	0.3388	0.4264	0.4733
0.4999	0.5093	0.5181	0.5227	0.5281
0.5506	0.5679	0.5849	0.5872	0.6027
0.6052	0.6124	0.6342	0.6616	0.6669
0.6712	0.7245	0.7386	0.7567	0.7992
0.8045	0.8083	0.8151	0.8216	0.8422
0.8472	0.8502	0.8678	0.8699	0.8902
0.8918	0.9037	0.9443	0.9529	0.9535
0.9548	0.9557	0.9632	0.9767	0.9956
0.9992	1.0233	1.0257	1.0574	1.0621
1.0658	1.0706	1.0724	1.1059	1.1172
1.1447	1.1500	1.1595	1.1836	1.1875
1.1887	1.2143	1.2360	1.2589	1.2754
1.2998	1.3192	1.3288	1.3587	1.3818
1.3998	1.4088	1.4314	1.4337	1.4822
1.4832	1.4958	1.4968	1.5213	1.5249
1.5896	1.6087	1.6425	1.6554	1.6687
1.8223	1.8569	1.8886	2.0460	2.2956

Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0 : f(x) = \frac{1}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_0^2}}$$

при значении параметра  $\theta_0 = 0.5$ ;  $\theta_1 = 1$ .

#### a) Критерий Колмогорова

В соответствии с разд. 3.4.1.1 вычисляют значение статистики Колмогорова по формуле (3.6):  $S_K^* = 0.7410$ . При этом значении статистики вычисляют вероятность  $P\{S > S_K^*\} = 1 - K(S_K^*) = 0.5741$ .

#### б) Критерий Смирнова

В соответствии с разд. 3.4.1.2 вычисляют значение статистики Смирнова по формуле (3.12):  $S_m^* = 2.1964$ . При этом значении статистики вычисляют вероятность  $P\{S_m > S_m^*\} = e^{-S_m^*/2} = 0.3335$ .

в) *Критерий  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова*

В соответствии с разд. 3.4.1.3 вычисляют значение статистики  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова по формуле (3.16):  $S_{\omega}^* = 0.1148$ . При этом значении статистики вычисляют вероятность  $P\{S_{\omega} > S_{\omega}^*\} = 1 - \alpha I(S_{\omega}^*) = 0.5169$ .

г) *Критерий  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга*

В соответствии с разд. 3.4.1.4 вычисляют значение статистики  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга по формуле (3.19):  $S_{\Omega}^* = 0.7577$ . При таком значении статистики вычисляют вероятность  $P\{S_{\Omega} > S_{\Omega}^*\} = 0.5126$ .

Как видно, при задании уровня значимости  $\alpha < 0.3335$  (для критерия Смирнова) нет оснований для отклонения проверяемой гипотезы по всем критериям согласия.

**Пример 3.4.** Проверяют сложную гипотезу о принадлежности выборки из примера 3.3 нормальному закону распределения. Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0 : f(x) \in \left\{ \frac{1}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta_1)^2 / 2\theta_0^2}, \quad \theta_0 \in (0, \infty), \quad \theta_1 \in (-\infty, \infty) \right\}.$$

Вычисленные по выборке оценки максимального правдоподобия параметров  $\hat{\theta}_0 = 0.4465$ ;  $\hat{\theta}_1 = 0.9369$ .

а) *Критерий типа Колмогорова*

В соответствии с разд. 3.4.2.1 вычисляют значение статистики типа Колмогорова по формуле (3.6):  $S_K^* = 0.5741$ . Из табл. В.7 находят, что распределение статистики критерия при вычислении оценок максимального правдоподобия двух параметров нормального закона аппроксимируется гамма-распределением

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1^{\theta_0} \Gamma(\theta_0)} (x - \theta_2)^{\theta_0 - 1} e^{-(x - \theta_2)/\theta_1}$$

с параметрами  $\theta_0 = 6.4721$ ;  $\theta_1 = 0.0580$ ;  $\theta_2 = 0.262$ . При найденном значении статистики по гамма-распределению вычисляют вероятность  $P\{S > S_K^*\} = 0.6264$ .

*б) Критерий типа Смирнова*

В соответствии с разд. 3.4.2.2 вычисляют значение статистики типа Смирнова по формуле (3.12):  $S_m^* = 0.4016$ . Из табл. В.11 видно, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП двух параметров нормального закона подчиняется логарифмически нормальному распределению с параметрами  $\theta_0 = 0.5436$ ;  $\theta_1 = 0.1164$ . При найденном значении статистики вычисляют по логарифмически нормальному закону вероятность  $P\{S_m > S_m^*\} = 0.9708$ .

*в) Критерий типа  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова*

В соответствии с разд. 3.4.2.3 вычисляют значение статистики типа  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова по формуле (3.16):  $S_\omega^* = 0.0338$ . Из табл. В.13 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП двух параметров нормального закона подчиняется бета-распределению III рода с параметрами  $\theta_0 = 4.1153$ ;  $\theta_1 = 4.1748$ ;  $\theta_2 = 11.035$ ;  $\theta_3 = 0.5116$ ;  $\theta_4 = 0.009$ . При найденном значении статистики вычисляют по бета-распределению III рода вероятность  $P\{S_\omega > S_\omega^*\} = 0.7815$ .

*г) Критерий типа  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга*

В соответствии с разд. 3.4.2.4 вычисляют значение статистики  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга по формуле (3.19):  $S_\Omega^* = 0.2394$ . Из табл. В.17 находят, что распределение статистики критерия подчиняется бета-распределению III рода с параметрами  $\theta_0 = 4.7262$ ;  $\theta_1 = 4.6575$ ;  $\theta_2 = 9.4958$ ;  $\theta_3 = 2.717$ ;  $\theta_4 = 0.0775$ . При найденном значении статистики по бета-распределению III рода вычисляют вероятность  $P\{S_\Omega > S_\Omega^*\} = 0.7815$ .

По всем критериям согласие выборки с нормальным законом очень хорошее.

**Пример 3.5.** Проверяют сложную гипотезу о принадлежности выборки двухпараметрическому распределению Вейбулла. Упорядоченная выборка объемом 200 наблюдений имеет вид

0.0999	0.1089	0.1134	0.1160	0.1242
0.1332	0.1356	0.1442	0.1575	0.1819
0.1853	0.1922	0.2071	0.2141	0.2184
0.2244	0.2475	0.2485	0.2551	0.2572
0.2634	0.2642	0.2647	0.2659	0.2668
0.2726	0.2768	0.2796	0.2824	0.2844
0.2858	0.2897	0.2918	0.2957	0.3090
0.3151	0.3151	0.3152	0.3181	0.3187
0.3208	0.3241	0.3305	0.3380	0.3396
0.3398	0.3405	0.3417	0.3441	0.3533
0.3547	0.3548	0.3663	0.3671	0.3734
0.3781	0.3870	0.3918	0.3940	0.3980
0.3988	0.4032	0.4070	0.4110	0.4219
0.4234	0.4236	0.4257	0.4282	0.4305
0.4320	0.4535	0.4599	0.4611	0.4632
0.4739	0.4821	0.4862	0.4885	0.4899
0.5089	0.5106	0.5285	0.5338	0.5361
0.5374	0.5399	0.5505	0.5537	0.5685
0.5716	0.5717	0.5730	0.5821	0.5834
0.5999	0.6010	0.6054	0.6097	0.6120
0.6142	0.6151	0.6252	0.6259	0.6315
0.6354	0.6377	0.6423	0.6520	0.6553
0.6758	0.6853	0.6862	0.6943	0.6987
0.7095	0.7114	0.7140	0.7157	0.7355
0.7479	0.7624	0.7738	0.7748	0.7820
0.7849	0.7915	0.8013	0.8099	0.8111
0.8184	0.8234	0.8250	0.8260	0.8284
0.8295	0.8473	0.8478	0.8480	0.8493
0.8620	0.8706	0.8713	0.8834	0.8846
0.9073	0.9076	0.9128	0.9272	0.9500
0.9589	0.9608	0.9890	0.9922	1.0176
1.0184	1.0287	1.0368	1.0533	1.0538
1.1193	1.1245	1.1245	1.1346	1.1399
1.1485	1.1574	1.1591	1.1669	1.1701
1.2342	1.2618	1.2679	1.3034	1.3503
1.4257	1.4258	1.4501	1.4617	1.4632
1.4785	1.5091	1.5188	1.5752	1.6154
1.6333	1.6355	1.7139	1.7503	1.7684
1.9291	2.0316	2.0937	2.0948	2.3901
2.5209	2.8097	3.0380	3.0530	6.1251

Проверяют

$$H_0: f(x) \in \left\{ \frac{\theta_0 x^{\theta_0 - 1}}{\theta_1^{\theta_0}} \exp\left\{ -\left( \frac{x}{\theta_1} \right)^{\theta_0} \right\}, \quad \theta_0 \in (0, \infty), \theta_1 \in (0, \infty) \right\}.$$

Вычисленные по выборке оценки максимального правдоподобия параметров  $\hat{\theta}_0 = 1.3734$ ;  $\hat{\theta}_1 = 0.8539$ .

а) *Критерий типа Колмогорова*

В соответствии с разд. 3.4.2.1 вычисляют значение статистики типа Колмогорова по формуле (3.6):  $S_K^* = 1.2402$ . Из таблицы В.7 находят, что распределение статистики критерия при вычислении оценок максимального правдоподобия двух параметров распределения Вейбулла аппроксимируется гамма-распределением с параметрами  $\theta_0 = 6.6012$ ;  $\theta_1 = 0.0563$ ;  $\theta_2 = 0.2598$ . При найденном значении статистики в соответствии с гамма-распределением вычисляют вероятность  $P\{S > S_K^*\} = 0.001$ . Следовательно, при задании уровня значимости  $\alpha > 0.001$  проверяемая гипотеза должна быть отклонена.

б) *Критерий типа Смирнова*

В соответствии с разд. 3.4.2.2 вычисляют значение статистики типа Смирнова по формуле (3.12):  $S_m^* = 4.6028$ . Из табл. В.11 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП двух параметров распределения Вейбулла подчиняется логарифмически нормальному распределению с параметрами  $\theta_0 = 0.1501$ ;  $\theta_1 = 0.5108$ . При найденном значении статистики вычисляют в соответствии с логарифмически нормальным законом вероятность  $P\{S_m > S_m^*\} = 0.00352$ .

в) *Критерий типа  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова*

В соответствии с разд. 3.4.2.3 вычисляют значение статистики типа  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова по формуле (3.16):  $S_{\omega}^* = 0.347$ . Из табл. В.13 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП двух параметров распределения Вейбулла подчиняется распределению Sb-Джонсона с параметрами  $\theta_0 = 3.3854$ ;  $\theta_1 = 1.4453$ ;  $\theta_2 = 0.4986$ ;  $\theta_3 = 0.0070$ . При найденном значении статистики по распределению Sb-Джонсона вычисляют вероятность  $P\{S_{\omega} > S_{\omega}^*\} = 0.000000$ .

г) Критерий типа  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга

В соответствии с разд. 3.4.2.4 вычисляют значение статистики  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга по формуле (3.19):  $S_\Omega^* = 2.553$ . Из табл. В.17 находят, что при вычислении ОМП двух параметров распределения Вейбулла распределение статистики критерия хорошо аппроксимируется распределением Sb-Джонсона с параметрами  $\theta_0 = 3.4830$ ;  $\theta_1 = 1.5138$ ;  $\theta_2 = 3.0000$ ;  $\theta_3 = 0.0700$ . При найденном значении статистики вычисляют по распределению Sb-Джонсона вероятность  $P\{S_\Omega > S_\Omega^*\} = 0.000000$ .

Таким образом, по всем критериям выборка плохо согласуется с распределением Вейбулла и проверяемая гипотеза должна быть отклонена.

**Пример 3.6.** Проверяют сложную гипотезу о принадлежности выборки гамма-распределению с параметром формы  $\theta_0 = 2$ , параметром сдвига  $\theta_2 = 0$ . Упорядоченная выборка объемом 100 наблюдений имеет вид

0.1006	0.2156	0.2311	0.2925	0.3410
0.3512	0.4028	0.5132	0.5340	0.5409
0.6100	0.6187	0.6204	0.6324	0.6559
0.6743	0.7131	0.7394	0.7779	0.7911
0.7919	0.8068	0.8117	0.8839	0.8996
0.9040	0.9167	0.9210	0.9441	0.9487
1.0274	1.0285	1.0316	1.1102	1.1249
1.1302	1.1497	1.2345	1.2530	1.2903
1.3136	1.3303	1.3360	1.3405	1.3804
1.4050	1.4117	1.4331	1.4617	1.4991
1.5852	1.6111	1.6175	1.6299	1.6798
1.7159	1.7287	1.7756	1.8505	1.8872
1.8928	1.9605	2.0299	2.1560	2.2548
2.2769	2.2901	2.3020	2.4111	2.4679
2.5302	2.5342	2.6717	2.6789	2.6797
2.8988	2.9230	2.9414	2.9558	3.0030
3.0531	3.1134	3.2002	3.2757	3.3716
3.4342	3.4632	3.5365	3.5753	3.7399
3.9758	4.1776	4.3462	4.3627	4.5000
4.5506	4.7544	4.7859	5.6662	8.2201

Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0: f(x) \in \left\{ \frac{1}{\theta_1^{\theta_0} \Gamma(\theta_0)} (x - \theta_2)^{\theta_0 - 1} e^{-(x - \theta_2)/\theta_1}, \theta_0 = 2, \theta_1 \in (0, \infty), \theta_2 = 0 \right\}.$$

Вычисленная по выборке оценка максимального правдоподобия параметра масштаба  $\hat{\theta}_1 = 1.02818$ .

а) *Критерий типа Колмогорова*

В соответствии с разд. 3.4.2.1 вычисляют значение статистики типа Колмогорова по формуле (3.6):  $S_K^* = 0.4917$ . Из табл. В.24 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП масштабного параметра гамма-распределения подчиняется бета-распределению III рода с параметрами  $\theta_0 = 5.8359$ ;  $\theta_1 = 22.6032$ ;  $\theta_2 = 2.1921$ ;  $\theta_3 = 4.00$ ;  $\theta_4 = 0.282$ . При найденном значении статистики по бета-распределению III рода вычисляют  $P\{S > S_K^*\} = 0.9190$ .

Следовательно, согласие очень хорошее и проверяемая гипотеза должна быть принята.

б) *Критерий типа Смирнова*

В соответствии с разд. 3.4.2.2 вычисляют значение статистики типа Смирнова по формуле (3.12):  $S_m^* = 0.9419$ . Из табл. В.27 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметра масштаба гамма-распределения подчиняется распределению Su-Джонсона с параметрами  $\theta_0 = -2.5372$ ;  $\theta_1 = 1.3749$ ;  $\theta_2 = 0.3464$ ;  $\theta_3 = 0.2162$ . При найденном значении статистики по распределению Su-Джонсона вычисляют вероятность  $P\{S_m > S_m^*\} = 0.6897$ , значение которой указывает на хорошее согласие.

в) *Критерий типа  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова*

В соответствии с разд. 3.4.2.3 вычисляют значение статистики типа  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова по формуле (3.16):  $S_{\omega}^* = 0.0475$ . Из табл. В.25 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметра масштаба гамма-распределения подчиняется бета-распределению третьего рода с параметрами  $\theta_0 = 2.9463$ ;  $\theta_1 = 3.1124$ ;  $\theta_2 = 9.1160$ ;  $\theta_3 = 0.600$ ;  $\theta_4 = 0.013$ . При найденном значении статистики по бета-распределению третьего рода вычисляют  $P\{S_{\omega} > S_{\omega}^*\} = 0.7309$ .

г) Критерий типа  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга

В соответствии с разд. 3.4.2.4 вычисляют значение статистики  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга по формуле (3.19):  $S_\Omega^* = 0.2675$ . Из табл. В.26 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметра масштаба гамма-распределения подчиняется бета-распределению III рода с параметрами  $\theta_0 = 4.9479$ ;  $\theta_1 = 3.3747$ ;  $\theta_2 = 13.0426$ ;  $\theta_3 = 3.8304$ ;  $\theta_4 = 0.077$ . При найденном значении статистики по бета-распределению III рода вычисляют вероятность  $P\{S_\Omega > S_\Omega^*\} = 0.8662$ .

Таким образом, по всем критериям выборка хорошо согласуется с гамма-распределением и проверяемая гипотеза должна быть принята.

**Пример 3.7.** Проверяют сложную гипотезу о принадлежности выборки гамма-распределению с параметром сдвига  $\theta_2 = 0$ . Упорядоченная выборка объемом 100 наблюдений имеет вид

0.0002	0.0004	0.0009	0.0019	0.0020
0.0025	0.0028	0.0030	0.0031	0.0040
0.0044	0.0054	0.0057	0.0068	0.0076
0.0081	0.0084	0.0090	0.0101	0.0119
0.0130	0.0162	0.0190	0.0201	0.0206
0.0237	0.0293	0.0312	0.0427	0.0431
0.0441	0.0452	0.0481	0.0492	0.0498
0.0517	0.0517	0.0552	0.0558	0.0638
0.0671	0.0714	0.0806	0.0815	0.0965
0.0987	0.1005	0.1055	0.1255	0.1307
0.1312	0.1324	0.1353	0.1411	0.1446
0.1524	0.1594	0.1678	0.1754	0.1767
0.1799	0.1838	0.1994	0.2116	0.2159
0.2162	0.2238	0.2242	0.2329	0.2545
0.2782	0.2900	0.2929	0.2967	0.3006
0.3084	0.3200	0.3262	0.3286	0.3473
0.3488	0.3608	0.3905	0.3961	0.4132
0.4294	0.4385	0.4557	0.4629	0.4699
0.5041	0.5096	0.6121	0.6146	0.6415
0.7359	0.9762	1.1460	1.1494	1.6170

Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0 : f(x) \in \left\{ \frac{1}{\theta_1^{\theta_0} \Gamma(\theta_0)} (x - \theta_2)^{\theta_0 - 1} e^{-(x - \theta_2)/\theta_1}, \right.$$

$$\left. \theta_0 \in (0, \infty), \quad \theta_1 \in (0, \infty), \quad \theta_2 = 0 \right\}.$$

Вычисленные по выборке ОМП параметров формы и масштаба соответственно равны  $\hat{\theta}_0 = 0.5812$ ;  $\hat{\theta}_1 = 2.7391$ . В табл. В.24–В.28 ближайшее значение параметра формы  $\theta_0 = 0.5$ .

а) *Критерий типа Колмогорова*

В соответствии с разд. 3.4.2.1 вычисляют значение статистики типа Колмогорова по формуле (3.6):  $S_K^* = 0.6272$ . Из табл. В.24 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметров формы и масштаба гамма-распределения при  $\theta_0 = 0.5$  подчиняется бета-распределению III рода с параметрами  $\theta_0 = 6.4083$ ;  $\theta_1 = 5.9339$ ;  $\theta_2 = 3.2063$ ;  $\theta_3 = 1.4483$ ;  $\theta_4 = 0.2774$ . При найденном значении статистики по бета-распределению III рода вычисляют  $P\{S > S_K^*\} = 0.5414$ . Так как оценка параметра формы больше 0.5, то при  $\hat{\theta}_0 = 0.5812$   $P\{S > S_K^*\} > 0.5414$ . Следовательно, проверяемая гипотеза должна быть принята.

б) *Критерий типа Смирнова*

В соответствии с разд. 3.4.2.2 вычисляют значение статистики типа Смирнова по формуле (3.12):  $S_m^* = 1.1526$ . Из табл. В.27 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметров формы и масштаба гамма-распределения при  $\theta_0 = 0.5$  подчиняется распределению Su-Джонсона с параметрами  $\theta_0 = -2.4027$ ;  $\theta_1 = 1.3861$ ;  $\theta_2 = 0.3389$ ;  $\theta_3 = 0.2290$ . При найденном значении статистики по данному распределению Su-Джонсона определяют, что вероятность  $P\{S_m > S_m^*\} > 0.5031$ .

в) *Критерий типа  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова*

В соответствии с разд. 3.4.2.3 вычисляют значение статистики типа  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова по формуле (3.16):  $S_{\omega}^* = 0.0561$ . Из табл. В.25 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметров формы и масштаба гамма-распределения при  $\theta_0 = 0.5$  подчиняется бета-распределению III рода с параметрами  $\theta_0 = 2.7216$ ;  $\theta_1 = 3.9844$ ;  $\theta_2 = 7.4993$ ;  $\theta_3 = 0.5372$ ;  $\theta_4 = 0.013$ . При найденном значении статистики по бета-распределению III рода определяют, что вероятность  $P\{S_{\omega} > S_{\omega}^*\} > 0.5010$ .

г) *Критерий типа  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга*

В соответствии с разд. 3.4.2.4 вычисляют значение статистики  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга по формуле (3.19):  $S_{\Omega}^* = 0.3746$ . Из табл. В.26 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметров формы и масштаба гамма-распределения при  $\theta_0 = 0.5$  подчиняется бета-распределению III рода с параметрами  $\theta_0 = 5.0079$ ;  $\theta_1 = 4.056$ ;  $\theta_2 = 10.0292$ ;  $\theta_3 = 2.5872$ ;  $\theta_4 = 0.073$ . При найденном значении статистики по бета-распределению III рода определяют, что вероятность  $P\{S_{\Omega} > S_{\Omega}^*\} > 0.4692$ .

Таким образом, по всем критериям выборка хорошо согласуется с гамма-распределением и проверяемая гипотеза не отклоняется.

## 3.5. Выводы

Распределения статистик непараметрических критериев согласия при простых и сложных гипотезах с ростом  $n$  быстро сходятся к предельным законам. Уже при  $n \geq 20$ , не опасаясь больших ошибок, можно пользоваться этими предельными законами для вычисления достигаемого уровня значимости  $P\{S > S^*\}$ .

В то же время следует иметь в виду, что различать близкие гипотезы (особенно простые) при малых выборках с помощью непараметрических критериев согласия невозможно.

Мощность непараметрических критериев при проверке сложных гипотез при тех же объемах выборок  $n$  всегда существенно выше, чем при проверке простых.

При проверке сложных гипотез распределения статистик  $G(S|H_0)$  непараметрических критериев зависят не только от закона распределения  $F(x, \theta)$ , соответствующего гипотезе  $H_0$ , числа и вида оцениваемых параметров (иногда конкретного значения параметра), но и от используемого метода оценивания параметров. Ни в коем случае нельзя, оценивая параметры одним методом, использовать (предельный) закон распределения статистики, построенный для другого метода оценивания.

В случае применения *MD*-оценок, минимизирующих статистику используемого критерия согласия, распределения статистик непара-

метрических критериев в меньшей степени подвержены зависимости от вида закона  $F(x, \theta)$ , соответствующего гипотезе  $H_0$ . Однако наиболее мощными эти критерии оказываются при использовании ОМП. Именно поэтому и вследствие асимптотических свойств ОМП в последних работах [277, 276, 226, 227, 80, 81, 82, 150, 2, 95, 235] исследовались и уточнялись модели распределений статистик непараметрических критериев в случае применения ОМП.

В случае простых гипотез и при близких конкурирующих гипотезах непараметрические критерии согласия уступают по мощности критериям типа  $\chi^2$ . При проверке сложных гипотез – преимущество за непараметрическими критериями согласия. В то же время рекомендуется при проверке гипотез о согласии не останавливаться на использовании только одного из критериев согласия, так как каждый из критериев по-разному улавливает различные отклонения эмпирического распределения от теоретического. Более подробно о сравнительном анализе мощности критериев будет рассказано в следующем разделе.

Методика компьютерного моделирования распределений статистик при корректном ее применении может быть рекомендована для построения статистических закономерностей в ситуации, когда аналитическими методами не удается решить задачу.

Применение при проверке сложных гипотез моделей распределений статистик критериев согласия, представленных в приложении В, правомерно при использовании ОМП или *MD*-оценок соответственно. Некорректным будет использование оценок по методу моментов (за исключением тех ситуаций, когда оценки по методу моментов совпадают с ОМП) и использование различных оценок по наблюдениям, сгруппированным в интервалы. Некорректно вычисление значений статистик непараметрических критериев согласия по группированным наблюдениям.

Теперь несколько слов об ошибках применения непараметрических критериев согласия на основании анализа литературных источников. Большинство ошибок, приводящих к некорректным выводам, связано с полным пренебрежением к тому, что, оценивая по выборке параметры, оказываешься в условиях проверки сложной гипотезы.

В тех редких случаях, когда исследователь понимает, что нельзя пользоваться классическими результатами, осуществляя проверку

сложной гипотезы, ошибки бывают связаны с тем, что не учитывается многообразие факторов, влияющих на распределение статистики критерия согласия. Обычно не учитывается, что распределения статистик зависят от метода оценивания.

При выборе методов анализа следует учитывать точность регистрации наблюдений, иначе это может приводить к недоразумениям при статистических выводах. При анализе экспериментальных наблюдений мы чаще имеем дело с недостаточными объемами выборок. Однако в некоторых случаях, например при автоматизированном контроле различных показателей, выборки могут быть практически любого объема. Но при этом измерения снимаются с ограниченной точностью. В результате в накапливаемой выборке наблюдения принимают ограниченное число значений: выборка оказывается поразрядно группированной, а соответствующее эмпирическое распределение  $F_n(x)$  сохраняет ступенчатый вид при любом объеме выборки.

Поэтому меры отклонения  $F_n(x)$  от  $F(x, \theta)$ , используемые в непараметрических критериях согласия, несмотря на возможное соответствие наблюданного закона теоретическому, с ростом объема выборок только растут. В такой ситуации проверка гипотезы о принадлежности контролируемой величины, например, нормальному закону неизбежно приводит к отклонению проверяемой гипотезы. И это притом, что к контролируемому процессу претензий может не быть. Точность регистрации наблюдений следует учитывать и при выборе метода оценивания параметров, и при выборе критерия проверки гипотез. В подобной ситуации целесообразней воспользоваться критериями типа  $\chi^2$ .

Таким образом, применяя непараметрические критерии согласия типа Колмогорова, типа  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова и  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга, следует очень внимательно относиться к тому, какую гипотезу вы проверяете: простую или сложную. Если сложную, то надо внимательно учсть факторы, влияющие на «сложность» гипотезы (вид закона  $F(x, \theta)$ , метод оценивания, тип оцениваемых параметров, их количество, значение оценки параметра), и использовать при проверке гипотезы соответствующую модель распределения статистики применяемого критерия (из приложения В или других источников).

Рекомендации по стандартизации [302] и настоящая работа охватывают далеко не полный перечень законов распределения, применяемых в прикладных исследованиях. В конкретных задачах для описания наблюдаемых случайных величин могут использоваться специфические модели законов распределений. Естественно, что возникает необходимость проверять адекватность таких моделей. Для проверки адекватности с использованием критериев согласия необходимо знать условные распределения статистик  $G(S|H_0)$ . Очень проблематично, чтобы необходимые  $G(S|H_0)$  были найдены аналитически (из-за сложности решения таких задач аналитическими методами и множества задач). Но построение моделей  $G(S|H_0)$  с использованием компьютерных методов исследования принципиальных проблем не вызывает. На базе таких методов были построены модели распределений статистик и таблицы процентных точек, представленные в приложении **B**.

---

---

## **4. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ ПРИ БЛИЗКИХ КОНКУРИРУЮЩИХ ГИПОТЕЗАХ**

---

---

### **4.1. Введение**

**К**ритерии согласия предназначены для проверки гипотез о соответствии эмпирического распределения некоторому теоретическому закону.

Различают проверку простых и сложных гипотез. Простая проверяемая гипотеза имеет вид  $H_0: F(x) = F(x, \theta)$ , где  $F(x, \theta)$  – функция распределения вероятностей, с которой проверяют согласие наблюдаемой выборки, а  $\theta$  – известное значение параметра (скалярного или векторного).

Сложная проверяемая гипотеза может быть записана в виде  $H_0: F(x) \in \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$ , где  $\Theta$  – область определения неизвестного параметра  $\theta$ . Отличие в процедуре применения критериев при проверке сложных гипотез и соответствующие проблемы возникают, если оценку параметра  $\hat{\theta}$  теоретического распределения вычисляют по той же самой выборке, по которой проверяют согласие.

Далее мы, как правило, будем предполагать, что при проверке сложных гипотез оценка параметра  $\hat{\theta}$  вычисляется по этой же выборке.

С проверкой статистических гипотез связывают ошибки двух видов. Ошибка первого рода заключается в том, что в результате проверки отклоняется справедливая проверяемая гипотеза  $H_0$ . Ошибка

второго рода – в признании верной гипотезы  $H_0$ , когда на самом деле справедлива некоторая конкурирующая гипотеза  $H_1$ .

Процедура проверки гипотезы  $H_0$  предполагает, что известно распределение  $G(S|H_0)$  статистики  $S$  применяемого критерия при справедливости  $H_0$ . Для критериев согласия критические области определяются большими значениями статистик. Вероятность ошибки первого рода  $\alpha$  (уровень значимости) представляет собой вероятность попадания значения статистики в критическую область:  $\alpha = P\{S > S_\alpha | H_0\} = 1 - G(S_\alpha | H_0)$ , где  $S_\alpha$  – критическое значение. При проверке гипотез величина  $\alpha$ , как правило, задается. Если вычисленное по выборке значение статистики  $S^* \leq S_\alpha$ , или, что то же самое, достигнутый уровень значимости  $P\{S > S^* | H_0\} = 1 - G(S^* | H_0) > \alpha$ , то проверяемая гипотеза  $H_0$  не отклоняется.

При задании конкурирующей гипотезы  $H_1$  вероятность ошибки второго рода определяется соотношением  $\beta = P\{S \leq S_\alpha | H_1\} = = G(S_\alpha | H_1)$ , где  $G(S|H_1)$  – распределение статистики критерия при справедливости  $H_1$ . Если критерий полностью определен, то задание  $\alpha$  однозначно определяет величину  $\beta$  и наоборот. Мощность  $1 - \beta$  критерия при проверке гипотезы  $H_0$  относительно  $H_1$  представляет собой функцию, зависящую от  $H_0$ ,  $H_1$ , объема выборки  $n$  и, возможно, от некоторых других факторов, связанных с построением критерия.

При проведении статистического анализа, отдавая предпочтение некоторому критерию, хотелось бы иметь уверенность в том, что для заданной вероятности ошибки первого рода  $\alpha$  гарантируется минимальная вероятность ошибки второго рода  $\beta$ , т. е. что критерий обладает наибольшей мощностью относительно интересующей нас пары конкурирующих гипотез  $H_0$  и  $H_1$ .

Информация, содержащаяся в различных источниках, о преимуществах в определенных ситуациях того или иного критерия согласия неоднозначна и зачастую противоречива. Результаты исследования

асимптотической мощности критериев, например [342, 339, 343, 340], трудно использовать из-за ограниченных объемов выборок, с которыми приходится иметь дело практику. Рекомендации различных авторов носят субъективный характер, отражают сложившиеся стереотипы, базируются на конкретных частных примерах и ограниченном опыте практического применения.

Исследования мощности затруднены отсутствием результатов, связанных с аналитическим представлением функций распределения  $G(S|H_1)$  для конкретных критериев согласия при проверке сложных гипотез, в частности, для непараметрических критериев и для критериев типа  $\chi^2$  при оценивании параметров по точечным выборкам (по негруппированным наблюдениям).

Цель исследований, представленных в настоящей работе, заключалась в сравнительном анализе мощности наиболее часто используемых критериев согласия на некоторых парах достаточно близких конкурирующих гипотез  $H_0$  и  $H_1$ . Интерес представляет способность критериев различать именно близкие гипотезы, так как распознавание различий в далеких законах распределения, как правило, не составляет проблем.

Материал этого раздела, в первой части которого приводятся численные результаты исследований мощности критериев согласия в случае проверки простых гипотез, во второй – в случае проверки сложных, опирается на работы [236, 92, 238, 79, 239, 75].

## 4.2. Исследуемые критерии

**Критерий Колмогорова.** В критериях типа Колмогорова измеряющее расстояние между эмпирическим  $F_n(x)$  и теоретическим  $F(x, \theta)$  распределениями имеет вид

$$D_n = \sup_{|x|<\infty} |F_n(x) - F(x, \theta)|,$$

где  $n$  – объем выборки. В случае справедливости простой проверяемой гипотезы при  $n \rightarrow \infty$  статистика  $\sqrt{n} \cdot D_n$  подчиняется распределению Колмогорова  $K(s)$  [67].

Наиболее часто в критерии Колмогорова (Колмогорова–Смирнова) используют статистику вида [163] с поправкой, предложенной Больщевым [161, 162],

$$S_K = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}}, \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} D_n &= \max(D_n^+, D_n^-), \quad D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_i, \theta) \right\}, \\ D_n^- &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ F(x_i, \theta) - \frac{i-1}{n} \right\}; \end{aligned}$$

$n$  – объем выборки;  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – упорядоченные по возрастанию выборочные значения. При справедливости простой проверяемой гипотезы статистика  $S_K$  в пределе подчиняется закону распределения Колмогорова  $K(S)$  [163].

По-видимому (и к большому сожалению), поправка Больщева не привлекла внимания зарубежных специалистов. В работах, посвященных критерию Колмогорова, до сих пор, как правило, используют статистику  $\sqrt{n} \cdot D_n$ . Вследствие этого при ограниченных значениях  $n$  вынуждены учитывать существенную зависимость распределения статистики от величины  $n$ .

**Критерий Крамера–Мизеса–Смирнова.** Статистика критерия  $\omega^2$  Мизеса (Крамера–Мизеса–Смирнова) имеет вид [163]

$$S_\omega = n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left\{ F(x_i, \theta) - \frac{2i-1}{2n} \right\}^2. \quad (4.2)$$

При справедливости простой гипотезы статистика в пределе подчиняется закону с функцией распределения  $al(s)$  [163].

**Критерий Андерсона–Дарлинга.** Статистика критерия  $\Omega^2$  Мизеса (статистика Андерсона–Дарлинга) определяется выражением [163]

$$S_\Omega = n\Omega_n^2 = -n - 2 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2i-1}{2n} \ln F(x_i, \theta) + \left(1 - \frac{2i-1}{2n}\right) \ln(1 - F(x_i, \theta)) \right\} \quad (4.3)$$

и при справедливости простой гипотезы в пределе подчиняется закону с функцией распределения  $a2(s)$  [163].

В выражениях статистик критериев (4.1) – (4.3), которые строились для проверки простых гипотез, принято указывать теоретическую функцию распределения как  $F(x)$ , подчеркивая этим, что закон распределения и его параметр  $\theta$  известны. Мы намеренно в (4.1) – (4.3) указали функцию распределения  $F(x, \theta)$  зависящей от параметра  $\theta$ , подразумевая, что при проверке сложных гипотез параметр  $\theta$  будет заменяться оценкой. Это же замечание справедливо для критерия  $\chi^2$  Пирсона.

В случае проверки простых гипотез предельные распределения статистик критериев согласия Колмогорова,  $\omega^2$  Мизеса и  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга не зависят от вида наблюдаемого закона распределения и, в частности, от его параметров. В этой связи их называют «свободными от распределения».

При проверке сложных гипотез, когда по этой же выборке оцениваются параметры закона, непараметрические критерии теряют свойство «свободы от распределения» [163]. Более того, при проверке сложных гипотез распределения статистик данных критериев определяются характером проверяемой сложной гипотезы. На законы распределений статистик  $G(S|H_0)$  критериев влияют следующие факторы, определяющие «сложность» гипотезы [302]:

- вид наблюдаемого закона распределения  $F(x, \theta)$ , соответствующего истинной гипотезе  $H_0$ ;
- тип оцениваемого параметра и число оцененных по выборке параметров;
- в некоторых ситуациях конкретное значение параметра (например, в случае гамма-распределения);
- используемый метод оценивания параметров.

Аналитический вид (предельных) распределений статистик  $G(S|H_0)$  непараметрических критериев при проверке сложных гипотез неизвестен. Имеются частные решения, в основе которых использованы различные подходы [281, 119, 136, 135, 18, 331, 333, 330, 306]. По-видимому, наиболее перспективным для построения распределений статистик является численный подход, базирующийся на стати-

стическом моделировании эмпирических распределений статистик и последующем построении для них приближенных аналитических моделей [302, 260, 258, 256, 261, 265, 254, 239, 277].

**Критерий  $\chi^2$  Пирсона.** Применение критериев типа  $\chi^2$  предусматривает разбиение области определения случайной величины на  $k$  интервалов с подсчетом числа наблюдений  $n_i$ , попавших в них, и вероятностей попадания в интервалы  $P_i(\theta)$ , соответствующих теоретическому закону. Статистика критерия согласия  $\chi^2$  Пирсона имеет вид

$$X_n^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(n_i / n - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}. \quad (4.4)$$

В случае проверки простой справедливой гипотезы в пределе эта статистика подчиняется  $\chi_{k-1}^2$ -распределению с  $k-1$  степенями свободы.

Если верна конкурирующая гипотеза  $H_1$  и выборка соответствует закону с распределением  $F_1(x, \theta_1)$  с параметром  $\theta_1$ , то эта же статистика в пределе подчиняется нецентральному  $\chi_{k-1}^2$ -распределению с параметром нецентральности

$$v = n \sum_{i=1}^k \frac{\left( P_i^1(\theta_1) - P_i(\theta) \right)^2}{P_i(\theta)},$$

где  $P_i^1(\theta_1)$  – вероятность попадания в интервал при справедливой гипотезе  $H_1$ .

В случае проверки сложной гипотезы при справедливости  $H_0$  и при условии, что оценки параметров находятся в результате минимизации статистики (4.4) по этой же самой выборке, статистика  $X_n^2$  асимптотически распределена как  $\chi_{k-r-1}^2$ , где  $r$  – число оцененных по выборке параметров. Статистика (4.4) имеет это же распределение, если в качестве метода оценивания выбирают метод максимального правдоподобия и оценки вычисляют по сгруппированным данным [209, 13]. Более того, методами статистического моделирования было показано, что это имеет место, если используются и другие асимптотически эффективные оценки по группированным данным [271].

При вычислении оценок максимального правдоподобия (ОМП) по негруппированным данным эта же статистика распределена как сумма независимых слагаемых  $\chi_{k-r-1}^2 + \sum_{j=1}^r \lambda_j \xi_j^2$ , где  $\xi_1, \dots, \xi_r$  – стандартные нормальные случайные величины, независимые одна от другой и от  $\chi_{k-r-1}^2$ , а  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  – некоторые числа между 0 и 1 [19, 341, 112]. В этом случае при проверке сложных гипотез и использовании ОМП по негруппированным наблюдениям распределения  $G(X_n^2 | H_0)$  статистики критерия существенно зависят от способа группирования [263].

В работах [260, 263] методами статистического моделирования были проведены исследования законов распределения статистик типа  $\chi^2$  в случае простых и различных сложных гипотез, при справедливости гипотезы  $H_0$  и справедливости конкурирующей гипотезы  $H_1$ , при равновероятном (РВГ) и асимптотически оптимальном (АОГ) группировании [188, 191, 215, 216, 301, 31]. При использовании АОГ минимизируются потери в информации Фишера, связанные с группированием, и максимизируется мощность критерия  $\chi^2$  Пирсона относительно близких конкурирующих гипотез.

В качестве критерия согласия может использоваться критерий отношения правдоподобия со статистикой вида [205]

$$-2 \ln l = -2 \sum_{i=1}^k n_i \ln \left( \frac{P_i(\theta)}{n_i / n} \right),$$

который асимптотически эквивалентен критерию  $\chi^2$  Пирсона [205]. Более того, выводы относительно свойств этого критерия во всех наших исследованиях оказывались идентичными выводам по поводу критерия Пирсона [263, 216, 301]. Поэтому отдельно в настоящем разделе этот критерий не рассматривался.

**Критерий Нikuлина.** Применение при проверке сложных гипотез с использованием критериев типа  $\chi^2$  оценок по негруппированным (точечным) наблюдениям имеет определенные преимущества. Такие оценки имеют лучшие асимптотические свойства по сравнению с оценками по группированным. В работах [288, 287] Никулиным пред-

ложен критерий, в котором используются ОМП по негруппированным данным. Этому же критерию посвящены работы [284, 1], а наиболее полно он изложен в [52]. Этот критерий обладает двумя преимуществами по отношению к критерию  $\chi^2$  Пирсона. Во-первых, замечательным фактом, отличающим этот критерий, является то, что статистика критерия при справедливости проверяемой гипотезы в пределе подчиняется  $\chi^2_{k-1}$ -распределению независимо от числа параметров закона, оцененных методом максимального правдоподобия. Во-вторых, мощность критерия, как правило, выше мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона.

В [124] аналогичные результаты для экспоненциального семейства распределений были получены Рао и Робсоном. Теории построения таких критериев была посвящена работа [113]. В последнее время критерии этого вида называют критериями со статистиками Рао–Робсона–Никулина [142].

В нашем случае рассматривался критерий со статистикой в виде, первоначально предложенном в [288]. Критерий предусматривает оценивание неизвестных параметров распределения  $F(x, \theta)$  методом максимального правдоподобия по негруппированным данным. При этом вектор вероятностей попадания в интервалы  $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_k)^T$  предполагается заданным, и граничные точки интервалов определяют по соотношениям  $x_i(\theta) = F^{-1}(P_1 + \dots + P_i), i = \overline{1, (k-1)}$ . Предложенная статистика имеет вид [288]

$$Y_n^2 = X_n^2 + n^{-1} a^T(\theta) \Lambda(\theta) a(\theta), \quad (4.5)$$

где  $X_n^2$  вычисляется по (4.4); матрица  $\Lambda(\theta) = \left\| J(\theta_l, \theta_j) - \sum_{i=1}^k \frac{w_{\theta_l i} w_{\theta_j i}}{p_i} \right\|^{-1}$ ,

элементы и размерность которой определяются оцениваемыми компонентами вектора параметров  $\theta$ ;  $J(\theta_l, \theta_j) = \int \left( \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_l} \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_j} \right) f(x, \theta) dx -$

элементы информационной матрицы по негруппированным данным; компоненты вектора  $a(\theta)$  имеют вид  $a_{\theta_l} = w_{\theta_l 1} n_1 / P_1 + \dots + w_{\theta_l k} n_k / P_k$ ;

$$w_{\theta_l i} = -f[x_i(\theta), \theta] \frac{\partial x_i(\theta)}{\partial \theta_l} + f[x_{i-1}(\theta), \theta] \frac{\partial x_{i-1}(\theta)}{\partial \theta_l}.$$

Элементы матрицы  $\Lambda(\theta)$  и вектора  $a(\theta)$  определяются законом распределения  $F(x, \theta)$ . Их вычисление не всегда тривиально, с чем связано незаслуженно редкое использование критерия в прикладных работах.

### 4.3. Методы исследований

Для вычисления значений мощности необходимо знать распределения статистик  $G(S|H_0)$  и  $G(S|H_1)$ , аналитические выражения которых, как правило, неизвестны и зависят от  $n$ . Для оценки  $G(S|H_0)$  и  $G(S|H_1)$  соответствующих статистик  $S$  наиболее целесообразно использовать методы статистического моделирования. Для построения эмпирических распределений статистик моделируются выборки статистик  $S_1, S_2, \dots, S_N$  достаточно большого объема  $N$  при конкретных объемах выборок  $n$  наблюдаемых величин, моделируемых по законам, соответствующим проверяемой  $H_0$  или конкурирующей  $H_1$  гипотезе. Далее оценки значений мощности критериев могут быть получены по эмпирическим распределениям статистик  $G_n^N(S|H_0)$  и  $G_n^N(S|H_1)$  или по приближенным аналитическим моделям, построенным по  $G_n^N(S|H_0)$  и  $G_n^N(S|H_1)$ .

При проведении данных исследований, как правило, задавалось  $N = 10^6$ , а индекс  $N$  в обозначениях соответствующих эмпирических функций в дальнейшем изложении опускается. Моделирование и исследование опиралось на развивающееся программное обеспечение задач статистического анализа.

### 4.4. Рассматриваемые альтернативы

Результаты сравнительного анализа мощности критериев согласия в настоящей работе иллюстрируются на двух парах конкурирующих гипотез.

Первую пару составили нормальный и логистический законы: проверяемой гипотезе  $H_0$  соответствовал нормальный закон с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - \theta_1)^2}{2\theta_0^2}\right\},$$

а конкурирующей гипотезе  $H_1$  – логистический с функцией плотности

$$f(x) = \frac{\pi}{\theta_0 \sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{\pi(x - \theta_1)}{\theta_0 \sqrt{3}}\right\} \Bigg/ \left[1 + \exp\left\{-\frac{\pi(x - \theta_1)}{\theta_0 \sqrt{3}}\right\}\right]^2$$

и параметрами  $\theta_0 = 1$ ,  $\theta_1 = 0$ . В случае простой гипотезы  $H_0$  параметры нормального закона имеют те же значения. Эти два закона близки и трудно различимы с помощью критериев согласия.

Вторую пару составили:  $H_0$  – распределение Вейбулла с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_0 (x - \theta_2)^{\theta_0 - 1}}{\theta_1^{\theta_0}} \exp\left\{-\left(\frac{x - \theta_2}{\theta_1}\right)^{\theta_0}\right\}$$

и параметрами  $\theta_0 = 2$ ,  $\theta_1 = 2$ ,  $\theta_2 = 0$ ;  $H_1$  – гамма-распределение с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1 \Gamma(\theta_0)} \left(\frac{x - \theta_2}{\theta_1}\right)^{\theta_0 - 1} e^{-(x - \theta_2)/\theta_1}$$

и параметрами  $\theta_0 = 3.12154$ ,  $\theta_1 = 0.557706$ ,  $\theta_2 = 0$ , при которых гамма-распределение наиболее близко к данному распределению Вейбулла.

В работе исследовалась мощность при проверке простых и сложных гипотез  $H_0$  относительно простой конкурирующей гипотезы  $H_1$ .

## 4.5. Мощность критериев в случае проверки простых гипотез при альтернативе «нормальное распределение – логистическое»

Функции распределений нормального и логистического законов, соответствующих конкурирующим гипотезам  $H_0$  и  $H_1$ , очень близки. В этом можно убедиться, сравнив соответствующие графики. А если по выборкам, соответствующим нормальному или логистическому закону, находить ОМП параметров этих законов, то значения оценок соответственно параметров сдвига и масштаба практически совпадают.

Полученные в результате моделирования функции распределения статистики Колмогорова при справедливости простой проверяемой гипотезы  $G(S_K | H_0) = K(S_K)$  и справедливости конкурирующей гипотезы  $G_n(S_K | H_1)$  при объемах выборок  $n = 100, 200, 300, 500, 1000$  и 2000 наблюдений представлены на рис. 4.1. Проверяемой гипотезе  $H_0$  соответствует нормальный закон, конкурирующей гипотезе  $H_1$  – логистический.

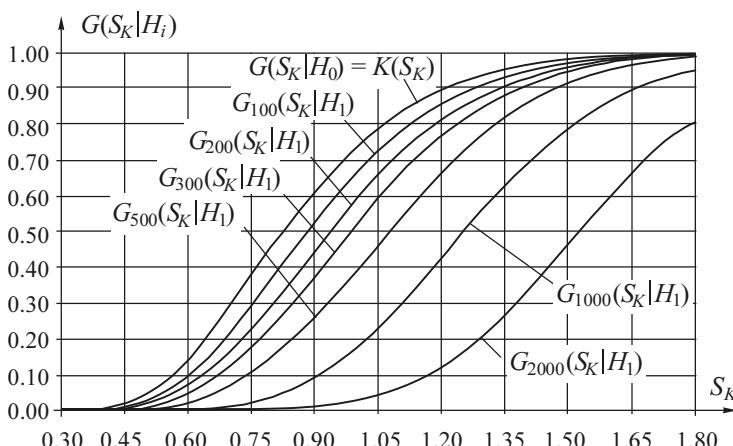


Рис. 4.1. Распределения статистики (4.1) типа Колмогорова  $G(S_K | H_0) = K(S_K)$  и  $G_n(S_K | H_1)$  при проверке простой гипотезы  $H_0$  о согласии с нормальным законом при конкурирующей гипотезе  $H_1$

Как видим, способность критерия Колмогорова различать эти гипотезы невелика. Например, при заданной вероятности ошибки первого рода  $\alpha = 0.1$  мощность критерия Колмогорова при проверке гипотезы  $H_0$  относительно конкурирующей  $H_1$  составляет величины порядка 0.127 при  $n = 100$ ; 0.170 при  $n = 200$ ; 0.215 при  $n = 300$ ; 0.309 при  $n = 500$ ; 0.544 при  $n = 1000$  и 0.861 при  $n = 2000$ .

На рис. 4.2 показаны распределения  $G(S_\omega | H_0) = a1(S_\omega)$  и  $G_n(S_\omega | H_1)$  статистики  $S_\omega$  Крамера–Мизеса–Смирнова при простой проверяемой гипотезе и тех же самых  $H_0$  и  $H_1$ . Аналогично на рис. 4.3 отражены распределения  $G(S_\Omega | H_i)$  статистики  $S_\Omega$  Андерсона–Дарлинга ( $\Omega^2$  Мизеса). При проверке простой гипотезы  $G(S_\Omega | H_0) = a2(S_\Omega)$ .

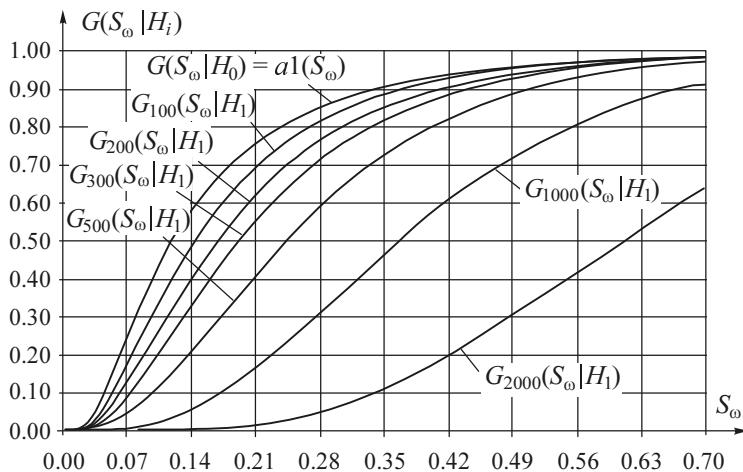


Рис. 4.2. Распределения статистики (4.2) типа  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова  $G(S_\omega | H_0) = a1(S_\omega)$  и  $G_n(S_\omega | H_1)$  при проверке простой гипотезы  $H_0$  о согласии с нормальным законом при конкурирующей гипотезе  $H_1$

На рис. 4.4 показаны распределения статистики  $X_n^2$  критерия Пирсона при проверке простой гипотезы в случае использования АОГ при числе интервалов  $k = 9$ .

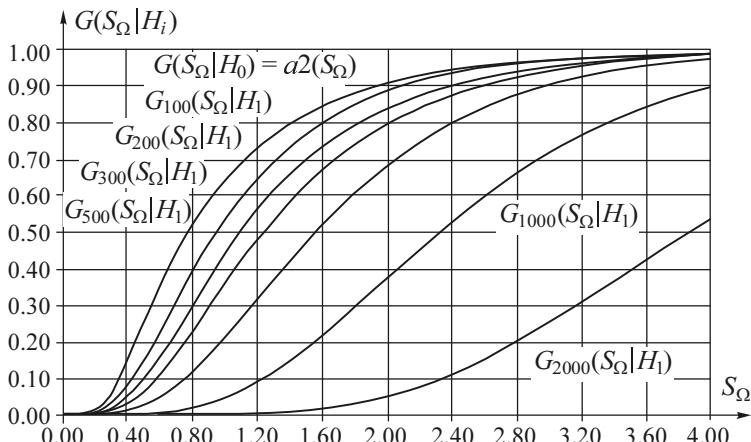


Рис. 4.3. Распределения статистики (4.3) типа  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга  $G(S_\Omega | H_0) = \alpha 2(S_\Omega)$  и  $G_n(S_\Omega | H_1)$  при проверке простой гипотезы  $H_0$  о согласии с нормальным законом при конкурирующей гипотезе  $H_1$

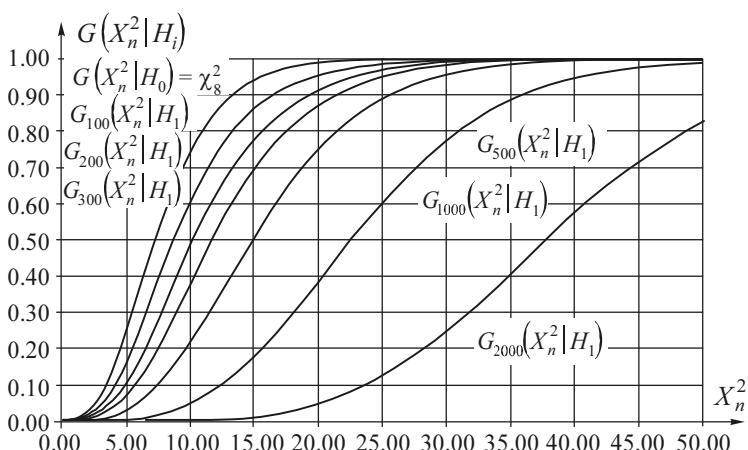


Рис. 4.4. Распределения статистики (4.4) типа  $\chi^2$  Пирсона  $G(X_n^2 | H_0) = \chi_8^2$  и  $G(X_n^2 | H_1)$  при проверке простой гипотезы  $H_0$  о согласии с нормальным законом при альтернативе  $H_1$  в случае АОГ при  $k = 9$

Напомним, что статистика  $X_n^2$  критерия Пирсона представляет собой дискретную случайную величину. Дискретность значений статистики особенно сильно проявляется при РВГ. В этом случае распределение статистики  $X_n^2$  плохо аппроксимируется непрерывным  $\chi_{k-1}^2$ -распределением. Характер сходимости распределений  $G(X_n^2 | H_0)$  статистики  $X_n^2$  Пирсона к  $\chi_8^2$ -распределению при девяти равновероятных интервалах и проверке простой гипотезы  $H_0$  иллюстрирует рис. 4.5 [51]. Естественно, что непараметрические критерии согласия с ростом объемов  $N$  выборок статистики  $X_n^2$  (с ростом мощности этих критериев) все более уверенно отклоняют гипотезу о согласии эмпирических распределений статистики  $X_n^2$  (вследствие их ступенчатости) с соответствующими непрерывными  $\chi_{k-1}^2$ -распределениями.

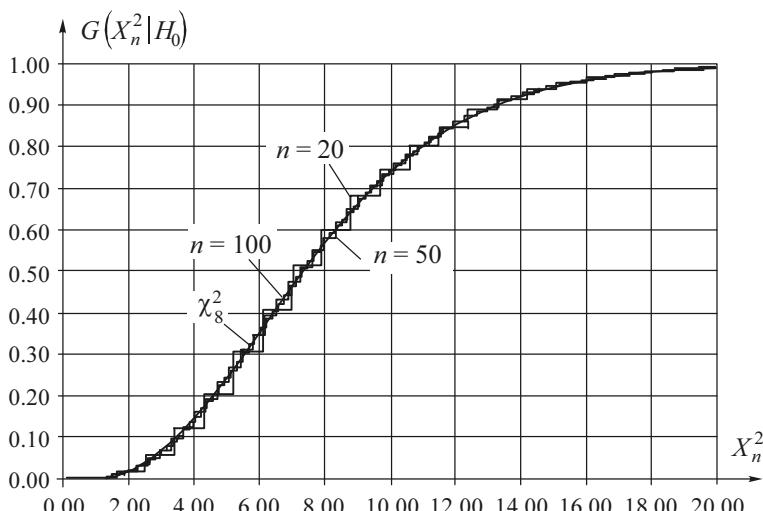


Рис. 4.5. Характер сходимости распределений  $G(X_n^2 | H_0)$  статистики (4.4) критерия  $\chi^2$  Пирсона к  $\chi_8^2$ -распределению при девяти равновероятных интервалах и проверке простой гипотезы  $H_0$

Аналогичные распределения статистики при АОГ носят достаточно гладкий характер [275]. При малых  $n$  распределения  $G\left(X_n^2 | H_0\right)$  по сравнению с  $\chi_8^2$ -распределением имеют более тяжелый (правый) хвост, а в области значений ординат от 0 до 0.85 сдвинуты влево. Однако с ростом  $n$  распределения быстро сходятся к  $\chi_{k-1}^2$ -распределениям [275]. Например, уже при  $n=100$  проверка согласия смоделированной выборки статистики (4.4) объемом  $N=10\,000$  с  $\chi_8^2$ -распределением дает достигаемые уровни значимости по всем применяемым критериям в интервале от  $P=0.0103$  для критерия Андерсона–Дарлинга до  $P=0.0586$  для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова. А при  $n=500$  достигаемые уровни значимости по всем рассматриваемым критериям уже лежат в интервале от  $P=0.963$  до  $P=0.992$ , что говорит о практическом совпадении эмпирического распределения статистики с теоретическим  $\chi_8^2$ -распределением.

Вычисленные на основании результатов моделирования распределений статистик оценки мощности рассматриваемых критериев согласия для различных значений уровня значимости  $\alpha$  при проверке простой гипотезы  $H_0$ , соответствующей нормальному закону с параметрами  $(0,1)$ , относительно гипотезы  $H_1$ , соответствующей логистическому закону с таким же набором параметров, приведены в табл. 4.1. Погрешность приводимых оценок мощности при проверке простых гипотез и 95 % доверительном интервале не превышает величины  $\pm 10^{-3}$ . Критерии упорядочены по убыванию мощности.

В табл. 4.1 показана максимальная мощность критерия  $X_n^2$  Пирсона, которую он имеет для данной пары  $H_0$  и  $H_1$  при  $k=15$  и АОГ. Для сравнения в табл. 4.2 приведены значения мощности при РВГ и другом количестве интервалов.

При РВГ критерий  $X_n^2$  Пирсона относительно данной пары гипотез имеет максимальную мощность при  $k=4$  [269], а далее с ростом  $k$  мощность убывает. Но этот максимальный уровень мощности ниже мощности данного критерия при  $k=9$  с использованием АОГ.

Таблица 4.1

**Мощность критериев согласия при проверке простой гипотезы  $H_0$   
(нормальное распределение) против гипотезы  $H_1$  (логистическое)**

$\alpha$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
	Для критерия $\chi^2$ Пирсона при $k = 15$ и АОГ					
0.15	0.349	0.459	0.565	0.737	0.946	0.999
0.1	0.290	0.388	0.490	0.671	0.922	0.998
0.05	0.210	0.292	0.385	0.565	0.871	0.996
0.025	0.154	0.222	0.302	0.472	0.813	0.992
0.01	0.107	0.159	0.221	0.369	0.729	0.983
	Для критерия $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга					
0.15	0.194	0.258	0.328	0.472	0.776	0.982
0.1	0.125	0.169	0.222	0.343	0.654	0.957
0.05	0.057	0.079	0.107	0.181	0.439	0.869
0.025	0.026	0.036	0.049	0.088	0.261	0.724
0.01	0.010	0.013	0.017	0.031	0.114	0.491
	Для критерия Колмогорова					
0.15	0.190	0.246	0.303	0.415	0.662	0.922
0.1	0.127	0.170	0.215	0.309	0.544	0.861
0.05	0.062	0.088	0.116	0.179	0.365	0.721
0.025	0.031	0.044	0.061	0.100	0.231	0.560
0.01	0.012	0.018	0.026	0.044	0.119	0.366
	Для критерия $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова					
0.15	0.178	0.228	0.283	0.401	0.680	0.947
0.1	0.114	0.147	0.186	0.277	0.542	0.892
0.05	0.052	0.067	0.086	0.136	0.324	0.742
0.025	0.024	0.030	0.039	0.062	0.171	0.548
0.01	0.010	0.011	0.014	0.021	0.065	0.307

Таблица 4.2

**Мощность критерия согласия  $\chi^2$  Пирсона при проверке простой гипотезы  $H_0$  (нормальное распределение) против гипотезы  $H_1$  (логистическое) в зависимости от способа группирования и числа интервалов**

$\alpha$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
	Для критерия $\chi^2$ Пирсона при $k = 9$ и АОГ					
0.15	0.269	0.381	0.488	0.670	0.917	0.998
0.1	0.204	0.302	0.403	0.589	0.880	0.995
0.05	0.129	0.203	0.287	0.464	0.806	0.989
0.025	0.084	0.136	0.203	0.359	0.723	0.979
0.01	0.050	0.081	0.127	0.249	0.608	0.957
	Для критерия $\chi^2$ Пирсона при $k = 9$ и РВГ					
0.15	0.210	0.282	0.349	0.483	0.747	0.960
0.1	0.152	0.208	0.270	0.392	0.673	0.938
0.05	0.083	0.123	0.170	0.273	0.547	0.890
0.025	0.046	0.072	0.105	0.186	0.435	0.828
0.01	0.020	0.036	0.056	0.109	0.310	0.734
	Для критерия $\chi^2$ Пирсона при $k = 15$ и РВГ					
0.15	0.192	0.257	0.312	0.432	0.690	0.941
0.1	0.139	0.187	0.237	0.343	0.607	0.911
0.05	0.073	0.106	0.144	0.227	0.477	0.848
0.025	0.040	0.061	0.085	0.149	0.365	0.772
0.01	0.018	0.029	0.043	0.083	0.247	0.662

При РВГ функции мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона относительно данной пары гипотез являются убывающими функциями от числа интервалов группирования  $k$  [269], что подтверждается и результатами данных исследований, а при АОГ оптимальное число интервалов, максимизирующее мощность, смещается в область больших значений  $k$ . При АОГ мощность данного критерия относительно близких гипотез и заданном  $k$ , как правило, всегда выше [301, 31, 269].

## 4.6. Мощности критериев в случае проверки простых гипотез и паре гипотез «распределение Вейбулла – гамма-распределение»

В этом случае проверяемой гипотезе  $H_0$  соответствует распределение Вейбулла с параметрами  $\theta_0 = 2$ ,  $\theta_1 = 2$ ,  $\theta_2 = 0$ , а конкурирующей  $H_1$  – гамма-распределение с параметрами  $\theta_0 = 3.12154$ ,  $\theta_1 = 0.557706$ ,  $\theta_2 = 0$ . Параметры гамма-распределения подобраны так, чтобы оно было наиболее близким к данному распределению Вейбулла.

Вычисленные оценки мощности критериев для различных значений уровня значимости  $\alpha$  при проверке согласия с распределением Вейбулла (гипотеза  $H_0$ ) относительно конкурирующей гипотезы, соответствующей гамма-распределению с указанными параметрами (гипотеза  $H_1$ ) при простой гипотезе  $H_0$ , приведены в табл. 4.3 и 4.4. Критерии в таблице упорядочены по убыванию мощности.

Таблица 4.3

**Мощность критериев согласия при проверке простой гипотезы  $H_0$  (распределение Вейбулла с параметрами 2, 2, 0) относительно гипотезы  $H_1$  (гамма-распределение с параметрами 3.12154, 0.557706, 0)**

$\alpha$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
Для критерия $\chi^2$ Пирсона при $k = 15$ и АОГ						
0.15	0.486	0.621	0.757	0.909	0.996	1.000
0.1	0.418	0.556	0.701	0.876	0.993	1.000
0.05	0.324	0.469	0.611	0.815	0.986	1.000
0.025	0.254	0.403	0.529	0.751	0.974	1.000
0.01	0.191	0.332	0.437	0.668	0.954	1.000
Для критерия $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга						
0.15	0.302	0.446	0.577	0.781	0.976	1.000
0.1	0.223	0.348	0.473	0.689	0.951	1.000
0.05	0.131	0.224	0.326	0.533	0.882	0.998
0.025	0.076	0.141	0.220	0.396	0.785	0.993
0.01	0.037	0.075	0.126	0.257	0.636	0.975

Окончание табл. 4.3

$\alpha$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
Для критерия $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова						
0.15	0.295	0.425	0.539	0.716	0.931	0.998
0.1	0.224	0.343	0.453	0.637	0.894	0.995
0.05	0.138	0.233	0.329	0.508	0.816	0.987
0.025	0.084	0.155	0.233	0.393	0.725	0.970
0.01	0.043	0.088	0.142	0.270	0.597	0.934
Для критерия Колмогорова						
0.15	0.294	0.421	0.531	0.700	0.915	0.995
0.1	0.225	0.342	0.450	0.628	0.879	0.992
0.05	0.141	0.237	0.332	0.508	0.806	0.981
0.025	0.087	0.160	0.239	0.401	0.723	0.964
0.01	0.045	0.093	0.150	0.282	0.606	0.930

Таблица 4.4

**Мощность критерия согласия  $\chi^2$  Пирсона при проверке простой гипотезы  $H_0$  (распределение Вейбулла с параметрами 2, 2, 0) относительно гипотезы  $H_1$  (гамма-распределение с параметрами 3.12154, 0.557706, 0) в зависимости от способа группирования и числа интервалов**

$\alpha$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
Для критерия $\chi^2$ Пирсона при $k = 9$ и АОГ						
0.15	0.427	0.608	0.748	0.910	0.996	1.000
0.1	0.353	0.534	0.684	0.874	0.993	1.000
0.05	0.261	0.429	0.581	0.807	0.985	1.000
0.025	0.202	0.343	0.488	0.734	0.973	1.000
0.01	0.152	0.255	0.384	0.637	0.950	1.000
Для критерия $\chi^2$ Пирсона при $k = 15$ и РВГ						
0.15	0.234	0.347	0.446	0.637	0.908	0.998
0.1	0.174	0.266	0.361	0.549	0.867	0.996
0.05	0.097	0.164	0.245	0.417	0.785	0.990
0.025	0.056	0.102	0.161	0.311	0.695	0.979
0.01	0.026	0.054	0.092	0.203	0.574	0.958

Окончание табл. 4.4

$\alpha$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
Для критерия $\chi^2$ Пирсона при $k = 9$ и РВГ						
0.15	0.240	0.344	0.440	0.616	0.883	0.995
0.1	0.177	0.262	0.354	0.528	0.835	0.990
0.05	0.100	0.164	0.238	0.399	0.743	0.979
0.025	0.057	0.100	0.157	0.294	0.646	0.960
0.01	0.026	0.053	0.090	0.191	0.520	0.924

Таким образом, на основании результатов анализа мощности рассматриваемых критериев относительно ряда пар достаточно близких конкурирующих гипотез для случая проверки простых гипотез критерии можно упорядочить по мощности следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi^2 \text{ Пирсона (АОГ)} &\succ \Omega^2 \text{ Андерсона–Дарлинга} \succ \\ &\succ \omega^2 \text{ Мизеса} \succ = \text{ Колмогорова.} \end{aligned}$$

Такая шкала справедлива при использовании в критерии  $\chi^2$  Пирсона АОГ, при котором минимизируются потери в информации Фишера. При очень близких гипотезах возможна ситуация

$$\text{Колмогорова} \succ \omega^2 \text{ Мизеса.}$$

Такое упорядочение не является жестким. Как видно из таблиц с приведенными значениями мощности, иногда критерий имеет преимущества по мощности при одних значениях  $\alpha$  и объемах выборок  $n$  и уступает при других значениях  $\alpha$  и  $n$ .

#### 4.7. Мощность критериев в случае проверки сложных гипотез при альтернативе «нормальное распределение – логистическое»

При проверке сложной гипотезы вида  $H_0: F(x) \in \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$ , где  $\Theta$  – область определения неизвестного параметра  $\theta$ , рассматриваются ситуация, когда оценка параметра  $\hat{\theta}$  теоретического распределения

ния вычисляется по той же самой выборке, по которой проверяется согласие.

Напомним, что в такой ситуации непараметрические критерии Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга теряют свойство «свободы от распределения» и законы распределения статистик  $G(S|H_0)$  критериев зависят: от вида наблюдаемого закона распределения  $F(x, \theta)$ , соответствующего проверяемой гипотезе  $H_0$ ; от типа оцениваемого параметра и числа оцененных по выборке параметров; в некоторых ситуациях от конкретного значения параметра или параметров (например, в случае гамма- и бета-распределений); от используемого метода оценивания параметров.

В случае оценивания неизвестного параметра  $\theta$  по негруппированным данным распределение статистики критерия  $\chi^2$  Пирсона также не является  $\chi^2$ -распределением.

В данной работе исследовалась мощность при проверке сложных гипотез  $H_0$  относительно простой конкурирующей  $H_1$ . При проверке сложных гипотез с использованием всех исследуемых критериев согласия для оценивания неизвестных параметров применялся метод максимального правдоподобия. В этом случае, с одной стороны, все критерии оказываются в равных условиях, а с другой – непараметрические критерии типа Колмогорова,  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова и  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга при использовании оценок максимального правдоподобия (ОМП) имеют более высокую мощность по сравнению со случаем, когда оценки находятся в результате минимизации статистики соответствующего критерия [302, 256].

На рис. 4.6 приведены полученные в результате моделирования функции распределения статистики Колмогорова с поправкой Больше-ва при проверке сложной гипотезы о согласии с нормальным законом с оцениванием параметров нормального закона методом максимального правдоподобия при конкурирующей гипотезе  $H_1$ , соответствующей логистическому закону. На рисунке представлены функция распределения  $G(S_K|H_0)$  и функции  $G_n(S_K|H_1)$  при объемах выборок  $n = 20, 50, 100, 300, 500, 1000$  и  $2000$  наблюдений. Как видим, при том же уровне значимости  $\alpha = 0.1$  мощность критерия оказывается существенно выше, чем при проверке простой гипотезы, и составляет величи-

ны порядка 0.142 при  $n = 20$ ; 0.181 при  $n = 50$ ; 0.236 при  $n = 100$ ; 0.351 при  $n = 200$ ; 0.459 при  $n = 300$ ; 0.646 при  $n = 500$ ; 0.905 при  $n = 1000$  и 0.997 при  $n = 2000$ . Это свидетельствует о том, что в случае проверки сложных гипотез те же конкурирующие гипотезы могут различаться при средних объемах выборок.

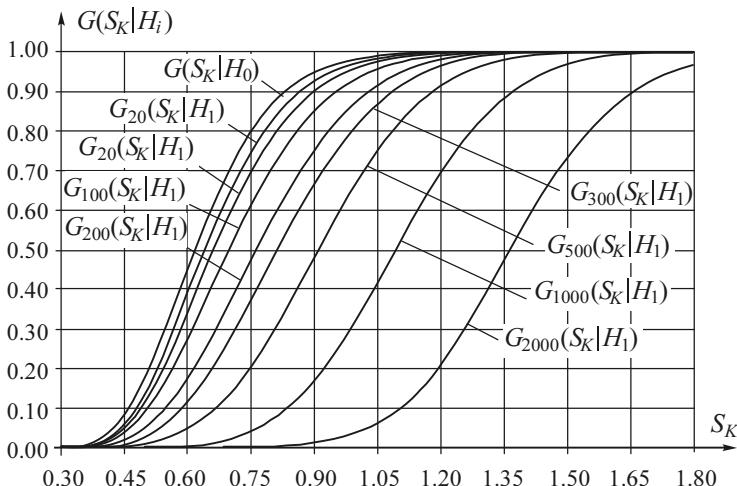


Рис. 4.6. Распределения статистики критерия Колмогорова  $G(S_K | H_0)$  и  $G_n(S_K | H_1)$  при проверке сложной гипотезы  $H_0$  о согласии с нормальным законом в случае использования ОМП при конкурирующей гипотезе  $H_1$ , соответствующей логистическому закону

На рис. 4.7 представлены распределения  $G(S_{\omega} | H_0)$  и  $G_n(S_{\omega} | H_1)$  статистики  $S_{\omega}$  Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке сложной гипотезы и тех же самых альтернативах с вычислением ОМП параметров нормального закона. Аналогичные распределения  $G(S_{\Omega} | H_i)$  статистики  $S_{\Omega}$  Андерсона–Дарлинга отражены на рис. 4.8.

На рис. 4.9 показаны распределения статистики  $Y_n^2$  критерия Никиулина при проверке сложной гипотезы и вычислении ОМП двух параметров нормального закона по негруппированным данным. Картина соответствует случаю использования асимптотически оптимального группирования (АОГ) при числе интервалов  $k = 9$ .

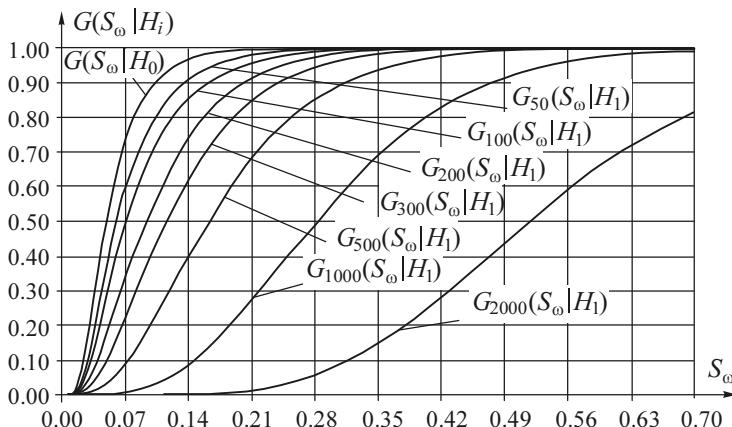


Рис. 4.7. Распределения статистики критерия  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова  $G(S_\omega | H_0)$  и  $G_n(S_\omega | H_1)$  при проверке сложной гипотезы  $H_0$  о согласии с нормальным законом в случае использования ОМП при конкурирующей гипотезе  $H_1$ , соответствующей логистическому закону

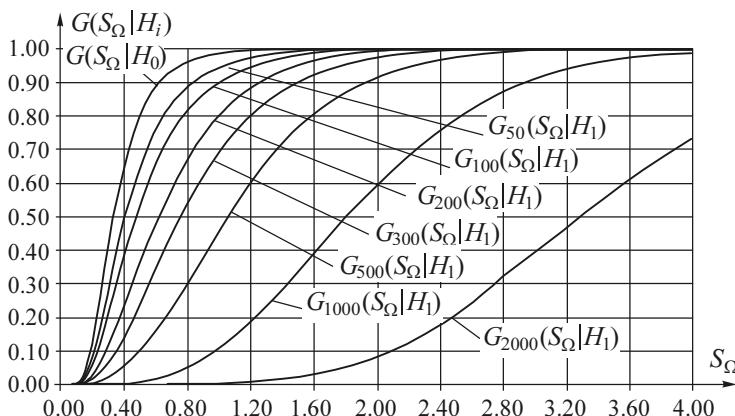


Рис. 4.8. Распределения статистики критерия  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга  $G(S_\Omega | H_0)$  и  $G_n(S_\Omega | H_1)$  при проверке сложной гипотезы  $H_0$  о согласии с нормальным законом в случае использования ОМП при конкурирующей гипотезе  $H_1$ , соответствующей логистическому закону

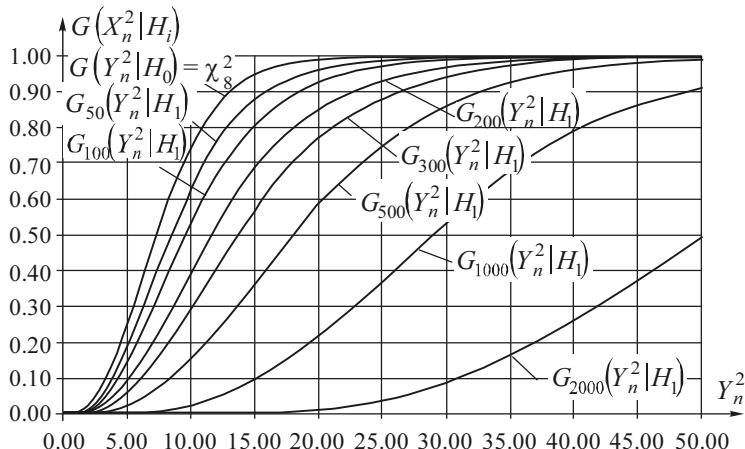


Рис. 4.9. Распределения статистики  $Y_n^2$  Никулина  $G(Y_n^2 | H_0) = \chi_8^2$

и  $G(Y_n^2 | H_1)$  при проверке сложной гипотезы  $H_0$  о согласии с нормальным законом при конкурирующей гипотезе  $H_1$  в случае АОГ при  $k=9$  и вычислении ОМП по негруппированным данным

Необходимо отметить, что распределения  $G(Y_n^2 | H_0)$  статистики  $Y_n^2$  Никулина очень быстро сходятся к соответствующим  $\chi_{k-1}^2$ -распределениям. В качестве примера в табл. 4.5 приведены достигнутые уровни значимости при проверке согласия эмпирических распределений статистики  $Y_n^2$  с  $\chi_{k-1}^2$ -распределениями для  $n=100$  и  $n=500$ , которые свидетельствуют об удовлетворительной степени близости распределений при  $n=100$  и высокой – при  $n=500$ . Гипотезы проверялись по выборкам статистик объемом  $N=10\,000$ .

Существенное отличие от  $\chi_{k-1}^2$ -распределений у статистики Никулина наблюдается лишь при малых объемах выборок и относительно больших количествах интервалов. При малых объемах выборок на распределениях статистики проявляется эффект конечности числа интервалов, что иллюстрирует рис. 4.10, на котором показаны распределения статистики  $G(Y_n^2 | H_0)$  при  $k=9$  и  $k=15$  для  $n=20$  и  $n=100$ .

Таблица 4.5

**Достигнутые уровни значимости при проверке согласия смоделированных распределений статистики  $Y_n^2$  с  $\chi_{k-1}^2$ -распределениями**

Критерий согласия	$k = 9$		$k = 15$	
	$n = 100$	$n = 500$	$n = 100$	$n = 500$
$X_n^2$ Пирсона	0.0180	0.9732	0.1905	0.2037
Колмогорова	0.1817	0.8951	0.4450	0.9480
$\omega^2$ Мизеса	0.1334	0.9755	0.2943	0.8425
$\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга	0.0948	0.9579	0.2974	0.7988

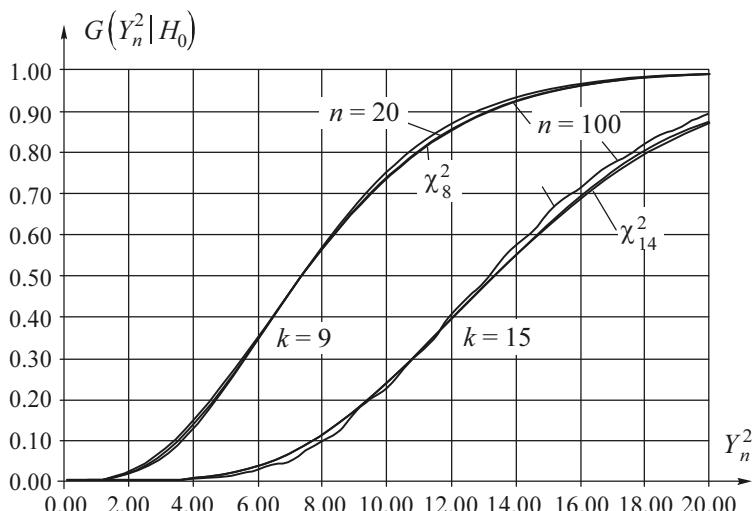


Рис. 4.10. Характер сходимости распределений  $G(Y_n^2 | H_0)$  статистики  $Y_n^2$  Никулина к  $\chi_{k-1}^2$ -распределениям в зависимости от объема выборок и числа равновероятных интервалов

Распределения  $G(X_n^2 | H_0)$  статистики  $X_n^2$  критерия Пирсона при проверке сложных гипотез и использовании ОМП по точечным

(негруппированным) данным зависят от способа группирования и отличаются от  $\chi^2_{k-r-1}$ -распределений. При малых значениях числа интервалов эти различия значительны, а с ростом числа интервалов различие не имеет практического значения. На рис. 4.11 показаны распределения  $G(X_n^2 | H_0)$  статистики при количествах интервалов  $k = 5, 9, 15$  при использовании АОГ и равновероятного группирования (РВГ) при оценивании двух параметров нормального закона и соответствующие  $\chi^2_{k-r-1}$ -распределения. В случае АОГ распределение статистики  $G(X_n^2 | H_0)$  всегда ближе к соответствующему  $\chi^2_{k-r-1}$ -распределению. Например, при  $k = 15$  и использовании АОГ ни один из применяемых критериев уже не отклоняет гипотезу о согласии с  $\chi^2_{12}$ -распределением эмпирического распределения статистики, соответствующего смоделированной выборке статистик объемом  $N = 20\,000$ . В то же время в случае РВГ аналогичная гипотеза отклоняется.

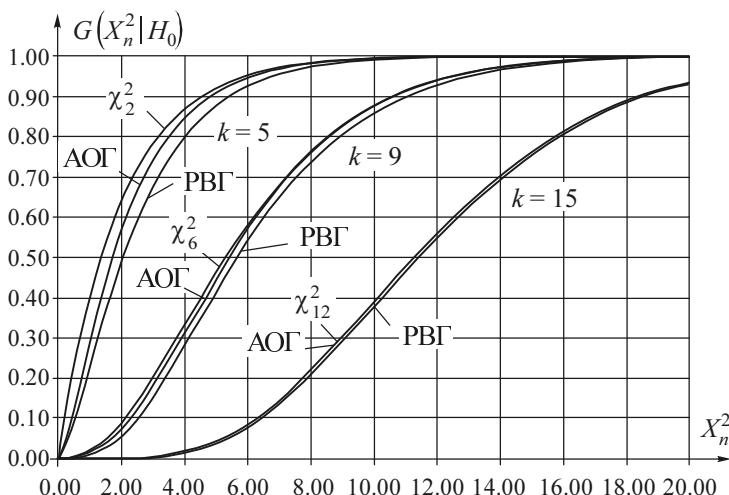


Рис. 4.11. Сходимость распределения статистики  $X_n^2$  Пирсона к  $\chi^2_{k-r-1}$ -распределениям при проверке сложных гипотез и использовании ОМП по негруппированным данным в зависимости от способа группирования

Вычисленные на основании результатов моделирования распределений статистик оценки мощности рассматриваемых критериев согласия для различных значений уровня значимости  $\alpha$  при проверке сложной гипотезы  $H_0$ , соответствующей нормальному закону относительно конкурирующей гипотезы  $H_1$ , соответствующей логистическому закону с параметрами  $(0,1)$ , приведены в табл. 4.6. В этой таблице критерии также упорядочены по убыванию мощности. Следует отметить, что в некоторых случаях предпочтительность неочевидна, так как, обладая большей мощностью при одних уровнях значимости и одних объемах выборок, критерий может проигрывать при других значениях  $\alpha$  и  $n$ .

В табл. 4.6 указана максимальная мощность критериев Никулина и  $X_n^2$  Пирсона (при заданных способах группирования). В табл. 4.7 представлены значения мощности данных критериев при других количествах интервалов при АОГ и РВГ.

Таблица 4.6

**Мощность критериев согласия при проверке сложной гипотезы  $H_0$  (нормальное распределение) против конкурирующей гипотезы  $H_1$  (логистическое)**

$\alpha$	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
Для критерия $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга								
0.15	0.222	0.297	0.400	0.575	0.708	0.873	0.989	1.000
0.1	0.164	0.230	0.324	0.496	0.636	0.828	0.981	1.000
0.05	0.098	0.149	0.224	0.377	0.519	0.741	0.963	1.000
0.025	0.060	0.096	0.152	0.282	0.414	0.649	0.935	0.999
0.01	0.031	0.054	0.091	0.186	0.297	0.525	0.885	0.998
Для критерия типа $\chi^2$ Никулина при $k = 15$ и АОГ								
0.15	0.245	0.320	0.395	0.536	0.646	0.806	0.967	1.000
0.1	0.195	0.249	0.332	0.466	0.579	0.755	0.952	0.999
0.05	0.137	0.165	0.248	0.368	0.480	0.669	0.921	0.998
0.025	0.077	0.112	0.184	0.291	0.395	0.587	0.883	0.996
0.01	0.036	0.071	0.125	0.213	0.304	0.488	0.825	0.992

Окончание табл. 4.6

$\alpha$	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
Для критерия $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова								
0.15	0.210	0.273	0.366	0.529	0.659	0.836	0.980	1.000
0.1	0.153	0.208	0.291	0.447	0.582	0.781	0.968	1.000
0.05	0.090	0.130	0.194	0.329	0.458	0.678	0.939	0.999
0.025	0.053	0.082	0.128	0.237	0.353	0.573	0.897	0.998
0.01	0.027	0.044	0.074	0.150	0.243	0.445	0.825	0.994
Для критерия $\chi^2$ Пирсона при $k = 15$ и АОГ								
0.15	0.243	0.295	0.342	0.467	0.579	0.751	0.950	0.999
0.1	0.194	0.220	0.280	0.393	0.502	0.688	0.928	0.998
0.05	0.140	0.133	0.199	0.291	0.391	0.583	0.882	0.996
0.025	0.081	0.080	0.137	0.214	0.303	0.486	0.827	0.992
0.01	0.036	0.043	0.079	0.139	0.213	0.376	0.745	0.984
Для критерия Колмогорова								
0.15	0.200	0.246	0.313	0.440	0.554	0.732	0.941	0.999
0.1	0.142	0.181	0.236	0.351	0.459	0.646	0.905	0.997
0.05	0.080	0.105	0.143	0.230	0.322	0.502	0.823	0.990
0.025	0.045	0.061	0.086	0.149	0.219	0.376	0.721	0.975
0.01	0.021	0.029	0.043	0.081	0.127	0.244	0.575	0.938

Таблица 4.7

**Мощность критериев согласия Нikuлина и  $\chi^2$  Пирсона при проверке сложной гипотезы  $H_0$  (нормальное распределение) против конкурирующей гипотезы  $H_1$  (логистическое) в зависимости от способа группирования и числа интервалов**

$\alpha$	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
Для критерия типа $\chi^2$ Нikuлина при $k = 9$ и АОГ								
0.15	0.203	0.269	0.339	0.480	0.599	0.774	0.958	0.999
0.1	0.144	0.204	0.271	0.406	0.525	0.714	0.940	0.999
0.05	0.080	0.129	0.186	0.304	0.417	0.617	0.901	0.997
0.025	0.046	0.084	0.129	0.227	0.329	0.525	0.854	0.994
0.01	0.023	0.049	0.081	0.155	0.239	0.419	0.784	0.988

Продолжение табл. 4.7

$\alpha$	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
Для критерия типа $\chi^2$ Никулина при $k = 9$ и РВГ								
0.15	0.200	0.258	0.333	0.477	0.600	0.782	0.964	1.000
0.1	0.143	0.195	0.262	0.399	0.523	0.722	0.947	0.999
0.05	0.081	0.121	0.175	0.292	0.410	0.621	0.910	0.998
0.025	0.047	0.076	0.117	0.213	0.318	0.525	0.865	0.996
0.01	0.023	0.042	0.070	0.140	0.225	0.415	0.796	0.991
Для критерия типа $\chi^2$ Никулина при $k = 15$ и РВГ								
0.15	0.197	0.263	0.328	0.465	0.584	0.765	0.959	0.999
0.1	0.141	0.198	0.259	0.389	0.508	0.705	0.940	0.999
0.05	0.081	0.126	0.174	0.286	0.399	0.604	0.901	0.998
0.025	0.048	0.080	0.119	0.211	0.311	0.512	0.855	0.995
0.01	0.024	0.045	0.072	0.140	0.222	0.404	0.785	0.990
Для критерия типа $\chi^2$ Никулина при $k = 7$ и РВГ								
0.15	0.199	0.256	0.332	0.476	0.598	0.780	0.962	0.999
0.1	0.145	0.193	0.260	0.397	0.522	0.719	0.944	0.999
0.05	0.082	0.120	0.172	0.290	0.407	0.616	0.905	0.997
0.025	0.047	0.075	0.114	0.210	0.314	0.520	0.858	0.995
0.01	0.023	0.041	0.066	0.136	0.219	0.406	0.785	0.989
Для критерия типа $\chi^2$ Никулина при $k = 7$ и АОГ								
0.15	0.189	0.250	0.320	0.457	0.573	0.751	0.948	0.999
0.1	0.136	0.187	0.249	0.380	0.497	0.688	0.926	0.998
0.05	0.077	0.115	0.164	0.276	0.386	0.584	0.880	0.995
0.025	0.042	0.072	0.110	0.201	0.298	0.490	0.826	0.991
0.01	0.018	0.040	0.066	0.133	0.210	0.382	0.746	0.982
Для критерия $\chi^2$ Пирсона при $k = 9$ и АОГ								
0.15	0.197	0.237	0.282	0.404	0.516	0.699	0.930	0.998
0.1	0.136	0.171	0.210	0.323	0.431	0.624	0.898	0.997
0.05	0.071	0.096	0.130	0.219	0.314	0.504	0.834	0.992
0.025	0.038	0.055	0.080	0.146	0.225	0.398	0.760	0.984
0.01	0.017	0.027	0.041	0.085	0.141	0.283	0.654	0.966
Для критерия $\chi^2$ Пирсона при $k = 7$ и АОГ								
0.15	0.178	0.213	0.265	0.382	0.490	0.672	0.913	1.000
0.1	0.124	0.154	0.195	0.299	0.403	0.589	0.874	0.999
0.05	0.067	0.087	0.113	0.195	0.284	0.462	0.797	0.998
0.025	0.038	0.048	0.066	0.126	0.197	0.356	0.711	0.995
0.01	0.016	0.022	0.032	0.069	0.118	0.242	0.593	0.989

Окончание табл. 4.7

$\alpha$	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
Для критерия $\chi^2$ Пирсона при $k = 7$ и РВГ								
0.15	0.169	0.213	0.243	0.335	0.427	0.599	0.873	0.994
0.1	0.129	0.145	0.179	0.251	0.336	0.500	0.813	0.989
0.05	0.073	0.078	0.097	0.153	0.212	0.356	0.696	0.971
0.025	0.032	0.042	0.056	0.091	0.135	0.248	0.577	0.942
0.01	0.014	0.020	0.025	0.045	0.071	0.146	0.426	0.881
Для критерия $\chi^2$ Пирсона при $k = 9$ и РВГ								
0.15	0.171	0.198	0.227	0.309	0.390	0.541	0.828	0.989
0.1	0.127	0.142	0.167	0.232	0.296	0.445	0.757	0.979
0.05	0.068	0.070	0.092	0.136	0.187	0.309	0.629	0.951
0.025	0.037	0.038	0.049	0.079	0.187	0.208	0.502	0.908
0.01	0.013	0.018	0.022	0.039	0.060	0.120	0.358	0.828
Для критерия $\chi^2$ Пирсона при $k = 15$ и РВГ								
0.15	0.144	0.179	0.212	0.267	0.331	0.459	0.736	0.967
0.1	0.097	0.134	0.151	0.197	0.252	0.367	0.653	0.944
0.05	0.064	0.072	0.077	0.116	0.153	0.245	0.517	0.893
0.025	0.028	0.038	0.044	0.065	0.091	0.161	0.396	0.825
0.01	0.012	0.016	0.019	0.031	0.046	0.089	0.268	0.717

Подчеркнем, что, оценивая мощность при проверке сложных гипотез, опирались на смоделированные распределения статистик  $G(S|H_0)$  при объеме выборок  $n = 1000$ . При таких больших  $n$  эмпирическое распределение статистики может считаться хорошей оценкой предельного закона. Так поступали при анализе мощности непараметрических критериев согласия и критерия  $\chi^2$  Пирсона. При оценке мощности критерия со статистикой Нikuлина использовалось его известное предельное  $\chi_{k-1}^2$ -распределение.

Модели распределений, являющиеся приближением предельных распределений  $G(S|H_0)$  статистик критериев при проверке сложной гипотезы  $H_0$  относительно нормального распределения, приводятся в табл. 4.8, а процентных точек – в табл. 4.9. В таблицы не включен критерий Нikuлина, предельными распределениями которого являются  $\chi_{k-1}^2$ -распределения.

В табл. 4.8 через  $B_{III}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$  обозначено бета-распределение третьего рода с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 B(\theta_0, \theta_1)} \frac{\left(\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0-1} \left(1 - \frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1-1}}{\left[1 + (\theta_2-1)\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0+\theta_1}},$$

а через  $\gamma(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$  – гамма-распределение с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1^{\theta_0} \Gamma(\theta_0)} (x-\theta_2)^{\theta_0-1} e^{-(x-\theta_2)/\theta_1}.$$

Таблица 4.8

**Модели распределений статистик критериев при проверке сложных гипотез о согласии с нормальным распределением и при одновременном оценивании двух параметров методом максимального правдоподобия**

№ п/п	Критерий	Модель распределения статистики критерия
1	$\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга	$G(S_\Omega   H_0) = B_{III}(4.7262; 4.6575; 9.4958; 2.717; 0.0775)$
2	$\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова	$G(S_\omega   H_0) = B_{III}(4.1153; 4.1748; 11.035; 0.5116; 0.009)$
3	Колмогорова	$G(S_K   H_0) = \gamma(6.4721; 0.0580; 0.2620)$
4	$\chi^2$ Пирсона при $k = 9$ и АОГ	$G(X_n^2   H_0) = \gamma(3.1121; 1.9551; 0.0422)$
5	$\chi^2$ Пирсона при $k = 9$ и РВГ	$G(X_n^2   H_0) = \gamma(3.2465; 1.9313; 0.0980)$
6	$\chi^2$ Пирсона при $k = 15$ и АОГ	$G(X_n^2   H_0) = \gamma(5.3451; 2.1221; 0.7022)$
7	$\chi^2$ Пирсона при $k = 15$ и РВГ	$G(X_n^2   H_0) = \gamma(5.7292; 2.9454; 0.5000)$

Таблица 4.9

**Процентные точки распределений статистик критериев при проверке сложных гипотез о согласии с нормальным распределением и при одновременном оценивании двух параметров методом максимального правдоподобия**

Критерий	$\alpha$				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга	0.559	0.630	0.751	0.872	1.035
$\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова	0.090	0.103	0.126	0.148	0.178
Колмогорова	0.789	0.836	0.909	0.976	1.056
$\chi^2$ Пирсона при $k = 9$ и АОГ	9.567	10.760	12.698	14.559	16.936
$\chi^2$ Пирсона при $k = 9$ и РВГ	9.836	11.042	12.986	14.858	17.216
$\chi^2$ Пирсона при $k = 15$ и АОГ	16.989	18.549	21.035	23.390	26.369
$\chi^2$ Пирсона при $k = 15$ и РВГ	17.210	18.770	21.230	23.540	26.420

Косвенно о точности моделирования эмпирических распределений статистик можно судить, например, по практическому совпадению полученных процентных точек для статистики  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова с соответствующими значениями этого распределения, табулированными для нормального закона в [281].

В случае проверки сложных гипотез и объемов выборок  $n = 20$  и  $n = 50$  для всех исследуемых критериев распределения  $G(S_{20}|H_0)$  и  $G(S_{50}|H_0)$  существенно отличаются от «предельного»  $G(S_n|H_0)$  при  $n = 1000$  и от  $\chi_{k-1}^2$ -распределения для статистики Никиулина. Поэтому мощность оценивалась по смоделированным парам распределений вида  $G(S_{20}|H_0)$ ,  $G(S_{20}|H_1)$  и  $G(S_{50}|H_0)$ ,  $G(S_{50}|H_1)$ .

Критерий Никиулина применяется при проверке сложных гипотез. Для него при РВГ для этой пары альтернатив мощность оказывается максимальной при некотором оптимальном числе интервалов  $k$ , зависящем от объема выборки  $n$  [269]. Аналогично при АОГ. Однако в последнем случае оптимальное число интервалов  $k$  смешено в область больших значений. В случае данной пары конкурирующих гипотез при больших значениях  $k$  предпочтительнее оказывается использование АОГ, а при меньших (см. при  $k = 7$ ) – использование РВГ.

Мощность критериев согласия при малых объемах выборок  $n$  можно сравнить с мощностью критериев, построенных специально для проверки отклонения распределения от нормального закона: с мощностью критериев Шапиро–Уилка, Эпписа–Палли и критерия Д’Агостино со статистикой  $z_2$ . Оценки мощности данных критериев нормальности, полученные в [231] и уточненные здесь при объемах моделируемых выборок статистик  $N = 10^6$ , приведены в табл. 4.10.

Таблица 4.10

**Мощность критериев проверки отклонения распределения от нормального закона (Шапиро–Уилка, Эпписа–Палли и Д’Агостино со статистикой  $z_2$ ) относительно альтернативы  $H_1$  (логистический закон)**

$\alpha$	Шапиро–Уилка		Эпписа–Палли		Д’Агостино $z_2$	
	$n = 20$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 50$
0.1	0.181	0.202	0.178	0.249	0.189	0.327
0.05	0.117	0.141	0.111	0.165	0.111	0.223
0.01	0.044	0.067	0.037	0.062	0.032	0.089

Как видим, «специальные» критерии относительно рассматриваемой пары конкурирующих гипотез в среднем оказываются несколько мощнее.

## 4.8. Мощности критериев в случае проверки сложных гипотез и пары конкурирующих гипотез «распределение Вейбулла – гамма-распределение»

Вычисленные оценки мощности критериев для различных значений уровня значимости  $\alpha$  при проверке сложной гипотезы  $H_0$  о согласии эмпирического распределения с распределением Вейбулла, когда по выборке находились ОМП параметров  $\theta_0$  и  $\theta_1$  этого закона при известном параметре  $\theta_2 = 0$ , относительно конкурирующей гипотезы  $H_1$ , соответствующей гамма-распределению с параметрами

$\theta_0 = 3.12154$ ,  $\theta_1 = 0.557706$ ,  $\theta_2 = 0$ , приведены в табл. 4.11 и 4.12. Критерии в таблицах упорядочены по убыванию мощности.

Таблица 4.11

**Мощность критериев согласия при проверке сложной гипотезы  $H_0$  (распределение Вейбулла 2, 2, 0) относительно конкурирующей гипотезы  $H_1$  (гамма-распределение с параметрами 3.12154, 0.557706, 0)**

$\alpha$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
Для критерия $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга						
0.15	0.435	0.667	0.817	0.952	0.999	1.000
0.1	0.353	0.589	0.757	0.928	0.998	1.000
0.05	0.244	0.466	0.650	0.876	0.995	1.000
0.025	0.167	0.361	0.547	0.811	0.990	1.000
0.01	0.100	0.252	0.424	0.715	0.977	1.000
Для критерия $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова						
0.15	0.396	0.603	0.750	0.913	0.996	1.000
0.1	0.316	0.520	0.679	0.875	0.993	1.000
0.05	0.212	0.394	0.560	0.797	0.984	1.000
0.025	0.143	0.295	0.452	0.712	0.968	1.000
0.01	0.082	0.196	0.330	0.593	0.936	1.000
Для критерия $\chi^2$ Нikuлина при $k = 9$ и АОГ						
0.15	0.324	0.511	0.665	0.869	0.993	1.000
0.1	0.246	0.423	0.584	0.818	0.987	1.000
0.05	0.153	0.299	0.454	0.720	0.973	1.000
0.025	0.096	0.209	0.347	0.619	0.951	1.000
0.01	0.051	0.129	0.238	0.492	0.909	0.999
Для критерия $\chi^2$ Пирсона при $k = 9$ и АОГ						
0.15	0.347	0.525	0.678	0.868	0.992	1.000
0.1	0.273	0.439	0.596	0.818	0.986	1.000
0.05	0.172	0.311	0.463	0.719	0.970	1.000
0.025	0.104	0.218	0.352	0.617	0.946	1.000
0.01	0.053	0.133	0.237	0.483	0.898	0.999
Для критерия Колмогорова						
0.15	0.340	0.510	0.646	0.830	0.981	1.000
0.1	0.262	0.420	0.558	0.762	0.965	1.000
0.05	0.164	0.293	0.420	0.640	0.925	0.999
0.025	0.101	0.200	0.306	0.519	0.867	0.997
0.01	0.052	0.115	0.193	0.375	0.763	0.988

Таблица 4.12

**Мощность критериев согласия Никулина и  $\chi^2$  Пирсона при проверке сложной гипотезы  $H_0$  (распределение Вейбулла 2, 2, 0) относительно конкурирующей гипотезы  $H_1$  (гамма-распределение с параметрами 3.12154, 0.557706, 0) в зависимости от способа группирования и числа интервалов**

$\alpha$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
Для критерия $\chi^2$ Никулина при $k = 15$ и АОГ						
0.15	0.365	0.487	0.634	0.828	0.986	1.000
0.1	0.291	0.406	0.558	0.770	0.976	1.000
0.05	0.195	0.302	0.443	0.666	0.952	1.000
0.025	0.131	0.230	0.348	0.569	0.919	1.000
0.01	0.078	0.165	0.250	0.455	0.862	0.999
Для критерия $\chi^2$ Пирсона при $k = 15$ и АОГ						
0.15	0.385	0.491	0.637	0.839	0.988	1.000
0.1	0.305	0.405	0.559	0.780	0.980	1.000
0.05	0.196	0.293	0.442	0.676	0.959	1.000
0.025	0.124	0.218	0.344	0.574	0.928	1.000
0.01	0.065	0.151	0.234	0.448	0.868	0.999
Для критерия $\chi^2$ Никулина при $k = 9$ и РВГ						
0.15	0.295	0.455	0.599	0.806	0.981	1.000
0.1	0.220	0.367	0.509	0.740	0.968	1.000
0.05	0.133	0.250	0.378	0.624	0.938	1.000
0.025	0.080	0.167	0.276	0.512	0.894	0.999
0.01	0.040	0.097	0.176	0.380	0.822	0.997
Для критерия $\chi^2$ Никулина при $k = 15$ и РВГ						
0.15	0.273	0.421	0.558	0.774	0.975	1.000
0.1	0.202	0.335	0.468	0.702	0.960	1.000
0.05	0.120	0.224	0.341	0.582	0.923	1.000
0.025	0.071	0.147	0.244	0.469	0.874	0.999
0.01	0.036	0.085	0.153	0.343	0.796	0.997
Для критерия $\chi^2$ Пирсона при $k = 9$ и РВГ						
0.15	0.259	0.361	0.465	0.639	0.896	0.996
0.1	0.187	0.282	0.376	0.552	0.851	0.992
0.05	0.114	0.181	0.257	0.421	0.764	0.982
0.025	0.062	0.113	0.170	0.310	0.664	0.964
0.01	0.028	0.057	0.096	0.198	0.529	0.926

Окончание табл. 4.12

$\alpha$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
Для критерия $\chi^2$ Пирсона при $k = 15$ и РВГ						
0.15	0.252	0.348	0.454	0.638	0.910	0.998
0.1	0.179	0.268	0.364	0.553	0.869	0.996
0.05	0.099	0.165	0.244	0.415	0.784	0.990
0.025	0.053	0.102	0.158	0.303	0.688	0.978
0.01	0.026	0.052	0.089	0.196	0.559	0.955

Модели распределений, являющиеся приближением предельных распределений  $G(S|H_0)$  статистик критериев при проверке сложной гипотезы  $H_0$  относительно распределения Вейбулла, приводятся в табл. 4.13, а процентные точки – в табл. 4.14. В таблицы не включен критерий Никулина, для которого предельное распределение известно.

Таблица 4.13

**Модели распределений статистик критериев при проверке сложных гипотез о согласии с распределением Вейбулла и при одновременном оценивании параметров формы и масштаба методом максимального правдоподобия**

№ п/п	Критерий	Модель распределения статистики критерия
1	$\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга	$G(S_\Omega H_0) = \text{Sl}(1.4612; 2.0543; 0.6704; 0.0165)$
2	$\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова	$G(S_\omega H_0) = \ln N(-2.9747; 0.5320)$
3	Колмогорова	$G(S_K H_0) = \gamma(7.2210; 0.0535; 0.245)$
4	$\chi^2$ Пирсона при $k = 9$ и АОГ	$G(X_n^2 H_0) = \gamma(3.1809; 1.9248; 0)$
5	$\chi^2$ Пирсона при $k = 9$ и РВГ	$G(X_n^2 H_0) = \gamma(3.3897; 1.8906; 0)$
6	$\chi^2$ Пирсона при $k = 15$ и АОГ	$G(X_n^2 H_0) = \gamma(5.5355; 2.0817; 0.51)$
7	$\chi^2$ Пирсона при $k = 15$ и РВГ	$G(X_n^2 H_0) = \gamma(5.3077; 2.1504; 0.86)$

В табл. 4.13 через  $\ln N(\theta_0, \theta_1)$  обозначено логарифмически нормальное распределение с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{x\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x - \theta_1)^2/2\theta_0^2}.$$

Таблица 4.14

**Процентные точки распределений статистик критериев при проверке сложных гипотез о согласии с распределением Вейбулла и при одновременном оценивании параметров формы и масштаба методом максимального правдоподобия**

Критерий	$\alpha$				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга	0.563	0.635	0.757	0.879	1.036
$\omega^2$ Крамера–Мизесса–Смирнова	0.089	0.102	0.124	0.145	0.174
Колмогорова	0.780	0.824	0.894	0.957	1.036
$\chi^2$ Пирсона при $k = 9$ и АОГ	9.563	10.735	12.688	14.521	16.905
$\chi^2$ Пирсона при $k = 9$ и РВГ	9.890	11.096	13.004	14.912	17.378
$\chi^2$ Пирсона при $k = 15$ и АОГ	17.004	18.560	21.037	23.358	26.438
$\chi^2$ Пирсона при $k = 15$ и РВГ	17.270	18.800	21.290	23.630	26.480

Автор работы [174], опираясь в том числе на результаты наших более ранних исследований [266], сделал излишне резкий вывод, суть которого заключается в том, что рекомендации по применению АОГ в критериях типа  $\chi^2$  едва ли можно считать состоятельными. В этой связи следует отметить, что и в [266], и в [270] мы подчеркивали безоговорочно положительный эффект АОГ в случае близких альтернатив для критериев  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия, но этого не говорилось относительно критерия Никулина. Более того, результаты и выводы, содержащиеся там, говорили о некотором преимуществе РВГ. Результаты данных исследований подчеркивают более сложный характер зависимости мощности критерия Никулина (критериев Рао–Робсона–Никулина) от числа интервалов и способа группирования и в некоторых случаях показывают положительный эффект от АОГ.

## 4.9. Замечания о максимизации мощности критерия $\chi^2$ Пирсона

В случае векторного параметра закона, как было сказано в разделе 2.6, в задаче асимптотически оптимального группирования в качестве критериев оптимальности могут быть выбраны различные функционалы от информационной матрицы Фишера  $\mathbf{J}_\Gamma(\theta)$ . При построении таблиц асимптотически оптимального группирования [219, 188, 187, 242, 217, 30, 191, 31, 190, 301], как правило, опирались на критерий  $D$ -оптимальности (2.19), при котором максимизировался определитель информационной матрицы

$$\max_{x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k} \det \mathbf{J}_\Gamma(\theta). \quad (4.6)$$

В этом случае минимизируется обобщенная дисперсия оценки вектора параметров по группированным данным  $\det \mathbf{D}_\Gamma(\theta)$ , где  $\mathbf{D}_\Gamma(\theta)$  – дисперсионная матрица оценки вектора параметров. Однако не факт, что данный критерий оптимальности является наилучшим с позиций максимизации мощности критериев типа  $\chi^2$  относительно близких конкурирующих гипотез.

В случае критерия  $A$ -оптимальности по граничным точкам интервалов максимизируется след информационной матрицы  $\mathbf{J}_\Gamma(\theta)$

$$\max_{x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k} \text{Sp} \mathbf{J}_\Gamma(\theta), \quad (4.7)$$

а в случае  $E$ -оптимальности – минимальное собственное число этой матрицы

$$\max_{x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k} \min_{i=1,r} \lambda_i(\mathbf{J}_\Gamma(\theta)). \quad (4.8)$$

Какой из критериев оптимальности является наилучшим, можно указать, только исследовав мощность критериев относительно близких альтернатив.

Задача асимптотически оптимального группирования по критериям  $A$ - и  $E$ -оптимальности была решена для некоторых законов распреде-

ления, и таблицы для  $A$ -оптимального группирования приведены в приложении А.

Варианты асимптотически оптимального группирования максими- зируют мощность относительно множества близких конкурирующих гипотез. Однако это не означает, что они гарантируют наибольшую мощность относительно заданной конкурирующей гипотезы. Если конкурирующая гипотеза задана, можно задаться целью построить критерий типа  $\chi^2$ , обладающий максимальной мощностью при проверке гипотезы  $H_0$  относительно конкурирующей гипотезы  $H_1$ . В случае критерия  $\chi^2$  Пирсона с этой целью можно максимизировать параметр нецентральности, задаваемый соотношением (2.3), т. е. решить задачу

$$\max_{x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1}} v = \max_{x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1}} \left( n \sum_{i=1}^k \frac{(P_i(\theta_1) - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)} \right) \quad (4.9)$$

при заданном числе интервалов  $k$ .

Асимптотически оптимальные граничные точки интервалов, соот- ветствующие различным критериям оптимальности, существенно раз- личаются. Отличаются они и от оптимального разбиения, соотвествующего (4.9). Для примера в табл. 4.15 представлены решения задач (4.6)–(4.9) для пары гипотез

$$H_0 : f(x) = \frac{1}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \theta_1)^2}{2\theta_0^2} \right\},$$

$\theta_0 = 1$ ,  $\theta_1 = 0$  (нормальный закон) и

$$H_1 : f(x) = \frac{\pi}{\theta_0 \sqrt{3}} \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_1)}{\theta_0 \sqrt{3}} \right\} \Bigg/ \left[ 1 + \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_1)}{\theta_0 \sqrt{3}} \right\} \right]^2,$$

$\theta_0 = 1$ ,  $\theta_1 = 0$  (логистический закон) для числа интервалов  $k = 9$ .

Таблица 4.15

Оптимальные граничные точки интервалов при  $k = 9$ 

Критерий оптимальности	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
$A$ -оптимальный	-2.3758	-1.6915	-1.1047	-0.4667	0.4667	1.1047	1.6915	2.3758
$D$ -оптимальный	-2.3188	-1.6218	-1.0223	-0.3828	0.3828	1.0223	1.6218	2.3188
$E$ -оптимальный	-1.8638	-1.1965	-0.6805	-0.2216	0.2216	0.6805	1.1965	1.8638
Оптимальный	-3.1616	-2.0856	-1.2676	-0.4601	0.4601	1.2676	2.0856	3.1616

Рис. 4.12–4.14 иллюстрируют распределения  $G(X_n^2 | H_1)$  статистики критерия  $\chi^2$  Пирсона в зависимости от способа группирования при объеме выборок  $n = 100, 500, 1000$  для случая проверки простой гипотезы. Рисунки отражают общую закономерность:  $E$ -оптимальное группирование наименее предпочтительно;  $A$ -оптимальное группирование, как правило, обладает некоторым, весьма незначительным, преимуществом перед  $D$ -оптимальным; все три способа асимптотически оптимального группирования существенно уступают оптимальному (4.9).

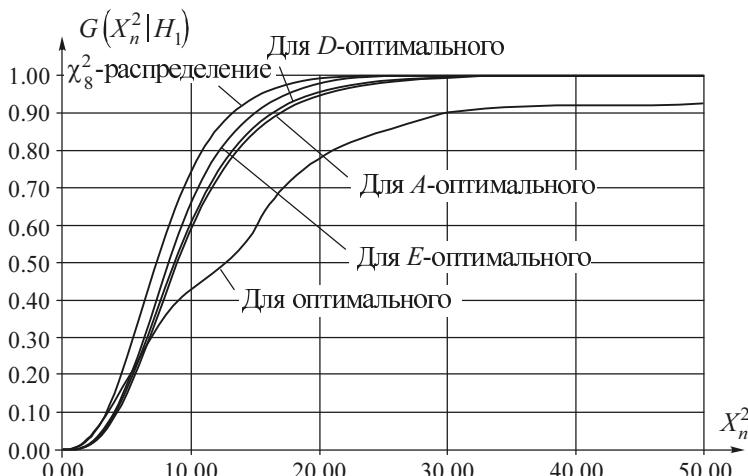


Рис. 4.12. Распределения статистики  $X_n^2$  Пирсона при проверке простой гипотезы  $H_0$  в случае справедливости  $H_1$  в зависимости от критерия оптимальности при числе интервалов  $k = 9$  и  $n = 100$

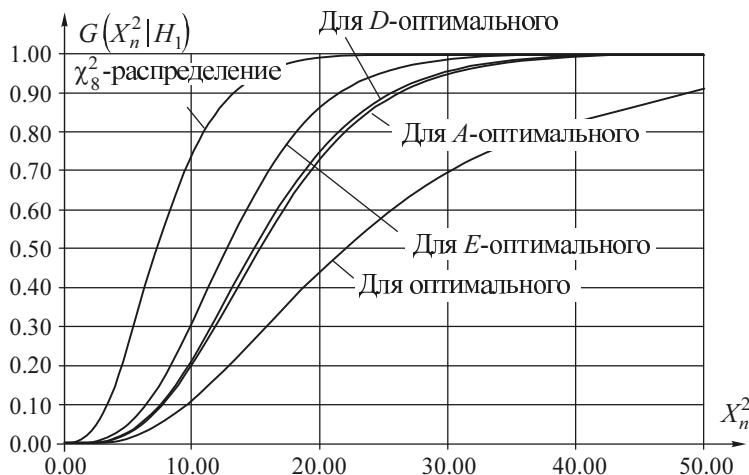


Рис. 4.13. Распределения статистики  $X_n^2$  Пирсона при проверке простой гипотезы  $H_0$  в случае справедливости  $H_1$  в зависимости от критерия оптимальности при числе интервалов  $k = 9$  и  $n = 500$

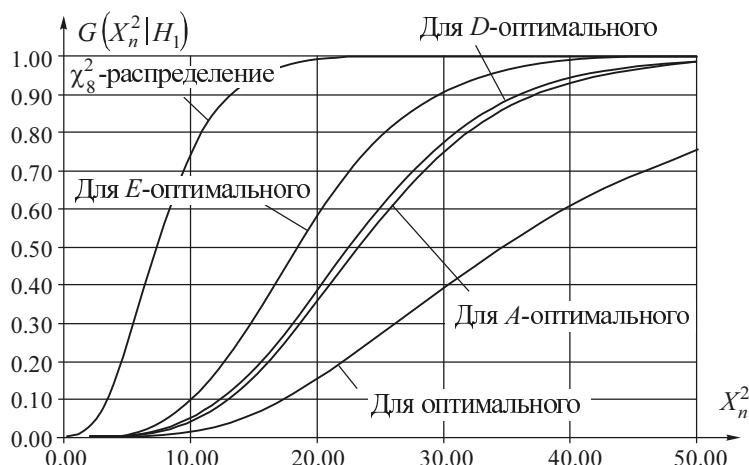


Рис. 4.14. Распределения статистики  $X_n^2$  Пирсона при проверке простой гипотезы  $H_0$  в случае справедливости  $H_1$  в зависимости от критерия оптимальности при числе интервалов  $k = 9$  и  $n = 1000$

В [52] для повышения мощности критериев типа  $\chi^2$  относительно пары конкурирующих гипотез предложено использовать интервалы, названные интервалами Неймана–Пирсона. В этом случае область разбивается на интервалы двух типов в соответствии с неравенствами  $f_1(x) < f_2(x)$  и  $f_1(x) > f_2(x)$ , где  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  – плотности распределений, соответствующих конкурирующим гипотезам. При этом интервалы одного типа предлагается объединить в один. Так что получается всего два «объединенных» интервала, и при справедливости простой проверяемой гипотезы статистика будет подчиняться  $\chi^2_1$ -распределению.

Для наших гипотез  $H_0$  и  $H_1$  имеем интервалы первого типа

$$(-\infty; -2.37474), (-0.682756; 0.682756), (2.37474; \infty),$$

интервалы второго типа –

$$(-2.37474; -0.682756), (0.682756; 2.37474).$$

На рис. 4.15 и 4.16 показаны распределения  $G(X_n^2 | H_1)$  статистики критерия  $\chi^2$  Пирсона при объединении имеющихся пяти интервалов Неймана–Пирсона в два «объединенных» при объемах выборок  $n = 100, 500, 1000$  для случая проверки простой (рис. 4.15) и сложной (рис. 4.16) гипотез.

В табл. 4.16 для сравнения приведены значения мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона относительно рассматриваемых гипотез  $H_0$  и  $H_1$  в случае проверки простой и сложной гипотез при заданной вероятности ошибки первого рода  $\alpha = 0.1$  для различных вариантов группирования: АОГ ( $D$ -оптимальное), РВГ, при интервалах Неймана–Пирсона (Н–П) с объединением и без, оптимальное.

В случае задания конкурирующей гипотезы использование интервалов Неймана–Пирсона в целом можно считать оправданным. Конечно, это не значит, что при числе интервалов  $k$  том же, что и число интервалов Неймана–Пирсона для пары конкурирующих законов, мощность в случае интервалов Неймана–Пирсона максимальна.

Объединение интервалов двух типов в два интервала оказывается также не всегда оправданным: в одних случаях объединение приводит к снижению мощности, как в данном примере (см. табл. 4.16); в других – к увеличению.

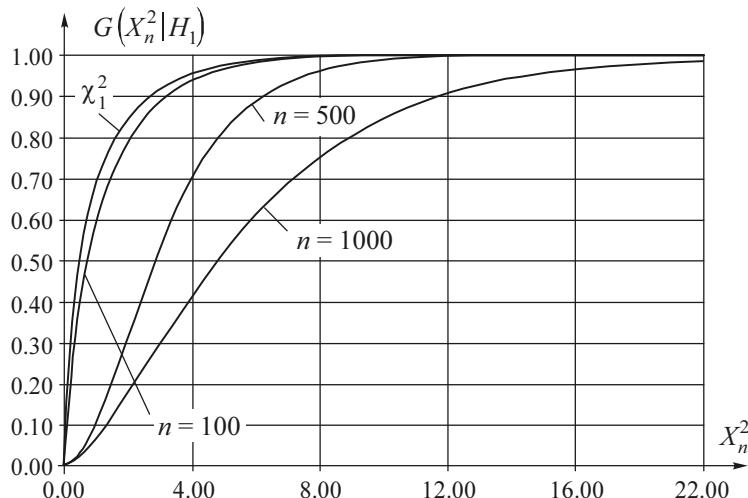


Рис. 4.15. Распределения статистики  $X_n^2$  при проверке простой гипотезы  $H_0$  в случае справедливости  $H_1$  при интервалах Неймана–Пирсона (с объединением в два интервала)

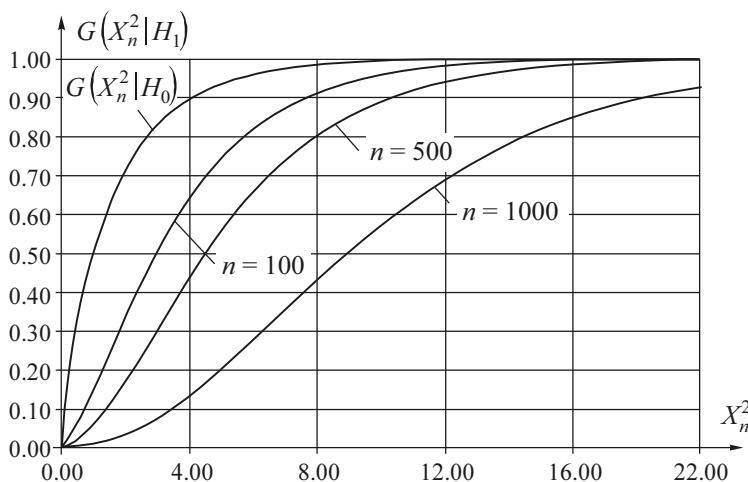


Рис. 4.16. Распределения статистики  $X_n^2$  при проверке сложной гипотезы  $H_0$  в случае справедливости  $H_1$  при интервалах Неймана–Пирсона (с объединением в два интервала)

Таблица 4.16

**Мощность критерия  $\chi^2$  Пирсона при различных вариантах группирования**

Способ группирования	При простой гипотезе			При сложной гипотезе		
	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$
АОГ, $k = 15$	0.290	0.671	0.922	0.280	0.688	0.928
АОГ, $k = 9$	0.204	0.589	0.880	0.249	0.624	0.898
РВГ, $k = 9$	0.152	0.392	0.673	0.167	0.445	0.757
Н–П, $k = 5$	0.273	0.703	0.935	0.308	0.774	0.964
Н–П, $k = 2$	0.135	0.523	0.737	0.188	0.543	0.860
Оптимальное, $k = 9$	0.482	0.786	0.964	0.377	0.815	0.972

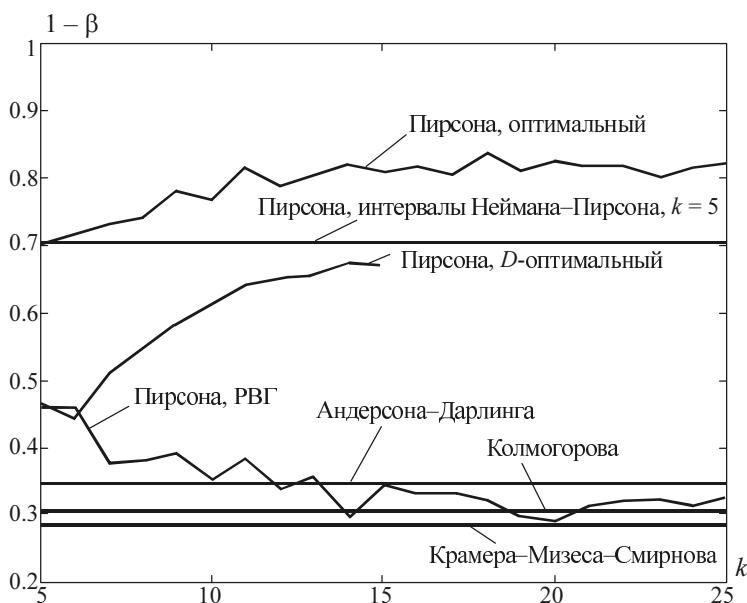


Рис. 4.17. Мощность критериев согласия при проверке простой гипотезы  $H_0$  (нормальное распределение) относительно конкурирующей гипотезы  $H_1$  (логистическое распределение),  $\alpha = 0.1$ ,  $n = 500$ . Мощность критерия  $\chi^2$  Пирсона в зависимости от числа интервалов  $k$

На рис. 4.17 и 4.18 приведены мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона в зависимости от числа интервалов  $k$  относительно рассматриваемых гипотез  $H_0$  и  $H_1$  при различных вариантах группирования. Для сравнения здесь же представлены значения мощности непараметрических критериев согласия.

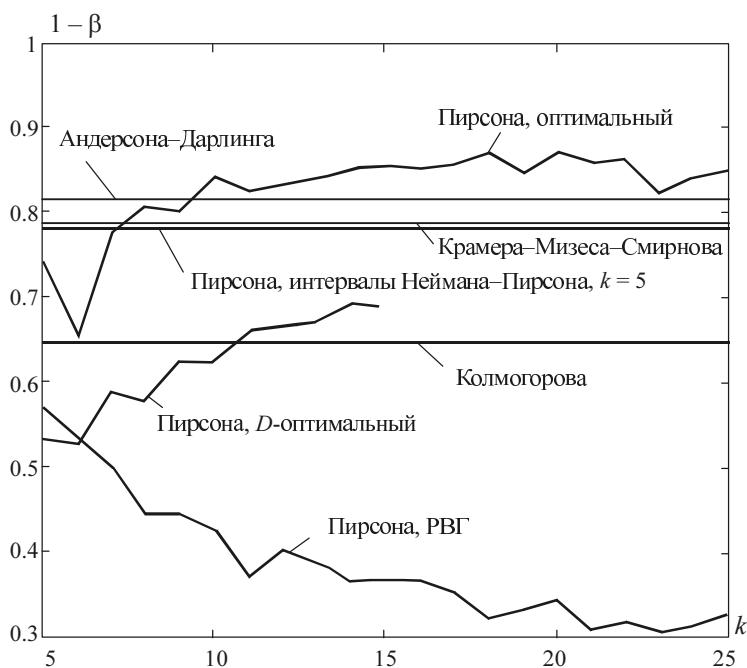


Рис. 4.18. Мощность критериев согласия при проверке сложной гипотезы  $H_0$  (нормальное распределение) относительно конкурирующей гипотезы  $H_1$  (логистическое распределение),  $\alpha = 0.1$ ,  $n = 500$ . Мощность критерия  $\chi^2$  Пирсона в зависимости от числа интервалов  $k$

Рис. 4.17 и 4.18 наглядно иллюстрируют два очевидных факта. При проверке простых гипотез использование асимптотически оптимального группирования обеспечивает неоспоримое преимущество в мощности относительно близких конкурирующих гипотез критерия  $\chi^2$ .

Пирсона. При проверке сложных гипотез преимущество в мощности оказывается за непараметрическими критериями согласия, мощность которых в этом случае существенно возрастает.

## 4.10. Выводы

Объединяя результаты исследований мощности критериев согласия при проверке простых и сложных гипотез, можно подвести следующие итоги. Для случая проверки простых гипотез рассмотренные критерии можно расположить по мощности следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi^2 \text{ Пирсона (AOГ)} &\succ \Omega^2 \text{ Андерсона–Дарлинга} \succ \\ &\succ \omega^2 \text{ Мизеса} \succ = \text{Колмогорова.} \end{aligned}$$

Такая шкала справедлива при использовании в критерии  $\chi^2$  Пирсона АОГ, при котором минимизируются потери в информации Фишера. В случае близких конкурирующих гипотез преимущество в мощности критерия  $\chi^2$  Пирсона может быть существенным.

При проверке сложных гипотез порядок предпочтения оказывается существенно иным:

$$\begin{aligned} \Omega^2 \text{ Андерсона–Дарлинга} &\succ \omega^2 \text{ Мизеса} \succ Y_n^2 \text{ (AOГ)} \succ \\ &\succ \chi^2 \text{ Пирсона (AOГ)} \succ \text{Колмогорова.} \end{aligned}$$

При очень близких гипотезах может быть:

$$\begin{aligned} \Omega^2 \text{ Андерсона–Дарлинга} &\succ Y_n^2 \text{ (AOГ)} \succ \omega^2 \text{ Мизеса} \succ \\ &\succ \chi^2 \text{ Пирсона (AOГ)} \succ \text{Колмогорова.} \end{aligned}$$

Указанные выводы носят интегрированный характер. Такое упорядочение не является жестким. Иногда критерий имеет преимущество по мощности при одних значениях  $\alpha$  и объемах выборок  $n$  и уступает при других значениях  $\alpha$  и  $n$ .

Внимательный читатель заметит, что мощность непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез оказывается существенно выше мощности тех же критериев, которую они имеют при проверке простых (относительно тех же альтернатив). Это в случае использования ОМП. Но если оценки параметров находить в результате минимизации самих статистик критериев (находить *MD*-оценки), то никакого роста мощности по сравнению с проверкой простых гипотез нет [256].

Следует заметить, что мощность критерия  $\chi^2$  Пирсона при переходе от проверки простых гипотез к проверке сложных не возрастает.

Не следует забывать, что мощность критериев типа  $\chi^2$  (Пирсона и Никулина) зависит не только от гипотез  $H_0$ ,  $H_1$  и объема выборок  $n$ , но при заданных гипотезах  $H_0$  и  $H_1$  – от способа группирования и числа интервалов. Число интервалов, при котором мощность критериев для пары  $H_0$  и  $H_1$  максимальна, зависит от этих гипотез и от способа группирования. Увеличение числа интервалов не всегда приводит к росту мощности критериев типа  $\chi^2$  [269].

При близких гипотезах  $H_0$  и  $H_1$  при использовании критерия  $\chi^2$  Пирсона выбор АОГ дает положительный эффект как при простых, так и при сложных гипотезах. Однако это не означает, что применение АОГ всегда гарантирует максимальную мощность данного критерия. При конкретных и не очень близких гипотезах оптимальным может оказаться некоторый другой способ группирования, который может быть найден в результате максимизации мощности критерия.

Вывод о безоговорочно положительном эффекте применения АОГ нельзя распространять на критерий Никулина: при одной и той же паре гипотез  $H_0$  и  $H_1$  при одном числе интервалов  $k$  критерий оказывается более мощным при АОГ, при другом  $k$  – более мощным при РВГ. Зависимость мощности от способа группирования оказывается более сложной и требует исследования.

В данной работе мы не рассматривали другие модифицированные критерии типа  $\chi^2$ , в частности критерий Джапаридзе–Никулина [192, 37], относительно которого можно предположить, что он обладает

мощностью того же порядка, что и критерий Никулина. Следует отметить, что интерес к модифицированным критериям типа  $\chi^2$  в последнее время возрастаёт [143]. Это связано не только с тем, что известны асимптотические распределения статистик критериев, но и с тем, что идеи, лежащие в основе построения статистик, позволяют строить соответствующие критерии для широкого круга задач, где применение других критериев невозможно [8, 50]. Кроме того, критерии типа  $\chi^2$  в случае необходимости всегда можно настроить так, чтобы они наилучшим образом различали заданную пару конкурирующих гипотез  $H_0$  и  $H_1$ , подбирая разбиение на интервалы и число интервалов.

---

---

## **5. КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОТКЛОНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА**

---

---

### **5.1. Введение**

**П**ринадлежность наблюдаемых данных нормальному закону является необходимой предпосылкой для корректного применения большинства классических методов математической статистики, используемых в задачах обработки измерений, стандартизации и контроля качества. Поэтому проверка на отклонение от нормального закона является частой процедурой в ходе проведения измерений, контроля и испытаний.

Отечественный стандарт ГОСТ Р ИСО 5479–2002 «Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения» [176], введенный в действие в 2002 г., представляет собой аутентичный текст международного стандарта ISO 5479–97. В стандарте рассматриваются графический метод проверки на нормальность с использованием вероятностной бумаги, критерии проверки на симметричность и на значение эксцесса, статистики которых представляют собой функции от оценок моментов закона распределения, критерии Шапиро–Уилка, основанные на регрессионном анализе порядковых статистик, критерий Эпсса–Палли, статистика которого измеряет некоторое расстояние между выборочной характеристической функцией и характеристической функцией нормального закона.

На наш взгляд, введенный стандарт [176] не позволяет его пользователям ориентироваться в том, какой из критериев предпочтительней, какой из них оказывается наиболее мощным, против каких конкурирующих гипотез и при каких объемах выборок конкретный критерий обладает преимуществом или наоборот.

В стандарте отказываются от использования критериев типа  $\chi^2$  и не упоминается применение для проверки нормальности непараметрических критериев согласия.

В отечественной литературе можно найти много примеров, связанных с проверкой отклонений от нормального закона, но исследованию специальных критериев, предназначенных для этих целей, уделено достаточно мало внимания [201, 163]. Напротив, в зарубежных источниках исследованию критериев проверки отклонений от нормальности посвящено значительное число работ. Уделено внимание и анализу мощности критериев при проверке отклонений от нормального закона по отношению к различным альтернативам [128, 122]. Подчеркивается, что критерии согласия при малых объемах выборок проигрывают по мощности специальным критериям проверки на отклонение от нормальности [128] и предпочтение, как правило, отдается критерию Шапиро–Уилка. В то же время не складывается полной картины того, когда и каким критерием целесообразней пользоваться при проверке отклонений распределения от нормального.

Все сказанное не позволяет заинтересованным специалистам точно знать, насколько обоснован выбор критериев в стандарте, каковы их достоинства и недостатки, какова их мощность, как меняются распределения статистик критериев с ростом объемов выборок. Всегда ли, например, критерии Шапиро–Уилка и Эпса–Палли по мощности оказываются предпочтительнее?

После выхода стандарта [176] в работе [231] был проведен сравнительный анализ ряда статистических критериев, предназначенных для проверки отклонения эмпирических распределений от нормального закона, в ходе которого была проанализирована мощность и выявлены недостатки отдельных критериев, ранее не упоминаемые в литературе. Исследования, проведенные в [231], показали, что популярные критерии Шапиро–Уилка и Эпса–Палли, рекомендуемые стандартом [176], при малых объемах выборок и малых уровнях значимости  $\alpha$  (вероятностях ошибки первого рода) являются смещенными относительно некоторых конкурирующих гипотез (мощность критериев оказывается меньше уровня значимости).

В [267] был продолжен анализ критериев нормальности. Перецены критериев, исследованных в [231], был расширен за счет критериев Фросини [45, 46], Хегази–Грина [58], Шпигельхальтера

[134], Гири [49] и Дэвида–Хартли–Пирсона [29]. Эти исследования показали, что серьезными недостатками обладают и некоторые другие критерии.

## 5.2. Критерий проверки на симметричность

Критерий [25, 120] предназначен для проверки гипотез о симметричности наблюдаемого закона (против наличия асимметрии) при объемах выборки  $8 \leq n \leq 5000$ . Статистика критерия

$$\sqrt{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3}, \quad (5.1)$$

при вычислении которой оценки используемых центральных моментов (в том числе  $\hat{\mu}_2 = E[(X - \mu)^2] = \sigma^2$ ) вычисляются по выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  в соответствии с соотношением

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^j,$$

где

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Проверяется гипотеза  $H_0: \sqrt{\beta_1} = 0$  при конкурирующей гипотезе о наличии асимметрии  $\sqrt{\beta_1} > 0$  (положительная асимметрия) или  $\sqrt{\beta_1} < 0$  (отрицательная асимметрия).

В стандарте и первоисточниках [25, 120] приводятся только таблицы процентных точек (табл. D.1, приложение D). Ничего не говорится о виде распределения. Распределение статистики (5.1) в случае нормального закона является симметричным и зависит от числа наблюдений (рис. 5.1). В [163] говорится, что распределение статистики (5.1) очень быстро приближается к нормальному с нулевым математическим ожиданием и асимптотической дисперсией  $6(n-2)/[(n+1)(n+3)]$ .

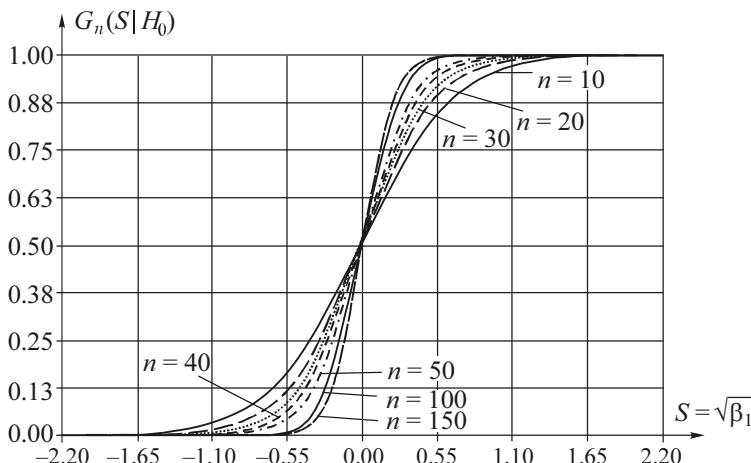


Рис. 5.1. Распределения статистики (5.1) в зависимости от объема выборки при  $n = 10, 20, 40, 30, 50, 100, 150$  в случае нормального закона

В данном разделе при исследовании распределений статистик проверяемой гипотезе  $H_0$  всегда соответствует принадлежность наблюдаемой выборки нормальному закону распределения

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \theta_0)^2}{2\theta_1^2} \right\}.$$

При исследовании зависимости распределений статистик от вида наблюдаемого закона нами рассматривалось целое множество конкурирующих распределений. Но в тексте работы основные свойства критериев демонстрируются на альтернативах, позволяющих показать как достоинства, так и некоторые ранее неизвестные недостатки отдельных критериев. В качестве таких конкурирующих гипотез при исследовании мощности критериев рассмотрена принадлежность следующим законам:  $H_1$  соответствует семейству распределений с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp \left\{ -\left( \frac{|x - \theta_0|}{\theta_1} \right)^{\theta_2} \right\} \quad (5.2)$$

и параметром формы  $\theta_2 = 4$ ;  $H_2$  – распределению Лапласа с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2\theta_1} \exp\left\{-|x - \theta_0| / \theta_1\right\},$$

$H_3$  – логистическому распределению с плотностью

$$f(x) = \frac{\pi}{\theta_1 \sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}}\right\} \left/ \left[ 1 + \exp\left\{-\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}}\right\} \right]^2 \right.,$$

очень близкому к нормальному. При этом, как правило, выборки моделировались с параметром масштаба  $\theta_1 = 1$  и параметром сдвига  $\theta_0 = 0$ . Графики функций плотности данных распределений представлены на рис. 5.2.

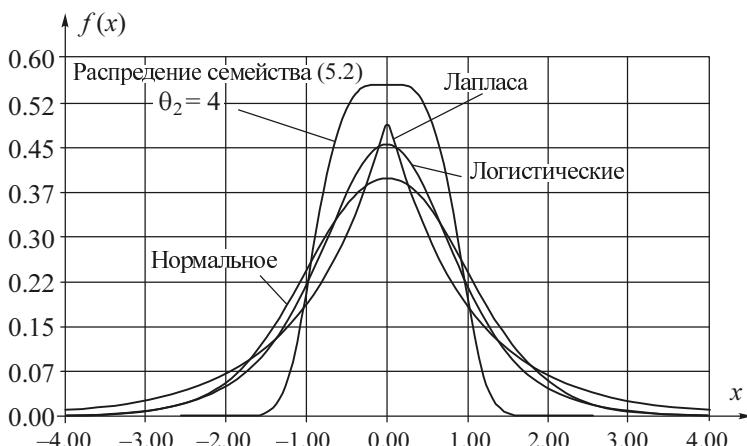


Рис. 5.2. Плотности распределений, соответствующих рассматриваемым гипотезам  $H_i$

Критерий, использующий статистику (5.1), является критерием проверки только на симметричность. Его использование полезно при проверке отклонений от нормального закона, но неотклонение гипотезы о симметричности на основании предположений о нормальности закона не может служить подтверждением нормальности (условие

необходимое, но недостаточное), так как распределение статистики (5.1) зависит от вида наблюдаемого закона (рис. 5.3).

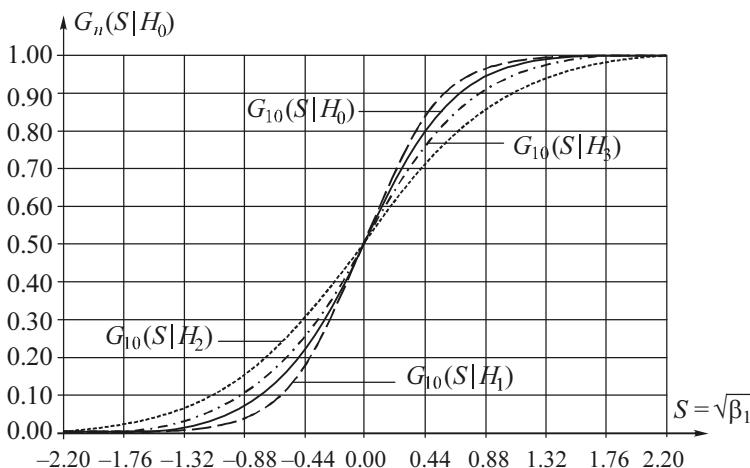


Рис. 5.3. Распределения статистики критерия проверки на симметричность в зависимости от гипотез  $H_i$  при объеме выборок  $n = 10$

Нормальное распределение не единственное симметричное распределение. Поэтому проверяемая гипотеза о симметричности может не обоснованно и отклоняться, и не отклоняться. Например, в случае принадлежности наблюдаемых выборок распределению семейства (5.2) с параметром формы  $\theta_2 = 4$  (при справедливости  $H_1$ ) и использования процентных точек для статистики (5.1), построенных в предположении нормальности закона, гипотеза о симметричности не будет отклоняться с большим достигаемым уровнем значимости.

### 5.3. Критерий проверки на эксцесс

В стандарте предусмотрено использование критерия проверки на эксцесс [120, 26] при объемах выборок  $8 \leq n \leq 5000$ . Статистика критерия проверки на значение эксцесса имеет вид

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4}. \quad (5.3)$$

Проверяется гипотеза вида  $H_0: \beta_2 = 3$  при конкурирующих гипотезах  $\beta_2 > 3$  (больший эксцесс) или  $\beta_2 < 3$  (меньший эксцесс).

В стандарте и первоисточниках [120, 26] приводятся лишь таблицы процентных точек (табл. D.2, приложение D). Распределение статистики зависит от объема рассматриваемых выборок. В [163] говорится, что распределение статистики (5.3) даже при больших объемах выборок  $n$  оказывается далеким от нормального. В этом можно убедиться, посмотрев на рис. 5.4, где приведены графики полученных в результате моделирования распределений статистики критерия проверки на эксцесс в зависимости от объема выборки  $n$ .

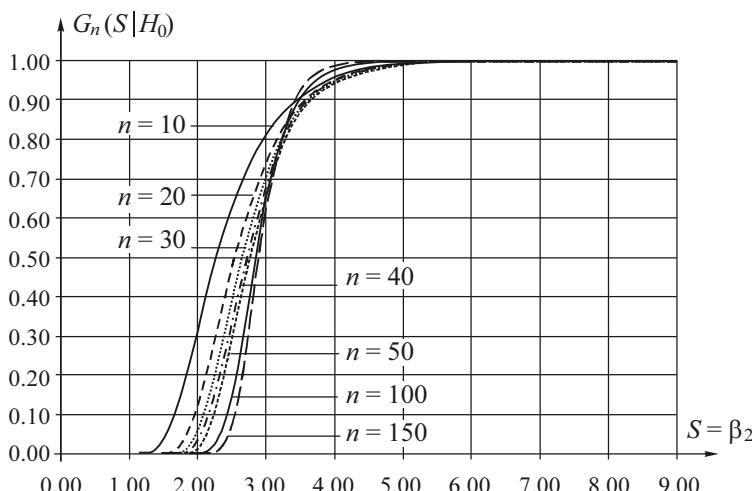


Рис. 5.4. Графики распределений статистики критерия проверки на эксцесс в зависимости от объема выборки при  $n = 10, 20, 40, 30, 50, 100, 150$

Распределения статистики (5.3) были исследованы при наблюдаемых законах, соответствующих рассмотренным выше гипотезам  $H_i$ . Результаты исследований позволяют судить о мощности критерия проверки на эксцесс относительно различных конкурирующих гипотез.

Естественно, распределения статистики (5.3) зависят от наблюдаемого закона. На рис. 5.5 и 5.6 показано изменение распределения статистики (5.3) в зависимости от наблюдаемого закона при справедливости рассматриваемых конкурирующих гипотез  $H_i$  и объемах выборок  $n = 10$  и  $n = 50$ .

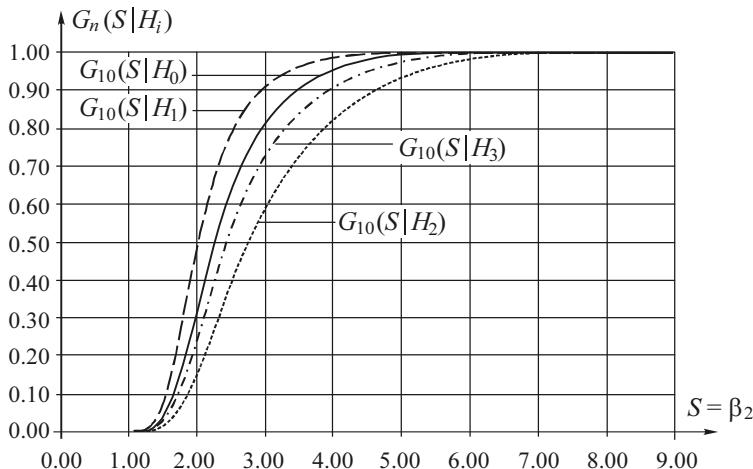


Рис. 5.5. Распределения статистики (5.3) критерия проверки на эксцесс в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным  $H_i$ , при  $n = 10$

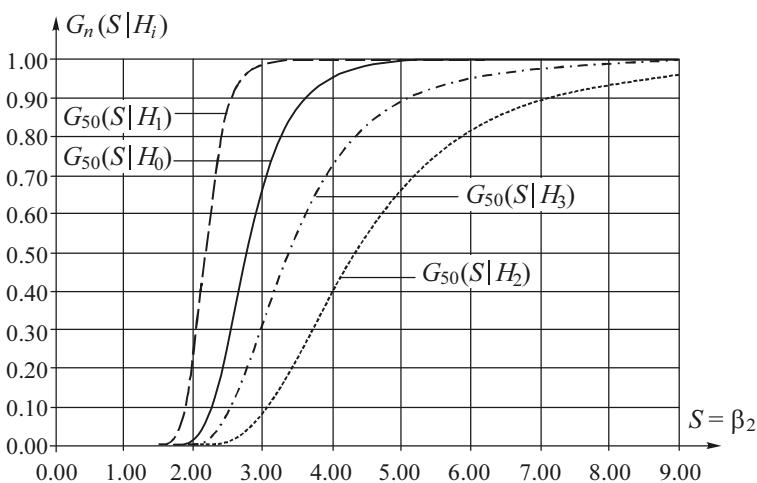


Рис. 5.6. Распределения статистики (3) критерия проверки на эксцесс в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным  $H_i$ , при  $n = 50$

Вместе с критерием симметричности данный критерий позволяет судить о степени отклонения наблюдаемой выборки от нормального

закона. Недостатком критерия является сильная зависимость распределения статистики (5.3) от объема выборок.

**Совместный критерий проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса** [15] в стандарте рассматриваются при объемах выборок  $20 \leq n \leq 1000$  (многонаправленный критерий). Проверяемая гипотеза имеет вид  $H_0: \sqrt{\beta_1} = 0$  и  $\beta_2 = 3$  при конкурирующих гипотезах  $\sqrt{\beta_1} \neq 0$  и (или)  $\beta_2 \neq 3$ . В стандарте приведены кривые, определяющие критическую область при уровне значимости  $\alpha = 0.05$  и  $\alpha = 0.01$ .

В данном случае такой совместный критерий не исследовался. Результаты исследования различных вариантов критериев, построенных на основе (совместного) использования статистик (5.1) и (5.3), не вошедших в стандарт, рассмотрены ниже.

## 5.4. Критерий Шапиро–Уилка

Критерий Шапиро–Уилка [130, 129], базируется на анализе линейной комбинации разностей порядковых статистик. В стандарте [176] применение критерия предусмотрено при объемах выборок  $8 \leq n \leq 50$ . Сложность применения при больших объемах выборок затруднена из-за отсутствия в документе соответствующих коэффициентов. При объемах выборок  $51 \leq n \leq 99$  коэффициенты и таблицы процентных точек можно найти в [129]. В стандарте критерий рекомендуют использовать при отсутствии априорной информации о типе возможного отклонения от нормальности в тех случаях, когда в качестве альтернативы можно выбрать гипотезу следующего вида: примерно симметричное распределение с  $|\sqrt{\beta_1}| < 1/2$  и  $\beta_2 < 3$  или асимметричное распределение (например,  $|\sqrt{\beta_1}| > 1/2$ ). В противном случае рекомендуют критерий Эпписа–Палли. Данная рекомендация неочевидна и требует подтверждения.

При построении статистики для вариационного ряда  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ , полученного по наблюдаемой выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , вычисляют величину

$$S = \sum_k a_k [X_{(n+1-k)} - X_{(k)}],$$

где индекс  $k$  изменяется от 1 до  $n/2$  или от 1 до  $(n-1)/2$  при четном и нечетном  $n$  соответственно. Коэффициенты  $a_k$  приведены в стандарте и первоисточниках [130, 129] (табл. D.3, приложение D). Статистика критерия имеет вид

$$W = S^2 \left/ \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right.. \quad (5.4)$$

Гипотеза о нормальности отвергается при малых значениях статистики  $W$ . В стандарте и литературе отсутствует информация об аналитическом виде распределения статистики, приводятся лишь процентные точки (табл. D.4, приложение D).

Как и в предыдущих случаях, распределения статистики (5.4) исследовались методами статистического моделирования. На рис. 5.7 показано изменение распределения статистики критерия Шапиро–Уилка в зависимости от объема выборки, принадлежащей нормальному закону.

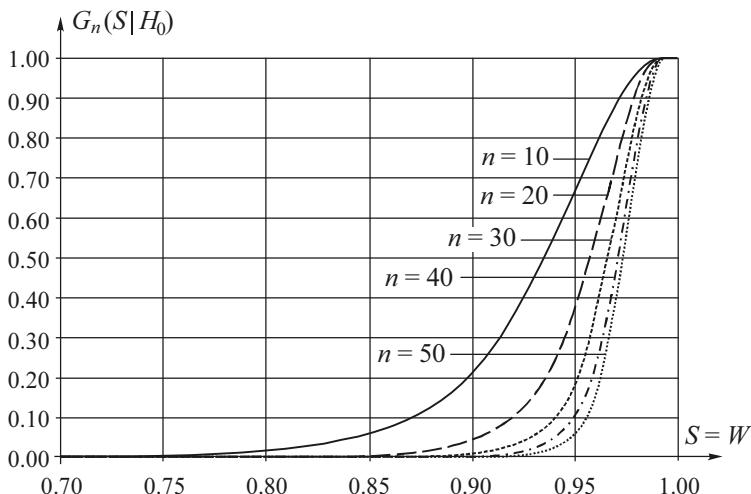


Рис. 5.7. Графики распределения статистики критерия Шапиро–Уилка в зависимости от объема выборки при  $n = 10, 20, 40, 30, 50$

Распределения статистики (5.4) исследовались при различных наблюдаемых законах. Исследовалась также мощность критерия. В каче-

стве проверяемой гипотезы  $H_0$  рассмотрен нормальный закон распределения с параметром масштаба, равным 1, и параметром сдвига, равным 0. В качестве близких конкурирующих гипотез рассмотрены гипотезы:  $H_1$  – выборка соответствует семейству распределений (5.2) с параметром формы, равным 4,  $H_2$  – распределению Лапласа с параметрами (0,1),  $H_3$  – логистическому распределению с параметрами (0,1).

Например, на рис. 5.8 приведены полученные условные распределения  $G(S|H_i)$  статистики (5.4) при справедливости гипотез  $H_0$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  при объеме выборок  $n = 10$ . Результаты исследований показали, что при малых объемах выборок (10...20 наблюдений) критерий Шапиро–Уилка не способен различать гипотезы  $H_0$  и  $H_1$ . Еще в меньшей степени критерий замечает различие между нормальным распределением и распределением семейства (5.2) с параметром формы  $\theta_2 = 3$ . Более того, по отношению к конкурирующей гипотезе  $H_1$  критерий оказывается смешенным. Но с ростом числа наблюдений мощность критерия по распознаванию гипотез  $H_0$  и  $H_1$  растет. На рис. 5.9 для сравнения показаны условные распределения статистики (5.4) при  $n = 50$ .

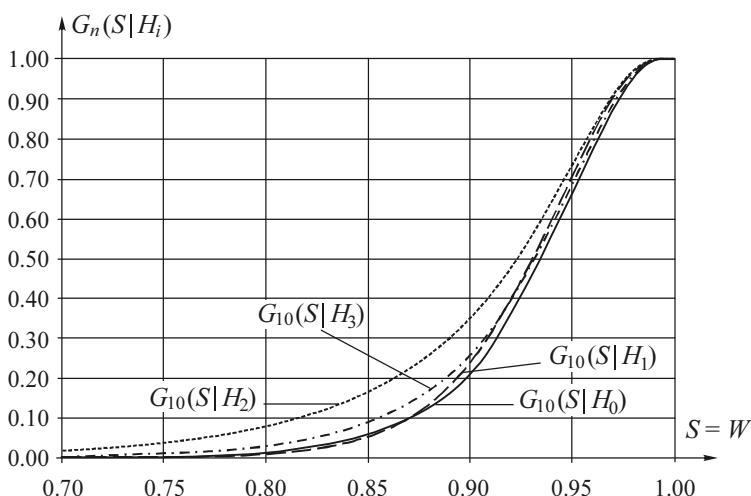


Рис. 5.8. Условные распределения  $G(S|H_i)$  статистики (5.4) при справедливости гипотез при объеме выборок  $n = 10$

Значения мощности критерия Шапиро–Уилка по отношению к конкурирующим гипотезам  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  при различных значениях уровня значимости  $\alpha$  (вероятности ошибки первого рода) приведены соответственно в табл. 5.1–5.3.

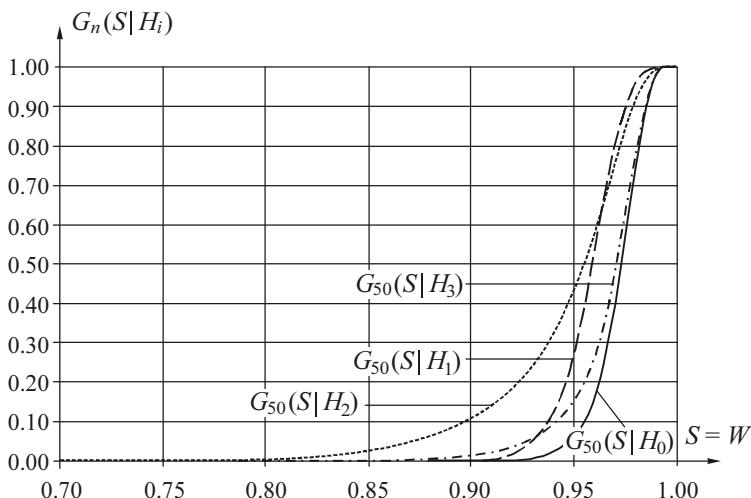


Рис. 5.9. Условные распределения  $G(S|H_i)$  статистики (5.4) при справедливости гипотез при объеме выборок  $n = 50$

Таблица 5.1

**Мощность критерия Шапиро–Уилка по отношению  
к распределению семейства (5.2) с параметром формы  $\theta_2 = 4$**

$\alpha$	$n$				
	10	20	30	40	50
0.01	0.007	0.007	0.016	0.036	0.075
0.05	0.048	0.061	0.104	0.168	0.256
0.075	0.080	0.102	0.162	0.244	0.333
0.1	0.107	0.142	0.213	0.296	0.406

Таблица 5.2

**Мощность критерия Шапиро–Уилка по отношению  
к распределению Лапласа**

$\alpha$	$n$				
	10	20	30	40	50
0.01	0.064	0.134	0.187	0.237	0.277
0.05	0.152	0.266	0.334	0.375	0.418
0.075	0.192	0.316	0.386	0.431	0.469
0.1	0.225	0.351	0.429	0.464	0.509

Таблица 5.3

**Мощность критерия Шапиро–Уилка по отношению  
к логистическому закону**

$\alpha$	$n$				
	10	20	30	40	50
0.01	0.025	0.043	0.057	0.065	0.070
0.05	0.081	0.116	0.130	0.138	0.142
0.075	0.116	0.155	0.166	0.175	0.176
0.1	0.139	0.185	0.199	0.200	0.208

Как показывают в том числе и наши исследования, мощность критериев, специально построенных для проверки отклонения от нормальности, таких как Шапиро–Уилка и Эппса–Палли, на объемах выборок  $n \leq 50$  выше мощности непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, типа  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова и типа  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга при проверке сложных гипотез [302], которые в такой ситуации мощнее критериев типа  $\chi^2$  [301]. С применением критериев согласия при малых объемах выборок вообще трудно различать близкие законы. Однако критерии согласия не имеют выявленного в работе [231] недостатка, присущего критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Палли: неспособность отличать от нормального закона распределения семейства (5.2) с более плоскими плотностями распределений (с  $\beta_2 < 3$ ).

## 5.5. Критерий Эпписа–Палли

Этот критерий [9, 10, 40, 60] базируется на сравнении эмпирической и теоретической характеристических функций. В стандарте предусмотрено его применение при  $8 \leq n \leq 200$ . Процентные точки в таком диапазоне даны с пропусками (табл. D.5, приложение D).

Статистика критерия, вычисляемая по наблюдаемой выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , имеет вид

$$T_{EP} = 1 + \frac{n}{\sqrt{3}} + \\ + \frac{2}{n} \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} \exp \left\{ -\frac{(X_j - X_k)^2}{2\hat{\mu}_2} \right\} - \sqrt{2} \sum_{j=1}^n \exp \left\{ -\frac{(X_j - \bar{X})^2}{4\hat{\mu}_2} \right\}, \quad (5.5)$$

где  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ . Выборка может быть не упорядочена, порядок наблюдений произволен, но он должен быть неизменным в течение всех проводимых вычислений. Гипотезу о нормальности отвергают при больших значениях статистики.

Распределения статистики (5.5) исследовались методами статистического моделирования. На рис. 5.10 показана зависимость вида распределения статистики критерия Эпписа–Палли в зависимости от объема выборки, принадлежащей нормальному закону. На рисунке наблюдается «пучок» распределений. Распределения статистик критерия незначительно меняются с ростом объемов выборок  $n$  (в отличие от распределений других рассмотренных здесь статистик) при нормальном законе распределения случайной величины. С ростом  $n$  наблюдается быстрая сходимость распределения статистики к некоторому предельному.

Процентные точки распределений статистики (5.5) при различных объемах выборок отличаются существенно, но вероятности вида  $P\{T_{EP} > T_{EP}^*\}$ , вычисленные по распределениям статистики (5.5) при различных  $n$ , будут достаточно близкими. Здесь  $T_{EP}^*$  – значение стати-

стики, полученное по выборке. В частности, распределения статистики критерия Эпса–Палли при различных объемах выборок  $n$  достаточно хорошо аппроксимируются бета-распределениями третьего рода с функцией плотности

$$f(x) = \frac{\delta^\gamma}{B(\gamma, \beta)} \frac{t^{\gamma-1} (1-t)^{\beta-1}}{[1 + (\delta-1)t]^{\gamma+\beta}},$$

где  $t = (x - \theta_0)/\theta_1 \in [0, 1]$ . Если пренебречь зависимостью статистики (5.5) от объема выборки  $n$ , то для приближенного вычисления достигаемого уровня значимости  $P\{T_{EP} > T_{EP}^*\}$  можно использовать бета-распределение III рода с параметрами  $\gamma = 1.8645$ ,  $\beta = 2.5155$ ,  $\delta = 5.8256$ ,  $\theta_1 = 0.9216$ ,  $\theta_0 = 0.0008$ . Соответствующая функция распределения представляет собой некоторую среднюю для «пучка» распределений, приведенного на рис. 5.10.

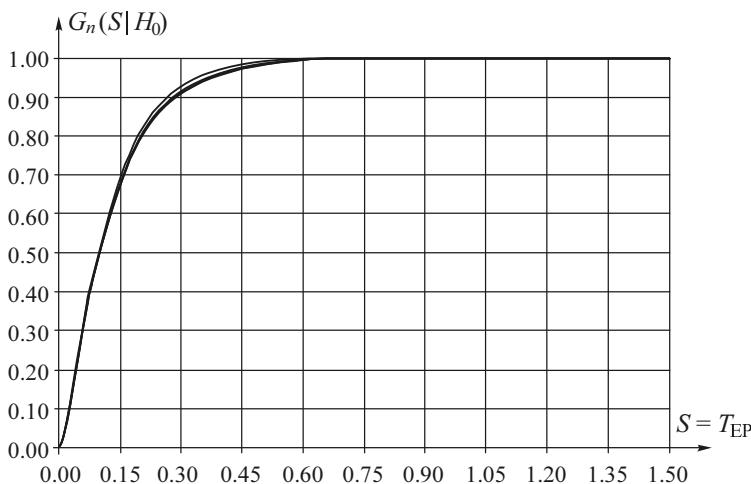


Рис. 5.10. Графики распределений статистики критерия Эпса–Палли в зависимости от объема выборки при  $n = 10, 20, 40, 30, 50, 100, 150$

Исследования распределений статистики критерия Эпса–Палли при справедливости конкурирующих гипотез  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  и оценка

мощности критерия по отношению к данным гипотезам показали, что критерий имеет тот же недостаток, что и критерий Шапиро–Уилка: он оказывается смещенным относительно тех же конкурирующих гипотез. Подтверждением этому является картина, показанная на рис. 5.11, где представлены условные функции распределения  $G(S|H_i)$  статистики (5.5) при справедливости гипотез  $H_0, H_1, H_2, H_3$  и объеме выборок  $n = 10$ .

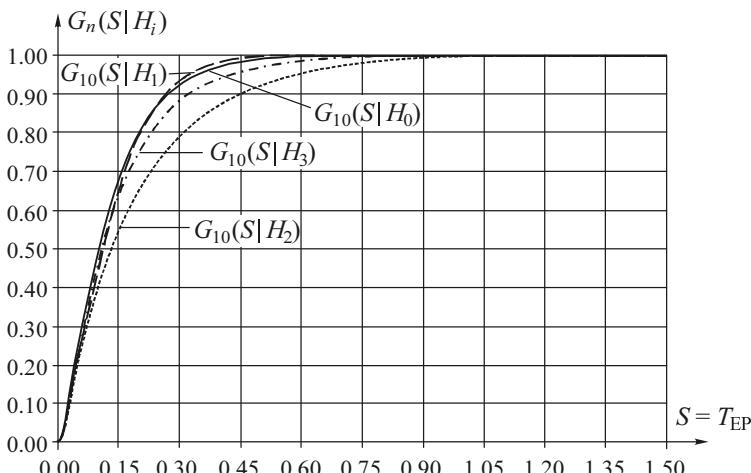


Рис. 5.11. Условные распределения  $G(S|H_i)$  статистики (5.5) и справедливости гипотез при объеме выборок  $n = 10$

При  $n = 10$  мощность критерия Эппса–Палли по отношению к гипотезе  $H_1$  меньше (!) уровня значимости (при  $\alpha \leq 0.1$ ). Это означает, что при верной гипотезе  $H_1$  при проверке нормальности предпочтение всегда будет отдаваться гипотезе  $H_0$ . При  $n = 20$  распределения  $G_{20}(S|H_0)$  и  $G_{20}(S|H_1)$  в области значений функций распределения, больших 0.95, практически неразличимы, а при  $n = 50$  критерий уже способен различать гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  (рис. 5.12).

Значения мощности критерия Эппса–Палли по отношению к альтернативам  $H_1, H_2, H_3$ , которые можно сравнить с соответствующими значениями для критерия Шапиро–Уилка, приведены в табл. 5.4 и 56.

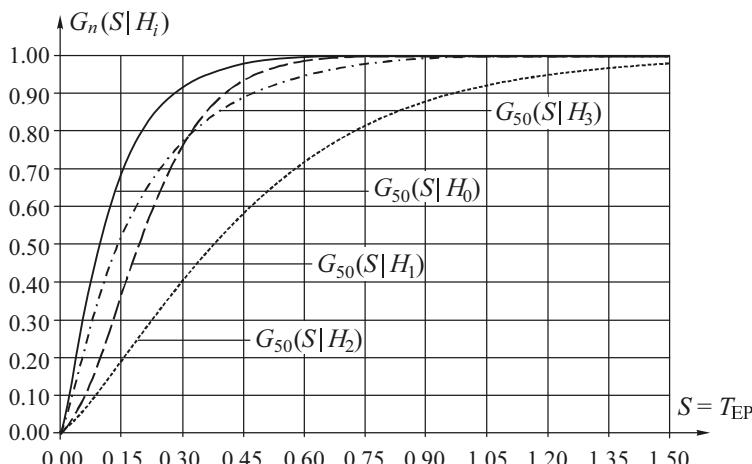


Рис 5.12. Условные распределения  $G(S|H_i)$  статистики (5.5) при справедливости гипотез при объеме выборок  $n = 50$

Таблица 5.4

**Мощность критерия Эпписа–Палли по отношению  
к распределению семейства (5.2) с параметром формы  $\theta_2 = 4$**

$\alpha$	$n$				
	10	20	30	40	50
0.1	0.091	0.126	0.183	0.222	0.281
0.05	0.041	0.052	0.078	0.108	0.150
0.025	0.017	0.021	0.032	0.051	0.074
0.01	0.006	0.007	0.010	0.015	0.025

Таблица 5.5

**Мощность критерия Эпписа–Палли по отношению  
к распределению Лапласа**

$\alpha$	$n$				
	10	20	30	40	50
0.1	0.243	0.354	0.462	0.552	0.623
0.05	0.166	0.260	0.352	0.441	0.519
0.025	0.112	0.192	0.265	0.349	0.428
0.01	0.066	0.128	0.175	0.257	0.323

Таблица 5.6

**Мощность критерия Эппса–Палли по отношению  
к логистическому закону**

$\alpha$	$n$				
	10	20	30	40	50
0.1	0.146	0.176	0.204	0.228	0.249
0.05	0.089	0.108	0.125	0.147	0.167
0.025	0.052	0.070	0.083	0.097	0.112
0.01	0.026	0.039	0.042	0.055	0.067

По отношению к конкурирующей гипотезе  $H_3$  (логистическому закону) на объемах выборок  $n \leq 50$  критерий Эппса–Палли мощнее критерия Шапиро–Уилка при больших уровнях значимости ( $\alpha = 0.1$ ) и уступает критерию Шапиро–Уилка по мощности при малых уровнях значимости ( $\alpha = 0.01$ ).

## 5.6. Модифицированный критерий Шапиро–Уилка

Необходимость проверки отклонения от нормального распределения с использованием нескольких независимых выборок возникает очень часто, поскольку каждая отдельная выборка оказывается слишком малой для обнаружения значимого отклонения от нормального распределения. В такой ситуации при выборках одинакового объема  $n > 8$  стандарт [176] рекомендует применять модифицированный критерий Шапиро–Уилка.

При проверке для  $h$  последовательных выборок объемом  $n$  каждая, отобранных из одной совокупности, подсчитывается значение  $W_j$  ( $j = \overline{1, h}$ ) в соответствии с выражением

$$W_j = S_j^2 \left/ \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right..$$

Значения  $S_j = \sum_k a_k [X_{(n+1-k)} - X_{(k)}]$  по соответствующей выборке вычисляются, как и в критерии Шапиро–Уилка, где индекс  $k$  изменя-

ется от 1 до  $n/2$  или от 1 до  $(n-1)/2$  при четном и нечетном  $n$  соответственно. Коэффициенты  $a_k$  приведены в стандарте и первоисточниках [25, 120] (табл. D.3, приложение D). Для совместного критерия вычисляют значения  $C_j$  по формуле

$$C_j = \gamma(n) + \delta(n)v_j,$$

где  $v_j = \ln \left\{ \frac{W_j - E(n)}{1 - W_j} \right\}$ . Коэффициенты  $\gamma(n)$ ,  $\delta(n)$  и  $E(n)$  для преобразования  $W_j$  и  $C_j$  табулированы [176, 121] и приведены в стандарте (табл. D.6, приложение D).

Утверждается, что если основное распределение вероятностей нормальное, то величины  $C_j$  приблизительно подчиняются нормальному распределению. Статистика модифицированного критерия имеет вид

$$S_M = \sqrt{h} \cdot \bar{C}, \quad (5.6)$$

где  $\bar{C} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h C_j$ , и должна подчиняться стандартному нормальному закону.

Проверяемая гипотеза о принадлежности выборок нормальному закону отклоняется при уровне значимости  $\alpha$ , если  $S_M < u_\alpha$ , где  $u_\alpha$  –  $\alpha$ -квантиль стандартного нормального распределения. Заметим, что в стандарте [176] в формуле (19) – ошибка!

К сожалению, наши исследования показали, что распределение статистики (5.6) лишь очень приближенно подчиняется стандартномуциальному закону и зависит от  $n$  и  $h$ . При конкретных комбинациях  $n$  и  $h$  условное распределение статистики  $G_{n,h}(S_M | H_0)$  может существенно отличаться от стандартного нормального закона, что является существенным недостатком критерия. Как правило, функция распределения статистики оказывается сдвинутой влево от стандартного нормального распределения. Таким образом, принимая решение на основании процентных точек стандартного нормального закона в соответствии с  $S_M < u_\alpha$ , мы можем несправедливо отклонить верную гипотезу  $H_0$ , т. е. вероятность ошибки первого рода на самом деле оказывается больше задаваемого  $\alpha$ . На рис. 5.13 в качестве примера

приведены распределения статистики  $G_{n \cdot h}(S_M | H_0)$  при различных комбинациях  $n$  и  $h$ . Здесь же для сравнения представлена функция распределения стандартного нормального закона.

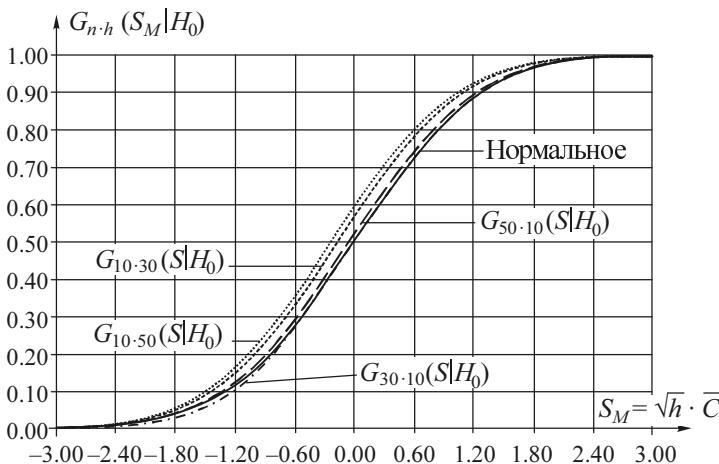


Рис. 5.13. Условные распределения  $G_{n \cdot h}(S_M | H_0)$  статистики (5.6) при различных комбинациях  $n$  и  $h$

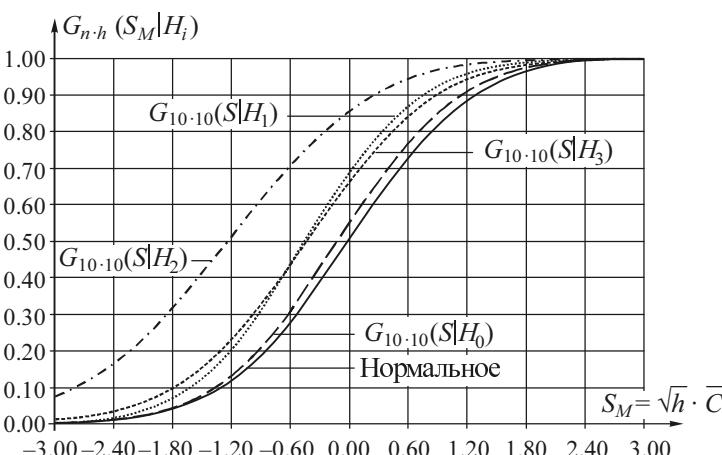


Рис. 5.14. Условные распределения  $G_{n \cdot h}(S_M | H_i)$  статистики (5.6) при справедливости гипотез  $H_i$  при  $n \cdot h = 10 \cdot 10$

Исследования показали, что модифицированный критерий Шапиро–Уилка, как и другие, при малых  $n \cdot h$  (20...30 наблюдений в совокупности) не способен различить гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  (отличить нормальный закон от семейства (5.2) с параметром  $\theta_2 = 4$ ). Кроме того, модифицированный критерий Шапиро–Уилка при малых  $n \cdot h < 100$  уступает по мощности критериям Эпсса–Палли и Шапиро–Уилка, уступает он и непараметрическим критериям согласия. На рис. 5.14 приведены распределения статистики (5.6) при  $n \cdot h = 10 \cdot 10$  и справедливости различных гипотез  $H_i$ .

Совокупность недостатков критерия позволяет *не рекомендовать* его для применения.

## 5.7. Совместный критерий проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса

Ниже рассмотрен ряд критериев, не имеющих отношения к стандарту [176], статистики которых измеряют отклонения от нормальности, как правило, с использованием отклонений статистик (5.1) и (5.3) от значений, соответствующих нормальному закону. В [15] и [33], где приводятся полезные сведения о ряде критериев проверки отклонения от нормального закона, рассмотрена одномерная статистика на базе статистик (5.1) и (5.3)

$$E_p^a = \frac{n(\sqrt{\hat{\beta}_1})^2}{6} + \frac{n(\hat{\beta}_2 - 3)^2}{24} = \frac{n\left(\frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3}\right)^2}{6} + \frac{n\left(\frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4} - 3\right)^2}{24}, \quad (5.7)$$

которая асимптотически подчиняется  $\chi_2^2$ -распределению. В качестве нормирующих коэффициентов в ней взяты первые члены асимптотических дисперсий асимптотически нормальных распределений статистик (5.1) и (5.3) [163].

Наши исследования распределений статистики (5.7) при различных объемах выборок показали, что они настолько плохо сходятся к асимптотическому предельному  $\chi_2^2$ -распределению, что последним обоснованно можно пользоваться лишь при объемах выборок,

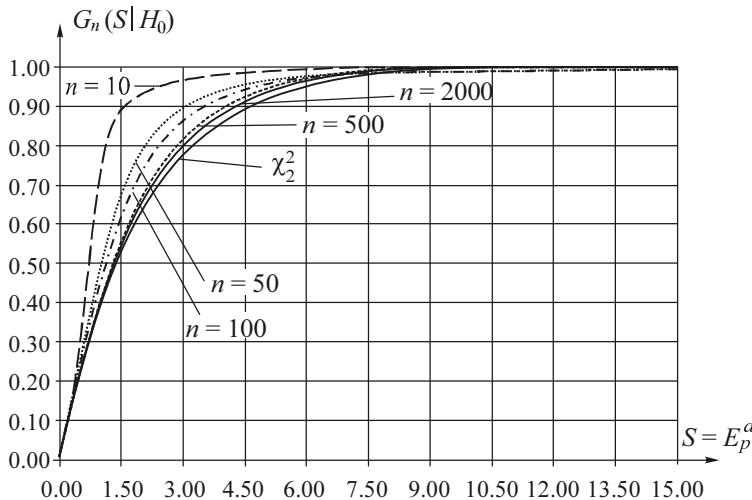


Рис. 5.15. Распределения статистики (5.7) при различных объемах выборок и асимптотически предельное  $\chi_2^2$ -распределение

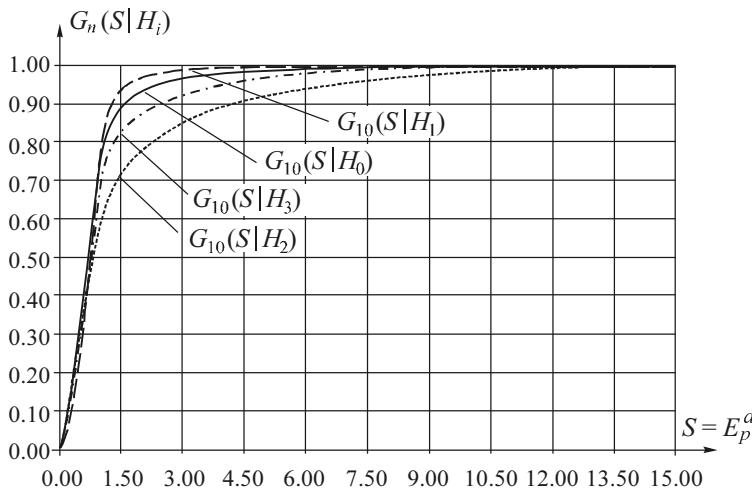


Рис. 5.16. Распределения статистики (5.7) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным  $H_i$ , при  $n = 10$

превышающих несколько тысяч наблюдений. Рис. 5.15 иллюстрирует сходимость распределения статистики (5.7) к предельному  $\chi_2^2$ -распре-

делению в зависимости от объема выборок  $n$  в случае нормального закона (при справедливости  $H_0$ ), а рис. 5.16 – в зависимости от справедливой гипотезы при объеме выборок  $n = 10$ .

## 5.8. Модификация D'Agostino критерия проверки на симметричность

В работе [25] предложена модификация критерия проверки симметричности. В такой модификации на основании следующих соотношений статистика (5.1) преобразуется в статистику  $z_1$ , приближенно подчиняющуюся стандартному нормальному закону:

$$b = \frac{3(n^2 + 27n - 70)(n+1)(n+3)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)}, \quad \omega^2 = -1 + \{2(b-1)\}^{1/2},$$

$$\delta = \frac{1}{\{\log(\sqrt{\omega^2})\}^{1/2}}, \quad y = \sqrt{\hat{\beta}_1} \left\{ \frac{\omega^2 - 1}{2} \frac{(n+1)(n+3)}{6(n-2)} \right\}^{1/2},$$

$$z_1 = \delta \log \left\{ y + (y^2 + 1)^{1/2} \right\}. \quad (5.8)$$

Исследования распределений статистики (5.8) при различных объемах выборок показали, что они очень хорошо согласуются со стандартным нормальным законом.

На рис. 5.17, 5.18 показаны условные функции распределения  $G(S|H_i)$  статистики (5.8) при справедливости гипотез  $H_0$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  при объеме выборок  $n = 10$  и  $n = 100$ .

По мощности критерий со статистикой (5.8) идентичен критерию со статистикой (5.1), но он удобней, так как опирается на стандартное нормальное распределение.

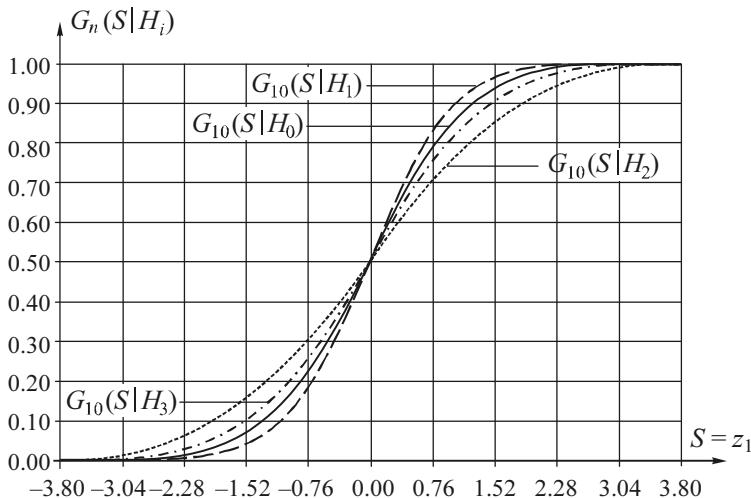


Рис. 5.17. Условные распределения  $G(S|H_i)$  статистики (5.8) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным  $H_i$ , при  $n = 10$

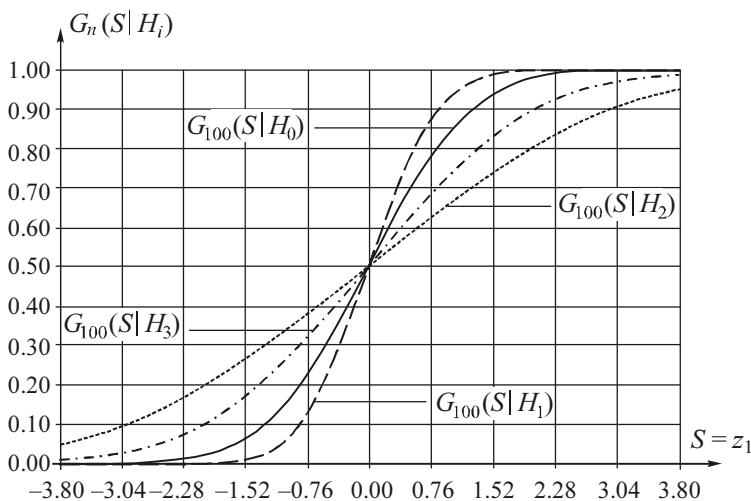


Рис. 5.18. Условные распределения  $G(S|H_i)$  статистики (5.8) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным  $H_i$ , при  $n = 100$

## 5.9. Модификация D'Agostino критерия проверки на симметричность и значение эксцесса

В работе [25] предложено преобразование статистик (5.3) и (5.1) к статистике  $z_2$ , приближенно распределенной в соответствии со стандартным нормальным законом, с помощью следующих соотношений:

$$\delta = (n - 3)(n + 1)(n^2 + 15n - 4),$$

$$\alpha = \frac{(n - 2)(n + 5)(n + 7)(n^2 + 27n - 70)}{6\delta},$$

$$c = \frac{(n - 7)(n + 5)(n + 7)(n^2 + 2n - 5)}{6\delta},$$

$$k = \frac{(n + 5)(n + 7)(n^3 + 37n^2 + 11n - 313)}{12\delta},$$

$$\alpha = \alpha + \beta_1 c, \quad \chi = (\hat{\beta}_2 - 1 - \hat{\beta}_1) 2k,$$

$$z_2 = \left\{ \left( \frac{\chi}{2\alpha} \right)^{1/3} - 1 + \frac{1}{9\alpha} \right\} (9\alpha)^{1/2}. \quad (5.9)$$

Исследования распределений статистики (5.9) при справедливой гипотезе  $H_0$  и различных объемах выборок показали, что  $G_n(z_2 | H_0)$  достаточно хорошо согласуются со стандартным нормальным законом (несколько хуже, чем  $z_1$ , но хорошо). Критерий двусторонний: проверяемая гипотеза  $H_0$  отклоняется, если  $z_2 < u_\alpha$  или  $z_2 > u_{1-\alpha}$ .

Исследование мощности критерия со статистикой (5.9) по отношению к конкурирующим гипотезам  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  (и ряду других) показало, что данный критерий оказывается предпочтительнее по мощности всех рассмотренных критериев. На рис. 5.19 и 5.20 представлены условные функции распределения  $G_n(S | H_i)$  статистики (5.9) при

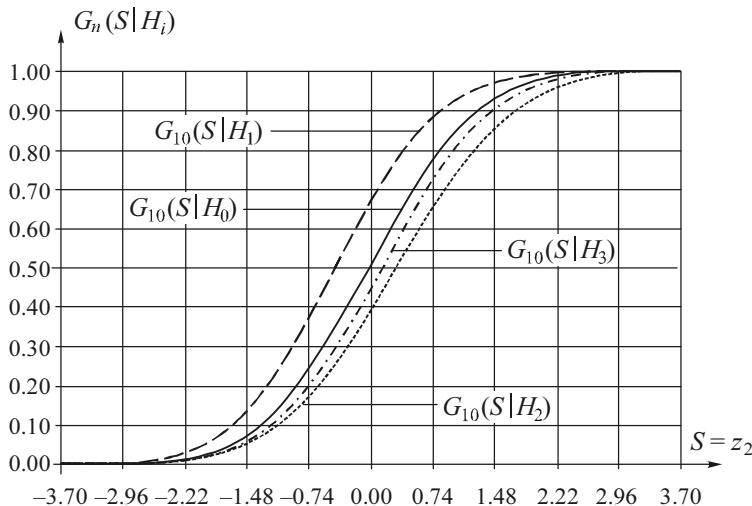


Рис. 5.19. Условные распределения  $G(S|H_i)$  статистики (5.9) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным  $H_i$ , при  $n = 10$

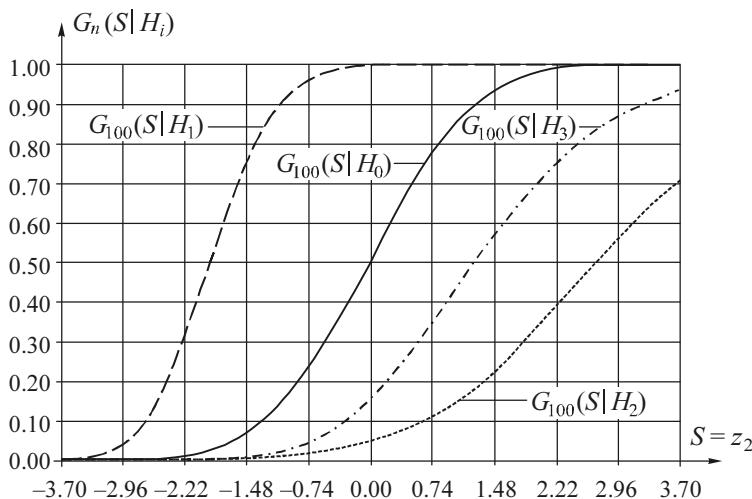


Рис. 5.20. Условные распределения  $G(S|H_i)$  статистики (5.9) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным  $H_i$ , при  $n = 100$

справедливости гипотез  $H_0$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  при объемах выборок  $n = 10$  и  $n = 100$ . Рисунки позволяют судить о мощности критерия со статистикой (5.9). Значения мощности критерия относительно гипотез  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  при различных объемах выборок представлены в табл. 5.7–5.9.

Таблица 5.7

**Мощность критерия со статистикой  $z_2$  по отношению к распределению семейства (5.2) с параметром формы  $\theta_2 = 4$  (по нижним процентным точкам)**

$\alpha$	$n$						
	10	20	30	40	50	100	300
0.1	0.184	0.251	0.350	0.438	0.520	0.835	1
0.05	0.097	0.124	0.181	0.245	0.315	0.666	0.998
0.025	0.051	0.059	0.084	0.116	0.166	0.469	0.991
0.01	0.023	0.019	0.025	0.036	0.058	0.245	0.960

Достоинством критерия со статистикой (5.9) является возможность использовать в качестве предельного распределения стандартный нормальный закон. Статистика критерия учитывает отклонения от симметричности и от эксцесса нормального распределения.

Таблица 5.8

**Мощность критерия со статистикой  $z_2$  по отношению к распределению Лапласа (по верхним процентным точкам)**

$\alpha$	$n$						
	10	20	30	40	50	100	300
0.1	0.193	0.312	0.411	0.488	0.574	0.815	0.995
0.05	0.113	0.223	0.311	0.389	0.469	0.742	0.992
0.025	0.068	0.163	0.240	0.309	0.391	0.671	0.987
0.01	0.035	0.106	0.174	0.230	0.307	0.588	0.978

Таблица 5.9

**Мощность критерия со статистикой  $z_2$  по отношению к логистическому распределению (по верхним процентным точкам)**

$\alpha$	$n$						
	10	20	30	40	50	100	300
0.1	0.131	0.188	0.234	0.270	0.320	0.680	0.851
0.05	0.071	0.117	0.158	0.188	0.229	0.771	0.780
0.025	0.039	0.074	0.110	0.131	0.171	0.829	0.711
0.01	0.018	0.045	0.067	0.086	0.115	0.885	0.621

При малых  $n$  и близких альтернативах критерий не уступает по мощности критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Палли. В отличие от всех рассмотренных *данный критерий способен успешно отличать от нормального закона распределения семейства (5.2) с более плосковершинными* по сравнению с нормальным законом плотностями.

## 5.10. Совместный критерий проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса D'Agostino

На базе статистик  $z_1$  и  $z_2$  в [25] рассмотрена одномерная статистика вида

$$E_p = z_1^2 + z_2^2, \quad (5.10)$$

приближенно распределенная как  $\chi_2^2$ -распределение. Проверяемая гипотеза о нормальности отклоняется при больших значениях статистики (5.10).

Исследование распределений данной статистики показало, что в отличие от статистики (5.7) распределение статистики (5.10) очень хорошо согласуется с  $\chi_2^2$ -распределением уже при достаточно малых  $n$ . По отношению к конкурирующим гипотезам  $H_2$  и  $H_3$  критерий не уступает по мощности критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Палли. Однако он обладает и тем же самым недостатком: при малых  $n$  данный критерий не позволяет надежно различать гипотезы  $H_1$  и  $H_0$  вследствие смешанности (рис. 5.21 и 5.22).

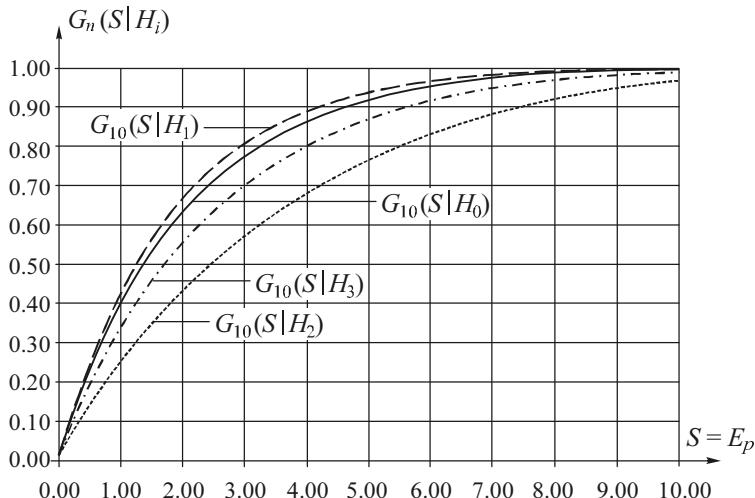


Рис. 5.21. Условные распределения  $G(S|H_i)$  статистики (5.10) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным  $H_i$ , при  $n = 10$

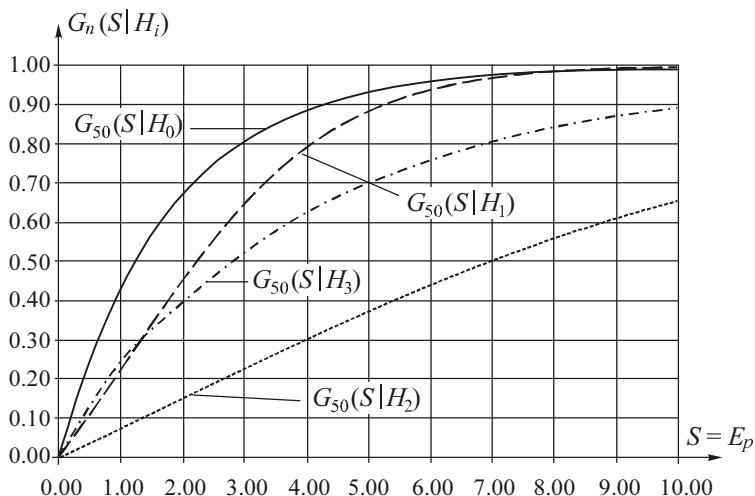


Рис. 5.22. Условные распределения  $G(S|H_i)$  статистики (5.10) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным  $H_i$ , при  $n = 50$

На рис. 5.21 особенно заметно, что закон распределения, соответствующий гипотезе  $H_1$ , при объеме выборки  $n=10$  данным критерием будет признан «более нормальным», чем нормальный закон.

## 5.11. Критерий Фросини

Статистика критерия Фросини [45, 46] имеет вид

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left| \Phi(z_i) - \frac{i-0.5}{n} \right|, \quad (5.11)$$

где элементы выборки  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , упорядочены по возрастанию;

$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$ ;  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ;  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ ;  $\Phi(z_i)$  – функция распределения стандартного нормального закона  $N(0,1)$ .

Применение критерия осложняется тем, что условные распределения  $G(B_n | H_0)$  статистики критерия Фросини при справедливости проверяемой гипотезы  $H_0$  зависят от объемов выборок  $n$ . Характер этой зависимости иллюстрирует рис. 5.23. С ростом  $n$  распределения

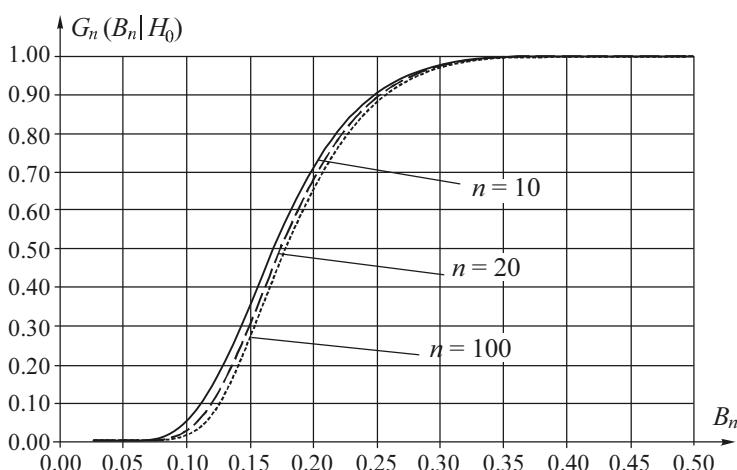


Рис. 5.23. Зависимость распределения  $G(B_n | H_0)$  статистики  $B_n$  от объема выборки

$G(B_n | H_0)$  статистики смещаются вправо и достаточно быстро сходятся к некоторому предельному распределению. При объемах выборок  $n > 100$  распределения статистики уже существенно не меняются.

Полученная в [46] таблица процентных точек для распределений статистики Фросини наиболее доступна в [206]. Гипотеза о принадлежности выборки нормальному закону отклоняется при больших значениях статистики. В табл. 5.10 представлены значения процентных точек для статистики критерия Фросини, полученные в данной работе, и расширяющие таблицы, приводимые в [46, 206], на большие значения объемов выборок  $n$ .

Таблица 5.10

## Процентные точки для статистик критерия Фросини

$n$	$p = 1 - \alpha$				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
10	0.233	0.250	0.277	0.302	0.332
20	0.237	0.255	0.283	0.308	0.338
30	0.239	0.257	0.284	0.310	0.342
40	0.239	0.257	0.285	0.310	0.342
50	0.240	0.258	0.285	0.312	0.342
100	0.241	0.258	0.286	0.312	0.344
150	0.241	0.259	0.287	0.313	0.345
200	0.241	0.259	0.287	0.313	0.345
300	0.242	0.259	0.288	0.314	0.345

На рис. 5.24 приведены графики распределения статистики  $B_n$  при справедливости различных гипотез (при различных наблюдаемых законах) для объемов выборок  $n=10$ , которые позволяют судить о мощности критерия относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез. Значения мощности критерия Фросини относительно конкурирующей гипотезы  $H_1$  приведены в табл. 5.11, а мощности критерия по отношению к гипотезам  $H_2$  и  $H_3$  – в табл. 5.12 и 5.13 соответственно.

У критерия Фросини отсутствует недостаток, свойственный при малых  $n$  ( $n \leq 20$ ) критериям Шапиро–Уилка и Эпсса–Палли по отношению к конкурирующей гипотезе  $H_1$  [231].

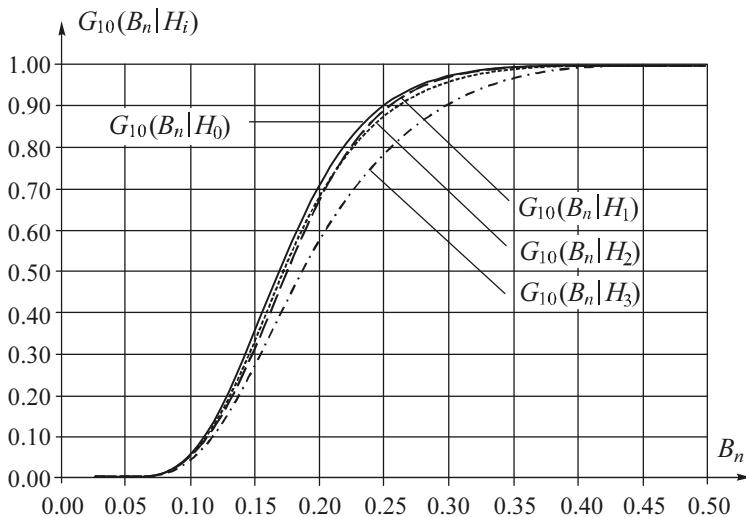


Рис. 5.24. Условные распределения  $G(B_n | H_i)$  статистики  $B_n$  при объеме выборок  $n = 10$

Таблица 5.11

**Значения мощности критерия Фросини  
относительно гипотезы  $H_1$**

$n$	$\alpha$				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.175	0.117	0.057	0.027	0.010
20	0.224	0.155	0.080	0.041	0.016
30	0.273	0.197	0.109	0.057	0.023
40	0.325	0.242	0.140	0.078	0.034
50	0.376	0.286	0.173	0.099	0.046
100	0.602	0.506	0.361	0.245	0.138
150	0.768	0.689	0.548	0.416	0.270
200	0.874	0.817	0.702	0.577	0.421
300	0.969	0.947	0.892	0.817	0.694

Таблица 5.12

**Значения мощности критерия Фросини  
относительно гипотезы  $H_2$**

$n$	$\alpha$				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.278	0.216	0.141	0.093	0.053
20	0.407	0.336	0.242	0.175	0.113
30	0.515	0.442	0.339	0.257	0.176
40	0.611	0.540	0.432	0.342	0.247
50	0.689	0.623	0.517	0.421	0.319
100	0.911	0.879	0.816	0.745	0.647
150	0.978	0.967	0.941	0.907	0.850
200	0.995	0.992	0.983	0.970	0.945
300	1.000	1.000	0.999	0.998	0.995

Таблица 5.13

**Значения мощности критерия Фросини  
относительно гипотезы  $H_3$**

$n$	$\alpha$				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.183	0.130	0.072	0.041	0.019
20	0.212	0.154	0.090	0.054	0.028
30	0.234	0.174	0.106	0.065	0.034
40	0.257	0.194	0.121	0.075	0.040
50	0.277	0.211	0.134	0.085	0.047
100	0.373	0.299	0.204	0.138	0.081
150	0.461	0.383	0.274	0.194	0.120
200	0.540	0.460	0.344	0.252	0.165
300	0.672	0.598	0.479	0.375	0.265

В то же время можно заметить, что критерий Фросини обладает не очень высокой мощностью и, в частности, уступает по мощности критериям согласия Андерсона–Дарлинга и типа  $\chi^2$  Никулина.

## 5.12. Критерии Хегази–Грина

Хегази и Грин в [58] предложили критерии со статистиками

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |z_i - \eta_i|, \quad (5.12)$$

$$T_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{z_i - \eta_i\}^2, \quad (5.13)$$

где  $z_i = \frac{x(i) - \bar{x}}{s}$ ;  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ;  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ ;  $\eta_i$  – математическое ожидание  $i$ -й порядковой статистики стандартного нормального закона, которое можно найти из соотношения  $\eta_i = \Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)$ .

Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистик. Подчеркнем, что в статистике должна использоваться именно несмещенная оценка дисперсии, это не учтено в [206].

Распределения этих статистик очень сильно зависят от объема выборки. Например, зависимость условных распределений  $G(T_1 | H_0)$  статистики  $T_1$  от  $n$  иллюстрирует рис. 5.25.

Таблицы процентных точек для данных критериев при некоторых объемах выборок приводятся в [58, 206]. В табл. 5.14 представлены процентные точки для статистик  $T_1$  и  $T_2$  критерия Хегази–Грина, полученные в данной работе и расширяющие таблицы, приведенные в [58, 207].

На рис. 5.26 показаны условные функции распределения  $G(T_1 | H_i)$  статистики  $T_1$  при справедливости гипотез  $H_0, H_1, H_2, H_3$  при объемах выборок  $n = 10$ . При  $n = 10$  и  $n = 20$  критерий практически не различает гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  (аналогично критериям Шапиро–Уилка и Эпписа–Палли он оказывается смещенным). Но уже при  $n \geq 30$  для всех задаваемых уровней значимости  $\alpha$  критерий способен различать эти конкурирующие гипотезы.

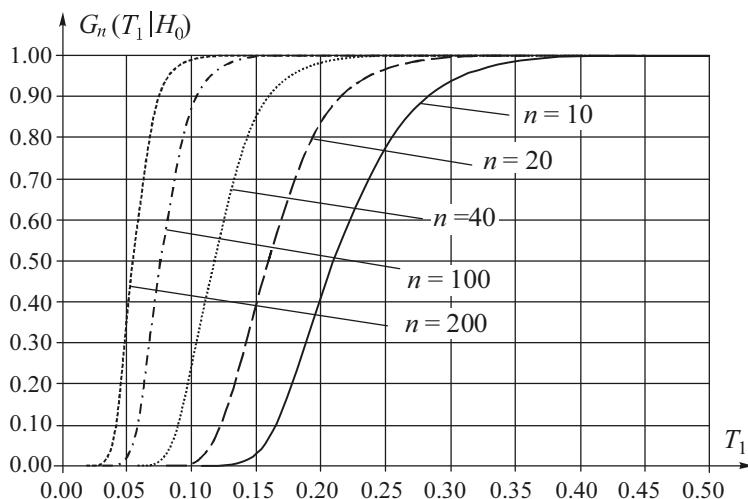


Рис. 5.25. Зависимость распределений статистики  $T_1$  от объема выборки

Таблица 5.14

**Процентные точки для статистик  $T_1$  и  $T_2$  критерия Хегази–Грина**

$n$	$1 - \alpha$									
	$T_1$					$T_2$				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
10	0.268	0.285	0.312	0.338	0.370	0.112	0.127	0.153	0.180	0.216
20	0.205	0.218	0.239	0.259	0.284	0.072	0.082	0.100	0.118	0.143
40	0.151	0.161	0.177	0.191	0.210	0.043	0.049	0.060	0.070	0.085
60	0.126	0.134	0.147	0.159	0.174	0.031	0.035	0.043	0.050	0.061
80	0.110	0.117	0.128	0.139	0.152	0.024	0.028	0.033	0.039	0.047
100	0.099	0.105	0.115	0.125	0.137	0.020	0.023	0.028	0.032	0.039
200	0.071	0.075	0.083	0.090	0.098	0.011	0.012	0.015	0.017	0.021
300	0.058	0.062	0.068	0.073	0.080	0.008	0.009	0.010	0.012	0.014

На рис. 5.27 приведены условные функции распределения  $G(T_2 | H_i)$  статистики  $T_2$  при справедливости гипотез  $H_0$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  и объемах выборок  $n=10$ . Как видим, относительно конкурирующей

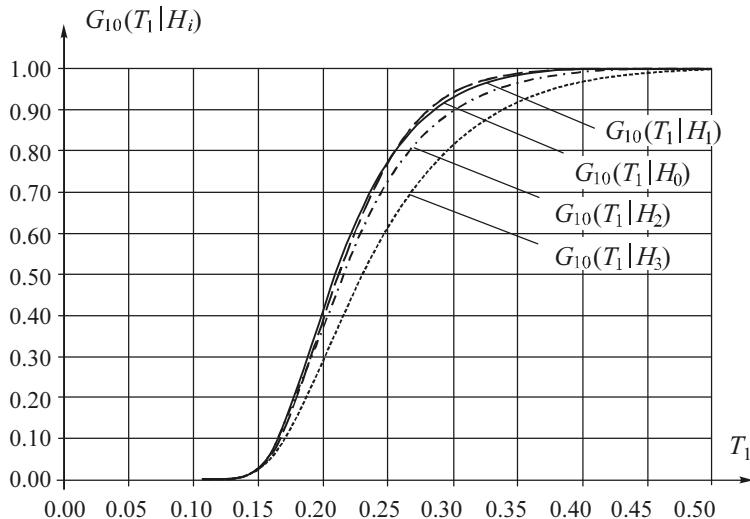


Рис. 5.26. Условные распределения  $G_n(T_1 | H_i)$  статистики  $T_1$  и справедливости гипотез при объеме выборок  $n = 10$

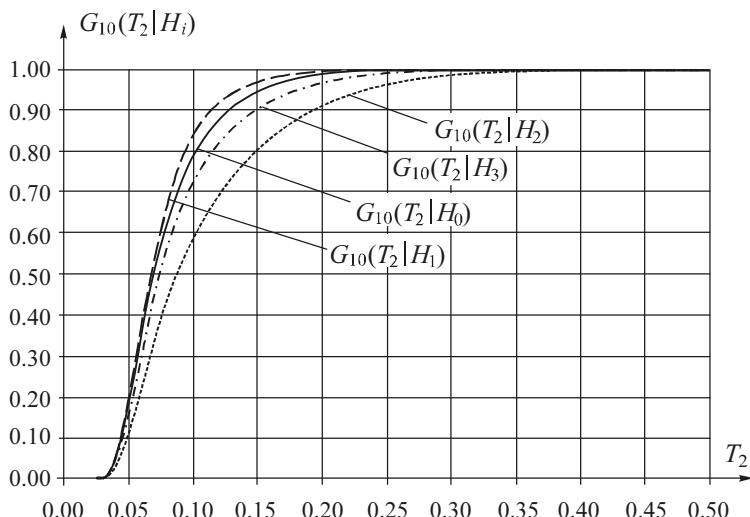


Рис. 5.27. Условные распределения  $G_n(T_2 | H_i)$  статистики  $T_2$  и справедливости гипотез при объеме выборок  $n = 10$

гипотезы  $H_1$  этот критерий также оказывается смещенным. Распределение  $G(T_2 | H_1)$  смещено влево относительно распределения  $G(T_2 | H_0)$  и, следовательно, при справедливости  $H_1$  критерий с большей уверенностью признает истинность  $H_0$ .

Полученные оценки значений мощности критериев Хегази–Грина относительно рассмотренных конкурирующих гипотез  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  приведены в табл. 5.15–5.17.

Таблица 5.15

**Значения мощности критериев Хегази–Грина относительно гипотезы  $H_1$** 

$n$	$\alpha$									
	$T_1$					$T_2$				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.148	0.095	0.043	0.019	0.007	0.110	0.067	0.028	0.012	0.004
20	0.172	0.112	0.052	0.023	0.008	0.085	0.046	0.016	0.006	0.001
40	0.253	0.176	0.090	0.044	0.016	0.095	0.050	0.016	0.005	0.001
60	0.352	0.261	0.148	0.079	0.032	0.137	0.077	0.026	0.008	0.001
80	0.455	0.356	0.221	0.129	0.058	0.198	0.119	0.045	0.015	0.003
100	0.552	0.450	0.302	0.191	0.096	0.271	0.175	0.075	0.028	0.006
200	0.877	0.818	0.700	0.570	0.402	0.680	0.562	0.370	0.219	0.093
300	0.976	0.959	0.912	0.843	0.723	0.913	0.854	0.720	0.561	0.352

Таблица 5.16

**Значения мощности критериев Хегази–Грина относительно гипотезы  $H_2$** 

$n$	$\alpha$									
	$T_1$					$T_2$				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.307	0.242	0.161	0.106	0.060	0.347	0.277	0.185	0.123	0.071
20	0.454	0.382	0.282	0.207	0.135	0.517	0.441	0.332	0.247	0.165
40	0.661	0.594	0.486	0.392	0.290	0.718	0.651	0.542	0.443	0.332
60	0.793	0.740	0.646	0.554	0.441	0.832	0.781	0.688	0.596	0.480
80	0.877	0.838	0.764	0.685	0.580	0.900	0.863	0.791	0.712	0.605
100	0.928	0.901	0.846	0.783	0.693	0.941	0.915	0.862	0.799	0.705
200	0.996	0.994	0.987	0.976	0.955	0.996	0.993	0.986	0.973	0.948
300	1.000	1.000	0.999	0.998	0.996	1.000	1.000	0.999	0.997	0.993

Таблица 5.17

**Значения мощности критериев Хегази–Грина относительно гипотезы  $H_3$**

$n$	$\alpha$									
	$T_1$					$T_2$				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.197	0.141	0.081	0.047	0.022	0.219	0.160	0.093	0.055	0.027
20	0.241	0.180	0.111	0.068	0.036	0.291	0.225	0.146	0.095	0.053
40	0.307	0.240	0.158	0.103	0.059	0.393	0.321	0.225	0.158	0.099
60	0.362	0.291	0.198	0.135	0.081	0.469	0.394	0.290	0.213	0.140
80	0.411	0.337	0.238	0.167	0.104	0.530	0.455	0.347	0.262	0.181
100	0.456	0.380	0.275	0.198	0.127	0.581	0.508	0.399	0.310	0.218
200	0.638	0.564	0.451	0.353	0.249	0.760	0.699	0.598	0.504	0.394
300	0.765	0.703	0.597	0.497	0.380	0.861	0.817	0.736	0.653	0.544

Оба критерия Хегази–Грина демонстрируют более высокую мощность по сравнению с критериями Шапиро–Уилка и Эппса–Палли относительно конкурирующих гипотез  $H_2$  и  $H_3$ . Однако по отношению к гипотезам типа  $H_1$  при малых объемах выборок оба критерия оказываются смещенными, особенно критерий со статистикой  $T_2$  (смещение даже больше, чем у критериев Шапиро–Уилка и Эппса–Палли).

### 5.13. Критерий Гири

Гири в работах [49, 47, 48] рассмотрел критерий проверки отклонения от нормального закона, основанный на статистике

$$d = \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|, \quad (5.14)$$

где  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ . Критерий является двусторонним, и

гипотеза о нормальности не отклоняется, если  $d_{\alpha/2} \leq d \leq d_{1-\alpha/2}$ .

Зависимость условных распределений  $G(d|H_0)$  статистики (5.14) от  $n$  иллюстрирует рис. 5.28.

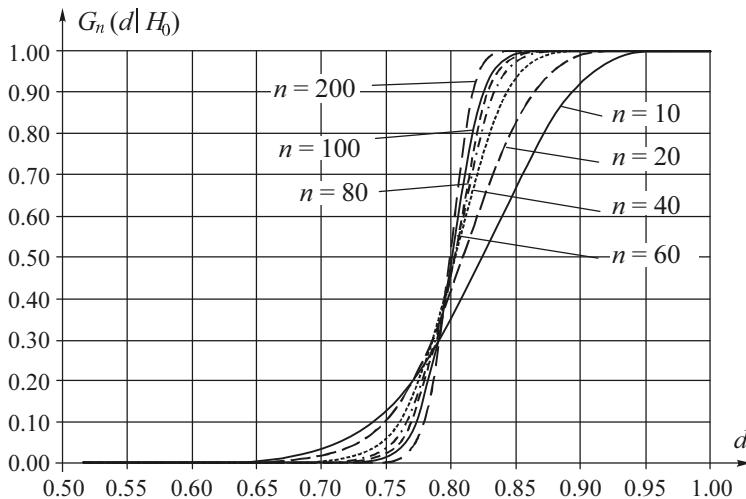


Рис. 5.28. Зависимость распределений статистики  $d$  от объема выборки

Автор критерия утверждает, что статистика критерия при  $n \geq 50$  распределена асимптотически нормально. Выражения для математического ожидания и дисперсии асимптотического закона представлены, например, в [206]. Однако на самом деле распределения статистики асимметричны и плохо аппроксимируются нормальным законом, тем более, с указанными в [206] параметрами.

Таблицы процентных точек для некоторых объемов выборок приводятся в [25]. В табл. 5.18 представлены процентные точки  $d_{\alpha/2}$  и  $d_{1-\alpha/2}$  статистики критерия Гири, полученные в данной работе. Эти результаты расширяют область применения критерия.

На рис. 5.29 показаны условные функции распределения  $G(d | H_i)$  статистики  $d$  при справедливости гипотез  $H_0, H_1, H_2, H_3$  при объеме выборок  $n = 10$ . Проверяемая гипотеза отклоняется при значениях статистики, меньших  $d_{\alpha/2}$  и больших  $d_{1-\alpha/2}$ .

Полученные значения оценок мощности относительно конкурирующих гипотез  $H_1, H_2, H_3$  представлены в табл. 5.19–5.21. Критерий Гири с простой статистикой (5.14) достаточно уверенно демонстрирует высокую мощность по отношению к различным конкурирующим гипотезам.

Таблица 5.18

Процентные точки для статистики  $d$  критерия Гири

$n$	$\alpha$									
	0.15		0.10		0.05		0.025		0.01	
	$\alpha/2$	$1 - \alpha/2$								
10	0.729	0.902	0.715	0.911	0.691	0.924	0.670	0.935	0.644	0.948
20	0.741	0.870	0.730	0.878	0.713	0.889	0.697	0.899	0.678	0.910
40	0.754	0.848	0.747	0.854	0.735	0.863	0.724	0.871	0.710	0.879
60	0.761	0.839	0.755	0.844	0.746	0.851	0.737	0.858	0.726	0.865
80	0.766	0.833	0.761	0.838	0.752	0.844	0.745	0.850	0.736	0.857
100	0.769	0.829	0.764	0.833	0.757	0.839	0.750	0.845	0.742	0.851
200	0.777	0.820	0.774	0.823	0.769	0.827	0.764	0.831	0.759	0.836

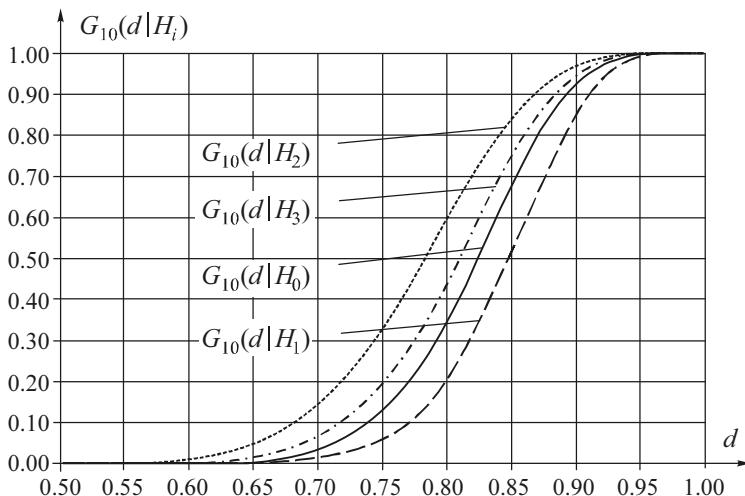


Рис. 5.29. Условные распределения  $G_n(d|H_i)$  статистики  $d$  критерия Гири при справедливости различных гипотез и объеме выборок  $n = 10$

Таблица 5.19

**Значения мощности критерия Гири относительно конкурирующей гипотезы  $H_1$**

$n$	$\alpha$				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.174	0.120	0.064	0.034	0.014
20	0.247	0.181	0.105	0.061	0.029
40	0.409	0.326	0.215	0.138	0.075
60	0.546	0.457	0.328	0.228	0.136
80	0.662	0.577	0.441	0.328	0.211
100	0.750	0.674	0.544	0.424	0.294
200	0.953	0.927	0.866	0.790	0.669

Таблица 5.20

**Значения мощности критерия Гири относительно конкурирующей гипотезы  $H_2$**

$n$	$\alpha$				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.267	0.204	0.130	0.082	0.043
20	0.442	0.371	0.274	0.201	0.132
40	0.694	0.630	0.528	0.435	0.330
60	0.838	0.792	0.709	0.625	0.519
80	0.917	0.888	0.829	0.764	0.671
100	0.958	0.940	0.902	0.855	0.784
200	0.999	0.998	0.996	0.992	0.983

Таблица 5.21

**Значения мощности критерия Гири относительно конкурирующей гипотезы  $H_3$**

$n$	$\alpha$				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.182	0.127	0.069	0.038	0.017
20	0.227	0.169	0.103	0.063	0.033
40	0.305	0.240	0.161	0.108	0.064
60	0.372	0.303	0.214	0.151	0.096
80	0.431	0.361	0.266	0.195	0.128
100	0.486	0.415	0.313	0.235	0.160
200	0.695	0.631	0.527	0.433	0.329

Основной проблемой, ограничивающей применение критерия Гири на практике, является необходимость опираться на таблицы процентных точек.

## 5.14. Критерий Дэвида–Хартли–Пирсона

В критерии Дэвида–Хартли–Пирсона [29] рассматривается отношение размаха выборки к выборочному стандартному отклонению, и его статистика имеет вид

$$U = \frac{R}{s}, \quad (5.15)$$

где  $R = x_{\max} - x_{\min}$  – размах выборки;  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  – несмешенная оценка дисперсии.

Рис. 5.30 иллюстрирует зависимость распределений статистики  $U$  от объема выборки при справедливости проверяемой гипотезы.

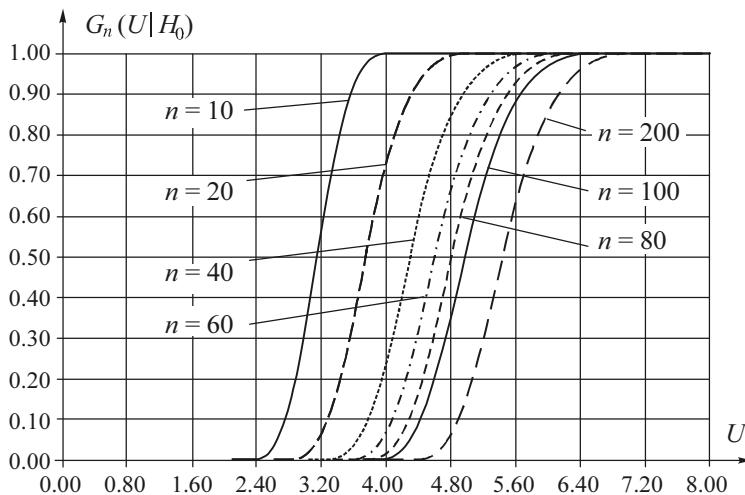


Рис. 5.30. Зависимость распределений статистики  $U$  от объема выборки

Критерий двусторонний: гипотеза о нормальности распределения отвергается, если  $U < U_{\alpha/2}$  или  $U > U_{1-\alpha/2}$ . В табл. 5.22 приведены

процентные точки критерия Дэвида–Хартли–Пирсона для объемов выборок, использованных в данной работе.

Таблица 5.22

Процентные точки для статистики  $U$  критерия Дэвида–Хартли–Пирсона

$n$	0.15		0.1		0.05		0.025		0.01	
	$\alpha/2$	$1 - \alpha/2$								
10	2.723	3.624	2.670	3.686	2.593	3.778	2.530	3.854	2.458	3.936
20	3.240	4.392	3.178	4.488	3.087	4.633	3.012	4.763	2.927	4.915
40	3.741	5.046	3.674	5.162	3.574	5.345	3.493	5.507	3.401	5.708
60	4.028	5.384	3.958	5.508	3.856	5.704	3.769	5.886	3.674	6.106
80	4.230	5.607	4.158	5.735	4.054	5.937	3.967	6.124	3.870	6.354
100	4.382	5.774	4.311	5.905	4.206	6.112	4.117	6.302	4.018	6.536
200	4.847	6.255	4.774	6.388	4.668	6.600	4.578	6.799	4.474	7.044

На рис. 5.31 показаны условные распределения  $G(U|H_i)$  статистики  $U$  при справедливости гипотез  $H_0, H_1, H_2, H_3$  и объемах выборок  $n=10$ .

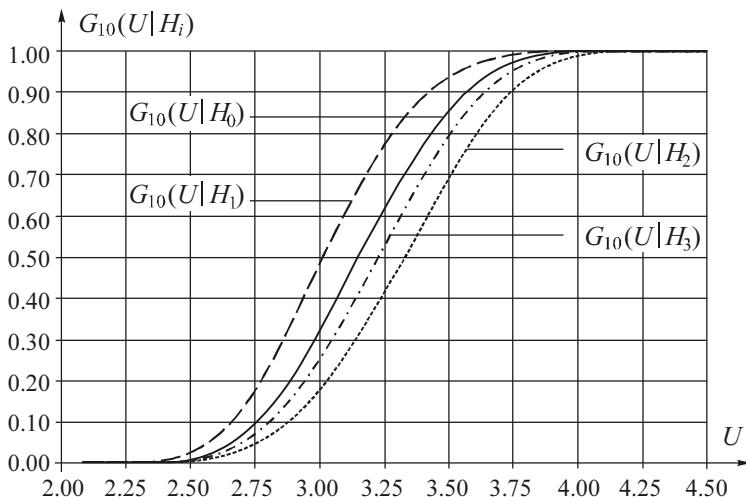


Рис. 5.31. Условные распределения  $G(U|H_i)$  статистики  $U$  при справедливости различных гипотез и объемах выборок  $n = 10$

Полученные оценки мощности для рассматриваемых конкурирующих гипотез приведены в табл. 5.23–5.25. Мощность критерия относительно  $H_1$  практически совпадает с мощностью критерия Гири, однако он существенно уступает последнему по отношению к конкурирующим гипотезам  $H_2$  и  $H_3$ .

Таблица 5.23

**Значения мощности критерия Дэвида–Хартли–Пирсона  
относительно конкурирующей гипотезы  $H_1$**

$n$	$\alpha$				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.176	0.121	0.064	0.034	0.014
20	0.251	0.185	0.107	0.061	0.028
40	0.417	0.332	0.217	0.140	0.075
60	0.552	0.461	0.327	0.224	0.132
80	0.658	0.569	0.428	0.314	0.199
100	0.734	0.655	0.519	0.396	0.264
200	0.919	0.878	0.793	0.694	0.554

Таблица 5.24

**Значения мощности критерия Дэвида–Хартли–Пирсона  
относительно конкурирующей гипотезы  $H_2$**

$n$	$\alpha$				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.218	0.157	0.091	0.052	0.026
20	0.357	0.289	0.199	0.134	0.078
40	0.513	0.443	0.342	0.263	0.183
60	0.615	0.546	0.441	0.352	0.259
80	0.688	0.623	0.518	0.427	0.325
100	0.741	0.680	0.579	0.486	0.380
200	0.884	0.842	0.764	0.682	0.574

Таблица 5.25

**Значения мощности критерия Дэвида–Хартли–Пирсона  
относительно конкурирующей гипотезы  $H_3$**

$n$	$\alpha$				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.168	0.114	0.059	0.031	0.013
20	0.220	0.161	0.094	0.054	0.026
40	0.291	0.228	0.150	0.101	0.059
60	0.345	0.279	0.194	0.135	0.084
80	0.391	0.322	0.232	0.167	0.108
100	0.429	0.359	0.264	0.195	0.130
200	0.566	0.494	0.390	0.304	0.217

В целом на основании анализа мощности относительно различных конкурирующих гипотез можно констатировать, что критерий Дэвида–Хартли–Пирсона уступает остальным рассмотренным в [267] критериям.

## 5.15. Критерий Шпигельхальтера

Его статистика [134] базируется на комбинации статистик критериев Гири [49] и Дэвида, Хартли и Пирсона [29] и имеет вид

$$T' = \left\{ (C_n U)^{-(n-1)} + g^{-(n-1)} \right\}^{\frac{1}{n-1}}, \quad (5.16)$$

где  $C_n = \frac{1}{2n} (n!)^{\frac{1}{n-1}}$ ;  $U$  – статистика (5.15) критерия Дэвида–Хартли–Пирсона;  $g = \frac{d}{\sqrt{(n-1)/n}}$ ;  $d$  – статистика (5.14) критерия Гири.

Проверяемая гипотеза о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону по критерию Шпигельхальтера отклоняется при больших значениях статистики  $T'$ .

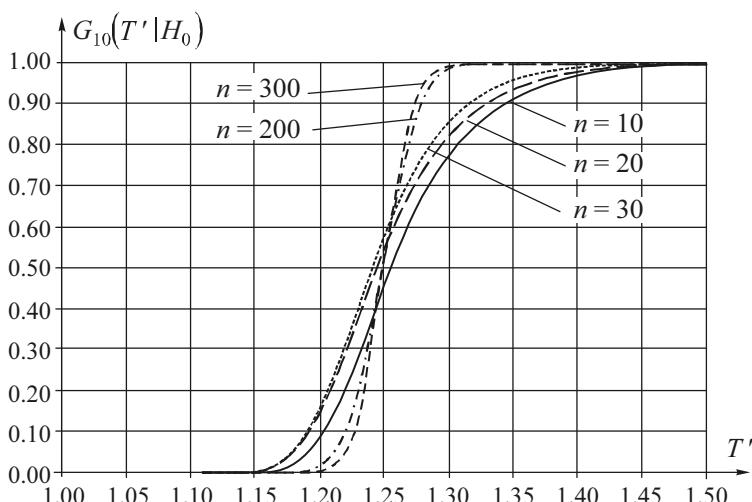
Значения процентных точек для статистики  $T'$  критерия Шпигельхальтера, полученные в результате моделирования, приведены

в табл. 5.26. Зависимость распределения статистики  $T'$  от объема выборки в случае справедливости проверяемой гипотезы иллюстрирует рис. 5.32.

Таблица 5.26

Процентные точки для статистики  $T'$  критерия Шпигельхальтера

$n$	$\alpha$				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
10	1.323	1.344	1.380	1.416	1.460
20	1.311	1.331	1.365	1.396	1.435
30	1.300	1.318	1.346	1.373	1.406
40	1.293	1.308	1.332	1.355	1.383
50	1.288	1.302	1.323	1.342	1.366
100	1.279	1.288	1.302	1.314	1.329
150	1.275	1.283	1.294	1.304	1.315
200	1.273	1.279	1.289	1.297	1.307
300	1.270	1.275	1.283	1.289	1.297

Рис. 5.32. Зависимость распределения статистики  $T'$  от объема выборки в случае нормального закона

Однако данный критерий **имеет** очень **существенный недостаток**: критерий со статистикой (5.16) способен отличить от нормального закона далеко не все конкурирующие распределения. В частности, это касается конкурирующей гипотезы  $H_1$ .

Мощность любого корректно построенного критерия должна увеличиваться с ростом  $n$ . В принципе, так и происходит с мощностью критерия Шпигельхальтера по отношению к конкурирующим гипотезам  $H_2$  и  $H_3$ .

Совсем другая картина наблюдается относительно гипотезы  $H_1$ . На рис. 5.33–5.35 показаны условные функции распределения  $G(T'|H_i)$  статистики  $T'$  при справедливости гипотез  $H_0$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  и объемах выборок  $n = 10, 50, 300$ . Можно видеть, что вследствие специфичного поведения условного распределения  $G(T'|H_1)$  с ростом объема выборок мощность критерия по отношению к гипотезе  $H_1$  при  $n \geq 50$  начинает уменьшаться. Далее с ростом  $n$  критерий оказывается смещенным относительно гипотезы  $H_1$  и вовсе не способен различать гипотезы  $H_0$  и  $H_1$ .

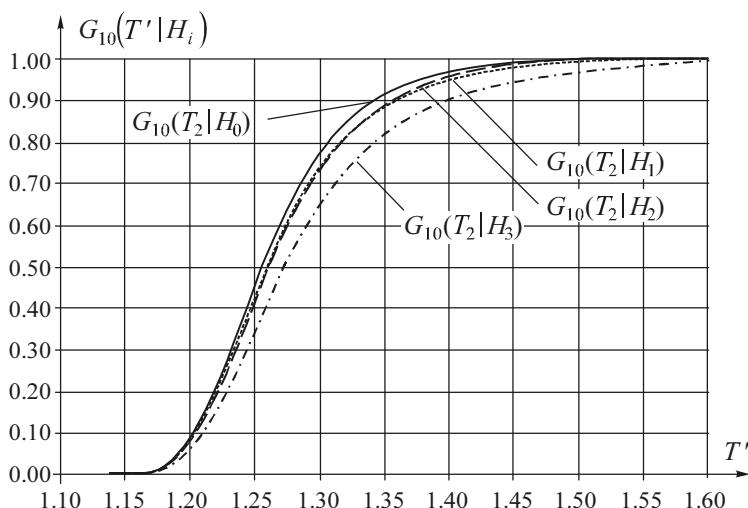


Рис. 5.33. Условные распределения  $G(T'|H_i)$  статистики  $T'$  при объеме выборок  $n = 10$

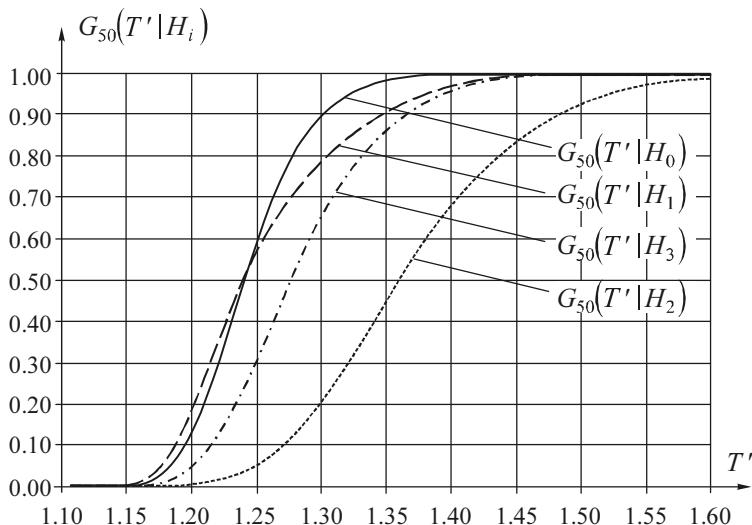


Рис. 5.34. Условные распределения  $G(S|H_i)$  статистики  $T'$  при объеме выборок  $n = 50$

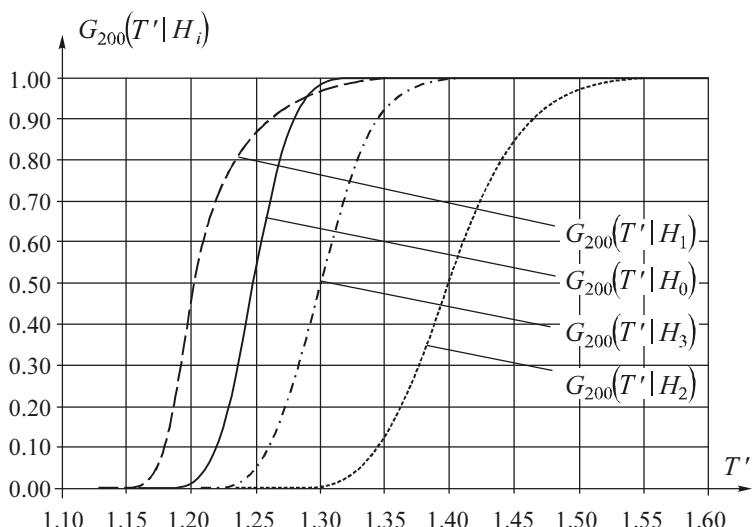


Рис. 5.35. Условные распределения  $G(S|H_i)$  статистики  $T'$  при объеме выборок  $n = 200$

Мощность критерия Шпигельхальтера по отношению к гипотезе  $H_1$  приведена в табл. 5.27, значения мощности по отношению к гипотезам  $H_2$  и  $H_3$  – в табл. 5.28 и 5.29 соответственно.

Таблица 5.27

**Мощность критерия Шпигельхальтера относительно гипотезы  $H_1$** 

$n$	$\alpha$				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.184	0.126	0.064	0.031	0.011
20	0.233	0.174	0.104	0.060	0.028
30	0.257	0.203	0.135	0.087	0.047
40	0.262	0.214	0.150	0.103	0.061
50	0.257	0.213	0.155	0.111	0.070
100	0.184	0.156	0.119	0.090	0.064
150	0.119	0.100	0.076	0.058	0.042
200	0.076	0.063	0.048	0.036	0.026
300	0.029	0.025	0.018	0.013	0.010

Таблица 5.28

**Мощность критерия Шпигельхальтера относительно гипотезы  $H_2$** 

$n$	$\alpha$				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.264	0.201	0.131	0.086	0.051
20	0.468	0.390	0.283	0.206	0.135
30	0.640	0.561	0.441	0.340	0.239
40	0.763	0.696	0.582	0.476	0.356
50	0.845	0.791	0.693	0.595	0.474
100	0.981	0.968	0.940	0.903	0.841
150	0.997	0.995	0.989	0.979	0.958
200	1.000	0.999	0.998	0.996	0.990
300	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Таблица 5.29

**Мощность критерия Шпигельхальтера относительно гипотезы  $H_3$**

$n$	$\alpha$				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.179	0.125	0.070	0.039	0.019
20	0.239	0.177	0.106	0.064	0.034
30	0.305	0.234	0.147	0.093	0.051
40	0.369	0.291	0.193	0.127	0.072
50	0.425	0.344	0.237	0.162	0.097
100	0.614	0.532	0.410	0.313	0.215
150	0.727	0.652	0.533	0.428	0.315
200	0.803	0.740	0.632	0.529	0.409
300	0.898	0.856	0.775	0.687	0.571

Отмеченный выше недостаток критерия Шпигельхальтера не дает возможности рекомендовать его применение при решении прикладных задач.

## 5.16. Выводы

Использование критериев согласия для проверки отклонений от нормального закона при малых объемах выборок является бесперспективным из-за их очень низкой мощности в такой ситуации по отношению к близким конкурирующим гипотезам [163, 256, 261, 302]. Совсем другое дело – при больших  $n$ . При малых  $n$  предпочтение необходимо отдать специальным критериям проверки отклонений от нормальности.

Результаты работы [231] позволяют сформулировать следующие выводы.

Критерий Эппса–Палли при близких конкурирующих гипотезах по мощности не уступает критерию Шапиро–Уилка.

Недостатком критериев Шапиро–Уилка, Эппса–Палли и критерия со статистикой (5.10), который ранее никем не отмечался, является их смещенност при малых объемах выборок по отношению к конкурирующим гипотезам, которым соответствуют плотности, более плосковершинные по сравнению с нормальным законом (со значением эксцесса, меньшим 3), т. е. критерии не способны отличать такие законы от нормального.

Модифицированный критерий Шапиро–Уилка, рекомендованный стандартом [176], нецелесообразно использовать из-за очень плохой сходимости распределения статистики к предельному (и повышенной вследствие этого вероятности ошибок первого рода).

Критерием, который, по крайней мере, не уступает по мощности при близких альтернативах критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Палли, и не имеет недостатка, свойственного последним, является критерий со статистикой (5.9). Именно его целесообразно рекомендовать для применения.

Общим недостатком всех рассмотренных в [267] критериев является зависимость распределений статистик от объемов выборок и неизвестность аналитических распределений статистик. Поэтому при принятии решения о результатах проверки гипотезы приходится ориентироваться на значения процентных точек, нельзя оценить достигнутый уровень значимости, трудно судить о степени соответствия или несоответствия наблюдаемой выборки нормальному закону.

Результаты сравнительного анализа критериев, проведенного в [267], в определенной степени иллюстрируют рис. 5.36–5.38, где показана зависимость мощности критериев от объемов выборок относительно конкурирующих гипотез  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_3$  при вероятности ошибки первого рода  $\alpha = 0.1$ .

Опираясь на проведенные исследования свойств рассмотренных критериев и с учетом показанной ими мощности относительно конкурирующих гипотез  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ , данные критерии можно проранжировать по мощности следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Гири} &\succ \text{Шпигельгалтера}^1 \succ \text{Хегази–Грина } (T_2)^2 \\ &\succ \text{Хегази–Грина } (T_1)^3 \succ \text{Дэвида–Хартли–Пирсона} \succ \text{Фросини}. \end{aligned}$$

Однако при этом необходимо учитывать нижеприведенные существенные недостатки критериев Шпигельхалтера и Хегази–Грина.

1. Критерий Шпигельхалтера не способен отличить от проверяемой конкурирующие гипотезы типа  $H_1$ .

2. Критерий Хегази–Грина со статистикой  $T_2$  при малых объемах выборок вследствие смещения также не способен отличать от проверяемой гипотезы  $H_0$  конкурирующую гипотезу вида  $H_1$ .

3. Критерий Хегази–Грина со статистикой  $T_1$  при малых объемах выборок, как и критерии Шапиро–Уилка и Эппса–Палли [231], несколько смещен относительно конкурирующих гипотез типа  $H_1$ .

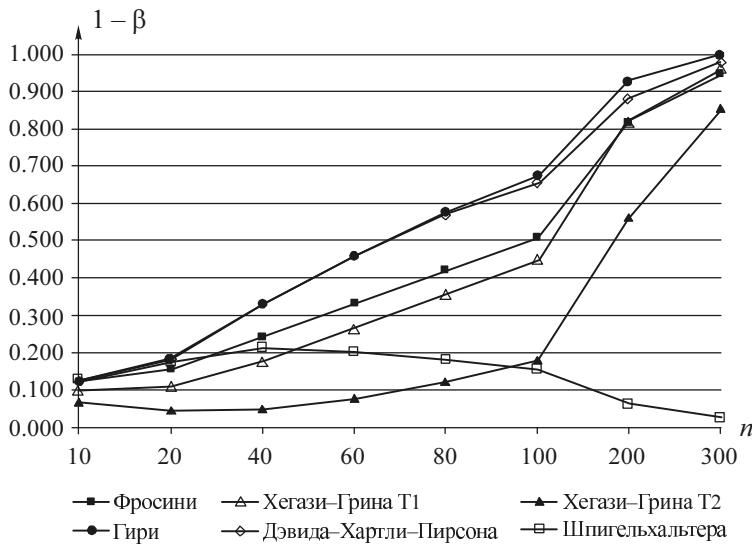


Рис. 5.36. Мощности критериев по отношению к конкурирующей гипотезе  $H_1$  в зависимости от  $n$  при  $\alpha = 0.1$

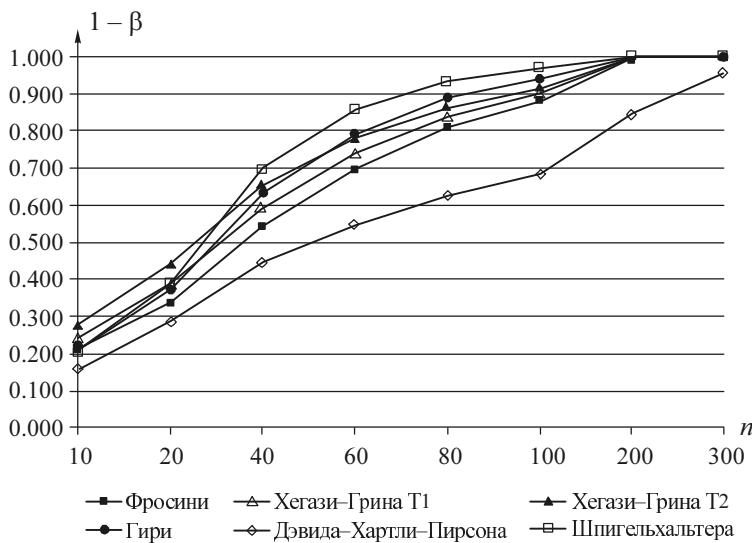


Рис. 5.37. Мощности критериев по отношению к конкурирующей гипотезе  $H_2$  в зависимости от  $n$  при  $\alpha = 0.1$

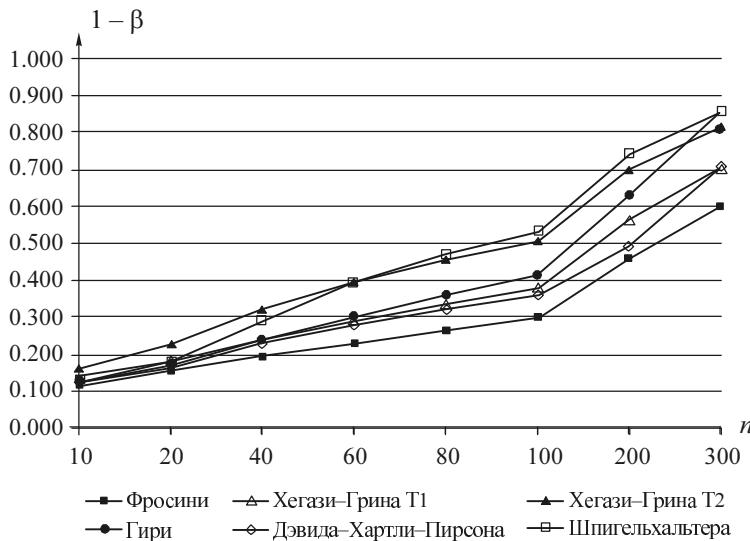


Рис. 5.38. Мощности критериев по отношению к конкурирующей гипотезе  $H_3$  в зависимости от  $n$  при  $\alpha = 0.1$

В приведенном ряду предпочтительности критерий Эппса–Палли [40], включенный в стандарт [176], на основании показанной им мощности [231] должен занять место за критерием Хегази–Грина со статистикой  $T_1$ , а критерий Шапиро–Уилка [130, 129] – сразу после критерия Дэвида–Хартли–Пирсона.

В работе [231] мы отдали предпочтение критерию со статистикой  $z_2$  [25], который относительно рассмотренных конкурирующих гипотез  $H_1$  и  $H_3$  показал себя наиболее мощным. В приведенном выше ряду предпочтения он просится на первое место. Однако по отношению к более далекой конкурирующей гипотезе  $H_2$  он уступает по мощности остальным критериям.

Следует отметить, что относительно наиболее близкой конкурирующей гипотезы  $H_3$  критерии согласия  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга и критерий типа  $\chi^2$  Никулина [288, 287] в условиях проверки сложной гипотезы [236, 92, 238] лишь немногим уступают по мощности критериям со статистикой  $z_2$ , Хегази–Грина, Шпигельхальтера и Гири, превосходя остальные критерии проверки отклонения от нормального закона.

Проверка отклонения распределения от нормального закона имеет особое значение. Далеко не всегда ошибки измерений, связанные с приборами, построенными на конкретных физических принципах, или ошибки наблюдений контролируемого показателя подчиняются нормальному закону [290, 296]. В таких случаях применение классического аппарата, опирающегося на предположение о нормальности наблюдаемого закона, оказывается некорректным и может приводить к неверным выводам.

---

## 6. КРИТЕРИИ ОДНОРОДНОСТИ

---

### 6.1. Введение

**С** необходимостью решения задач проверки гипотез о принадлежности двух выборок случайных величин одной и той же генеральной совокупности (проверки однородности) постоянно сталкиваются при анализе случайных ошибок средств измерений, при статистическом управлении качеством процессов. Такая задача естественно возникает при проверке средств измерений, когда пытаются убедиться в том, что закон распределения случайных ошибок измерений не претерпел существенных изменений по истечении некоторого интервала времени. При обработке экспериментального материала очень часто ее приходится решать технологам, медикам, биологам.

Среди множества статистических критериев (параметрических и непараметрических), используемых для проверки однородности, выделяют три группы критериев: для проверки гипотез о средних (о математических ожиданиях и медианах), для проверки гипотез о характеристиках рассеяния (о дисперсиях и размахах), для проверки гипотез о законах распределения.

У исследователя, стоящего перед проблемой решения таких задач, несмотря на обилие публикаций, возникает множество вопросов, так как остается не ясным, в каких случаях применение какого критерия предпочтительнее.

Такие вопросы возникают относительно критериев проверки гипотез о средних, где мы имеем множество критериев (параметрических и непараметрических), но нет четких указаний и сведений о преимуществе тех или иных. Например, о степени их устойчивости к отклонениям от стандартных предположений, о результатах сравнения мощности критериев. Отсутствие указаний не позволяет в конкретной ситуации выбрать наиболее мощный критерий. По некоторым критериям

проверки гипотез о средних имеется информация об относительной устойчивости распределений статистик к отклонениям наблюдаемого закона от нормального [247, 234]. По другим критериям это требует дополнительных исследований.

Критерии проверки гипотез о дисперсиях, наоборот, весьма чувствительны к любым отклонениям от предположений, в условиях которых они были получены. И также отсутствует или противоречива информация о мощности соответствующих критериев [163, 240, 73].

Неотклонение проверяемых гипотез о равенстве средних и (или) равенстве дисперсий еще не говорит о принадлежности выборок одной и той же генеральной совокупности, а говорит лишь о возможном равенстве числовых характеристик, но не законов распределения. Выбор же критериев проверки гипотез относительно законов распределения, соответствующих двум выборкам, более скромен. Как правило, на практике используется либо критерий Смирнова, либо критерий Лемана–Розенблatta [163]. Предпочтительность использования данных критериев для проверки однородности обсуждалась в [293].

Цель работ [228, 84] состояла в исследовании распределений статистик и мощности критериев Смирнова и Лемана–Розенблatta при ограниченных объемах выборок, в уточнении объемов, начиная с которых можно реально пользоваться предельными распределениями, в выяснении характера альтернатив, относительно которых тот или иной критерий имеет преимущество в мощности. При проведении исследований использовалась методика компьютерного моделирования и анализа статистических закономерностей, хорошо зарекомендовавшая себя в предыдущих работах (например, [247, 240, 73]), базирующаяся в основном на методе статистического моделирования.

Задача проверки однородности двух выборок формулируется следующим образом. Пусть имеются две упорядоченные по возрастанию выборки размером  $m$  и  $n$ :

$$x_1 < x_2 < \dots < x_m \text{ и } y_1 < y_2 < \dots < y_n.$$

Для определенности обычно полагают, что  $m \leq n$ . Проверяется гипотеза о том, что две выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности, т. е.  $H_0: F(x) = G(x)$  при любом  $x$ .

## 6.2. Критерий Смирнова

Критерий однородности Смирнова предложен в работе [312]. Предполагается, что функции распределения  $F(x)$  и  $G(x)$  являются непрерывными. Статистика критерия Смирнова измеряет различие между эмпирическими функциями распределения, построенными по выборкам

$$D_{m,n} = \sup_x |G_m(x) - F_n(x)|.$$

При практическом использовании критерия значение статистики  $D_{m,n}$  рекомендуется вычислять в соответствии с соотношениями [163]:

$$D_{m,n}^+ = \max_{1 \leq r \leq m} \left[ \frac{r}{m} - F_n(x_r) \right] = \max_{1 \leq s \leq n} \left[ G_m(y_s) - \frac{s-1}{n} \right],$$

$$D_{m,n}^- = \max_{1 \leq r \leq m} \left[ F_n(x_r) - \frac{r-1}{m} \right] = \max_{1 \leq s \leq n} \left[ \frac{s}{n} - G_m(y_s) \right],$$

$$D_{m,n} = \max(D_{m,n}^+, D_{m,n}^-).$$

Если гипотеза  $H_0$  справедлива, то при неограниченном увеличении объемов выборок [163]  $\lim_{m \rightarrow \infty} P \left\{ \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n} < S \right\} = K(S)$ , т. е. статистика

$$S_C = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n} \quad (6.1)$$

в пределе подчиняется распределению Колмогорова  $K(S)$  [163]. Однако при ограниченных значениях  $m$  и  $n$  случайные величины  $D_{m,n}^+$  и  $D_{m,n}^-$  являются дискретными, и множество их возможных значений представляет собой решетку с шагом  $1/k$ , где  $k$  – наименьшее общее кратное  $m$  и  $n$  [163]. Для значений  $m, n \leq 20$  таблицы процентных

точек для статистики  $D_{m,n}$  приводятся в [163]. Условное распределение  $G(S_C | H_0)$  статистики  $S_C$  при справедливости гипотезы  $H_0$  медленно сходится к  $K(S)$  и существенно отличается от него при не очень больших  $m$  и  $n$ . Асимптотические формулы для распределений  $D_{m,n}^+$  и  $D_{m,n}$  рассматривались в [165, 206, 310].

На рис. 6.1 показаны условные распределения статистики (6.1) при справедливости  $H_0$  в зависимости от  $m$  и  $n$  (при  $m = n$ ). Как следует из полученной картины, даже при  $m = 1000$  и  $n = 1000$  ступенчатость  $G(S_C | H_0)$  сохраняется. Другим недостатком применения критерия со статистикой (6.1) является то (рис. 6.1), что распределения  $G(S_C | H_0)$  с ростом  $m$  и  $n$  приближаются к предельному распределению  $K(s)$  слева.

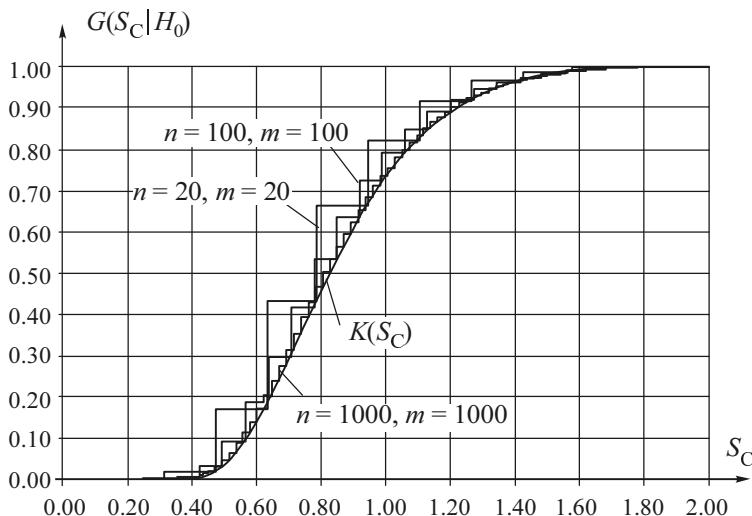


Рис. 6.1. Распределения статистики (6.1) при справедливости  $H_0$   
в зависимости от  $m$  и  $n$

Гладкость распределения статистики сильно зависит от величины  $k$ . Поэтому предпочтительнее применять критерий, когда объемы выборок  $m$  и  $n$  не равны и представляют собой взаимно простые числа.

В таких случаях наименьшее общее кратное  $m$  и  $n$  максимально и равно  $k = mn$ , а распределение статистики больше напоминает непрерывную функцию распределения. И вот тогда при небольших и умеренных значениях  $m$  и  $n$  проявляется существенное отличие распределения  $G(S_C | H_0)$  от предельного  $K(S)$ , так как  $G(S_C | H_0)$  заметно сдвинуто влево от  $K(S)$ .

В этой связи можно предложить [228, 84] следующую простую модификацию статистики (6.1):

$$S_{CM} = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \left( D_{m,n} + \frac{m+n}{4.6mn} \right), \quad (6.2)$$

у которой практически отсутствует последний недостаток. Условные распределения статистики (6.2) при справедливости  $H_0$  в зависимости от  $m$  и  $n$  (при  $m = n$ ) иллюстрирует рис. 6.2.

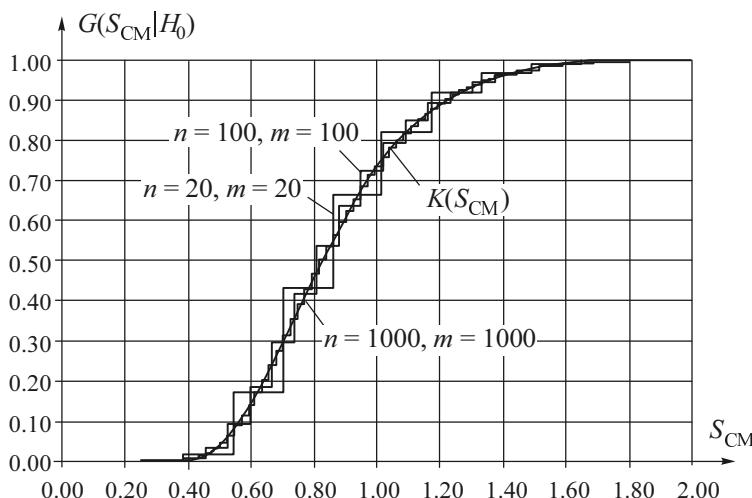


Рис. 6.2. Распределения статистики (6.2) при справедливости  $H_0$   
в зависимости от  $m$  и  $n$

Как было сказано выше, гладкость распределения статистики зависит от величины  $k$ . В качестве иллюстрации этого факта и различий в распределениях статистик (6.1) и (6.2) на рис. 6.3 приведены предель-

ное распределение Колмогорова  $K(S)$  и полученные в результате моделирования эмпирические распределения  $G(S_C|H_0)$  статистики (6.1) и  $G(S_{CM}|H_0)$  статистики (6.2) при  $m = 61$  и  $n = 53$ . Как видим, распределение статистики (6.1) существенно отличается от распределения Колмогорова  $K(S)$ , а распределение статистики (6.2) визуально практически совпадает с ним. Объем выборок смоделированных значений статистик в данном случае, как и в работах [228, 84], составил 10 000 наблюдений. При проверке согласия полученного эмпирического распределения статистики (6.2) с распределением Колмогорова достигнутые уровни значимости по соответствующим критериям составили: 0.72 по критерию  $\chi^2$  Пирсона (при 10 равновероятных интервалах); 0.83 по критерию Колмогорова; 0.97 по критерию  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова; 0.94 по критерию  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга.

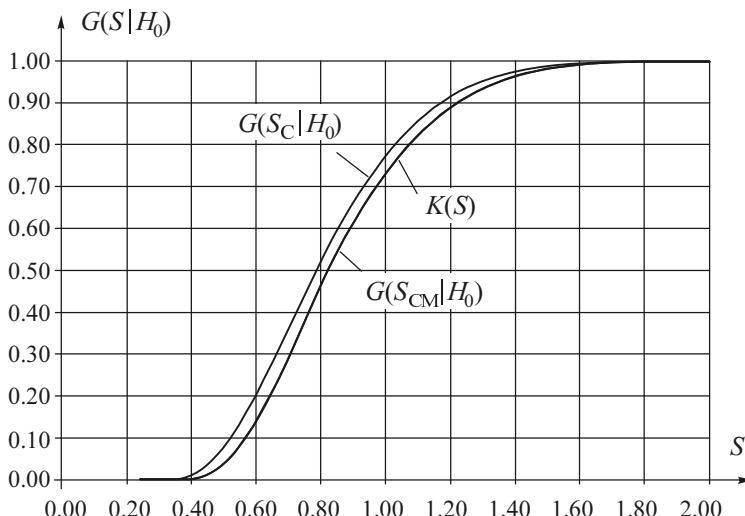


Рис. 6.3. Распределения статистики (6.1) и (6.2) при справедливости  $H_0$ ,  $m = 61$  и  $n = 53$

Использование в критерии Смирнова со статистикой (6.2) взаимно простых  $m$  и  $n$  делает более обоснованным вычисление достигаемого

уровня значимости  $P\{S_{CM} > S_{CM}^*\} = 1 - G(S_{CM}^* | H_0)$ , где  $S_{CM}^*$  – значение статистики (6.2), найденное при проверке гипотезы  $H_0$  по конкретным выборкам, в соответствии с распределением Колмогорова:  $P\{S_{CM} > S_{CM}^*\} \approx 1 - K(S_{CM}^*)$ . Соответственно более правомерно применение в критерии процентных точек (квантилей) распределения Колмогорова. Этого нельзя сказать о критерии Смирнова со статистикой (6.1), так как в этом случае критические значения, определяемые по распределению Колмогорова, оказываются завышенными по сравнению с истинными. Следовательно, проверяемая гипотеза может необоснованно приниматься (не отклоняться).

Коэффициент 4.6 в статистике (6.2) подобран эмпирически. Он удовлетворительно действует от малых до достаточно больших объемов выборок ( $m = n = 1000$ ). Однако при больших значениях наименьшего общего кратного  $m$  и  $n$ , когда они представляют собой взаимно простые числа, величина этого коэффициента должна быть несколько уменьшена. Например, при простых  $m = 641$  и  $n = 643$  коэффициент 4.6 следует заменить на 3.4.

Ниже при исследовании мощности критерия Смирнова рассматривались распределения статистики (6.1). Но все выводы справедливы и для критерия со статистикой (6.2), так как все распределения при одинаковых объемах выборок оказываются сдвинутыми на одну и ту же величину [см. (6.2)].

Мощность критериев проверки однородности исследовалась при ряде альтернатив. Для определенности гипотезе  $H_0$  соответствовала принадлежность выборок одному и тому же стандартному нормальному закону распределения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \theta_0)^2}{2\theta_1^2} \right\}$$

и параметрами сдвига  $\theta_0 = 0$  и масштаба  $\theta_1 = 1$ . При всех альтернатаивах первая выборка всегда соответствовала стандартному нормальному закону, а вторая – некоторому другому. В частности, в случае гипотезы  $H_1$  вторая выборка соответствовала нормальному закону с параметром сдвига  $\theta_0 = 0.1$  и параметром масштаба  $\theta_1 = 1$ . В случае

гипотезы  $H_2$  – нормальному закону с параметрами  $\theta_0 = 0.5$  и  $\theta_1 = 1$ . В случае гипотезы  $H_3$  –циальному закону с параметрами  $\theta_0 = 0$  и  $\theta_1 = 1.1$ . В случае гипотезы  $H_4$  – нормальному закону с параметрами  $\theta_0 = 0$  и  $\theta_1 = 1.5$ . В случае гипотезы  $H_5$  вторая выборка соответствовала логистическому закону с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}}\right\} \Bigg/ \left[1 + \exp\left\{-\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}}\right\}\right]^2$$

и параметрами  $\theta_0 = 0$  и  $\theta_1 = 1$ . Нормальный и логистический законы очень близки и трудноразличимы с помощью критериев согласия. На рис. 6.4 представлены полученные в результате моделирования условные распределения статистики  $G(S_C | H_1)$  при справедливости  $H_1$ , на основании которых можно оценить значения мощности при различных значениях объемов выборок  $m$  и  $n$ .

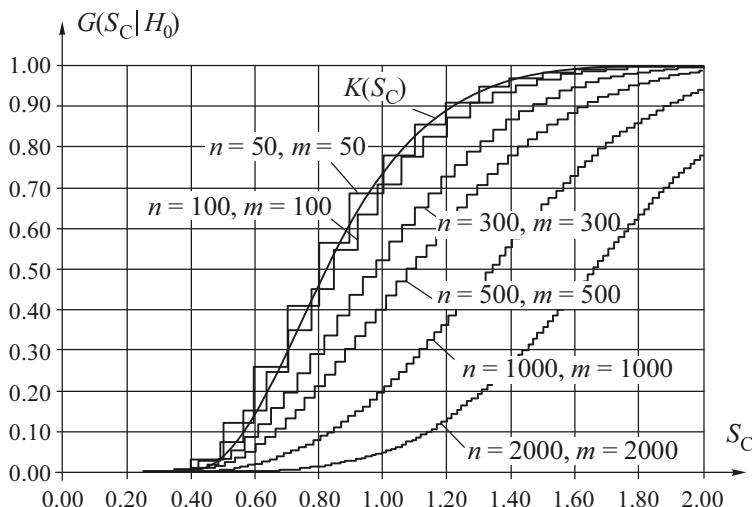


Рис. 6.4. Распределения статистики (6.1) при справедливости  $H_1$

Аналогично на рис. 6.5 приведены условные распределения статистики  $G(S_C | H_2)$ , на рис. 6.6 – условные распределения статистики

$G(S_C | H_3)$ , на рис. 6.7 – условные распределения статистики  $G(S_C | H_4)$ , на рис. 6.8 – условные распределения статистики  $G(S_C | H_5)$ .

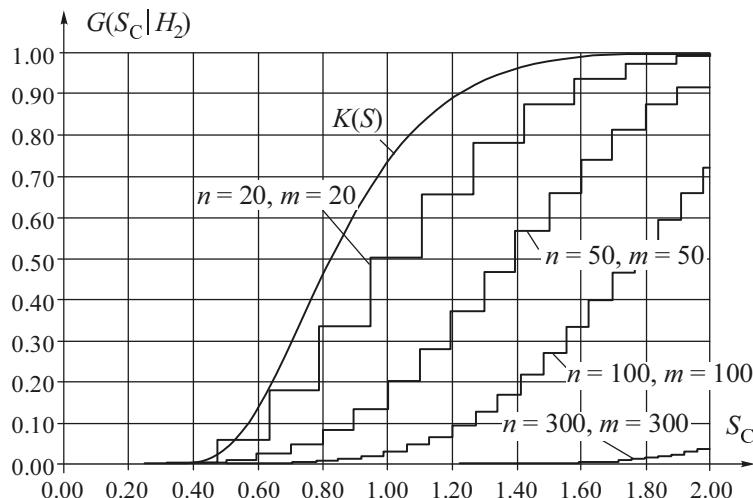


Рис. 6.5. Распределения статистики (6.1) при справедливости  $H_2$

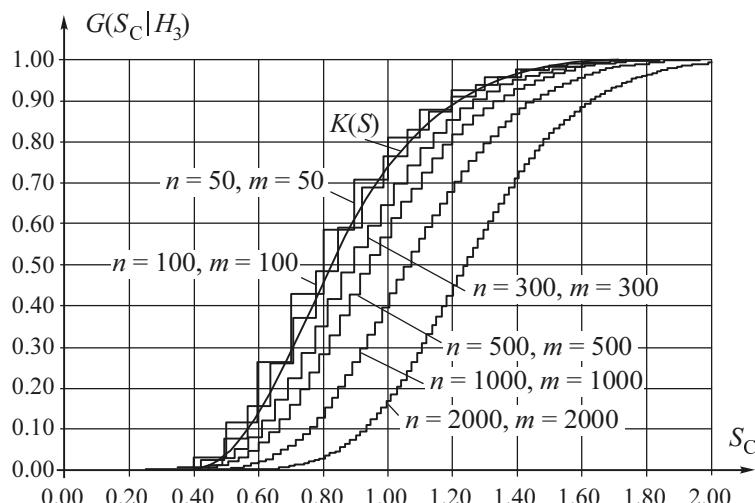


Рис. 6.6. Распределения статистики (6.1) при справедливости  $H_3$

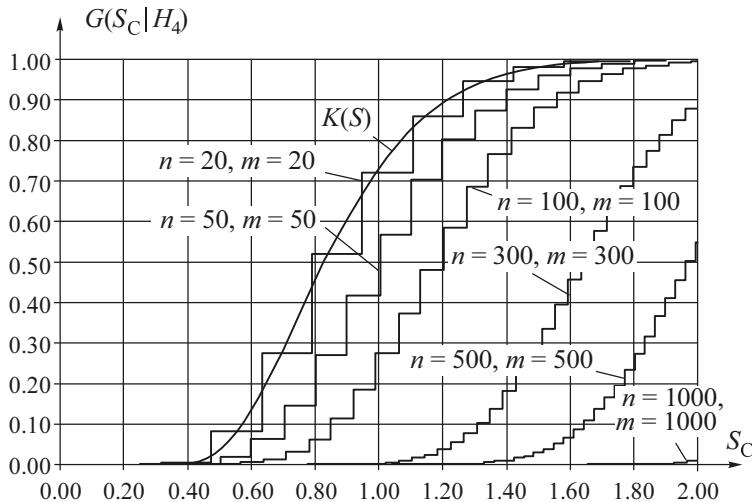


Рис. 6.7. Распределения статистики (6.1) при справедливости  $H_4$

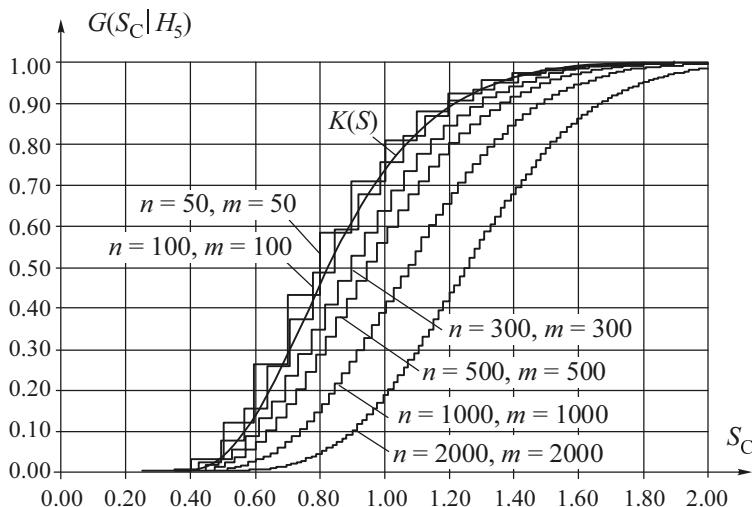


Рис. 6.8. Распределения статистики (6.1) при справедливости  $H_5$

В табл. 6.1 представлены найденные значения мощности  $1 - \beta$  критерия Смирнова, где  $\beta$  — вероятность ошибки второго рода, относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез  $H_1 - H_5$  при раз-

личных объемах выборок для уровней значимости (вероятностей ошибок первого рода)  $\alpha = 0.1, 0.05, 0.025$ . Значения мощностей, приведенные в табл. 6.1, получены относительно  $(1 - \alpha)$ -квантилей предельного распределения Колмогорова  $K(S)$ . Вследствие того, что распределения  $G(S_C | H_0)$  статистики существенно отличаются от  $K(S)$ , действительные уровни значимости отличаются от заданных  $\alpha = 0.1, 0.05, 0.025$ . В табл. 6.2 приведены действительные уровни значимости для критерия Смирнова, соответствующие значениям мощности, представленным в табл. 6.1.

Таблица 6.1

**Мощность критерия однородности Смирнова относительно альтернатив  $H_1 - H_5$  в зависимости от объемов выборок ( $m = n$ )**

Уровень значимости $\alpha$	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
Относительно альтернативы $H_1$							
0.1	0.0937	0.1480	0.1766	0.2775	0.3806	0.6171	0.8688
0.05	0.0410	0.0569	0.0944	0.1883	0.2682	0.4899	0.7762
0.025	0.0410	0.0344	0.0505	0.1163	0.1829	0.3859	0.6737
Относительно альтернативы $H_2$							
0.1	0.3457	0.7200	0.9332	1	1	1	1
0.05	0.2202	0.5341	0.8722	0.9996	1	1	1
0.025	0.2202	0.4328	0.7842	0.9992	1	1	1
Относительно альтернативы $H_3$							
0.1	0.0884	0.1229	0.1257	0.1466	0.1856	0.2967	0.5508
0.05	0.0352	0.0458	0.0630	0.0789	0.1024	0.1677	0.3520
0.025	0.0352	0.0257	0.0280	0.0410	0.0518	0.0967	0.2098
Значения мощности относительно альтернативы $H_4$							
0.1	0.1396	0.2986	0.5213	0.9609	0.9989	1	1
0.05	0.0570	0.1268	0.3161	0.8977	0.9952	1	1
0.025	0.0570	0.0763	0.1689	0.7738	0.9786	1	1
Относительно альтернативы $H_5$							
0.1	0.0836	0.1209	0.1308	0.1568	0.1976	0.3191	0.5639
0.05	0.0341	0.0455	0.0673	0.0891	0.1158	0.1879	0.3754
0.025	0.0341	0.0258	0.0316	0.0471	0.0618	0.1119	0.2390

Таблица 6.2

**Действительные уровни значимости критерия однородности Смирнова, соответствующие  $(1 - \alpha)$ -квантилям распределения Колмогорова, в зависимости от объемов выборок ( $m = n$ )**

Заданный уровень значимости $\alpha$	Действительные уровни значимости $\alpha$						
	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
0.1	0.0835	0.1120	0.1085	0.0927	0.0970	0.0980	0.1041
0.05	0.0334	0.0410	0.0543	0.0496	0.0514	0.0471	0.0480
0.025	0.0334	0.0240	0.0252	0.0254	0.0238	0.0259	0.0245

Вследствие ступенчатости  $G(S_C | H_0)$  действительные значения  $\alpha$  особенно сильно отличаются от задаваемых при малых объемах выборок. Например, для  $m = n = 20$  при задаваемом уровне значимости 0.1 мы имеем действительный уровень значимости 0.0835.

### 6.3. Критерий однородности Лемана–Розенблатта

Критерий однородности Лемана–Розенблатта представляет собой критерий типа  $\omega^2$ . Критерий предложен в работе [71] и исследован в [125]. Статистика критерия имеет вид [163]

$$T = \frac{mn}{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} [G_m(x) - F_n(x)]^2 dH_{m+n}(x),$$

где  $H_{m+n}(x) = \frac{m}{m+n} G_m(x) + \frac{n}{m+n} F_n(x)$  – эмпирическая функция распределения, построенная по вариационному ряду объединения двух выборок. Статистика  $T$  используется в форме [163]

$$T = \frac{1}{mn(m+n)} \left[ n \sum_{i=1}^n (r_i - i)^2 + m \sum_{i=1}^m (s_i - j)^2 \right] - \frac{4mn-1}{6(m+n)}, \quad (6.3)$$

где  $r_i$  – порядковый номер (ранг)  $y_i$ ;  $s_j$  – порядковый номер (ранг)  $x_j$  в объединенном вариационном ряде.

В [125] было показано, что статистика (6.3) в пределе распределена как  $a1(t)$ :

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} P\{T < t\} = a1(t).$$

В отличие от статистики критерия Смирнова статистика  $T$  быстро сходится к предельному  $a1(T)$  [163]. На рис. 6.9 условные распределения  $G(T|H_0)$  статистики (6.3) приведены при  $m$  и  $n$ , равных 20, 100 и 1000. Уже при  $m=100$  и  $n=100$  распределение  $G(T|H_0)$  визуально совпадает с  $a1(T)$ .

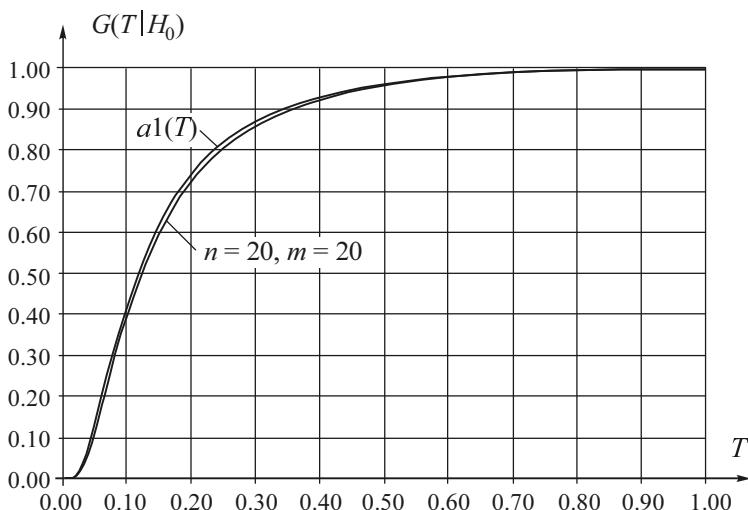


Рис. 6.9. Распределения статистики (6.3) при справедливости  $H_0$  в зависимости от  $m$  и  $n$

На рис. 6.10 представлены полученные в результате моделирования условные распределения статистики  $G(T|H_1)$  при справедливости  $H_1$ . На основании этих распределений можно оценить значения мощности

критерия Лемана–Розенблатта при различных значениях объемов выборок  $m$  и  $n$ .

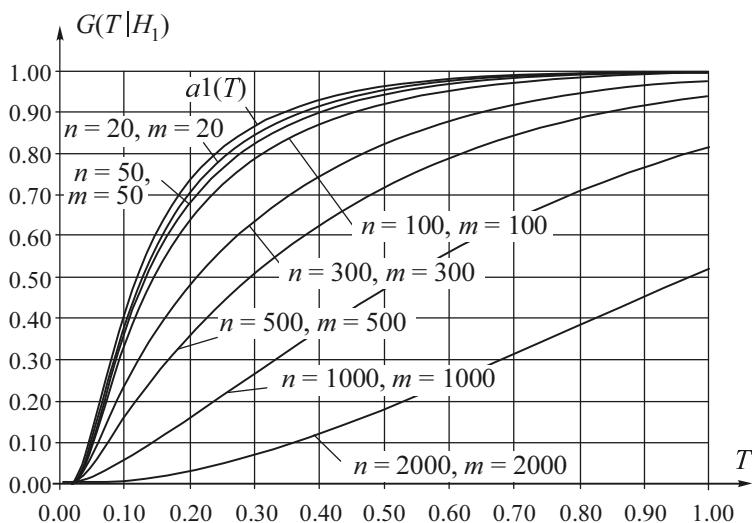


Рис. 6.10. Распределения статистики (6.3) при справедливости  $H_1$

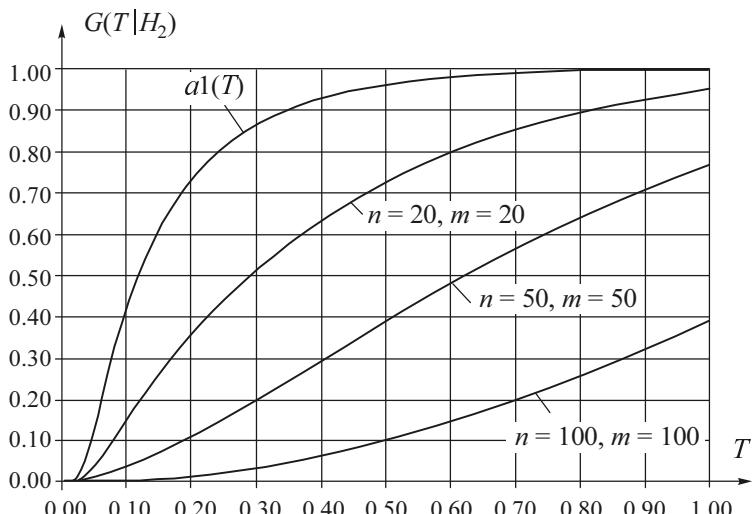


Рис. 6.11. Распределения статистики (6.3) при справедливости  $H_2$

Аналогично на рис. 6.11–6.14 приведены распределения статистики  $G(T|H_2)$ ,  $G(T|H_3)$ ,  $G(T|H_4)$ ,  $G(T|H_5)$  при справедливости соответствующих конкурирующих гипотез. Вычисленные значения мощности  $1 - \beta$  критерия Лемана–Розенблатта представлены в табл. 6.3.

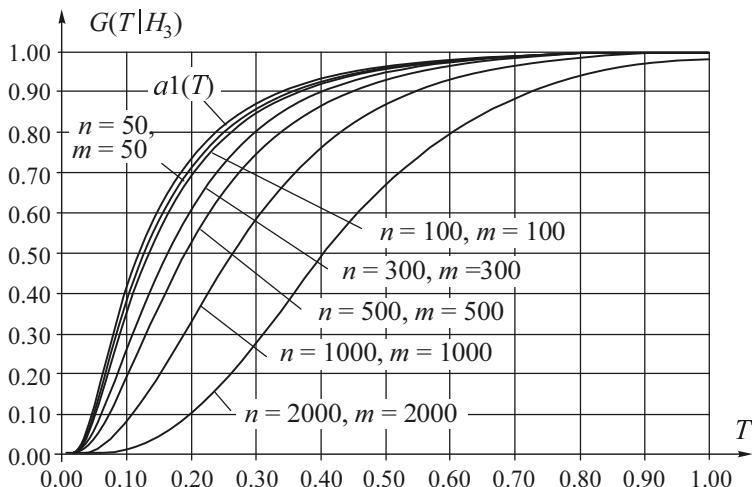


Рис. 6.12. Распределения статистики (6.3) при справедливости  $H_3$

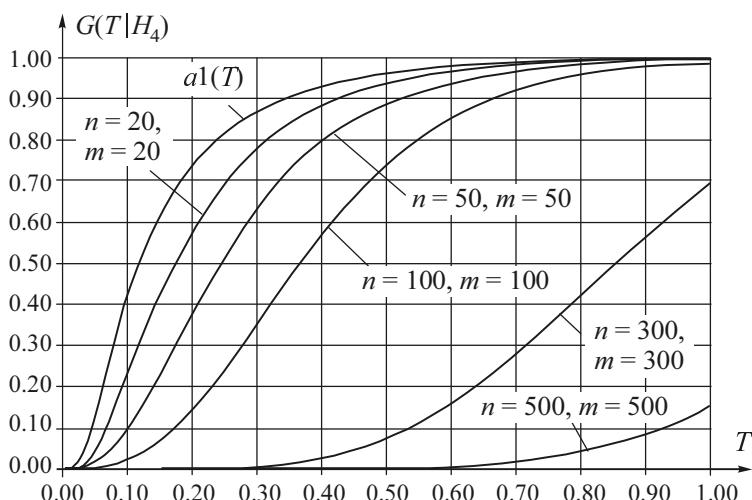


Рис. 6.13. Распределения статистики (6.3) при справедливости  $H_4$

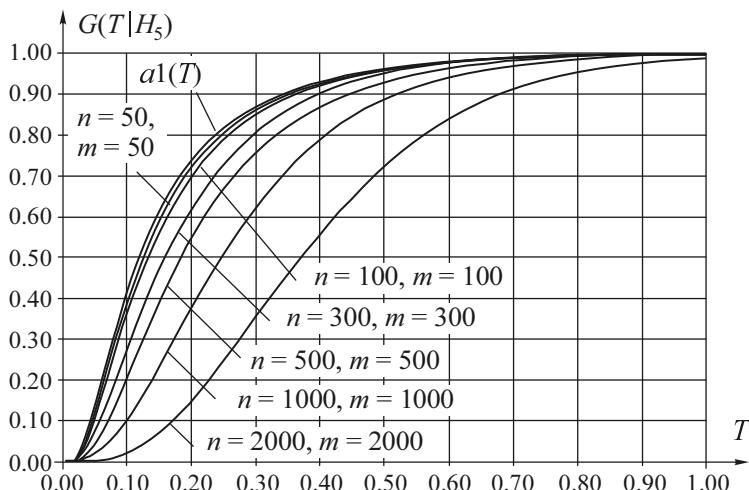
Рис. 6.14. Распределения статистики (6.3) при справедливости  $H_5$ 

Таблица 6.3

**Мощность критерия однородности Лемана–Розенблатта относительно альтернатив  $H_1 – H_5$  в зависимости от объемов выборок ( $m = n$ )**

Уровень значимости $\alpha$	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
Относительно альтернативы $H_1$							
0.1	0.1241	0.1382	0.1727	0.3125	0.4369	0.6874	0.9114
0.05	0.0615	0.0770	0.0999	0.2078	0.3211	0.5703	0.8469
0.025	0.0324	0.0410	0.0590	0.1333	0.2288	0.4589	0.7681
Относительно альтернативы $H_2$							
0.1	0.4321	0.7628	0.9549	1	1	1	1
0.05	0.3121	0.6473	0.9154	1	1	1	1
0.025	0.2120	0.5355	0.8661	0.9998	1	1	1
Относительно альтернативы $H_3$							
0.1	0.1096	0.1107	0.1147	0.1459	0.1898	0.3265	0.6237
0.05	0.0508	0.0567	0.0563	0.0691	0.0945	0.1675	0.3986
0.025	0.0252	0.0291	0.0283	0.0334	0.0442	0.0805	0.2259
Относительно альтернативы $H_4$							
0.1	0.1655	0.2875	0.5513	0.9875	0.9999	1	1
0.05	0.0801	0.1437	0.3199	0.9470	0.9993	1	1
0.025	0.0361	0.0727	0.1687	0.8587	0.9952	1	1

Окончание табл. 6.3

Уровень значимости $\alpha$	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
Относительно альтернативы $H_5$							
0.1	0.1087	0.1069	0.1135	0.1422	0.1826	0.2978	0.5463
0.05	0.0511	0.0549	0.0581	0.0668	0.0910	0.1450	0.3390
0.025	0.0241	0.0276	0.0290	0.0332	0.0431	0.0712	0.1822

Как правило, мощность критерия Лемана–Розенблатта оказывается выше мощности критерия однородности Смирнова.

## 6.4. Выводы

Сравнивая мощность критериев относительно рассмотренных альтернатив с учетом действительных уровней значимости критерия Смирнова (см. табл. 6.2), можно заметить, что, как правило, мощность критерия Лемана–Розенблатта заметно выше мощности критерия Смирнова. Однако относительно очень близких альтернатив несколько выше оказывается мощность критерия Смирнова (см. мощность относительно альтернативы  $H_5$ ). Последнее становится интуитивно понятным, если вспомнить, что в критерии Смирнова мера отклонения линейная, а в критерии Лемана–Розенблатта – квадратичная.

При обработке результатов измерений в задачах статистического управления качеством обычно имеют дело с выборками достаточно ограниченного или совсем малого объема. Следует отчетливо понимать, что критерии однородности вследствие низкой мощности при малых объемах выборок не способны различать близкие конкурирующие законы. Поэтому проверяемая гипотеза об однородности выборок, даже в случае ее несправедливости, чаще не будет отклоняться. Сдвиг на  $0.1\sigma$  или увеличение масштабного параметра (рассеяния) на 10 % при малых объемах выборок критерии однородности, вернее всего, «не заметят», но большие отклонения в законах, соответствующих выборкам, будут отмечаться. Например, для того чтобы в случае применения критерия Лемана–Розенблатта вероятности ошибок первого  $\alpha$  и второго рода  $\beta$  не превышали 0.1 при наличии сдвига  $0.1\sigma$  (альтернатива  $H_1$ ) объемы выборок должны быть порядка 2000, а при сдвиге  $0.5\sigma$

(альтернатива  $H_2$ ) вероятности ошибок не превысят величин 0.1 при объемах выборок не более 100.

Так как распределение статистики (6.3) очень быстро сходится к распределению  $al(t)$ , то использование его в качестве распределения статистики критерия Лемана–Розенблatta корректно и при малых  $m$  и  $n$ .

В случае критерия Смирнова из-за ступенчатого характера распределения статистики (6.1) (особенно при  $m = n$ ) использование предельного распределения Колмогорова  $K(S)$  для экспериментатора будет связано с очень приблизительным знанием действительного уровня значимости (вероятности ошибки первого рода) и соответствующего критического значения. Поэтому при построении процедур проверки однородности по критерию Смирнова рекомендуется: 1) выбирать  $m \neq n$  так, чтобы они представляли собой взаимно простые числа, а их наименьшее общее кратное  $k$  было максимальным и равным  $mn$ ; 2) использовать в критерии Смирнова статистику вида (6.2). Тогда применение распределения Колмогорова в качестве распределения статистики (6.2) критерия Смирнова будет корректным при относительно малых  $m$  и  $n$ .

Подводя итоги и учитывая результаты сравнительного анализа мощности и особенности применения, для проверки однородности целесообразно рекомендовать применение и того и другого критерия.

---

## 7. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ СРЕДНИХ

---

### 7.1. Введение

Критериям проверки гипотез об однородности математических ожиданий (об однородности средних) прибегают при контроле средств измерений, при статистическом анализе результатов экспериментов, при статистическом управлении качеством для проверки наличия возмущения в ходе процесса.

В общем случае проверяемая гипотеза о равенстве математических ожиданий, соответствующих  $k$  выборкам, имеет вид

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

при конкурирующей гипотезе

$$H_1: \mu_{i_1} \neq \mu_{i_2}$$

хотя бы для некоторой пары индексов  $i_1, i_2$ .

Для проверки гипотезы  $H_0$  может использоваться ряд параметрических критериев: сравнения двух выборочных средних при известных дисперсиях; сравнения двух выборочных средних при неизвестных, но равных дисперсиях (критерий Стьюдента); сравнения двух выборочных средних при неизвестных и неравных дисперсиях;  $F$ -критерий. В этих же целях применяется целая совокупность непараметрических критериев: критерий Уилкоксона, критерий Манна–Уитни, критерий Краскела–Уаллиса.

Основным предположением, обуславливающим применение параметрических критериев, является принадлежность анализируемых выборок нормальному закону. Непараметрические критерии свободны от этого требования.

Несмотря, казалось бы, на полную ясность для многих авторов всех нюансов, связанных с применением данных критериев, можно выделить, по крайней мере, два момента, недостаточно четко рассмотренных в литературе и послуживших поводом для проведения исследований [229, 83], которым посвящен данный раздел.

Во-первых: насколько важно убедиться в принадлежности анализируемых выборокциальному закону при использовании параметрических критериев проверки однородности средних? В настоящее время исследователи в силу различных объективных и субъективных причин зачастую пренебрегают проверкой нормальности наблюдений, а потому и подвергаются справедливой критике за возможную некорректность выводов. Особенно типична такая ситуация при анализе биомедицинских измерений, где встретить выборки, хорошо соглашающиеся с нормальным законом, весьма проблематично. С другой стороны, можно сослаться на авторитетные суждения о предпочтительности применения непараметрических критериев или об отсутствии необходимости в проверке нормальности, например, при использовании критерия Стьюдента в случае больших объемов выборок.

Вторая причина обусловлена достаточно туманными сведениями о мощности упомянутых критериев.

Цель настоящей работы заключалась в исследовании влияния нарушений предположения о нормальности на распределения статистик параметрических критериев и в сравнительном анализе мощности наиболее популярных критериев проверки однородности средних.

## 7.2. Критерии однородности средних

- **Критерий сравнения двух выборочных средних при известных дисперсиях.** Применение критерия сравнения двух выборочных средних (по двум выборкам) при известных и равных дисперсиях предусматривает вычисление статистики

$$z = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \mu_1 + \mu_2) / \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}, \quad (7.1)$$

где  $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$ ,  $n_i$  – объем  $i$ -й выборки,  $i = 1, 2$ . В случае принадлежности наблюдений (ошибок измерений) нормальным законам статистика  $t$  подчиняется стандартному нормальному закону.

• **Критерий Стьюдента сравнения двух выборочных средних при неизвестных, но равных дисперсиях.** Применение критерия сравнения двух выборочных средних при неизвестных, но равных дисперсиях предусматривает вычисление статистики  $t$  [198]:

$$t = \left( \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \mu_1 + \mu_2 \right) \Bigg/ \sqrt{\left[ \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right] \left[ \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \right]}, \quad (7.2)$$

где

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2.$$

В случае принадлежности выборок нормальному закону при справедливости гипотезы  $H_0$  эта статистика подчиняется  $t_v$ -распределению Стьюдента с числом степеней свободы  $v = n_1 + n_2 - 2$ .

• **Критерий сравнения двух выборочных средних при неизвестных и неравных дисперсиях.** При неравных объемах выборок  $n_1 \neq n_2$  статистика критерия имеет вид [147, 282]

$$t = \left( \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \mu_1 + \mu_2 \right) \Bigg/ \sqrt{\left[ s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2 \right]}. \quad (7.3)$$

В случае нормального закона и справедливости гипотезы  $H_0$  статистика (7.3) подчиняется распределению  $t_v$ -Стьюдента с числом степеней свободы

$$v = \left( s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2 \right)^2 \Bigg/ \left[ \frac{\left( s_1^2/n_1 \right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left( s_2^2/n_2 \right)^2}{n_2 - 1} \right].$$

В случае равенства неизвестных дисперсий статистика (7.3) эквивалентна статистике (7.2). При неравенстве дисперсий всегда число степеней свободы  $v < n_1 + n_2 - 2$ . Чем больше разница в дисперсиях, соответствующих выборкам, тем сильнее распределение статистики (7.3) отличается от распределения статистики (7.2).

Отметим, что при  $n_1 + n_2 > 200$  различие между критериями со статистиками (7.1) – (7.3) практически исчезает, так как с ростом числа степеней свободы распределение Стьюдента сходится к стандартному нормальному. При  $n_1 + n_2 > 200$  соответствующие распределения Стьюдента практически не отличаются от стандартного нормального. При использовании в таких ситуациях для вычисления достигаемых уровней значимости стандартного нормального закона вместо соответствующего распределения Стьюдента погрешности в определении вероятностей не превышают 0.001.

- **F-критерий.** В случае справедливости гипотезы о постоянстве (о равенстве) дисперсий с помощью F-критерия можно проверять гипотезу об однородности математических ожиданий по  $k$  выборкам [286].

Пусть у нас имеется  $k$  выборок объемом  $n$ . Общая сумма квадратов отклонений по всем выборкам

$$Q_{kn} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{kn})^2,$$

где

$$\bar{x}_{kn} = \frac{1}{kn} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij} = \bar{\bar{x}}_k,$$

раскладывается на два компонента

$$Q_{kn} = Q_1 + Q_2,$$

$$Q_1 = n \sum_{i=1}^k (\bar{x}_{in} - \bar{\bar{x}}_k)^2 = n \sum_{i=1}^k (\bar{x}_{in}^2 - k\bar{\bar{x}}_k)^2,$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{in})^2 = (n-1) \sum_{i=1}^k s_{in}^2.$$

Компонент  $Q_1$  является мерой различия в уровнях настройки между  $k$  выборками, в то время как  $Q_2$  определяет различие в уровнях настройки внутри этих  $k$  выборок.

Для проверки гипотезы используется критерий со статистикой

$$F = \frac{Q_1 / (k-1)}{Q_2 / [k(n-1)]}. \quad (7.4)$$

Если все выборки извлекаются из нормальной генеральной совокупности, то при справедливости гипотезы  $H_0$  статистика (7.4) подчиняется  $F_{v_1, v_2}$ -распределению Фишера со степенями свободы  $v_1 = k - 1$  и  $v_2 = k(n - 1)$  [286].

Принадлежность выборок нормальному закону явилось основным предположением для перечисленных выше критериев, использованным при построении распределений статистик в случае справедливости проверяемой гипотезы  $H_0$ .

• **Критерий Манна и Уитни.** Ранговый критерий Манна и Уитни [106, 110, 61, 22] основан на критерии Уилкоксона [147] для независимых выборок. Он является непараметрическим аналогом  $t$ -критерия для сравнения двух средних значений непрерывных распределений. Для вычисления статистики упорядочивают  $n_1 + n_2$  значений объединенной выборки, определяют сумму рангов  $R_1$ , соответствующую элементам первой выборки, и сумму рангов второй  $R_2$ . Вычисляются

$$U_1 = n_1 n_2 + n_1 (n_1 + 1)/2 - R_1,$$

$$U_2 = n_1 n_2 + n_2 (n_2 + 1)/2 - R_2.$$

Статистика критерия имеет вид

$$U = \min\{U_1, U_2\}.$$

Вместо  $U$ -статистики удобнее использовать статистику

$$\tilde{z} = \frac{U - n_1 n_2 / 2}{\sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1) / 12}}, \quad (7.5)$$

дискретное распределение которой в случае справедливости проверяемой гипотезы  $H_0$  при  $n_1 + n_2 > 60$  хорошо приближается стандартным нормальным законом, когда объем каждой из выборок не слишком мал:  $n_1 \geq 8$ ,  $n_2 \geq 8$ . При меньших объемах выборок следует учитывать, что достигаемый уровень значимости ( $p$ -значение), вычисляемый по значению статистики в соответствии с функцией распределения стандартного нормального закона, может заметно отличаться от истинного.

• **Критерий Краскела–Уаллиса.**  $H$ -критерий Краскела–Уаллиса [68, 69] является развитием  $U$ -критерия для проверки гипотезы о равенстве средних по  $k$  выборкам. Объединенную выборку  $n = \sum_{i=1}^k n_i$  упорядочивают и вычисляют суммы рангов  $R_i$  для  $i$ -й выборки,  $i = \overline{1, k}$ . Статистика для проверки гипотезы  $H_0$  имеет вид

$$H = \left[ \frac{12}{n(n+1)} \right] \left[ \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} \right] - 3(n+1). \quad (7.6)$$

Статистика  $H$  представляет собой дисперсию ранговых сумм. При больших  $n_i$  и  $k$  в случае справедливости проверяемой гипотезы  $H_0$  статистика подчиняется  $\chi_{k-1}^2$ -распределению [69]. В описаниях критерия говорится, что  $\chi_{k-1}^2$ -распределением практически можно пользоваться при  $n_i \geq 5$ ,  $k \geq 4$ .

В действительности же при  $k = 2$  дискретностью можно практически пренебречь при  $n_i \geq 30$ . С ростом числа выборок влияние дискретности быстро убывает. При  $k = 3$  распределение статистики достаточно хорошо приближается  $\chi_{k-1}^2$ -распределением, начиная с  $n_i \geq 20$ , а при  $n_i \geq 30$  согласие распределения статистики с  $\chi_{k-1}^2$ -распределением не отклоняется по всем применяемым критериям согласия [301, 302]. При  $k \geq 5$  согласие распределения статистики с  $\chi_{k-1}^2$ -распределением не отклоняется при  $n_i \geq 20$ .

### 7.3. Исследование устойчивости параметрических критериев к нарушению предположений нормальности

При проведении данных исследований использована та же методика компьютерного моделирования и анализа статистических закономерностей, что и в других наших работах, например [301, 302].

Распределения статистик (7.1)–(7.3) при справедливой проверяемой гипотезе  $H_0$  исследовались для различных законов, в частности в случае принадлежности наблюдений семейству с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1\Gamma(1/\theta_2)} \exp\left\{-\left(\frac{|x-\theta_0|}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right\} \quad (7.7)$$

с различными значениями параметра формы  $\theta_2$ . При  $\theta_2 = 2$  выражение (7.7) дает плотность нормального закона распределения. При больших значениях  $\theta_2$  распределение (7.7) стремится к равномерному, при малых  $\theta_2$  получаем симметричные законы с «тяжелыми хвостами».

На рис. 7.1 показаны полученные в результате моделирования распределения статистики (7.1) в случае принадлежности наблюдаемых величин законам распределения семейства (7.7) при различных значениях параметра формы и в случае показательного закона с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right).$$

Результаты исследований позволяют сделать следующие выводы. Конечно, распределение статистики (7.1) зависит от законов, которым принадлежат анализируемые выборки. Асимметрия наблюдаемых законов приводит к отличию распределения статистики от стандартного нормального, однако это отличие не настолько велико, чтобы приводить к серьезным ошибкам при использовании критерия. В случае симметричных законов наблюдается устойчивость распределения статистики к значительным отклонениям наблюдаемых законов от нормального (вплоть до равномерного): распределения статистики существенно отличаются от стандартного нормального только в случае законов с «тяжелыми хвостами» (например, при распределении Коши

или в случае распределения (7.7) при малых значениях  $\theta_2$  (см. рис. 7.2, при  $\theta_2 = 0.5$  и  $\theta_2 = 0.2$  ).

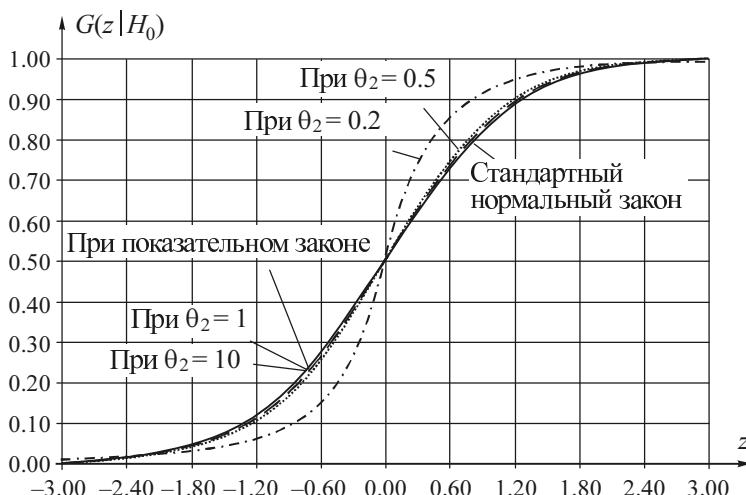


Рис. 7.1. Эмпирические распределения статистики (7.1) при различных законах распределения наблюдаемых величин и справедливости гипотезы  $H_0$  при объемах выборок  $n_1 = n_2 = 10$

Рис. 7.2 отражает аналогичную картину зависимости распределений статистики (7.2) от законов распределения наблюдаемых величин, которая позволяет сделать идентичные выводы об устойчивости критерия Стьюдента. Таким же образом от наблюдаемых законов зависят распределения статистики (7.3), используемой в критерии при неравных неизвестных дисперсиях. С ростом объемов выборок критерий становится еще более устойчивым к отклонениям наблюдаемых законов от нормального. На рис. 7.3 показаны распределения статистики (7.2) при объемах выборок  $n_1 = n_2 = 100$  в случае принадлежности выборок нормальному закону и распределениям семейства (7.7) при  $\theta_2 = 0.5$  и  $\theta_2 = 0.2$  .

Данные результаты подтверждают общую закономерность: параметрические критерии, связанные с проверкой гипотез о математических ожиданиях, весьма устойчивы к отклонениям наблюдаемых законов от нормального. Это справедливо даже в случае многомерных случайных величин [245].

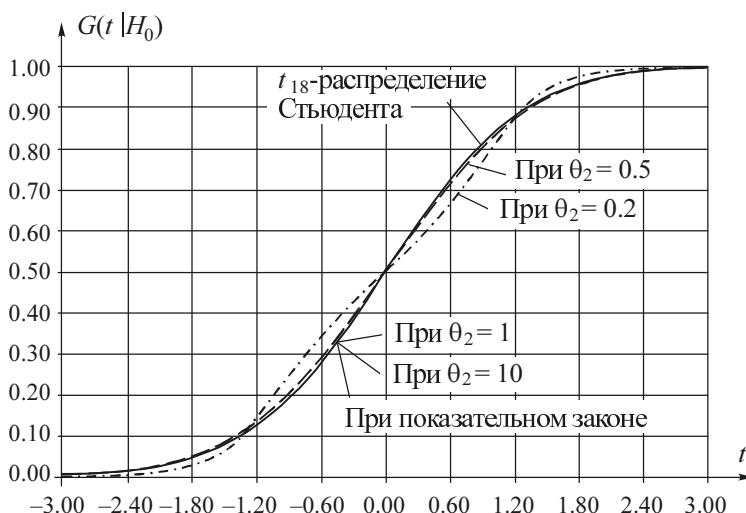


Рис. 7.2. Эмпирические распределения статистики (7.2) при различных законах распределения наблюдаемых величин и справедливости гипотезы  $H_0$  при объемах выборок  $n_1 = n_2 = 10$

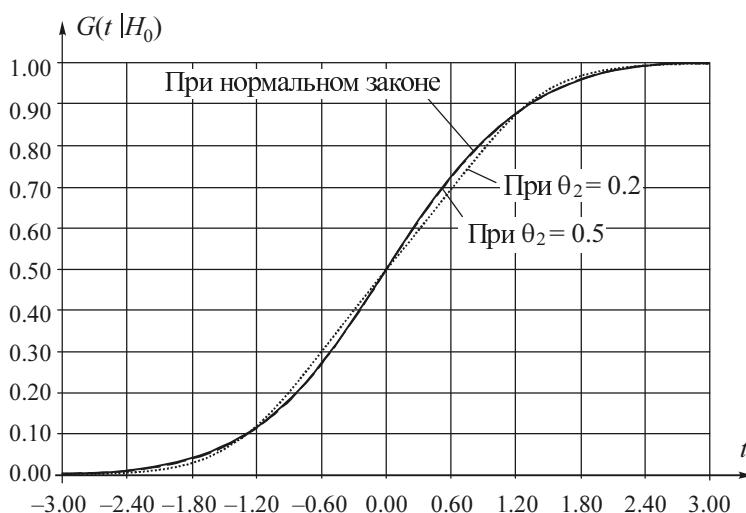


Рис. 7.3. Эмпирические распределения статистики (7.2) при различных законах распределения наблюдаемых величин и справедливости гипотезы  $H_0$  при объемах выборок  $n_1 = n_2 = 100$

Распределения статистики (7.4)  $F$ -критерия также устойчивы к отклонениям законов, соответствующих анализируемым выборкам, от нормального. Однако следует подчеркнуть, что применение данного критерия для проверки однородности средних предполагает примерное равенство дисперсий анализируемых выборок. При невыполнении данного условия распределения статистики  $G(F|H_0)$  становятся отличными от соответствующего  $F_{v_1, v_2}$ -распределения. Если отношение максимальной дисперсии к минимальной соответствующих анализируемых выборок не превышает 4, то отклонение распределения статистики  $G(F|H_0)$  от  $F_{v_1, v_2}$ -распределения Фишера не превосходит величины 0.01.

## 7.4. Исследование мощности критериев

Рассматривалась проверка однородности средних двух выборок. Для исследуемых в работе критериев мощность проанализирована относительно следующих конкурирующих гипотез  $H_1^1: \mu_2 = \mu_1 + 0.1\sigma$ ;  $H_1^2: \mu_2 = \mu_1 + 0.2\sigma$ ;  $H_1^3: \mu_2 = \mu_1 + 0.3\sigma$ ;  $H_1^4: \mu_2 = \mu_1 + 0.4\sigma$ ;  $H_1^5: \mu_2 = \mu_1 + 0.5\sigma$ ;  $H_1^6: \mu_2 = \mu_1 + \sigma$  при одинаковых дисперсиях выборок.

На рис. 7.4 приведены распределения  $\tilde{z}$ -статистики (7.5) критерия Манна–Уитни при справедливости проверяемой  $G(\tilde{z}|H_0)$  и конкурирующих гипотез  $G(\tilde{z}|H_1^i)$  при объемах выборок  $n_1 = n_2 = 10$ . Рисунок, с одной стороны, позволяет судить о мощности критерия относительно рассматриваемых альтернатив, а с другой – демонстрирует дискретность распределений статистики, которую следует учитывать, сравнивая мощности критериев.

Вычисленные на основании результатов моделирования оценки мощности  $1 - \beta$  критериев, где  $\beta$  – вероятность ошибки второго рода, для различных значений уровня значимости  $\alpha$  (вероятностей ошибок первого рода) и различных объемов выборок представлены в табл. 7.1–7.6. Критерии в таблицах упорядочены по мощности. Выборки распределений статистик моделировались объемом  $N = 10^6$ , что позволило оценивать значения мощности с погрешностью в пределах  $\pm 10^{-3}$ .

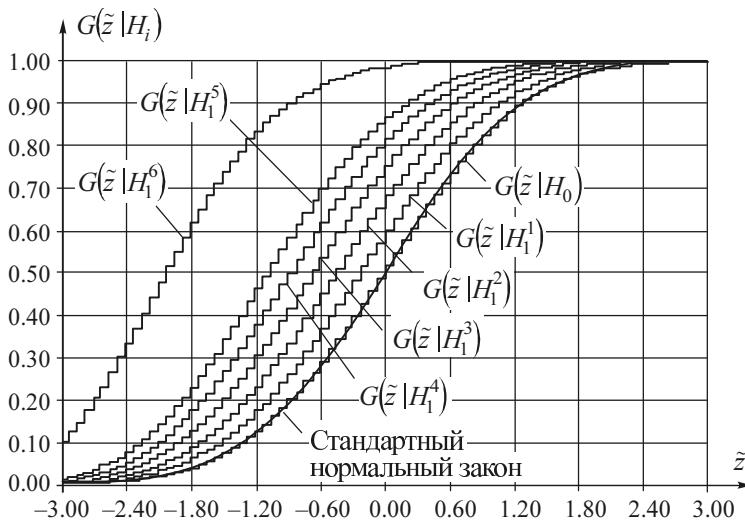


Рис. 7.4. Эмпирические распределения статистики (7.5) Манна–Уитни при справедливости различных конкурирующих гипотез при объемах выборок  $n_1 = n_2 = 10$

В рассматриваемой ситуации критерий со статистикой (7.3) эквивалентен критерию со статистикой (7.2) и имеет ту же мощность. Поэтому он опущен в приводимых таблицах.

Значения мощности для многовыборочных критериев в табл. 7.1–7.6 существенно ниже, чем для критериев со статистиками (7.1) – (7.3) и критерия Манна–Уитни. Дело в том, что  $F$ -критерий и критерий Краскела–Уаллиса в силу вида своих статистик в отличие от критериев со статистиками (7.1) – (7.3) и (7.5) не могут различать альтернативы  $\mu_2 > \mu_1 + \Delta\mu$  и  $\mu_2 < \mu_1 - \Delta\mu$ . Если в выражениях для статистик (7.1) – (7.3) и (7.5) числители взять по модулю, то получим аналогичную ситуацию. Тогда значения мощностей этих критериев для сравнения с многовыборочными надо брать при уровнях значимости  $\alpha / 2$ .

Какие выводы можно сделать на основе результатов, представленных в таблицах? Во-первых, очевидно, что параметрические критерии обладают большей мощностью по сравнению с непараметрическими. Во-вторых, можно констатировать, что непараметрические критерии совсем немного уступают по мощности параметрическим: критерий Манна–Уитни критерию Стьюдента, а Краскела–Уаллиса –  $F$ -критерию, соответственно. Кажущееся преимущество  $\tilde{z}$ -критерия Манна–

Уитни при  $n = 10$ , отраженное в таблицах, объясняется тем, что вследствие дискретности распределения статистики  $\tilde{z}$ -критерия Манна–Уитни действительные уровни значимости отличаются от заданных в таблице значений  $\alpha$  и несколько превышают их. Этим же объясняется «преимущество» в некоторых случаях  $H$ -критерия Краскела–Уаллиса по отношению к  $F$ -критерию.

Таблица 7.1

**Мощность критериев относительно  $H_1^1$ :  $\mu_2 = \mu_1 + 0.1\sigma$** 

$z$ -критерий при известных дисперсиях					
$\alpha$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.145	0.167	0.186	0.217	0.283
0.05	0.078	0.091	0.105	0.126	0.175
0.01	0.018	0.022	0.026	0.034	0.053
$t$ -критерий Стьюдента при неизвестных и равных дисперсиях					
$\alpha$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.144	0.166	0.185	0.216	0.283
0.05	0.077	0.091	0.104	0.125	0.174
0.01	0.017	0.021	0.026	0.034	0.053
$\tilde{z}$ -критерий Манна–Уитни					
$\alpha$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.153	0.165	0.184	0.214	0.277
0.05	0.079	0.091	0.101	0.123	0.170
0.01	0.016	0.021	0.024	0.032	0.051
$F$ -критерий					
$\alpha$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.109	0.116	0.125	0.141	0.183
0.05	0.055	0.061	0.067	0.078	0.108
0.01	0.012	0.013	0.015	0.020	0.031
$H$ -критерий Краскела–Уаллиса					
$\alpha$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.113	0.118	0.123	0.141	0.178
0.05	0.057	0.059	0.066	0.078	0.104
0.01	0.008	0.013	0.015	0.019	0.030

В-третьих, на практике, применяя рассматриваемые критерии для проверки гипотезы об однородности математических ожиданий, как правило, задаются только вероятностью  $\alpha$  ошибки первого рода. Процедуры контроля предусматривают чаще всего небольшие объемы

выборок. Как правило, не заходит речи о вероятности  $\beta$  ошибки второго рода: не отклонить проверяемую гипотезу при справедливости конкурирующей. В то же время в процедуре контроля при задании  $\alpha$  желательно гарантировать величину  $\beta \leq \alpha$ . В данном же случае мы видим, что при конкурирующей гипотезе  $H_1^1$  для  $\alpha = 0.1$  и объемах выборок  $n = 100$  вероятность ошибки второго рода составит величину  $\beta = 1 - 0.283 = 0.717$  для  $z$ -критерия со статистикой (7.1). При  $\alpha = 0.1$  и объемах выборок  $n = 100$  данный критерий обеспечит величину  $\beta = 0.061 < 0.1$  только для более далекой альтернативы  $H_1^4$ , а чтобы с заданным качеством различать гипотезы  $H_0$  и  $H_1^1$ , необходимо иметь выборки объемом порядка 1350 наблюдений!

Таблица 7.2

**Мощность критериев относительно  $H_1^2: \mu_2 = \mu_1 + 0.2\sigma$** 

$z$ -критерий при известных дисперсиях					
$\alpha$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.202	0.258	0.306	0.389	0.552
0.05	0.115	0.155	0.192	0.259	0.409
0.01	0.030	0.045	0.060	0.092	0.182
$t$ -критерий Стьюдента при неизвестных и равных дисперсиях					
0.1	0.199	0.256	0.304	0.387	0.551
0.05	0.112	0.153	0.190	0.257	0.407
0.01	0.028	0.043	0.059	0.090	0.179
$\tilde{z}$ -критерий Манна–Уитни					
0.1	0.209	0.251	0.299	0.379	0.538
0.05	0.115	0.151	0.184	0.250	0.395
0.01	0.026	0.041	0.054	0.085	0.170
$F$ -критерий					
0.1	0.131	0.165	0.198	0.261	0.408
0.05	0.071	0.094	0.119	0.168	0.290
0.01	0.017	0.025	0.034	0.056	0.121
$H$ -критерий Краскела–Уаллиса					
0.1	0.136	0.164	0.192	0.261	0.394
0.05	0.073	0.091	0.115	0.168	0.278
0.01	0.011	0.023	0.032	0.054	0.113

Таблица 7.3

**Мощность критериев относительно  $H_1^3$ :  $\mu_2 = \mu_1 + 0.3\sigma$**

<i>z</i> -критерий при известных дисперсиях					
$\alpha$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.270	0.369	0.452	0.586	0.799
0.05	0.165	0.243	0.315	0.442	0.683
0.01	0.049	0.084	0.122	0.204	0.421
<i>t</i> -критерий Стьюдента при неизвестных и равных дисперсиях					
0.1	0.265	0.366	0.448	0.584	0.798
0.05	0.159	0.238	0.311	0.438	0.680
0.01	0.044	0.079	0.118	0.199	0.415
$\tilde{z}$ -критерий Манна–Уитни					
0.1	0.275	0.357	0.440	0.571	0.783
0.05	0.160	0.233	0.299	0.424	0.662
0.01	0.040	0.074	0.108	0.186	0.395
<i>F</i> -критерий					
0.1	0.170	0.243	0.313	0.439	0.408
0.05	0.098	0.152	0.208	0.318	0.558
0.01	0.025	0.048	0.074	0.135	0.320
<i>H</i> -критерий Краскела–Уаллиса					
0.1	0.173	0.239	0.302	0.439	0.661
0.05	0.099	0.145	0.199	0.317	0.538
0.01	0.018	0.044	0.069	0.130	0.301

Таблица 7.4

**Мощность критерииев относительно  $H_1^3$ :  $\mu_2 = \mu_1 + 0.4\sigma$**

<i>z</i> -критерий при известных дисперсиях					
$\alpha$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.349	0.494	0.605	0.764	0.939
0.05	0.226	0.352	0.461	0.638	0.881
0.01	0.076	0.144	0.219	0.372	0.694
<i>t</i> -критерий Стьюдента при неизвестных и равных дисперсиях					
$\alpha$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.341	0.488	0.600	0.761	0.938
0.05	0.217	0.344	0.455	0.633	0.879
0.01	0.067	0.134	0.211	0.362	0.686
$\tilde{z}$ -критерий Манна–Уитни					
$\alpha$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.351	0.475	0.588	0.747	0.930
0.05	0.217	0.335	0.438	0.615	0.866
0.01	0.061	0.126	0.193	0.341	0.662
<i>F</i> -критерий					
$\alpha$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.223	0.346	0.455	0.633	0.879
0.05	0.135	0.234	0.332	0.508	0.802
0.01	0.040	0.086	0.142	0.271	0.591
<i>H</i> -критерий Краскела–Уаллиса					
$\alpha$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.224	0.338	0.439	0.616	0.865
0.05	0.136	0.223	0.317	0.487	0.783
0.01	0.028	0.079	0.132	0.259	0.564

Таблица 7.5

**Мощность критериев относительно  $H_1^5$ :  $\mu_2 = \mu_1 + 0.5\sigma$**

<i>z</i> -критерий при известных дисперсиях					
$\alpha$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.434	0.618	0.743	0.888	0.988
0.05	0.299	0.475	0.614	0.804	0.971
0.01	0.113	0.228	0.348	0.568	0.887
<i>t</i> -критерий Стьюдента при неизвестных и равных дисперсиях					
0.1	0.424	0.611	0.738	0.886	0.988
0.05	0.285	0.463	0.607	0.799	0.970
0.01	0.099	0.211	0.335	0.556	0.882
$\tilde{z}$ -критерий Манна–Уитни					
0.1	0.430	0.596	0.725	0.875	0.985
0.05	0.283	0.451	0.586	0.781	0.964
0.01	0.090	0.199	0.310	0.529	0.865
<i>F</i> -критерий					
0.1	0.288	0.464	0.606	0.799	0.963
0.05	0.185	0.338	0.478	0.697	0.929
0.01	0.060	0.144	0.244	0.453	0.801
<i>H</i> -критерий Краскела–Уаллиса					
0.1	0.286	0.452	0.586	0.799	0.970
0.05	0.184	0.321	0.457	0.697	0.940
0.01	0.043	0.132	0.227	0.434	0.824

Таблица 7.6

**Мощность критерииев относительно  $H_1^6$ :  $\mu_2 = \mu_1 + 0.6\sigma$** 

$z$ -критерий при известных дисперсиях					
$\alpha$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.830	0.970	0.995	1.000	1.000
0.05	0.723	0.935	0.987	1.000	1.000
0.01	0.463	0.798	0.939	0.996	1.000
$t$ -критерий Стьюдента при неизвестных и равных дисперсиях					
$\alpha$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.816	0.967	0.995	1.000	1.000
0.05	0.693	0.927	0.985	1.000	1.000
0.01	0.398	0.764	0.928	0.995	1.000
$\tilde{z}$ -критерий Манна–Уитни					
$\alpha$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.811	0.961	0.993	1.000	1.000
0.05	0.681	0.917	0.981	0.999	1.000
0.01	0.368	0.739	0.911	0.993	1.000
$F$ -критерий					
$\alpha$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.693	0.927	0.985	1.000	1.000
0.05	0.562	0.868	0.967	0.999	1.000
0.01	0.294	0.673	0.882	0.990	1.000
$H$ -критерий Краскела–Уаллиса					
$\alpha$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.680	0.917	0.981	1.000	1.000
0.05	0.548	0.849	0.981	0.999	1.000
0.01	0.231	0.640	0.861	0.987	1.000

Какие конкурирующие гипотезы можно с таким же качеством (при  $\alpha \leq 0.1$  и  $\beta \leq 0.1$ ) различать по выборкам объемом  $n = 10$ ? Альтернативы, когда  $\mu_2$  отличается от  $\mu_1$  на величину не менее чем  $1.15\sigma$ ! При  $n = 20$ , когда  $\mu_2$  отличается от  $\mu_1$  на величину примерно  $0.82\sigma$ , при  $n = 30$  – примерно  $0.67\sigma$ , при  $n = 50$  – приблизительно  $0.51\sigma$ , при  $n = 100$  – на  $0.364\sigma$ .

## 7.5. Выводы

Таким образом, исследования подтвердили устойчивость параметрических критериев проверки однородности математических ожиданий. Это означает, что если закон (законы) распределения анализируемых выборок отличается от нормального, но нет оснований полагать, что наблюдаемые величины принадлежат законам с «тяжелыми хвостами», применение параметрических критериев со статистиками (7.1) – (7.3) остается корректным, по крайней мере, не приводит к существенным погрешностям.

Если дисперсии анализируемых выборок неизвестны и, возможно, различны, лучше воспользоваться критерием со статистикой (7.3), так как при малых объемах выборок распределение статистики (7.2) будет существенно отличаться от  $t_{n_1+n_2-2}$ -распределения Стьюдента.

При  $n_1 + n_2 > 200$  для всех критериев со статистиками (7.1) – (7.3) в качестве распределений статистик можно использовать стандартный нормальный закон.

$\tilde{z}$ -критерий Манна–Уитни, являющийся непараметрическим аналогом критериев со статистиками (7.1) – (7.3), совсем немного уступает им по мощности.

Применение  $F$ -критерия проверки однородности математических ожиданий серии выборок целесообразно, если есть основание полагать, что дисперсии, соответствующие выборкам, примерно одинаковы. В противном случае от него следует отказаться и воспользоваться критерием Краскела–Уаллиса, который немного уступает  $F$ -критерию по мощности.

Следует помнить, что кроме ошибок первого рода есть ошибки второго рода. Если проверяемая гипотеза при заданном  $\alpha$  не была отклонена, это еще не означает, что она справедлива. Организуя процедуру проверки и предполагая, какие альтернативы должны различаться, необходимо выбирать такие объемы выборок, чтобы вероятность ошибки второго рода  $\beta$  оказалась не меньше  $\alpha$ .

---

## 8. ПРИМЕНЕНИЕ И МОЩНОСТЬ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ ДИСПЕРСИЙ

---

### 8.1. Введение

Критерии проверки гипотез об однородности выборок представляют собой очень часто используемые в различных приложениях задачи статистического анализа. При этом речь может идти о проверке гипотез об однородности законов распределения, соответствующих анализируемым выборкам, или об однородности математических ожиданий, или об однородности дисперсий. Естественно, что наиболее полные выводы могут быть получены в первом случае, однако исследователя могут в большей степени интересовать вопросы о возможных отклонениях в средних значениях выборок или о различии в характеристиках рассеяния результатов измерений.

Особенности применения непараметрических критериев однородности Смирнова и Лемана–Розенблatta и анализ их мощность были рассмотрены в работах [228, 84]. В [229, 83] показана устойчивость классических критериев проверки гипотез об однородности средних к нарушениям предположения о принадлежности анализируемых выборок случайных величин нормальному закону и приведен сравнительный анализ мощности различных критериев, в том числе непараметрических.

Применение классических критериев проверки однородности дисперсий всегда сопряжено с вопросом: насколько полученные выводы корректны в данной конкретной ситуации? Дело в том, что одним из основных предположений при построении этих критериев является принадлежность наблюдаемых случайных величин (погрешностей измерений)циальному закону распределения. При этом давно известно,

что параметрические критерии однородности дисперсий чрезвычайно чувствительны к малейшим отклонениям наблюдаемых случайных величин от нормального закона. При нарушении данного предположения условные распределения статистик критериев при справедливости проверяемой гипотезы, как правило, сильно изменяются. Так как погрешности измерительных приборов или наблюдаемые в различных приложениях величины далеко не всегда подчиняются нормальному закону, то применение классических результатов в таких условиях может приводить к неверным выводам.

В связи с этим вызывает практический интерес вопрос: каким же будет поведение критериев проверки однородности дисперсий (характеристик рассеяния) при определенных отклонениях закона распределения результатов измерений (контролируемого показателя) от нормального и будет ли корректным применение классического аппарата для проверки гипотез? Пока нет четкого ответа, как соотносятся мощности различных параметрических критериев с конкретными конкурирующими гипотезами, насколько уступают им по мощности непараметрические критерии проверки гипотез о равенстве характеристик рассеяния (параметров масштаба).

Материал данного раздела опирается на работы [232, 85, 233, 51], в которых продолжены исследования устойчивости критериев проверки гипотез о равенстве дисперсий [240, 73, 249]. Сравниваются классические критерии Бартлетта [12], Кокрена [21], Фишера, Хартли [56], Левене [99], рассматриваются непараметрические (ранговые) критерии Ансари–Бредли [7], Муда [111], Сижела–Тьюки [133], Кейпена [17] и Клотца [65].

Цель работ по исследованию параметрических критериев [232, 85, 51] заключалась в следующем. Во-первых, в исследовании распределений статистик перечисленных критериев при законах распределения наблюдаемых случайных величин, отличных от нормального закона. Во-вторых, в сравнительном анализе мощности критериев относительно конкретных конкурирующих гипотез. В-третьих, в реализации возможности применения классических критериев в условиях нарушения предположений о нормальности случайных величин. В-четвертых, в выработке рекомендаций по применению критериев в реальных приложениях.

Перечисленные непараметрические критерии предназначены для проверки гипотез об однородности параметров масштаба законов, соответствующих анализируемым выборкам. Как правило, характеристи-

стистики рассеяния и, следовательно, стандартное отклонение  $\sigma$  пропорциональны параметру масштаба закона. Поэтому рассматриваемые критерии можно считать непараметрическими аналогами критериев однородности дисперсий. Сравнительному анализу мощности и исследованию распределений статистик непараметрических критериев посвящена работа [233].

В критериях проверки однородности дисперсий проверяемая гипотеза о постоянстве дисперсий  $m$  выборок имеет вид

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_m^2, \quad (8.1)$$

а конкурирующая с ней гипотеза

$$H_1: \sigma_{i_1}^2 \neq \sigma_{i_2}^2, \quad (8.2)$$

где неравенство выполняется, по крайней мере, для одной пары индексов  $i_1, i_2$ .

При исследовании распределений статистик, построении для этих распределений процентных точек и оценке мощности критериев относительно различных конкурирующих гипотез использовались методика статистического моделирования [253] и развивающаяся на базе [224] программная система ISW (Интервальная статистика под Windows). При этом объем моделируемых выборок исследуемых статистик составлял величину  $N = 10^6$ . При таких  $N$  разность между истинным законом распределения статистики и смоделированным эмпирическим по модулю не превышает величины  $10^{-3}$ .

Исследования распределений статистик проводились при различных наблюдаемых законах, в частности в случае принадлежности моделируемых выборок семейству с плотностью

$$De(\theta_2) = f(x; \theta_0, \theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp\left(-\left(\frac{|x - \theta_0|}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right) \quad (8.3)$$

при различных значениях параметра формы  $\theta_2$ . Это семейство может быть хорошей моделью для законов распределения погрешностей различных измерительных систем. Распределение  $De(\theta_2)$  включает в качестве частных случаев распределение Лапласа ( $\theta_2 = 1$ ) и нормаль-

ное ( $\theta_2 = 2$ ). Семейство (8.3) позволяет задавать различные симметричные законы распределения, в той или иной мере отличающиеся от нормального: чем меньше значение параметра формы  $\theta_2$ , тем «тяжелее» хвосты распределения  $De(\theta_2)$ , чем больше параметр, тем хвосты «легче».

При сравнительном анализе мощности критериев рассматривались следующие конкурирующие гипотезы:  $H_1: \sigma_m = 1.1\sigma_0$ ;  $H_2: \sigma_m = 1.2\sigma_0$ ;  $H_3: \sigma_m = 1.5\sigma_0$ . Таким образом, конкурирующей гипотезе соответствует ситуация, когда  $m - 1$  выборка принадлежат закону с некоторым  $\sigma = \sigma_0$ , в то время как одна из выборок, например с номером  $m$ , имеет некоторую отличную дисперсию. Проверяемой гипотезе соответствует ситуация  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_m^2 = \sigma_0^2$ .

## 8.2. Критерий Бартлетта

Статистика критерия Бартлетта [163] вычисляется в соответствии с соотношением

$$\chi^2 = M \left[ 1 + \frac{1}{3(m-1)} \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{v_i} - \frac{1}{N} \right) \right]^{-1}, \quad (8.4)$$

где

$$M = N \ln \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m v_i S_i^2 \right) - \sum_{i=1}^m v_i \ln S_i^2;$$

$m$  – количество выборок;  $n_i$  – объемы выборок;  $v_i = n_i$ , если математическое ожидание известно, и  $v_i = n_i - 1$ , если не известно;  $N = \sum_{i=1}^m v_i$ ;

$S_i^2$  – оценки выборочных дисперсий. При неизвестном математическом ожидании оценки  $S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ji} - \bar{X}_i)^2$ ,  $\bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ji}$ , где

$X_{ij}$  –  $j$ -е наблюдение в  $i$ -й выборке.

Если гипотеза  $H_0$  верна, все  $v_i > 3$  и выборки извлекаются из нормальной генеральной совокупности, то статистика (8.4) приблизенно подчиняется  $\chi_{m-1}^2$ -распределению. Если вычисленное значение статистики  $\chi^{2*} > \chi_{1-\alpha, m-1}^2$ , то проверяемая гипотеза отклоняется на заданном уровне значимости  $\alpha$ .

При нормально распределенных результатах измерений распределение статистики (8.4) практически не зависит от изменения объемов выборок [240, 73]. То, что предельное распределение статистики критерия известно и его можно использовать при малых объемах выборок, является серьезным преимуществом критерия Бартлетта.

При отклонении закона распределения наблюдаемого показателя от нормального закона распределение  $G(\chi^2 | H_0)$  статистики (8.4) становится зависящим от объема выборки и отличным от  $\chi_{m-1}^2$ . Этот факт отражает рис. 8.1, на котором показаны распределения статистики при различных объемах двух сравниваемых выборок в случае принадлежности их закону распределения Лапласа (семейству (8.3) с параметром формы  $\theta_2 = 1$ ), а также приведено предельное  $\chi_1^2$ -распределение статистики (для классической ситуации с нормальным законом).

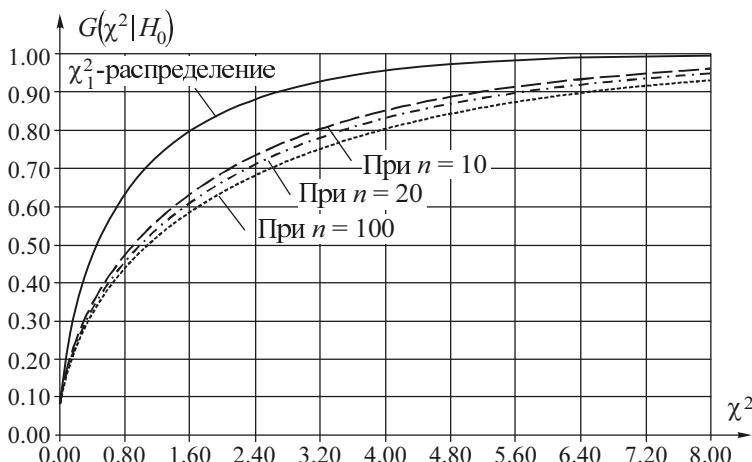


Рис. 8.1. Функции распределения статистики критерия Бартлетта при различных объемах выборок в случае распределения Лапласа при  $m = 2$

Распределения статистики (8.4) очень чувствительны к отклонениям наблюдаемого закона от нормального. На рис. 8.2 показано, как меняется распределение статистики критерия Бартлетта, если результаты измерений подчиняются семейству распределений (8.3) с различными значениями параметра формы.

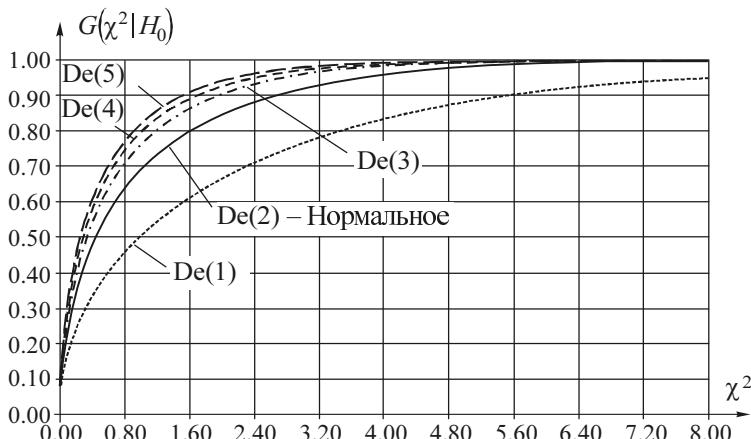


Рис. 8.2. Функции распределения статистики критерия Бартлетта в случае распределений семейства (8.3) с различными значениями параметра формы ( $n = 20$ ,  $m = 2$ )

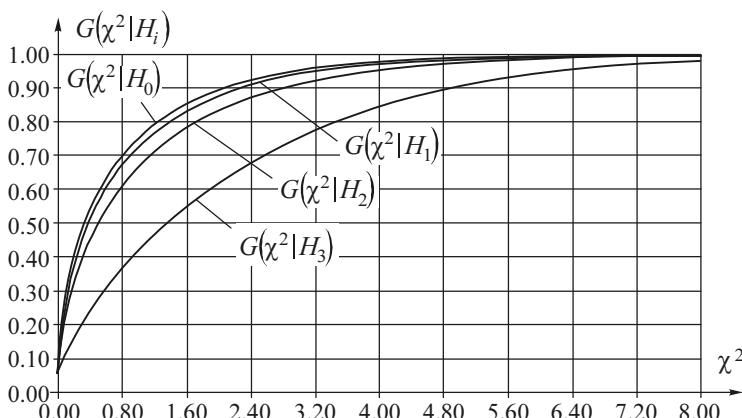


Рис. 8.3. Условные распределения  $G(\chi^2 | H_i)$  статистики критерия Бартлетта,  $m = 2$ ,  $n = 10$ , выборки принадлежат семейству (8.3) с параметром формы  $\theta_2 = 3$

На рис. 8.3 приведены графики распределения статистики (8.4) при справедливости конкурирующих гипотез  $H_1: \sigma_m = 1.1\sigma_0$ ,  $H_2: \sigma_m = 1.2\sigma_0$ ,  $H_3: \sigma_m = 1.5\sigma_0$  в ситуации, когда выборки принадлежат закону распределения семейства (8.3) с параметром формы  $\theta_2 = 3$ .

### 8.3. Критерий Кокрена

Когда все  $n_i$  одинаковы,  $n_1 = n_2 = \dots = n_m = n$ , можно использовать более простой критерий Кокрена [21]. Статистика  $Q$  критерия Кокрена выражается формулой

$$Q = \frac{S_{\max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2}, \quad (8.5)$$

где  $S_{\max}^2 = \max(S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2)$ ;  $m$  – число независимых оценок дисперсий (число выборок);  $S_i^2$  – оценки выборочных дисперсий.

Распределения статистики Кокрена сильно зависят от объема наблюдаемых выборок (рис. 8.4). Распределения статистики неизвестны. Поэтому в справочной литературе для ограниченного числа значений  $n$

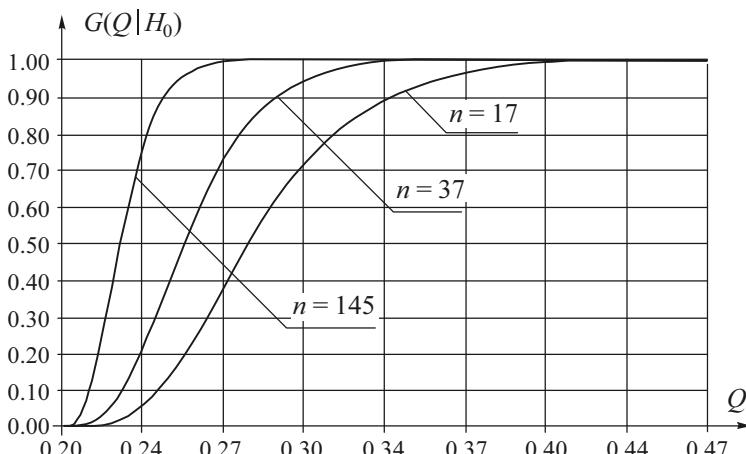


Рис. 8.4. Функции распределения статистики критерия Кокрена при различных объемах выборок при  $m = 5$

приводятся только таблицы процентных точек, которые и используются при проверке гипотез. Подчеркнем, что условие равенства  $n_i$  связано только с отсутствием соответствующих таблиц процентных точек. Нулевая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики.

Характер зависимости распределений  $G(Q|H_0)$  статистики (8.5) критерия Кокрена при справедливости проверяемой гипотезы  $H_0$  от закона распределения наблюдаемых выборок аналогичен зависимости для критерия Бартлетта [240].

## 8.4. Критерий Хартли

Критерий Хартли [56], так же как и критерий Кокрена и в силу тех же причин, используется в случае выборок равного объема.

Статистика критерия Хартли проверки гипотезы однородности дисперсий имеет вид

$$F = \frac{S_{\max}^2}{S_{\min}^2}, \quad (8.6)$$

где  $S_{\max}^2 = \max(S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2)$ ;  $S_{\min}^2 = \min(S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2)$ ;  $m$  – число независимых оценок дисперсий (число выборок);  $S_i^2$  – оценки выборочных дисперсий.

Степенями свободы для распределения статистики являются числа  $v_1 = m$  и  $v_2 = n - 1$ , откуда понятно, что распределения статистики существенно зависят от объема выборок. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики. В литературе для статистики (8.6) приводятся лишь таблицы процентных точек.

Характер зависимости распределений  $G(F|H_0)$  статистики (8.6) критерия Хартли при справедливости проверяемой гипотезы  $H_0$  от закона распределения наблюдаемых выборок аналогичен зависимостям для критериев Бартлетта и Кокрена.

## 8.5. Критерий Левене

Статистика критерия Левене [100] имеет вид

$$W = \frac{N - m}{m - 1} \frac{\sum_{i=1}^m n_i (\bar{Z}_{i\bullet} - \bar{Z}_{\bullet\bullet})^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (Z_{ij} - \bar{Z}_{i\bullet})^2}, \quad (8.7)$$

где  $m$  – количество выборок;  $n_i$  – объем  $i$ -й выборки;  $N = \sum_{i=1}^m n_i$ ;

$X_{ij}$  –  $j$ -е наблюдение в  $i$ -й выборке;  $Z_{ij} = |X_{ij} - \bar{X}_{i\bullet}|$ , в котором  $\bar{X}_{i\bullet}$  – среднее в  $i$ -й выборке;  $\bar{Z}_{i\bullet}$  – среднее  $Z_{ij}$  по  $i$ -й выборке;  $\bar{Z}_{\bullet\bullet}$  – среднее  $Z_{ij}$  по всем выборкам.

В многочисленных описаниях критерия, например [100], говорится, что в случае принадлежности выборок нормальному закону и справедливости  $H_0$  эта статистика подчиняется  $F_{v_1, v_2}$ -распределению Фишера с числом степеней свободы  $v_1 = m - 1$  и  $v_2 = N - m$ . На самом деле при объемах выборок в 10...20 элементов *распределения статистики существенно отличаются от  $F_{v_1, v_2}$ -распределения*, и это надо иметь в виду при использовании критерия. То, что распределение статистики (8.7) не является  $F_{v_1, v_2}$ -распределением Фишера, очевидно из определения величин  $Z_{ij}$ , которые в любом случае не принадлежатциальному закону, а следовательно, (8.7) не может подчиняться  $F_{v_1, v_2}$ -распределению. В этой связи процентные точки распределения исследовались методами статистического моделирования [115]. В то же время, как показали наши исследования, уже при объемах выборок  $n_i \geq 40$  максимальное отклонение распределения статистики от  $F_{v_1, v_2}$ -распределения Фишера не превышает величины 0.005 (в случае принадлежности анализируемых выборок нормальному закону).

Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики.

Поведение условного распределения  $G(W | H_0)$  статистики критерия Левене при справедливости проверяемой гипотезы  $H_0$  в зависимости от вида закона распределения, соответствующего наблюдаемым выборкам, иллюстрирует рис. 8.5. Очевидно, что критерий Левене менее чувствителен к отклонениям анализируемых выборок от нормального закона (сравните рис. 8.2 и 8.5).

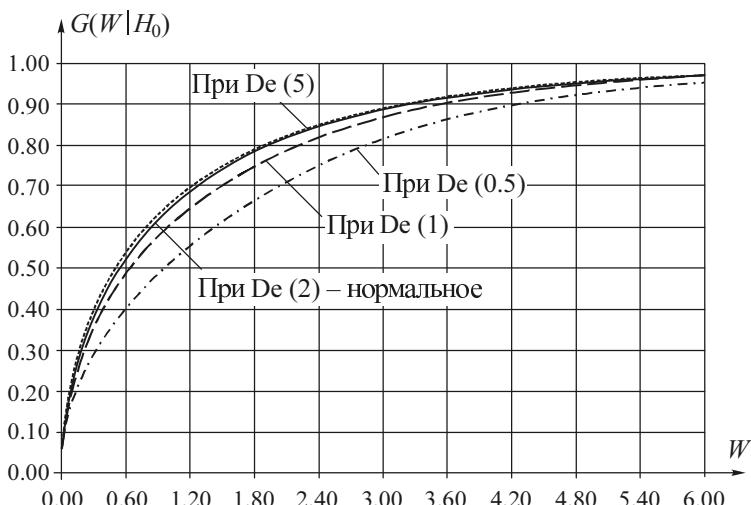


Рис. 8.5. Функции распределения статистики критерия Левене в случае распределений семейства (8.3) с различными значениями параметра формы ( $n = 10, m = 2$ )

В оригинальном критерии Левене предусмотрено использование только выборочных средних. В работе [16] предложено в статистике вида (8.7) в качестве оценок среднего использовать выборочные медиану и усеченное среднее ( $Z_{ij} = |X_{ij} - \tilde{X}_{i\bullet}|$ , где  $\tilde{X}_{i\bullet}$  – медиана в  $i$ -й выборке;  $Z_{ij} = |X_{ij} - \bar{X}'_{i\bullet}|$ , где  $\bar{X}'_{i\bullet}$  – усеченное среднее в  $i$ -й выборке). Считается, что в этих случаях критерий становится еще устойчивей к нарушению предположений о нормальности.

Как это часто бывает, используемый метод оценивания влияет на распределение статистики. В случае использования медианы распределение статистики (8.7) при выполнении предположений о нормальности

сти существенно отличается от распределения статистики при использовании обычного среднего, но меньше отличается от  $F_{v_1, v_2}$ -распределения Фишера. Рис. 8.6 показывает, как в случае  $m = 2$  выборок объемом  $n = 10$ , принадлежащих нормальному закону, изменяется распределение статистики (8.7) в зависимости от того, используется ли оценка среднего, или оценка усеченного среднего, или оценка медианы. Там же приведено соответствующее  $F_{1,18}$ -распределение Фишера. В данном случае при оценивании усеченного среднего отбрасывалось по два крайних наблюдения слева и справа. Картина, представленная на рис. 8.6, подчеркивает, что при ограниченных объемах выборок необходимо учитывать различие в распределениях статистики, связанное с различием используемых оценок.

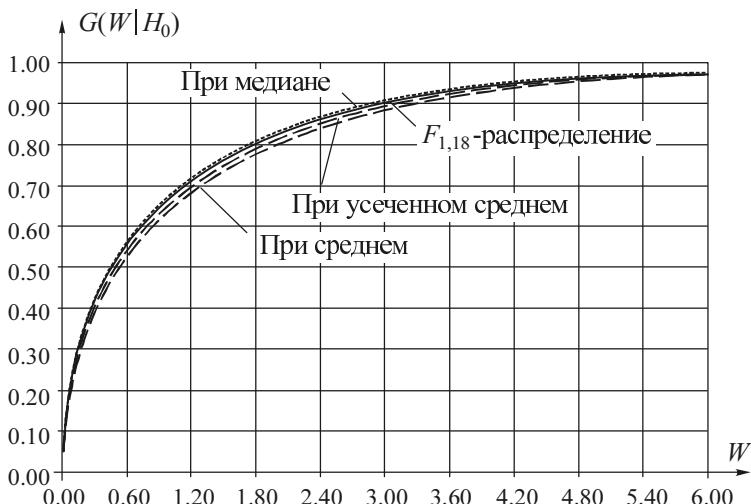


Рис. 8.6. Функции распределения статистики критерия Левене в случае принадлежности выборок нормальному закону при  $n = 10$ ,  $m = 2$  и  $F_{1,18}$ -распределение Фишера

Становится ли критерий более устойчивым в случае использования оценки медианы? В какой-то степени, да. Однако характер поведения распределений статистики кардинально изменился, и это также следует учитывать. Например, рис. 8.7 иллюстрирует изменение распределений  $G(W | H_0)$  статистики критерия Левене при справедливости

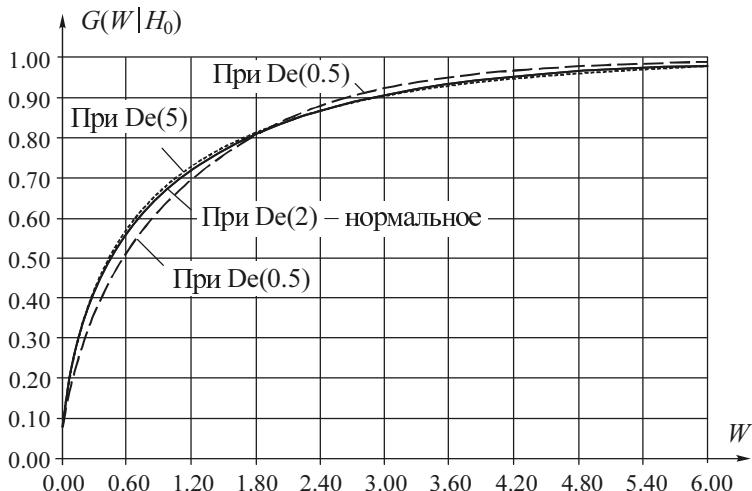


Рис. 8.7. Распределения статистики критерия Левене при использовании медианы в случае законов семейства (8.3) с различными значениями параметра формы ( $n = 10, m = 2$ )

проверяемой гипотезы  $H_0$  в зависимости от вида закона распределения, соответствующего наблюдаемым выборкам, при использовании оценки медианы (сравните с рис. 8.5).

## 8.6. Критерий Фишера

Критерий Фишера используется для проверки гипотезы о равенстве дисперсий двух выборок случайных величин. Статистика критерия имеет простой вид

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}, \quad (8.8)$$

где  $s_1^2$  и  $s_2^2$  – несмещенные оценки дисперсий, вычисленные по выборкам.

В случае принадлежности выборок нормальному закону и справедливости  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  эта статистика подчиняется  $F_{v_1, v_2}$ -распределению Фишера с числом степеней свободы  $v_1 = n_1 - 1$  и  $v_2 = n_2 - 1$ , где  $n_1$  и

$n_2$  – объемы сравниваемых выборок. Проверяемая гипотеза отклоняется при малых  $F^* < F_{\alpha/2, v_1, v_2}$  или больших  $F^* > F_{1-\alpha/2, v_1, v_2}$  значениях статистики. Как и остальные, критерий Фишера очень чувствителен к отклонениям от нормальности.

## 8.7. Сравнительный анализ мощности параметрических критериев

О преимуществах того или иного критерия при заданной вероятности ошибки первого рода  $\alpha$  (отклонить верную гипотезу  $H_0$ ) можно судить по величине мощности  $1 - \beta$ , где  $\beta$  – вероятность ошибки второго рода (не отклонить гипотезу  $H_0$  при справедливости конкурирующей гипотезы  $H_1$ ). В [163] однозначно говорится о более низкой мощности критерия Кокрена по сравнению с мощностью критерия Бартлетта. В наших работах [240, 73] на примере проверки гипотез об однородности дисперсий пяти выборок было показано, что выше оказывается мощность критерия Кокрена.

В табл. 8.1–8.3 для уровней значимости (для вероятностей ошибок первого рода)  $\alpha = 0.1; 0.05; 0.01$  приведены значения мощности рассматриваемых в данной работе критериев однородности дисперсий для случая двух выборок ( $H_0: \sigma_2 = \sigma_1$ ) относительно конкурирующих гипотез  $H_1: \sigma_2 = 1.1\sigma_1$ ,  $H_2: \sigma_2 = 1.2\sigma_1$ ,  $H_3: \sigma_2 = 1.5\sigma_1$  (в случае принадлежности выборок нормальному закону).

Полученные в результате исследований значения мощности критериев Бартлетта, Кокрена, Хартли и Фишера в этом случае оказались одинаковыми. При вычислении мощности по смоделированным распределениям статистик (при справедливости  $H_0$  и  $H_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) совпали все три значащие цифры, приведенные в таблицах. Следовательно, в этих условиях (при двух выборках, извлекаемых из нормальных совокупностей) данные четыре критерия являются эквивалентными. В то же время применение критерия Бартлетта оказывается предпочтительным, так как известно его асимптотическое распределение, не зависящее от объемов выборок, которые могут быть не равными. Критерий Левене заметно уступает по мощности критериям Бартлетта, Кокрена, Хартли и Фишера.

Таблица 8.1

**Мощность критериев однородности дисперсий относительно  
конкурирующей гипотезы  $H_1: \sigma_2 = 1.1\sigma_1$**

Критерий	$\alpha$	Объемы выборок				
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 100$
Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера	0.1	0.112	0.127	0.158	0.188	0.246
	0.05	0.058	0.068	0.090	0.112	0.157
	0.01	0.012	0.016	0.024	0.032	0.051
Левене	0.1	0.110	0.123	0.150	0.176	0.228
	0.05	0.056	0.065	0.084	0.103	0.141
	0.01	0.012	0.014	0.021	0.028	0.044

Таблица 8.2

**Мощность критериев однородности дисперсий относительно  
конкурирующей гипотезы  $H_2: \sigma_2 = 1.2\sigma_1$**

Критерий	$\alpha$	Объемы выборок				
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 100$
Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера	0.1	0.144	0.199	0.304	0.401	0.564
	0.05	0.079	0.119	0.201	0.283	0.438
	0.01	0.018	0.033	0.071	0.114	0.218
Левене	0.1	0.135	0.184	0.276	0.363	0.515
	0.05	0.072	0.107	0.177	0.250	0.388
	0.01	0.016	0.028	0.058	0.095	0.180

Таблица 8.3

**Мощность критериев однородности дисперсий относительно  
конкурирующей гипотезы  $H_3: \sigma_2 = 1.5\sigma_1$**

Критерий	$\alpha$	Объемы выборок				
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 100$
Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера	0.1	0.312	0.532	0.806	0.926	0.991
	0.05	0.201	0.402	0.705	0.871	0.980
	0.01	0.064	0.182	0.463	0.692	0.924
Левене	0.1	0.269	0.471	0.746	0.888	0.981
	0.05	0.163	0.338	0.628	0.812	0.960
	0.01	0.045	0.131	0.364	0.590	0.866

В случае законов распределения, отличных от нормального, например в случае принадлежности двух анализируемых выборок семейству законов распределения (8.3), критерии Бартлетта, Кокрена, Хартли и Фишера остаются эквивалентными по мощности, а критерий Левене заметно им уступает. Однако в случае законов распределения с более «тяжелыми хвостами» (например, в случае принадлежности выборок распределению Лапласа) критерий Левене имеет преимущество в мощности.

Следует обратить внимание, при каких объемах выборок с заданными вероятностями ошибок первого и второго рода, например  $\alpha \leq 0.1$  и  $\beta \leq 0.1$ , критерии Бартлетта, Кокрена, Хартли и Фишера могут различать конкурирующие гипотезы  $H_0$  и  $H_i$ . В случае относительно далекой конкурирующей гипотезы  $H_3$ :  $\sigma_2 = 1.5\sigma_1$  при  $n_1 = n_2$  объемы выборок  $n_i$  должны быть не менее 53, а в случае более близкой гипотезы  $H_1$ :  $\sigma_2 = 1.1\sigma_1$  требуется уже примерно 950 наблюдений!

Критерии Бартлетта, Кокрена, Хартли и Левене могут применяться при числе выборок больше двух. И в таких ситуациях мощность этих критериев оказывается различной. В табл. 8.4–8.6 приведены оценки мощности (в случае принадлежности выборок нормальному закону) при числе выборок 3 и 5, для случая, когда  $m-1$  выборкам соответствует значение  $\sigma_1$ , а последней –  $\sigma_m$ , отличное от  $\sigma_1$ .

Таблица 8.4

**Мощность многовыборочных критериев однородности дисперсий относительно конкурирующей гипотезы  $H_1$ :  $\sigma_m = 1.1\sigma_1$**

Количество выборок $m = 3$ , $n = 100$				
$\alpha$	Кокрена	Бартлетта	Хартли	Левене
0.1	0.250	0.242	0.239	0.225
0.05	0.161	0.152	0.148	0.139
0.01	0.056	0.049	0.046	0.043
Количество выборок $m = 5$ , $n = 100$				
$\alpha$	Кокрена	Бартлетта	Хартли	Левене
0.1	0.241	0.224	0.219	0.209
0.05	0.156	0.138	0.133	0.127
0.01	0.056	0.044	0.040	0.039

Таблица 8.5

**Мощность многовыборочных критериев однородности дисперсий относительно конкурирующей гипотезы  $H_2 : \sigma_m = 1.2\sigma_1$**

Количество выборок $m = 3, n = 100$				
$\alpha$	Кокрена	Бартлетта	Хартли	Левене
0.1	0.609	0.577	0.568	0.530
0.05	0.494	0.459	0.443	0.409
0.01	0.286	0.237	0.217	0.200
Количество выборок $m = 5, n = 100$				
$\alpha$	Кокрена	Бартлетта	Хартли	Левене
0.1	0.624	0.557	0.545	0.513
0.05	0.515	0.434	0.418	0.390
0.01	0.316	0.227	0.204	0.197

Таблица 8.6

**Мощность многовыборочных критериев однородности дисперсий относительно конкурирующей гипотезы  $H_3 : \sigma_m = 1.5\sigma_1$**

Количество выборок $m = 3, n = 100$				
$\alpha$	Кокрена	Бартлетта	Хартли	Левене
0.1	0.997	0.996	0.995	0.990
0.05	0.994	0.990	0.988	0.979
0.01	0.974	0.962	0.947	0.926
Количество выборок $m = 5, n = 100$				
$\alpha$	Кокрена	Бартлетта	Хартли	Левене
0.1	0.998	0.996	0.995	0.991
0.05	0.997	0.991	0.989	0.982
0.01	0.987	0.969	0.955	0.944

Как видим, в многовыборочном варианте в случае выполнения предположений о нормальном законе данные критерии можно упорядочить по убыванию мощности следующим образом:

Кокрена  $\succ$  Бартлетта  $\succ$  Хартли  $\succ$  Левене.

Этот порядок предпочтения сохраняется и в случае нарушений предположений о нормальном законе. Исключение касается ситуаций, когда выборки принадлежат законам с более тяжелыми, чем у нормального

закона, «хвостами», например закону распределения Лапласа: в этом случае критерий Левене оказывается несколько мощнее трех других.

Таким образом, подводя итоги исследования распределений статистик и мощности параметрических критериев проверки гипотез об однородности дисперсий, можно сформулировать следующие выводы. Во-первых, при анализе двух выборок критерии Бартлетта, Кокрена, Хартли и Фишера обладают идентичной мощностью как при выполнении предположений о нормальности, так и при их нарушении. Очевидно, что при выполнении предположений о нормальности выборок применение критерия Бартлетта предпочтительней, так как распределения его статистики практически не зависят от объемов выборок.

При анализе более двух выборок предпочтение следует отдать критерию Кокрена. Определенным затруднением для следования этой рекомендации является то, что в литературных источниках содержатся достаточно ограниченные данные с таблицами процентных точек для статистики этого критерия (для различного числа и объемов выборок). В современных условиях этот недостаток может быть быстро ликвидирован с использованием технологий компьютерного моделирования [253].

В случае нарушения предположений о нормальности анализируемых выборок распределения всех рассмотренных критериев становятся зависящими от объемов выборок (критерий Бартлетта теряет свое преимущество). Естественно, что распределения статистик критериев зависят от вида законов, которым подчиняются выборки. Следует отметить, что мощность всех рассмотренных параметрических критериев относительно тех же конкурирующих гипотез тем выше, чем «легче» по сравнению с нормальным законом «хвосты» симметричного распределения, которому подчиняются анализируемые выборки. При этом, как правило, предпочтительным является критерий Кокрена. Однако в случае распределений с более «тяжелыми хвостами» более высокую мощность имеет критерий Левене.

## 8.8. Критерий Ансари–Бредли

Непараметрические аналоги критериев проверки однородности дисперсий предназначены для проверки гипотез о принадлежности двух выборок с объемами  $n_1$  и  $n_2$  общей генеральной совокупности с одинаковыми характеристиками рассеяния. При этом, как правило, предполагается равенство средних.

Пусть  $n_1 < n_2$ . Статистика критерия Ансари–Бредли [7] может быть вычислена следующим образом:

$$S = \sum_{i=1}^{n_1} \left\{ \frac{n_1 + n_2 + 1}{2} - \left| R_i - \frac{n_1 + n_2 + 1}{2} \right| \right\}, \quad (8.9)$$

где  $R_i$  – ранги первой (меньшей по объему) выборки в общем вариационном ряду. Проверяемая гипотеза не отклоняется при  $S_{\alpha/2} < S < S_{1-\alpha/2}$ . Критические значения статистики для  $n_1, n_2 \leq 10$  доступны в таблице, приведенной, например, в [206], а для больших значений  $n_i$  соответствующая таблица может быть элементарно расширена методами статистического моделирования.

В случае принадлежности выборок случайных величин одному и тому же закону распределение  $G(S|H_0)$  статистики (8.9) при справедливости проверяемой гипотезы  $H_0$  не зависит от вида этого закона.

Математическое ожидание и дисперсия статистики (8.9) имеют вид

$$E[S] = \begin{cases} \frac{n_1(n_1 + n_2 + 2)}{4} & \text{при четном } (n_1 + n_2), \\ \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)^2}{4(n_1 + n_2)} & \text{при нечетном } (n_1 + n_2); \end{cases}$$

$$D[S] = \begin{cases} \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)(n_1 + n_2 + 2)}{48(n_1 + n_2 - 1)} & \text{при четном } (n_1 + n_2), \\ \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1) \left[ (n_1 + n_2)^2 + 3 \right]}{48(n_1 + n_2)^2} & \text{при нечетном } (n_1 + n_2). \end{cases}$$

При объемах выборок  $n_1, n_2 > 10$  дискретное распределение нормированной статистики

$$S^* = (S - E[S]) / \sqrt{D[S]} \quad (8.10)$$

достаточно хорошо приближается стандартным нормальным законом. В этом случае проверяемая гипотеза не отклоняется при  $N_{\alpha/2}^* < S^* < N_{1-\alpha/2}^*$ , где  $N_{\alpha}^*$  – соответствующая квантиль стандартного

нормального закона. Дискретностью распределений статистик (8.9) и (8.10) практически можно пренебречь, начиная с  $n_1, n_2 > 40$ .

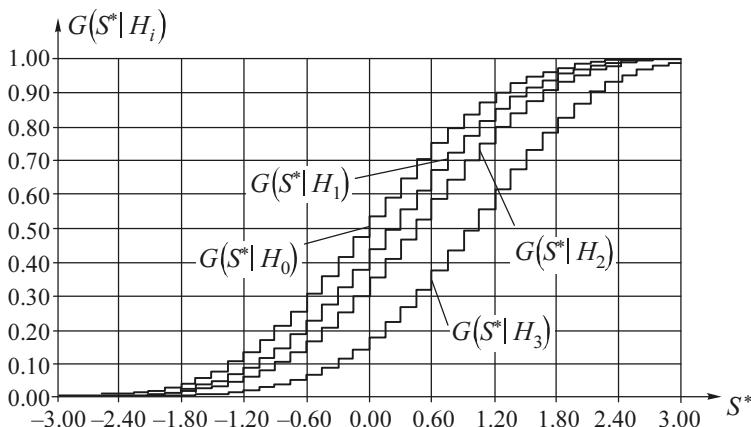


Рис. 8.8. Распределения  $G(S^* | H_i)$  нормированной статистики критерия Ансари–Бредли [выборки объемом  $n_1 = n_2 = 10$  принадлежат  $\text{De}(3)$ ]

На рис. 8.8 приведены графики распределения нормированной статистики  $S^*$  критерия Ансари–Бредли при справедливости различных конкурирующих гипотез  $H_0, H_1, H_2, H_3$  при объемах выборок  $n_1 = n_2 = 10$ , принадлежащих семейству распределений (8.3) с параметром формы  $\theta_2 = 3$ .

## 8.9. Критерий Муда

Статистика критерия имеет вид [111, 139]

$$M = \sum_{i=1}^{n_1} \left( R_i - \frac{n_1 + n_2 + 1}{2} \right)^2, \quad (8.11)$$

где  $R_i$  – ранги меньшей по объему выборки в общем вариационном ряду двух выборок. Проверяемая гипотеза не отклоняется при

$M_{\alpha/2} < M < M_{1-\alpha/2}$ . Критические значения данной статистики для  $n_1, n_2 \leq 10$  доступны в [206], а для больших значений  $n_i$  таблица может быть легко расширена методами статистического моделирования.

При  $n_1, n_2 > 10$  распределение нормированной статистики

$$M^* = \frac{\left( M - E[M] + \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{D[M]}}, \quad (8.12)$$

где

$$E[M] = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)(n_1 + n_2 - 1)}{12},$$

$$D[M] = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)(n_1 + n_2 + 2)(n_1 + n_2 - 2)}{180},$$

хорошо приближается стандартным нормальным законом [70], а при  $n_1, n_2 > 20$ , как показали исследования, дискретностью распределений статистик (8.11), (8.12) вообще можно пренебречь. При использовании статистики (8.12) проверяемая гипотеза не отклоняется при  $N_{\alpha/2}^* < M^* < N_{1-\alpha/2}^*$ .

На рис. 8.9 представлены распределения нормированной статистики (8.12) критерия Муда при справедливости различных конкурирующих гипотез  $H_0, H_1, H_2, H_3$  при объемах выборок  $n_1 = n_2 = 10$ , принадлежащих семейству распределений (8.3) с параметром формы  $\theta_2 = 3$ . Как можно заметить, проблемы с дискретностью этой статистики существенно проще, чем со статистикой критерия Ансари–Бредли (см. рис. 8.8).

## 8.10. Критерий Сижела–Тьюки

Статистика критерия строится следующим образом [133]. Вариационный ряд, построенный по объединенной выборке,  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , где  $n = n_1 + n_2$ , преобразуется в последовательность вида

$$x_1, x_n, x_{n-1}, x_2, x_3, x_{n-2}, x_{n-3}, x_4, x_5, \dots,$$

т. е. оставшийся ряд «переворачивается» каждый раз после приписывания рангов паре крайних значений. В качестве статистики критерия используется сумма рангов меньшей по объему выборки. При  $n_1 < n_2$  статистика критерия имеет вид

$$R = \sum_{i=1}^{n_1} R_i . \quad (8.13)$$

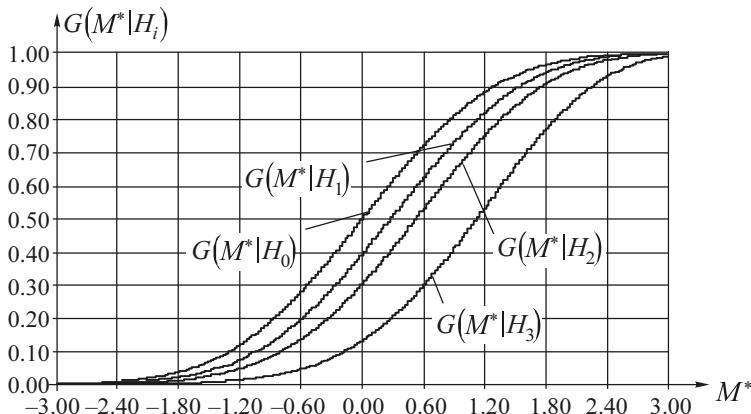


Рис. 8.9. Распределения  $G(M^* | H_i)$  статистики нормированного критерия Муда [выборки объемом  $n_1 = n_2 = 10$  принадлежат  $De(3)$ ]

Проверяемая гипотеза не отклоняется при  $R_{\alpha/2} < R < R_{1-\alpha/2}$ . Статистика критерия Сижела–Тьюки является аналогом критерия Манна–Уитни, но предназначенным для проверки гипотез об однородности параметров масштаба. Поэтому при проверке гипотезы могут использоваться квантили распределения статистики Манна–Уитни [206]. При  $n_1, n_2 > 10$  распределение нормированной статистики

$$R^* = (R - E[R]) / \sqrt{D[R]} , \quad (8.14)$$

где

$$E[R] = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2}, \quad D[R] = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12},$$

достаточно хорошо приближается стандартным нормальным законом. В этом случае проверяемая гипотеза не отклоняется при  $N_{\alpha/2}^* < R^* < N_{1-\alpha/2}^*$ . При этом дискретностью распределения статистики можно практически пренебречь с  $n_1, n_2 > 30$ .

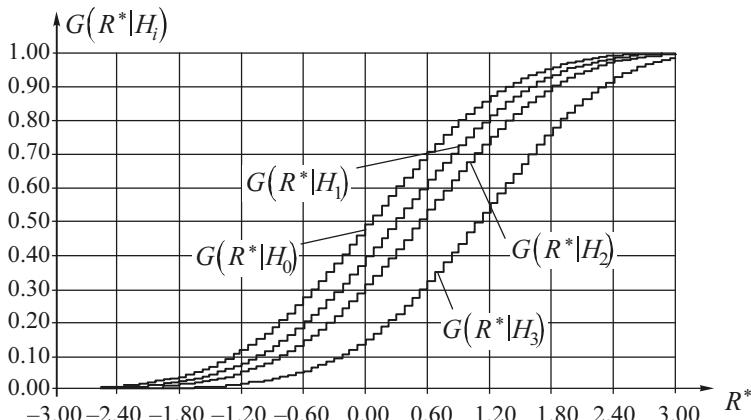


Рис. 8.10. Распределения  $G(R^* | H_i)$  статистики нормированного критерия Сижела–Тьюки [выборки объемом  $n_1 = n_2 = 10$  принадлежат  $\text{De}(3)$ ]

На рис. 8.10 приведены распределения нормированной статистики (8.14) критерия Сижела–Тьюки при справедливости различных конкурирующих гипотез  $H_0, H_1, H_2, H_3$  при объемах выборок  $n_1 = n_2 = 10$ , принадлежащих семейству распределений (8.3). Можно заметить, что данная статистика более дискретна по сравнению со статистикой Муда, но менее – по сравнению со статистикой критерия Ансари–Бредли (см. рис. 8.8 и 8.9).

## 8.11. Критерий Кейпена

Статистика критерия Кейпена [17] задается соотношением

$$K = \sum_{i=1}^{n_1} a_{n_1+n_2}(R_i), \quad (8.15)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – объемы сравниваемых выборок ( $n_1 \leq n_2$ );  $R_i$  – ранг  $i$ -го элемента меньшей по объему выборки в общем упорядоченном по возрастанию ряду ( $n_1 + n_2$ ) значений объединенной выборки;  $a_{n_1+n_2}(i)$  – математическое ожидание квадрата  $i$ -й порядковой статистики в выборке объема ( $n_1 + n_2$ ) из стандартного нормального закона. Значения  $a_N(i)$ , называемые метками критерия, приведены, например, в [206].

Гипотеза о равенстве параметров масштаба не отклоняется с достоверностью  $\alpha$ , если  $K_{\alpha/2} < K < K_{1-\alpha/2}$ , где критические значения  $K_{\alpha/2}$ ,  $K_{1-\alpha/2}$  также можно найти в [206].

При  $n_1, n_2 > 10$  справедлива нормальная аппроксимация

$$K^* = \frac{K - E[K]}{\sqrt{D[K]}}, \quad (8.16)$$

где

$$E[K] = n_1, \quad D[K] = \frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 1)} \sum_{i=1}^{n_1+n_2} a_{n_1+n_2}^2(i) - \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2 - 1}.$$

Гипотеза равенства параметров масштаба не отклоняется с достоверностью  $\alpha$ , если  $N_{\alpha/2}^* < K^* < N_{1-\alpha/2}^*$ .

В отличие от предыдущих критериев распределения статистик (8.15), (8.16) данного критерия являются достаточно гладкими.

## 8.12. Критерий Клотца

Статистика критерия имеет вид [65]

$$L = \sum_{i=1}^{n_1} u_{\gamma}^2 \frac{R_i}{n_1+n_2+1}, \quad (8.17)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – объемы сравниваемых выборок ( $n_1 \leq n_2$ );  $R_i$  – ранг  $i$ -го элемента меньшей по объему выборки в общем упорядоченном по возрастанию ряду ( $n_1 + n_2$ ) значений объединенной выборки;  $u_{\gamma}$  –

$\gamma$ -квантиль стандартного нормального распределения. Значения  $\frac{u^2}{N+1}$ ,

называемые метками критерия, приведены, например, в [206].

Гипотеза равенства параметров масштаба не отклоняется с достоверностью  $\alpha$ , если  $L_{\alpha/2} < L < L_{1-\alpha/2}$ , где критические значения  $L_{\alpha/2}, L_{1-\alpha/2}$  можно найти в [206].

При  $n_1, n_2 > 10$  справедлива нормальная аппроксимация

$$L^* = \frac{L - E[L]}{\sqrt{D[L]}}, \quad (8.18)$$

где

$$\begin{aligned} M[L] &= \frac{n_1}{n_1 + n_2} \sum_{i=1}^{n_1+n_2} u^2 \frac{i}{\frac{n_1+n_2+1}{n_1+n_2+1}}, \\ D[L] &= \frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 1)} \sum_{i=1}^{n_1+n_2} u^4 \frac{i}{\frac{n_1+n_2+1}{n_1+n_2+1}} - \\ &- \frac{n_2}{n_1(n_1 + n_2 - 1)} \left[ \frac{n_1}{n_1 + n_2} \sum_{i=1}^{m+n} u^2 \frac{i}{\frac{n_1+n_2+1}{n_1+n_2+1}} \right]. \end{aligned}$$

Гипотеза равенства параметров масштаба не отклоняется с достоверностью  $\alpha$ , если  $N_{\alpha/2}^* < L^* < N_{1-\alpha/2}^*$ . Распределения статистик (8.17), (8.18) также достаточно гладкие.

## 8.13. Сравнительный анализ мощности непараметрических критериев

В табл. 8.7–8.9 для уровней значимости  $\alpha = 0.1; 0.05; 0.01$  приведены полученные в результате исследований значения мощности критериев Муда, Ансари–Бредли и Сижела–Тьюки относительно кон-

курирующих гипотез  $H_1: \sigma_2 = 1.1\sigma_1$ ,  $H_2: \sigma_2 = 1.2\sigma_1$ ,  $H_3: \sigma_2 = 1.5\sigma_1$  (в случае принадлежности выборок нормальному закону).

Результаты анализа показывают заметное преимущество в мощности критерия Муда и практическую эквивалентность критериев Ансари–Бредли и Сижела–Тьюки. Некоторый «разнобой» в данных таблиц при объемах выборок  $n = 10$  и  $n = 20$  объясняется различной степенью дискретности распределений статистик этих критериев.

Таблица 8.7

**Мощность критериев относительно конкурирующей гипотезы**

$$H_1: \sigma_2 = 1.1\sigma_1$$

Критерий	$\alpha$	Объемы выборок				
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 100$
Муда	0.1	0.111	0.120	0.143	0.166	0.211
	0.05	0.057	0.064	0.080	0.096	0.128
	0.01	0.012	0.014	0.020	0.026	0.039
Ансари–Бредли	0.1	0.101	0.125	0.135	0.154	0.190
	0.05	0.052	0.064	0.074	0.087	0.113
	0.01	0.011	0.014	0.019	0.023	0.033
Сижела–Тьюки	0.1	0.106	0.121	0.135	0.154	0.190
	0.05	0.055	0.062	0.075	0.087	0.113
	0.01	0.011	0.010	0.018	0.023	0.033

Таблица 8.8

**Мощность критериев относительно конкурирующей гипотезы**

$$H_2: \sigma_2 = 1.2\sigma_1$$

Критерий	$\alpha$	Объемы выборок				
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 100$
Муда	0.1	0.135	0.173	0.254	0.330	0.468
	0.05	0.073	0.100	0.161	0.222	0.344
	0.01	0.016	0.027	0.052	0.082	0.152
Ансари–Бредли	0.1	0.128	0.172	0.226	0.289	0.406
	0.05	0.070	0.097	0.141	0.189	0.287
	0.01	0.015	0.025	0.045	0.066	0.119

Окончание табл. 8.8

Критерий	$\alpha$	Объемы выборок				
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 100$
Сижела–Тьюки	0.1	0.124	0.165	0.226	0.289	0.405
	0.05	0.066	0.092	0.141	0.190	0.287
	0.01	0.014	0.013	0.044	0.066	0.119

Таблица 8.9

## Мощность критериев относительно конкурирующей гипотезы

$$H_3 : \sigma_2 = 1.5\sigma_1$$

Критерий	$\alpha$	Объемы выборок				
		$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 100$
Муда	0.1	0.255	0.425	0.688	0.841	0.964
	0.05	0.158	0.302	0.565	0.751	0.931
	0.01	0.045	0.121	0.319	0.518	0.802
Ансари–Бредли	0.1	0.242	0.393	0.608	0.768	0.926
	0.05	0.150	0.270	0.484	0.659	0.869
	0.01	0.041	0.104	0.254	0.413	0.693
Сижела–Тьюки	0.1	0.246	0.383	0.609	0.768	0.926
	0.05	0.155	0.261	0.484	0.659	0.869
	0.01	0.043	0.056	0.251	0.414	0.693

Применение критериев Кейпена и Клотца для произвольных объемов выборок крайне затруднительно в связи с необходимостью использования соответствующих «меток», которые приводятся только для малых объемов выборок. Исследование мощности этих критериев при объемах выборок до 10 показало, что в этом случае они имеют мощность, которая не превосходит мощности критерия Муда. Поэтому дальнейшие исследования не имели смысла.

Мощность критериев рассматривалась для различных законов распределения, отличных от нормального. Следует заметить, что, как и в случае параметрических критериев, мощность всех рассмотренных непараметрических критериев относительно тех же конкурирующих гипотез повышается вместе с «облегчением хвостов» распределений (по

сравнению с нормальным законом), которым подчиняются анализируемые выборки.

Естественно, что непараметрические критерии уступают по мощности рассмотренным в [232, 85, 51] критериям Бартлетта, Кокрена, Хартли и Фишера. На рис. 8.11 приведены графики мощности критериев относительно конкурирующих гипотез  $H_1$  и  $H_3$  в зависимости от объема выборки  $n$  при  $\alpha = 0.1$  в случае нормального закона. Как видим, преимущество в мощности критерия Бартлетта по сравнению с наиболее мощным из непараметрических критерием Муда достаточно существенное. Напомним, что в случае двух выборок мощности критериев Бартлетта, Кокрена, Хартли и Фишера совпадают [232, 85]. Но в случае более двух выборок, когда применение непараметрических критериев не предусмотрено, различие в мощности критериев Бартлетта, Кокрена и Хартли ощутимо.

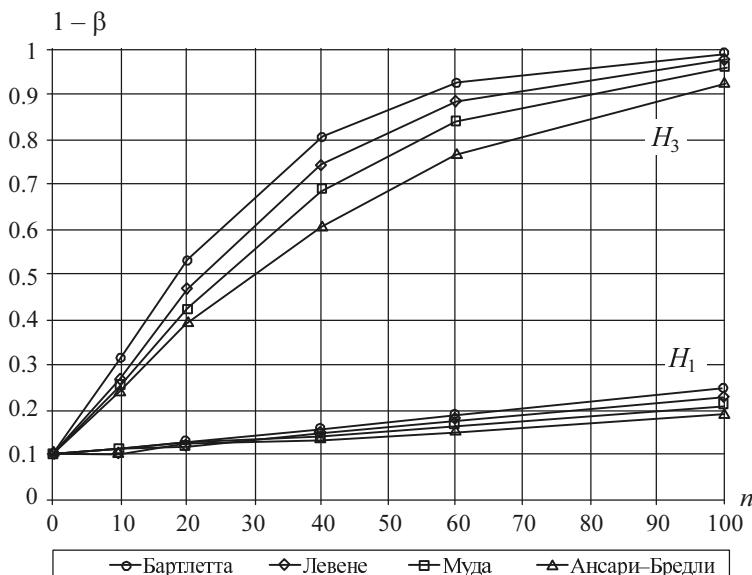


Рис. 8.11. Мощность критериев относительно конкурирующих гипотез  $H_1$  и  $H_3$  в зависимости от объема выборки  $n$  при  $\alpha = 0.1$  в случае нормального закона

На рис. 8.12 представлены графики мощности многовыборочных критериев относительно тех же конкурирующих гипотез  $H_1$  и  $H_3$  в

зависимости от объема выборки  $n$  при  $\alpha = 0.1$  в случае нормального закона для числа анализируемых выборок  $m = 5$ .

В процессе дискуссий, связанных с обсуждением достоинств и недостатков параметрических и непараметрических критериев, можно услышать радикальные мнения, суть которых заключается в рекомендации применять только непараметрические критерии. При этом основной и вполне справедливый довод связывают с тем, что на практике закон распределения, которому подчиняются анализируемые выборки, не известен и, как правило, отличается от нормального. Это действительно так. И если обе выборки принадлежат одной и той же генеральной совокупности, распределения  $G(S|H_0)$  статистик непараметрических критериев не зависят от вида закона.

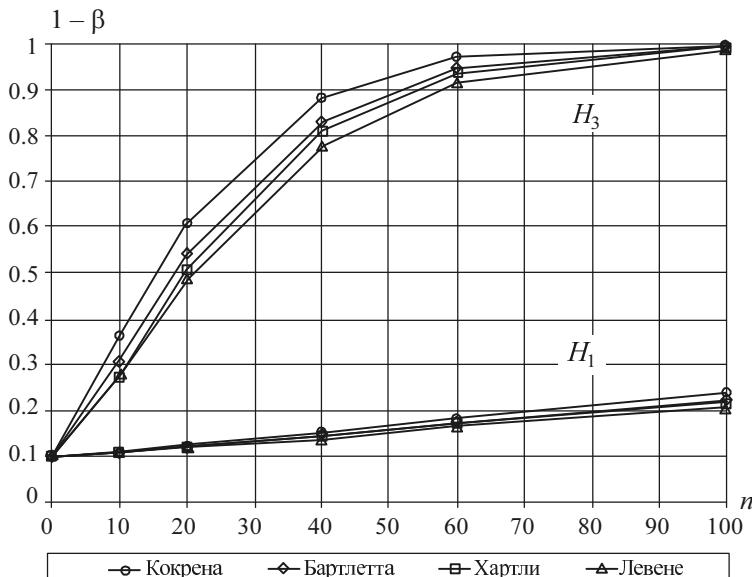


Рис. 8.12. Мощность многовыборочных критериев относительно конкурирующих гипотез  $H_1$  и  $H_3$  в зависимости от объема выборки  $n$  при  $\alpha = 0.1$  в случае нормального закона при числе анализируемых выборок  $m = 5$

Однако если при справедливости гипотезы  $H_0$  о равенстве дисперсий выборки принадлежат разным законам, мы наблюдаем зависимость

$G(S|H_0)$  от этих законов. На рис. 8.13 в качестве примера, подтверждающего этот факт, показаны распределения нормированной статистики (8.12) критерия Муда, когда две выборки с одинаковым объемом  $n = 10$  подчиняются различным парам законов семейства (8.3) при равенстве дисперсий этих законов. Как видим, распределение зависит и от того, какая по порядку выборка какому закону принадлежит.

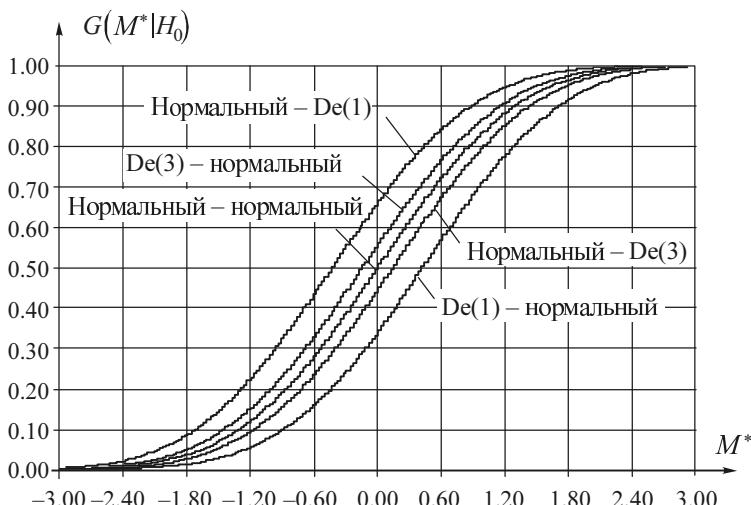


Рис. 8.13. Распределения нормированной статистики критерия Муда при справедливости  $H_0$  в случае принадлежности пары выборок различным законам семейства (8.3)

Естественно, что для параметрических критериев отмеченная зависимость также характерна, но изменения в такой ситуации, например, распределений статистики критерия Кокрена, на наш взгляд, оказываются несколько меньшими.

## 8.14. Применение критерия Кокрена при законах, отличных от нормального

Сравнивая значения мощности критериев в табл. 8.1–8.3 для параметрических критериев со значениями в табл. 8.7–8.9 для непараметрических, видим, что параметрические критерии имеют значитель-

ное преимущество в мощности. Причем это преимущество сохраняется и в ситуациях, когда анализируемые выборки принадлежат законам, существенно отличающимся от нормального. Ясно, что в этих ситуациях мы не можем использовать ставшие классическими результаты, связанные с распределениями (или процентными точками) статистик критериев Бартлетта, Кокрена, Хартли, Левене. Проблема осложняется тем, что в условиях нарушения классических предположений о нормальности распределения статистик упомянутых критериев при справедливости проверяемой гипотезы зависят и от законов распределения, которым подчиняются анализируемые выборки, и от объемов выборок. В принципе, то же самое мы имеем, например, для критериев Кокрена, Хартли, Левене при нормальном законе. В этой связи понятно, что построить (найти) модели распределения статистики критерия для любых законов, для любых объемов выборок – задача нереальная. Однако для конкретных параметрических моделей законов распределения, зарекомендовавших себя в различных приложениях в качестве хороших моделей наблюдаемых случайных величин, такая задача (как и для нормального закона) может быть (относительно) легко решена с использованием компьютерных технологий, как, например, в [226, 80, 227, 81].

Результаты исследований в [232, 85] показали предпочтительность критерия Кокрена, который в двухвыборочном варианте не уступает любому другому, а в многовыборочном оказывается наиболее мощным (за исключением законов с «тяжелыми хвостами», где хорошо в этом плане зарекомендовал себя критерий Левене).

В случае принадлежности наблюдаемых величин распределениям семейства (8.3) при значениях параметра формы  $\theta_2 = 1, 2, 3, 4, 5$  и ряде значений  $n$  на основании результатов статистического моделирования построены [232, 85, 51] таблицы верхних процентных точек (1, 5, 10 %) статистики (8.5) критерия Кокрена для двух – пяти выборок. Полученные результаты представлены в табл. 8.10–8.13 и могут использоваться в случае, когда есть основания считать, что распределение (8.3) с соответствующим параметром  $\theta_2$  представляет собой хорошую модель для наблюдаемых случайных величин. Построенные процентные точки уточняют некоторые результаты, представленные в [240, 73], и расширяют возможности применения критерия Кокрена.

Таблица 8.10

Верхние процентные точки для статистики критерия Кокрена в случае двух выборок одинакового объема  $n$ 

$n$	De(1)		De(2)		De(3)		De(4)		De(5)	
	$\alpha$									
5	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1
5	0.9117	0.947	0.980	0.865	0.906	0.959	0.845	0.890	0.950	0.836
8	0.862	0.900	0.949	0.791	0.833	0.899	0.764	0.807	0.877	0.751
10	0.836	0.875	0.930	0.761	0.801	0.868	0.733	0.773	0.842	0.720
15	0.789	0.829	0.890	0.713	0.748	0.811	0.686	0.719	0.780	0.674
20	0.759	0.797	0.858	0.684	0.716	0.774	0.660	0.689	0.743	0.648
25	0.736	0.772	0.834	0.665	0.694	0.748	0.642	0.668	0.717	0.632
30	0.718	0.753	0.814	0.650	0.677	0.727	0.629	0.653	0.699	0.619
40	0.693	0.725	0.782	0.630	0.654	0.699	0.611	0.632	0.672	0.603
50	0.674	0.704	0.758	0.617	0.638	0.679	0.599	0.618	0.654	0.591
60	0.660	0.689	0.740	0.606	0.626	0.664	0.591	0.608	0.640	0.583
70	0.649	0.676	0.724	0.598	0.617	0.652	0.584	0.599	0.630	0.577
80	0.640	0.665	0.712	0.592	0.609	0.642	0.578	0.593	0.621	0.572
90	0.632	0.657	0.701	0.587	0.603	0.634	0.573	0.587	0.614	0.567
100	0.626	0.649	0.692	0.582	0.598	0.628	0.570	0.583	0.609	0.564

Таблица 8.11

Верхние процентные точки для статистики критерия Колмогорова в случае трех выборок одинакового объема  $n$ 

$n$	De(1)		De(2)		De(3)		De(4)		De(5)	
	$\alpha$									
0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05
5	0.794	0.847	0.918	0.700	0.752	0.839	0.665	0.717	0.806	0.649
8	0.716	0.768	0.852	0.614	0.658	0.741	0.579	0.620	0.698	0.563
10	0.681	0.732	0.817	0.581	0.622	0.698	0.548	0.584	0.654	0.533
15	0.623	0.669	0.751	0.531	0.564	0.628	0.503	0.531	0.588	0.489
20	0.587	0.629	0.707	0.502	0.531	0.588	0.477	0.501	0.550	0.466
25	0.562	0.600	0.673	0.484	0.509	0.560	0.461	0.482	0.526	0.450
30	0.543	0.578	0.647	0.470	0.493	0.539	0.449	0.468	0.507	0.439
40	0.515	0.547	0.608	0.450	0.470	0.510	0.432	0.449	0.482	0.424
50	0.496	0.525	0.581	0.437	0.455	0.490	0.421	0.436	0.465	0.414
60	0.482	0.508	0.560	0.428	0.444	0.476	0.413	0.426	0.453	0.406
70	0.471	0.495	0.543	0.421	0.435	0.465	0.407	0.419	0.444	0.401
80	0.462	0.485	0.530	0.415	0.429	0.456	0.402	0.413	0.436	0.396
90	0.455	0.476	0.518	0.410	0.423	0.449	0.398	0.408	0.430	0.392
100	0.449	0.469	0.509	0.406	0.418	0.443	0.394	0.405	0.425	0.389

Таблица 8.12

**Верхние процентные точки для статистики критерия Кокрена в случае четырех выборок одинакового объема  $n$**

$n$	De(1)		De(2)		De(3)		De(4)		De(5)	
	$\alpha$									
0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05
5	0.696	0.755	0.848	0.584	0.634	0.727	0.545	0.591	0.679	0.527
8	0.611	0.666	0.761	0.501	0.541	0.619	0.466	0.500	0.569	0.450
10	0.575	0.626	0.720	0.470	0.506	0.576	0.438	0.468	0.529	0.423
15	0.517	0.561	0.646	0.424	0.453	0.510	0.397	0.421	0.468	0.385
20	0.482	0.521	0.598	0.399	0.422	0.471	0.375	0.395	0.435	0.364
25	0.457	0.493	0.563	0.382	0.403	0.445	0.360	0.378	0.413	0.351
30	0.439	0.471	0.536	0.369	0.388	0.427	0.350	0.365	0.397	0.341
40	0.413	0.441	0.498	0.352	0.368	0.401	0.335	0.348	0.348	0.328
50	0.395	0.420	0.470	0.340	0.355	0.384	0.326	0.337	0.361	0.319
60	0.382	0.404	0.451	0.332	0.345	0.371	0.319	0.329	0.350	0.313
70	0.372	0.392	0.435	0.326	0.337	0.361	0.313	0.323	0.342	0.308
80	0.364	0.383	0.422	0.320	0.331	0.354	0.309	0.318	0.336	0.304
90	0.357	0.375	0.412	0.316	0.326	0.348	0.305	0.314	0.331	0.300
100	0.352	0.368	0.403	0.313	0.322	0.342	0.302	0.310	0.327	0.298

Таблица 8.13

**Верхние процентные точки для статистики критерия Кокрена в случае пяти выборок одинакового объема  $n$**

$n$	De(1)		De(2)		De(3)		De(4)		De(5)	
	$\alpha$									
5	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1
5	0.623	0.684	0.787	0.504	0.551	0.642	0.464	0.505	0.588	0.446
8	0.537	0.591	0.690	0.426	0.461	0.533	0.392	0.421	0.482	0.376
10	0.501	0.550	0.645	0.397	0.428	0.491	0.366	0.392	0.444	0.352
15	0.445	0.485	0.567	0.355	0.379	0.429	0.330	0.349	0.390	0.318
20	0.412	0.447	0.520	0.332	0.352	0.394	0.310	0.326	0.360	0.300
25	0.388	0.420	0.485	0.316	0.334	0.371	0.297	0.311	0.341	0.288
30	0.370	0.399	0.459	0.305	0.321	0.354	0.287	0.300	0.327	0.279
40	0.347	0.371	0.371	0.290	0.303	0.331	0.275	0.285	0.308	0.268
50	0.330	0.352	0.397	0.280	0.291	0.316	0.266	0.276	0.295	0.260
60	0.318	0.337	0.378	0.272	0.283	0.304	0.220	0.227	0.242	0.254
70	0.309	0.326	0.363	0.266	0.276	0.296	0.255	0.263	0.279	0.250
80	0.301	0.318	0.352	0.262	0.271	0.289	0.251	0.259	0.274	0.247
90	0.295	0.310	0.342	0.258	0.266	0.284	0.248	0.255	0.269	0.244
100	0.290	0.304	0.334	0.255	0.263	0.279	0.246	0.252	0.265	0.247

## 8.15. Выводы

Подводя окончательные итоги исследования критериев проверки гипотез об однородности дисперсий, следует обратить внимание на следующие основные факты и перспективы.

В случае анализа двух выборок критерии Фишера, Бартлетта, Кокрена, Хартли обладают одинаковой мощностью относительно тех же конкурирующих гипотез. Если анализируется большее число выборок, преимущество в мощности имеет критерий Кокрена. Среди рассмотренных непараметрических критериев наибольшей мощностью обладает критерий Муда, который заметно уступает критериям Фишера, Бартлетта, Кокрена, Хартли и Левене.

Основной недостаток параметрических критериев связан с тем, что классические результаты обеспечивают корректность применения данных критериев лишь при выполнении предположения о принадлежности анализируемых выборок нормальному законам, так как только для этой ситуации известны распределения статистик рассмотренных параметрических критериев или таблицы процентных точек.

Но, с другой стороны, непараметрические критерии также не свободны от недостатков. Во-первых, как правило, предполагается равенство средних. Во-вторых, как было показано нами, корректность их применения обеспечивается в случае принадлежности анализируемых выборок закону распределения вероятностей одного и того же вида. По существу, при справедливости проверяемой гипотезы о равенстве дисперсий, соответствующих двум выборкам, распределение статистики известно для случая однородности законов этих выборок. Выполнение этих условий несколько сужает область корректного использования непараметрических критериев. В-третьих, непараметрические критерии обладают заметно меньшей мощностью по сравнению с параметрическими.

Действие параметрических критериев при необходимости можно распространить на ситуации, когда выборки описываются законами, отличающимися от нормального, воспользовавшись, как в нашем случае, методикой компьютерного моделирования для исследования распределений статистик и построения для этих распределений моделей или таблиц процентных точек. Из рассмотренных критериев в наибольшей степени на эту роль подходит критерий Кокрена. Однако

необходимо учитывать, что распределение статистики критерия будет зависеть от вида закона, объема выборок и во многих случаях – от конкретных значений некоторых параметров. При использовании соответствующего программного обеспечения [253] решение таких задач не вызывает принципиальных трудностей, а наличие программного обеспечения позволяет решать эти задачи по мере возникновения потребности [264]. Нелишне заметить, что специфика задач по исследованию методами компьютерного моделирования вероятностных закономерностей позволяет эффективно распараллеливать вычислительные процессы, используя ресурсы многоядерных и многопроцессорных компьютеров и компьютерных сетей и получать искомое решение практически в реальном масштабе времени.

---

## 9. КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ НЕЗАВИСИМОСТИ И ОТСУТСТВИЯ ТРЕНДА

---

### 9.1. Исследование распределений и мощности критерия Аббе

#### 9.1.1. Предпосылки применения критерия Аббе

**К**ритерий Аббе предназначен для проверки гипотез вида  $H_0: E[\xi_1] = E[\xi_2] = \dots = E[\xi_n]$ , т. е. того, что все наблюдаемые величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  в выборке объемом  $n$  имеют одинаковые математические ожидания. Конкурирующая гипотеза заключается в справедливости  $|E[\xi_{i+1}] - E[\xi_i]| > 0$  для всех или некоторых значений  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Критерий часто используют для проверки независимости последовательности измерений, для проверки отсутствия тренда (отсутствия систематических изменений).

Статистика критерия Аббе в современной форме [163] представляется собой отношение

$$S_A = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{n-1} (\xi_{i+1} - \xi_i)^2 \Big/ \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2 \right), \quad (9.1)$$

где  $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$ .

Предполагается, что  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – взаимно независимые, нормально распределенные случайные величины с одинаковыми, но неизвестными

дисперсиями. Если верна некоторая конкурирующая гипотеза, то знаменатель статистики  $S_A$  больше числителя и поэтому значения статистики будут, как правило, меньше тех, которые наблюдаются, когда справедлива основная гипотеза о равенстве средних.

Условное распределение  $G(S_{A_n} | H_0)$  статистики (9.1) при справедливости  $H_0$  зависит от объема выборки  $n$ , симметрично относительно единицы и определено на интервале  $1 \pm \cos(\pi/n)$  [116]. С ростом объемов выборок распределение статистики хорошо приближается нормальному законом с параметром сдвига, равным единице, и со стандартным отклонением при объемах  $n > 20$ , равным [163]:

$$\left[ (n-2)/\left(n^2 - 1\right) \right]^{1/2}, \quad (9.2)$$

а при  $n > 60$  – с [150]:

$$\left\{ (n-2)/[(n-1)(n+2)] \right\}^{1/2}. \quad (9.3)$$

Решение об отклонении проверяемой гипотезы о равенстве средних принимается, если значение статистики  $S_A$  оказывается меньше критического значения  $S_{A_{n,\alpha}}$ , где  $\alpha$  – заданный уровень значимости, а критическое значение определяется из уравнения  $P\{S_A < S_{A_{n,\alpha}}\} = \alpha$  в соответствии с условным распределением статистики  $G(S_{A_n} | H_0)$ .

Одной из основных предпосылок применения критерия Аббе является предположение о принадлежности  $\xi_1, \dots, \xi_n$  нормальному закону. В [320, 137] в ходе исследования числовых характеристик распределения статистики (9.1) при справедливости  $H_0$  и принадлежности наблюдений различным симметричным законам была отмечена устойчивость этих характеристик и самого распределения статистики Аббе к нарушению предположения о нормальности  $\xi_1, \dots, \xi_n$ .

Для многих статистических критериев нарушение предположения о нормальности приводит к существенным изменениям в законе распре-

деления статистики критерия. Однако относительно ряда параметрических критериев, связанных с проверкой гипотез о средних, можно говорить об устойчивости к нарушению такого предположения (при отклонении от нормального закона в достаточно широких пределах) [229, 83]. В литературных источниках можно найти аналитические оценки, характеризующие изменения распределений некоторых статистик в связи с определенными отклонениями наблюдений от нормального закона. Результаты численных исследований, подтверждающие этот вывод, содержатся, например, в [247]. Можно говорить о высокой устойчивости критериев проверки однородности средних двух выборок (например, критериев Стьюдента при известных и неизвестных дисперсиях) или серии выборок (например,  $F$ -критерий): как правило, распределения статистик значимо отличаются от «классических» при асимметричности законов наблюдаемых случайных величин или при наличии «тяжелых хвостов» (при законах, близких к распределению Коши) [229, 83]. Аналогичная ситуация имеет место и в случае критерия Аббе.

Цель работ [274, 93] заключалась в исследовании влияния на распределение статистики критерия Аббе различной степени отклонения от нормального закона и оценке мощности критерия по отношению к некоторым конкурирующим гипотезам. В частности, исследовалось, что происходит с распределением статистики, если закон распределения наблюдаемых величин: асимметричен; с «тяжелыми хвостами»; представляет собой симметричный закон, в различной степени отличающийся от нормального; представляет собой симметричную много-модальную смесь. Исследовалась зависимость распределения статистики от объема выборки. В основу исследований положена методика статистического моделирования распределений статистик.

### 9.1.2. Степень близости распределений статистики Аббе к нормальному

Насколько оправдана возможность применения в качестве распределения статистики (9.1) аппроксимации его нормальным законом с параметром масштаба (9.2) или (9.3) и можно ли использовать такую аппроксимацию при  $n < 20$ ?

В табл. 9.1 представлены результаты проверки согласия смоделированных эмпирических распределений статистик критерия Аббе при

нормальности наблюдений  $\xi_1, \dots, \xi_n$  и справедливости гипотезы  $H_0$  при объемах выборок  $n = 10, 25, 100, 200$  с нормальными законами распределения, определяемыми параметрами масштаба (9.2) и (9.3). Объемы выборок моделируемых значений статистик во всех случаях составляли 10 000. Использовался критерий согласия  $\chi^2$  Пирсона при асимптотически оптимальном группировании [301] и непараметрические критерии Колмогорова,  $\omega^2$  Мизеса (Крамера–Мизеса–Смирнова) и  $\Omega^2$  Мизеса (Андерсона–Дарлинга) [302].

Таблица 9.1

**Достигнутые уровни значимости при проверке согласия распределения статистики с нормальным законом с параметром масштаба (9.2) и (9.3)**

Критерий согласия	$n = 10$		$n = 25$		$n = 100$		$n = 200$	
	(9.2)	(9.3)	(9.2)	(9.3)	(9.2)	(9.3)	(9.2)	(9.3)
$\chi^2$ Пирсона	0.0000	0.0000	0.0543	0.0656	0.5849	0.2988	0.2219	0.1725
Колмогорова	0.0009	0.0000	0.1480	0.0171	0.6073	0.4203	0.2857	0.2701
$\omega^2$ Мизеса	0.0022	0.0000	0.2379	0.0277	0.6134	0.4520	0.2076	0.1800
$\Omega^2$ Мизеса	0.0003	0.0000	0.1517	0.0116	0.5189	0.2935	0.1948	0.1549

Как следует из приводимых в таблице достигнутых уровней значимости, при всех значениях объемов выборок  $n$  формула (9.3) дает худшую по сравнению с (9.2) аппроксимацию для распределения статистики Аббе. Отсюда применение формулы (9.3) при  $n > 60$  не является оправданным: предпочтительней использовать нормальную аппроксимацию с масштабным параметром (9.2).

При  $n < 20$ , несмотря на информацию о симметричности [116], распределение статистики критерия становится асимметричным. Для примера на рис. 9.1 приведены распределение статистики Аббе при  $n = 10$  и нормальное распределение с параметром масштаба, задаваемым

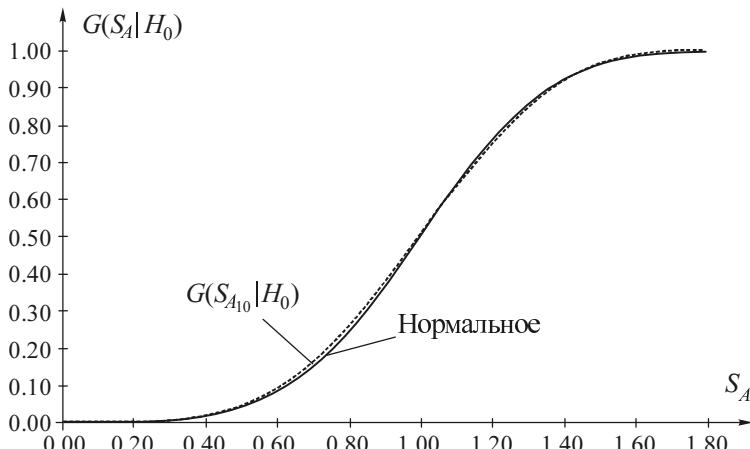


Рис. 9.1. Распределение статистики критерия Аббе при  $n = 10$  и функция аппроксимирующего нормального распределения (9.2)

соотношением (9.2), где заметна и асимметричность распределения статистики, и его существенное отличие от аппроксимирующего нормального.

### 9.1.3. Степень зависимости распределений статистики Аббе от наблюдаемого закона

В процессе исследований распределений статистик при справедливой проверяемой гипотезе  $H_0$  рассматривалась принадлежность наблюдаемой выборки нормальному закону распределения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \theta_0)^2}{2\theta_1^2} \right\},$$

а также множеству различных симметричных и несимметричных распределений. В частности, исследовались распределения статистики Аббе и мощность критерия в случае принадлежности наблюдений семейству с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp \left( -\left( \frac{|x - \theta_0|}{\theta_1} \right)^{\theta_2} \right) \quad (9.4)$$

и параметрами формы  $\theta_2 = 0.2; 0.5; 1; 1.5; 2; 4; 8$ . В частности, при  $\theta_2 = 2$  выражение (9.4) дает плотность нормального закона распределения.

На рис. 9.2 представлены полученные в результате моделирования распределения статистики (9.1) в случае принадлежности наблюдений законам распределения семейства (9.4) при различных параметрах формы: вид закона менялся от близкого к распределению Коши до близкого к равномерному распределению.

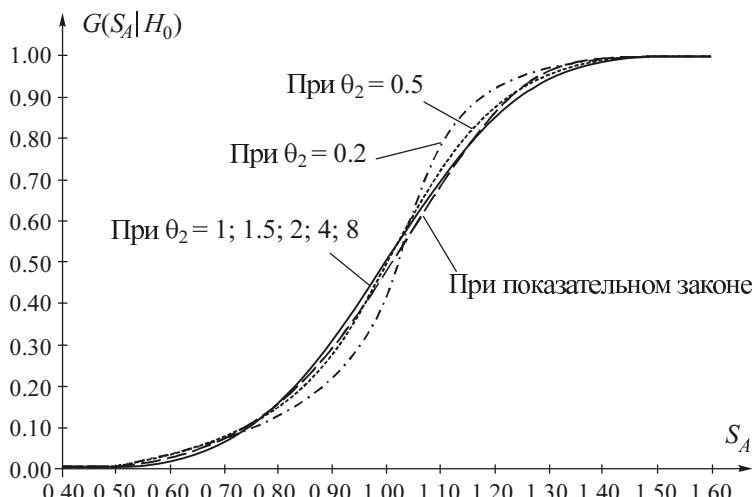


Рис. 9.2. Распределения статистики критерия Аббе в зависимости от параметра формы распределения семейства (9.4) при  $n = 25$

Как следует из рис. 9.2, в случае принадлежности  $\xi_1, \dots, \xi_n$  достаточно широкому кругу законов распределение статистики критерия Аббе существенно не отличается от распределения, имеющего место в случае принадлежности наблюдений нормальному закону. Если закон, которому принадлежат наблюдаемые величины, симметричен и с не слишком «тяжелыми хвостами», то и когда он более плосковершинен, чем нормальный закон, и когда он более островоршинен (с большим эксцессом), распределение статистики не отличается значимо от классического.

Например, проверка однородности распределений статистики (9.1) в случае нормального закона и в случае закона с параметром  $\theta_2 = 8$  по

критериям Смирнова и Лемана–Розенблатта [163, 228, 84] показала, что нет оснований для отклонения гипотезы об их однородности. Однородность проверялась по выборкам объемом 10 000 значений статистик. Достигнутые уровни значимости составили 0.823 для критерия Смирнова и 0.896 – для критерия Лемана–Розенблатта. С учетом высокой мощности данных критериев при таких объемах выборок (10 000 наблюдений) достигнутые уровни значимости говорят о практическом совпадении распределений, соответствующих выборкам.

Подчеркнем, что аналогичный вывод справедлив и для случая принадлежности  $\xi_1, \dots, \xi_n$  равномерному закону.

При законах (9.4) с  $\theta_2 = 0,2; 0,5$  распределения статистики (9.1) уже существенно отличаются от «классического», соответствующего принадлежности наблюдений нормальному закону.

При сильной асимметричности закона распределения наблюдаемых случайных величин распределение статистики (9.1) становится отличным от «классического». На рис. 9.2 приведено распределение статистики (9.1) также и для случая принадлежности  $\xi_1, \dots, \xi_n$  показательному (экспоненциальному) закону. Очевидно, что асимметричность закона влияет на распределение статистики менее значительно, чем «тяжелость хвостов». В случае принадлежности  $\xi_1, \dots, \xi_n$  асимметричным законам распределения экстремальных значений (минимального или максимального) распределения статистики (9.1) практически не отличаются от классического.

Поведение распределения статистики критерия Аббе было исследовано для случаев, когда наблюдаемый закон представляет собой симметричную смесь законов распределения. Например, когда закон распределения  $\xi_1, \dots, \xi_n$  представляет собой смесь двух нормальных законов вида

$$f(x) = \frac{0.5}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \theta_0 - k\theta_1)^2}{2\theta_1^2} \right\} + \\ + \frac{0.5}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \theta_0 + k\theta_1)^2}{2\theta_1^2} \right\}. \quad (9.5)$$

На рис. 9.3 показаны плотности вида (9.5), симметричные относительно значения  $\theta_0$  при различных значениях  $k$ .

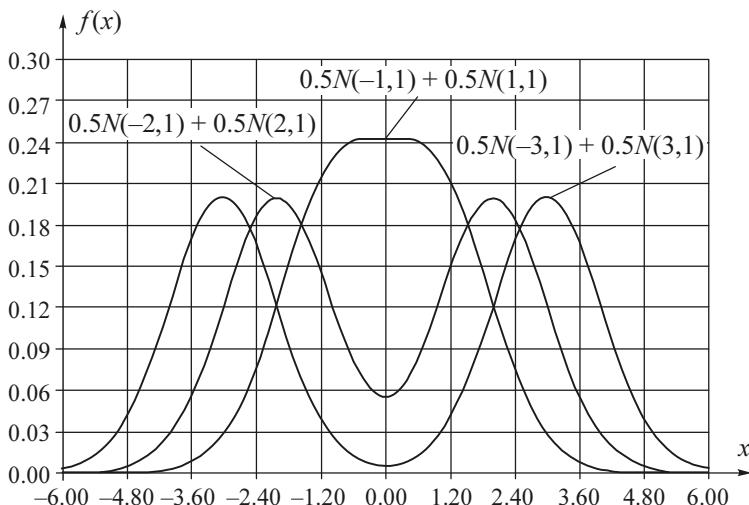


Рис. 9.3. Смеси нормальных распределений при сдвигах  $\pm 1\theta_1$ ,  
 $\pm 2\theta_1$  и  $\pm 3\theta_1$

Построенные на основании результатов моделирования распределения статистики критерия Аббе, соответствующие случаям принадлежности  $\xi_1, \dots, \xi_n$  смесям (9.5) со сдвигом компонентов смеси  $\pm 1\theta_1$ ,  $\pm 2\theta_1$  и  $\pm 3\theta_1$  относительно  $\theta_0$ , буквально накладываются одно на другое и на распределение статистики при нормальном законе. Применение критериев однородности Смирнова и Лемана–Розенблatta подтверждает вывод о практическом совпадении распределений.

Отсюда можно сделать вывод, что критерий Аббе не чувствителен (устойчив) к двумодальности закона распределения наблюдаемых величин при условии его симметричности и отсутствии тяжелых хвостов.

#### 9.1.4. Исследование мощности критерия Аббе

В дальнейшем проверяемой гипотезе  $H_0$  соответствует выполнение предположений о независимости наблюдаемых величин  $\xi_1, \dots, \xi_n$  и принадлежности их нормальному закону с одинаковыми, но

неизвестными дисперсиями. Без потери общности можно рассматривать принадлежность  $\xi_1, \dots, \xi_n$  стандартному нормальному закону. В качестве конкурирующих гипотез рассматривались различные ситуации при наличии тренда.

В случае линейного тренда моделировались случайные величины

$$x_i = at + \xi_i, \quad (9.6)$$

где  $\xi_i$  представляют собой независимые случайные величины, распределенные в соответствии с заданным законом (например, по стандартномуциальному закону),  $t \in [0,1]$ . Справедливой проверяемой гипотезе  $H_0$  соответствует значение параметра  $a = 0$ .

Величины  $x_i$  (9.6) вычислялись в соответствии с выражением  $x_i = a(i-1)\Delta t + \xi_i$ , где шаг  $\Delta t$  определялся как  $\Delta t = 1/n$  в зависимости от объема выборки  $n$ . Псевдослучайные величины  $\xi_i$  генерировались в соответствии со стандартным нормальным законом (возможно, и по любому другому). Исследовалась мощность критерия относительно конкурирующих гипотез с линейным трендом, задаваемым параметром  $a = 0.5; 1; 2; 3; 4$ . Соответствующие конкурирующие гипотезы обозначены в дальнейшем как  $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$ . Пример выборки, соответствующей конкурирующей гипотезе  $H_3$  при  $n=100$ , представлен на рис. 9.4.

На рис. 9.5 представлены построенные в результате моделирования эмпирические распределения  $G(S_{A_n} | H_i)$  статистики Аббе при наличии линейного тренда в случае объема выборок  $n=25$ .

Значения мощности  $1-\beta$  критерия Аббе, где  $\beta$  – вероятность ошибки второго рода, относительно альтернатив  $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$  с линейным трендом (9.6) в зависимости от объема выборки  $n$  при уровнях значимости  $\alpha = 0.025; 0.05; 0.1$  приведены в табл. 9.2.

Аналогичные исследования распределений статистики критерия Аббе и его мощности были проведены относительно альтернатив с периодическим трендом вида

$$x_i = a \sin(2\pi t) + \xi_i, \quad (9.7)$$

где, как и в предыдущем случае,  $\xi_i$  – независимые случайные величины, распределенные по стандартному нормальному закону,  $t \in [0,1]$ ,

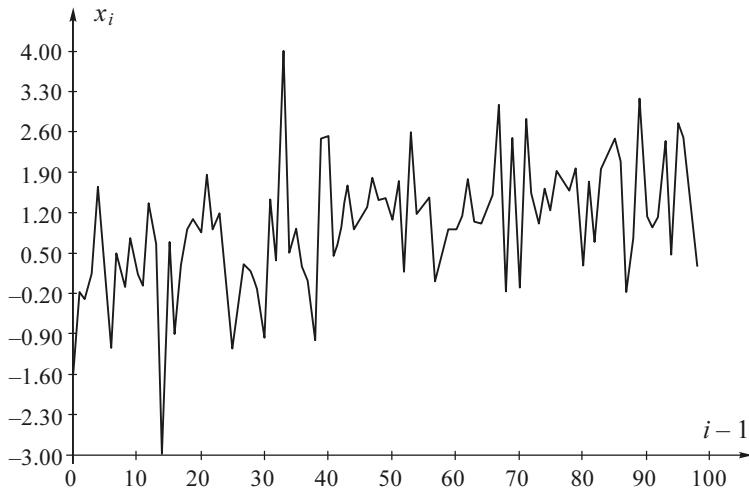


Рис. 9.4. Временной ряд, соответствующий модели (9.6) при  $a = 2$  и  $n = 100$

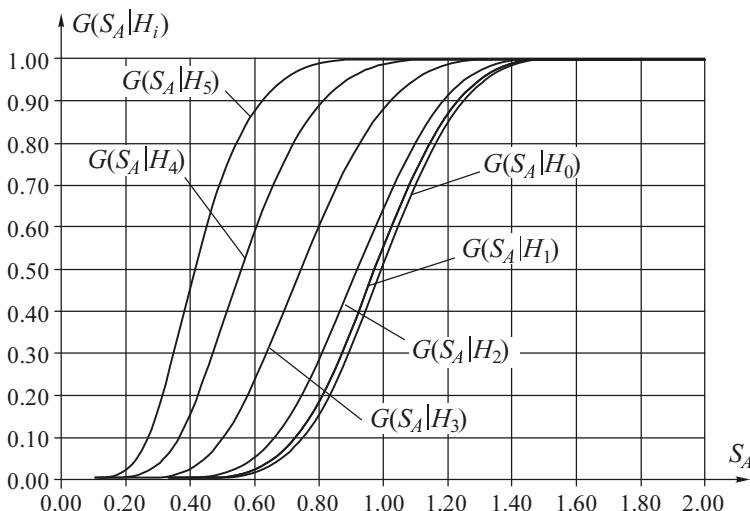


Рис. 9.5. Распределения статистики критерия Аббе в случае нормального закона и линейного тренда вида (9.6) при  $n = 25$

$\Delta t = 1/n$ , а величины  $x_i$  получались в соответствии с (9.7) как  $x_i = a \sin(2\pi(i-1)\Delta t) + \xi_i$ .

Таблица 9.2

## Мощность критерия Аббе при линейном тренде вида (9.6)

$n$	$\alpha$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$
10	0.025	0.0342	0.0544	0.1594	0.3494	0.5700
	0.05	0.0594	0.0912	0.2322	0.4552	0.6778
	0.1	0.1138	0.1594	0.3436	0.5794	0.7994
25	0.025	0.0348	0.0740	0.2976	0.6538	0.9128
	0.05	0.0670	0.1276	0.3942	0.7516	0.9528
	0.1	0.1250	0.2058	0.5140	0.8396	0.9780
50	0.025	0.0358	0.0870	0.4408	0.8768	0.9946
	0.05	0.0712	0.1468	0.5642	0.9350	0.9990
	0.1	0.1342	0.2484	0.6910	0.9678	0.9998
100	0.025	0.0432	0.1228	0.6994	0.9934	1
	0.05	0.0786	0.1988	0.8056	0.9972	1
	0.1	0.1440	0.3060	0.8890	0.9994	1

Исследовалась мощность относительно альтернатив с нелинейным трендом (9.7), задаваемым параметром  $a = 0.1; 0.25; 0.5; 1; 1.5$ . Соответствующие конкурирующие гипотезы обозначены как  $H_6, H_7, H_8, H_9, H_{10}$ . Пример выборки, соответствующей конкурирующей гипотезе  $H_8$  при  $n=100$ , приведен на рис. 9.6.

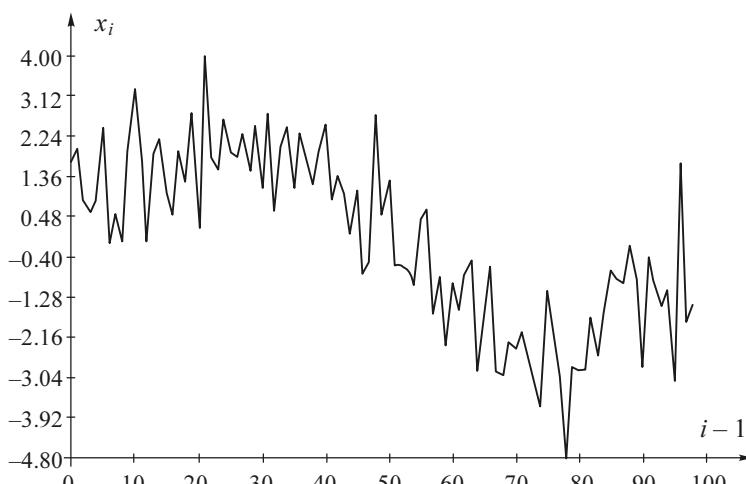


Рис. 9.6. Временной ряд, соответствующий модели (9.7) при  $a = 2$  и  $n = 100$

Построенные в результате моделирования эмпирические распределения  $G(S_{A_n} | H_i)$  статистики Аббе при наличии нелинейного тренда (9.7) в случае объемов выборок  $n = 25$  показаны на рис. 9.7. Значения мощности критерия Аббе относительно альтернатив  $H_6, H_7, H_8, H_9, H_{10}$  с трендом вида (9.7) в зависимости от объема выборки  $n$  при уровнях значимости  $\alpha = 0.025; 0.05; 0.1$  приведены в табл. 9.3.

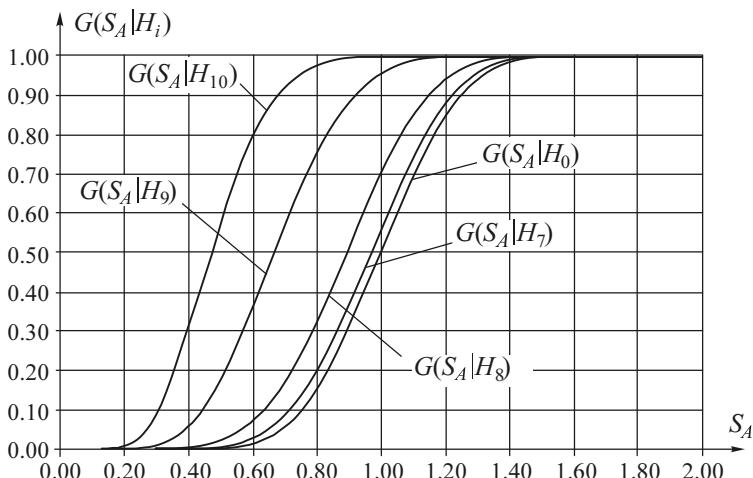


Рис. 9.7. Распределения статистики критерия Аббе в случае нормального закона и линейного тренда вида (9.7) при  $n = 25$

Таблица 9.3

**Мощность критерия Аббе при нелинейном тренде вида (9.7)**

$n$	$\alpha$	$H_6$	$H_7$	$H_8$	$H_9$	$H_{10}$
10	0.025	0.0260	0.0332	0.0572	0.1756	0.3910
	0.05	0.0514	0.0596	0.0988	0.2672	0.5226
	0.1	0.0998	0.1164	0.1790	0.3972	0.6790
25	0.025	0.0262	0.0350	0.1040	0.4308	0.8510
	0.05	0.0524	0.0754	0.1560	0.5456	0.9106
	0.1	0.1034	0.1346	0.2490	0.676	0.9532
50	0.025	0.0264	0.0374	0.1262	0.6598	0.9802
	0.05	0.0529	0.0778	0.2074	0.7774	0.9934
	0.1	0.1048	0.1482	0.3330	0.8658	0.9978
100	0.025	0.0276	0.0506	0.2072	0.9080	0.9996
	0.05	0.0556	0.0954	0.3116	0.9498	1
	0.1	0.1100	0.1706	0.4514	0.9766	1

Ниже исследована мощность критерия относительно альтернатив с трендом вида

$$x_i = at + \alpha \sin(2\pi t) + \xi_i. \quad (9.8)$$

Были рассмотрены конкурирующие гипотезы  $H_{11}$ ,  $H_{12}$ ,  $H_{13}$ ,  $H_{14}$ ,  $H_{15}$ , задаваемые параметром  $a = 0.25; 0.5; 1; 1.5; 2$  соответственно. Пример выборки, соответствующей альтернативе  $H_{13}$  при  $n=100$ , приведен на рис. 9.8.

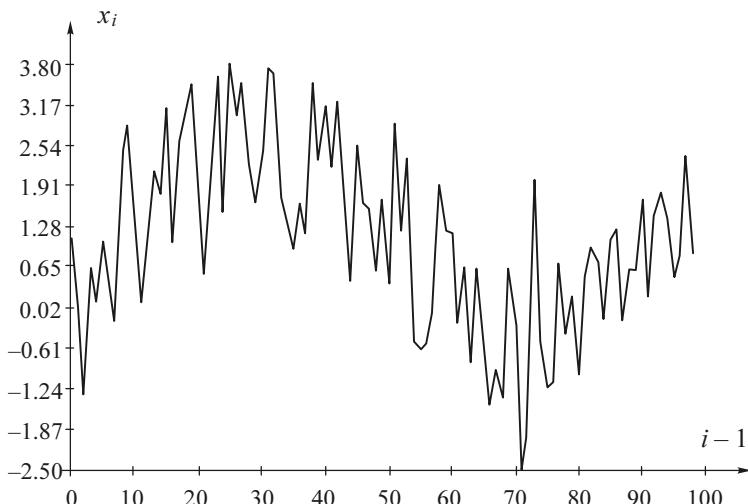


Рис. 9.8. Временной ряд, соответствующий модели (9.8) при  $a = 2$  и  $n = 100$

Построенные в результате моделирования эмпирические распределения  $G(S_{A_n} | H_i)$  статистики Аббе при наличии нелинейного тренда (9.8) в случае объемов выборок  $n = 25$  показаны на рис. 9.9.

Полученные оценки мощности относительно альтернатив  $H_{11}$ ,  $H_{12}$ ,  $H_{13}$ ,  $H_{14}$ ,  $H_{15}$  с трендом вида (9.8) в зависимости от объема выборки  $n$  при уровнях значимости  $\alpha = 0,025; 0,05; 0,1$  приведены в табл. 9.4.

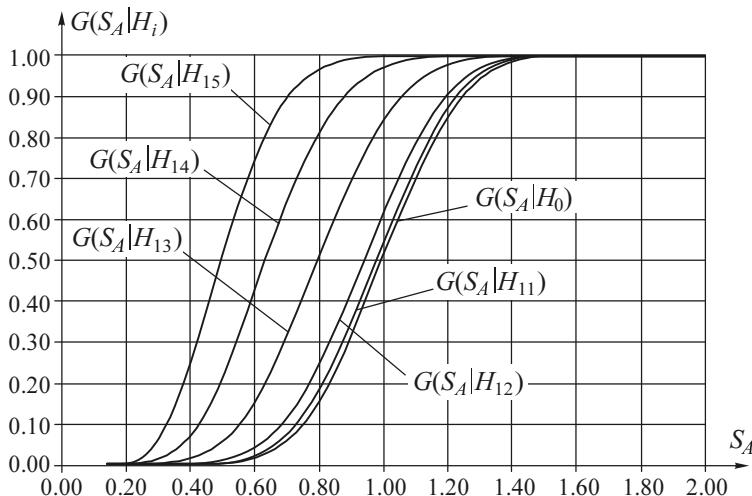


Рис. 9.9. Распределения статистики критерия Аббе в случае тренда вида (9.8) и  $n = 25$

Таблица 9.4

**Мощность критерия Аббе относительно альтернатив с трендом (9.8)**

$n$	$\alpha$	$H_{11}$	$H_{12}$	$H_{13}$	$H_{14}$	$H_{15}$
10	0.025	0.0278	0.0364	0.0672	0.1378	0.2364
	0.05	0.0534	0.0666	0.125	0.2274	0.3754
	0.1	0.1036	0.1286	0.2274	0.3802	0.5622
25	0.025	0.0294	0.0588	0.2058	0.5016	0.8094
	0.05	0.0622	0.1044	0.2942	0.6234	0.8816
	0.1	0.1166	0.1716	0.415	0.7338	0.9374
50	0.025	0.0302	0.0644	0.3236	0.7592	0.9720
	0.05	0.0630	0.1186	0.4472	0.8510	0.9890
	0.1	0.1238	0.2152	0.5796	0.9194	0.9962
100	0.025	0.0376	0.095	0.5548	0.9618	0.9992
	0.05	0.0708	0.1618	0.6856	0.9800	0.9996
	0.1	0.1332	0.2662	0.7902	0.9894	1

Были проведены оценки мощности критерия для альтернатив с линейным трендом вида (9.6) в случаях, когда  $\xi_i$  подчинялись законам семейства (9.4) с параметрами формы  $\theta_2 = 1$  и  $\theta_2 = 4$  при масштабном

параметре  $\theta_1 = 1$ . Оказалось, что в случае распределения Лапласа ( $\theta_2 = 1$ ) мощность относительно конкурирующих гипотез  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $H_4$ ,  $H_5$  ниже, чем при нормальном законе, а при  $\theta_2 = 4$  – выше. В рассмотренной ситуации в случае распределения Лапласа мы имеем дисперсию большую, чем у стандартного нормального закона, а в случае закона (9.4) с параметром формы  $\theta_2 = 4$  – меньшую.

Исследование мощности относительно тех же конкурирующих гипотез, но при одинаковых дисперсиях величин  $\xi_i$  и различных законах вида (9.4) дало оценки мощности, практически совпадающие со значениями, приведенными в табл. 9.2. Это свидетельствует о том, что на распределение статистики критерия при справедливой конкурирующей гипотезе, а следовательно, и на мощность критерия практически не влияет вид закона, но мощность критерия зависит от дисперсии наблюдаемых величин (ошибок измерений). Таким образом, чем точнее измерения, тем выше мощность критерия, что вполне логично.

## 9.2. Исследование критериев проверки случайности и отсутствия тренда

### 9.2.1. Проверка гипотез об отсутствии тренда

Критерий Аббе далеко не единственный критерий, ориентированный на проверку случайности и отсутствие тренда. Этим же целям служат критерий автокорреляции и целый ряд непараметрических критериев.

Предпосылкой, обуславливающей применение критерия автокорреляции, является предположение о принадлежности анализируемых данных нормальному закону. Интересно знать, что произойдет с распределением статистики этого критерия в случае нарушения предположения о нормальности, насколько будут оставаться корректными выводы, осуществляемые на основании классических результатов, приводит ли это к существенным изменениям в законе распределения статистики.

Применение непараметрических критериев связано с другими проблемами, например дискретностью распределений статистик. Поэтому использование асимптотических распределений таких статистик

вместо истинных оказывается не всегда правомерным. Достаточно туманными представляются сведения о мощности непараметрических критериев, сведения о том, насколько они уступают параметрическим критериям.

Исследователя может интересовать наличие или отсутствие тренда в математическом ожидании (в среднем) и в дисперсиях.

При проверке отсутствия тренда (случайности) в математическом ожидании задача формулируется следующим образом. Предполагается, что наблюдается временной ряд  $x_1, \dots, x_n$  значений взаимно независимых случайных величин с математическими ожиданиями  $\mu_1, \dots, \mu_n$  и одинаковыми (но неизвестными) дисперсиями. Проверяется гипотеза  $H_0: \mu_i = \mu, i = 1, 2, \dots, n$  о том, что все выборочные значения принадлежат к одной генеральной совокупности со средним  $\mu$  против конкурирующей гипотезы о наличии тренда  $H_1: |\mu_{i+1} - \mu_i| > 0, i = 1, 2, \dots, n-1$ .

При проверке отсутствия тренда в дисперсии (в характеристиках рассеяния) предполагается, что наблюдаемая нами последовательность  $x_1, \dots, x_n$  имеет одно и то же среднее  $\mu$ . Проверяется гипотеза  $H_0: \sigma_1^2 = \dots = \sigma_n^2 = \sigma_0^2$  ( $\sigma_0^2$  неизвестно) относительно конкурирующей гипотезы

$$H_1: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 = \sigma_0^2; \sigma_{k+1}^2 = \sigma_{k+2}^2 = \dots = \sigma_n^2 = \sigma_0^2 + \delta (\delta > 0),$$

утверждающей, что значение дисперсии меняется в некоторой неизвестной точке, т. е.  $k$  неизвестно ( $1 \leq k \leq n-1$ ).

### 9.2.2. Критерий автокорреляции

Если выборка значений  $x$  случайна, то значение каждого ее элемента не должно зависеть от величины предшествующего и последующего членов. Для проверки этой независимости используется статистика [66]

$$r_{1,n} = \frac{n \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + nx_1 x_n}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad (9.9)$$

являющаяся оценкой коэффициента корреляции первого порядка между элементами первичной выборки ( $x_1, \dots, x_n$ ) и элементами выборки, полученной из нее сдвигом на одну единицу ( $x_2, x_3, \dots, x_n, x_1$ ).

Величина  $r_{1,n}$  распределена асимптотически нормально с математическим ожиданием и дисперсией

$$E[r_{1,n}] = -\frac{1}{n-1},$$

$$D[r_{1,n}] = \frac{n(n-3)}{(n+1)(n-1)^2}.$$

Поэтому в критерии используют нормализованную статистику

$$r_{1,n}^* = \frac{r_{1,n} - E[r_{1,n}]}{\sqrt{D[r_{1,n}]}} , \quad (9.10)$$

которая подчиняется стандартному нормальному закону  $N(0,1)$ . Результаты моделирования показали, что при  $n > 10$  распределение статистики достаточно хорошо согласуется со стандартным нормальным законом.

Критерий автокорреляции относится к параметрическим критериям, поэтому были проведены исследования распределений статистики критерия в случае принадлежности наблюдений различным законам, в том числе семейству с плотностью (9.4) с параметрами формы  $\theta_2 = 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2; 4; 8$ . В этом случае вид закона менялся от близкого к распределению Коши до близкого к равномерному закону. При  $\theta_2 = 2$  выражение (9.4) дает плотность нормального закона распределения. Полученные в результате моделирования распределения статистики критерия автокорреляции в случае принадлежности наблюдений законам распределения семейства (9.4) при различных параметрах формы показаны на рис. 9.10.

Как следует из представленной на рисунке картины, в случае принадлежности выборок  $x_1, \dots, x_n$  достаточно широкому кругу законов

распределение статистики критерия автокорреляции существенно не отличается от распределения, имеющего место в случае принадлежности наблюдений нормальному закону. Если закон, которому принадлежат наблюдаемые величины, симметричен и с не слишком «тяжелыми хвостами», то распределение статистики не отличается значимо от классического.

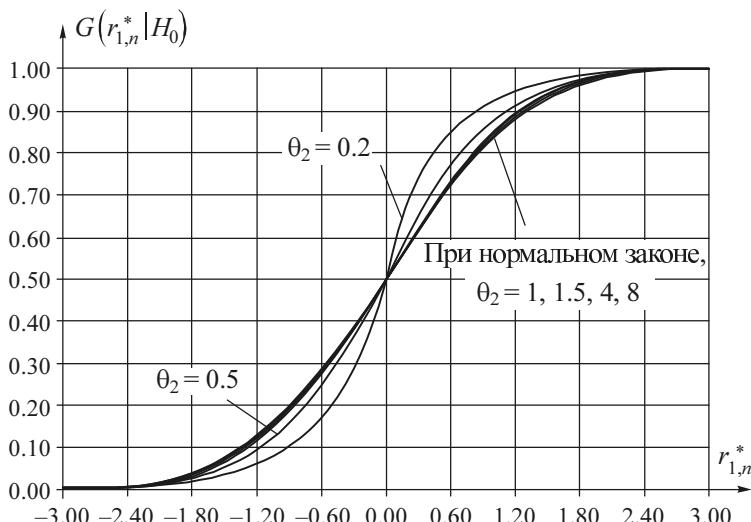


Рис. 9.10. Распределения статистики критерия автокорреляции в зависимости от параметра формы семейства (9.4) при  $n = 25$

При сильной асимметричности закона наблюдаемых случайных величин (например, в случае показательного закона) распределение статистики становится отличным от классического. В то же время асимметричность закона влияет на распределение статистики менее значимо, чем «тяжесть хвостов». В случае принадлежности выборок  $x_1, \dots, x_n$  асимметричным законам экстремальных значений (минимальному или максимальному) распределения статистики практически не отличаются от классического.

Отметим, что влияние закона наблюдаемых случайных величин на распределение статистики критерия автокорреляции такое же, как для критериев, связанных с проверкой гипотез о парной корреляции [243].

### 9.2.3. Критерий Фостера–Стюарта

Этот непараметрический критерий используется для проверки отсутствия тренда как в средних, так и в дисперсиях (в характеристиках рассеяния). Соответствующие статистики критерия имеют вид [41]

$$S = \sum_{i=2}^n S_i, \quad (9.11)$$

$$d = \sum_{i=2}^n d_i, \quad (9.12)$$

где  $d_i = u_i - l_i$ ,  $S_i = u_i + l_i$ ;  $u_i = 1$ , если  $x_i > x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_1$ , иначе  $u_i = 0$ ;  $l_i = 1$ , если  $x_i < x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_1$ , иначе  $l_i = 0$ .

Критерий со статистикой  $S$  используется для проверки наличия тренда в дисперсиях, а со статистикой  $d$  – для обнаружения тренда в средних. Очевидно, что  $0 \leq S \leq n-1$  и  $-(n-1) \leq d \leq n-1$ .

При отсутствии тренда величины  $t$  и  $\tilde{t}$ :

$$t = \frac{d}{\hat{\sigma}_d}, \quad (9.13)$$

$$\tilde{t} = \frac{S - \mu}{\hat{\sigma}_S}, \quad (9.14)$$

где

$$\mu = 2 \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}, \quad \hat{\sigma}_d = \sqrt{\mu} \approx \sqrt{2 \ln n - 0,8456},$$

$$\hat{\sigma}_S = \sqrt{\mu - 4 \sum_{i=2}^n \frac{1}{i^2}} \approx \sqrt{2 \ln n - 3,4253}$$

приближенно описываются распределением Стьюдента с  $v = n$  степенями свободы. Проверяемая гипотеза об отсутствии соответствующего тренда отклоняется при больших по модулю значениях статистик (9.13), (9.14).

Исследование распределений статистик показало, что даже при больших объемах выборок ( $n = 100, 200$ ) дискретные распределения

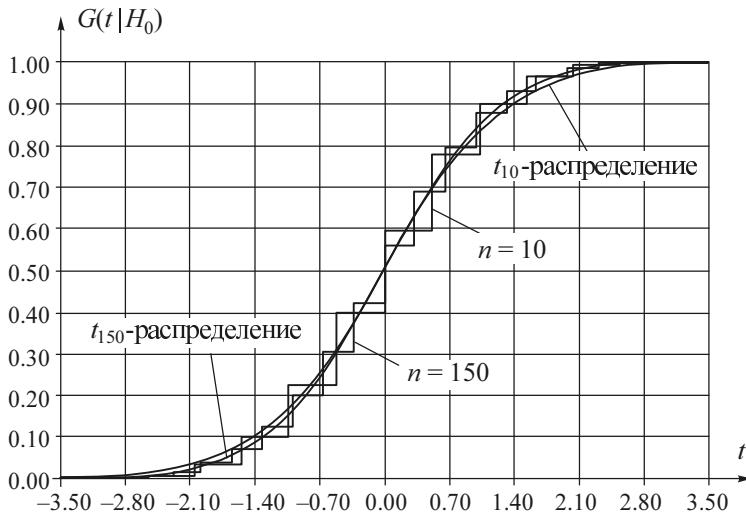


Рис. 9.11. Распределения статистики критерия Фостера–Стюарта для обнаружения тренда в средних при различных объемах выборок

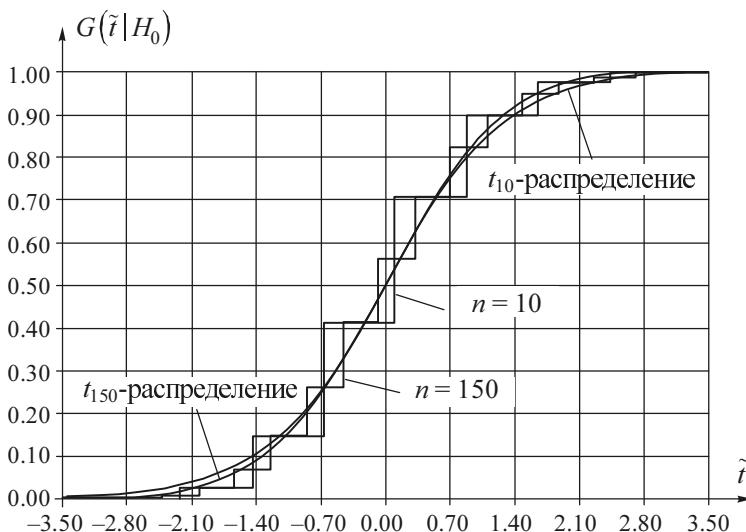


Рис. 9.12. Распределения статистики критерия Фостера–Стюарта для обнаружения тренда в дисперсиях при различных объемах выборок

статистик критерия *существенно отличаются от распределения Стьюдента с  $n$  степенями свободы*. На рис. 9.11 показаны распределения статистики  $t$ , а на рис. 9.12 – распределение статистики  $\tilde{t}$ , которое отличается еще большей дискретностью.

### 9.2.4. Критерий Кокса–Стюарта

Как и предыдущий, данный критерий используется для проверки наличия в последовательности наблюдений тренда в среднем и в дисперсии.

В критерии проверки отсутствия тренда *в средних значениях* в выборке объемом  $n$  используется статистика [24]

$$S_1 = \sum_{i=1}^{[n/2]} (n - 2i + 1) h_{i,n-i+1}, \quad (9.15)$$

где  $h_{i,j} = 1$ , если  $x_i > x_j$ , и  $h_{i,j} = 0$ , если  $x_i \leq x_j$  ( $i < j$ ).

Нормализованная статистика

$$S_1^* = \frac{S_1 - E[S_1]}{\sqrt{D[S_1]}}, \quad (9.16)$$

где

$$E[S_1] = \frac{n^2}{8}, \quad D[S_1] = \frac{n(n^2 - 1)}{24},$$

при справедливости проверяемой гипотезы об отсутствии тренда приближенно подчиняется стандартному нормальному закону.

Распределение статистики  $S_1^*$  при малых  $n$  является дискретным, но достаточно быстро сходится к непрерывному (рис. 9.13).

Критерий для проверки гипотезы отсутствия тренда *в дисперсии* (в характеристиках рассеяния) строится следующим образом. Выборка  $x_1, \dots, x_n$  разбивается на  $[n/k]$  подвыборок объемом  $k$  элементов  $x_1, \dots, x_k; x_{k+1}, \dots, x_{2k}; x_{2k+1}, \dots, x_{3k}; \dots; x_{n-k+1}, \dots, x_n$  (если  $n$  не делится на  $k$ , отбрасывается необходимое число наблюдений в центре). Для каждой  $i$ -й подвыборки находится размах  $w_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) ( $r = [n/k]$ ). Далее последовательность размахов  $w_i$  проверяется на наличие тренда критерием со статистикой  $S_1$ .

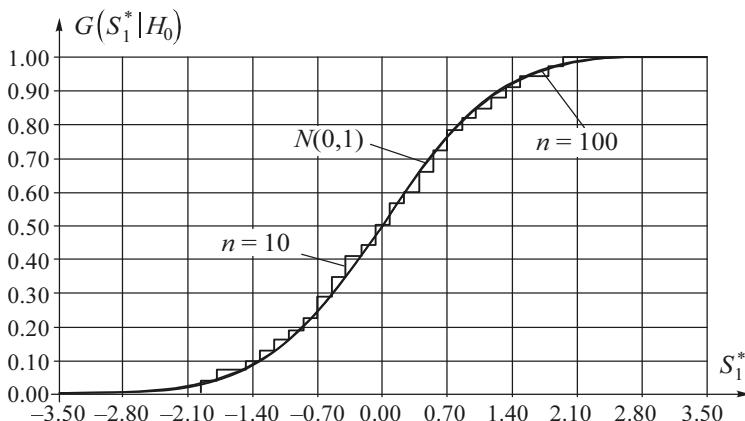


Рис. 9.13. Сходимость к стандартному нормальному закону распределения статистики (9.16) критерия Кокса–Стюарта для обнаружения тренда в средних

Величину  $k$  в [24] рекомендуется выбирать из следующих соотношений:

$$n \geq 90 \rightarrow k = 5; 64 \leq n < 90 \rightarrow k = 4;$$

$$48 \leq n < 64 \rightarrow k = 3; n < 48 \rightarrow k = 2.$$

Дискретность распределения статистики  $S_1^*$  при обнаружении тренда в дисперсии заметно выше (рис. 9.14).

### 9.2.5. Критерий Вальда–Вольфовича

Статистика критерия Вальда–Вольфовича, предложенная в [144], основана на коэффициенте сериальной корреляции. Исследование распределений этой статистики показало такие же результаты, как при исследовании статистик (9.9) и (9.10). В работе [144] была отмечена также возможность построения непараметрического аналога сериального коэффициента корреляции, вид которого приведён, например, в [206].

Пусть  $R_i$  — ранг наблюдения  $x_i$  в упорядоченном по возрастанию ряду значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Коэффициент сериальной корреляции Вальда–Вольфовича имеет вид [206]

$$R = \sum_{i=1}^{n-1} \left( R_i - \frac{n+1}{2} \right) \left( R_{i+1} - \frac{n+1}{2} \right). \quad (9.17)$$

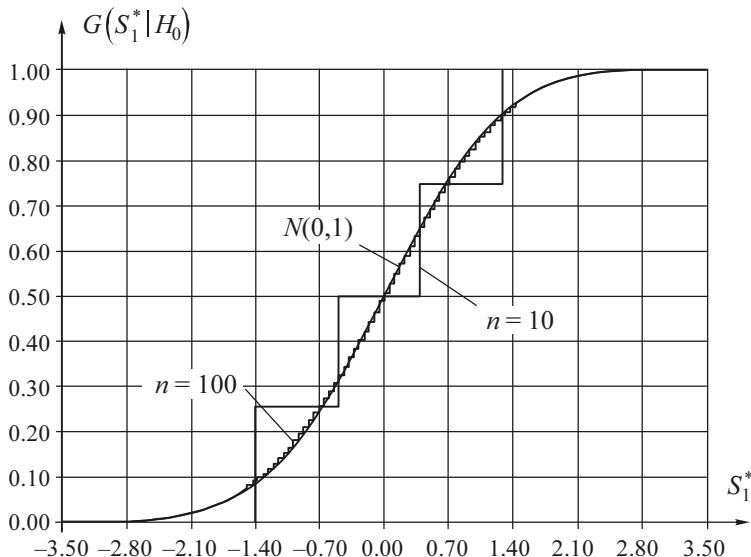


Рис. 9.14. Сходимость к стандартному нормальному закону распределения статистики критерия Кокса–Стюарта для обнаружения тренда в дисперсиях

Распределение этой статистики асимптотически нормально со средним и дисперсией

$$E[R] = 0,$$

$$D[R] = \frac{n^2(n+1)(n-3)(5n+6)}{720}.$$

Гипотеза случайности (об отсутствии тренда) отклоняется при больших по модулю значениях статистики

$$R^* = \frac{R}{\sqrt{D[R]}}. \quad (9.18)$$

Результаты моделирования показали, что распределение статистики (9.18) критерия смещено по отношению к предельному и очень

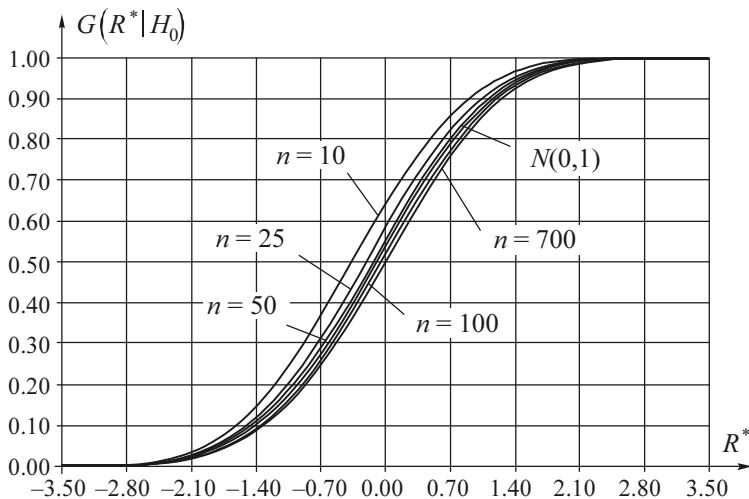


Рис. 9.15. Сходимость к стандартному нормальному закону распределения статистики критерия Вальда–Вольфовича

медленно сходится к стандартномуциальному закону (рис. 9.15). Дискретностью же распределения статистики практически можно пренебречь.

### 9.2.6. Критерий Бартелса

Пусть в последовательности  $n$  наблюдений  $x_i$   $R_i$  – ранг  $i$ -го наблюдения. Бартелсом [11] был предложен ранговый критерий случайности ряда, основанный на статистике

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (R_i - R_{i+1})^2}{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2}. \quad (9.19)$$

Гипотеза о случайности (об отсутствии тренда) отклоняется при больших по модулю значениях статистики

$$B^* = \frac{B - E[B]}{\sqrt{D[B]}} = \frac{B - 2}{2\sqrt{5/(5n + 7)}}, \quad (9.20)$$

которая при отсутствии тренда приближенно подчиняется стандартному нормальному закону.

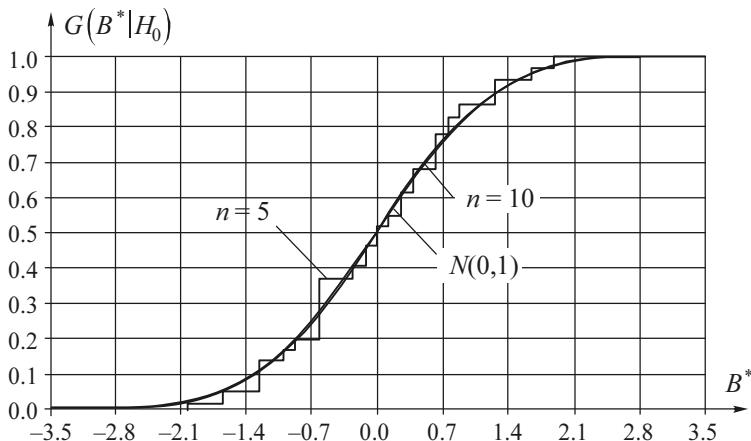


Рис. 9.16. Сходимость к стандартному нормальному закону распределения статистики критерия Бартелса

Исследования показали, что распределение статистики достаточно быстро сходится к стандартномуциальному (рис. 9.16).

### 9.2.7. Критерий Хсу

Критерий обнаружения сдвига дисперсий основан на статистике [63]

$$H = \frac{\sum_{i=1}^n (i-1)(x_i - m_x)^2}{(n-1)\sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2}, \quad 0 \leq H \leq 1. \quad (9.21)$$

Обычно критерий используется в нормализованной форме

$$H^* = \frac{H - 0,5}{\sqrt{D[H]}}, \quad (9.22)$$

где  $D[H] = \frac{n+1}{6(n-1)(n+2)}$ . Статистика (9.22) при справедливости гипотезы об отсутствии сдвига дисперсии подчиняется стандартному нормальному закону.

Результаты моделирования показали, что при  $n > 30$  распределение статистики достаточно хорошо согласуется со стандартным нормальным законом (рис. 9.17).

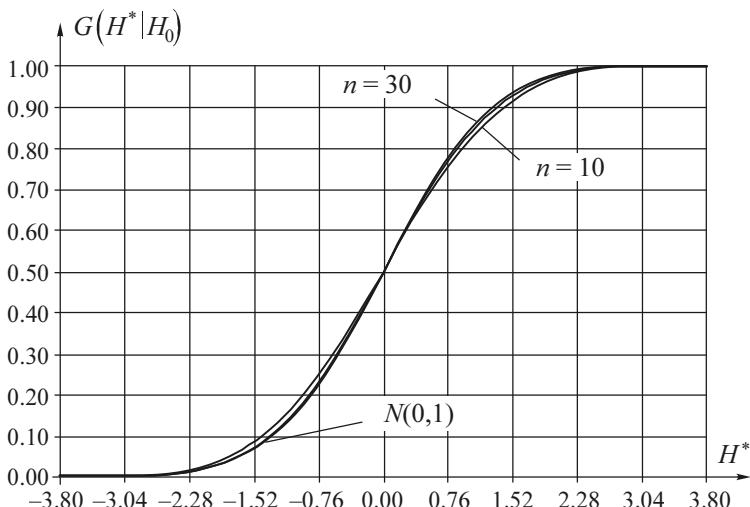


Рис. 9.17. Сходимость распределения статистики (9.22) критерия Хсу к стандартному нормальному закону

Критерий Хсу относится к параметрическим критериям. Поэтому, как и в случае любого параметрического критерия, связанного с проверкой гипотез о дисперсиях, распределения его статистики зависят от закона, которому принадлежат наблюдения. Полученные в результате моделирования распределения статистики критерия (9.22) в случае принадлежности наблюдений законам распределения семейства (9.4) при различных параметрах формы представлены на рис. 9.18. Как можно видеть, распределения статистики (9.22) сильно зависят от закона распределения, которому принадлежат наблюдаемые величины. При этом наибольшее отклонение от стандартного нормального закона оказывается в случае принадлежности наблюдений законам с «тяжелыми хвостами». Существенно влияет на распределение статистики и асимметричность закона.

В [63] описан критерий, позволяющий определить точку изменения дисперсии в случае принадлежности наблюдений нормальному

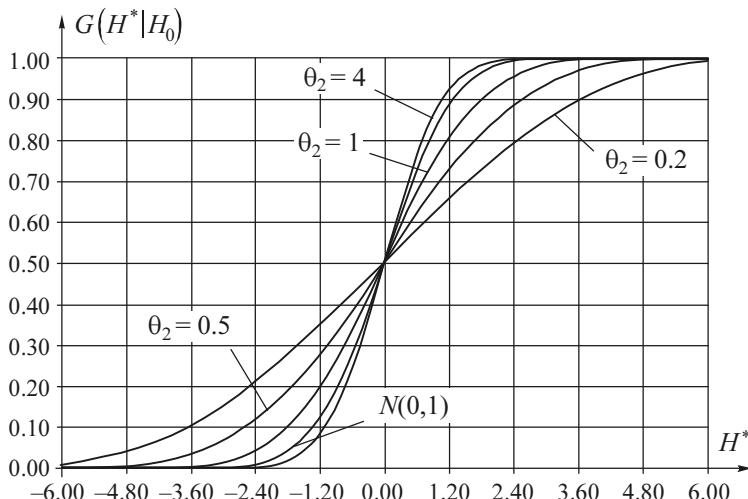


Рис. 9.18. Распределения статистики (9.22) в случае принадлежности наблюдений законам семейства (9.4) при различных значениях параметра формы  $n = 30$

закону. Его статистика строится следующим образом. Пусть для  $k = 1, 2, \dots, n-1$

$$w_k = \sum_{i=1}^k (x_i - m_x)^2,$$

$$W_k = \frac{w_n - w_k}{w_k} \frac{k}{n-k},$$

где  $k$  соответствует искомой точке изменения дисперсии.

Далее из уравнения  $F_{\gamma_k}(n-k, k) = W_k$ , где  $F_\gamma(f_1, f_2)$  –  $\gamma$ -квантиль  $F$ -распределения Фишера с  $f_1$  и  $f_2$  степенями свободы, находятся оценки  $\gamma_k$ , которые должны подчиняться равномерному закону. Статистика  $G$ -критерия имеет вид

$$G = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k, \quad 0 \leq G \leq 1. \quad (9.23)$$

Гипотеза об отсутствии изменения дисперсии отклоняется с уровнем значимости  $\alpha$ , если  $G > G_{1-\alpha}$ . В этом случае значение  $k$ , которому соответствует максимальная величина  $|\gamma_k - 1/2|$ , дает оценку искомой точке изменения значения дисперсии в наблюдаемом ряду. Критические значения  $G_{1-\alpha}$  можно найти в [206].

Как и критерий со статистиками (9.21), (9.22), данный критерий применим только при извлечении выборок из нормальной генеральной совокупности.

### 9.2.8. Ранговый критерий обнаружения сдвига дисперсии в неизвестной точке

Ранговый критерий обнаружения сдвига дисперсии (характеристики рассеяния) в неизвестной точке основан на использовании семейства ранговых статистик вида [62]

$$S_R = \sum_{i=1}^n ia_n(R_i), \quad (9.24)$$

где  $R_i$  – ранги выборочных значений в упорядоченном ряду наблюдений.

Метки критерия  $a_n$  могут быть различными, например:

- метки Клотца  $a_{1n}(i) = U_{i/(n+1)}^2$ , где  $U_\gamma$  –  $\gamma$ -квантиль стандартного нормального закона;

$$\bullet \text{ метки Сэвиджа } a_{2n}(i) = \sum_{j=1}^i \frac{1}{n-j+1}.$$

Соответствующие (9.24) статистики обозначим  $S_{R,j} = \sum_{i=1}^n ia_{jn}(R_i)$ ,

$j = 1, 2$ . При отсутствии сдвига дисперсии в ряду наблюдений  $S_{R,j}$ -статистики свободны от распределения и симметричны относи-

тельно  $E[S_{R,j}] = \frac{n+1}{2} \sum_{i=1}^n a_{jn}(i)$ .

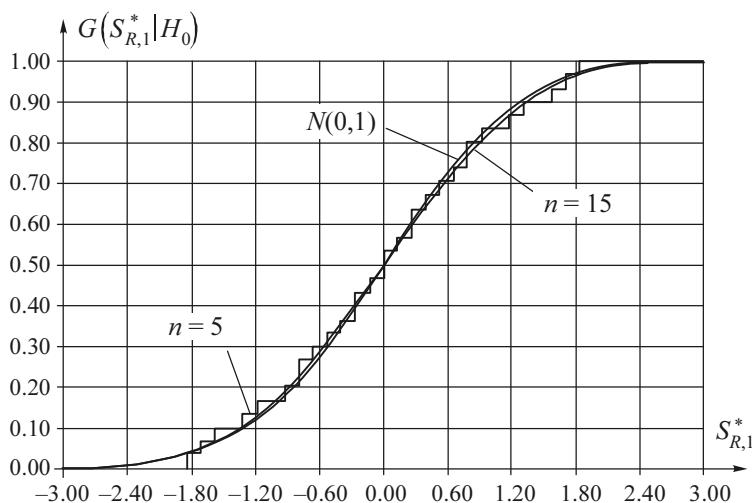


Рис. 9.19. Сходимость к стандартному нормальному закону распределения статистики  $S_{R,1}^*$  рангового критерия (с метками Клотца) обнаружения сдвига дисперсии в неизвестной точке

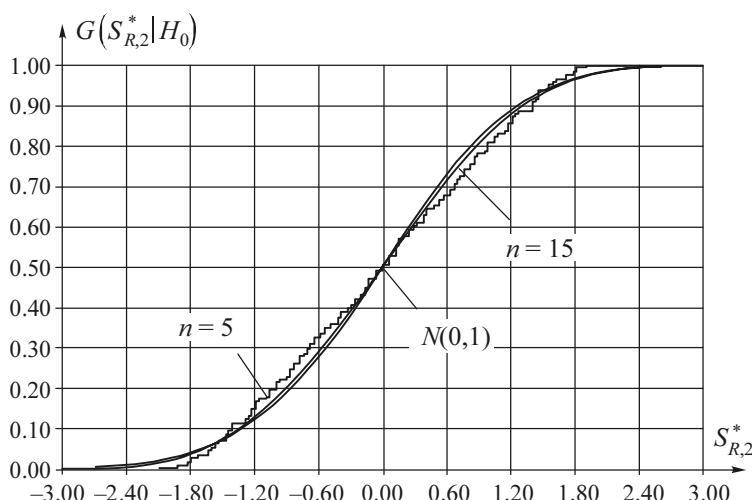


Рис. 9.20. Сходимость к стандартномуциальному закону распределения статистики  $S_{R,2}^*$  рангового критерия (с метками Сэвиджа) обнаружения сдвига дисперсии в неизвестной точке

При  $n > 15$  и справедливости гипотезы об отсутствии сдвига в характеристики рассеяния случайной величины статистики

$$S_{R,j}^* = \frac{S_{R,j} - E[S_{R,j}]}{\sqrt{D[S_{R,j}]}} , \quad (9.25)$$

где

$$E[S_{R,1}] = \frac{n+1}{2} \sum_{i=1}^n U_{i/(n+1)}^2, \quad E[S_{R,2}] = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$D[S_{R,1}] = \frac{n(n+1)}{12} \sum_{i=1}^n U_{i/(n+1)}^4 - \frac{1}{3n+3} [E[S_{R,1}]]^2;$$

$$D[S_{R,2}] = \frac{n(n+1)}{12} \left( n - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right),$$

приближенно подчиняются стандартному нормальному закону (рис. 9.19 и 9.20).

### 9.2.9. Сравнительный анализ мощности критериев

Анализ мощности критериев проводился для ситуации принадлежности наблюдений нормальному закону. Проверяемой гипотезе  $H_0$  соответствует выполнение предположения о независимости наблюдаемых величин (отсутствие тренда). В качестве конкурирующих гипотез рассматривались различные ситуации при наличии тренда в средних или в дисперсии.

При исследовании мощности критериев об отсутствии тренда в среднем рассматривались модели задания линейного тренда (9.6), нелинейного (9.7) и смешанного (9.8).

В результате анализа рассматриваемые критерии проверки гипотез об отсутствии тренда в средних (включая критерий Аббе) можно упорядочить по мощности (относительно линейного тренда) следующим образом:

Аббе ( $S_A$ )  $\succ$  Кокса–Стюарта ( $S_1^*$ )  $\succ$  Бартелса ( $B^*$ )  $\succ$  Вальда–Вольфовича ( $R^*$ )  $\succ$  автокорреляции ( $\eta_{1,n}^*$ )  $\succ$  Фостера–Стюарта ( $t$ ).

Если рассматривать в качестве конкурирующих гипотез наличие произвольного тренда, то целесообразно рекомендовать использование критериев Аббе, Бартелса, Вальда–Вольфовича и автокорреляции. Критерий Фостера–Стюарта показал наименьшую мощность. В определенной степени данный результат объясняется сильной дискретностью распределения статистики критерия Фостера–Стюарта. Вследствие дискретности действительный уровень значимости существенно отличается от заданного и получаемые оценки мощности оказываются заниженными.

Для обнаружения тренда в дисперсии можно рекомендовать к применению критерии Фостера–Стюарта и Кокса–Стюарта, расположив их по предпочтению:

$$\text{Фостера–Стюарта} (\tilde{t}) \succ \text{Кокса–Стюарта} (S_2^*).$$

Критерии сдвига дисперсии в неизвестной точке можно упорядочить следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Хсу} (H^*) &\succ \text{сдвига дисперсии с метками Клотца} (S_{R,1}^*) \succ \\ &\succ G\text{-критерий} (G) \succ \text{сдвига дисперсии с метками Сэвиджа} (S_{R,2}^*). \end{aligned}$$

## 9.3. Выводы

Таким образом, на основании проведенных исследований можно констатировать, что применение критерия Аббе будет корректным и в тех случаях, когда мы имеем дело с законом, существенно отличающимся от нормального. Однако закон не должен иметь «тяжелых хвостов» и быть симметричным. Закон может быть двумодальным, описываться симметричной смесью законов. В то же время умеренная асимметричность наблюдаемого закона практически не оказывается на распределении статистики критерия.

В качестве распределения статистики критерия Аббе при  $n > 20$  можно применять нормальную аппроксимацию (9.2), которая предпочтительней (9.3) и при больших  $n$ .

Устойчиво к отклонениям от нормального закона распределение статистики критерия автокорреляции (распределение оценок автокорреляции). Это общая тенденция устойчивости распределений парамет-

рических критериев, так или иначе связанных с проверкой гипотез о математических ожиданиях [247, 229, 83] или о равенстве нулю коэффициентов парной, частной и множественной корреляции [243]. Однако параметрические критерии обнаружения тренда в средних лишь немногим превосходят по мощности непараметрические.

Параметрические критерии обнаружения сдвига в дисперсии (критерий  $X_{\text{cy}}$ ) мощнее непараметрических, но очень чувствительны к нарушению предположений о нормальности случайных величин (как и любые критерии, связанные с проверкой гипотез о дисперсиях [247, 232, 85, 233, 86]).

Использование критериев Фостера–Стюарта затруднено дискретностью распределений статистик и плохой сходимостью к соответствующим  $t$ -распределениям Стьюдента.

Распределение рангового варианта статистики Вальда–Вольфовича смешено относительно стандартного нормального закона, к которому очень медленно сходится.

Полученные оценки мощности критериев позволяют судить о способности критериев обнаруживать наличие линейного и нелинейного тренда в среднем или в характеристиках рассеяния.

---

## 10. ОТБРАКОВКА АНОМАЛЬНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

---

### 10.1. Введение

**П**ри решении задач статистического анализа и, в частности, при построении моделей законов распределения и вычислении оценок параметров этих моделей проблема наличия в выборке аномальных измерений имеет чрезвычайно важное значение. Присутствие единственного аномального наблюдения может приводить к оценкам, которые совершенно не согласуются с выборочными данными. Поэтому в практической деятельности уделяют серьезное внимание статистическим критериям, предназначенным для выделения аномальных результатов измерений (выбросов). Если не исключать выбросы из анализируемых данных, то традиционно применяемые классические методы статистического анализа, как правило, не являющиеся робастными, чаще всего приводят к некорректным выводам.

Результаты измерений, содержащие грубые ошибки, обычно бывают хорошо заметны и могут быть выделены без применения статистических методов. Применение статистических методов выявления грубых ошибок целесообразно лишь в сомнительных случаях, когда информация о качестве измерений либо неполна, либо ненадежна [163]. При этом, применяя статистические методы, необходимо отслеживать выполнение тех предположений, в условиях которых корректно их использование.

В борьбе с грубыми погрешностями измерений, если они не были обнаружены в процессе измерений, используют два подхода:

- исключение резко выделяющихся аномальных измерений из дальнейшей обработки;
- использование робастных методов обработки.

Под робастностью в статистике понимают нечувствительность к малым отклонениям от предположений [337].

Понятно желание каждого исследователя, чтобы получаемые оценки параметров моделей были как можно менее чувствительны к аномальным наблюдениям. В противном случае, прежде чем переходить к оцениванию, приходится использовать процедуры исключения грубых ошибок измерений, что, как правило, выливается в непростую задачу, которая, как справедливо отмечается в [292], без устойчивых методов надежно не решается.

Какое измерение наблюданной величины следует считать грубой ошибкой, аномальным измерением? Очевидно, что ответ на этот вопрос зависит от истинного закона распределения вероятностей, выборку из генеральной совокупности которого мы наблюдаем. Одно и то же резко выделяющееся по величине измеренное значение может считаться грубой ошибкой, например, в случае принадлежности выборки нормальному закону и может не относиться к аномальным наблюдениям в случае принадлежности выборки закону распределения Коши. Ставить вопрос о создании критериев выделения аномальных наблюдений (ошибок измерений) в общем случае, без привязки к закону распределения (его модели) не имеет смысла.

Методы выделения аномальных измерений, опирающиеся на модель предполагаемого закона, носят название параметрических методов отбраковки.

Естественно, что наиболее известными и чаще применяемыми на практике являются критерии, предназначенные для выделения грубых ошибок наблюдений в предположении о принадлежности наблюдавших величинциальному закону.

## **10.2. Критерии отбраковки аномальных измерений при нормальном законе распределения**

Большинство существующих критериев отбраковки «подозрительных» данных опирается на предположение о принадлежности наблюдавших случайных величин нормальному закону. К такого рода критериям относятся простые критерии Граббса [44, 43, 42], приме-

няемые для проверки на аномальность (для оценки аномальности) выделяющихся результатов измерений. Использование именно этих критериев предполагает стандарт [177], представляющий собой аутентичный текст соответствующего Международного стандарта ИСО 5725. Статистики критерия Граббса предусматривают возможность проверки на наличие в выборке либо одного аномального результата измерения (наименьшего или наибольшего), либо двух (двух наименьших в выборке или двух наибольших).

Наш интерес к критериям Граббса был обусловлен предпочтением, отдаванным этим критериям при реализации стандарта ИСО 5725. При проведении исследований в работах [230, 78] мы хотели показать, как изменяются распределения статистик критерия Граббса под влиянием отклонения наблюдаемого закона от нормального. Это должно дать понимание того, что будет происходить с результатами применения критериев при нарушении предположений о нормальности. Вторая цель заключалась в реализации возможности применения критериев с аналогичными статистиками для проверки еще двух гипотез: а) для проверки на аномальность одновременно одного минимального и одного максимального элементов в выборке; б) для проверки на аномальность либо трех минимальных, либо трех максимальных элементов в выборке.

Исследования, проведенные в [230, 78], опирались на методику статистического моделирования и развивающееся программное обеспечение.

## 10.3. Критерий Граббса проверки на один выброс

Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – наблюдаемая выборка,  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  – построенный по ней вариационный ряд. Проверяемая гипотеза  $H_0$  заключается в том, что все  $X_1, X_2, \dots, X_n$  принадлежат одной генеральной совокупности. При проверке на выброс наибольшего выборочного значения конкурирующая гипотеза  $H_1$  заключается в том, что  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n-1)}$  принадлежат одному закону, а  $X_{(n)}$  – некоторому

другому, существенно сдвинутому вправо. При проверке на выброс  $X_{(n)}$  статистика критерия Граббса имеет вид

$$G_n = (X_{(n)} - \bar{X}) / S, \quad (10.1)$$

где

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \quad (10.2)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2, \quad (10.3)$$

$$S = \sqrt{S^2}. \quad (10.4)$$

При проверке на выброс наименьшего выборочного значения конкурирующая гипотеза  $H_1$  предполагает, что  $X_{(1)}$  принадлежит некоторому другому закону, существенно сдвинутому влево. В данном случае вычисляемая статистика принимает вид

$$G_1 = (\bar{X} - X_{(1)}) / S. \quad (10.5)$$

Максимальный или минимальный элемент выборки считается выбросом, если значение соответствующей статистики превысит критическое:  $G_n \geq G_{n,1-\alpha}$  или  $G_1 \geq G_{1,1-\alpha}$ , где  $\alpha$  – задаваемый уровень значимости.

Статистики (10.1) и (10.5) распределены одинаково. Вид условных распределений  $F(G_i | H_0)$  статистик (10.1) и (10.5) в зависимости от объема анализируемой выборки при нормальном законе наблюдаемых величин показан на рис. 10.1. Распределения статистики существенно зависят от объема выборки  $n$ . Аналитический вид распределений статистики в стандарте [177] и первоисточниках [44, 43, 42] не приводится. Даются лишь верхние процентные точки для различных объемов выборок, так как решение об аномальности проверяемого минимального или максимального выборочного значения принимается по правому «хвосту» распределения статистики. Если в стандарте процентные точ-

ки приведены для объемов выборок  $n$  лишь от 3 до 40, то в [42] процентные точки приведены в диапазоне  $n$  до 147 (см. табл. Е.1 приложения Е).

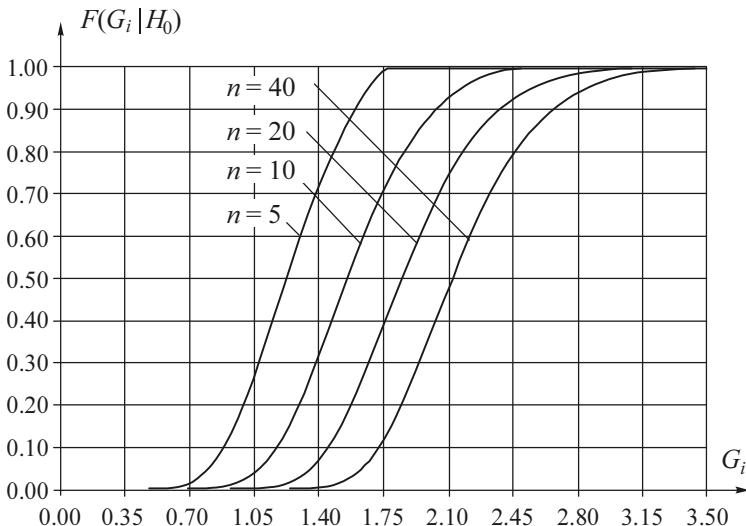


Рис. 10.1. Зависимость распределения статистик (10.1) и (10.5) критерия Граббса от объема выборок  $n$  (в случае нормального закона)

**Замечание.** В таблице процентных точек, приведенной в стандарте ([177], табл. 5), неверно указаны уровни значимости  $\alpha$ . На самом деле в этой таблице представлены значения, соответствующие уровням значимости 0.005 (0.5 %) и 0.025 (2.5 %), а не 0.01 (1 %) и 0.05 (5 %). Чтобы убедиться в этом, достаточно обратиться к первоисточнику [42]. Такое несоответствие было замечено в процессе исследований распределений статистик Граббса.

Это замечание в силе и для процентных точек статистик, предназначенных для анализа на выбросы одновременно двух минимальных или двух максимальных выборочных значений. Вследствие такого недоразумения при задании уровня значимости 0.01 или 0.05 и использовании процентных точек, приведенных в стандарте ([177], табл. 5), ошибочно не будет отбраковываться часть выбросов.

Данный критерий можно использовать для выделения аномальных результатов измерений только в случае нормального закона. Если

наблюдаемые случайные величины принадлежат некоторому другому закону распределения, то предельное распределение статистик (10.1) и (10.5) имеет иной вид. На рис. 10.2 отражено изменение распределений статистик (10.1) и (10.5) в случае принадлежности наблюдаемой случайной величины различным законам экспоненциального семейства распределений с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp\left\{-\left(\frac{|x-\theta_0|}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right\}. \quad (10.6)$$

Частными случаями семейства являются нормальный закон при параметре формы  $\theta_2 = 2$  и распределение Лапласа при  $\theta_2 = 1$ . Крайними случаями – распределение Коши ( $\theta_2 \rightarrow 0$ ) и равномерное распределение ( $\theta_2 \rightarrow \infty$ ). На рис. 10.2 приведены распределения статистик (10.1) и (10.5) при наблюдаемых законах (10.6) со значениями параметра формы  $\theta_2 = 0.5, 1, 2, 3, 5, 10$  и объемах выборок  $n = 40$ . Как видим, распределения статистик различаются очень сильно.

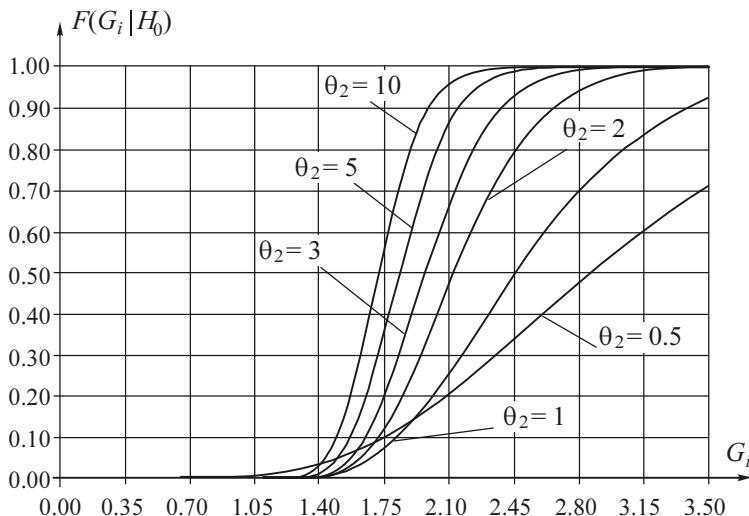


Рис. 10.2. Изменение распределений статистик (10.1) и (10.5) критерия Граббса в случае различных законов семейства распределений (10.6) при  $n = 40$

Справедливости ради следует напомнить, что впервые распределение статистики вида (10.1) было исследовано в работе [311]. В [163] приводится целый ряд статистик вида (10.1) и (10.5), отличающихся друг от друга комбинациями известных и оцениваемых параметров сдвига и масштаба нормального закона. Применение критериев, опирающихся на варианты таких статистик, было предусмотрено в [175, 316]. Все приводимые здесь статистики, несмотря на похожесть, отличаются от статистик Граббса (10.1) и (10.5), в которых используются оценки обоих параметров нормального закона. Вследствие этого и распределения ни одной из этих статистик не совпадают в точности с распределением статистик Граббса (10.1) и (10.5). Обзор еще ряда критериев, предназначенных для выявления и исключения аномальных выборочных значений, приведен в [283].

## 10.4. Проверка на два выброса

В этом случае конкурирующая гипотеза  $H_1$  может быть связана с предположением, что, например, некоторому другому закону принадлежат  $X_{(n-1)}$  и  $X_{(n)}$  (либо  $X_{(1)}$  и  $X_{(2)}$ ). При проверке на выброс одновременно двух наибольших значений статистика критерия Граббса имеет вид

$$G = S_{n-1,n}^2 / S_0^2, \quad (10.7)$$

где

$$S_0^2 = \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2, \quad (10.8)$$

$$S_{n-1,n}^2 = \sum_{j=1}^{n-2} (X_j - \bar{X}_{n-1,n})^2, \quad (10.9)$$

$$\bar{X}_{n-1,n} = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} X_j. \quad (10.10)$$

Для проверки на выброс одновременно двух наименьших величин  $X_{(1)}$  и  $X_{(2)}$  статистика критерия принимает вид

$$G = S_{1,2}^2 / S_0^2, \quad (10.11)$$

где

$$S_{1,2}^2 = \sum_{j=3}^n (X_j - \bar{X}_{1,2})^2, \quad (10.12)$$

$$\bar{X}_{1,2} = \frac{1}{n-2} \sum_{j=3}^n X_j. \quad (10.13)$$

Оба значения ( $X_{(n-1)}$ ,  $X_{(n)}$  или  $X_{(1)}$ ,  $X_{(2)}$ ) считаются выбросами, если значение соответствующей статистики окажется ниже критического:  $G < G_\alpha$ .

Вид условных распределений  $F(G|H_0)$  статистик  $G$  (10.7) и (10.11) в зависимости от объема анализируемой выборки показан на рис. 10.3. Аналитический вид распределений статистики  $G$  в стандарте [177] и в [44, 43, 42] не приводится. Даются лишь нижние процентные точки для различных объемов выборок, так как решение об аномальности одновременно двух наименьших или двух наибольших выборочных значений принимается по левому «хвосту» распределения статистики. В стандарте нижние процентные точки приведены для объемов выборок  $n$  лишь от 4 до 40. В первоисточнике [42] нижние процентные точки распределения статистики  $G$  приведены в диапазоне  $n$  до 149 (см. табл. Е.2 приложения Е).

Если наблюдаемые случайные величины принадлежат некоторому другому закону, отличному от нормального, то распределения статистик (10.7) и (10.11) принимают иной вид. Например, на рис. 10.4 приведены распределения статистик (10.7) и (10.11) при наблюдаемых законах вида (10.6) со значениями параметра формы  $\theta_2 = 1, 2, 3, 5, 10$  при объемах выборок  $n = 20$ . Как следует из этого рисунка, распределения статистик Граббса (10.7) и (10.11) очень сильно зависят от вида закона, которому принадлежат наблюдаемые величины.

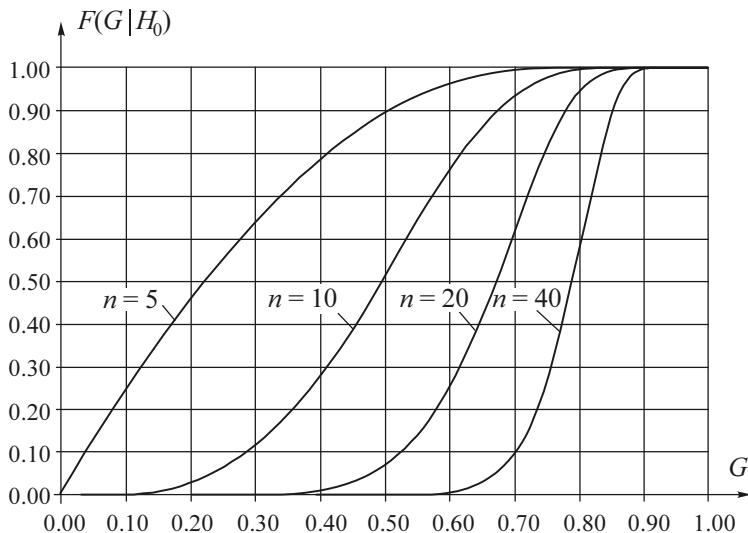


Рис. 10.3. Зависимость распределения статистик (10.7) и (10.11) критерия Граббса от объема выборок (в случае нормального закона)

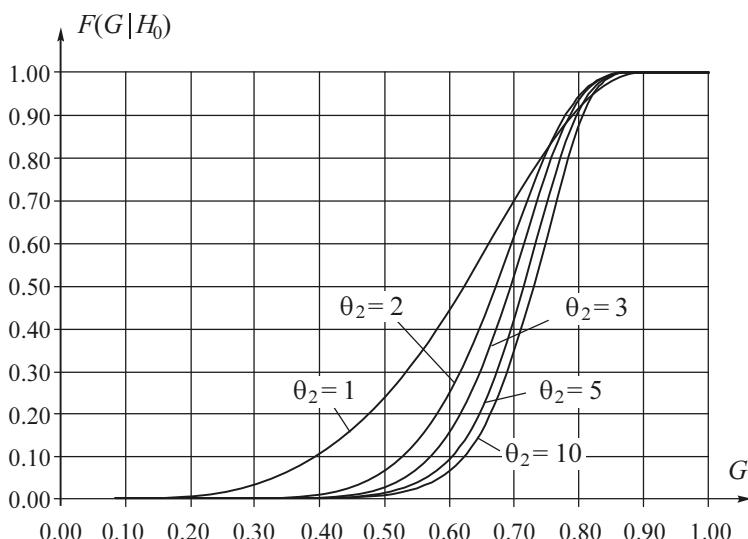


Рис. 10.4. Изменение распределений статистик (10.7) и (10.11) Граббса в случае различных законов распределения при  $n = 20$

Как и в первом случае, критерий со статистиками (10.7) – (10.11) можно применять для отбраковки аномальных наблюдений, используя таблицы процентных точек, приведенные в [177] и в [42], только в случае нормального закона. Если наблюдаемый закон отличается от нормального, то использование указанных таблиц, как следует из рис. 10.2 и 10.4, может приводить как к пропуску выбросов, так и к причислению к аномальным данных, не являющихся таковыми.

## 10.5. Проверка на три выброса

Подход (10.7) – (10.13) можно естественно развивать для построения статистик, предназначенных, например, для проверки на аномальность одновременно трех минимальных или трех максимальных выборочных значений, или для проверки на выброс одновременно минимального и максимального значений в выборке [230, 78]. Для этого необходимо исследовать лишь распределения соответствующих статистик.

В случае проверки на аномальность одновременно трех минимальных или трех максимальных выборочных значений конкурирующая гипотеза  $H_1$  предполагает, что некоторому другому закону принадлежат  $X_{(1)}$ ,  $X_{(2)}$  и  $X_{(3)}$  (либо  $X_{(n-2)}$ ,  $X_{(n-1)}$  и  $X_{(n)}$ ). Статистики для проверки на аномальность одновременно трех минимальных или трех максимальных выборочных значений формируются в соответствии с соотношениями

$$G_{1,2,3} = \frac{S_{1,2,3}^2}{S_0^2}, \quad (10.14)$$

$$G_{n-2,n-1,n} = \frac{S_{n-2,n-1,n}^2}{S_0^2}, \quad (10.15)$$

где

$$S_{1,2,3}^2 = \sum_{j=4}^n \left( X_j - \bar{X}_{1,2,3} \right)^2, \quad (10.16)$$

$$\bar{X}_{1,2,3} = \frac{1}{n-3} \sum_{j=4}^n X_j . \quad (10.17)$$

$$S_{n-2,n-1,n}^2 = \sum_{j=1}^{n-3} (X_j - \bar{X}_{n-2,n-1,n})^2 , \quad (10.18)$$

$$\bar{X}_{n-2,n-1,n} = \frac{1}{n-3} \sum_{j=1}^{n-3} X_j . \quad (10.19)$$

Статистики (10.14) и (10.15) распределены одинаково. Все три измерения считаются выбросами, если значение соответствующей статистики оказывается ниже критического:  $G_{1,2,3} < G_{3,\alpha}$  или  $G_{n-2,n-1,n} < G_{3,\alpha}$ .

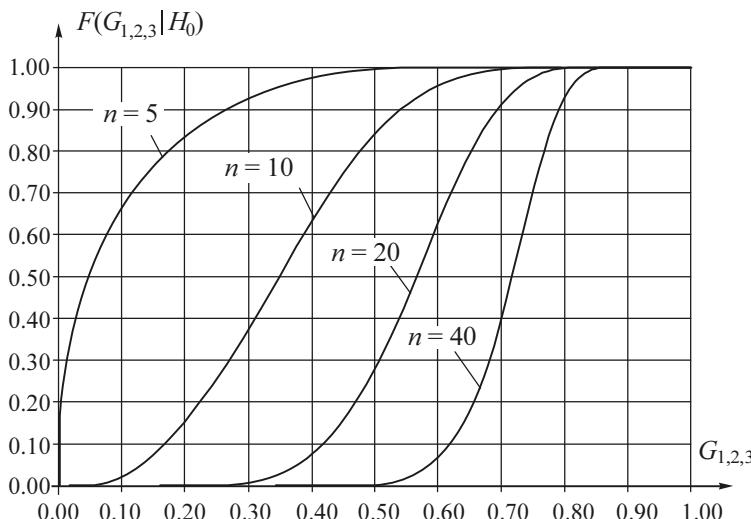


Рис. 10.5. Зависимость распределения статистик (10.14) и (10.15) от объема выборок (в случае нормального закона)

Естественно, что распределения данных статистик также являются зависящими от объема выборок  $n$ . На рис. 10.5 показана зависимость от  $n$  условных распределений  $F(G_{1,2,3}|H_0)$  и  $F(G_{n-2,n-1,n}|H_0)$

статистик (10.14) и (10.15) в случае извлечения выборок из нормальной генеральной совокупности. Вычисленные в [230, 78] с использованием методики статистического моделирования нижние процентные точки ( $\alpha = 0.1, 0.5, 1, 5, 10 \%$ ) распределений статистик (10.14) и (10.15) при  $5 \leq n \leq 150$  представлены в табл. Е.3 приложения Е. Процентные точки строились по моделируемым выборкам статистик. Объем каждой выборки, по которой оценивались процентные точки, составлял 50 000 смоделированных значений статистики. В таблице приведены значения процентных точек, полученные усреднением по 15 таким экспериментам.

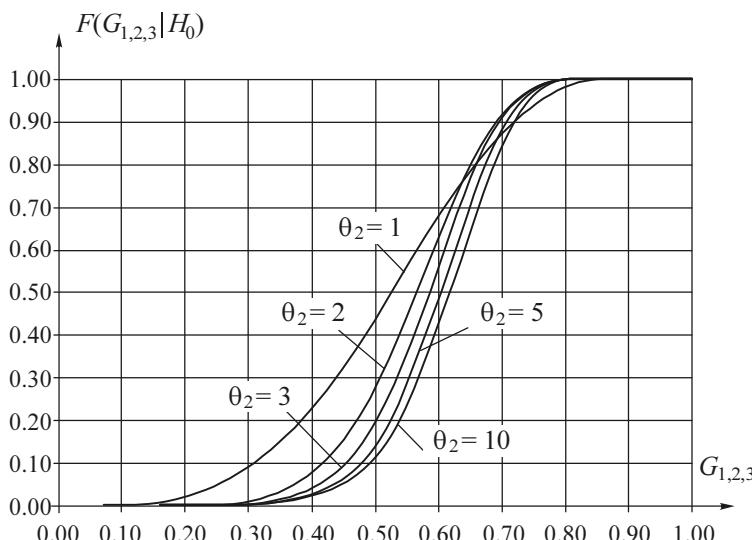


Рис. 10.6. Изменение распределений статистик (10.14) и (10.15) в случае различных законов семейства распределений (10.6) при  $n = 20$

Распределения статистик (10.14), (10.15) также зависят от наблюдаемого закона. Рис. 10.6 иллюстрирует поведение распределений данных статистик при наблюдаемых законах вида (10.6) со значениями параметра формы  $\theta_2 = 1, 2, 3, 5, 10$  при объемах выборок  $n = 20$ .

## 10.6. Одновременная проверка на выброс наименьшего и наибольшего значений

Статистика для проверки на аномальность одновременно минимального и максимального выборочных значений формируется в соответствии с соотношением

$$G_{l,n} = \frac{S_{l,n}^2}{S_0^2}, \quad (10.20)$$

где

$$S_{l,n}^2 = \sum_{j=2}^{n-1} (X_j - \bar{X}_{l,n})^2, \quad (10.21)$$

$$\bar{X}_{l,n} = \frac{1}{n-2} \sum_{j=2}^{n-1} X_j. \quad (10.22)$$

Оба значения считаются выбросами при заданном уровне значимости  $\alpha$ , если вычисленное по выборке значение статистики (10.20) окажется ниже критического:  $G_{l,n} < G_{l,n,\alpha}$ .

Вид условных распределений  $F(G_{l,n}|H_0)$  статистики (10.20)  $G_{l,n}$  в зависимости от объема  $n$  в случае извлечения анализируемой выборки из нормальной генеральной совокупности показан на рис. 10.7. Вычисленные в [230, 78] с использованием методики статистического моделирования нижние процентные точки распределений статистики (10.20) при  $5 \leq n \leq 150$  приведены в табл. Е.4 приложения Е.

Распределения статистики (10.20) существенно зависят от наблюдаемого закона. Рис. 10.8 показывает, как меняются распределения данной статистики при наблюдаемых законах вида (10.6) со значениями параметра формы  $\theta_2 = 1, 2, 3, 5, 10$  при объемах выборок  $n = 20$ .

Каждый из рассмотренных критериев позволяет (способен) отбрасывать содержащиеся в выборке аномальные данные, если количество выбросов в выборке не превышает их числа, на которое рассчитан соответствующий критерий. В тех случаях, когда используемый критерий соответствует «реальному числу» выбросов, последние, как правило, удается выделить с применением этого критерия. При содержании

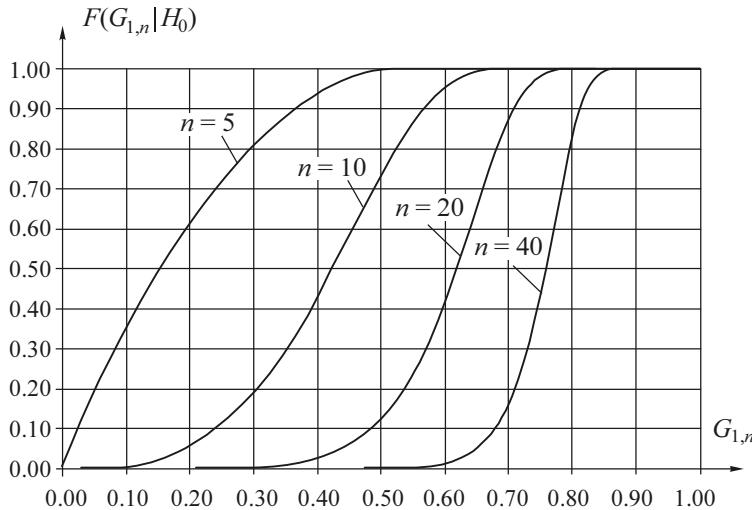


Рис. 10.7. Зависимость распределения статистики (10.20) от объема выборки (в случае нормального закона)

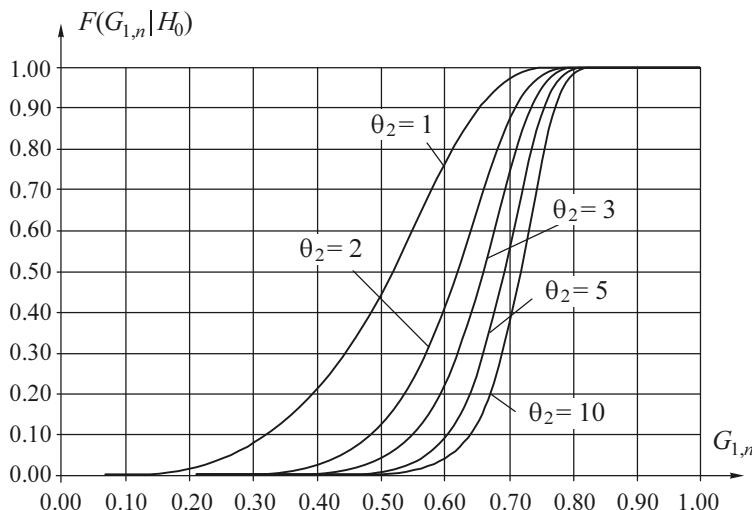


Рис. 10.8. Изменение распределений статистики (10.20) в случае различных законов семейства распределений (10.6) при  $n = 20$

в выборке большего числа грубых ошибок измерений, чем предусматривает статистика, критерий уже не способен их выделять. Например,

если проверка на выброс одного наибольшего значения не дала положительного результата, это еще не означает, что данное значение не является выбросом. Возможно, что в выборке содержится больше значений, которые могут интерпретироваться как аномальные. Присутствие таких данных отражается на оценках дисперсии (10.3), (10.8) и оценках характеристик рассеяния (10.9), (10.12), (10.16), (10.18), (10.21), так как все они не являются робастными. Следовательно, при использовании критериев типа Граббса необходимо последовательно тестировать выборку на наличие различного числа грубых ошибок измерений.

Выбросы в результатах измерений могут быть вызваны появлением «сдвинутых» значений, связанных с систематической ошибкой, могут быть связаны с увеличением рассеяния результатов измерений в силу различных причин. В последнем случае к выбросам могут относиться как наименьшие, так и наибольшие значения. Способность рассмотренных критериев выделять аномальные результаты измерений будет зависеть от вида засорения.

В качестве примера покажем мощность критериев на модели с симметричным засорением, когда выборка из нормальной генеральной совокупности с параметром сдвига  $\mu$  и параметром масштаба  $\sigma$  засорена 10 % наблюдений нормального закона с параметрами  $\mu$  и  $5\sigma$ :

$$F(x) = 0.9F_N(\mu, \sigma) + 0.1F_N(\mu, 5\sigma).$$

Мощность критерия при заданной вероятности  $\alpha$  ошибки первого рода определяется величиной  $1 - \beta$ , где  $\beta$  – вероятность ошибки второго рода. В данном случае ошибка второго рода заключается в том, что аномальное значение не идентифицируется как таковое. В табл. 10.1 приведены мощности критериев проверки на аномальность одного минимального (или максимального) значения в выборке, одновременно двух минимальных (двух максимальных) значений, одновременно одного минимального и одного максимального значений в выборке объемом  $n = 20$ . Более высокая в данном случае мощность критерия со статистикой (10.20) объясняется симметричностью засорения.

Таблицы процентных точек критериев Граббса, полученные в [44, 43, 42], сокращенная таблица, приведенная в [177], расширения критерия, рассмотренные в данном случае, и построенные таблицы соответствующих процентных точек (см. табл. Е.3, Е.4 приложения Е) позволяют корректно отбраковывать грубые ошибки измерений (выбросы)

Таблица 10.1

**Значения мощности  $1 - \beta$  критериев типа Граббса по отношению к смеси с 10 % симметричным засорением при  $n = 20$**

Уровень зна- чимости $\alpha$	Мощность критерия		
	со статистикой (10.1) и (10.5)	со статистикой (10.7) и (10.11)	со статистикой (10.20)
0.10	0.3763	0.3586	0.6094
0.05	0.3285	0.3115	0.5448
0.01	0.2431	0.2351	0.4164

в случае выполнения предположения о нормальности наблюдаемого закона. Если предположения о нормальности нарушаются, использовать указанные таблицы процентных точек нельзя. Как показано выше, распределения статистик критериев типа Граббса существенно зависят от истинного закона распределения наблюдаемой случайной величины.

Вообще говоря, в случае необходимости нет принципиальных трудностей для построения модели распределения любой рассмотренной статистики критерия типа Граббса (или для определения процентных точек) при любом законе наблюдаемых случайных величин: разработанное программное обеспечение позволяет это сделать. Проблема лишь в том, что законов, для которых желательно иметь эффективную процедуру отбраковки аномальных измерений, слишком много.

Логичней при анализе данных на аномальность опираться на «истинный» закон распределения наблюдаемой величины, проверяя на аномальность наблюдения, маловероятные с позиций данного закона. Чтобы с помощью такой процедуры корректно выделять содержащиеся в выборке грубые ошибки, необходимо знать «истинный» закон  $F(x, \theta)$ . Вектор параметров  $\theta$  закона  $F(x, \theta)$  на практике чаще всего приходится оценивать по этой же самой выборке. Именно с этим связаны проблемы параметрических методов отбраковки, так как содержащиеся в выборке выбросы отражаются на оценках параметров  $\hat{\theta}$ . Вследствие этого полученный закон  $F(x, \hat{\theta})$  может оказаться существенно отличающимся от «истинного», что отразится на результатах анализа выбросов на аномальность.

Следует отметить, что подобным же недостатком обладают и критерии типа Граббса: нет никакой гарантии, что в выборке не большее

число аномальных измерений, чем мы исследуем на выбросы. Ошибка в наших предположениях может отрицательно сказаться на результатах анализа.

В параметрических методах отбраковки с данным недостатком борются, применяя робастные методы оценивания, например, оценки максимального правдоподобия по группированным данным [223], оптимальные  $L$ -оценки по выборочным квантилям [272, 271],  $MD$ -оценки. Использование робастных методов оценивания в процедуре параметрической отбраковки, как это будет показано в следующем разделе, делает ее очень эффективной [223].

Робастные методы оценивания математического ожидания и среднего квадратичного отклонения можно использовать и при вычислении статистик критериев типа Граббса. Однако в этом случае следует неизменно учитывать, что метод оценивания отразится на распределениях статистик.

## 10.7. Параметрические методы отбраковки

В параметрическом случае задача отбраковки формулируется следующим образом. Проверяемая гипотеза  $H_0$  заключается в том, что все  $X_1, X_2, \dots, X_n$  принадлежат одной генеральной совокупности с законом распределения  $F(x, \theta)$ . При проверке на выброс наибольшего выборочного значения  $X_{(n)}$  конкурирующая гипотеза  $H_1$  заключается в том, что  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n-1)}$  принадлежат  $F(x, \theta)$ , а  $X_{(n)}$  – некоторому распределению  $G(x)$ , которое «существенно сдвинуто вправо» относительно  $F(x, \theta)$ , например,  $G(x) = F(x - A, \theta)$ , где  $A$  достаточно велико. Если  $X_{(n)} \leq d_{n,\alpha}$ , то принимается гипотеза  $H_0$ , в противном случае – гипотеза  $H_1$ . При справедливости нулевой гипотезы

$$P\left\{\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq d_{n,\alpha}\right\} = \left[F(d_{n,\alpha})\right]^n = 1 - \alpha$$

и критическое значение определяется из уравнения  $F(d_{n,\alpha}) = \sqrt[n]{1 - \alpha}$ .

При проверке на выброс наименьшего значения  $X_{(1)}$  гипотеза  $H_0$  принимается, если  $X_{(1)} \geq d_{1,\alpha}$ . В этом случае  $P\left\{\min_{1 \leq i \leq n} X_i \geq d_{1,\alpha}\right\} =$

$= \left[1 - F(d_{l,\alpha})\right]^n = 1 - \alpha$  и критическое значение определяется из уравнения  $F(d_{l,\alpha}) = 1 - \sqrt[n]{1 - \alpha}$ .

Чтобы с помощью данной процедуры корректно выделять содержащиеся в выборке грубые ошибки, необходимо знать «истинный» закон  $F(x, \theta)$ . Однако вектор параметров  $\theta$  закона  $F(x, \theta)$ , как правило, оценивается по этой же самой выборке. Именно в этой связи такую процедуру отбраковки называют параметрической. Если в выборке содержатся грубые ошибки наблюдений, это сказывается на оценках параметров  $\hat{\theta}$  и полученный закон  $F(x, \hat{\theta})$  может существенно отличаться от «истинного», а так как при проверке будет использован закон  $F(x, \hat{\theta})$ , мы можем с одинаковым успехом несправедливо причислить подозрительное наблюдение к аномальным измерениям или, что бывает чаще, грубую ошибку измерения посчитать естественным проявлением вероятностной закономерности.

Вследствие такой неустойчивости параметрические методы отбраковки резко выделяющих наблюдений подвергаются справедливой критике [293]. В принципе можно согласиться с доводами, приводимыми в работе [293] в качестве основания для вывода о неустойчивости параметрических методов отбраковки резко выделяющих наблюдений. Однако следует отметить, что все не так страшно и параметрические методы при выполнении определенных условий позволяют добиваться очень хороших результатов [223].

В задаче отбраковки аномальных наблюдений на разных этапах ее решения к статистическим процедурам оценивания и проверки гипотез предъявляются, вообще говоря, прямо противоположные требования. На этапе идентификации закона распределения и оценивания его параметров методы должны быть как можно менее чувствительны к наличию аномальных ошибок измерений. Наоборот, на последующем этапе исключения аномальных измерений критерий должен улавливать их наличие и позволять отсекать.

Таким образом, при идентификации (при оценивании параметров распределений) мы должны использовать робастные алгоритмы (устойчивые к наличию аномальных наблюдений), а на последующем этапе отбраковки желательна максимальная мощность критерия для различения близких альтернатив (чувствительность к грубым ошибкам).

На первом этапе можно применять робастные методы построения оценок параметров с переходом к группированным данным (метод максимального правдоподобия, метод минимума статистики  $\chi^2$  Пирсона, оптимальные  $L$ -оценки по выборочным квантилям [272, 271]). Высокая устойчивость ОМП по группированным данным к наличию в выборках аномальных измерений была отмечена при эксплуатации первых версий программной системы [224]. Причем для большей устойчивости ОМП и оценок по методу минимума  $\chi^2$  рекомендуется осуществлять разбиение выборки на интервалы равной вероятности или равной частоты. Конечно, при асимптотически оптимальном группировании мы получаем оценки с лучшими свойствами [211, 191], но при оптимальном группировании вероятность попадания случайной величины в крайний интервал бывает невелика и, следовательно, в этом случае оценки будут более чувствительны к наличию выбросов. По сравнению с ОМП, вычисляемыми по исходным (негруппированным) наблюдениям, лучшими робастными свойствами обладают  $MD$ -оценки, которые также могут использоваться на этом этапе.

Продемонстрируем сказанное на конкретном примере. Была смоделирована выборка объемом 1000 наблюдений в соответствии с распределением Вейбулла с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_0(x - \theta_2)^{\theta_0-1}}{\theta_1^{\theta_0}} \exp\left\{-\left(\frac{x - \theta_2}{\theta_1}\right)^{\theta_0}\right\}.$$

При моделировании были заданы параметры:  $\theta_0 = 2$ ,  $\theta_1 = 1$ ,  $\theta_2 = 0$ . В процессе регистрации восемь наблюдений «подверглись» сильным искажениям (первые восемь наблюдений в выборке были увеличены на 10).

На рис. 10.9 приведены эмпирическая функция распределения  $F_n(x)$  и функция распределения Вейбулла  $F(x, \theta)$  с ОМП параметров  $\hat{\theta}_0 = 1.3272$  и  $\hat{\theta}_1 = 1.0450$  (параметр сдвига  $\theta_2 = 0$  не оценивался). Как видим, на рисунке различие между  $F_n(x)$  и  $F(x, \theta)$  такое, что говорить о согласии не приходится.

На рис. 10.10 показана аналогичная картина для случая, когда ОМП параметров вычислялись по группированным данным при разбиении выборки на 12 равночастотных интервалов:  $\hat{\theta}_0 = 1.9874$  и  $\hat{\theta}_1 = 0.9949$ .

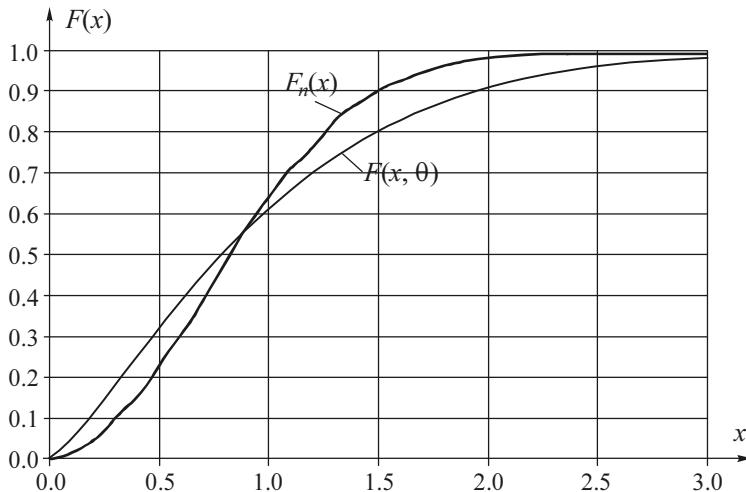


Рис. 10.9. Эмпирическая и теоретическая функция распределения, построенная по выборке с выбросами и при использовании ОМП

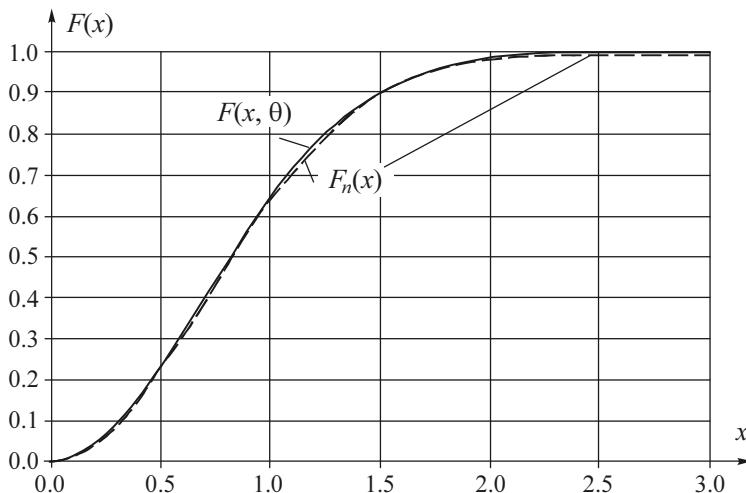


Рис. 10.10. Эмпирическая и теоретическая функция распределения, построенная по выборке с выбросами и использовании ОМП по группированным данным

(параметр  $\theta_2 = 0$  не оценивался). На рис. 10.10 эмпирическое распределение  $F_n(x)$  визуально практически совпадает с функцией распределения

ления Вейбулла с полученным вектором параметров. Отличие, связанное с присутствием в выборке восьми аномальных наблюдений, заметно только на «хвосте». Однако наличие в выборке аномальных измерений никак не сказалось на результатах проверки гипотез о согласии: по всем применяемым критериям ( $\chi^2$  Пирсона, Колмогорова,  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова,  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга) были достигнуты очень высокие уровни значимости и гипотеза о согласии не была отклонена. Это подчеркивает тот факт, что критерии согласия не позволяют уловить различие между эмпирическим и теоретическим законом, связанное с грубыми ошибками измерений.

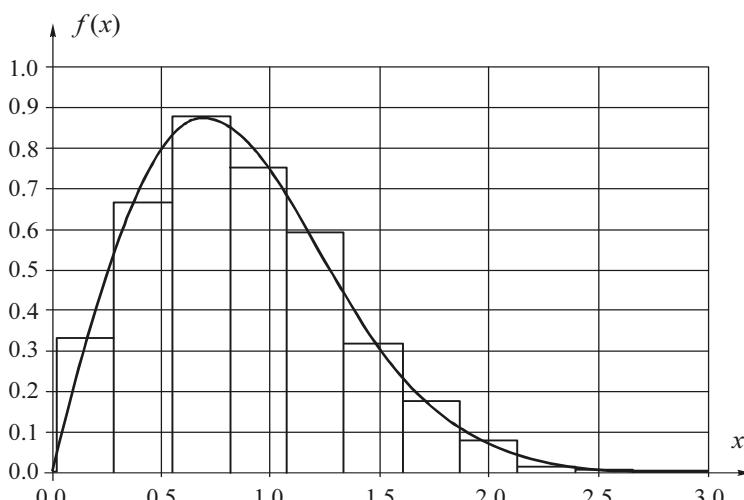


Рис. 10.11. Гистограмма и плотность распределения, построенная по выборке без выбросов

Таблица 10.2

**Результаты проверки согласия после удаления выбросов**

Критерий	Значение статистики $S^*$	Достигнутый уровень значимости $P\{S > S^*\}$
$\chi^2$ Пирсона	5.1811	0.8182
Колмогорова	0.5659	0.6330
$\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова	0.02547	0.9085
$\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга	0.20173	0.8935

Опираясь на распределение с данным вектором параметров, мы выделили и удалили восемь аномальных наблюдений. По оставшейся выборке были найдены ОМП вектора параметров (без использования группирования данных):  $\hat{\theta}_0 = 2.0118$  и  $\hat{\theta}_1 = 0.9860$  (параметр  $\theta_2 = 0$  не оценивался). На рис. 10.11 показаны плотность полученного распределения Вейбулла и гистограмма при 12 интервалах и асимптотически оптимальном группировании [301]. Результаты применения критериев согласия приведены в табл. 10.2.

## 10.8. Выводы

При решении задачи отбраковки на этапе идентификации закона распределения (при оценивании параметров распределений) следует использовать робастные алгоритмы (устойчивые к наличию аномальных наблюдений). Высокую устойчивость к присутствию в выборке грубых искажений или принадлежности выборки к другому закону распределения проявляют оценки по *группированным* данным. Обычно наиболее устойчивы эти оценки при разбиении области определения случайной величины на *интервалы равной вероятности* (равночастотные интервалы). С учетом сказанного параметрический метод отбраковки грубых ошибок измерений позволяет эффективно исключать аномальные наблюдения.

Вообще говоря, после исключения наибольшего или наименьшего члена вариационного ряда как аномального измерения необходимо рассмотреть как подозрительные предыдущие (последующие) члены при скорректированном объеме выборки. Однако если при параметрическом методе кроме  $X_{(n)}$  больше критического значения  $d_{n,\alpha}$  оказываются и некоторые предыдущие члены вариационного ряда  $X_{(n-1)}, X_{(n-2)}, \dots$ , то они заведомо должны быть отнесены к аномальным измерениям. Аналогично если несколько наименьших членов вариационного ряда  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots$  не превышают  $d_{1,\alpha}$ , то все они могут интерпретироваться как аномальные.

---

# 11. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ФУНКЦИЙ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

---

## 11.1. Введение

**П**ри определении законов или построении моделей законов распределения функций от непрерывных случайных величин приходится сталкиваться с существенными проблемами. С одной стороны, строгий математический подход позволяет получить решение в виде аналитического выражения для искомого закона только в достаточно редких частных случаях, а разнообразие моделей даже одномерных законов, используемых в приложениях для описания наблюдаемых случайных величин, очень велико. Функции от случайных величин, с которыми сталкиваются в приложениях, могут быть очень сложны и не всегда описываются аналитическими выражениями. С другой стороны, при использовании математических пакетов выкладки, необходимые для успешного задания выражения в виде, требуемом пакетами, могут отнять много времени и успех не гарантируется, так как аналитическое решение, скорее всего, не существует.

Именно поэтому в практических ситуациях вынуждены использовать различные аппроксимации, которые позволяют достаточно просто найти числовые характеристики закона распределения соответствующей функции. Такой подход бывает оправдан при выполнении достаточно жестких предположений, накладываемых на вид функции от случайных величин и законы распределения этих случайных величин. К сожалению, эти предположения на практике чаще всего не выполняются.

Пусть требуется найти закон распределения случайной величины  $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_k)$ , недоступной для измерения через многократно

измеряемые величины  $X_i$ . Предполагается, что законы распределения  $X_1, X_2, \dots, X_k$  известны или могут быть найдены на основании результатов статистического анализа.

Классический подход [347, 180] к определению закона распределения вероятностей функции от системы случайных величин предполагает знание совместной плотности распределения  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  системы случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_k$ .

Пусть  $X: \Omega \rightarrow R^n$  – случайная величина и  $\phi: R^n \rightarrow R^n$  – непрерывно дифференцируемая функция такая, что  $J_\phi(x) \neq 0, \forall x \in R^n$ , где  $J_\phi(x)$  – якобиан функции  $\phi$  в точке  $x$ . Тогда случайная величина также абсолютно непрерывна, и ее плотность имеет вид

$$f_Y(y) = f_X(\phi^{-1}(y)) \left| J_{\phi^{-1}}(y) \right|.$$

Однако аналитическое решение с помощью классического подхода удается найти только для некоторых частных случаев  $Y = \phi(\bar{X})$  и  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  [180].

Поэтому при определении вероятностных характеристик выходной переменной модели  $Y = \phi(\bar{X})$  в случае некоррелированности входных переменных  $X_1, X_2, \dots, X_k$  рекомендуется [282] линеаризация модели

$$Y \approx \phi(\bar{M}) + (\bar{X} - \bar{M})^T \nabla \phi(\bar{M}), \quad (11.1)$$

где  $\bar{M}$  – вектор математических ожиданий  $\bar{X}$ ;  $\nabla \phi(\cdot)$  – градиент функции.

Однако в реальных ситуациях использование линеаризации оказывается не всегда оправданным. В [212] на примере функции  $Y = X_1 / X_2$  демонстрируется различие в решениях, полученных при использовании классического подхода и в результате линеаризации, подчеркиваются недопустимо большие ошибки, к которым приводит применение метода линеаризации.

Тем не менее метод линеаризации широко используют на практике, в том числе в информационно-измерительных системах (ИИС), осущес-

ствляющих косвенные измерения. Например, в [348] такой подход используется для исследования метрологических характеристик много-канальных ИИС с мультиплективной связью между каналами. В результате линеаризации мультиплективное взаимодействие каналов заменяется на аддитивное. Следует ожидать, что применение этого приема в ситуации, описываемой в [348], должно приводить к заниженным оценкам погрешности измерений.

Выход видится в применении метода статистических испытаний для исследования вероятностных закономерностей, в его возможностях при построении вероятностных моделей для функций от случайных величин, для уточнения вероятностных характеристик погрешностей при косвенных измерениях.

## 11.2. Компьютерное моделирование законов распределения функций от случайных величин

Методика компьютерного моделирования и анализа статистических закономерностей предполагает разработку соответствующего программного обеспечения для проведения исследований. В данном случае программное обеспечение предназначено для имитационного моделирования эмпирических распределений произвольных функций от систем случайных величин, подчиняющихся различным законам распределения. В основе технологии нахождения закона распределения интересующей нас случайной величины  $Y$  лежит метод статистических испытаний [195, 196].

Программное обеспечение позволяет моделировать:

- выборки псевдослучайных величин, подчиняющихся заданному закону распределения;
- выборки псевдослучайных векторов с использованием подхода, изложенного в работе [246];
- выборки функций от систем псевдослучайных величин;
- выборки функций от систем псевдослучайных векторов.

На рис. 11.1 показано диалоговое окно, позволяющее задать условия и выполнить моделирование различных функций от систем случайных величин, подчиняющихся различным законам распределения.

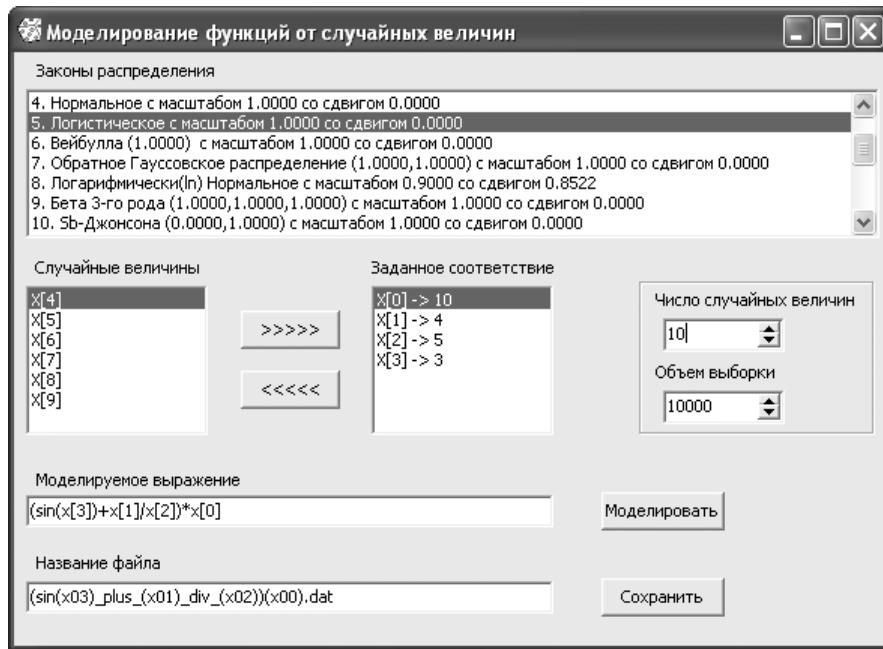


Рис. 11.1. Диалоговое окно для моделирования одномерных функций от случайных величин

Порядок действий при моделировании эмпирических распределений функций от случайных величин следующий:

- в конфигурационном файле задается перечень законов распределения случайных величин, доступных для дальнейшего использования;
- с помощью кнопки **>>>>** для случайных величин  $X[i]$ , являющихся аргументами функции, задаются соответствующие законы распределения. При необходимости можно отменить заданное соответствие с помощью кнопки **<<<<**;
- задается требуемый объем выборки;
- задается вид функции (вводится выражение), для которой моделируется эмпирическое распределение, и запускается моделирование;
- после завершения моделирования задается имя файла для сохранения результата.

На рис. 11.2 показано диалоговое окно, позволяющее задать условия и выполнить моделирование различных функций от систем многомерных случайных величин.

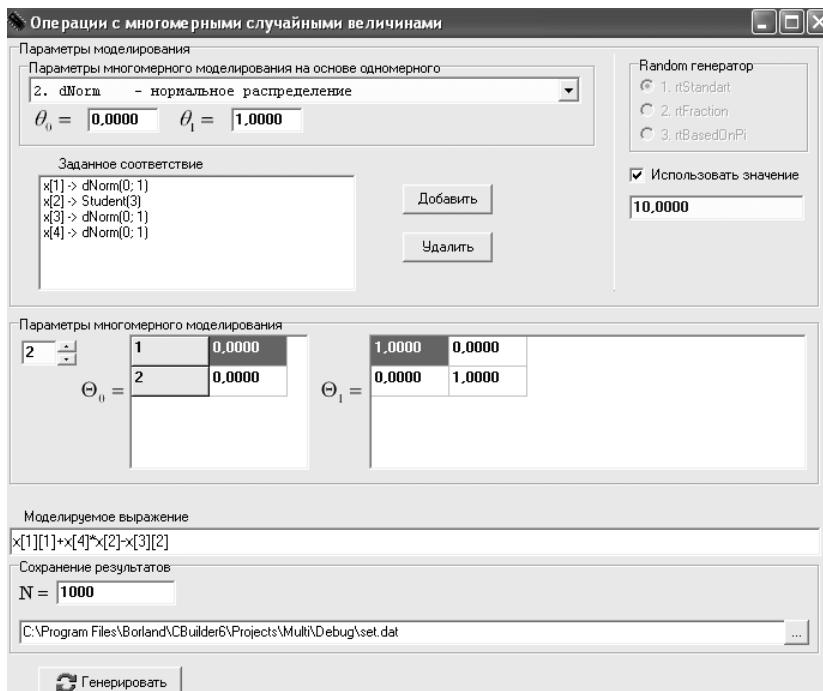


Рис. 11.2. Диалоговое окно для моделирования многомерных функций от систем случайных величин

Порядок действий при моделировании эмпирических распределений функций от систем случайных величин:

- задается вид одномерного закона распределения (с его параметрами), используемого при моделировании соответствующего псевдослучайного вектора [246];
- задаются размерность псевдослучайного вектора, его вектор математических ожиданий и ковариационная матрица;
- вводится выражение, определяющее функцию от системы случайных величин (скалярную, векторную, матричную), эмпирические распределения элементов которой будут впоследствии моделироваться. Какой вид имеет функция (скалярная, векторная или матричная), определяется в процессе вычисления выражения (результатом могут быть числа, векторы и матрицы). При задании выражения можно обращаться непосредственно к элементу многомерного случайного вектора;

- задаются необходимый объем выборки (число повторений) при моделировании эмпирического распределения функции и имя файла, в который производится запись полученной выборки.

### 11.3. Исследование распределений функций от случайных величин

Рассмотрим несколько примеров, демонстрирующих точность статистического моделирования и его эффективность при исследовании поведения законов распределения функций от случайных величин [241, 88].

Очевидно, что закон распределения функции  $Y$  существенно зависит от вида тех законов, которым подчинены случайные величины  $X_i$ , от области их определения. Более того, функция  $Y$  от величин  $X_i$ , распределенных по одним и тем же законам, может описываться очень различающимися моделями вероятностных законов в зависимости от параметров законов, описывающих случайные величины  $X_i$ . Покажем это на функции  $Y = X_1/X_2$  в случае принадлежности  $X_i$  нормальным законам.

**Пример 1.**  $Y = X_1/X_2$ , где  $X_1, X_2 \in N(0,1)$  и независимы. Теоретическим законом распределения  $Y$  является стандартное распределение Коши с плотностью

$$f(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad y \in (-\infty, +\infty).$$

В табл. 11.1 приведены результаты проверки согласия смоделированной выборки величины  $Y$  с распределением Коши. В этом и в остальных случаях объемы моделируемых выборок составили 10 000 значений. В случае критерия  $\chi^2$  Пирсона использовано асимптотически оптимальное группирование, обеспечивающее максимальную мощность относительно близких конкурирующих гипотез [301]. Достигнутые уровни значимости по всем критериям свидетельствуют об очень хорошем согласии полученного в результате моделирования эмпирического распределения с распределением Коши.

Таблица 11.1

**Результаты проверки согласия выборки величины  $Y = X_1/X_2$  со стандартным распределением Коши в случае  $X_1, X_2 \in N(0,1)$**

Критерий	Значение статистики	Достигнутый уровень значимости
$\chi^2$ Пирсона при $k = 15$	12.547	0.5625
Колмогорова	0.6087	0.8526
$\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова	0.0521	0.8636
$\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга	0.3416	0.9040

**Пример 2.**  $Y = X_1/X_2$ , где  $X_1 \in N(0,4)$ ,  $X_2 \in N(0,0.3)$  и независимы. Теоретическим законом распределения  $Y$  является распределение Коши с плотностью

$$f(y) = \frac{1.2}{\pi(16 + 0.09y^2)}, \quad y \in (-\infty, +\infty).$$

Результаты проверки согласия смоделированной выборки с распределением Коши приведены в табл. 11.2.

Таблица 11.2

**Результаты проверки согласия выборки величины  $Y = X_1/X_2$  с распределением Коши в случае  $X_1 \in N(0,4)$ ,  $X_2 \in N(0,0.3)$**

Критерий	Значение статистики	Достигнутый уровень значимости
$\chi^2$ Пирсона при $k = 15$	10.713	0.7084
Колмогорова	0.7169	0.6829
$\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова	0.0530	0.8577
$\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга	0.3202	0.9222

**Пример 3.**  $Y = X_1/X_2$ , где  $X_1, X_2 \in N(1,1)$  и независимы. В данном случае законом распределения  $Y$  уже не является распределение Коши. Оценивание параметров плотности Коши

$$f(y) = \frac{\theta_1}{\pi(\theta_1^2 + (y - \theta_0)^2)}$$

по смоделированной выборке дает оценки максимального правдоподобия (ОМП) параметров сдвига  $\theta_0 = 0.6267$  и масштаба  $\theta_1 = 0.7776$ . Оценка параметра сдвига совпадает с медианой эмпирического распределения. Проверка согласия полученного в результате моделирования эмпирического распределения с законом распределения Коши отклоняется по всем критериям. Это является следствием того, что действительное распределение величины  $Y$  в данном случае является асимметричным (рис. 11.3).

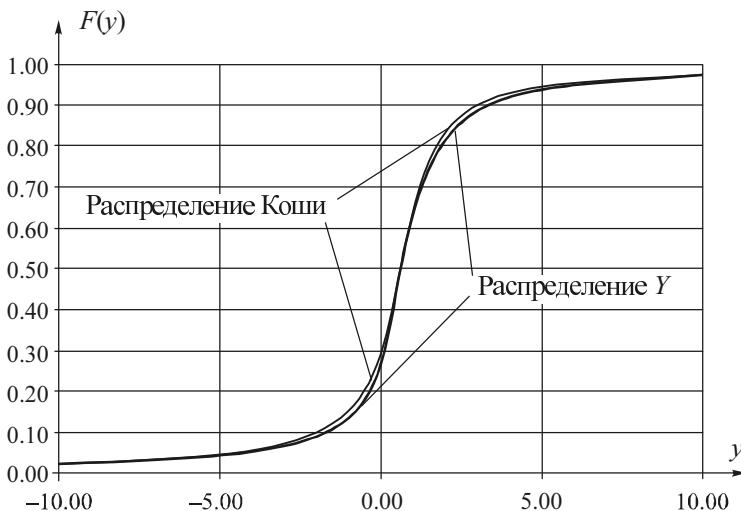


Рис. 11.3. Распределение  $Y = X_1/X_2$  при  $X_1, X_2 \in N(1,1)$

Плотность распределения для частного  $Y = (a + X_1)/(b + X_2)$ , где  $X_1$  и  $X_2$  распределены в соответствии со стандартным нормальным законом, может быть представлена в виде [108, 107]

$$f(y) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(a^2+b^2)}}{\pi(1+y^2)} \left[ 1 + q e^{\frac{1}{2}q^2} \int_0^y e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right], \quad (11.2)$$

где  $q = (b + ay)/\sqrt{1+y^2}$ . В рассматриваемом примере  $a=1$ ,  $b=1$ . Результаты проверки согласия смоделированной выборки с распределением (11.2) приведены в табл. 11.3.

Таблица 11.3

**Результаты проверки согласия выборки величины  $Y = X_1/X_2$  с распределением, полученным по формуле (11.2), в случае  $X_1 \in N(0,1)$ ,  $X_2 \in N(1,1)$**

Критерий	Значение статистики	Достигнутый уровень значимости
$\chi^2$ Пирсона при $k = 15$	17.406	0.2351
Колмогорова	0.8085	0.5302
$\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова	0.1462	0.4012
$\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга	0.9025	0.4126

**Пример 4.**  $Y = X_1/X_2$ , где  $X_1 \in N(1,1)$ ,  $X_2 \in N(10,1)$  и независимы.

В случае существенного превышения абсолютного значения параметра сдвига величины  $X_2$  над сдвигом  $X_1$  хорошей моделью для  $Y$  является нормальное распределение. На рис. 11.4 представлены гистограмма, построенная по эмпирическому распределению при 15 интервалах в случае асимптотически оптимального группирования [303, 218], и плотность нормального распределения с оценками параметров сдвига  $\theta_0 = 0.10257$  и масштаба  $\theta_1 = 0.10233$ . В табл. 11.4 приведены результаты проверки согласия смоделированной выборки с построенным нормальным распределением [190, 301, 259, 302].

В рассматриваемом примере плотность  $Y = X_1/X_2$  имеет вид (11.2) при  $a=1$ ,  $b=10$ . Результаты проверки согласия смоделированной выборки с распределением (11.2) приведены в табл. 11.5.

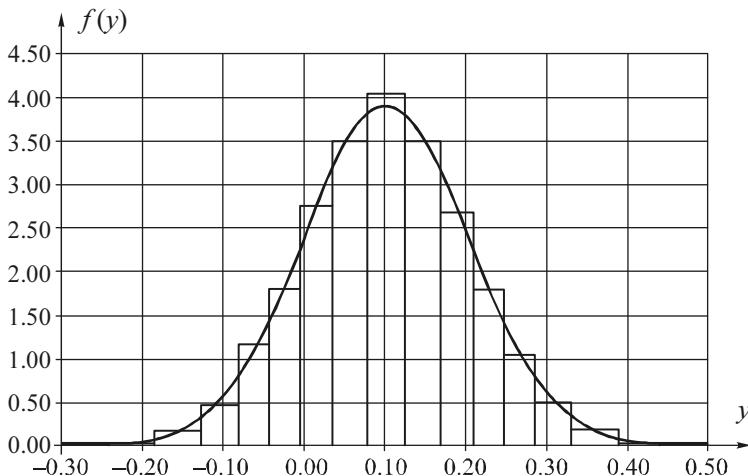


Рис. 11.4. Плотность и гистограмма распределения  $Y = X_1/X_2$   
при  $X_1 \in N(1,1)$ ,  $X_2 \in N(10,1)$

Таблица 11.4

Результаты проверки согласия выборки величины  $Y = X_1/X_2$   
с нормальным распределением в случае  $X_1 \in N(1,1)$ ,  $X_2 \in N(10,1)$

Критерий	Значение статистики	Достигнутый уровень значимости
$\chi^2$ Пирсона при $k = 15$	23.272	0.0255
Колмогорова	0.6501	0.3991
$\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова	0.0870	0.1564
$\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга	0.6545	0.0827

Таблица 11.5

Результаты проверки согласия выборки величины  $Y = X_1/X_2$   
с распределением (11.2), в случае  $X_1 \in N(1,1)$ ,  $X_2 \in N(10,1)$

Критерий	Значение статистики	Достигнутый уровень значимости
$\chi^2$ Пирсона при $k = 15$	17.023	0.2549
Колмогорова	0.9115	0.3770
$\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова	0.1462	0.4012
$\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга	1.0833	0.3163

Данный пример для функции  $Y = X_1/X_2$  – это случай, когда применение линеаризации оказывается правомерным. Линеаризация дает нормальное распределение с математическим ожиданием 0.1 и дисперсией 0.0101, т. е. нормальное с параметрами сдвига  $\theta_0 = 0.100499$  и масштаба  $\theta_1 = 0.1$ , что не так уж далеко от истинного положения вещей.

С ростом абсолютной величины параметра сдвига  $X_2$  по отношению к сдвигу  $X_1$  распределение  $Y$  стремится к нормальному (при равенстве дисперсий). С увеличением дисперсии  $X_2$  распределение  $Y$  начинает отклоняться от нормального. В этих же условиях при возрастании дисперсии  $X_1$  по отношению к дисперсии  $X_2$  распределение хорошо аппроксимируется нормальным законом. Применение линеаризации в этом случае приводит к нормальному закону с более заметным смещением относительно истинного закона распределения.

Более близкой к реально возникающим на практике ситуациям является такая, когда стандартное отклонение  $X_i$  много меньше его математического ожидания и распределения  $X_i$  близки кциальному закону. В таких случаях распределение  $Y = X_1/X_2$  хорошо аппроксимируется нормальным законом и линеаризация также дает хорошие результаты.

**Пример 5.**  $Y = X_1/X_2$ , где  $X_1 \in N(10,1)$ ,  $X_2 \in N(1,1)$  и независимы. Плотность распределения  $Y$  в данном случае имеет вид (11.2) при  $a = 10$ ,  $b = 1$ . Результаты проверки согласия смоделированной выборки с распределением (11.2) приведены в табл. 11.6. Вид эмпирической функции распределения, полученной при моделировании, показан на рис. 11.5. Очевидно, что ее хорошо можно описать некоторой смесью распределений, аналитический вид которой отличен от закона (11.2).

Таблица 11.6

Результаты проверки согласия выборки величины  $Y = X_1/X_2$   
с распределением (11.2) в случае  $X_1 \in N(10,1)$ ,  $X_2 \in N(1,1)$

Критерий	Значение статистики	Достигнутый уровень значимости
$\chi^2$ Пирсона при $k = 15$	14.927	0.3831
Колмогорова	0.8050	0.5359
$\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова	0.1261	0.4710
$\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга	0.92532	0.3989

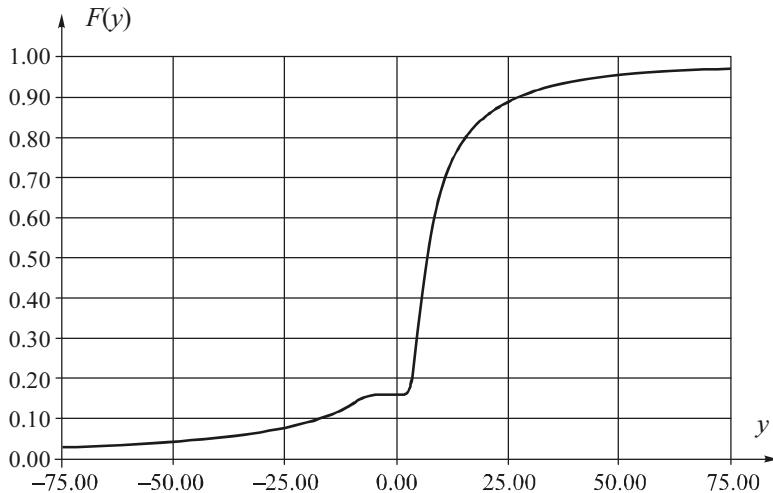


Рис. 11.5. Эмпирическое распределение  $Y = X_1/X_2$  при  $X_1 \in N(10, 1)$ ,  $X_2 \in N(1, 1)$

В [348] применение линеаризации предусматривается для закона распределения произведения случайных величин. Насколько это будет правомерно в подобном случае?

Пусть  $Y = \prod_{i=1}^k X_i$ , где  $X_i$  – взаимно некоррелированные случай-

ные величины с математическими ожиданиями  $M_i$  и дисперсиями  $D_i$ . В соответствии с (11.1) в данном случае получаем

$$Y \approx \sum_{i=1}^k X_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k M_j - (k-1) \prod_{j=1}^k M_j, \text{ математическое ожидание } E[Y] \approx \prod_{j=1}^k M_j$$

$$\text{и дисперсия } D[Y] \approx \sum_{i=1}^k D_i \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k M_j \right)^2.$$

Распределения произведений моделировались при различных законах распределения  $X_i$ . В случае принадлежности  $X_i$  стандартным нормальным законам для  $k = \overline{1, 5}$  распределения  $Y$  приведены на

рис. 11.6. Они построены по смоделированным выборкам произведений объемом 10 000. Все распределения с нулевой медианой.

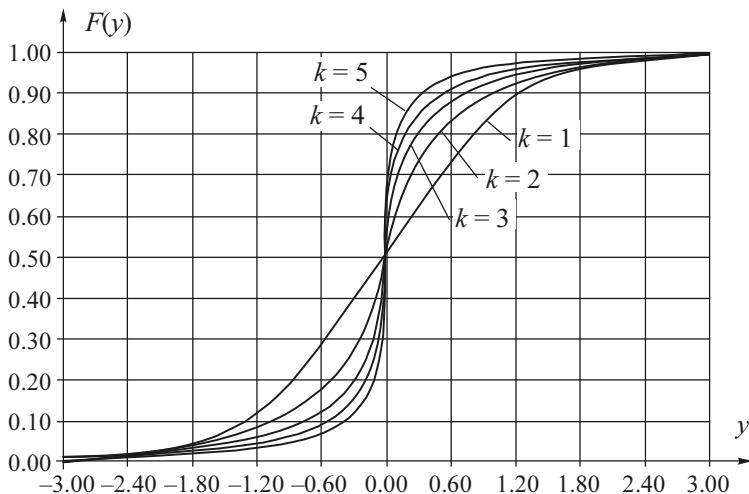


Рис. 11.6. Эмпирические распределения произведений  $k = \overline{1,5}$  стандартных нормальных величин

Эти эмпирические распределения не удается адекватно описать какой-то одной параметрической моделью закона. В то же время распределения произведений  $k = \overline{2,5}$  стандартных нормальных величин достаточно хорошо аппроксимируются смесью вида

$$\alpha \frac{\theta_3}{2\theta_2 \Gamma(1/\theta_3)} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \left( \frac{|y - \theta_1|}{\theta_2} \right)^{\theta_3} \right\} + (1 - \alpha) \frac{1}{\theta_1} \exp \left\{ \frac{y - \theta_4}{\theta_5} - \exp \left( \frac{y - \theta_4}{\theta_5} \right) \right\}. \quad (11.3)$$

Параметры соответствующих смесей приведены в табл. 11.7.

Применение линеаризации для данного случая невозможно по очевидной причине: дисперсия оказывается нулевой. В табл. 11.8 показаны реальные доверительные интервалы для  $Y$ , подчеркивающие асимметричность законов.

Таблица 11.7

**Параметры смесей вида (11.3), аппроксимирующих произведение  $k = \overline{2,5}$  нормальных стандартных случайных величин**

Параметры смеси	$X_1X_2$	$X_1X_2X_3$	$X_1X_2X_3X_4$	$X_1X_2X_3X_4X_5$
$\theta_1$	0.0	0.0	0.0	0.0
$\theta_2$	0.1891	0.0098	0.00240	0.00046
$\theta_3$	0.5894	0.3419	0.3022	0.2750
$\theta_4$	0.4158	0.3920	0.8455	0.4242
$\theta_5$	0.9040	0.8160	1.7025	1.08737
$\alpha$	0.92	0.94	0.94	0.85

Таблица 11.8

**Доверительные интервалы для произведения  $k = \overline{2,5}$  нормальных стандартных случайных величин**

$k$	90 % доверительный интервал	95 % доверительный интервал
1	-1.645; 1.645	-1.960; 1.960
2	-1.627; 1.603	-2.185; 2.167
3	-1.314; 1.356	-1.980; 2.057
4	-1.053; 1.116	-1.836; 1.934
5	-0.868; 0.749	-1.463; 1.296

На рис. 11.7 показаны эмпирические распределения аналогичных произведений случайных величин, но принадлежащих нормальному закону с параметрами сдвига и масштаба, равными единице. Распределения  $Y$  для этого случая при  $k = \overline{2,4}$  неплохо описываются смесями двух, а при  $k = 5$  – трех параметрических моделей. Различие между реальными доверительными интервалами и полученными в результате линеаризации демонстрируется в табл. 11.9.

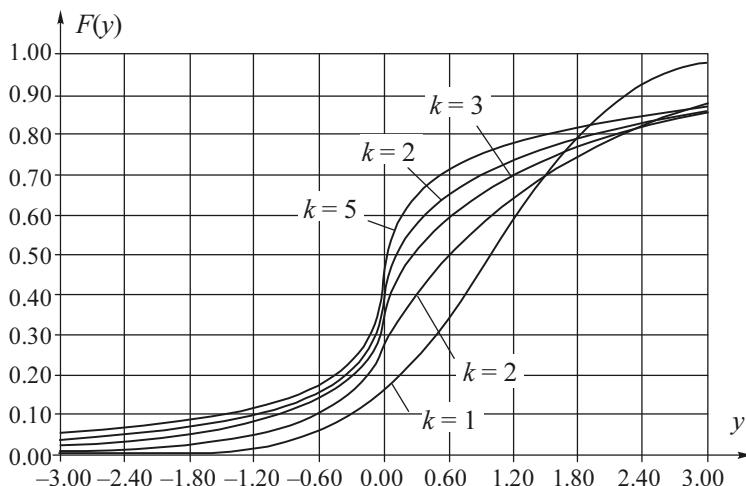


Рис. 11.7. Эмпирические распределения произведений  $k = \overline{1,5}$  нормальных величин с параметрами сдвига и масштаба, равными единице

Таблица 11.9

**Доверительные интервалы для произведения  $k = \overline{2,5}$  нормальных случайных величин с параметрами сдвига и масштаба, равными единице**

$k$	90 % доверительный интервал		95 % доверительный интервал	
	реальный	линеаризованный	реальный	линеаризованный
1	-0.645; 2.645	-0.645; 2.645	-0.960; 2.960	-0.960; 2.960
2	-1.191; 4.360	-1.326; 3.326	-1.828; 5.293	-1.772; 3.772
3	-1.870; 6.104	-1.849; 3.849	-2.850; 8.375	-2.395; 4.395
4	-2.419; 7.540	-2.290; 4.290	-4.158; 10.942	-2.920; 4.920
5	-3.157; 8.483	-2.678; 4.678	-5.620; 13.793	-3.383; 5.383

При повышении точности измерений  $X_i$  (с уменьшением  $D_i$ ) распределение  $Y = \prod_{i=1}^k X_i$  стремится к нормальному закону. Например,

при  $M_i = 1$  и  $D_i = 10^{-4}$  распределение  $Y$  хорошо согласуется с нормальным законом  $N(0.99973, 0.02232)$ , построенным по смоделированной

выборке. В этом случае линеаризация дает идентичные результаты:  $N(1, 0.02236)$ . То же самое наблюдается с ростом  $M_i$  при постоянстве  $D_i$ .

Продемонстрируем, насколько хорошие модели можно строить для произвольных функций от случайных величин. Например, для функции  $Y = \sin X_1 \cos X_2 \cdot X_3 - \sin X_4 \cos X_5 \cdot X_6$ , где  $X_1 \in N(0,1)$ ,  $X_2 \in \text{rav}(0,1)$ ,  $X_3, X_6 \in \exp(0,1)$ ,  $X_4 \in N(0,4)$ ,  $X_5 \in \text{rav}(0,2)$ , т. е. принадлежат нормальному, равномерному и экспоненциальному законам, с указанными параметрами сдвига и масштаба, очень хорошей моделью оказывается распределение с плотностью

$$f(y) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp\left\{-\left(\frac{|y-\theta_0|}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right\} \quad (11.4)$$

и оценками параметров  $\theta_0 = 0.0014$ ,  $\theta_1 = 0.4461$ ,  $\theta_2 = 0.7922$ , полученными по смоделированной выборке. О степени близости полученного эмпирического распределения к теоретическому (11.4) свидетельствуют высокие достигнутые уровни значимости по применяемым критериям согласия (при проверке сложных гипотез [304, 303]), представленные в табл. 11.10. На рис 11.8 показаны полученное в результате моделирования эмпирическое распределение  $Y$  и аппроксимирующее распределение вида (11.4). На рисунке эмпирическое и аппроксимирующее распределения визуально практически совпадают.

Таблица 1.10

**Результаты проверки согласия с распределением (11.4) выборки значений функции  $Y = \sin X_1 \cos X_2 \cdot X_3 - \sin X_4 \cos X_5 \cdot X_6$**

Критерий	Значение статистики	Достигнутый уровень значимости
$\chi^2$ Пирсона при $k = 15$	15.064	0.1796
Колмогорова	0.4796	0.8847
$\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова	0.0423	0.7028
$\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга	0.3647	0.6035

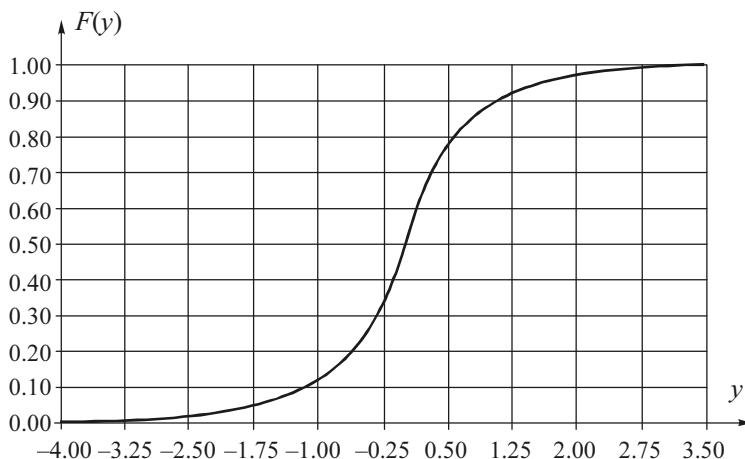


Рис. 11.8. Эмпирическое распределение  $Y = \sin X_1 \cos X_2 \cdot X_3 - \sin X_4 \cos X_5 \cdot X_6$  и аппроксимирующее распределение (11.4)

Рассмотрим несколько примеров, демонстрирующих возможности моделирования распределений функций от систем случайных величин.

**Пример 6.** Моделируемое выражение  $x[1][1] + x[1][2]$  (см. рис. 11.2), т. е. одномерная функция, имеет вид  $y = x_1 + x_2$ , где вектор  $\bar{x} = (x_1, x_2)^T$  принадлежит двумерному нормальному закону с вектором математических ожиданий  $\Theta_0 = [2, 1]^T$  и ковариационной матрицей  $\Theta_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ . В данном случае  $y$  вследствие независимости  $x_1$  и

$x_2$  подчиняется нормальному закону  $N(3, \sqrt{13})$ . Как видно из табл. 11.11, наблюдается хорошее согласие эмпирического распределения моделируемого выражения с известным теоретическим.

**Пример 7.** Моделируемое выражение  $x[1]$ , т. е. вектор  $\bar{y} = \bar{x}$ , где вектор  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  принадлежитциальному закону с вектором математических ожиданий  $\Theta_0 = [-1, 0.5, 1]^T$  и ковариационной матри-

цей  $\Theta_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ . Результаты проверки гипотез о равенстве век-

тора математических ожиданий и ковариационной матрицы заданным с использованием классических критериев [243, 245] (см. раздел 12.3.1) приведены в табл. 11.12.

Таблица 11.11

**Результаты проверки согласия с распределением  $N(3, \sqrt{13})$  выборки значений функции  $y = x_1 + x_2$**

Критерий	Значение статистики	Достигнутый уровень значимости
$\chi^2$ Пирсона при $k = 15$	8.9504	0.8342
Колмогорова	0.8664	0.4406
$\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова	0.1467	0.3997
$\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга	0.7589	0.5116

Таблица 11.12

**Результаты проверки гипотез о равенстве вектора математических ожиданий и ковариационной матрицы заданным**

Критерий	Значение статистики	Достигнутый уровень значимости
$X^2$	3.1511	0.2069
$T^2$	1.0606	0.3463
$L_1$	3.6665	0.2998
$L_2$	6.8176	0.2346

**Пример 8.** Моделируемое выражение  $x[1][3] + x[2]*x[3]$ , т. е. функция от случайных величин, имеет вид  $y = x_{13} + \bar{x}_2^T \bar{x}_3$ , где  $x_{13}$  – третья компонента вектора  $\bar{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})^T$ , принадлежащего нормальному закону с вектором математических ожиданий  $\Theta_0 = [-1, 0.5, 1]^T$  и ковариационной матрицей  $\Theta_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ , а векторы  $\bar{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24})^T$  и  $\bar{x}_3 = (x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34})^T$  при-

надлежат нормальным законам с вектором математических ожиданий  $\Theta_0 = [1, 0, 0, -1]^T$  и ковариационной матрицей

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0.1 & 0.3 & 0.9 \\ 0.1 & 1 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 3 & 0 \\ 0.9 & 0.2 & 0 & 5.5 \end{bmatrix}. \text{ В данном случае результирующее распределение } y \text{ будет одномерным. Наиболее хорошо эмпирическое распределение } y \text{ описывается } L\text{-распределением (обобщенным логистическим законом) с плотностью}$$

$$f(x) = \frac{1}{B(\theta_0, \theta_1)} \frac{e^{\theta_0(x-\theta_3)/\theta_2}}{\left(1 + e^{(x-\theta_3)/\theta_2}\right)^{\theta_0+\theta_1}}$$

и параметрами формы  $\theta_0 = 0.4440$ ,  $\theta_1 = 0.3570$ , масштаба  $\theta_2 = 2.2775$ , сдвига  $\theta_3 = 1.4673$ . На рис. 11.9 приведены эмпирическое распределение  $y$  и  $L$ -распределение с указанными параметрами.

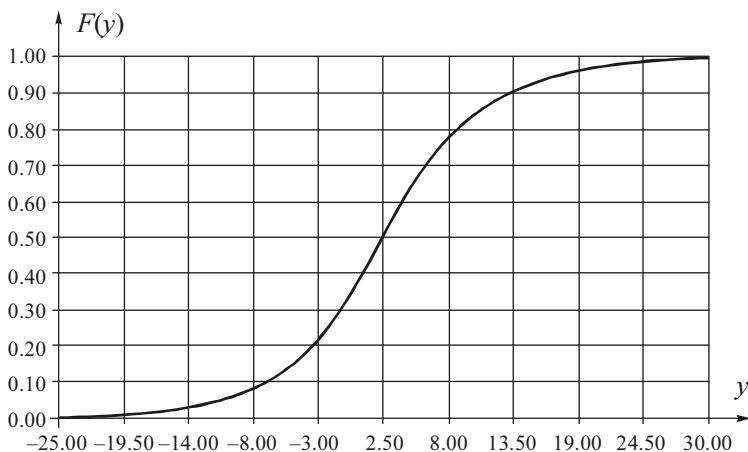


Рис. 11.9. Эмпирическое распределение  $y = x_{13} + \bar{x}_2^T \bar{x}_3$  и  $L$ -распределение с параметрами  $\theta_0 = 0.4440$ ,  $\theta_1 = 0.3570$ ,  $\theta_2 = 2.2775$ ,  $\theta_3 = 1.4673$

Таким образом, разработанное программное обеспечение позволяет достаточно точно моделировать различные функции от независимых случайных величин и от многомерных случайных величин.

## 11.4. Выводы

Методы статистического моделирования в совокупности с программным обеспечением, позволяющим строить приближенные математические модели для полученных эмпирических распределений (в том числе в виде смесей различных параметрических законов), представляют собой эффективный инструмент для изучения законов распределения функций от случайных величин, для исследования вероятностных закономерностей, проявляющихся в задачах метрологии и при реализации информационно-измерительных систем.

Распределения функций от случайных величин  $X_i$  зависят не только от вида законов распределений  $X_i$ , но и от значений параметров этих законов. Используя методы статистического моделирования для исследования закона распределения  $Y$ , можно либо построить приближенную модель, аппроксимирующую этот закон в конкретном случае, либо выяснить условия, которым должны соответствовать методики проведения измерений  $X_i$ , обеспечивающие обоснованность применения линеаризации.

Использование статистического моделирования и специализированного программного обеспечения [253] позволяет строить хорошие приближенные математические модели законов распределения функций случайных величин (в том числе в форме смесей параметрических моделей законов), когда этот закон не удается найти аналитически.

---

---

## **12. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТАТИСТИК МНОГОМЕРНОГО АНАЛИЗА**

---

---

### **12.1. Введение**

**В** различных приложениях статистического анализа многомерных случайных величин важную роль играют задачи корреляционного анализа [334]. В процессе решения этих задач выявляются наличие и характер взаимосвязи величин, взаимозависимости величин при устранении влияния совокупности других или зависимости одной случайной величины от группы величин. Вычисляются оценки коэффициентов и матриц парной, частной и множественной корреляции, проверяются различные статистические гипотезы относительно параметров многомерного распределения и коэффициентов корреляции. По результатам корреляционного анализа может делаться вывод о наличии и характере функциональной зависимости или предпочтительности для описания исследуемого объекта регрессионной модели того или иного вида.

В основе существующего аппарата корреляционного анализа лежит предположение о принадлежности наблюдаемого случайного вектора многомерному нормальному закону. Именно на базе этого предположения получены предельные распределения статистик, используемых в критериях многомерного анализа [4, 103, 152, 204, 205, 203].

На практике исследователь далеко не всегда имеет дело с нормальным законом [103, 278, 295]. Например, существует достаточно мало экономических процессов, относительно которых можно утверждать, что их отклонения распределены по нормальному закону. Как правило,

многие исследователи вообще не придают значения проверке этого важного предположения корреляционного анализа либо вынуждены «в силу обстоятельств» работать только с многомерными величинами, имеющими нормальное распределение, как это сделано в работах [149, 315].

Предположение о нормальности существенно сужает область применения корреляционного анализа в приложениях. Естественно, возникает вопрос о справедливости выводов, получаемых на основании результатов корреляционного анализа при нарушении основного предположения. В доступной литературе ответ на данный вопрос найден не был, хотя можно найти указания на рабочесть некоторых критериев, применяемых в многомерном анализе.

Целью настоящих исследований явилось стремление разобраться, что будет происходить с распределениями различных статистик корреляционного анализа, если наблюдаемый закон будет отличаться от многомерного нормального.

В дальнейшем используются следующие обозначения:

$\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$  – выборка из  $n$  наблюдений  $m$ -мерного случайного вектора;

$\bar{M} = [\bar{M}_i]_{i=1}^m$  – математическое ожидание случайного вектора  $\bar{X}$ ;

$\Sigma = [\sigma_{ij}]_{i,j=1}^m$  – ковариационная матрица случайного вектора  $\bar{X}$ ;

$r_{ij}$  – парный коэффициент корреляции между компонентами  $X_i$  и  $X_j$  случайного вектора  $\bar{X}$ ;

$r_{ij \cdot l+1, \dots, m}$  – частный коэффициент корреляции между компонентами  $X_i$  и  $X_j$  случайного вектора  $\bar{X}$  при исключении влияния компонент  $X_{l+1}, \dots, X_m$ ;

$r_{i \cdot l+1, \dots, m}$  – множественный коэффициент корреляции между  $X_i$  и множеством компонент  $X_{l+1}, \dots, X_m$  случайного вектора  $\bar{X}$ ;

$\rho_{ij}^2$  – корреляционное отношение компоненты  $X_i$  по  $X_j$  случайного вектора  $\bar{X}$ ;

$\hat{M}$  и  $\hat{\Sigma}$  – несмешенные оценки максимального правдоподобия (ОМП) математического ожидания и ковариационной матрицы, которые вычисляются по следующим формулам:

$$\hat{M} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i, \quad \hat{\Sigma} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{X}_i - \hat{M})(\bar{X}_i - \hat{M})^T;$$

$\hat{r}_{ij}$ ,  $\hat{r}_{ij \cdot l+1, \dots, m}$ ,  $\hat{r}_{i \cdot l+1, \dots, m}$  и  $\hat{\rho}_{ij}^2$  – ОМП соответствующих величин, вычисляемых по формулам, которые будут приведены ниже.

## 12.2. Моделирование многомерных псевдослучайных векторов

Для исследования распределений статистик многомерных случайных величин необходимо иметь возможность моделировать псевдослучайные векторы, подчиняющиеся соответствующим законом. Вообще говоря, в литературе можно найти очень ограниченное множество параметрических моделей, используемых для описания реальных многомерных случайных величин. Примерами являются многомерный нормальный закон, многомерное распределение Стьюдента, многомерное распределение Коши.

Основной подход, применяемый при моделировании псевдослучайных векторов с заданными вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей, опирается на использование одномерного датчика, генерирующего псевдослучайные величины в соответствии со «стандартным» одномерным законом (с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией).

Наиболее часто используемым и общим методом формирования одномерных псевдослучайных величин является метод обратных функций. В этом методе случайная величина  $X$ , подчиняющаяся закону с функцией распределения  $F(x)$ , получается в соответствии с соотношением  $X = F^{-1}(Y)$ , где  $F^{-1}(\cdot)$  – функция, обратная к  $F(\cdot)$ , а  $Y$  – случайная величина, равномерно распределенная на интервале  $(0, 1)$ .

Функция  $F^{-1}(Y)$  во многих случаях не выражается явно. В такой ситуации иногда предлагаются упрощенные процедуры. Например, для стандартного нормального закона пары псевдослучайных чисел, распределенных по стандартному нормальному закону с параметрами  $(0, 1)$ , генерируется по формулам

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{-2 \ln Y_1} \sin(2\pi Y_2), \\ Z_2 &= \sqrt{-2 \ln Y_1} \cos(2\pi Y_2), \end{aligned} \quad (12.1)$$

а для нормального распределения с плотностью

$$f(x; \theta_0, \theta_1) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \theta_0)^2}{2\theta_1^2}\right), \quad (12.2)$$

математическим ожиданием  $E[x] = \theta_0$  и дисперсией  $D[x] = \theta_1^2$  пара случайных величин получается преобразованием стандартной величины

$$X = \theta_0 + \theta_1 Z. \quad (12.3)$$

Для семейства распределений, перспективного для построения многомерных законов, в той или иной степени отличающихся от нормального, с функцией плотности

$$f(x; \theta_0, \theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp\left\{-\left(\frac{|x - \theta_0|}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right\}, \quad (12.4)$$

с математическим ожиданием и дисперсией

$$E[x] = \theta_0, \quad D[x] = \theta_1^2 \frac{\Gamma(3/\theta_2)}{\Gamma(1/\theta_2)}$$

функция  $F^{-1}(Y)$  также не выражается явно.

### 12.2.1. Моделирование псевдослучайных нормальных векторов

Многомерное нормальное распределение случайного вектора  $\bar{X} = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T$  размерности  $m$  полностью определяется вектором математических ожиданий  $\bar{M} = [M_1, M_2, \dots, M_m]^T$  и ковариационной матрицей  $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}$ ,  $i, j = \overline{1, m}$ .

Функция плотности многомерного нормального закона имеет вид

$$f(\bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\bar{X} - \bar{M})^T \Sigma^{-1} (\bar{X} - \bar{M})\right). \quad (12.5)$$

Хорошо зарекомендовавший себя алгоритм генерирования псевдослучайных нормальных векторов был подробно изложен в [196]. Пусть мы имеем совокупность случайных величин  $\{Z_i\}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , где  $Z_i$  подчиняется стандартному нормальному закону с параметрами  $(0, 1)$ . Тогда вектор  $\bar{X}$ , распределенный по многомерномуциальному закону с параметрами  $\bar{M}$  и  $\Sigma$ , получается через линейное преобразование вида

$$\bar{X} = A\bar{Z} + \bar{M}. \quad (12.6)$$

В (12.6) обычно полагают, что  $A$  является нижней треугольной матрицей

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix},$$

тогда коэффициенты  $a_{ij}$  легко определяются рекуррентной процедурой:

$$a_{ij} = \frac{\sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} a_{jk}}{\sqrt{\sigma_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}^2}}, \quad 1 \leq j \leq i \leq m, \quad (12.7)$$

через соотношение (12.6) и элементы ковариационной матрицы

$$\sigma_{ij} = E[(X_i - M_i)(X_j - M_j)].$$

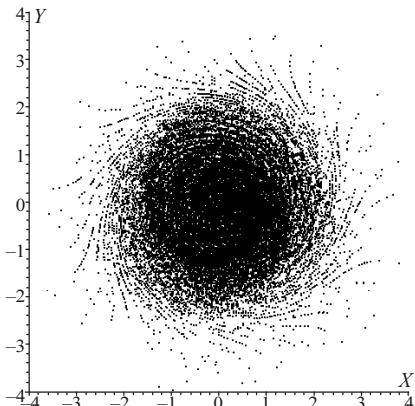


Рис. 12.1. Выборка двумерных случайных величин, смоделированная с использованием формул (12.1)

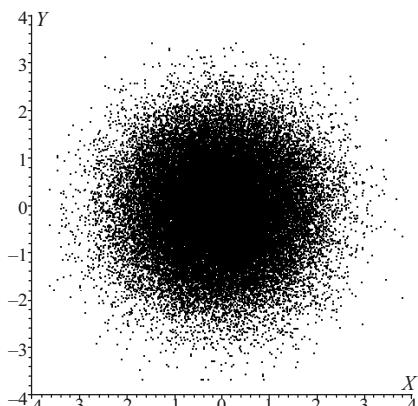


Рис. 12.2. Выборка двумерных случайных величин, смоделированная с использованием метода обратных функций

Исследование процедуры моделирования показало, что при моделировании больших объемов многомерных случайных векторов с использованием формул (12.1) для формирования совокупности  $\{Z_i\}, i = \overline{1, m}$  результаты оказываются неудовлетворительными. Например, на рис. 12.1 явно видно появление регулярных структур уже в двумерном случае, что может приводить к искажению результатов исследований, опирающихся на такую процедуру моделирования. Если же для моделирования одномерных стандартных нормальных величин использовать метод обратных функций, как и в случае семейства распределений (12.4), то появление регулярных структур не наблюдается (рис. 12.2). Поэтому целесообразней моделировать одномерные выборки нормальных случайных величин методом обратных функций.

## 12.2.2. Моделирование многомерных величин по законам, отличным от нормального

Процедуру моделирования многомерных величин, распределенных по законам, отличным от нормального, с некоторыми математическим ожиданием и ковариационной матрицей предложено [246] реализовать аналогично описанному выше алгоритму (12.6), (12.7). Для этого определим в качестве параметров моделирования вектор  $\bar{\Theta}_0$

и матрицу  $\Theta_1$ , а совокупность величин  $\{Z_i\}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , будем формировать уже не по стандартному нормальному закону, а на основе некоторого одномерного распределения с нулевым математическим ожиданием ( $E[Z_i] = 0$ ) и единичной дисперсией ( $D[Z_i] = 1$ ). Элементы матрицы  $A'$  вычисляются по приведенной ниже формуле, которая идентична соотношению (12.7). При этом вместо элементов ковариационной матрицы  $\sigma_{ij}$  используются элементы матрицы  $\Theta_1 = \|\theta_{ij}^1\|$ :

$$a'_{ij} = \frac{\theta_{ij}^1 - \sum_{k=1}^{j-1} a'_{ik} a'_{jk}}{\sqrt{\theta_{jj}^1 - \sum_{k=1}^{j-1} a'^2_{jk}}}, \quad 1 \leq j \leq i \leq m. \quad (12.8)$$

Псевдослучайный вектор  $\bar{X}$  получается преобразованием вида

$$\bar{X} = A' \bar{Z} + \bar{\Theta}_0. \quad (12.9)$$

В результате на выходе процедуры мы будем иметь некоторый многомерный закон, отличный от нормального, но, вообще говоря, с неопределенными математическим ожиданием и ковариационной матрицей.

Определим математическое ожидание моделируемого случайного вектора  $\bar{X}$ . С использованием (12.9) вектор математического ожидания имеет вид

$$\bar{M} = E[\bar{X}] = E[A' \bar{Z} + \bar{\Theta}_0]. \quad (12.10)$$

Элементы вектора  $\bar{M}$ , если  $\bar{\Theta}_0 = [\theta_1^0, \dots, \theta_m^0]^T$ , представимы в виде

$$M_i = E \left[ \sum_{k=1}^i a'_{ik} Z_k + \theta_i^0 \right] = \theta_i^0 + \sum_{k=1}^i a'_{ik} E[Z_k], \quad (12.11)$$

а если учесть, что  $E[Z_1] = \dots = E[Z_m] = 0$ , то получим

$$\bar{M} = \bar{\Theta}_0. \quad (12.12)$$

Найдем ковариационную матрицу моделируемого многомерного закона. По определению ковариационная матрица находится как

$$\Sigma = E \left[ (\bar{X} - \bar{M})(\bar{X} - \bar{M})^T \right]. \quad (12.13)$$

Если подставить в (12.13) представление (12.9) вектора  $\bar{X}$  и учесть равенство (12.12), то получим

$$\Sigma = E \left[ (A' \bar{Z})(A' \bar{Z})^T \right], \quad (12.14)$$

или для элементов матрицы

$$\sigma_{ij} = E \left[ \left( \sum_{k=1}^m a'_{ik} Z_k \right) \left( \sum_{k=1}^m a'_{jk} Z_k \right) \right]. \quad (12.15)$$

Так как  $\{Z_i\}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , представляет собой совокупность моделируемых одинаково распределенных независимых случайных величин, то  $\text{cov}(Z_i, Z_j) = E[Z_i Z_j] = 0$ ,  $i \neq j$ . И так как  $D[Z_1] = \dots = D[Z_m] = 1$ , то (12.15) принимает вид

$$\sigma_{ij} = E \left[ \sum_{k=1}^m a'_{ik} a'_{jk} Z_k^2 \right] = \sum_{k=1}^m a'_{ik} a'_{jk}, \quad (12.16)$$

а если учесть свойство  $AA^T = \Theta_1$  разложения (12.8), получим окончательный результат

$$\Sigma = \Theta_1. \quad (12.17)$$

Таким образом, соотношения (12.12) и (12.17) показывают, что у моделируемого случайного вектора математическое ожидание равно вектору параметров  $\bar{\Theta}_0$ , а ковариационная матрица – матрице параметров  $\Theta_1$ .

Для моделирования различных совокупностей  $\{Z_i\}, i = \overline{1, m}$ , удобно использовать семейство распределений с плотностью (12.4) и параметром формы  $\theta_2$ , так как оно охватывает целый класс симметричных распределений. Частными случаями данного закона являются распределение Лапласа (при  $\theta_2 = 1$ ), нормальное ( $\theta_2 = 2$ ), а предельными – распределение Коши ( $\theta_2 \rightarrow 0$ ) и равномерное ( $\theta_2 \rightarrow +\infty$ ). Меняя параметр формы  $\theta_2$ , мы можем задавать непрерывное «удаление» моделируемого (наблюдаемого) многомерного закона от нормального, делая его более плосковершинным по сравнению с нормальным при  $\theta_2 > 2$  или более островершинным при  $0 < \theta_2 < 2$ . При  $\theta_2 = 2$  будут формироваться псевдослучайные векторы  $\bar{X}$  в соответствии с нормальным законом.

Недостатком предложенной процедуры является то, что она не позволяет нам моделировать многомерный закон с некоторой произвольной функцией распределения, который находится на «заданном» расстоянии (определяемом в смысле некоторой меры) от многомерного нормального закона. Однако при помощи этой процедуры мы можем построить датчик, генерирующий псевдослучайные векторы по закону, отличающемуся от нормального, с заданными математическим ожиданием и ковариационной матрицей.

Если для моделирования  $\{Z_i\}, i = \overline{1, m}$ , использовать семейство распределений (12.4), то с учетом выражения для дисперсии можно получить выражение для параметра масштаба

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{\Gamma(1/\theta_2)}{\Gamma(3/\theta_2)}}, \quad (12.18)$$

при котором  $D[Z_i] = 1$ .

В качестве примера покажем возможность моделировать многомерные величины с заданными вектором математических ожиданий  $\bar{M}$  и ковариационной матрицей  $\Sigma$ , сравнивая оценки максимального правдоподобия  $\hat{M}$  и  $\hat{\Sigma}$  по моделируемым выборкам многомерных величин достаточно большого объема  $N = 100\,000$  для различных значений параметра формы  $\theta_2$ . Выберем начальные параметры равными

$$\bar{\Theta}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \Theta_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2.5 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2.5 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Представленные ниже результаты приведены с округлением до трех десятичных знаков после запятой.

При  $\theta_2 = 1$  величины  $Z_i$  моделировались с параметрами распределения (12.4)  $\theta_0 = 0$  и  $\theta_1 = 1/\sqrt{2}$ . Полученные оценки вектора математических ожиданий и ковариационной матрицы:

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 0.999 \\ 2.008 \\ 2.997 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 5.002 & 1.013 & 2.503 \\ 1.013 & 6.036 & 1.077 \\ 2.503 & 1.007 & 4.969 \end{bmatrix}.$$

При  $\theta_2 = 2$  величины  $Z_i$  моделировались с параметрами (12.4)  $\theta_0 = 0$  и  $\theta_1 = \sqrt{2}$ . Соответствующие оценки оказались равными:

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 0.999 \\ 2.001 \\ 2.999 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4.998 & 1.002 & 2.499 \\ 1.002 & 5.998 & 1.004 \\ 2.499 & 1.004 & 4.999 \end{bmatrix}.$$

При  $\theta_2 = 5$  значения  $Z_i$  моделировались с  $\theta_0 = 0$  и  $\theta_1 = 1.7557$ , соответствующие оценки:

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.995 \\ 3.011 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 5.024 & 0.993 & 2.511 \\ 0.993 & 5.991 & 0.994 \\ 2.511 & 0.994 & 4.999 \end{bmatrix}.$$

Во всех случаях полученные оценки вектора математических ожиданий и ковариационных матриц дают основание говорить о выполнении равенств:  $\bar{M} = \bar{\Theta}_0$  и  $\Sigma = \Theta_1$ . Таким образом, действительно каждый раз решалась задача по моделированию закона с заданными математическим ожиданием и ковариационной матрицей. Вообще говоря, реализации именно такой процедуры моделирования псевдослучайных векторов достаточно для целей настоящего исследования.

На рис. 12.3 приведены полученные в результате моделирования функции плотностей двумерных законов с нулевым вектором математических ожиданий и единичной ковариационной матрицей при использовании в процедуре моделирования законов семейства (12.4) при значениях  $\theta_2 = 1$  (слева),  $\theta_2 = 2$  (плотность нормального закона, в центре),  $\theta_2 = 10$  (справа). Как видим, в первом случае наблюдается острокуполинное распределение, а в третьем случае – плосковершинное. Полученное нормальное распределение существенно отличается от распределений, моделируемых с  $\theta_2 \neq 2$ .

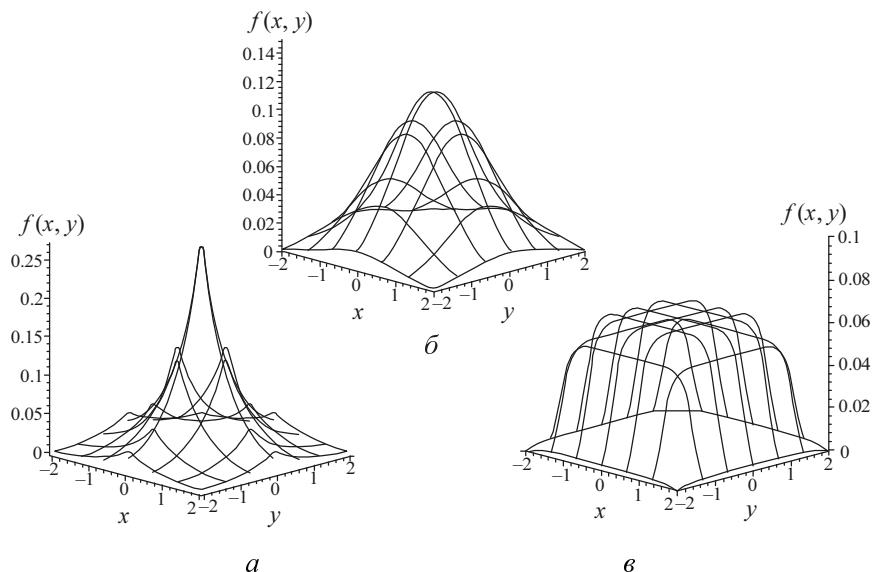


Рис. 12.3. Смоделированные плотности двумерных законов, построенных при различных значениях параметра формы:

$$a - \theta_2 = 1; \quad b - \theta_2 = 2; \quad c - \theta_2 = 10$$

В процессе исследования реализованной процедуры моделирования многомерных псевдослучайных величин исследовались и маргинальные распределения моделируемых многомерных векторов. Исследования показали, что маргинальные распределения многомерного закона, моделируемого с использованием выбранного семейства распределений (12.4) с параметром формы 2 (многомерный нормальный закон), хорошо согласуются с одномерным нормальным законом распределения, а маргинальные функции законов, получаемых при моделировании с параметром  $\theta_2$ , отличным от 2, существенно отличаются от нормального закона, но при этом хорошо согласуются с одномерным законом из семейства распределений (12.4).

### 12.2.3. Моделирование псевдослучайных векторов, подчиняющихся многомерному распределению Стьюдента

Случайный вектор  $\bar{X}$  имеет  $m$ -мерное распределение Стьюдента с  $p$  степенями свободы, вектором сдвига  $\bar{M}$  и матрицей точности  $T^{-1}$ , если функция плотности имеет вид

$$f(\bar{X}) = \frac{\Gamma(p+m/2)}{\Gamma(p/2)\sqrt{(p\pi)^m |T|}} \times \\ \times \left[ 1 + \frac{1}{p} (\bar{X} - \bar{M})^T T^{-1} (\bar{X} - \bar{M}) \right]^{-(p+m)/2}, \quad (12.19)$$

где  $T$  – симметричная положительно определенная матрица.

Согласно [148] вектор математических ожиданий и ковариационная матрица многомерного распределения Стьюдента равны:

$$E[\bar{X}] = \bar{M}, \quad D[\bar{X}] = \Sigma = \frac{p}{p-2} T, \quad p > 2.$$

На рис. 12.4 показаны функции плотности двумерного распределения Стьюдента для степеней свободы  $p=3$ ,  $p=15$  и плотность

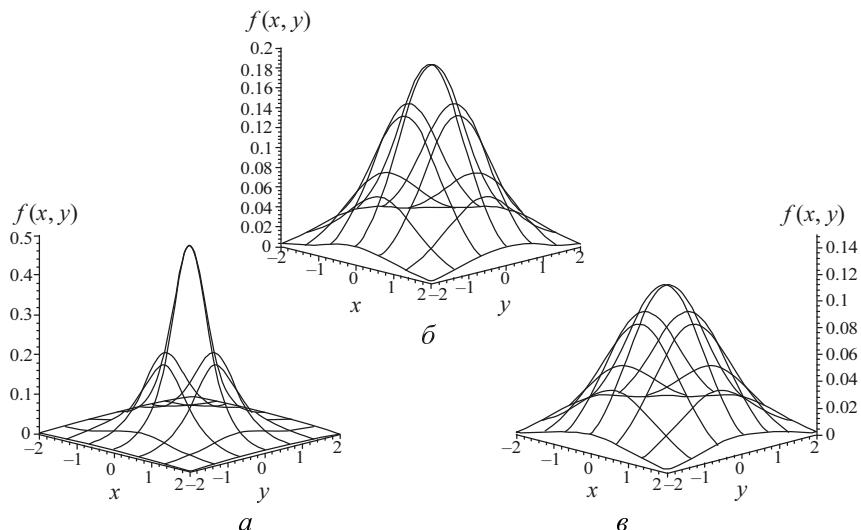


Рис. 12.4. Плотности двумерного закона Стьюдента, построенные при степенях свободы:

$$a - p = 3; \quad b - p = 15; \quad c - \text{нормальный закон}$$

двумерного нормального закона при равных значениях вектора математического ожидания и ковариационной матрицы. С ростом числа степеней свободы  $p \rightarrow +\infty$  распределение Стьюдента стремится к нормальному распределению. Например, для значений  $p \geq 200$  нормированная разность между двумерными функциями распределения Стьюдента и нормального не превышает по модулю 0.01.

В работе [148] приведен алгоритм моделирования псевдослучайных векторов, подчиняющихся многомерному распределению Стьюдента. Пусть вектор  $\bar{Z}$  имеет многомерное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и невырожденной ковариационной матрицей  $\Sigma = T$ , а  $\xi$  имеет  $\chi^2$ -распределение с  $n$  степенями свободы, тогда вектор  $\bar{X}$ , определенный как

$$\bar{X} = \sqrt{\frac{n}{\xi}} \bar{Z} + \bar{M}, \quad (12.20)$$

имеет  $m$ -мерное распределение Стьюдента с  $p$  степенями свободы, вектором сдвига  $\bar{M}$  и матрицей точности  $T^{-1}$ .

Используя формулу (12.20), мы можем генерировать псевдослучайные векторы, подчиняющиеся многомерному распределению Стьюдента с заданными параметрами: числом степеней свободы  $p$ , вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей.

Описанные процедуры моделирования псевдослучайных векторов позволяют быстро получать выборки большого объема с любыми математическим ожиданием и ковариационной матрицей.

#### 12.2.4. Моделирование функциональной линейной зависимости между $X_i$ и $X_j$

Для исследования возможности выявления характера зависимости между компонентами случайного вектора необходимо моделировать псевдослучайные векторы с заданным видом зависимости, например линейной. Рассмотрим двумерный случай, тогда вектор математических ожиданий  $\bar{M}$  и ковариационная матрица  $\Sigma$  имеют вид

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}.$$

Вектор  $\bar{X}$ , распределенный по многомерному нормальному закону с параметрами  $\bar{M}$  и  $\Sigma$ , получается через линейное преобразование вида (12.6).

Коэффициенты матрицы  $A$  вычисляются по формуле (12.7). В двумерном случае матрица  $A$  имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 \\ \sigma_{12} / \sqrt{\sigma_{11}} & \sqrt{\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 / \sigma_{11}} \end{bmatrix}. \quad (12.21)$$

Подставляя матрицу  $A$  в выражение (12.6), получим два равенства:

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}Z_1 + M_1 = \sqrt{\sigma_{11}} \cdot Z_1 + M_1, \\ X_2 &= a_{12}Z_1 + a_{22}Z_2 + M_2 = \sigma_{12} / \sqrt{\sigma_{11}} \cdot Z_1 + \\ &\quad + \sqrt{\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 / \sigma_{11}} \cdot Z_2 + M_2, \end{aligned} \quad (12.22)$$

где  $Z_i$  распределены по стандартномуциальному закону.

Если приравнять в (12.22)  $M_2 = c_1 M_1 + c_2$ ,  $\sigma_{12} = c_1 \sigma_{11}$  и обозначить  $\sigma_{er} = \sqrt{\sigma_{22} - c_1^2 \sigma_{11}}$ , то получим линейную зависимость  $X_2$  от  $X_1$  вида

$$X_2 = c_1 X_1 + c_2 + X_{er}, \quad (12.23)$$

где случайная величина  $X_1$  имеет нормальное распределение  $N(M_1, \sigma_{11})$ ,  $X_{er}$  распределена как  $N(0, \sigma_{er})$ , а  $c_1$  и  $c_2$  – некоторые константы. Данная линейная зависимость полностью определяется своими параметрами  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $M_1$ ,  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{er}$ .

Таким образом, если необходимо смоделировать двумерную выборку с линейной зависимостью  $X_2$  от  $X_1$  вида (12.23), то потребуется задать следующие вектор математических ожиданий и ковариационную матрицу:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ c_1 M_1 + c_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & c_1 \sigma_{11} \\ c_1 \sigma_{11} & c_1^2 \sigma_{11} + \sigma_{er} \end{bmatrix}. \quad (12.24)$$

## 12.3. Исследование критериев проверки гипотез о векторе математических ожиданий и ковариационной матрице

### 12.3.1. Классические критерии проверки гипотез о векторе математических ожиданий и ковариационной матрице

Критерии проверки гипотез о векторе математических ожиданий и ковариационной матрице достаточно часто используются в различных приложениях. При этом основной предпосылкой является принадлежность случайного вектора многомерному нормальному закону.

К задаче проверки гипотезы вида  $H_0: \bar{M} = \bar{M}_0$  прибегают, например, когда на основании наблюдений некоторого технологического процесса желают убедиться, что эти показатели равны номинальному значению  $\bar{M}_0$ , т. е. процесс протекает normally, а отклонения

наблюдаемых значений от номинальных объясняются лишь ошибками наблюдений (измерений). При решении этой задачи возможны две ситуации: ковариационная матрица  $\Sigma$  может быть известна из ранее проводимых экспериментов или неизвестна, тогда в процессе вычислений для нее будет построена оценка.

В случае известной ковариационной матрицы  $\Sigma$  вычисляется статистика

$$X_m^2 = n \left( \hat{\bar{M}} - \bar{M}_0 \right)^T \Sigma^{-1} \left( \hat{\bar{M}} - \bar{M}_0 \right), \quad (12.25)$$

где  $n$  – объем выборки. Распределение статистики  $G(X_m^2 | H_0)$  при справедливой гипотезе  $H_0$  и принадлежности случайного вектора многомерному нормальному закону является  $\chi^2$ -распределением с числом степеней свободы  $m$  ( $m$ -размерность случайного вектора) [152].

При неизвестной ковариационной матрице  $\Sigma$  используется статистика

$$T^2 = \frac{n(n-m)}{m(n-1)} \left( \hat{\bar{M}} - \bar{M}_0 \right)^T \hat{\Sigma}^{-1} \left( \hat{\bar{M}} - \bar{M}_0 \right). \quad (12.26)$$

При тех же предположениях распределение статистики  $G(T^2 | H_0)$  представляет собой  $F_{m,n-m}$ -распределение Фишера с числом степеней свободы  $m$  и  $n-m$  [152].

При проверке гипотезы о ковариационной матрице  $H_0: \Sigma = \Sigma_0$ , где  $\Sigma_0$  – номинальное значение ковариационной матрицы, а математическое ожидание  $\bar{M}_0$  неизвестно, вычисляется статистика

$$L_1 = -2 \ln \lambda_1 = mn(\ln n - 1) - n \ln \left| B \Sigma_0^{-1} \right| + \text{tr} \left( B \Sigma_0^{-1} \right), \quad (12.27)$$

где

$$B = \sum_{i=1}^n \left( \bar{X}_i - \hat{\bar{M}} \right) \left( \bar{X}_i - \hat{\bar{M}} \right)^T.$$

При справедливости гипотезы  $H_0$  данная статистика подчиняется  $\chi^2$ -распределению с числом степеней свободы  $m(m+1)/2$  [152].

Если одновременно проверяется гипотеза и о векторе математических ожиданий, т. е. проверяемая гипотеза имеет вид  $H_0: \Sigma = \Sigma_0, \bar{M} = \bar{M}_0$ , то используется статистика

$$\begin{aligned} L_2 = -2 \ln \lambda_2 &= mn(\ln n - 1) - n \ln |B\Sigma_0^{-1}| + \text{tr}(B\Sigma_0^{-1}) + \\ &+ n(\hat{\bar{M}} - \bar{M}_0)^T \Sigma_0^{-1} (\hat{\bar{M}} - \bar{M}_0). \end{aligned} \quad (12.28)$$

При справедливой гипотезе  $H_0$  распределение статистики  $G(L_2 | H_0)$  является  $\chi^2$ -распределением с числом степеней свободы  $m(m+1)/2 + m$  [152].

Подчеркнем, что перечисленные статистики подчиняются указанным распределениям лишь в случае принадлежности наблюдений многомерному нормальному закону. Как изменятся предельные распределения статистик, если наблюдаемый многомерный закон отличается от нормального, заранее сказать нельзя.

Ниже приведены результаты исследований методами компьютерного моделирования распределений статистик (12.25) – (12.28) при случайных величинах, подчиняющихся различным многомерным законам распределения [243, 245, 248, 244].

### **12.3.2. Исследование распределений статистик критериев в случае принадлежности наблюдений нормальному закону**

На первом этапе методами статистического моделирования исследовались распределения статистик корреляционного анализа при условии, что наблюдения принадлежат многомерномуциальному закону. Близость получаемых эмпирических распределений статистик известным (в данном случае) предельным законам, является основанием, подтверждающим корректность применения используемой методики при анализе достоверности результатов последующих исследований.

Моделирование и исследование эмпирических распределений статистик классического корреляционного анализа показали, что они хорошо согласуются с соответствующими теоретическими предельными распределениями.

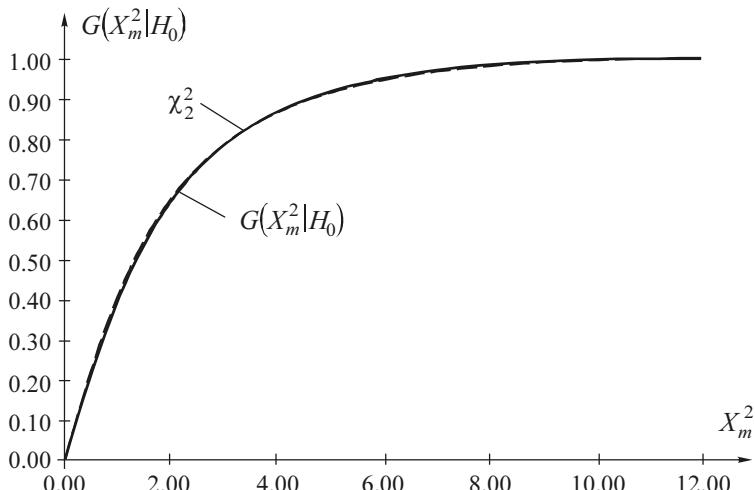


Рис. 12.5. Эмпирическая и теоретическая функции распределения статистики  $X_m^2$  при проверке гипотезы  $H_0 : M = M_0$  (ковариационная матрица известна):  $m = 2$ ,  $n = 30$

Например, на рис. 12.5 представлено полученное в результате моделирования эмпирическое распределение статистики  $X_m^2$  (12.25) и соответствующее предельное  $\chi_m^2$ -распределение при проверке гипотезы  $H_0: M = M_0$  (ковариационная матрица  $\Sigma_0$  известна) для размерности  $m = 2$  и объеме выборки  $n = 30$ , где использовались

$$\bar{\Theta}_0 = \bar{M}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_1 = \Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В ходе исследований объемы  $N$  выборок значений статистик, формируемых в результате моделирования, в данном разделе предлагаются равными 5000.

На рис. 12.6 приведен пример, где отображены полученная в результате моделирования эмпирическая и теоретическая функции

распределения статистики  $L_1$ , используемой для проверки гипотезы  $H_0: \Sigma = \Sigma_0$  (математическое ожидание неизвестно) со следующими значениями параметров  $m = 3$  и  $n = 100$ :

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

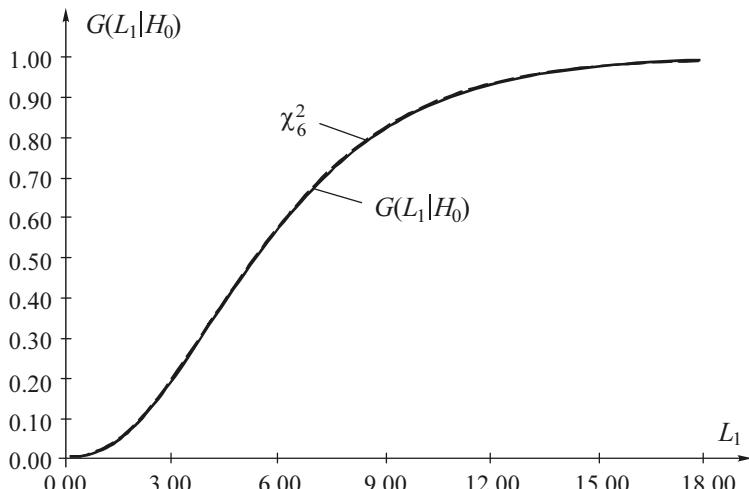


Рис. 12.6. Эмпирическая и теоретическая функции распределения статистики  $L_1$  при проверке гипотезы  $H_0: \Sigma = \Sigma_0$  (математическое ожидание неизвестно):  $m = 3$ ,  $n = 100$

Приведенные примеры подтверждают, что эмпирические распределения статистик, используемых в критериях проверки гипотез о векторе математических ожиданий и ковариационной матрице при наблюдении многомерного нормального закона распределения, действительно хорошо описываются соответствующими предельными законами [152]. Аналогичная картина, подтверждающая очень хорошее согласие смоделированных эмпирических распределений статистик с классическими предельными, наблюдается и для распределений статистик  $T^2$  (12.26) и  $L_2$  (12.28).

Исследование сходимости распределений рассматриваемых статистик к предельным в зависимости от объема выборки  $n$  многомерного нормального закона показало, что для статистик  $X_m^2$  (12.25),  $L_1$  (12.27) и  $L_2$  (12.28)], параметры предельных распределений которых не зависят от объема выборки, эмпирические распределения статистик оказываются близки к предельным уже при выборках сравнительно небольшого объема  $n$ . Так, у статистики  $X_m^2$  высокий достигаемый уровень значимости по критериям согласия наблюдается начиная с объемов выборки  $n = 30\dots45$ , а для статистик  $L_1$  и  $L_2$  – с  $n = 100\dots150$ .

Предельное распределение статистики  $T^2$  зависит от объема выборки случайной величины  $n$ . Поэтому предельное распределение «подстраивается» под объем выборки случайного вектора. Вследствие этого уже при малых объемах выборок  $n \geq 30$  при проверке соответствия эмпирических распределений статистик теоретическим по критериям согласия наблюдаются достаточно высокие достижимые уровни значимости.

Отметим, что при исследовании не было выявлено существенного влияния размерности случайного вектора  $m$  на сходимость распределений соответствующих статистик к предельным. Исследования проводились для размерности случайного вектора в диапазоне  $m \leq 10$ .

### 12.3.3. Исследование распределений статистик при законах, отличающихся от нормального

Далее проводились исследования распределений статистик для законов многомерных величин, моделируемых в соответствии с предложенной выше процедурой. Процедура моделирования опирается на семейство распределений (12.4) и позволяет генерировать псевдослучайные векторы, подчиняющиеся многомерным симметричным законам, более островершинным ( $\theta_2 < 2$ ) или более плосковершинным ( $\theta_2 > 2$ ) по сравнению с нормальным законом. Исследования были проведены при значениях параметра  $\theta_2 \geq 1$ . Это ограничение обусловлено тем, что предельным случаем семейства распределений (12.4) при  $\theta_2 \rightarrow 0$  является распределение Коши, которое представляет собой

пример «патологического» распределения: не существует математического ожидания и дисперсия расходится. Поэтому в результате моделирования псевдослучайных векторов при параметре  $\theta_2 < 1$  мы получаем закон с ковариационной матрицей, близкой к вырожденной.

Распределения статистик корреляционного анализа при многомерных законах, отличающихся от нормального и моделируемых в соответствии с предлагаемой процедурой, базирующейся на семействе распределений (12.4) с параметром формы  $\theta_2$ , определяющим вид закона, исследовались при различных объемах выборок  $n$  и различной размерности  $m$  случайных величин. Ниже приведены примеры моделирования распределений исследуемых статистик с отражением соответствующих предельных распределений классических статистик.

Для статистик, вычисляемых по выборкам псевдослучайных векторов, смоделированных с использованием параметра формы  $\theta_2 \neq 2$ , введем новые обозначения, где в скобках отразим зависимость распределения статистики от параметра  $\theta_2$ . Например, для статистики  $X_m^2$  будем использовать новое обозначение  $X_m^2(\theta_2)$ .

На рис. 12.7 показан вид распределения статистики  $X_m^2(\theta_2)$  в случае закона, смоделированного при параметре  $\theta_2 = 1$ . Высокие достигнутые уровни значимости по всем критериям согласия и визуальная близость полученного эмпирического распределения статистики  $X_m^2$  и предельного в случае многомерного нормального закона  $\chi^2$ -распределения позволяют утверждать, что вид предельного распределения статистики значимо не изменился. Аналогичная картина видна на рис. 12.8, где показаны эмпирическое распределение статистики  $T^2(5)$  и предельное в классическом случае распределение Фишера.

Отметим, что при моделировании в соответствии с (12.6), (12.7) многомерных величин по несимметричным одномерным законам (в качестве примеров рассматривалась принадлежность  $\{Z_i\}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , распределениям экстремальных значений) распределения статистик, используемых в критериях проверки гипотез о векторе математических ожиданий, по-прежнему хорошо описываются предельными распределениями, полученными в предположении о нормальности наблюдаемой выборки.

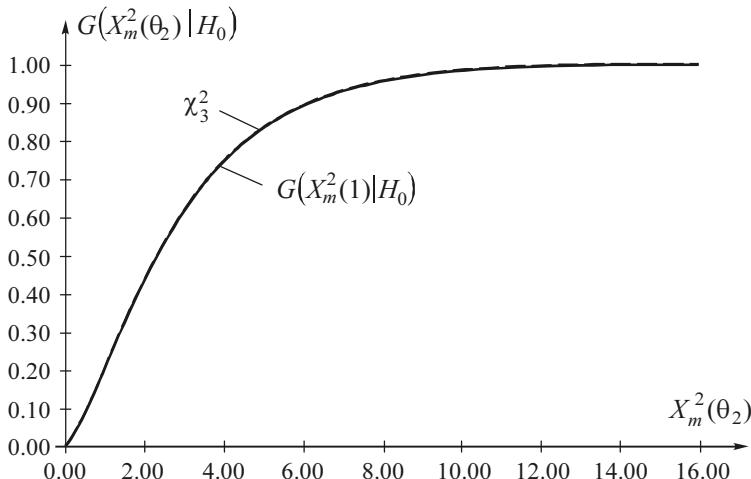


Рис. 12.7. Распределение статистики  $X_m^2(1)$  и классическое предельное  $\chi_3^2$ -распределение ( $m = 3, n = 30$ )

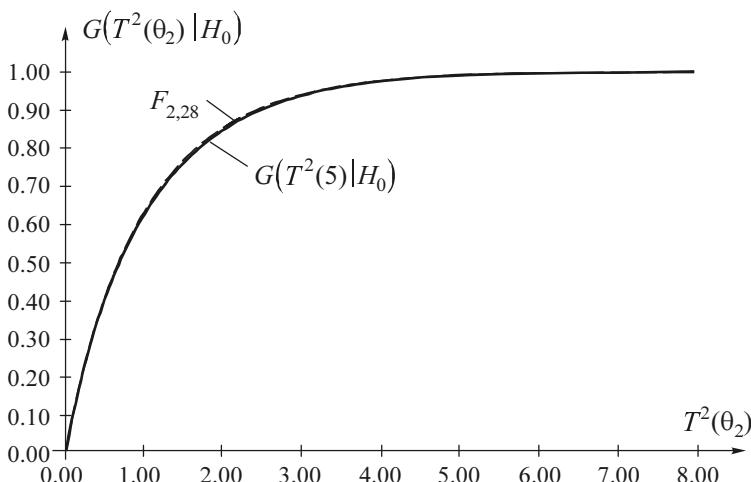


Рис. 12.8. Распределение статистики  $T^2(5)$  и классическое предельное  $F_{2,28}$ -распределение ( $m = 2, n = 30$ )

Проведенные исследования распределений статистик  $X_m^2$  и  $T^2$  показали, что в случае многомерных законов, достаточно существенно

отличающихся от нормального (более островершинных или более плосковершинных и даже в случае многомерного закона, построенного по несимметричному одномерному распределению), значимого изменения предельных распределений статистик не происходит. Это позволяет утверждать, что статистические выводы, опирающиеся на классический аппарат в исследованных задачах корреляционного анализа о векторе математических ожиданий, будут оставаться корректными и при нарушении предположений о нормальности наблюдаемого многомерного закона при условии существования вектора математических ожиданий и невырожденности ковариационной матрицы.

В отличие от  $X_m^2$  и  $T^2$  распределения статистик  $L_1$  и  $L_2$ , используемых в критериях проверки гипотез о ковариационной матрице, как в случае известного вектора математических ожиданий, так и в случае неизвестного, очень чувствительны к виду наблюдаемого закона распределения. Это хорошо видно на приведенных в качестве примера рис. 12.9 и 12.10, на которых отображены графики эмпирических распределений статистик  $L_1(\theta_2)$ ,  $L_2(\theta_2)$  и предельные распределения статистик  $L_1$ ,  $L_2$  в случае нормального закона ( $\chi_6^2$ - и  $\chi_9^2$ -распределения соответственно).

Так, из рис. 12.9 видно, что эмпирические распределения статистики  $L_1(\theta_2)$ , смоделированные при значении параметра формы 1 и 10 семейства распределений (12.4), существенно отличаются от предельного распределения статистики  $L_1$ , полученного в случае принадлежности наблюдений многомерному нормальному закону. Аналогичную зависимость от вида наблюдаемого закона демонстрирует статистика  $L_2(\theta_2)$  при проверке гипотезы о ковариационной матрице и математическом ожидании  $H_0: M = M_0, \Sigma = \Sigma_0$  (рис. 12.10).

Результаты проведенных исследований говорят о том, что распределения статистик, используемых при проверке гипотез о ковариационной матрице, значимо отличаются от классических предельных при отклонениях наблюдаемого закона от многомерного нормального. Поэтому при использовании классических процедур для проверки гипотез о ковариационной матрице, так же как в одномерном случае при проверке гипотез о дисперсии, целесообразно удостовериться в том, что наблюдаемый закон является нормальным, применяя соответствующие критерии проверки нормальности.

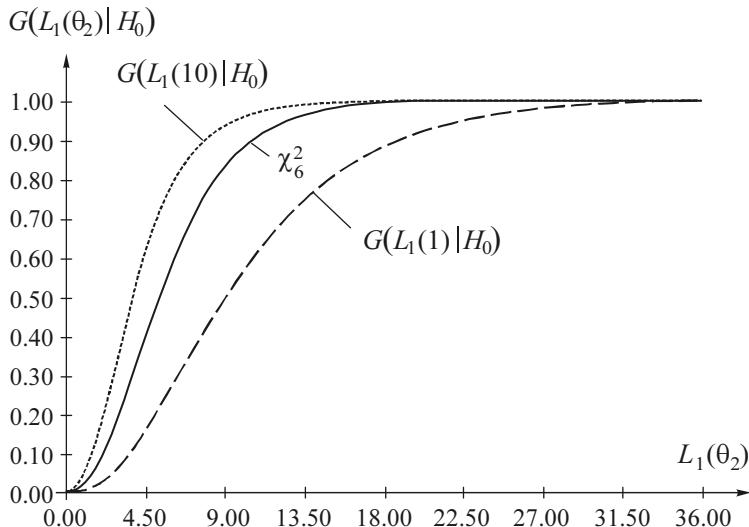


Рис. 12.9. Распределения статистик  $L_1(1)$ ,  $L_1(10)$  и предельное распределение статистики  $L_1$ :  $\chi_6^2$ -распределение ( $m = 3, n = 150$ )

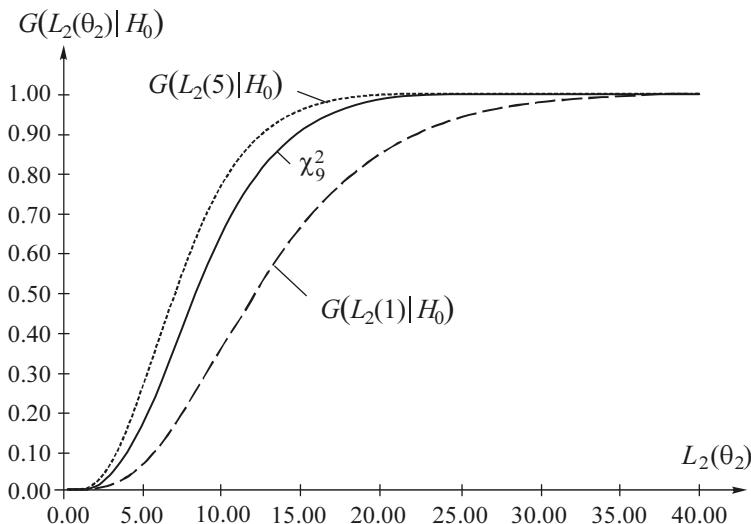


Рис. 12.10. Распределения статистик  $L_2(1)$ ,  $L_2(5)$  и предельное распределение статистики  $L_2$ :  $\chi_9^2$ -распределение ( $m = 3, n = 150$ )

Для проверки предположения об устойчивости статистик  $X_m^2$  и  $T^2$  к отклонению наблюдаемого закона от нормального было проведено исследование распределений данных статистик в случае многомерного распределения Стьюдента (12.19). Напомним, что с ростом числа степеней свободы ( $p \rightarrow \infty$ ) распределение Стьюдента стремится к нормальному закону.

На приведенном рис. 12.11 видно, что действительно эмпирическое распределение статистики  $X_m^2$  в случае принадлежности наблюдаемой многомерной случайной величины распределению Стьюдента хорошо описывается  $\chi^2$ -распределением. Здесь статистика  $X_m^2$  была построена по распределению Стьюдента с числом степеней свободы  $p = 15$  и следующих параметрах моделирования:  $m = 3$ ,  $n = 50$ .

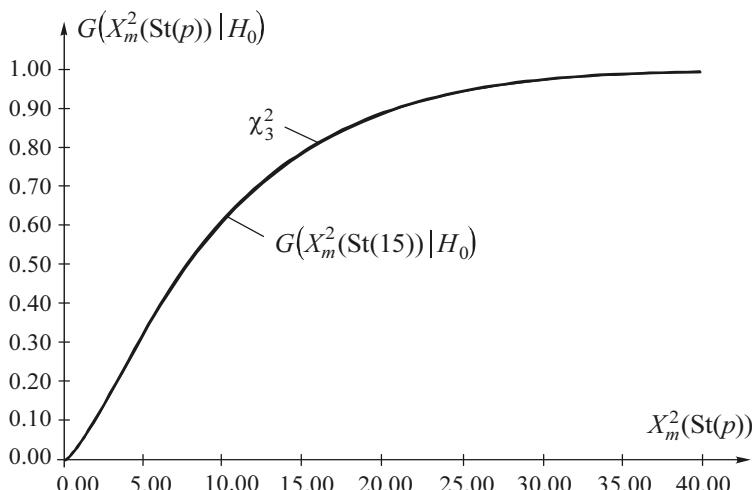


Рис. 12.11. Распределение статистики  $X_m^2$ , построенное по многомерному закону Стьюдента с числом степеней свободы  $p = 15$ , и классическое предельное  $\chi_3^2$ -распределение ( $m = 3$ ,  $n = 50$ )

Отметим, что в случае принадлежности случайного вектора многомерному распределению Стьюдента статистика  $T^2$  хорошо описывается классическим  $F_{m,n-m}$ -распределением, что отображено на рис. 12.12.

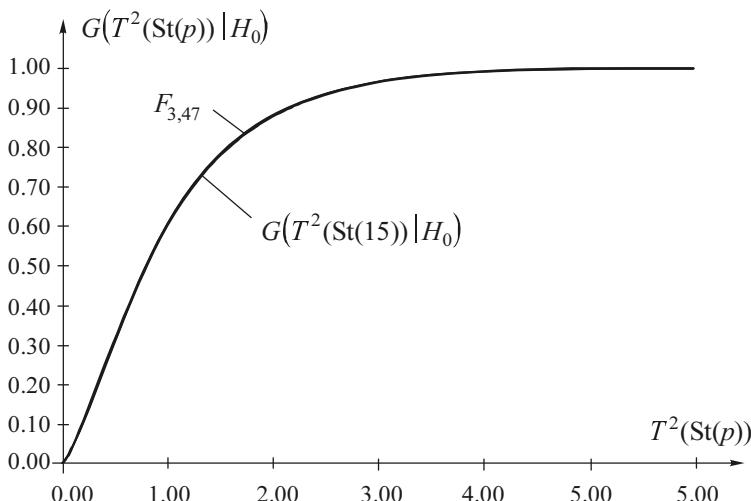


Рис. 12.12. Распределение статистики  $T^2$ , построенное по многомерному закону Стьюдента с  $p=15$  степенями свободы, и классическое предельное  $F_{3,47}$ -распределение ( $m=3$ ,  $n=50$ )

При малых значениях степеней свободы  $p \leq 5$  распределения статистик  $X_m^2$  и  $T^2$  претерпевают незначительные изменения, что сказывается на достигаемых уровнях значимости по критериям согласия. Предположительно такое изменение распределений статистик обусловлено «утяжелением хвостов» распределения Стьюдента. При  $p=1$  распределение Стьюдента представляет собой распределение Коши. Ранее уже отмечалось изменение предельных распределений статистик  $X_m^2$  и  $T^2$  при многомерных законах, построенных по семейству распределений (12.4) с параметром формы  $\theta_2 < 1$ .

Полученные результаты для многомерного распределения Стьюдента не опровергают ранее сделанных предположений об устойчивости критериев проверки гипотез о векторе математических ожиданий к отклонению наблюдаемого многомерного закона от нормального. Распределения статистик критериев проверки гипотез о ковариационной матрице, как и ожидалось, сильно зависят от вида многомерного закона. Поэтому распределения статистик  $L_1$  и  $L_2$  стремятся к классическим предельным только при очень больших значениях числа степеней

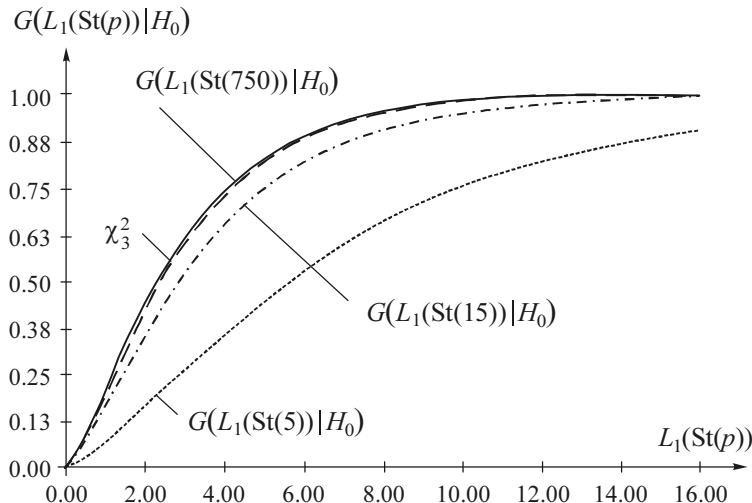


Рис. 12.13. Эмпирические распределения статистики  $L_1$ , построенной по многомерному закону Стьюдента с числами степеней свободы  $p = 5$ ,  $p = 15$  и  $p = 750$ , и классическое предельное  $\chi^2$ -распределение ( $m = 2$ ,  $n = 150$ )

свободы  $p > 750$  (когда распределение Стьюдента по виду очень близко к нормальному закону). В качестве примера на рис. 12.13 показано, что распределение статистики  $L_1$ , моделируемой по двумерному закону Стьюдента при очень большом значении числа степеней свободы  $p = 750$ , уже достаточно хорошо описывается предельным классическим  $\chi^2$ -распределением статистики (12.7).

## 12.4. Исследование критериев проверки гипотез о коэффициентах корреляции

### 12.4.1. Критерии проверки гипотез о коэффициентах корреляции

В классическом корреляционном анализе на основании исследований парных, частных и множественных корреляций можно делать выводы о характере статистической зависимости. Когда требуется

определить взаимозависимость двух величин, исследуется *парная корреляция*. Если нас интересует взаимозависимость двух величин при устраниении воздействия остальных величин, то исследуется так называемая *частная корреляция*. Когда требуется рассмотреть зависимость единственной величины от группы других, исследуют *множественную корреляцию*.

Взаимозависимость двух компонент случайного вектора характеризуется парным коэффициентом корреляции  $r_{ij}$ . Он представляет собой меру тесности линейной связи. Известно, что независимость двух случайных величин влечет равенство  $r_{ij} = 0$ . Обратное утверждение справедливо для совместно нормальных величин, но в общем случае неверно. Этим определяются некоторые затруднения в интерпретации  $r_{ij}$  как коэффициента взаимозависимости в общем случае.

Коэффициент корреляции можно использовать в качестве некоторой меры взаимозависимости для нормального закона. Если известна оценка ковариационной матрицы  $\hat{\Sigma}$ , то оценка парного коэффициента корреляции может быть найдена в соответствии с выражением

$$\hat{r}_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{ii}\hat{\sigma}_{jj}}}. \quad (12.29)$$

В классическом корреляционном анализе относительно парного коэффициента корреляции могут проверяться два вида гипотез: о значимости коэффициента корреляции ( $H_0: r_{ij} = 0$ ) и о равенстве его нормальному значению ( $H_0: r_{ij} = r_0$ ).

В критерии проверки гипотезы  $H_0: r_{ij} = 0$  используется статистика

$$t = \frac{\sqrt{n-2} \cdot \hat{r}_{ij}}{\sqrt{1 - \hat{r}_{ij}^2}}, \quad (12.30)$$

которая при справедливости гипотезы  $H_0$  (и выполнении предположения о принадлежности наблюдений нормальному закону) имеет в качестве предельного распределение Стьюдента с  $n-2$  степенями свободы:  $G(t | H_0) = t_{n-2}$  [152].

В случае проверки гипотезы вида  $H_0: r_{ij} = r_0$  статистика

$$z_0 = \sqrt{n-3} \left( \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \hat{r}_{ij}}{1 - \hat{r}_{ij}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + r_0}{1 - r_0} \right) - \left( \frac{r_0}{2(n-1)} \right) \right) \quad (12.31)$$

в тех же условиях при справедливости гипотезы  $H_0$  подчиняется стандартному нормальному закону  $N(0,1)$  [152].

В [205] выдвинуто предположение о том, что критерий некоррелированности ( $H_0: r_{ij} = 0$ ) можно строить без каких-либо требований о нормальности исходного распределения.

Известно, что оценка для  $r_{ij}$  является смещенной, когда  $0 < r_{ij}^2 < 1$  [205]:

$$E[\hat{r}_{ij}] = r_{ij} \left\{ 1 - \frac{1 - r_{ij}^2}{2n} + O(n^{-2}) \right\}.$$

В работе [205] рекомендуют использовать несмещенную оценку в виде

$$\hat{r}_{ij}^H = \hat{r}_{ij} \left\{ 1 + \frac{1 - \hat{r}_{ij}^2}{2(n-4)} \right\}. \quad (12.32)$$

При интерпретации «взаимозависимости» компонент многомерного случайного вектора затруднения могут заключаться в том, что если одна величина коррелирована с другой, то это может быть всего лишь отражением того факта, что обе они коррелированы с некоторой третьей величиной или с совокупностью величин. Такая возможность приводит к необходимости рассматривать условные корреляции между двумя величинами при фиксированных значениях остальных величин. Это так называемые *частные корреляции*.

Если корреляция между двумя величинами уменьшается при фиксировании некоторой другой случайной величины, то это означает, что их взаимозависимость возникает частично через воздействие этой величины. Если же частная корреляция равна нулю или очень мала, то

делается вывод, что их взаимозависимость целиком обусловлена этим воздействием. Наоборот, когда частная корреляция больше первоначальной корреляции между двумя величинами, то значит, другие величины ослабляли связь, или, можно сказать, «маскировали» корреляцию. Но следует помнить, что даже в последнем случае нельзя предполагать наличие причинной связи, так как некоторая совершенно отличная от рассматриваемых при анализе величина может быть источником этой корреляции. Как при обычной корреляции, так и при частных корреляциях предположение о причинности должно всегда иметь вестатистические основания.

Представим случайный вектор  $\bar{X}$  в следующем виде [152]:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix}, \text{ где } \bar{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_l \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_2 = \begin{bmatrix} X_{l+1} \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix},$$

а вектор математических ожиданий и ковариационную матрицу соответственно в виде

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда если случайный вектор  $\bar{X}$  подчиняется нормальному закону с вектором средних  $\bar{M}$  и ковариационной матрицей  $\Sigma$ , то условное распределение подвектора  $\bar{X}_1$  при известном  $\bar{X}_2$  является нормальным с математическим ожиданием  $\bar{M}_1 + B(\bar{X}_2 - \bar{M}_2)$  и ковариационной матрицей  $\Sigma_{11.2}$ , где  $B = \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$ ,  $\Sigma_{11.2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$  [205].

ОМП для частного коэффициента корреляции определяется соотношением

$$\hat{r}_{ij.l+1,\dots,m} = \frac{\hat{\sigma}_{ij.l+1,\dots,m}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{ii.l+1,\dots,m}\hat{\sigma}_{jj.l+1,\dots,m}}}, \quad (12.33)$$

где  $\hat{\sigma}_{ij.l+1,\dots,m}$  – элемент  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы  $\Sigma_{11.2}$ ;  $l$  – число компонент в условном распределении,  $2 \leq l \leq m$ . В данном случае при оценке взаимозависимости между компонентами  $X_i$  и

$X_j$  случайной величины  $\bar{X}$  исключается влияние компонент  $X_{l+1}, X_{l+2}, \dots, X_m$ .

При проверке гипотез относительно частных коэффициентов корреляции вида  $H_0: r_{ij \cdot l+1, \dots, m} = 0$  и  $H_0: r_{ij \cdot l+1, \dots, m} = r_0$  используются те же самые статистики, что и для парного коэффициента корреляции. Но в данном случае в соответствующих соотношениях  $n$  заменяется на  $n - m + l$ .

В критерии проверки гипотезы  $H_0: r_{ij \cdot l+1, \dots, m} = 0$  используется статистика

$$t^P = \frac{\sqrt{n-m+l-2} \cdot \hat{r}_{ij \cdot l+1, \dots, m}}{\sqrt{1-\hat{r}_{ij \cdot l+1, \dots, m}}}, \quad (12.34)$$

которая при справедливой гипотезе  $H_0$  имеет в качестве предельного распределение Стьюдента с  $n - m + l - 2$  степенями свободы:  $G(t^P | H_0) = t_{n-m+l-2}$  [152, 205].

В случае проверки гипотезы  $H_0: r_{ij \cdot l+1, \dots, m} = r_0$  предельным распределением  $G(z_0^P | H_0)$  статистики

$$z_0^P = \sqrt{n-m+l-3} \times \\ \times \left( \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+\hat{r}_{ij \cdot l+1, \dots, m}}{1-\hat{r}_{ij \cdot l+1, \dots, m}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+r_0}{1-r_0} \right) - \left( \frac{r_0}{2(n-m+l-1)} \right) \right) \quad (12.35)$$

при справедливости  $H_0$  является стандартный нормальный закон  $N(0,1)$  [152, 205].

Множественный коэффициент корреляции является мерой зависимости компоненты многомерной случайной величины от некоторого множества компонент. Можно рассматривать корреляцию между одной компонентой случайного вектора и множеством всех остальных или каким-то подмножеством.

Множественный коэффициент корреляции  $r_{i \cdot l+1, \dots, m}$  случайной величины  $X_i$  относительно некоторого множества других случайных

величин всегда не меньше, чем абсолютная величина любого парного коэффициента корреляции  $r_{ij}$  с таким же первичным индексом. Более того, множественный коэффициент корреляции никогда нельзя уменьшить путем расширения множества величин, относительно которых измеряется зависимость  $X_i$ .

Если коэффициент корреляции между  $X_i$  и множеством всех остальных компонент многомерной случайной величины равен нулю ( $r_{i:l+1,\dots,m} = 0$ ), то все коэффициенты корреляции этой величины относительного любого подмножества также равны 0, т. е. величина  $X_i$  полностью некоррелирована со всеми остальными величинами.

С другой стороны, если  $r_{i:l+1,\dots,m}$  относительно множества всех остальных компонент равен единице  $r_{i:l+1,\dots,m} = 1$ , то, по крайней мере, один из коэффициентов корреляции относительно некоторого подмножества компонент должен быть равен 1.

Надо отметить, что коэффициент корреляции, например, между  $X_1$  и множеством всех остальных компонент является обычным коэффициентом корреляции между  $X_1$  и условным математическим ожиданием  $E[X_1 | X_2, \dots, X_m]$ .

С учетом рассмотренного выше разбиения случайного вектора  $\bar{X}$  ОМП множественного коэффициента корреляции между  $X_i$ ,  $i \leq l$ , и множеством компонент  $X_{l+1}, X_{l+2}, \dots, X_m$  определяется соотношением

$$\hat{r}_{i:l+1,\dots,m} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{(i)} \Sigma_{22}^{-1} \hat{\sigma}_{(i)}^T}{\hat{\sigma}_{ii}}}, \quad (12.36)$$

где  $\sigma_{(i)}$  –  $i$ -я строка матрицы  $\Sigma_{12}$ ;  $\sigma_{ii}$  – элемент матрицы  $\Sigma_{11}$ .

Для проверки гипотезы о значимости множественного коэффициента корреляции  $H_0: r_{i:l+1,\dots,m} = 0$  вычисляется статистика

$$F = \frac{n - m + l - 1}{m - l} \frac{\hat{r}_{i:l+1,\dots,m}^2}{1 - \hat{r}_{i:l+1,\dots,m}^2}, \quad (12.37)$$

пределым распределением  $G(F | H_0)$  которой является  $F_{m-l, n-m+l-1}$ -распределение Фишера с параметрами  $m-l$  и  $n-m+l-1$  [152, 205].

Далее приведены результаты исследований устойчивости критериев, используемых в задачах о выявлении характера статистической зависимости между двумя или большим числом случайных величин, при наблюдении различных многомерных законов распределения [243, 71, 245, 248, 244].

### **12.4.2. Исследование распределений статистик критериев проверки гипотез о коэффициентах корреляции при многомерном нормальном законе**

В первую очередь исследуем, насколько хорошо распределения статистик (12.34) – (12.37), используемых при проверке гипотез о различных коэффициентах корреляции, подчиняются соответствующим (пределным) распределениям в случае многомерного нормального закона.

В процессе исследования сходимости распределений статистик к предельным в зависимости от объема выборки  $n$  нами были оценены объемы выборок нормальных псевдослучайных векторов, начиная с которых наблюдается близость эмпирической и теоретической функций распределений статистик. Так, у статистик  $z_0$  и  $z_0^P$  высокий достигаемый уровень значимости наблюдается, начиная с объемов выборки  $n = 100 \dots 150$ , а для статистик  $t$ ,  $t^P$  и  $F$  – с  $n \geq 30$  (следствие зависимости предельных распределений данных статистик от  $n$ ).

Продемонстрируем сказанное на двух примерах со следующими наборами параметров моделирования:

$$\bar{\Theta}_0 = \bar{M}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \Theta_1 = \Sigma_0 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2.5 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2.5 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \quad (12.38)$$

$$\bar{\Theta}_0 = \bar{M}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \Theta_1 = \Sigma_0 = \begin{bmatrix} 5 & 0.5 & 2.5 \\ 0.5 & 6 & 1 \\ 2.5 & 1 & 5 \end{bmatrix}. \quad (12.39)$$

На рис. 12.14 в качестве примера приведены полученная в результате моделирования эмпирическая и теоретическая функции распределения статистики  $t$  (12.30), используемой при проверке гипотезы о незначимости парного коэффициента корреляции ( $H_0: r_{23} = 0$ ). В данном случае при моделировании использовались следующие значения параметров:  $m = 3$ ,  $n = 30$ , а  $\bar{\Theta}_0$  и  $\Theta_1$  соответствуют (12.38). Рис. 12.14 подчеркивает визуальную близость эмпирической и теоретической функций распределения статистики  $t$ . Исследование распределений статистики при различных объемах выборок показало, что высокие достигаемые уровни значимости критериев при проверке согласия эмпирических распределений статистики с теоретическим наступают при объемах выборок случайных векторов  $n \geq 30$ .

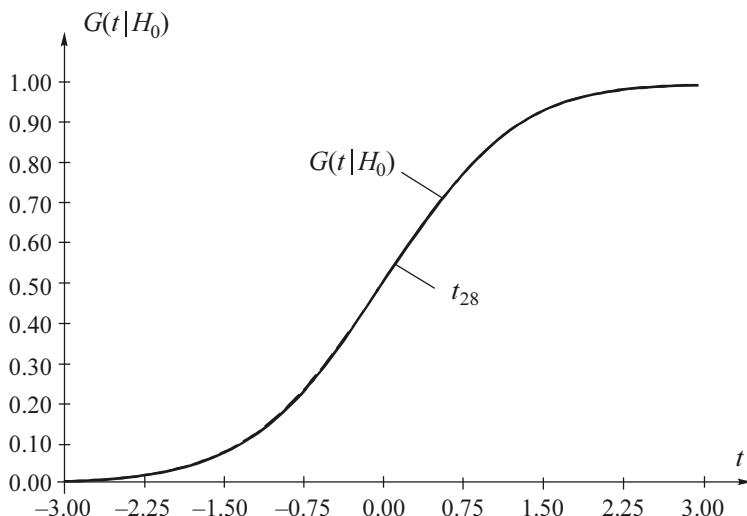


Рис. 12.14. Теоретическая функция распределения статистики  $t$  (12.30) при проверке гипотезы  $H_0: r_{23} = 0$  и эмпирическая функция, построенная с использованием параметров моделирования (12.38):  $n = 30$

Аналогичная картина наблюдается и при моделировании распределений статистики  $t^P$  (12.34).

Пример на рис. 12.15 демонстрирует близость между распределениями статистики  $z_0^P$  (12.35), построенными для многомерного нормального закона при моделировании с параметрами  $m = 3$ ,  $l = 2$ ,  $n = 100$ ,  $\bar{\Theta}_0$  и  $\Theta_1$  (12.39). Высокий достигаемый уровень значимости при проверке согласия между эмпирическим и теоретическим распределениями используемой статистики наблюдается начиная с объемов выборок  $n \geq 100$ . Результаты, полученные при моделировании распределений статистики  $z_0$ , подтверждают общую картину, полученную при исследовании статистики  $z_0^P$ .

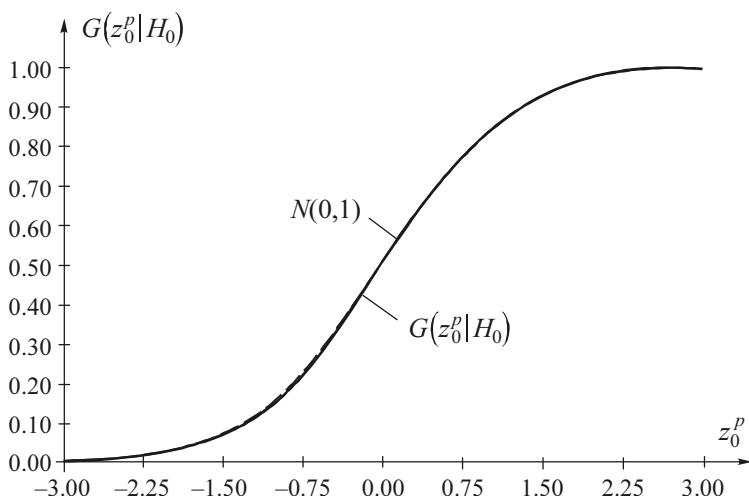


Рис. 12.15. Теоретическая функция распределения статистики  $z_0^P$  (12.35) при проверке гипотезы  $H_0: r_{12,3} = 0.21$  и эмпирическая функция, построенная с использованием параметров моделирования (12.38):  $n = 100$

По результатам исследования распределений статистики  $F$  (12.37), используемой при проверке гипотезы о равенстве множественного коэффициента корреляции нулевому значению, моделируемых, например, с параметрами  $m = 3$ ,  $l = 2$ ,  $n = 30$ ,  $\bar{\Theta}_0$  и  $\Theta_1$  (12.38), можно

говорить о «достаточности» объемов выборок случайных векторов начиная с  $n \geq 30$ . Результаты описанного эксперимента приведены на рис. 12.16.

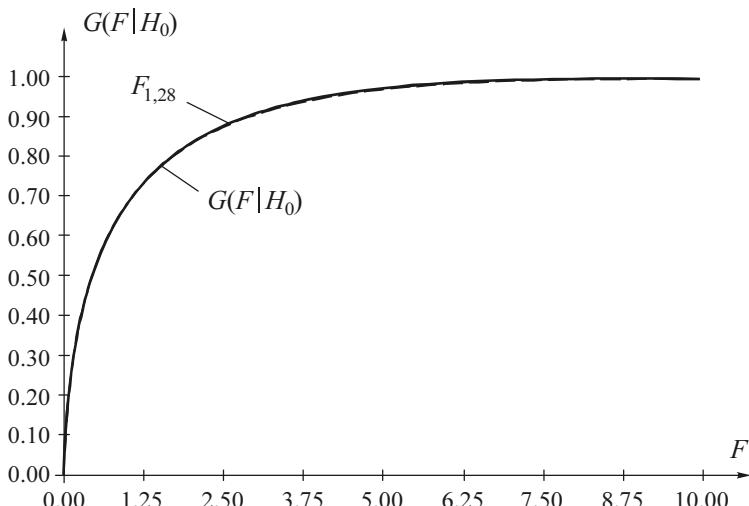


Рис. 12.16. Теоретическая функция распределения статистики  $F$  (12.37) при проверке гипотезы  $H_0: r_{2,3} = 0$  и эмпирическая функция, построенная с использованием параметров моделирования (12.38):  $n = 30$

Отметим, что при исследовании вновь не было выявлено существенного влияния размерности случайного вектора  $m$  и на сходимость распределений статистик данных критериев к соответствующим классическим предельным.

Таким образом, проведенные экспериментальные исследования подтвердили, что в случае многомерного нормального закона для критериев проверки гипотез о различных коэффициентах корреляции наблюдается хорошее согласие между получаемыми эмпирическими распределениями статистик и соответствующими предельными законами.

В работе [297] показано, что оценка парного коэффициента корреляции по формуле (12.29) не является устойчивой по отношению к нарушению предположения о нормальности распределения, из которого получена выборка для вычисления оценки. Различные робастные

аналоги оценки коэффициента приведены во многих работах [3, 32, 131, 132, 181, 296]. Например, одна из таких оценок имеет вид

$$\hat{r}_{ij} = \frac{m\{[X_{ki} - m\{X_{ki}\}][X_{kj} - m\{X_{kj}\}]\}}{\left(m\{[X_{ki} - m\{X_{ki}\}]^2\}m\{[X_{kj} - m\{X_{kj}\}]^2\}\right)^{1/2}}, \quad (12.40)$$

где  $m\{X_{ki}\}_{k=1}^n$  – медиана псевдослучайных величин  $X_i$ .

Если использовать оценку (12.40) в статистике  $t$  (12.30), то наблюдается явное изменение предельного распределения статистики, что отражено на рис. 12.17. Такое изменение в распределении статистики объясняется тем, что функция плотности оценки (12.40) становится более острой вершиной (следствие робастности оценки) по сравнению с плотностью оценки (12.29). На рис. 12.18 приведены функции плотности распределения оценок  $\hat{r}_{ij}$  при истинном значении  $r_{ij} = 0$ , полученные в результате моделирования. В этом случае для распределения

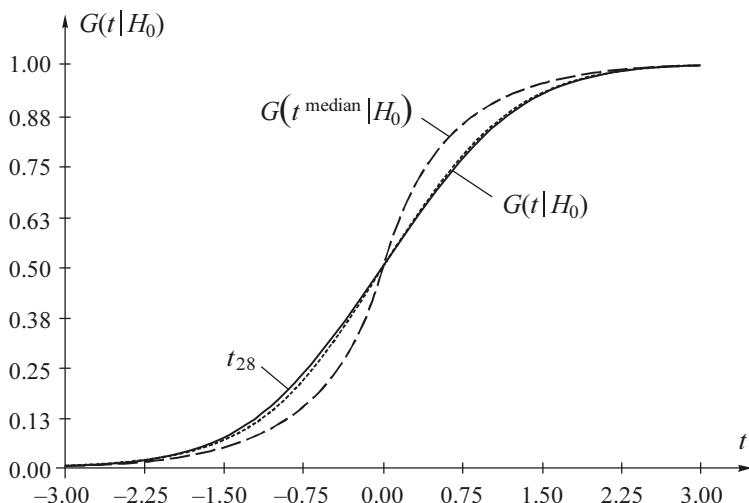


Рис. 12.17. Теоретическая функция распределения статистики  $t$  (12.30) при проверке гипотезы  $H_0: r_{12} = 0$  и эмпирические функции, построенные с использованием оценок парного коэффициента корреляции (12.29) и (12.40):  $n = 30$

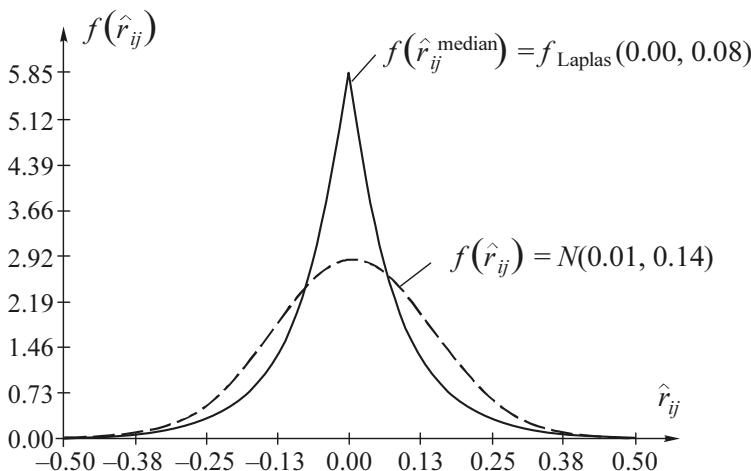


Рис. 12.18. Функции плотности оценок парного коэффициента корреляции, вычисляемых по формулам (12.29) и (12.40)

оценки, вычисляемой по формуле (12.29), лучше всего подходит нормальный закон с соответствующими параметрами сдвига и масштаба  $N(0.01, 0.14)$ , а для оценки (12.40) – распределение Лапласа  $f_{\text{Laplas}}(0.00, 0.08)$ . Это различие в распределениях оценок коэффициента парной корреляции и приводит к существенному уменьшению размаха предельного распределения статистики  $t$  (рис. 12.17).

Отсюда вытекает, что, применяя критерии проверки гипотез о парном коэффициенте корреляции, следует использовать оценки по методам, указанным при построении критериев: в данном случае – по методу максимального правдоподобия.

Рассмотренный пример, с одной стороны, является еще одним подтверждением того, что при проверке сложных гипотез, когда некоторый параметр, используемый в статистике, оценивается по этой же выборке, распределение статистики критерия может зависеть от метода оценивания [256, 255, 273, 302]. С другой стороны, пример служит предостережением для практиков от необоснованного использования в критериях вместо предусмотренного теорией вида оценки некоторой другой, например, более устойчивой к отклонениям от предположений. Такая замена, вероятней всего, приведет к изменению распределения статистики, а следовательно, к некорректности выводов при использовании данного критерия.

### 12.4.3. Исследование распределений статистик критериев проверки гипотез о коэффициентах корреляции при законах, отличных от многомерного нормального

Распределения статистик, используемых в критериях проверки гипотез о коэффициентах корреляции, исследовались при различных объемах выборок  $n$  и различной размерности случайных величин  $m$  на многомерных законах, моделируемых с использованием предложенной в разделе 12.2.2 процедуры. Как уже отмечено выше, в [205] выдвигалось предположение об устойчивости распределения статистики  $t$  (12.30) (критерий некоррелированности) к отклонениям от нормальности наблюдаемого закона. Там же была показана явная зависимость распределения статистики  $z_0$  (12.31) от вида многомерного закона. Проверим эти предположения на моделируемых многомерных законах.

Приведем полученные в результате исследований примеры смоделированных эмпирических распределений статистик с отражением близости их к соответствующим предельным распределениям, полученным в предположении о нормальности многомерной выборки. Количественной мерой близости служат достигаемые уровни значимости по критериям согласия  $\chi^2$  Пирсона, Колмогорова,  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова и  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга. Чем ближе достигнутый уровень значимости к единице, тем лучше согласие эмпирического распределения с соответствующим теоретическим.

Из результатов, приведенных на рис. 12.19 и 12.20, следует, что нет оснований для отклонения предположений о том, что предельными распределениями статистик критериев проверки гипотез о равенстве парного и частного коэффициентов корреляции нулевому значению в случае принадлежности наблюдений многомерным законам, построенным в соответствии с предложенной в разделе 12.2.2 процедурой с использованием одномерного закона из семейства распределений (12.4) при разных параметрах формы  $\theta_2$ , являются соответствующие классические предельные распределения. Конечно, распределения статистик другие, но их отклонения от классических не являются в данном случае существенными. Достигаемые уровни значимости по критериям согласия для результатов, отраженных на данных рисунках, сведены

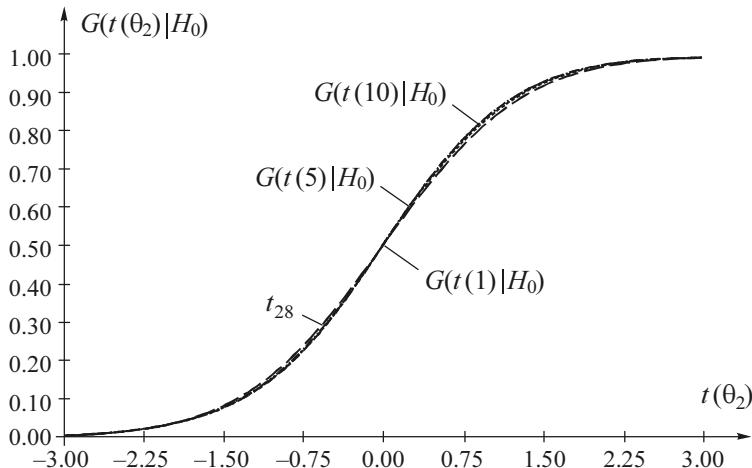


Рис. 12.19. Эмпирические распределения статистик  $t(1)$ ,  $t(5)$ ,  $t(10)$  и классическое предельное  $t_{28}$ -распределение статистики (12.30) при проверке гипотезы  $H_0: r_{23} = 0$ , где  $n = 30$  и (12.38)

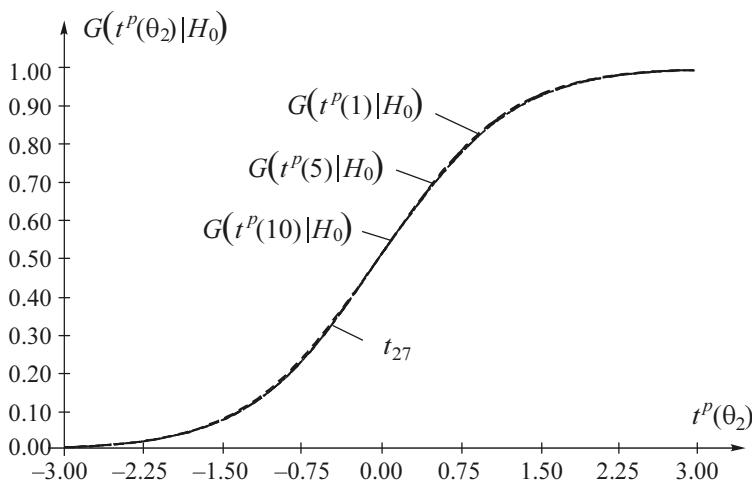


Рис. 12.20. Эмпирические распределения статистик  $t^P(1)$ ,  $t^P(5)$ ,  $t^P(10)$  и классическое предельное  $t_{27}$ -распределение статистики (12.34) при проверке гипотезы  $H_0: r_{12-3} = 0$ , где  $n = 30$ ,  $m = 3$ ,  $l = 2$  и (12.39)

в табл. 12.1. Результаты исследований показали, что распределения статистик (12.30) и (12.34) устойчивы к отклонениям многомерного закона от нормального.

Статистика (12.37), используемая при проверке гипотезы о равенстве нулю множественного коэффициента корреляции, также оказалась нечувствительна к отклонениям многомерного закона от нормального (рис. 12.21, табл. 12.1).

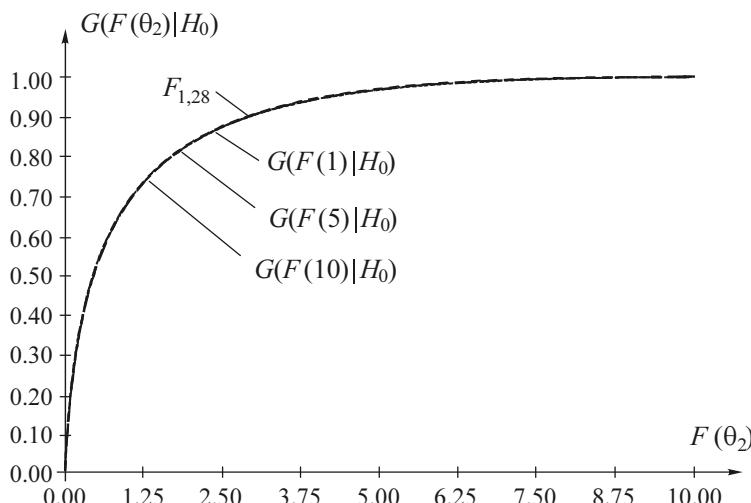


Рис. 12.21. Эмпирические распределения статистик  $F(1)$ ,  $F(3)$ ,  $F(5)$  и классическое предельное  $F_{1,28}$ -распределение статистики (12.37) при проверке гипотезы  $H_0: r_{1,3} = 0$ , где  $n = 30$ ,  $m = 3$ ,  $l = 2$  и (12.38)

Таким образом, проведенные численные исследования не опровергают выдвигаемого в [205] предположения об устойчивости критериев проверки гипотез о равенстве нулю парного коэффициента корреляции по отношению к нарушению основного предположения корреляционного анализа о нормальности многомерного закона. Исследования проводились на различных размерностях псевдослучайных векторов и большом количестве повторных экспериментов с целью исключения ошибок возможных отдельных экспериментов. Поэтому можно выдвинуть более широкое предположение о том, что критерии проверки гипотез о нулевых значениях парного, частного и

множественного коэффициентов корреляции являются устойчивыми к отклонениям от нормальности.

Таблица 12.1

**Значения достигнутых уровней значимости по критериям согласия при проверке соответствия теоретическим эмпирическим распределений статистик  $t$ ,  $t^P$  и  $F$ , смоделированных при различных параметрах формы  $\theta_2$**

Критерий	$t$ (рис. 12.19)			$t^P$ (рис. 12.20)			$F$ (рис. 12.21)		
	$\theta_2 = 1$	$\theta_2 = 5$	$\theta_2 = 10$	$\theta_2 = 1$	$\theta_2 = 5$	$\theta_2 = 10$	$\theta_2 = 1$	$\theta_2 = 5$	$\theta_2 = 10$
$\chi^2$ Пирсона	0.32	0.95	0.72	0.88	0.59	0.88	0.60	0.91	0.71
Колмогорова	0.23	0.99	0.97	0.76	0.47	0.82	0.32	0.77	0.25
$\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова	0.32	0.97	0.99	0.53	0.42	0.85	0.44	0.86	0.50
$\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга	0.35	0.96	0.95	0.37	0.42	0.85	0.41	0.90	0.22

В критериях проверки гипотез о равенстве парного или частного коэффициента корреляции заданному значению распределения используемых статистик критериев очень чувствительны к виду наблюдаемого закона.

Если в случае многомерного нормального закона распределение статистики (12.31)  $z_0$  при проверке гипотезы вида  $H_0: r_{ij} = r_0$  описывается стандартным нормальным, то при законах, отличных от многомерного нормального, с ростом номинального значения коэффициента корреляции  $r_0$  (при прочих равных условиях) происходит все более значимое отклонение распределения статистики от классического предельного. Сказанное иллюстрирует рис. 12.22, на котором показано, как с увеличением абсолютного значения коэффициента корреляции изменяется распределение статистики данного критерия. На основании результатов исследований распределений данной статистики можно дать следующие рекомендации. При законах, отличных от многомерного нормального, и малых значениях  $r_0$  парного

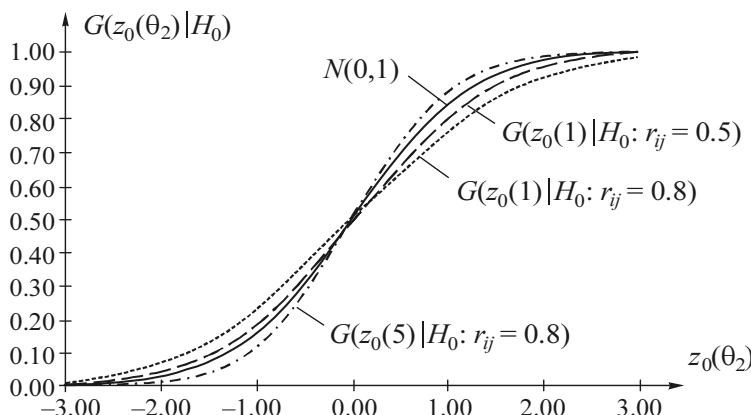


Рис. 12.22. Эмпирические распределения статистики  $z_0(\theta_2)$ , построенные для проверки гипотез на равенство коэффициента парной корреляции различным значениям, и классическое предельное  $N(0,1)$ -распределение статистики, при (12.38)

(частного) коэффициента корреляции  $0 < |r_0| \leq 0.15$  еще можно пользоваться стандартным нормальным распределением как предельным для статистики  $z_0$  ( $z_0^P$ ). Но при значениях  $|r_0| > 0.15$  требуется определение истинного распределения статистики используемого критерия.

#### 12.4.4. Распределения статистик критериев проверки гипотез о коэффициентах корреляции при многомерном законе Стьюдента

Исследования распределений статистик критериев проверки гипотез о коэффициентах корреляции в случае принадлежности наблюдений многомерному распределению Стьюдента показало ограниченность применения классических результатов для выборок, не принадлежащих многомерному закону. Так, в случае многомерного закона Стьюдента с числом степеней свободы  $p \leq 30$  распределения статистик  $t$  (12.30),  $t^P$  (12.34) и  $F$  (12.37) не сходятся к классическим предельным при объемах  $n = 50 \dots 100$ , являющихся достаточными в случае многомерного нормального закона. Это отражено на рис. 12.23 и 12.24, где видно, что эмпирические распределения данных статистик,

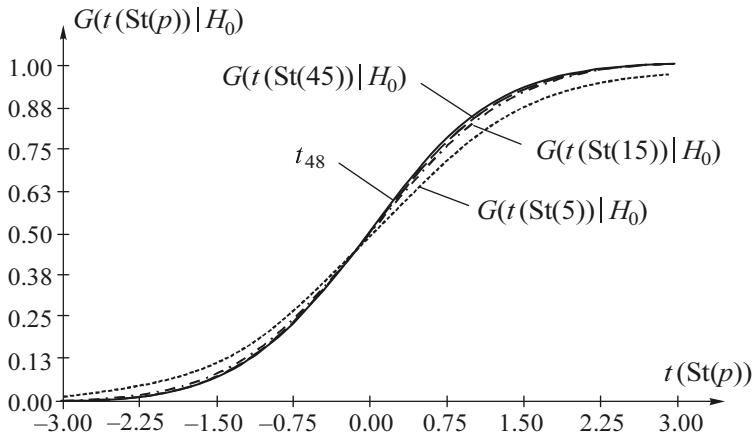


Рис. 12.23. Эмпирические распределения статистики  $t$ , построенные при многомерном распределении Стьюдента с числом степеней свободы  $p = 5$ ,  $p = 15$  и  $p = 45$ , и классическое предельное  $t_{48}$ -распределение статистики (12.30) при проверке гипотезы  $H_0: r_{12} = 0$

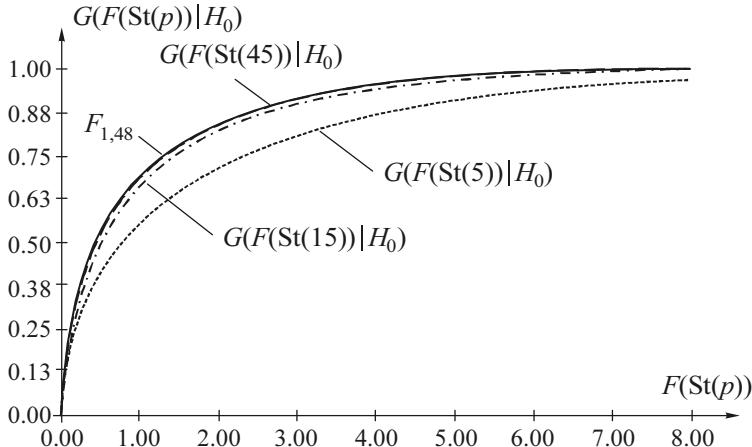


Рис. 12.24. Эмпирические распределения статистики  $F$ , построенные при многомерном распределении Стьюдента с числом степеней свободы  $p = 5$ ,  $p = 15$  и  $p = 45$ , и классическое предельное  $F_{1,48}$ -распределение Фишера статистики (12.37) при проверке гипотезы  $H_0: r_{13} = 0$

полученные в результате моделирования многомерных величин по закону Стьюдента с числом степеней свободы  $p = 5$  и  $p = 15$ , не подчиняются соответствующим предельным распределениям для нормального случая. Значительное увеличение объемов многомерных выборок  $n > 250$  не улучшает сходимость распределений статистик  $t$ ,  $t^P$  и  $F$  к классическим предельным.

При дальнейшем увеличении параметра  $p > 30$  согласие между распределениями данных статистик и соответствующими предельными законами в нормальном случае заметно улучшается (см. рис. 12.23, 12.24 и табл. 12.2). В табл. 12.2 приведены значения достигнутых уровней значимости по критериям согласия при проверке соответствия теоретическому  $t_{48}$ -распределению эмпирических распределений статистики  $t$ , смоделированных при многомерном законе Стьюдента при различном числе степеней свободы  $p$  (усреднены по трем экспериментам,  $m = 3$ ,  $n = 50$ ).

Таблица 12.2

## Значения достигнутых уровней значимости по критериям согласия

Критерий	$p = 5$	$p = 15$	$p = 25$	$p = 35$	$p = 45$
$\chi^2$ Пирсона	0.00	0.00	0.06	0.31	0.64
Колмогорова	0.00	0.02	0.19	0.15	0.76
$\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова	0.00	0.01	0.18	0.21	0.76
$\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга	0.00	0.00	0.07	0.16	0.74

Исследования распределений статистик критериев по выборкам многомерного распределения, построенного по семейству распределений (12.4) с параметром формы  $\theta_2 < 1$ , демонстрируют аналогичные результаты, что и в случае многомерного распределения Стьюдента с числом степеней свободы  $p \leq 30$ : распределения статистик  $t$ ,  $t^P$  и  $F$  претерпевают изменения и более не подчиняются соответствующим

пределенным распределениям, полученным в предположении о нормальности. Изменение предельного закона статистики  $t$ , моделируемой по семейству распределений (12.4) с параметрами формы  $\theta_2 = 0.3$  и  $\theta_2 = 0.5$ , отражено на рис. 12.25.

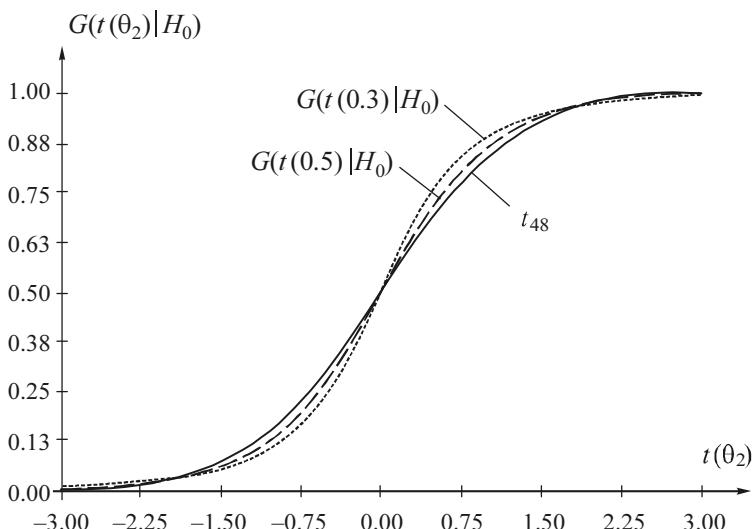


Рис. 12.25. Эмпирические распределения статистики  $t(0.3)$ ,  $t(0.5)$ , и классическое предельное  $t_{48}$ -распределение статистики (12.30)  
при проверке гипотезы  $H_0: r_{12} = 0$ , где  $m = 3$ ,  $n = 50$

Многомерные распределения Стьюдента при  $p < 30$  и многомерные распределения, моделируемые на основе семейства распределений (12.4) с параметром формы  $\theta_2 < 1$ , представляют собой законы с «тяжелыми хвостами». При  $p = 1$  и  $\theta_2 \rightarrow 0$  в том и другом случае мы приходим к многомерному распределению Коши.

Кстати отметим, что ряд одномерных критериев, так или иначе связанных с проверкой гипотез о средних, проявляют устойчивость к нарушению предположения о нормальности. Но наличие «тяжелых хвостов» у наблюдаемого закона приводит к существенным изменениям распределений статистик [247, 229, 83, 274, 93].

## 12.5. Исследование критериев проверки гипотез о корреляционном отношении

### 12.5.1. Классические критерии проверки гипотез о корреляционном отношении

В классическом корреляционном анализе на основании соотношений между парным коэффициентом корреляции и корреляционным отношением можно судить о характере зависимости между компонентами случайного вектора.

Корреляционное отношение случайной величины  $X_i$  по  $X_j$  определяется отношением дисперсии условного математического ожидания  $E[X_i | X_j]$  к дисперсии  $X_i$ :

$$\rho_{ij}^2 = \frac{D\{E[X_i | X_j]\}}{D[X_i]}. \quad (12.41)$$

В отличие от коэффициента корреляции  $r_{ij}$  корреляционное отношение  $\rho_{ij}$  несимметрично относительно  $X_i$  и  $X_j$ . Соотношение между коэффициентом корреляции  $r_{ij}$  и корреляционным отношением  $\rho_{ij}$  в случае многомерного нормального закона позволяет утверждать следующее [206]:

- $r_{ij}^2 = 0$ , если  $X_i$  и  $X_j$  независимы;
- $r_{ij}^2 = \rho_{ij}^2 = 1$ , тогда и только тогда, когда имеется строгая линейная функциональная зависимость  $X_i$  от  $X_j$ ;
- $r_{ij}^2 < \rho_{ij}^2 = 1$ , тогда и только тогда, когда имеется строгая нелинейная функциональная зависимость  $X_i$  от  $X_j$ ;
- $r_{ij}^2 = \rho_{ij}^2 < 1$ , тогда и только тогда, когда регрессия  $X_i$  по  $X_j$  строго линейная, но нет функциональной зависимости;
- $r_{ij}^2 < \rho_{ij}^2 < 1$ , указывает на то, что не существует функциональной зависимости и некоторая нелинейная кривая регрессии подходит лучше, чем «наилучшая» прямая линия.

Таким образом, равенство квадрата коэффициента корреляции корреляционному отношению указывает на то, что для регрессии нельзя найти лучшей зависимости, чем прямая линия.

Оценка корреляционного отношения определяется выражением

$$\hat{\rho}_{ij}^2 = \frac{\sum_{l=1}^k n_l (\bar{X}_l^i - \bar{X}^i)^2}{\sum_{l=1}^k \sum_{s=1}^{n_l} (X_{ls}^i - \bar{X}^i)^2}, \quad (12.42)$$

где  $k$  – количество интервалов сечений для компоненты  $X_j$ ;  $\bar{X}_l^i$  – среднее значение компоненты  $X_i$  в  $l$ -м сечении;  $n_l$  – число наблюдений компоненты  $X_i$  в  $l$ -м сечении;  $X_{ls}^i$  – значение компоненты  $X_i$  с номером  $s$  в  $l$ -м сечении.

Относительно корреляционного отношения могут проверяться два вида гипотез: о равенстве корреляционного отношения нулю  $H_0: \rho_{ij}^2 = 0$  и о равенстве корреляционного отношения квадрату коэффициента корреляции  $H_0: \rho_{ij}^2 = r_{ij}^2$  (критерий линейности регрессии  $X_i$  по  $X_j$ ).

В критерии проверки гипотезы  $H_0: \rho_{ij}^2 = 0$  используется статистика

$$F_1 = \frac{n-k}{k-1} \frac{\hat{\rho}_{ij}^2}{1-\hat{\rho}_{ij}^2}, \quad (12.43)$$

которая при справедливой гипотезе  $H_0$  имеет  $F$ -распределение Фишера с числом степеней свободы  $k-1$  и  $n-k$ :  $G(F_1 | H_0) = F_{k-1, n-k}$  [206].

При проверке гипотезы  $H_0: \rho_{ij}^2 = r_{ij}^2$  вычисляется статистика

$$F_2 = \frac{n-k}{k-2} \frac{\hat{\rho}_{ij}^2 - \hat{r}_{ij}^2}{1-\hat{\rho}_{ij}^2}, \quad (12.44)$$

которая при справедливой гипотезе  $H_0$  имеет  $F$ -распределение Фишера с числом степеней свободы  $k-2$  и  $n-k$ :  $G(F_2 | H_0) = F_{k-2, n-k}$  [205].

## 12.5.2. Влияние различных способов группирования и количества интервалов на оценки корреляционного отношения

При вычислении оценки корреляционного отношения выполняется группирование данных. Группирование по соответствующей компоненте можно производить различным образом. Естественно, что от варианта группирования зависит качество оценок. В данном случае рассматривались три способа группирования: равноинтервальное (РИГ), равночастотное (РЧГ) и асимптотически оптимальное (АОГ). При выполнении равночастотного группирования, если количество случайных величин  $n$  не делится на число интервалов  $k$  нацело, то остаток распределяется равномерно от центральных до крайних интервалов группирования. Например, для  $n=10$  и  $k=4$  при РЧГ будут получены следующие частоты попаданий в интервалы группирования:  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3$ ,  $n_3 = 3$  и  $n_4 = 2$ .

Распределения оценок корреляционного отношения (12.42) очень сильно зависят от числа интервалов группирования  $k$ . Это иллюстрируют рис. 12.26 и 12.27, где представлены плотности оценок корреляционного отношения, полученные в результате исследований. Распределения оценок моделировались соответственно при значениях  $\rho_{ij}^2 = 0$  и  $\rho_{ij}^2 = 1$  с использованием РЧГ при различном количестве интервалов группирования  $k$  и объеме случайных наблюдений  $n = 100$ .

В случае  $\rho_{ij}^2 = 0$  (рис. 12.26) с увеличением числа интервалов  $k$  растет параметр сдвига плотности распределения оценки, т. е. увеличивается смещение оценки. В случае  $\rho_{ij}^2 = 1$  (рис. 12.27) с ростом числа интервалов в общем случае смещение оценок уменьшается. Аналогичная зависимость функций плотности оценок корреляционного отношения от количества интервалов группирования наблюдается и в случае равноинтервального и асимптотически оптимального способов группирования.

Влияние способа группирования на оценку корреляционного отношения отражено на рис. 12.28, где моделирование проводилось при  $\rho_{ij}^2 = 0$  и объеме псевдослучайных величин  $n = 100$ . Для числа интервалов  $k = 5$  функции плотности оценок  $\hat{\rho}_{ij}^2$ , вычисленных при различных

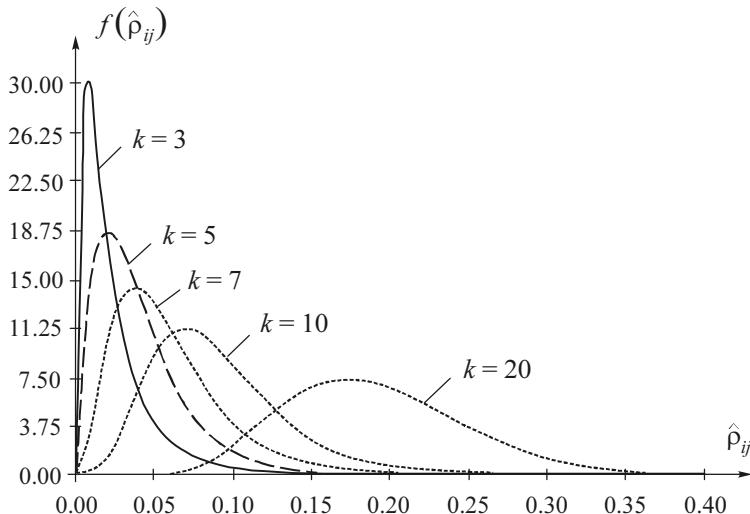


Рис. 12.26. Плотности распределения оценок корреляционного отношения для  $\rho_{ij}^2 = 0$  при использовании РЧГ для различного количества интервалов  $k$ ,  $n = 100$

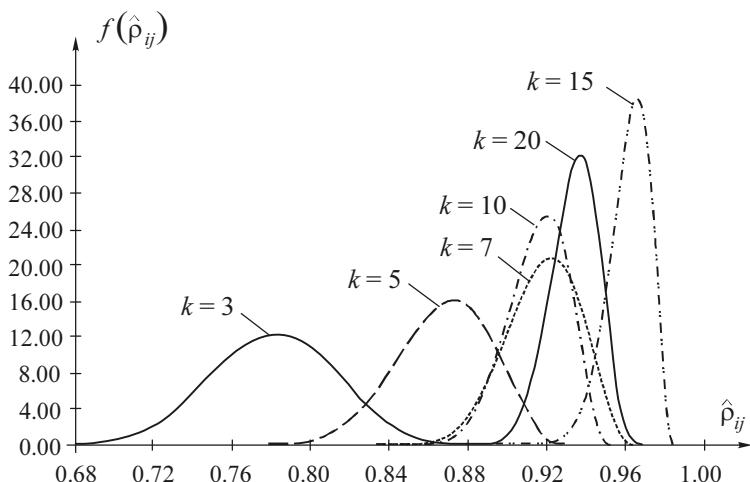


Рис. 12.27. Плотности распределения оценок корреляционного отношения для  $\rho_{ij}^2 = 1$  при использовании РЧГ для различного количества интервалов  $k$ ,  $n = 100$

способах группирования, практически совпадают, а с увеличением числа интервалов наблюдается расхождение функций плотности оценок для разных способов группирования. Например, при объеме  $n = 100$  начиная с  $k = 10$  плотности распределения оценки (12.42), вычисленные с использованием РИГ или РЧГ, в большей степени смещаются вправо относительно истинного значения корреляционного отношения, чем при асимптотически оптимальном группировании. Различие в распределениях оценок при РЧГ и РИГ при  $n = 100$  наблюдается при большем числе интервалов (при  $k \geq 20$ ).

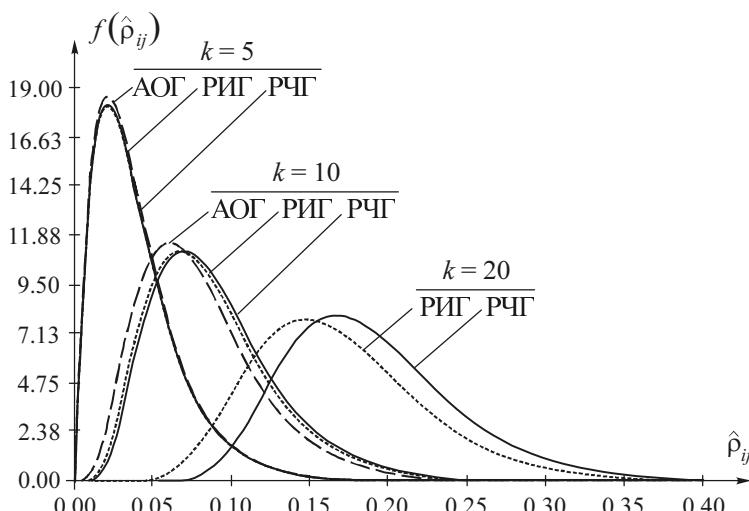


Рис. 12.28. Плотности распределения оценок корреляционного отношения для  $\rho_{ij}^2 = 0$  при использовании АОГ, РИГ, РЧГ для различного числа интервалов  $k$ ,  $n = 100$

Так как моделирование оценок корреляционного отношения проводилось при  $\rho_{ij}^2 = 0$ , то очевидно, что предпочтительней выбор способа группирования, плотность оценок при котором лежит левее. С другой стороны, при росте числа интервалов группирования в случае АОГ и РИГ появляются интервалы, для которых число наблюдений  $n_l$  оказывается равным нулю. Для АОГ это крайние интервалы, а для РИГ – интервалы, находящиеся между «удаленными» наблюдениями и основной группой. Наличие интервалов с нулевыми частотами попада-

ния приводит к снижению точности оценивания корреляционного отношения  $\hat{\rho}_{ij}^2$ . Если сопоставить рис. 12.26 и 12.28, то становится очевидным, что в случае близости  $\rho_{ij}^2$  к нулю целесообразно использовать малое число интервалов, при этом будет сказываться положительный эффект от асимптотически оптимального группирования.

Несколько иной и сложнее выглядит ситуация, когда рассматриваются распределения оценок  $\hat{\rho}_{ij}^2$  при  $\rho_{ij}^2 = 1$  или  $\rho_{ij}^2$ , близких к единице. На рис. 12.29 приведены плотности оценок  $\hat{\rho}_{ij}^2$  при различных способах группирования для случая  $\rho_{ij}^2 = 1$  и объеме случайных величин  $n = 100$ . На какие выводы наталкивает данный рисунок? Во-первых, точность оценок возрастает с числом интервалов (уменьшается смещение). Во-вторых, при малом числе интервалов группирования  $k$  (относительно объема выборки  $n$ ) использование РИГ выглядит предпочтительней, так как плотности оценок  $\hat{\rho}_{ij}^2$  при одинаковом числе интервалов расположены правее, чем плотности оценок для АОГ и РЧГ.

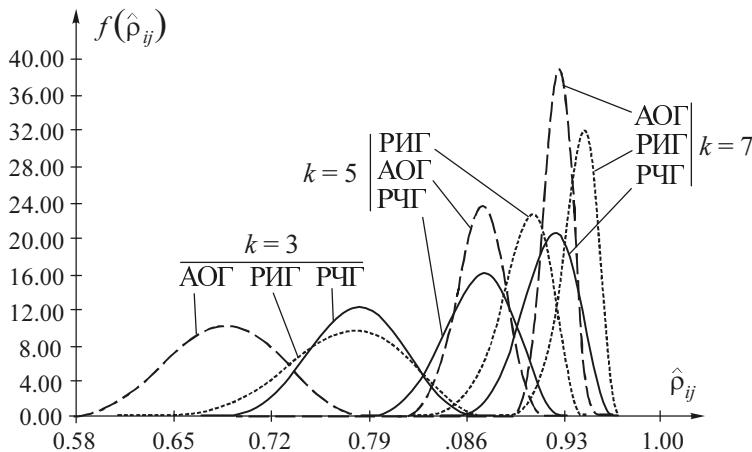


Рис. 12.29. Плотности распределения оценок корреляционного отношения для  $\rho_{ij}^2 = 1$  при использовании АОГ, РИГ и РЧГ

для различного числа интервалов  $k$ ,  $n = 100$

Однако оценки корреляционного отношения  $\hat{\rho}_{ij}^2$ , построенные с использованием РИГ, сильно зависят от крайних граничных точек интервалов группирования  $X_j^{\min}$  и  $X_j^{\max}$ , так как эти точки определяют длину интервалов. Как и в случае  $\rho_{ij}^2 = 0$ , неоправданное завышение числа интервалов при РИГ (и при АОГ) приводит к ухудшению свойств оценок корреляционного отношения. Причина ухудшения свойств оценок  $\hat{\rho}_{ij}^2$  заключается в упомянутом выше обнулении частот попаданий  $n_l$  для нескольких интервалов группирования, которое приводит к занижению оценки корреляционного отношения. Существенное изменение функций распределения оценок  $\hat{\rho}_{ij}^2$  в случае РИГ показано на рис. 12.30. Асимптотически оптимальное группирование при неправильном (занесенном) выборе количества интервалов, как и в случае РИГ, приводит к «искаженным» функциям распределения.

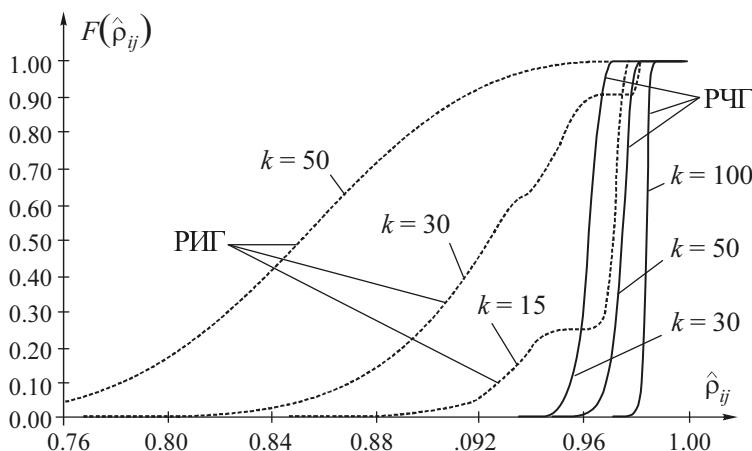


Рис. 12.30. Распределения оценок корреляционного отношения для  $\rho_{ij}^2 = 1$  при использовании РИГ и РЧГ для различного числа интервалов  $k$ ,  $n = 250$

Поэтому для АОГ и РИГ можно определить «критические» значения числа интервалов, начиная с которых появляются нулевые частоты

попадания  $n_l$ , и, как следствие, происходит ухудшение свойств оценок корреляционного отношения.

Увеличение объемов выборок случайных величин не изменяет выявленной закономерности по влиянию способов и количества интервалов группирования на распределения оценок корреляционного отношения. С ростом объемов происходит естественное увеличение значений для «критических» чисел интервалов группирования, начиная с которых наблюдается оговоренное ухудшение свойств оценок корреляционного отношения при использовании АОГ или РИГ.

Для вычислений оценок корреляционного отношения, которые существенно больше нуля, можно рекомендовать использовать РЧГ, так как в данном случае свойства вычисляемых оценок меньше зависят от числа интервалов группирования. Если было принято решение о применении АОГ или РИГ, то прежде всего следует убедиться, что при разбиении на интервалы отсутствуют нулевые частоты попаданий  $n_l$ , в противном случае надо уменьшить число интервалов.

### **12.5.3. Исследование распределений статистики критерия проверки гипотезы о незначимости корреляционного отношения**

В первую очередь распределения статистик критериев, используемых при проверке гипотез о корреляционном отношении, исследовались в условиях принадлежности наблюдений многомерному нормальному закону.

Исследование распределения статистики критерия проверки гипотезы вида  $H_0: \rho_{ij}^2 = 0$  показало, что если осуществляется корректный выбор количества интервалов группирования  $k$ , то соответствующее теоретическое предельное  $F$ -распределение Фишера с  $k-1$  и  $n-k$  числом степеней свободы хорошо описывает эмпирическое распределение статистики  $F_1$  (12.43). Например, на рис. 12.31 представлены полученные в результате моделирования эмпирические распределения статистики  $F_1$  (12.43), построенные с использованием АОГ, РЧГ и РИГ, а также соответствующее теоретическое  $F_{k-1, n-k}$ -распределение статистики при проверке гипотезы  $H_0: \rho_{ij}^2 = 0$  для числа интервалов  $k = 5$  и объема выборки  $n = 100$ . Эмпирические распределения стати-

стики при любом варианте группирования хорошо согласуются с теоретическим при правильном выборе  $k$ .

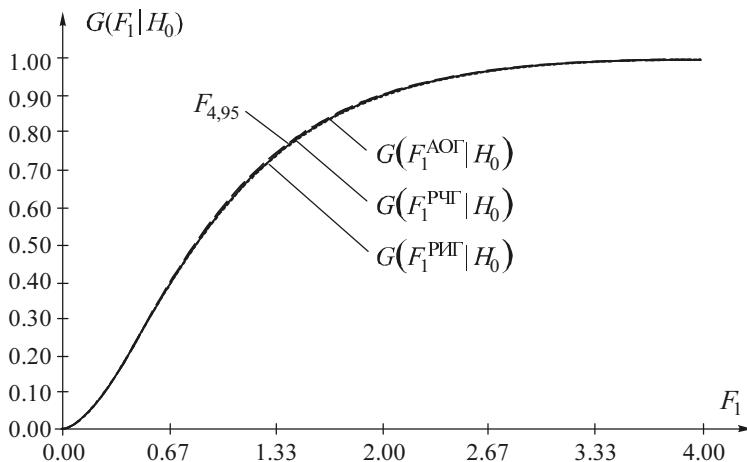


Рис. 12.31. Теоретическая функция распределения статистики  $H_0: \rho_{ij}^2 = 0$  (12.43) при проверке гипотезы  $F_1$  и эмпирические функции, построенные с использованием различных способов группирования:  $H_0: \rho_{ij}^2 = r_{ij}^2$ ,  $\rho_{ij}^2 > r_{ij}^2$

Пример некорректного выбора числа интервалов для асимптотически оптимального группирования приведен на рис. 12.32, где явно видно изменение закона распределения статистики  $F_1$  при АОГ, в то время как при использовании РЧГ эмпирическое распределение статистики практически совпадает с теоретическим. Превышение «критических» значений при выборе числа интервалов  $k$  приводит к изменению распределения статистики  $F_1$  и в случае применения РИГ.

Распределения статистики, используемой при проверке гипотезы вида  $H_0: \rho_{ij}^2 = 0$ , исследовались при различных способах группирования на многомерных законах, моделируемых с использованием предложенной в разделе 12.2.2 процедуры.

Из результатов, приведенных на рис. 12.33, следует, что в случае принадлежности случайного вектора многомерным законам, существенно отличающимся от нормального (построенным в соответствии с указанной процедурой по семейству распределений (12.4) с разными

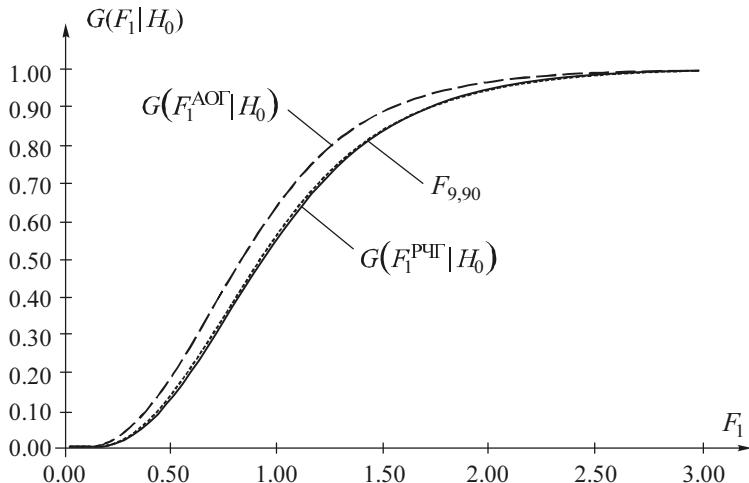


Рис. 12.32. Теоретическая функция распределения статистики  $F_1$  (12.43) при проверке гипотезы  $H_0: \rho_{ij}^2 = 0$ , и эмпирические функции, построенные с использованием АОГ и РЧГ:  $k = 10$ ,  $n = 100$

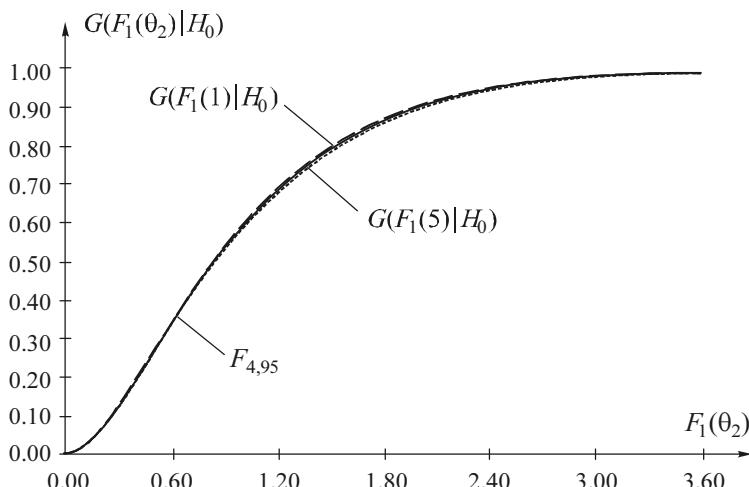


Рис. 12.33. Теоретическое  $F$ -распределение и эмпирические распределения статистик  $F_1(1)$ ,  $F_1(5)$  при проверке гипотезы

$$H_0: \rho_{ij}^2 = 0 : \text{РЧГ}, k = 5, n = 100$$

параметрами формы  $\theta_2$ ), распределения статистики (12.43)  $F_1$  незначимо отклоняются от  $F$ -распределения Фишера с числом степеней свободы  $k - 1$  и  $n - k$ . Отклонения в распределении статистики становятся существенными в случае наличия «тяжелых хвостов» многомерного распределения.

Это позволяет утверждать, что статистические выводы, опирающиеся при проверке гипотезы вида  $H_0: \rho_{ij}^2 = 0$  на классические результаты, будут оставаться корректными и при заметных нарушениях предположения о нормальности наблюдаемого многомерного закона.

#### 12.5.4. Исследование распределений статистики критерия линейности регрессии $X_i$ по $X_j$

Соотношения  $\rho_{ij}^2 \geq r_{ij}^2$  между теоретическими значениями корреляционного отношения  $\rho_{ij}^2$  и парного коэффициента корреляции  $r_{ij}$  не всегда выполняются для их оценок, особенно если связь (регрессионная или функциональная) линейная. Такое возможно, если  $\rho_{ij}^2$  и  $r_{ij}^2$  близки [297]. Нарушение неравенства для оценок происходит из-за вычислительных погрешностей, связанных с ограниченностью представления чисел в ЭВМ, случайностью оценок  $\hat{\rho}_{ij}^2$  и  $\hat{r}_{ij}^2$  и сильным влиянием на  $\hat{\rho}_{ij}^2$  числа интервалов и способов группирования.

Известно, что величина разности  $\rho_{ij}^2 - r_{ij}^2 > 0$  является индикатором нелинейности [205]. Однако, как уже сказано, разность  $\hat{\rho}_{ij}^2 - \hat{r}_{ij}^2$  вследствие случайности оценок может оказаться отрицательной, хотя абсолютная величина разности, как правило, невелика. Возможность нарушения неравенства  $\rho_{ij}^2 > r_{ij}^2$  для соответствующих оценок наглядно иллюстрирует рис. 12.34, на котором представлены плотности квадрата оценки парного коэффициента корреляции  $\hat{r}_{ij}^2$  и плотности оценок корреляционного отношения  $\hat{\rho}_{ij}^2$ , построенные для случая линейной зависимости  $X_i$  от  $X_j$  ( $r_{ij}^2 = \rho_{ij}^2 = 1$ ).

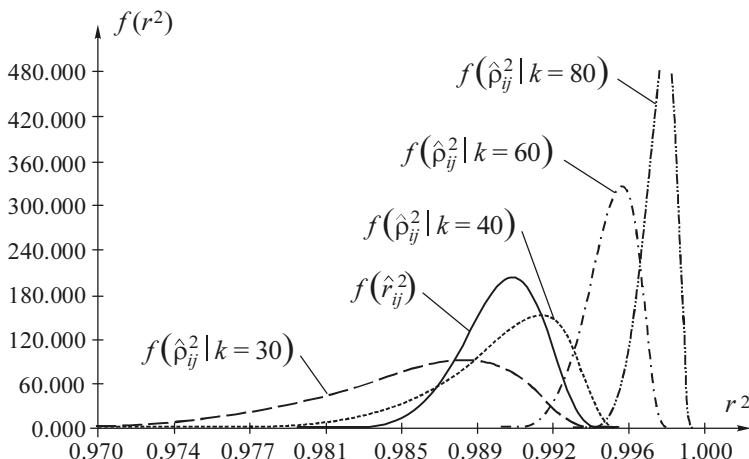


Рис. 12.34. Плотности распределения оценок корреляционного отношения  $\hat{\rho}_{ij}^2$  и квадрата парного коэффициента корреляции  $\hat{r}_{ij}^2$ , построенные при линейной зависимости  $X_i$  от  $X_j$ : РЧГ  $n = 100$

При вычислении оценок корреляционного отношения использовались интервалы равной частоты при объемах выборок случайных величин  $n = 100$ . На приведенном рисунке видно, что для объема  $n = 100$  с ростом числа интервалов группирования вероятность появления значений  $\hat{\rho}_{ij}^2 - \hat{r}_{ij}^2 < 0$  падает (плотности оценок «расходятся»), но остается положительной.

С увеличением объемов выборок  $n$  уменьшается дисперсия распределения оценки парного коэффициента корреляции. Поэтому для больших значений  $n$  и  $k$  вероятность появления значений  $\hat{\rho}_{ij}^2 - \hat{r}_{ij}^2 < 0$  оказывается практически нулевой. На рис. 12.35 отображены плотности оценок  $\hat{\rho}_{ij}^2$  и  $\hat{r}_{ij}^2$ , вид которых позволяет утверждать, что при объеме выборки  $n = 250$  и числе интервалов группирования  $k = 200$  при использовании РЧГ неравенство  $\rho_{ij}^2 > r_{ij}^2$  с вероятностью, близкой к единице, выполняется и для их оценок.

Однако и при значениях  $n = 250$  и  $k = 200$  распределение статистики (12.44)  $F_2$  даже в случае многомерного нормального закона не подчиняется  $F$ -распределению Фишера с числом степеней свободы  $k - 2$  и  $n - k$  (рис. 12.36). Дальнейшее увеличение объемов выборок

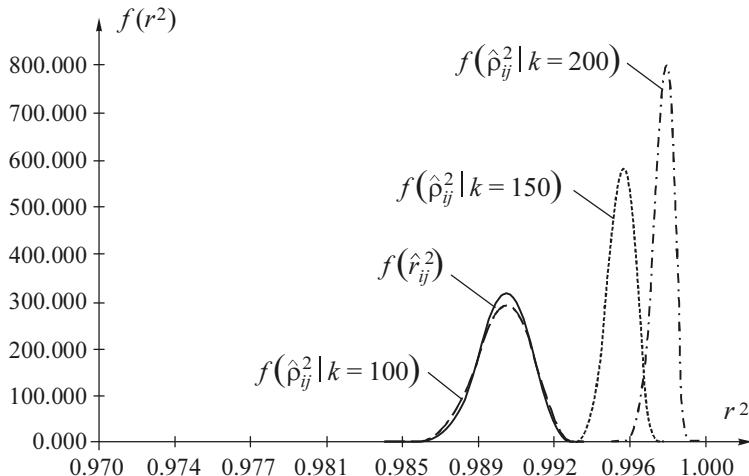


Рис. 12.35. Плотности распределения оценок корреляционного отношения  $\hat{\rho}_{ij}^2$  и квадрата парного коэффициента корреляции  $\hat{r}_{ij}^2$ , построенные при линейной зависимости  $X_i$  от  $X_j$ : РЧГ,  $n = 250$

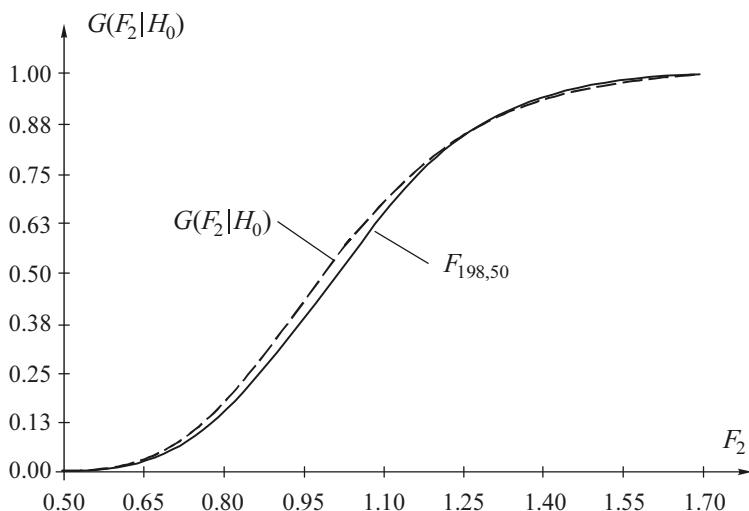


Рис. 12.36. Теоретическая и эмпирическая функции распределения статистики  $F_2$  (12.44) при проверке гипотезы  $H_0: \rho_{ij}^2 = 1$ : РЧГ,  $k = 200$ ,  $n = 250$

и числа интервалов группирования существенно не улучшает согласия между распределением данной статистики и соответствующим теоретическим распределением.

С другой стороны, проведенные исследования не опровергают, что распределение статистики  $F_2$  подчиняется  $F_{k-2,n-k}$ -распределению в пределе  $n \rightarrow \infty$ . При обработке реальных данных, когда вычисленное в соответствии с (12.44) значение статистики  $F_2$  оказывается отрицательным, можно рекомендовать рассмотреть значения оценок  $\hat{\rho}_{ij}^2$  и  $\hat{r}_{ij}^2$ . И если они близки к единице, можно выдвинуть предположение о линейной зависимости.

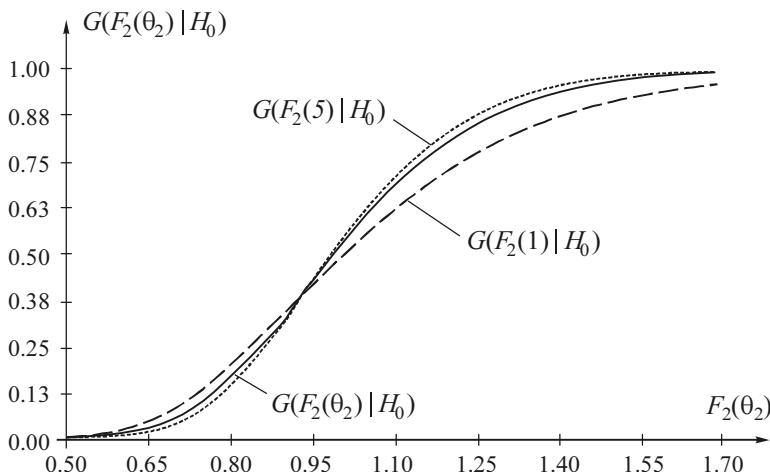


Рис. 12.37. Эмпирические функции распределения статистик  $F_2$ ,  $F_2(1)$  и  $F_2(5)$  при проверке гипотезы  $H_0: \rho_{ij}^2 = 1$ : РЧГ,  $k = 200$ ,  $n = 250$

В случае многомерного закона, отличного от нормального, есть основания утверждать, что ни для конечных объемов выборок, ни при  $n \rightarrow \infty$  распределение статистики  $F_2$  не будет описываться  $F_{k-2,n-k}$ -распределением. Это следует, во-первых, из различия эмпирических распределений статистики  $F_2$  для многомерного нормального закона и законов, моделируемых на основе семейства распределений (12.4) с параметрами формы  $\theta_2 = 1$  и  $\theta_2 = 5$  (рис. 12.37). Во-вторых, из пока-

занной ранее неустойчивости распределения статистики критерия проверки гипотез о парном коэффициенте корреляции вида  $H_0: r_{ij} = r_0$ , при  $|r_0| > 0.15$  к отклонению от нормальности.

## 12.6. Выводы

Разработанное программное обеспечение позволяет исследовать распределения описанных в данном разделе статистик многомерного анализа в соответствии с задаваемыми условиями. Основная закладка, через которую осуществляется доступ к процедурам исследования распределений статистик, имеет вид, представленный на рис. 12.38.

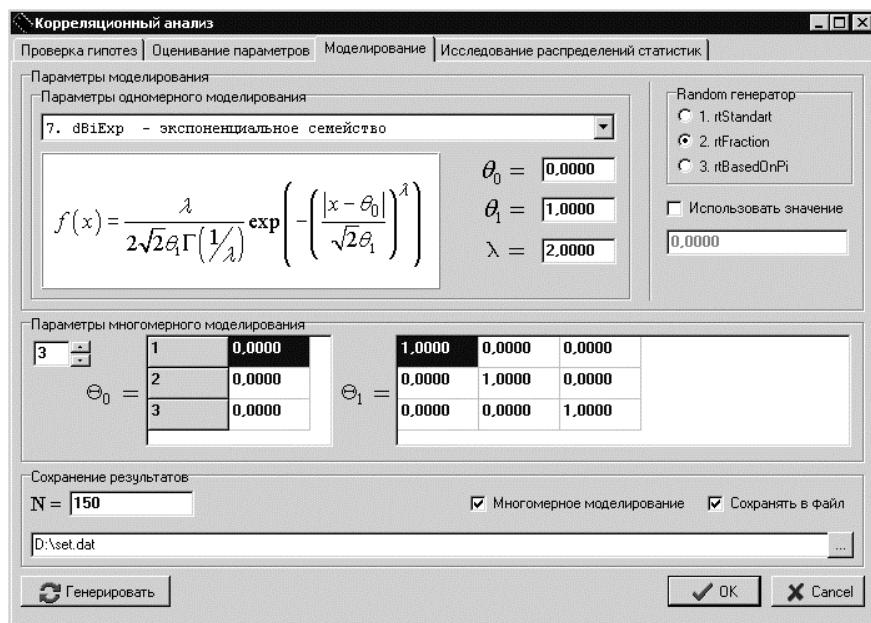


Рис. 12.38. Диалоговое окно моделирования распределений статистик

Исследования эмпирических распределений статистик, используемых в критериях проверки гипотез о векторе математических ожиданий и ковариационной матрице, при псевдослучайных величинах, подчиняющихся многомерному нормальному закону, показали, что они хорошо согласуются с теоретическими предельными распределениями,

полученными в классическом корреляционном анализе, и подтвердили эффективность методики исследований.

Исследования распределений статистик  $X_m^2$  и  $T^2$  в случае многомерных законов, отличающихся от нормального в достаточно широких пределах (более острогорбых или более плосковершинных), показали, что значимого изменения предельных распределений статистик не происходит. Эмпирические распределения данных статистик по-прежнему хорошо описываются предельными законами, полученными в классическом корреляционном анализе в предположении о нормальности наблюдаемого вектора. Это существенно расширяет сферу корректного применения методов классического корреляционного анализа при проверке гипотез о векторе математических ожиданий в приложениях. Аналогичная ситуация наблюдается в одномерном случае: на распределениях статистик, вычисляемых при проверке гипотез вида  $H_0: \mu = \mu_0$  при известной и неизвестной дисперсии, отклонения от нормальности наблюдаемого одномерного закона сказываются незначительно.

Используемые в критериях проверки гипотез о ковариационной матрице многомерного закона статистики  $L_1$  и  $L_2$  существенно зависят от наблюдаемого многомерного закона, что и подтвердили проведенные исследования. Это согласуется с полученными результатами при моделировании распределений аналогичных статистик в одномерном случае [247] (при проверке гипотез вида  $H_0: \sigma = \sigma_0$  при известном и неизвестном математическом ожидании). Для распределений статистик  $L_1$  и  $L_2$  были найдены аналитические модели законов, описывающие распределения этих статистик при определенных значениях размерности  $m$  и параметре формы  $\theta_2$ . При необходимости аналогичные аналитические модели могут быть построены для любых интересующих нас значений параметров  $m$  и  $\theta_2$ .

Исследования эмпирических распределений статистик, используемых в критериях проверки гипотез о парных, частных и множественных коэффициентах корреляции, при псевдослучайных величинах, подчиняющихся многомерному нормальному закону, показали, что они хорошо согласуются с теоретическими предельными распределениями, полученными в классическом корреляционном анализе. Отмечено существенное влияние метода оценивания коэффициентов корреляции на распределения статистик данных критериев.

Исследования распределений статистик  $t$ ,  $t^P$  и  $F$  в случае многомерных законов, отличающихся от нормального в достаточно широких пределах, показали, что значимого изменения предельных распределений статистик не происходит. Эмпирические распределения данных статистик по-прежнему хорошо описываются предельными законами, полученными в классическом корреляционном анализе в предположении о нормальности наблюдаемого вектора. Это раздвигает границы корректного применения методов классического корреляционного анализа при проверке гипотез о нулевых значениях парного, частного и множественного коэффициентов корреляции.

В случае многомерных законов с «тяжелыми хвостами» наблюдается значимое отличие распределений статистик  $t$ ,  $t^P$  и  $F$  от предельных классических.

Используемые в критериях проверки гипотез о равенстве заданному значению парного или частного коэффициента корреляции статистики  $z_0$  и  $z_0^P$  существенно зависят от наблюдаемого многомерного закона. Это подтверждает выдвинутое в [205] предположение о зависимости распределений данных статистик от вида многомерного закона. В то же время классическими результатами можно пользоваться при проверке гипотез вида  $H_0: r_{ij} = r_0$  в случае  $|r_0| \leq 0.15$ .

Исследование влияния способов группирования и количества интервалов на оценку корреляционного отношения показало, что оценка корреляционного отношения прежде всего сильно зависит от количества интервалов группирования. Как правило, уменьшение количества интервалов группирования приводит к уменьшению значений оценок корреляционного отношения, в то время как увеличение сопровождается ростом  $\hat{\rho}_{ij}^2$ . При использовании асимптотически оптимального и равнointervalного группирования необходимо корректно выбирать число интервалов, избегая нулевых частот попадания  $n_l$  в интервалы, приводящих к ухудшению свойств оценок корреляционного отношения. Разбиение области определения на интервалы равной частоты показало себя как наиболее предпочтительное для вычисления оценок  $\hat{\rho}_{ij}^2$ .

Исследования распределения статистики, используемой в критерии проверки гипотезы вида  $H_0: \rho_{ij}^2 = 0$ , при псевдослучайных величинах,

подчиняющихся многомерному нормальному закону, показали, что оно хорошо согласуется с теоретическим предельным распределением, полученным в классическом корреляционном анализе. В случае многомерных законов, отличающихся от нормального в достаточно широких пределах (более островершинных или более плосковершинных), изменения предельного распределения статистики  $F_1$  не происходит. Эмпирическое распределение данной статистики по-прежнему хорошо описывается предельными законами, полученными в предположении о нормальности наблюдаемого вектора.

Полное исследование распределения статистики критерия, используемого при проверке гипотезы вида  $H_0: \rho_{ij}^2 = r_{ij}^2$ , затруднено из-за вычислительных проблем, вследствие которых при наличии линейной связи соотношение для теоретических величин  $\rho_{ij}^2 > r_{ij}^2$  может не выполняться для их оценок.

---

## 13. СИСТЕМА СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ОДНОМЕРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

---

### 13.1. Возможности системы

**И**спользуемая в исследованиях программная система является дальнейшим развитием системы статистического анализа одномерных наблюдений [224, 262, 91, 298].

Развиваемая программная система предназначена для решения двух классов задач. Во-первых, для решения задач статистического анализа в различных приложениях. Во-вторых, для исследования вероятностных закономерностей в распределениях оценок параметров или статистик критерииев проверки гипотез, в том числе в нестандартных условиях приложений, когда не выполняются классические предположения, обусловливающие корректность применения соответствующих критериев.

Система обладает достаточно широкими возможностями для решения задач статистического анализа.

1. Обеспечивается широкий выбор параметрических моделей теоретических законов распределения (около 40 стандартных законов). Множество параметрических моделей может практически неограниченно расширяться за счет моделей законов, получаемых с помощью операций над этими стандартными моделями (с помощью операций сдвига, масштабирования, смешивания, произведения, усечения, логарифмирования законов).

2. Универсальное представление входных данных обеспечивает возможность обрабатывать точечные, группированные, цензурированные, частично группированные и интервальные выборки.

3. Группирование наблюдений в задачах робастного оценивания и проверки статистических гипотез может осуществляться различными способами. Может использоваться асимптотически оптимальное, равновероятное, равночастотное, равномерное группирование или некоторое заданное «вручную».

4. Для проверки гипотез о согласии наблюдаемого эмпирического распределения с теоретическим используется ряд критериев согласия: отношения правдоподобия,  $\chi^2$  Пирсона, типа  $\chi^2$  Никулина (Рао–Робсона–Никулина), Никулина–Джапаридзе, Колмогорова, Смирнова,  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова и  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга. На базе результатов авторов программной системы корректность применения критериев согласия гарантируется как при проверке простых, так и при проверке сложных гипотез.

5. Для проверки гипотезы о принадлежности наблюдаемой выборки нормальному закону, кроме перечисленных критериев согласия, может использоваться ряд специальных критериев «нормальности»: симметрии, эксцесса, Эпписа–Палли, Шапиро–Уилка, Д’Агустино, Фросини, Хегази–Грина, Гири, Дэвида–Хартли–Пирсона, Шпигельхальтера.

6. Для проверки гипотезы об однородности законов, которым соответствуют две анализируемые выборки, используются критерии Лемана–Розенблatta, Смирнова и модифицированный критерий Смирнова.

7. Для проверки гипотез об однородности средних используются критерии сравнения двух выборочных средних при известных дисперсиях, при неизвестных, но равных дисперсиях (критерий Стьюдента), при неизвестных и неравных дисперсиях,  $F$ -критерий. В этих же целях применяется целая совокупность непараметрических критериев: Уилкоксона, Манна–Уитни, Краскела–Уаллиса.

8. Для проверки гипотезы об однородности дисперсий используются критерии Бартлетта, Кокрена, Фишера, Хартли, Левене, Ансари–Бредли, Сижела–Тьюки, Зигеля–Тьюки, Муда, Кейпена, Клотца.

9. Для проверки гипотез о случайности или об отсутствии тренда в средних или в характеристиках рассеяния используются: критерий автокорреляции, критерии Фостера–Стюарта, Кокса–Стюарта, Вальда–Вольфовича, Бартелса, Хсу, ранговые критерии обнаружения сдвига в дисперсии.

10. Параметры могут оцениваться различными методами: максимального правдоподобия, максимального правдоподобия с предварительной группированием наблюдений,  $MD$ -оценивания с минимизацией расстояний, измеряемых статистиками типа Колмогорова, статистиками типа  $\omega^2$  и  $\Omega^2$  Мизеса, с использованием предложенных авторами оптимальных  $L$ -оценок по выборочным квантилям.

11. Возможно построение робастных оценок, предусматривающих предварительное группирование данных, что снижает или исключает влияние аномальных ошибок измерений. На базе включенных в систему робастных методов оценивания реализована эффективная параметрическая процедура отбраковки аномальных наблюдений.

12. Графическая подсистема позволяет просматривать функции распределения, плотности, функции интенсивности, гистограммы, ядерные оценки плотности.

13. Разработаны средства для имитационного моделирования распределений статистик всех используемых в системе статистических критериев при проверке простых и сложных гипотез в различных нестандартных условиях, при справедливости проверяемой или различных конкурирующих гипотез. Это позволяет исследовать распределения статистик при различных предположениях и строить приближенные математические модели этих распределений, исследовать мощность критериев относительно различных альтернатив.

14. На базе системы возможно проведение исследований законов распределений одномерных статистик различных критериев.

На настоящий момент в программной системе разделены функции статистического анализа данных и имитационного моделирования распределений статистик исследуемых критериев.

Естественно, что функции статистического анализа и возможности идентификации законов используются при построении моделей для эмпирических распределений статистик, полученных в результате моделирования.

С другой стороны, распределения статистик некоторых критериев, например непараметрических критериев согласия, при проверке сложных гипотез относительно законов типа бета-распределения зависят от конкретных значений параметров, которые при анализе заранее неизвестны, т. е. невозможно для бесконечного множества ситуаций заранее построить модель распределения статистики применяемого критерия согласия. Однако при проведении анализа с применением

соответствующего критерия в условиях проверки сложной гипотезы можно промоделировать распределение статистики критерия в этих условиях (при значении параметра, от которого зависит распределение статистики критерия, соответствующего этой оценке). Это значит, что распределение статистики используемого критерия будет исследоваться «в реальном времени» проверки гипотезы, а результат будет использован при окончательном выводе о принятии или отклонении проверяемой гипотезы. Именно в данном направлении происходит развитие подсистемы статистического анализа.

Мы не ставили цель подробно описать программную систему и отразили только те функции, которые посчитали полезными и связанными с содержанием предыдущих разделов книги.

## 13.2. Модели используемых параметрических законов распределения

Перечень стандартных законов распределения, реализованных в программной системе, приведен в табл. 13.1. В ней даны идентификаторы распределений, синонимы идентификаторов, название распределения и число параметров, определяющих его форму (вид), исключая параметр масштаба и сдвига. Вместо идентификаторов «Dxx» можно использовать их синонимы, указанные в таблице.

Список используемых законов может вводиться из файла, содержащего описание соответствующего списка, задаваться в режиме диалога или задаваться в файле инициализации «is.ini» в разделе [Distributions].

В файле «is.ini» содержатся ключевые слова разделов, команды инициализации и комментарии. Структура файла:

```
[Distributions]
<Список распределений>
[Samples]
<Список выборок>
[Options]
<Параметры>
[Job]
<Задание на выполнение>
```

Таблица 13.1

## Законы распределений, встроенные в программную систему

Иденти-фикатор	Синоним	Название распределения	Число па-раметров
D0	UNIFORME	Равномерное	0
D1	EXP	Экспоненциальное	0
D2	SEMI_NORM	Полунормальное	0
D3	RELEY	Рэлея	0
D4	MAXWELL	Максвелла	0
D5	CHI	Модуля $n$ -мерного нормального распреде-ления	0
D6	PARETO	Парето	1
D7	ERL	Эрланга	1
D8	LAPLACE	Лапласа	0
D9	NORM	Нормальное	0
D10	LN_NORM	Логарифмически ( $\ln$ ) нормальное	2
D11	LG_NORM	Логарифмически ( $\lg$ ) нормальное	2
D12	CAUCHIE	Коши	0
D13	LOGIST	Логистическое	0
D14	VEI	Вейбулла	1
D15	MIN	Минимального значения	0
D16	MAX	Максимального значения	0
D17	G_MIN	Обобщенного минимального значения	1
D18	NAK	Накагами	1
D19	GAMMA	Гамма	1
D20	BETA_I	Бета I рода	2
D21	BETA_II	Бета II рода	2
D22	BETA_III	Бета III рода	3
D23	SB_J	Sb-Джонсона	2
D24	SL_J	Sl-Джонсона	2
D25	SU_J	Su-Джонсона	2
D26	DEXP	Двустороннее экспоненциальное	1
D27	H	H-распределение	2
D28	G	Г-распределение	2
D29	L	L-распределение	2
D30	SIN	Синуса	0
D31		Квадратичное (Ядро Епанечникова)	0
D32	INVGAUSS	Обратное гауссовское распределение	2

Окончание табл. 13.1

Идентификатор	Синоним	Название распределения	Число параметров
<b>D33</b>	LLD	Лог-логистическое распределение	1
<b>D50</b>	PGV	Обобщенное распределение Вейбулла	2
	<b>KOLM</b>	Распределение статистики Колмогорова	0
	<b>KOLM_CENS</b>	Распределение статистики Колмогорова по цензурированной выборке	1
	<b>RENI</b>	Распределение статистики Реньи	0
	<b>RENI1</b>	Точное распределение статистики Реньи (односторонний критерий)	2
	<b>SMIR</b>	Распределение статистики Смирнова	0
	<b>A1</b>	Распределение статистики $\omega^2$	0
	<b>A2</b>	Распределение статистики $\Omega^2$	0
	<b>DStudent</b>	Распределение Стьюдента	1
	<b>Chi_nc</b>	Нецентральное распределение $\chi^2$	2

Разделы состоят из наборов команд, причем в одной строке может быть только одна команда. Каждая команда имеет следующий формат:

[<идентификатор> =] <процедура> (<список параметров>).

<идентификатор> – это уникальное имя объекта, инициализируемого процедурой <процедура>, состоит не более чем из 15 букв и цифр без пробелов и управляющих символов. Идентификатор может использоваться в качестве параметров других процедур.

<список параметров> – это набор параметров процедуры <процедура>, разделенных запятой.

### Комментарии

Комментарием считается любая строчка, начинающаяся с символа «\*» или «//».

### Раздел [Distributions]

В этом разделе происходит инициализация списка распределений. Распределение инициализируется командой

<распределение> = {D0 | D1 | D2 | ... | D38} ([<список параметров>]),

где D0, D1, ..., D38 – это зарезервированные в системе идентификаторы распределений. Список возможных законов приведен в табл. 13.1.

Над стандартными распределениями можно применять операции преобразования:

$\langle\text{распределение}\rangle = \langle\text{операция}\rangle (\langle\text{список распределений}\rangle, [\langle\text{параметр}\rangle])$ ,

где  $\langle\text{операция}\rangle = \{\text{Shift} | \text{Scale} | \text{Reflection} | \text{Left} | \text{Right} | \text{Mixt} | \text{Mult}\}$ .

Список возможных операций приведен в табл. 13.2.

### Раздел [Samples]

В этом разделе происходит инициализация списка выборок. Выборка инициализируется командой

$\langle\text{выборка}\rangle = \langle\text{имя файла}\rangle$

Имя файла не должно содержать знаков препинания и круглых скобок.

### Раздел [Options]

В разделе [Options] задаются основные параметры системы. В табл. 13.3 приведены основные опции системы.

### Раздел [Job]

В разделе [Job] содержится задание на выполнение. Список доступных команд приведен в таблице 13.4.

Таблица 13.2

#### Операции над распределениями

Операция	Название	Число распределений	Число параметров
Shift	Сдвиг	1	1
Scale	Масштаб	1	1
Reflection	Зеркальное отражение	1	0
Left	Усечение слева	1	1
Right	Усечение справа	1	1
Mixt	Смесь	2	1
Mult	Произведение	2	0

**Примечание 1.** Новые распределения рекомендуется обозначать строчными буквами, чтобы они отличались от стандартных.

**Примечание 2.** При наборе необходимо учитывать регистр, т. е. нельзя например, набирать «MIXT» вместо «Mixt».

**Примечание 3.** Если параметр распределения не указан явно, то он инициализируется по умолчанию с флагом «неизвестный» и допускает возможность оценивания. В противном случае параметр инициализируется с флагом «известный» и оцениваться не может.

**Пример.** Задание распределений в разделе [Distributions].

[Distributions]

```
d1=D9()           // инициализируем d1 стандартным нормальным законом
d2=Scale(d1,2)    // добавляем параметр масштаба, равный 2
d3=Shift(d2,1)    // добавляем параметр сдвига, равный 1
d4=Shift(Scale(D9(),2),1)      // то же, что и d3, но в одной строке
d5=Shift(Scale(D9())) // то же, что и d4, но параметры неизвестны
d6=Mixt(d4,d5,0.1) // смесь двух нормальных распределения с параметром смеси 0.1 (параметр смеси задает долю распределения d4)
```

Таблица 13.3

**Опции программной системы**

Константа	Допустимые значения	Содержание
EstimateMethod	OMP	Метод максимального правдоподобия
	KOLM	Метод минимума статистики Колмогорова
	MISES	Метод минимума статистики $\omega^2$ Мизеса
	MISES_B	Метод минимума статистики $\Omega^2$ Мизеса
	QUANTIL	$L$ -оценки
Robust	ON   OFF	Группирование перед оцениванием по методу максимального правдоподобия
NuclearEstimate	ON   OFF	Применять непараметрическое оценивание
NuclearFunction	D9()   D31()	Тип ядерных функций
W0	0   1	Использовать критерий отношения правдоподобия
W1	0   1	Использовать критерий $\chi^2$ Пирсона
W2	0   1	Использовать критерий Колмогорова
W3	0   1	Использовать критерий Смирнова
W4	0   1	Использовать критерий $\omega^2$ Мизеса
W5	0   1	Использовать критерий $\Omega^2$ Мизеса
W6	0   1	Использовать критерий Ренни
Nik	ON   OFF	Поправка Никулина
GenTestDistr	ON   OFF	Моделирование распределения статистик (использовать метод Монте-Карло при проверке гипотезы о согласии)
NumberSamples	10 .. 2000	Число выборок
MaxSampleSize	100 .. 2000	Максимальный объем выборки
SignLevel	0 .. 1	Уровень значимости критерия

Окончание табл. 13.3

Константа	Допустимые значения	Содержание
SearchMeth	RND	Случайный поиск
	DIR	Покоординатный спуск
	MHG	Метод Хука–Дживса
	SG1	Метод сопряженных градиентов (Флетчера–Ривса)
	SG2	Метод сопряженных градиентов (Пшеничного)
	MGS	Метод градиентного спуска
EpsilonVariable	$10^{-10} .. 10^{-2}$	Точность поиска по переменным
EpsilonFunction	$10^{-10} .. 10^{-2}$	Точность поиска по функции
MaxIteration	50 .. 1000	Максимальное число итераций
Newton	ON   OFF	Использовать метод Ньютона при одномерном поиске
Approximate	ON   OFF	Аппроксимировать производные функций конечными разностями
Trace	0	Не делать запись сообщений в журнал
	1	Кратко
	2	Подробно
	3	Очень подробно
	4	Выводить все сообщения в журнал
GroupNumb	5..50	Число интервалов
GroupType	GR_AOG	Асимптотически оптимальное
	GR_EPG	Равновероятное
	GR_EFG	Равночастотное
	GR_EG0	Равномерное
	GR_MIN	Минимальное (область определения разбивается на интервалы так, чтобы в каждом интервале было только одно наблюдение)
GrLeft	Число	Граница слева при равномерном группировании
GrRight	Число	Граница справа при равномерном группировании
GrDelta	Число	Длина интервала при равномерном группировании

Таблица 13.4

## Команды пакетного задания

Команда	Содержание
Set(<опция>, <значение>)	Установить опцию системы
Estimate(<выборка>, <распределение>)	Оценить параметры
Test(<выборка>, <распределение>)	Проверить согласие
Estimate(<выборка>, <распределение>)	Оценить параметры
Test(<выборка>, <распределение>)	Проверить согласие
Ident()	Идентификация всех выборок и распределений
IdentSample(<выборка>)	Идентификация выборки
IdentDistr(<распределение>)	Идентификация распределения
Ident(<выборка>, <распределение>)	Оценить параметры и проверить согласие
Anomalous(<выборка>, <распределение>)	Выделить аномальные наблюдения
Shell()	Запуск оболочки
Exit()	Выход

**Пример.** Задания в разделе [Job].

[Job]

```
Set(EstimateMethod,KOLM) // Устанавливаем метод оценивания
Estimate(s1, d5) // Оценить параметры нормального распределения
Test(s1, d5) // Проверить согласие
Anomalous(s1, d5) // Выделить аномальные наблюдения
```

Параметры системы можно установить в режиме диалога. Для вызова окна настройки параметров можно нажать кнопку  на панели инструментов (рис. 13.1) или в меню **Действия** выбрать пункт **Параметры** (рис. 13.2).

В форме **Параметры** основные параметры системы распределены по вкладкам. Вкладки **Распределения**, **Выборки** и **Задания** соответствуют разделам [Distributions], [Samples] и [Job] файла «is.ini». Кнопка **По умолчанию** восстанавливает исходные значения параметров по умолчанию. Кнопка **Сохранить** сохраняет сделанные изменения в файле «is.ini».

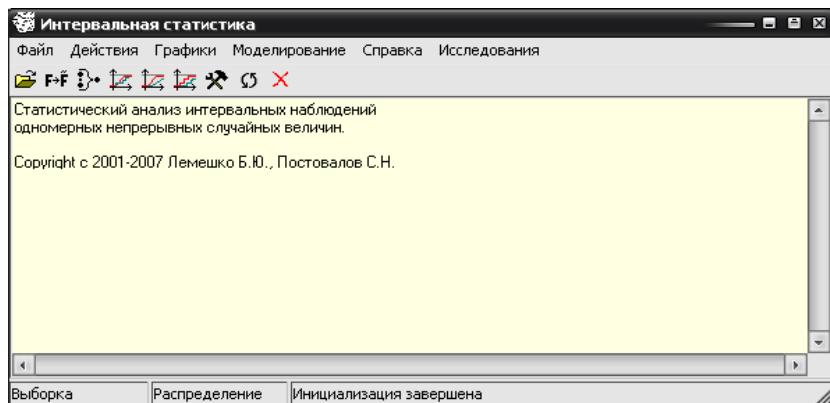


Рис 13.1. Главное меню системы

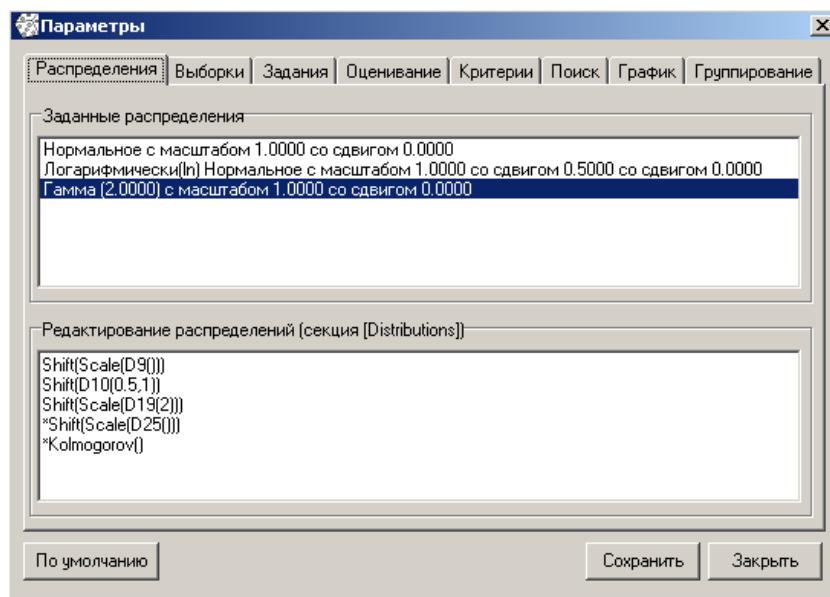


Рис. 13.2. Настройка параметров системы в режиме диалога

На вкладке **Оценивание** выбирается метод оценивания параметров распределения (по умолчанию).

На вкладке **Критерии** можно задать критерии согласия, по которым будет проверяться согласие выборочного распределения с теоретическим законом. Уровень значимости определяет вероятность

ошибки первого рода (вероятность отвергнуть истинную гипотезу). Проверяться может как простая (когда параметры законов распределений не оцениваются), так и сложная гипотеза о согласии (когда перед проверкой согласия находят оценки параметров распределения по этой же выборке). Если поставить флажок **Использовать метод Монте-Карло**, то при вычислении вероятности согласия (достигаемого уровня значимости) будет проводиться моделирование выборок по основной гипотезе и подсчет числа случаев, когда статистика критерия была меньше значения статистики по проверяемой выборке либо равна ему. Число выборок и объем задаются в соответствующих полях формы.

На вкладке **Поиск** задается метод поиска, используемый при нахождении оценок параметров распределений.

На вкладках **График** и **Группирование**, соответственно, настраиваются параметры графиков и указываются тип группирования и число интервалов.

## 13.3. Проведение статистического анализа

### 13.3.1. Оценивание параметров и проверка согласия

Статистический анализ выборки производится в форме «Оценивание параметров и проверка согласия» (кнопка  на панели инструментов), как показано на рис. 13.3. Необходимо выбрать выборку, закон распределения, метод оценивания и критерий согласия.

Выборку можно выбрать из списка либо открыть файл с выборкой . В списке отображаются только те выборки, которые перечислены в разделе [Samples] в файле инициализации «is.ini». Здесь можно просмотреть саму выборку , эмпирическую функцию распределения по этой выборке , гистограмму  (если выборка группированная), ядерную оценку плотности ; а также вычислить выборочные квантили по заданным вероятностям – кнопка  или по заданным точкам – кнопка ; вычислить частоты (т. е. отношение количества наблюдений, попавших левее точки к объему выборки) – кнопка .

В списке законов распределения отображаются те распределения, которые перечислены в разделе [Distributions] в файле инициализации «is.ini». Можно открыть другой (подготовленный ранее) список распределений , он задается в файле с расширением «dst». В форме **Параметры распределений** (кнопка ) выдается информация о распре-

делениях списка: идентификатор, наименование, тип, область определения, граница слева, граница справа, число параметров, параметры и их значения. Здесь также предусмотрена возможность просмотра графиков функции распределения и функции плотности , а также возможность вычисления квантилей распределения по заданным вероятностям – кнопка **Q** и по заданным точкам  $x$  вычисления вероятностей  $P\{x < X\}$  – кнопка **P**.

Кнопка **График** выводит функцию распределения выбранного закона и эмпирическую функцию распределения выбранной выборки на одном рисунке.

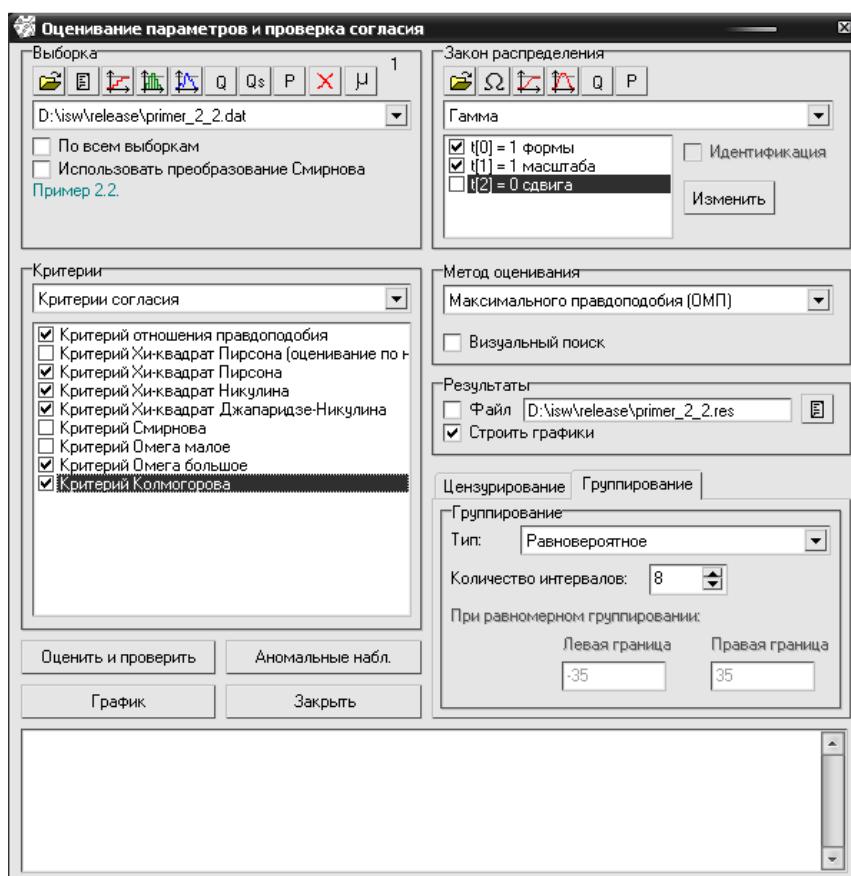


Рис. 13.3. Форма «Оценивание параметров и проверка согласия»

Чтобы отметить, какие параметры выбранного закона распределения требуется оценить, нужно поставить флажки рядом с оцениваемыми параметрами (рис. 13.3). Если, наоборот, параметр оценивать не надо, то флажок надо снять и с помощью кнопки **Изменить** задать значение параметра вручную.

При нажатии кнопки **Оценить и проверить** производится поиск оценок параметров закона распределения выбранным методом оценивания и выполняется проверка согласия выбранной выборки с выбранным законом распределения. При этом вычисляются оценки тех параметров, напротив которых стоит флажок. Если не выбран ни один из критериев согласия, то производится только оценивание параметров. Проверяется простая гипотеза, если ни один из параметров не оценивается.

Если стоит флажок **По всем выборкам**, то действия будут выполняться последовательно по каждой выборке. Если стоит флажок **Идентификация**, то по совокупности критериев согласия будет найден наилучший закон (из тех распределений, которые представлены в списке), описывающий конкретную выборку.

При нажатии кнопки **Аномальные наблюдения** производится отбраковка аномальных наблюдений по выбранному закону распределения.

### 13.3.2. Проверка на нормальность

Проверка выборки на принадлежность семейству нормальных распределений является достаточно частой задачей на практике. Для проверки нормальности можно использовать и универсальные критерии согласия, доступные в форме **Оценивание параметров и проверка согласия**. Вместе с тем известно множество специальных критериев, ориентированных на проверку отклонения выборки от нормального закона. Перечень критериев, используемых для проверки отклонения от нормального закона, представлен в разделе 5.

Чтобы вызвать форму для проверки нормальности, следует в главном меню **Действия** выбрать пункт **Проверка на нормальность** (рис. 13.4). Далее флажками требуется отметить критерии, которые будут использоваться, после чего нажать на кнопку **Проверить**. Результаты проверки гипотезы нормальности выводятся в окно сообщений.

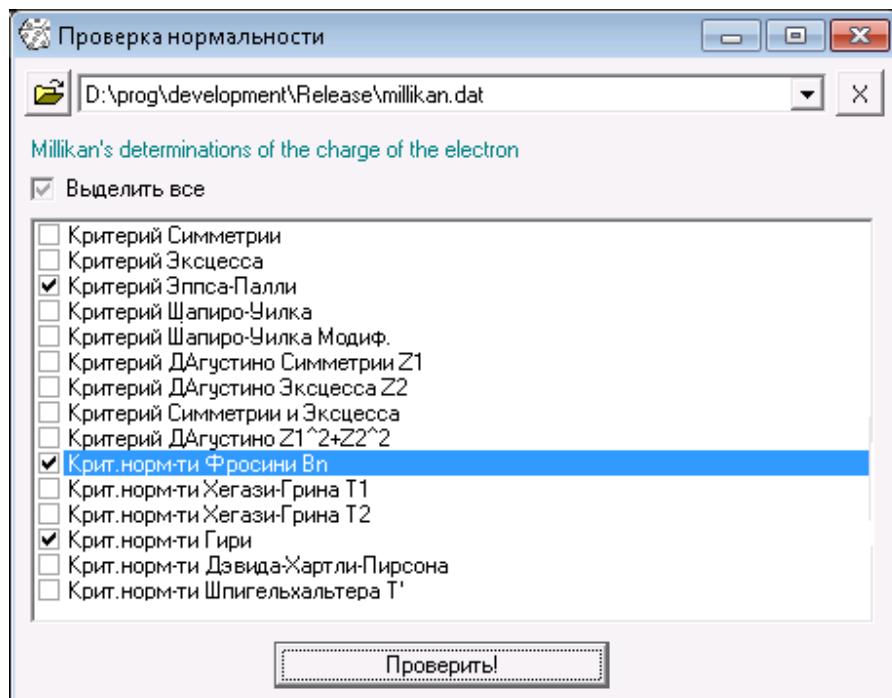


Рис. 13.4. Специализированная форма для проверки гипотезы о нормальности

### 13.3.3. Проверка однородности распределений

Для проверки гипотезы об однородности двух выборок могут применяться критерии Лемана–Розенблатта, Смирнова и модифицированный критерий Смирнова (см. раздел 6). Для проверки однородности выборок в главном меню **Действия** следует выбрать пункт **Проверка однородности** (рис. 13.5), выделить сравниваемые выборки и нажать на кнопку **Проверить**. Результаты проверки гипотезы по каждому критерию будут выведены в окно сообщений (рис. 13.6).

На приводимых рисунках представлены результаты проверки однородности эмпирических распределений, полученных при моделировании распределений статистики критерия Левене в случае использования в критерии в качестве оценки математического ожидания среднего арифметического и выборочной медианы (см. раздел 8.5). Выборки заданы объемом по 10 000 наблюдений. Гипотеза об однородности отклоняется по всем критериям.

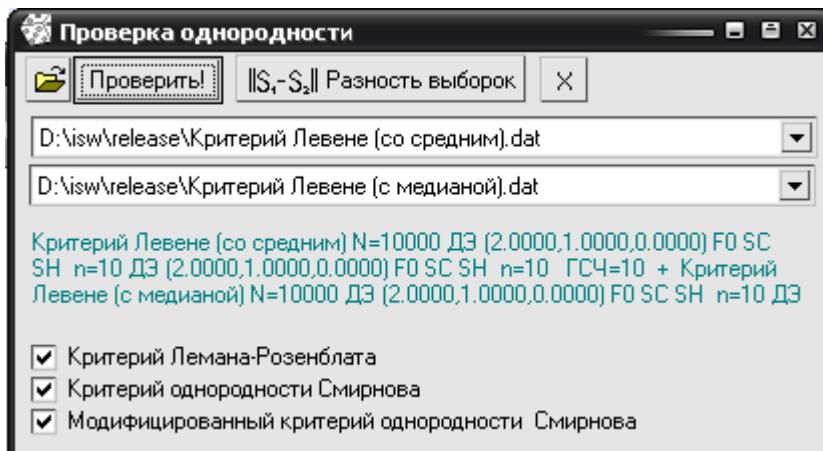


Рис. 13.5. Специализированная форма для проверки гипотезы об однородности

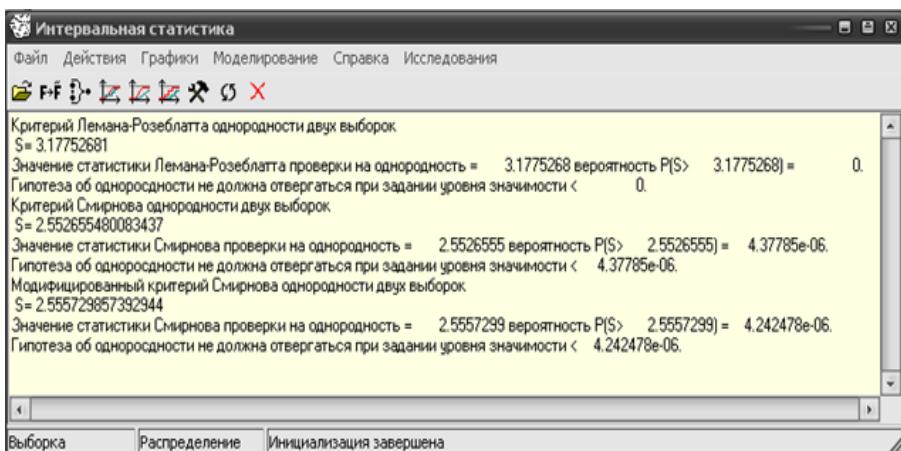


Рис. 13.6. Результаты проверки гипотезы об однородности

Этот пример подтверждает, что распределения статистики критерия Левене, используемого при проверке гипотез об однородности дисперсий в случае принадлежности анализируемых выборок нормальному закону, зависят от того, какая оценка среднего используется при вычислении статистики.

### 13.3.4. Проверка однородности дисперсий (параметров масштаба)

Для проверки гипотезы об однородности дисперсий двух или более выборок могут использоваться параметрические и непараметрические критерии. Применение параметрических критериев правомерно в случае принадлежности выборок нормальному закону, так как при малейших отклонениях наблюдаемых случайных величин от нормального закона распределения статистик существенно отличаются от тех, что они имеют при нормальном. Следовательно, в ситуациях, когда выборки принадлежат законам, отличающимся от нормального, мы не можем использовать классические результаты, связанные с предельными распределениями статистик критериев.

Однако действие критериев можно распространить на такие ситуации, воспользовавшись методикой компьютерного моделирования для построения моделей распределений статистик или таблиц процентных точек. Программное обеспечение проверки однородности дисперсий позволяет корректно применять критерии однородности дисперсий в случае принадлежности анализируемых выборок произвольным, но известным законом.

При проверке гипотезы пользователю предоставляется возможность смоделировать распределение статистики критерия при заданных законах распределения и объемах выборок, что позволяет определить достигнутый уровень значимости в нестандартных (реальных) условиях. Форма для проверки гипотез об однородности дисперсий с использованием моделирования распределения статистики при справедливости проверяемой гипотезы и принадлежности выборок заданным (предполагаемым) законам приведена на рис. 13.7.

## 13.4. Моделирование и исследование распределений статистик

Система позволяет моделировать и исследовать: выборки псевдослучайных величин по законам распределения, доступным в системе; выборки статистик критериев согласия при проверке простых и сложных гипотез в случае справедливости проверяемой или конкурирующей гипотезы; выборки распределений статистик кrite-

риев однородности законов, однородности средних, однородности дисперсий (однородности параметров масштаба); выборки распределений статистик множества критериев проверки отклонения от нормального закона; выборки распределений статистик критериев проверки случайности и отсутствия тренда; выборки распределений функций от случайных величин.

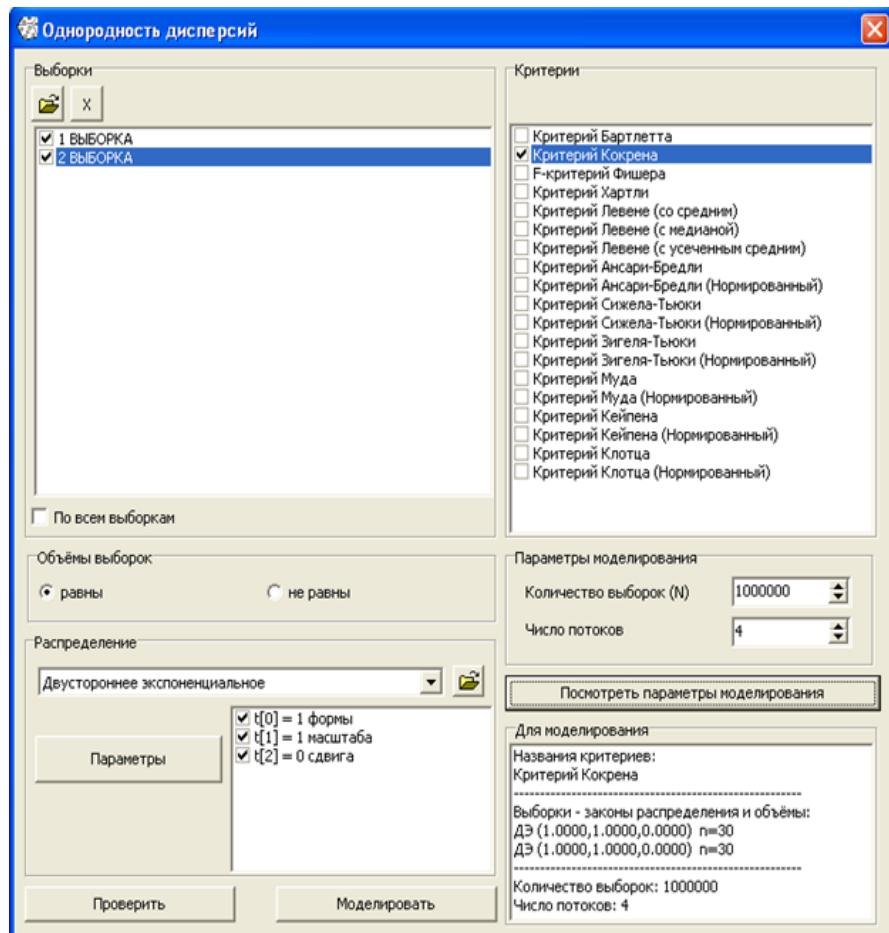


Рис. 13.7. Форма для проверки однородности дисперсий при произвольных, но известных законах

### 13.4.1. Моделирование выборок псевдослучайных величин

Для создания новой выборки необходимо выбрать в меню **Моделирование** пункт **Выборка**. Тип создаваемой выборки задается выбором одной из четырех вкладок: **Точечная**, **Группированная**, **Интервальная** и **Цензурированная** (рис. 13.8).

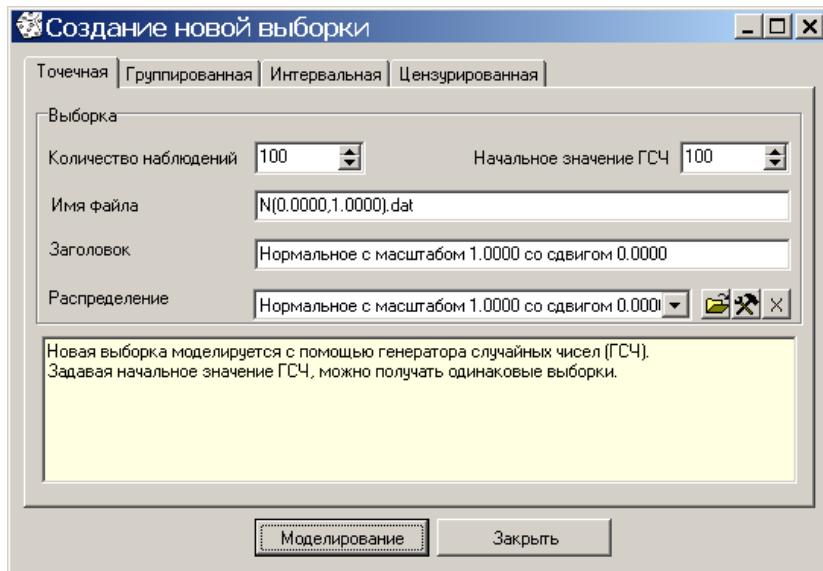


Рис. 13.8. Моделирование выборки

Для моделирования выборки задаются закон распределения, которому должна подчиняться выборка, и количество наблюдений. Полученная выборка записывается в файле в текстовом формате с расширением «dat». Начальное значение генератора псевдослучайных чисел позволяет получать одинаковые выборки (т. е. чтобы получить ту же самую выборку второй раз, можно просто запомнить начальное значение ГСЧ).

Для моделирования группированной выборки необходимо задать интервалы группирования. Количество и граничные точки можно вводить вручную либо используя процедуру асимптотического группирования (кнопка **АОГ**) равновероятного группирования (кнопка **РВГ**) или равномерного группирования (кнопка **РГ**).

При создании цензурированной выборки определяется вид группирования (слева, справа или с обеих сторон), тип группирования (первый или второй) и в зависимости от типа группирования – количество наблюдений в интервалах или точки цензурирования.

### 13.4.2. Моделирование распределений оценок параметров

В системе заложена возможность моделирования и исследования статистических закономерностей, в том числе законов распределения оценок параметров различных законов в зависимости от объемов выборок. Форма **Моделирование распределений оценок параметров**, к которой можно перейти, выбрав в меню **Моделирование** пункт **Распределения оценок параметров**, позволяет сгенерировать распределения оценок параметров при любом методе оценивания и для любого закона, заложенных в систему (рис. 13.9).

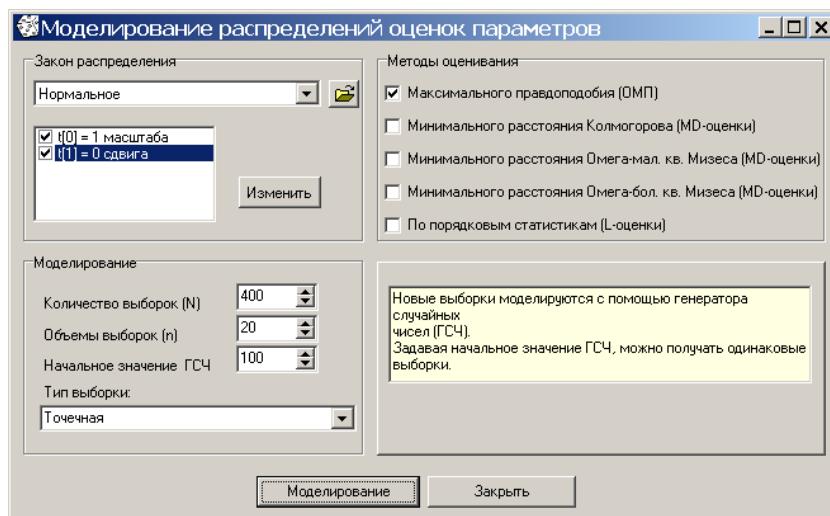


Рис. 13.9. Моделирование распределений оценок параметров

Для моделирования выборки задается закон распределения, параметры которого оцениваются. Флажками отмечаются параметры, которые требуется оценивать, и методы оценивания, для которых необходимо смоделировать распределения оценок. Задаются количество выборок, объемы выборок, наблюдаемая часть для цензурированных

исходных выборок случайных величин (если меньше 100 %, то производится цензурирование), начальное значение генератора случайных чисел.

Результаты моделирования выводятся в соответствующие текстовые файлы с расширением «dat».

Исследование распределений оценок (полученных выборок) может осуществляться в подсистеме статистического анализа.

### 13.4.3. Моделирование распределений статистик критериев проверки гипотез

Система позволяет моделировать, а затем исследовать распределения статистик различных групп критериев проверки статистических гипотез и при справедливости проверяемой гипотезы, и при справедливости задаваемой конкурирующей гипотезы, в условиях выполнения стандартных предположений, обусловливающих корректность применения классических результатов, и в условиях их нарушения (в условиях, соответствующих применению критерия в конкретном приложении статистических методов).

В системе реализованы возможности исследования распределений статистик различных критериев: критериев согласия (типа  $\chi^2$  и непараметрических); критериев нормальности; критериев однородности законов; параметрических и непараметрических критериев однородности средних; параметрических критериев однородности дисперсий и непараметрических критериев однородности параметров масштаба; критериев проверки случайности и отсутствия тренда; критериев проверки гипотез, используемых при анализе систем одновременных уравнений и анализе временных рядов.

Например, для исследования распределений статистик критериев согласия в главном меню **Моделирование** следует выбрать пункт **Распределения статистик критериев** и открыть форму **Моделирование распределений статистик критериев согласия**, которая позволяет сгенерировать распределения статистик критериев согласия (рис. 13.10).

Для моделирования распределений статистик в конкретных условиях задаются закон распределения, соответствующий проверяемой гипотезе  $H_0$ , закон распределения, соответствующий конкурирующей гипотезе  $H_1$ , выбирается верная гипотеза ( $H_0$  или  $H_1$  либо указыва-

ются  $H_0$ ,  $H_1$ , если нас интересуют распределения статистики при справедливости  $H_0$  и справедливости  $H_1$  для последующей оценки мощности). Флажками отмечаются параметры, которые должны оцениваться, задается количество выборок, объемы выборок, начальное значение генератора случайных чисел. Для критериев типа  $\chi^2$  задаются число интервалов группирования и тип группирования.

Кнопка **H1→H0** позволяет найти параметры закона распределения, соответствующего гипотезе  $H_1$ , при которых он наиболее близок к закону, соответствующему гипотезе  $H_0$ . Кнопка **H0→H1** позволяет найти параметры распределения, соответствующего гипотезе  $H_0$ , при которых он наиболее близок к закону, соответствующему гипотезе  $H_1$ .

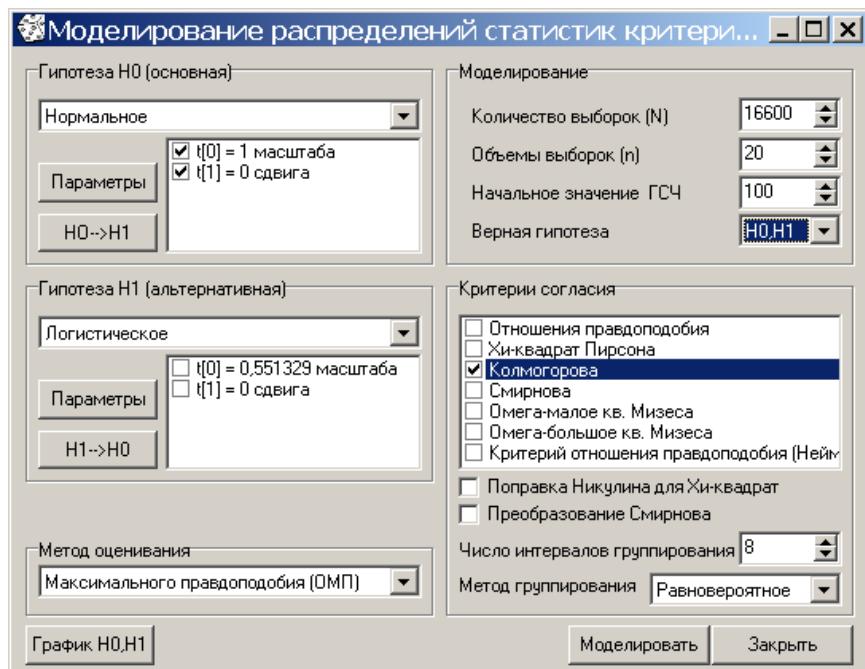


Рис. 13.10. Моделирование распределений статистик критериев согласия

Результаты моделирования будут выведены в сформированные файлы с расширением «dat», в названиях которых учтена информация, определяющая условия моделирования. Графическая информация о

результатах исследований может быть сохранена в соответствующем файле (рис. 13.11). Доступно сохранение графиков в растровые и векторные форматы изображений.

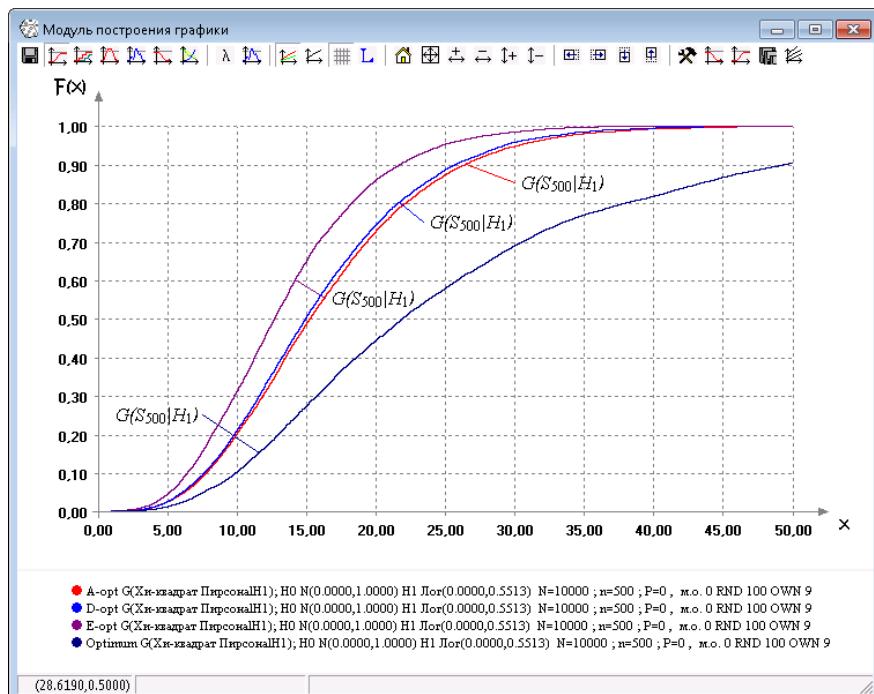


Рис. 13.11. Форма построения графиков по всем загруженным выборкам

Выявление нюансов поведения распределений статистик критериев в зависимости от объемов выборок, построение достаточно точных моделей для исследуемых закономерностей требуют больших объемов моделирования (больших выборок для исследуемых распределений статистик критериев), что выливается в очень большие затраты процессорного времени. Специфика решаемых при моделировании и исследовании статистических закономерностей задач позволяет распараллеливать процессы моделирования с использованием незагруженных ресурсов многоядерных процессоров окружающей вычислительной сети.

Например, в форме **Моделирование статистик критериев**, приведенной на рис. 3.12, где выбраны для моделирования и исследования

статистики группы критериев однородности дисперсий, при нажатии кнопки **Найти соседей** в окошке выведен список IP-адресов доступных вычислительных ресурсов. Отметив флаjkом **Использовать сеть**, можно задействовать найденные сетевые ресурсы.

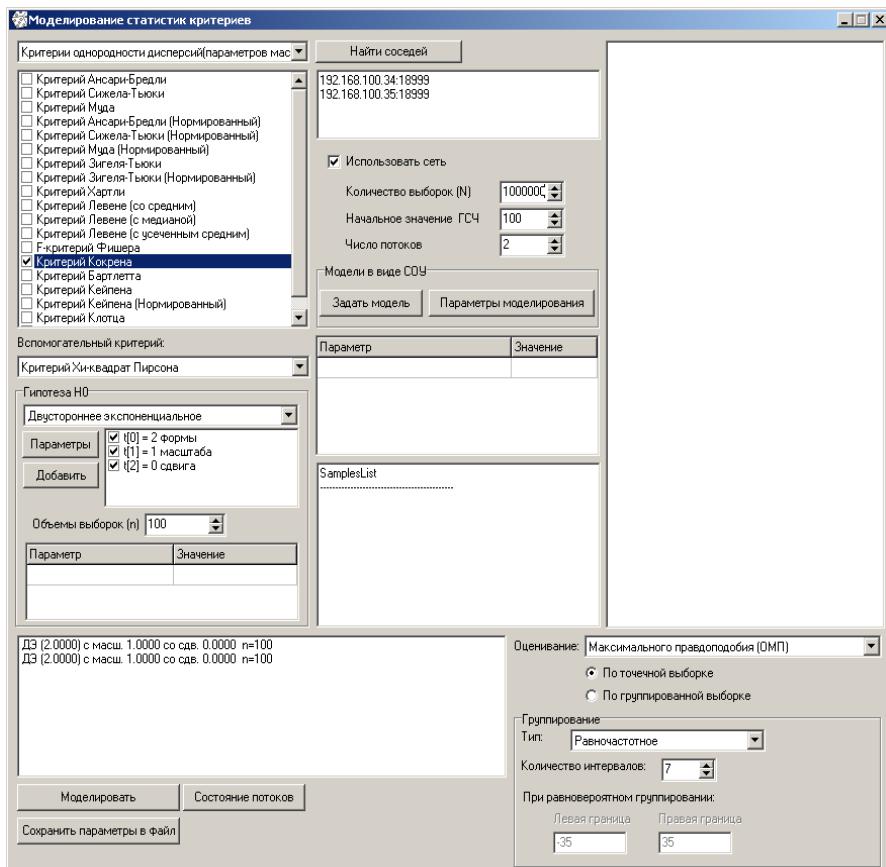


Рис. 3.12. Форма для задания моделирования распределений статистик критериев

Свободные ресурсы многоядерного процессора используются по умолчанию. Для использования ресурсов компьютеров окружающей сети на соответствующем компьютере должна быть запущена версия программной системы.

## 13.5. Выводы

В разделе кратко рассмотрены возможности системы, позволяющей применять и исследовать множество статистик, связанных с различными критериями, исследовать их распределения: в зависимости от формы представления данных; используемых методов оценивания; объемов выборок; законов распределения случайных составляющих, связанных с конкретной моделью; конкретных (нестандартных) условий, определяемых приложением, в которых используется соответствующий критерий.

Возможности, предоставляемые системой, и результаты исследований предыдущих разделов показывают, что компьютерные методы исследования становятся мощным инструментом для развития аппарата прикладной математической статистики и средством для корректного статистического анализа данных реальных приложений.

## Послесловие

Мы надеемся, что содержание книги расширит знания читателей в области методов статистического анализа, будет способствовать корректному и осознанному использованию ими соответствующих статистических критериев.

Хотелось бы верить, что более эффективно будут использоваться лучшие качества критериев согласия типа  $\chi^2$ , будут разумно выбираться число интервалов и способы группирования, обеспечивающие максимальную мощность критериев относительно близких конкурирующих гипотез.

Построенные множество моделей распределений статистик и таблицы процентных точек для непараметрических критериев согласия Колмогорова,  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова и  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга, используемые при проверке сложных гипотез, позволят уменьшить количество ошибок, связанных с применением этих критериев.

Результаты сравнительного анализа мощности совокупности критериев согласия говорят о способности критериев различать конкурирующие гипотезы, позволяют судить о предпочтительности тех или иных критериев.

Показанные достоинства и недостатки отдельных критериев проверки отклонения распределения от нормального закона, оценки мощности критериев позволяют критично относиться к выбору критериев и результатам проверки гипотезы.

Результаты исследований распределений статистики критерия Смирнова, предназначенного для проверки гипотез об однородности законов, предложенная поправка к статистике, рекомендации по выбору объемов выборок позволяют с большими основаниями при проверке гипотез по выборкам ограниченных объемов использовать в

качестве распределения статистики предельное распределение Колмогорова.

Продемонстрированная высокая устойчивость распределений статистик параметрических критериев проверки однородности средних к существенным нарушениям классического предположения о принадлежности анализируемых выборок нормальному закону распределения вероятностей позволит больше доверять результатам статистического анализа в условиях, когда проверка нормальности вследствие тех или иных причин не могла быть проведена. Вместе с тем оценки мощности таких критериев призваны насторожить исследователей: различие близких конкурирующих гипотез с заданной вероятностью ошибки первого рода и с не меньшей вероятностью ошибки второго рода на практике может потребовать значительных объемов выборок.

Проведенный сравнительный анализ мощности совокупности классических критериев однородности дисперсий и непараметрических критериев, ориентированных на проверку гипотез об однородности характеристик рассеяния, подчеркнул существенное преимущество в мощности параметрических критериев. Это преимущество сохраняется при законах распределения случайных величин, отличных от нормального (когда нельзя использовать классические результаты для параметрических критериев). Показаны перспективы развития аппарата и применения классических критериев проверки однородности дисперсий при произвольных законах распределения вероятностей случайных величин рассматриваемых выборок.

Использование робастных методов оценивания, в том числе оценок максимального правдоподобия по группированным данным или оптимальных  $L$ -оценок по выборочным квантилям, позволяет, с одной стороны, получать хорошие модели, с другой – строить эффективные параметрические процедуры отбраковки аномальных измерений.

Полезной представляется информация о том, что распределения статистик классических критериев многомерного анализа, касающиеся проверки гипотез относительно вектора математических ожиданий, проверки гипотез о незначимости коэффициентов парной или частной корреляции устойчивы к нарушению предположений о нормальности многомерных величин.

Думаем, что специалисты должны с интересом отнестись к возможностям компьютерных технологий при моделировании и исследо-

вании распределений функций от систем случайных величин, распределенных по различным законам.

Хотелось бы надеяться, что заинтересованный читатель, ознакомившись с содержанием книги, обратит внимание на то, что использование статистических методов анализа, какой бы сферы применения это ни касалось, требует понимания того, что хотят получить в результате анализа, понимания возможностей методов, знания условий, при выполнении которых корректно их применение. В противном случае трудно ожидать реального положительного эффекта от применения статистических методов при изучении или исследовании закономерностей в некоторой конкретной области.

Не следует ожидать, что использование статистического анализа, например, при обработке данных физических экспериментов даст однозначный ответ в физических терминах. При правильно сформулированной задаче статистического анализа соответствующие методы могут с той или иной степенью достоверности отдать предпочтение той или иной гипотезе, тем самым подтвердив или не подтвердив ваши профессиональные предположения или сомнения.

Несколько слов о перспективах компьютерных технологий при исследовании вероятностных и статистических закономерностей, их месте и влиянии на будущее развитие прикладной математической статистики.

Основу существующего аппарата прикладной математической статистики составляют результаты, полученные аналитическими методами. Аналитические результаты, как правило, имеют большую общность по сравнению с результатами, полученными численными методами. И если аналитический результат получен, методы статистического моделирования могут служить средством его проверки, средством уточнения области применения и условий, при выполнении которых его использование оказывается корректным.

В современных условиях трудно представить эффективное применение статистических методов анализа для обработки экспериментальных данных некоторой прикладной области без использования соответствующего программного обеспечения. Ведь статистические методы опираются на все более сложный математический аппарат. И естественно, что компьютерные технологии исследования, опирающиеся на этот математический аппарат, становятся инструментом, способствующим добыванию новых фундаментальных знаний о веро-

ятностных и статистических закономерностях в ситуациях, когда аналитические методы оказываются бессильны. Причем компьютерные технологии, впитывая новые знания, например, в виде построенных моделей распределений статистик, в виде исследованных свойств оценок, свойств распределений статистик критериев при нарушении стандартных предположений, быстро совершенствуются, увеличивая свой вклад в развитие аппарата прикладной математической статистики.

В настоящее время у ведущих специалистов в области математической статистики сохраняется настороженное отношение к компьютерным методам исследования, но они не возражают и против статистического моделирования как средства подтверждения полученных аналитических результатов. Можно привести примеры, когда специалисты, оставившие заметный след в области математической статистики, используют математические пакеты при построении аналитических выводов. Но медленно приходит понимание того, что компьютерные технологии исследования, опирающиеся на аппарат математической статистики, становятся все более серьезным и самостоятельным средством развития этого аппарата, что компьютерные технологии не входят в противоречие с аналитическим подходом, а призваны дополнять его. Хотя мы не исключаем того, что в будущем эти два подхода невозможно будет разделить.

Интерес к статистическим критериям не ослабевает. Пока данная книга готовилась к изданию, были опубликованы:

1. Bagdonavicius V., Kruopis J., Nikulin M. (2011). Non-parametric tests for complete sample, ISTE-Wiley: Hoboken, 308 p.

2. Bagdonavicius V., Kruopis J., Nikulin M. (2011). Non-parametric tests for censored sample, ISTE-Wiley: Hoboken, 233 p.

В издательстве Elsevier готовится к печати монография:

Voinov V., Nikulin M., Balakrishnan N. Chi-Squared Goodness-of-fit Tests with Applications, Academic Press.

Б.Ю. Лемешко  
С.Б. Лемешко  
С.Н. Постовалов  
Е.В. Чимитова

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Aguirre N.* Chi-squared goodness-of-fit test for the family of logistic distributions / N. Aguirre, M. Nikulin // *Kybernetika*. – 1994. – Vol. 30, № 3. – P. 214–222.
2. *Akushkina K. A.* Models of statistical distributions of nonparametric goodness-of-fit tests in testing composite hypotheses of the generalized Weibull distribution / K. A. Akushkina, S. B. Lemeshko, B. Yu. Lemeshko // Proceedings Third International Conference on Accelerated Life Testing, Reliability-based Analysis and Design. 19-21 May 2010. – Clermont-Ferrand, France, 2010. – P. 125–132.
3. *Alqallaf F. A.* Scalable robust covariance and correlation estimates for data mining / F. A. Alqallaf, K. P. Konis, R. D. Martin // Proceedings of the eighth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. – Edmonton, AB, Канада, 2002. – P. 14–23.
4. *Anderson T. W.* An Introduction to Multivariate Statistical Analysis / T. W. Anderson. – 3rd ed. – Wiley-Interscience, 2003. – 752 p.
5. *Anderson T. W.* A test of goodness of fit / T. W. Anderson, D. A. Darling // J. Amer. Statist. Assoc. – 1954. – Vol. 29. – P. 765–769.
6. *Anderson T. W.* Asymptotic theory of certain “Goodness of fit” criteria based on stochastic processes / T. W. Anderson, D. A. Darling // AMS. – 1952. – Vol. 23. – P. 193–212.
7. *Ansari A. R.* Rank-tests for dispersions / A. R. Ansari, R. A. Bradley // AMS. – 1960. – Vol. 31, № 4. – P. 1174–1189.
8. *Bagdonavicius V.* Accelerated Life Models / V. Bagdonavicius, M. Nikulin // Modeling and Statistical Analysis. – Boca Raton: Chapman & Hall / CRC, 2002. – 334 p.
9. *Baringhaus L.* Recent and classical tests for normality – A comparative study / L. Baringhaus, R. Danschke, N. Henze // Comm. Statistic. – 1989. – B, 18(1). – P. 363–379.
10. *Baringhaus L.* A consistent test for multivariate normality based on the empirical characteristic function / L. Baringhaus, N. Henze // Metrika. – 1988. – № 35. – P. 339–348.
11. *Bartels R.* The rank version of von Neumann’s ratio test for randomness / R. Bartels // JASA. – 1982. – Vol. 77, № 377. – P. 40–46.
12. *Bartlett M. S.* Properties of sufficiency of statistical tests / M. S. Bartlett // Proc. Roy. Soc. – 1937. – A 160. – P. 268–287.

13. Birch M. W. A new proof of the Pearson–Fisher theorem / M. W. Birch // Ann. Math. Statist. – 1964. – Vol. 35, № 2. – P. 817–824.
14. Bloch D. A note on the estimation of the location parameter of the Cauchy distribution / D. Bloch // J. Amer. Statist. Ass. 61. – 1966. – P. 852–855.
15. Bowmann K. O. ‘Omnibus’ test contours for departures from normality based on  $\sqrt{|b_1|}$ ,  $b_2$  / K. O. Bowmann, L. R. Shenton // Biometrika. – 1975. – Vol. 62. – P. 243–250.
16. Brown M. B. Robust Tests for Equality of Variances / M. B. Brown, A. B. Forsythe // J. Amer. Statist. Assoc. – 1974. – Vol. 69. – P. 364–367.
17. Capon J. Asymptotic efficiency of certain locally most powerful rank tests / J. Capon // AMS. – 1961. – Vol. 32, № 1. – P. 88–100.
18. Chandra M. Statistics for Test of Fit for the Extrem–Value and Weibull Distribution / M. Chandra, N. D. Singpurwalla, M. A. Stephens // J. Am. Statist. Assoc. – 1981. – Vol. 76. – P. 375.
19. Chernoff H. The use of maximum likelihood estimates in  $\chi^2$  test for goodness of fit / H. Chernoff, E. L. Lehmann // Ann. Math. Stat. – 1954. – Vol. 25. – P. 579–586.
20. Cochran W. G. Some Methods of Strengthening the Common  $\chi^2$  Tests / W. G. Cochran // Biometrics. – 1954. – Vol. 10. – P. 417.
21. Cochran W. G. The distribution of the largest of a set of estimated variances as a fraction of their total / W. G. Cochran // Annals of Eugenics. – 1941. – Vol. 11. – P. 47–52.
22. Conover W. J. Practical Nonparametric Statistics / W. J. Conover. – 3d ed. – Wiley, 1999. – 584 p.
23. Cox D. R. Note on grouping / D. R. Cox // J. Amer. Statist. Ass. – 1957. – Vol. 52, № 280. – P. 543–547.
24. Cox D. R. Quick sign tests for trend in location and dispersion / D. R. Cox, A. Stuart // Biometrika. – 1955. – Vol. 42. – P. 80–95.
25. D'Agostino R. B. Transformation to normality of the null distribution of  $g_1$  / R. B. D'Agostino // Biometrika. – 1970. – Vol. 57. – P. 679–681.
26. D'Agostino R. B. Simulation probability points of  $b_2$  for small samples / R. B. D'Agostino, G. L. Tietjen // Biometrika. – 1971. – Vol. 58. – P. 669–672.
27. Darling D. A. The Cramer-Smirnov test in the parametric case / D. A. Darling // Ann. Math. Statist. – 1955. – Vol. 26. – P. 1–20.
28. Darling D. A. The Cramer-Smirnov test in the parametric case / D. A. Darling // Ann. Math. Statist. – 1957. – Vol. 28. – P. 823–838.
29. David H. A. The distribution of the ratio? In a single normal sample, of range to standard deviation / H. A. David, H. O. Hartley, E. S. Pearson // Biometrika. – 1964. – Vol. 512, № 3–4. – P. 484–487.
30. Denisov V. I. Optimal grouping in Estimation and Tests of Goodnes-of-fit Hypotheses / V. I. Denisov, B. Yu. Lemeshko // Wissenschaftliche Schriftenreihe der Technischen universitat Karl-Marx-Stadt. Statistics for grouped Observations. – 1989. – № 10. – P. 63–81.

31. *Design of experiments and statistical analysis for grouped observations*: Monograph / V. I. Denisov, K.-H. Eger, B. Yu. Lemeshko, E. B. Tsoy. – Novosibirsk : NSTU Publishing house, 2004. – 464 p.
32. *Devlin S. J. Robust estimation and outlier detection with correlation coefficient* / S. J. Devlin, R. Gnanadesikan, J. R. Kettenring // *Biometrika*. – 1975. – Vol. 62. – P. 531–545.
33. *Doornik J. A. An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality* [Электронный ресурс] / J. A. Doornik, H. Hansen // Discussion Paper. – Nuffield College, Oxford, 1994. – № W4 & 91. – Режим доступа : <http://www.nuff.ox.ac.uk/users/Doornik/papers/normal2.pdf>. – Загл. с экрана.
34. *Durbin J. Kolmogorov-Smirnov test when parameters are estimated* / J. Durbin // *Lect. Notes Math.* – 1976. – Vol. 566. – P. 33–44.
35. *Durbin J. Kolmogorov-Smirnov tests when parameters are estimated with applications to tests of exponentiality and tests of spacings* / J. Durbin // *Biometrika*. – 1975. – Vol. 62. – P. 5–22.
36. *Durbin J. Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated* / J. Durbin // *Ann. Statist.* – 1973. – № 1. – P. 279–290.
37. *Dzhaparidze K. O. On the computation of chi-square-type statistics* / K. O. Dzhaparidze, M. S. Nikulin // *Journal of Mathematical Sciences*. – 1995. – Vol. 75, № 5. – P. 1910–1921.
38. *Dzhaparidze K. O. Probability distribution of the Kolmogorov and omega-square statistics for continuous distributions with shift and scale parameters* / K. O. Dzhaparidze, M. S. Nikulin // *J. Soviet Math.* – 1982. Vol. 20. – P. 2147–2163.
39. *Eisenberger J. Systematic statistics used for data compression in space telemetry* / J. Eisenberger, E. C. Posner // *J. Amer. Statist. Ass.* – 1965. – Vol. 60. – P. 97–133.
40. *Epps T. W. A test for normality based on the empirical characteristic function* / T. W. Epps, L. B. Pulley // *Biometrika*. – 1983. – Vol. 70. – P. 723–726.
41. *Foster F. G. Distribution-free tests in time series dated on the breaking of records* / F. G. Foster, A. Stuart // *JRSS*. – 1954. – Vol. B 16, № 1. – P. 1–22.
42. *Frank E. Grubbs. Extension of sample sizes and percentage points for significance tests of outlying observations* / Frank E. Grubbs, Glenn Beck. // *Technometrics*, 1972. – Vol. 14. – № 4. – P. 847–854.
43. *Frank E. Grubbs. Procedures for Detecting Outlying Observations in Samples* / Frank E. Grubbs // *Technometrics*, 1969. – Vol. 11. – № 1. – P. 1–21.
44. *Frank E. Grubbs. Sample Criteria for Testing Outlying observations* / Frank E. Grubbs // *Ann. Math. Statist.* – 1950. – Vol. 21. – No. 1. – P. 27–58.
45. *Frosini B. V. A survey of a class of goodness-of-fit statistics* / B. V. Frosini // *Metron*. – 1978. – Vol. 36. – № 1-2. – P. 3–49.
46. *Frosini B. V. On the distribution and power of goodness-of-fit statistic with parametric and nonparametric applications, “Goodness-of-fit”* / Frank E. Grubbs ;

- ed. by Revesz P., Sarkadi K., Sen P.K. – Amsterdam-Oxford-New York : North Holland Publ.Comp, 1987. – P. 133–154.
47. *Geary R. C.* Moments of the ratio of the mean deviation to the standard deviation for normal samples / R. C. Geary // Biometrika. – 1936. – Vol. 28. – P. 295–307.
48. *Geary R. C.* Testing for Normality / R. C. Geary // Biometrika. – 1937. – Vol. 34. – P. 209–242.
49. *Geary R. C.* The ratio of the mean deviation to the standard deviation as a test of normality / R. C. Geary // Biometrika. – 1935. – Vol. 27. – P. 310–322.
50. *Gerville-Reache L.* Statistique des essais accélérés / L. Gerville-Reache, V. Couallier, M. Nikulin. – London : Hermes, 2007. – 294 p.
51. *Gorbunova A. A.* Classical tests of variances homogeneity for non-normal distributions / A. A. Gorbunova, S. B. Lemeshko, B. Yu. Lemeshko // Proceedings Third International Conference on Accelerated Life Testing, Reliability-based Analysis and Design. 19-21 May 2010. – Clermont-Ferrand, France. – P. 117–124.
52. *Greenwood P. E.* A guide to chi-squared testing / P. E. Greenwood, M. S. Nikulin. – New York : John Wiley & Sons, 1996. – 280 p.
53. *Gupta S. S.* Estimation of the parameters of the logistic distribution / S. S. Gupta, M. Gnanadesikan // Biometrika. – 1966. – Vol. 53. – P. 565–570.
54. *Halperin M.* Maximum likelihood estimation in truncated samples / M. Halperin // The annals of mathematical statistics. – 1952. – Vol. 23. – P. 226–238.
55. *Hampel F. R.* The influence curve and its role in robust estimation / F. R. Hampel // J. Amer. Statist. Ass. – 1974. – Vol. 69, № 346. – P. 383–393.
56. *Hartley H. O.* The maximum F-ratio as a short-cut test of heterogeneity of variance / H. O. Hartley // Biometrika. – 1950. – Vol. 37. – P. 308–312.
57. *Hassanein K. M.* Analysis of extreme-value data by sample quantiles for very large samples / K. M. Hassanein // J. Amer. Statist. Ass. – 1968. – Vol. 63. – P. 877–888.
58. *Hegazy Y.A.S.* Some new goodness-of-fit tests using order statistics / Y.A.S. Hegazy, J. R. Green // Applied Statistics. – 1975. – Vol. 24, № 3. – P. 299–308.
59. *Heinhold I.* Ingenieur statistic / I. Heinhold, K. W. Gaede. – München ; Wien : Springer Verlag, 1964. – 352 s.
60. *Henze N.* An approximation to the limit distribution of the Epps-Pulley test statistic for normality / N. Henze // Metrika. – 1990. – Vol. 37. – P. 7–18.
61. *Hollander M.* Non-parametric Statistical Methods / M. Hollander, D. A. Wolfe. – 2nd ed. – New York : Wiley, 1999.
62. *Hsieh H. K.* Nonparametric tests for scale shift at a unknown time point / H. K. Hsieh // Commun. Stat. – Theor. Meth. – 1984. – Vol. 13, № 11. – P. 1335–1355.
63. *Hsu D. A.* Test for variance shift at an unknown time point / D. A. Hsu // Appl. Statist. – 1977. – Vol. 26, № 3. – P. 279–284.
64. *Kac M.* On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods / M. Kac, J. Kiefer, J. Wolfowitz // Ann. Math. Stat. – 1955. – Vol. 26. – P. 189–211.

65. *Klotz J.* Nonparametric tests for scale / J. Klotz // AMS. – 1962. – Vol. 33. – P. 498–512.
66. *Knoke J. D.* Testing for randomness against autocorrelation: The parametric case / J. D. Knoke // Biometrika. 1975. – Vol. 62. – P. 571–575.
67. *Kolmogoroff A. N.* Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione / A. N. Kolmogoroff // G. Ist. Ital. attuar. – 1933. – Vol. 4. – № 1. – P. 83–91.
68. *Kruskal W. H.* Use of ranks in one-criterion variance analysis / W. H. Kruskal, W. A. Wallis // J. Amer. Statist. Assoc. – 1952. – Vol. 47. – P. 583–621.
69. *Kruskal W. H.* Use of ranks in one-criterion variance analysis / W. H. Kruskal, W. A. Wallis // J. Amer. Statist. Assoc. – 1953. – Vol. 48. – P. 907–911.
70. *Laubsher N. F.* Exact critical Values for Mood's distribution-free test statistic for dispersion and its normal approximation / N. F. Laubsher, F. E. Steffens, E. M. De Lange // Technometrics. – 1968. – Vol. 10, № 3. – P. 497–508.
71. *Lehmann E. L.* Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests / E. L. Lehmann // Ann. Math. Statist. – 1951. – Vol. 22, № 1. – P. 165–179.
72. *Lemeshko B. Yu.* Errors when using nonparametric fitting criteria / B. Yu. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2004. – Vol. 47, № 2. – P. 134–142.
73. *Lemeshko B.* Bartlett and Cochran tests in measurements with probability laws different from normal / B. Lemeshko, E. Mirkin // Measurement Techniques. – 2004. – Vol. 47, № 10. – P. 960–968.
74. *Lemeshko B. Yu.* Asymptotically optimum grouping of observations in goodness-of-fit tests / B. Yu. Lemeshko // Industrial laboratory (Ind. lab.). – 1998. – Vol. 64, № 01. – P. 59–67. – (Consultants Bureau, New York)
75. *Lemeshko B. Yu.* Comparative analysis of the power of goodness-of-fit tests for near competing hypotheses. II. Verification of complex hypotheses / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, S. N. Postovalov // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2010. – Vol. 4, № 1. – P. 79–93.
76. *Lemeshko B. Yu.* Statistic Distribution Models for Some Nonparametric Goodness-of-Fit Tests in Testing Composite Hypotheses / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, S. N. Postovalov // Communications in Statistics – Theory and Methods. – 2010. – Vol. 39, № 3. – P. 460–471.
77. *Modeling* statistic distributions for nonparametric goodness-of-fit criteria for testing complex hypotheses with respect to the inverse Gaussian law / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, M. S. Nikulin, N. Saaidia // Automation and Remote Control. – 2010. – Vol. 71, № 7. – P. 1358–1373.
78. *Lemeshko B. Yu.* Extending the Application of Grubbs-Type Tests in Rejecting Anomalous Measurements / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2005. – Vol. 48, № 6. – P. 536–547.
79. *Lemeshko B. Yu.* Comparative Analysis of the Power of Goodness-of-Fit Tests for Near Competing Hypotheses. I. The Verification of Simple Hypotheses / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, S. N. Postovalov // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2009. – Vol. 3, № 4. – P. 462–475.

80. Lemeshko B. Yu. Distribution models for nonparametric tests for fit in verifying complicated hypotheses and maximum-likelihood estimators. P. I / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2009. – Vol. 52, № 6. – P. 555–565.
81. Lemeshko B. Yu. Models for statistical distributions in nonparametric fitting tests on composite hypotheses based on maximum-likelihood estimators. P. II / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2009. – Vol. 52, № 8. – P. 799–812.
82. Lemeshko B. Yu. Models of Statistic Distributions of Nonparametric Goodness-of-fit Tests in Composite Hypotheses Testing in Case of Double Exponential Law / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // ASMDA-2009. Applied Stochastic Models and Data Analysis : selected papers, the XIII International Conference June 30-Jule 3, 2009. – Vilnius, Lithuania, 2009 – P. 153–157.
83. Lemeshko B. Yu. Power and robustness of criteria used to verify the homogeneity of means / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2008. – Vol. 51, № 9. – P. 950–959.
84. Lemeshko B. Yu. Statistical distribution convergence and homogeneity test power for Smirnov and Lehmann–Rosenblatt tests / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques – 2005. – Vol. 48, № 12. – P. 1159–1166.
85. Lemeshko B. Yu. Application and power of criteria for testing the homogeneity of variances. Part I. Parametric criteria / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, A. A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2010. – Vol. 53, № 3. – P. 237–246.
86. Lemeshko B. Yu. Application and power of criteria for testing the homogeneity of variances. Part II. Nonparametric criteria / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, A. A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2010. – Vol. 53, № 5. – P. 476–486.
87. Lemeshko B. Yu. Nonparametric Test in Testing Composite Hypotheses on Goodness of Fit Exponential Family Distributions / B. Yu. Lemeshko, A. A. Maklakov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2004. – Vol. 40, № 3. – P. 3–18.
88. Lemeshko B. Yu. Statistical modeling as an effective instrument for investigating the distribution laws of functions of random quantities / B. Yu. Lemeshko, D. V. Ogurtsov // Measurement Techniques. – 2007. Vol. 50, № 6. – P. 593–600.
89. Lemeshko B. Yu. Application of the nonparametric goodness-of-fit Tests in testing composite hypotheses / B. Yu. Lemeshko, S. N. Postovalov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2001. – № 2. – P. 76–88.
90. Lemeshko B. Yu. Statistical analysis of one-dimensional observations from partially grouped data / B. Yu. Lemeshko, S. N. Postovalov // Russian Physics Journal (Historical Archive). – 1995. – Vol. 38, № 9. – P. 901–906.
91. Lemeshko B. Yu. Statistical analysis of one-dimensional observations from partially grouped data / B. Yu. Lemeshko, S. N. Postovalov // Russian Physics Journal. – 1995. – Vol. 38, № 9. – P. 901–906.

92. Lemeshko B. Yu. The power of goodness of fit tests for close alternatives / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, S. N. Postovalov // Measurement Techniques. – 2007. – Vol. 50, № 2. – P. 132–141.
93. Lemeshko S. B. The Abbé independence test with deviations from normality / S. B. Lemeshko // Measurement Technique. – 2006. – Vol. 49, № 10. – P. 962–969.
94. Lemeshko S. B. Statistic distributions of the nonparametric goodness-of-fit tests in testing hypotheses relative to beta-distributions / S. B. Lemeshko, B. Yu. Lemeshko // XIIth Applied Stochastic Models and Data Analysis (ASMDA 2007) International Conference. Book of Abstracts. May 29–June 1, 2007. – Chania, Crete, Greece. Editor Christos H. Skiadas, 2007. – P. 112.
95. Lemeshko S. B. Simulation of the statistics distributions and power of the goodness-of-fit tests in composite hypotheses testing rather Inverse Gaussian distribution / S. B. Lemeshko, M. S. Nikulin, N. Saaidia // Proc. 6th St. Petersburg Workshop on Simulation. St. Petersburg. – 2009. – Vol. 1. – P. 323–328.
96. Lemeshko B. Yu. Robust methods for the estimation and rejection of anomalous measurements / B. Yu. Lemeshko // Industrial laboratory (Ind. lab.). – 1997. – Vol. 63, № 5. – P. 297–302. – (Consultants Bureau, New York)
97. Lemeshko B. Yu. Limit distributions of the Pearson chi 2 and likelihood ratio statistics and their dependence on the mode of data grouping / B. Yu. Lemeshko, S. N. Postovalov // Industrial laboratory. – 1998. – Vol. 64, № 5. – P. 344–351. – (Consultants Bureau, New York)
98. Lemeshko B. Yu. Statistical distributions of nonparametric goodness-of-fit tests as estimated by the sample parameters of experimentally observed laws / B. Yu. Lemeshko, S. N. Postovalov // Industrial laboratory. – 1998. – Vol. 64, № 3. – P. 197–208. – (Consultants Bureau, New York)
99. Levene H. Robust tests for equality of variances // Contributions to Probability and Statistics: Essays in Honor of Harold Hotelling. – 1960. – P. 278–292.
100. Levene Test for Equality of Variances [Электронный ресурс] // e-Handbook of Statistical Methods. – Режим доступа : <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda35a.htm>. – Загл. с экрана.
101. Lilliefors H. W. On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown / H. W. Lilliefors // J. Am. Statist. Assoc. – 1967. – Vol. 62. – P. 399–402.
102. Lilliefors H. W. On the Kolmogorov-Smirnov test for the exponential distribution with mean unknown / H. W. Lilliefors // J. Am. Statist. Assoc. – 1969. – Vol. 64. – P. 387–389.
103. Lumley T. The importance of the normality assumption in large public health data sets / T. Lumley, P. Diehr, S. Emerson // Annual Review of Public Health. – 2002. – Vol. 23. – P. 151–169.
104. Mann H. B. On the choice of the number of class intervals in the application of the chi square test / H. B. Mann, A. Wald // Ann. Math. Stat. – 1942. – Vol. 13. – P. 306–317.

105. *Mann H. B.* On the choice of the number of intervals in the application of the chi-square test / H. B. Mann, A. Wald // Ann. Math. Stat. – 1942. – Vol. 13. – P. 478–479.
106. *Mann H. B.* On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other / H. B. Mann, D. R. Whitney // Ann. Math. Statist. – 1947. – Vol. 18. – P. 50–60.
107. *Marsaglia G.* Ratios of Normal Variables [Электронный ресурс] / G. Marsaglia // Journal of Statistical Software. – 2006. – Vol. 16, Issue 4. Режим доступа : <http://www.jstatsoft.org/v11/i04/>. – Загл. с экрана.
108. *Marsaglia G.* Ratios of Normal Variables and Ratios of Sums of Uniform Variables / G. Marsaglia // Journal of the American Statistical Association. – 1965. – Vol. 60. – P. 193–204.
109. *Mc Cool J. E.* Inference on Weibull Percentiles and shape parameter from maximum likelihood estimates / Mc Cool J. E. // IEEE Transactions on Reliability. – 1970. – Vol. R-19, № 1. – P. 2–9.
110. *Milton R. C.* An extended table of critical values for the Mann –Whitney (Wilcoxon) two-sample statistic / R. C. Milton // J. Amer. Statist. Ass. – 1964. – Vol. 59. – P. 925–934.
111. *Mood A.* On the asymptotic efficiency of certain nonparametric tests / A. Mood // AMS. – 1954. – Vol. 25. – P. 514–522.
112. *Moore D. S.* A chi-square statistic with random sell boundaries / D. S. Moore / D. S. Moore // Ann. Math. Stat. – 1971. – Vol. 42, № 1. – P. 147–156.
113. *Moore D. S.* Unified large-sample theory of general chi-squared statistics for tests of fit / D. S. Moore, M. C. Spruill // Ann. of Statistics. – 1975. – Vol. 3. – P. 599–616.
114. *Mosteller F.* On some useful inefficient statistics / F. Mosteller // Ann. Math. Statist. – 1946. – Vol. 17. – P. 377–407.
115. *Neel J. H.* A Monte Carlo Study of Levene's Test of Homogeneity of Variance: Empirical Frequencies of Type I Error in Normal Distributions Paper : presented at the Annual Meeting of the American Educational Reserch Association Convention / J. H. Neel, W. M. Stallings. – Chicago, Illinois, 1974. – April.
116. *Neumann J. von.* Distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance / Neumann J. von. // AMS. – 1941. – № 12. – P. 367–395.
117. *Nikulin M. S.* Gihman and goodness-of-fit tests for grouped data / M. S. Nikulin // Mathematical Reports of the academy of Science of the Royal Society of Canada. – 1992. – Vol. 14 (4). – P. 151–156.
118. *Ogawa J.* Contributions to the theory of systematic statistics / J. Ogawa // I. Osaka Math. J. – 1951. – № 3. – P. 175–213.
119. *Biometrika tables for Statistics* / ed.: E. S. Pearson, H. O. Hartley. – Cambridge : University Press, 1972. – Vol. 2. – 634 p.
120. *Biometrika tables for Statisticians* / ed.: E. S. Pearson, H. O. Hartley. – 3d ed. – Cambridge : University Press, 1966. – Vol. 1. – 264 p.

121. *Biometrika tables for Statisticians* / ed.: E. S. Pearson, H. O. Hartley. – Cambridge : University Press, 1976. – Vol. 2. – 286 p.
122. *Pearson E. S. Test for departure from normality: Comparison of powers* / E. S. Pearson, R. B. D'Agostino, K. O. Bowmann // *Biometrika*. – 1977. – Vol. 64. – P. 231–246.
123. *Rao C. R. Criteria of estimation in large samples* / C. R. Rao // *Sankhia*. – 1962. – Vol. 25. – P. 189–206.
124. *Rao K. C. A chi-squared statistic for goodness-of-fit tests within the exponential family* / K. C. Rao, D. S. Robson // *Commun. Statist.* – 1974. – Vol. 3. – P. 1139–1153.
125. *Rosenblatt M. Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic* / M. Rosenblatt // *Ann. Math. Statist.* – 1952. – Vol. 23. – P. 617–623.
126. *Särndal C. E. Estimation of the parameters of the gamma distribution by sample quantiles* / C. E. Särndal // *Technometrics*. – 1964. – Vol. 6. – P. 405–414.
127. *Saleh A. K. M. J. Asymptotic optimum quantiles for the estimation of the parameters of the negative exponential distribution* / A. K. M. J. Saleh, M. M. Ali // *Ann. Math. Statist.* – 1966. – Vol. 37. – P. 143–151.
128. *Shapiro S. S. Goodness-of fit tests* / S. S. Shapiro, M. B. Wilk, C. J. Chem // *J. Amer. Stat. Ass.* – 1968. – Vol. 63. – P. 1343–1372.
129. *Shapiro S. S. An approximate analysis of variance test fo normality* / S. S. Shapiro, R. S. Francia // *J. Amer. Statist. Assoc.* – 1972. – № 337. – P. 215–216.
130. *Shapiro S. S. An analysis of variance test for normality (complete samples)* / S. S. Shapiro, M. B. Wilk // *Biometrika*. – 1965. – Vol. 52. – P. 591–611.
131. *Shevlyakov G. L. On robust estimation of a correlation coefficient* / G. L. Shevlyakov // *J. of Mathematical Sciences*. – 1997. – Vol. 83, № 3. – P. 90–94.
132. *Shevlyakov G. L. Robust estimators of a correlation coefficient: Monte Carlo and asymptotics* / G. L. Shevlyakov, J. W. Lee // *Korean Journal of Mathematical Sciences*. – 1997. – Vol. 4. – P. 205–212.
133. *Siegel S. A nonparametric sum of rank procedure for relative spread in unpaired samples* / S. Siegel, J. W. Tukey // *JASA*. – 1960. – Vol. 55, № 291. – P. 429–445.
134. *Spiegelhalter D. J. A test for normality against symmetric alternatives* / D. J. Spiegelhalter // *Biometrika*. – 1977. – Vol. 64, № 2. – P. 415–418.
135. *Stephens M. A. EDF statistics for goodness of fit and some comparisons* / M. A. Stephens // *J. Am. Statist. Assoc.* – 1974. – Vol. 69. – P. 730–737.
136. *Stephens M. A. Use of Kolmogorov–Smirnov, Cramer – von Mises and related statistics – without extensive table* / M. A. Stephens // *J. R. Stat. Soc.* – 1970. – B. 32. – P. 115–122.
137. *Strunov V. I. Applying the Abbé test to the independence of measurement series with distributions deviating from normal* / V. I. Strunov // *Measurement Technique*. – 2008. – Vol. 49, № 8. – P. 962–969.
138. *Sturgess H. A. The choice of classic intervals* / H. A. Sturgess // *J. Am. Statist. Assoc.* – 1926. – March. – 47 p.

139. Sukhatme B. V. On certain Two-sample nonparametric tests for variances / B. V. Sukhatme // AMS. – 1957. – Vol. 28, № 1. – P. 188–194.
140. Swan A. W. Computing Maximum-likelihood Estimates for parameters of the Normal Distribution from Grouped and Censored Data / A. W. Swan // J. R. Stat. Soc., Ser. C. – 1969. – Vol. 18, № 1. – P. 65–69.
141. Tukey J. W. The future of date analysis / J. W. Tukey // Ann. Math. Stat. – 1962. – Vol. 33. – P. 1–67.
142. Van der Vaart A. W. Asymptotic Statistics / Van der Vaart A. W. – Cambridge : University Press, 1998. – 443 p.
143. Voinov V. A modified chi-squared goodness-of-fit test for the three-parameter Weibull distribution and its applications in reliability / V. Voinov, R. Alloyarova, N. Pya // Mathematical Methods for Reliability, Survival Analysis and Quality of Life / C. Huber, M. Nikulin, N. Limnios, M. Mesbah, editors. – London : HERMES, 2007. – P. 193–206.
144. Wald A. An exact test for randomness in the non-parametric case based on serial correlation / A. Wald, J. Wolfowitz // AMS. – 1943. – Vol. 14. – P. 378–388.
145. Weibull C. Maximum Likelihood Estimation from Truncated, Censored and Grouped Samples / C. Weibull // Skandinavisk Akturitidskrift. – 1963. – B. 46, № 1/2. – S. 70–77.
146. Welch B. L. The generalization of “Student’s” problem when several different population variances are involved / B. L. Welch // Biometrika. – 1947. – Vol. 34. – P. 29–35.
147. Wilcoxon F. Individual comparisons by ranking methods / F. Wilcoxon // Biometrics Bulletin. – 1945. – № 1. – P. 80–83.
148. Абусев Р. А. Байесовские оценки для некоторых характеристик многомерного *t*-распределения Стьюдента / Р. А. Абусев, Н. В. Колегова // САКС-2001 : материалы междунар. научн.-практ. конф. – Красноярск : САА, 2001. – Т. 2. – С. 291–292.
149. Айвазян С. А. Прикладная статистика и основы эконометрики : учеб. для вузов / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.
150. Акушкина К. А. Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обобщенного распределения Вейбулла / К. А. Акушкина, Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Информатика и проблемы телекоммуникаций : материалы российской науч.-техн. конф. – Новосибирск, 2010. – Т. 1. – С. 34–37.
151. Алексеева И. У. Теоретическое и экспериментальное исследование законов распределения погрешностей, их классификация и методы оценки их параметров : автореф. дис. ... канд. техн. наук / И. У. Алексеева. – Л., 1975. – 20 с.
152. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ / Т. Андерсон. – М. : Физматгиз, 1963. – 500 с.
153. Артамоновский В. П. Об оценке максимального правдоподобия параметров сдвига и масштаба по группированным выборкам / В. П. Артамоновский // Вестник СамГУ. Сер. 1. Физико-математические науки. – Самара, 2008. – № 1. – С. 10–15.

новский // Теория вероятностей и ее применение. – 1988. – Т. XXXIII, № 4. – С. 759–762.

154. Барлоу Р. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность : пер. с англ. / Р. Барлоу, Ф. Прошан. – М. : Наука, 1984. – 328 с.

155. Баталова З. Г. Анализ точности метода максимального правдоподобия для случайно цензурированных выборок / З. Г. Баталова // Статистические методы обработки результатов наблюдений при контроле качества и надежности машин и приборов. – Л. : ЛДНТП, 1979. – С. 14–17.

156. Баталова З. Г. О точности оценок ресурсов элементов изделий методом максимального правдоподобия при случайном усечении длительности наблюдений / З. Г. Баталова, Ю. Н. Благовещенский // Надежность и контроль качества. – 1979. – № 9. – С. 12–20.

157. Благовещенский Ю. Н. Анализ оценки максимального правдоподобия по случайно цензурированной выборке с малой долей отказов на примере экспоненциального распределения / Ю. Н. Благовещенский // Завод. лаб. Диагностика материалов. – 1982. – Т. 48, № 3. – С. 50–52.

158. Благовещенский Ю. Н. Оценивание по неполным выборкам. Ч. 1. Общая модель / Ю. Н. Благовещенский // Статистические модели и методы. – М., 1984. – Вып. 1. – С. 4–17.

159. Благовещенский Ю. Н. Оценивание по неполным выборкам. Ч. 2. Модель случайного цензурирования справа / Ю. Н. Благовещенский // Статистические модели и методы. – М., 1984. – Вып. 1. – С. 17–32.

160. Бодин Н. А. Оценка параметров распределений по группированным выборкам / Н. А. Бодин // Тр. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1970. – Т. 111. – С. 110–154.

161. Большев Л. Н. Асимптотические пирсоновские преобразования / Л. Н. Большев // Теория вероятностей и ее применение. – 1963. – Т. 8, № 2. – С. 129–155.

162. Большев Л. Н. Теория вероятностей и математическая статистика : избр. тр. / Л. Н. Большев ; под ред. Ю. В. Прохорова. – М. : Наука, 1987. – 286 с.

163. Большев Л. Н. Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. – М. : Наука, 1983. – 416 с.

164. Бондарев Б. В. О проверке сложных статистических гипотез / Б. В. Бондарев // Завод. лаб. – 1986. – Т. 52, № 10. – С. 62–63.

165. Боровков А. А. К задаче о двух выборках / А. А. Боровков // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1962. – Т. 26. – С. 605–624.

166. Боровков А. А. О мощности критерия  $\chi^2$  при увеличении числа групп / А. А. Боровков // Теория вероятностей и ее применение. – 1977. – Т. XXII, № 2. – С. 375–378.

167. Брандт З. Статистические методы анализа наблюдений / З. Брандт. – М. : Мир, 1975. – 312 с.

168. Бурдун Г. Д. Основы метрологии / Г. Д. Бурдун, Б. Н. Марков. – М. : Изд-во стандартов, 1985. – 120 с.
169. Бушакова А. Д. Исследование влияния вариантов асимптотической оптимальности группирования на мощность критериев согласия типа  $\chi^2$  / А. Д. Бушакова, Б. Ю. Лемешко // АПЭП-2008. Актуальные проблемы электронного приборостроения : материалы IX междунар. конф. – Новосибирск, 2008. – Т. 6. – С. 29–32.
170. Бушакова А. Д. Исследование влияния вариантов асимптотической оптимальности группирования на мощность критериев типа  $\chi^2$  / А. Д. Бушакова, Б. Ю. Лемешко // Информатика и проблемы телекоммуникаций : материалы науч.-техн. конф. – Новосибирск, 2009. – Т. 1. – С. 34–37.
171. Бушакова А. Д. О влиянии способов группирования на мощность критериев типа  $\chi^2$  Пирсона и Джапаридзе–Никулина / А. Д. Бушакова, Б. Ю. Лемешко // Информатика и проблемы телекоммуникаций : материалы науч.-техн. конф. – Новосибирск, 2010. – Т. 1. – С. 41–44.
172. Васильев В. П. Численные методы решения экстремальных задач / В. П. Васильев. – М. : Наука, 1980. – 520 с.
173. Введение в нелинейное программирование : пер. с нем. / К.-Х. Эльстер, Р. Рейнгардт, М. Шойбле, Г. Донаг. – М. : Наука, 1985. – 264 с.
174. Воинов В. Г. Об оптимальных свойствах критерия Рао–Робсона–Никулина / В. Г. Воинов // Завод. лаб. Диагностика материалов. – 2006. – Т. 72, № 3. – С. 65–70.
175. ГОСТ 11.002–73. Прикладная статистика. Правила оценки аномальности результатов наблюдений. – М. : Изд-во стандартов, 1982. – 26 с.
176. ГОСТ Р ИСО 5479–2002. Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения. – М. : Изд-во стандартов, 2002. – 30 с.
177. ГОСТ Р ИСО 5725-2–2002. Точность (правильность и прецизионность) методов и результатов измерений. Ч. 2. – М. : Изд-во стандартов. – 51 с.
178. Губарев В. В. Вероятностные модели : справочник. В 2 ч. / В. В. Губарев ; Новосиб. электротехн. ин-т. – Новосибирск, 1992. – 422 с.
179. Методические рекомендации по планированию экспериментов и обработке экспериментальных данных при исследовании надежности и качества функционирования систем «человек–техника» / А. И. Губинский [и др.]. – Л., 1978. – 46 с. – (Препринт / ЛЭТИ им. В. И. Ульянова).
180. Гурский Е. И. Теория вероятностей с элементами математической статистики / Е. И. Гурский. – М. : Высшая школа, 1971. – 328 с.
181. Давидович М. И. Программное обеспечение ЭВМ : биб-ка прикладных программ БИМ / М. И. Давидович, М. Л. Петрович. – Минск : Изд-во ин-та математики АН БССР, 1989. – Вып 20 (Прикладная статистика. Корреляционный анализ). – 187 с.

182. Денисов В. И. Асимптотически оптимальное группирование при оценивании коэффициентов линейной регрессионной модели по группированным наблюдениям / В. И. Денисов, Г. Г. Зачепа, Б. Ю. Лемешко ; Новосиб. электротехн. ин-т. – Новосибирск, 1976. – 9 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 1756–76.
183. Денисов В. И. Об асимптотически оптимальном группировании при оценивании основного параметра гамма-распределения по группированным данным / В. И. Денисов, Г. Г. Зачепа, Б. Ю. Лемешко // Применение ЭВМ в оптимальном планировании и проектировании. – Новосибирск, 1974. – С. 50–53.
184. Денисов В. И. Об асимптотически оптимальном группировании при оценивании параметров по группированным данным / В. И. Денисов, Г. Г. Зачепа, Б. Ю. Лемешко ; Новосиб. электротехн. ин-т. – Новосибирск, 1975. – 14 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 3338–75.
185. Денисов В. И. Об определении максимально допустимой ошибки округления при оценивании регрессионных коэффициентов по округленным наблюдениям / В. И. Денисов, Г. Г. Зачепа, Б. Ю. Лемешко ; Новосиб. электротехн. ин-т. – Новосибирск, 1975. – 9 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 3339–75.
186. Денисов В. И. Асимптотически оптимальное группирование при оценивании масштабного параметра гамма-распределения по группированым данным / В. И. Денисов, Б. Ю. Лемешко ; Новосиб. электротехн. ин-т. – Новосибирск, 1978. – 19 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 1778–78.
187. Денисов В. И. Вычисление оценок параметров распределений с использованием таблиц асимптотически оптимального группирования / В. И. Денисов, Б. Ю. Лемешко // Применение ЭВМ в оптимальном планировании и проектировании. – Новосибирск, 1981. – С. 3–17.
188. Денисов В. И. Оптимальное группирование при обработке экспериментальных данных / В. И. Денисов, Б. Ю. Лемешко // Измерительные информационные системы. – Новосибирск, 1979. – С. 5–14.
189. Денисов В. И. Оценивание параметров распределения Коши по частично группированным выборкам / В. И. Денисов, Б. Ю. Лемешко ; Новосиб. электротехн. ин-т. – Новосибирск, 1979. – 22 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 249–79.
190. Денисов В. И. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. I. Критерии типа  $\chi^2$ : метод. реком. / В. И. Денисов, Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1998. – 126 с.
191. Денисов В. И. Оптимальное группирование, оценка параметров и планирование регрессионных экспериментов. В 2 ч. / В. И. Денисов, Б. Ю. Лемешко, Е. Б. Цой ; Новосиб. гос. техн. ун-т. – Новосибирск, 1993. – 346 с.
192. Джапаридзе К. О. К вычислению статистик типа хи-квадрат / К. О. Джапаридзе, М. С. Никулин // Проблемы теории вероятностных распределений. – СПб. : Наука, 1992. – Т. 12. – С. 59–90.

193. Дэйвид Г. Порядковые статистики / Г. Дэвид. – М. : Наука, 1979. – 336 с.
194. Дэннис Д. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Д. Дэннис, Р. Шнабель. – М. : Мир, 1988. – 440 с.
195. Ермаков С. М. Курс статистического моделирования / С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов. – М. : Наука, 1976. – 320 с.
196. Ермаков С. М. Статистическое моделирование / С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов. – М. : Наука, 1982. – 296 с.
197. Еришов А. А. Стабильные методы оценки параметров : обзор / А. А. Еришов // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 8. – С. 66–101.
198. Закс Л. Статистическое оценивание / Л. Закс. – М. : Статистика, 1976. – 598 с.
199. Закс Ш. Теория статистических выводов / Ш. Закс. – М. : Мир, 1975. – 776 с.
200. Зангвилл У. И. Нелинейное программирование / У. И. Зангвилл. – М. : Сов. радио, 1973. – 312 с.
201. Золотухина Л. В. Эмпирическое исследование мощности критерия Саркади и его модификация / Л. В. Золотухина, Е. В. Винник // Завод. лаб. – 1985. – Т. 51, № 1. – С. 51–55.
202. Карманов В. П. Математическое программирование / В. П. Карманов. – М. : Наука, 1975. – 272 с.
203. Кендалл М. Многомерный статистический анализ и временные ряды / М. Кендалл, А. Стьюарт. – М. : Наука, 1976. – 736 с.
204. Кендалл М. Теория распределений / М. Кендалл, А. Стьюарт. – М. : Наука, 1966. – 588 с.
205. Кендалл М. Статистические выводы и связи / М. Кендалл, А. Стьюарт. – М. : Наука, 1973. – 900 с.
206. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А. И. Кобзарь. – М. : Физматлит, 2006. – 816 с.
207. Кокс Д. Теоретическая статистика / Д. Кокс, Д. Хинкли. – М. : Мир, 1978. – 560 с.
208. Королюк В. С. Асимптотический анализ распределений максимальных уклонений в схеме Бернулли / В. С. Королюк // Теория вероятностей и ее применение. – 1959. – Т. 4. – С. 369–397.
209. Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М. : Мир, 1975. – 648 с.
210. Кулинская Е. В. О некоторых ошибках в реализации и применении непараметрических методов в пакете для IBM PC / Е. В. Кулинская, Н. Е. Савушкина // Завод. лаб. – 1990. – Т. 56, № 5. – С. 96–99.
211. Куллдорф Г. Введение в теорию оценивания по группированным и частично группированным выборкам / Г. Куллдорф. – М. : Наука, 1966. – 176 с.

212. Левин С. Ф. Схема приведения в методе косвенного измерения / С. Ф. Левин // Измер. техника. – 2004. – № 3. – С. 5–9.
213. Леман Э. Проверка статистических гипотез / Э. Леман. – М. : Наука, 1979. – 408 с.
214. Леман Э. Теория точечного оценивания / Э. Леман. – М. : Наука, 1991. – 448 с.
215. Лемешко Б. Ю. Асимптотически оптимальное группирование наблюдений – это обеспечение максимальной мощности критериев / Б. Ю. Лемешко // Надежность и контроль качества. – 1997. – № 8. – С. 3–14.
216. Лемешко Б. Ю. Асимптотически оптимальное группирование наблюдений в критериях согласия / Б. Ю. Лемешко // Завод. лаб. – 1998. – Т. 64, № 1. – С. 56–64.
217. Лемешко Б. Ю. К вопросу решения задачи асимптотически оптимального группирования данных при обработке наблюдений, подчиняющихся бета-распределению / Б. Ю. Лемешко // Машины методы оптимизации, моделирования и планирования эксперимента. – Новосибирск, 1988. – С. 134–138.
218. Лемешко Б. Ю. О некоторых вопросах оценивания параметров распределений и проверки гипотез по цензурированным выборкам / Б. Ю. Лемешко // Методы менеджмента качества. – 2001. – № 4. – С. 32–38.
219. Лемешко Б. Ю. Об оценивании параметров распределений по группированным наблюдениям / Б. Ю. Лемешко // Вопр. кибернетики. – М., 1977. – Вып. 30. – С. 80–96.
220. Лемешко Б. Ю. Об оценивании по частично группированным выборкам параметров распределения Эрланга / Б. Ю. Лемешко // Применение ЭВМ в оптимальном планировании и проектировании. – Новосибирск, 1982. – С. 90–93.
221. Лемешко Б. Ю. Об ошибках, совершаемых при использовании непараметрических критериев согласия / Б. Ю. Лемешко // Измер. техника. 2004. – № 2. – С. 15–20.
222. Лемешко Б. Ю. Оптимальные оценки параметров сдвига и масштаба по выборочным квантилям для больших выборок / Б. Ю. Лемешко // АПЭП-96. Актуальные проблемы электронного приборостроения : тр. междунар. науч.-техн. конф. – Новосибирск, 1996. – Т. 6, Ч. 1. – С. 37–44.
223. Лемешко Б. Ю. Робастные методы оценивания и отбраковка аномальных измерений / Б. Ю. Лемешко // Завод. лаб. – 1997. – Т. 63, № 5. – С. 43–49.
224. Лемешко Б. Ю. Статистический анализ одномерных наблюдений случайных величин : программная система / Б. Ю. Лемешко. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1995. – 125 с.

225. Лемешко Б. Ю. К оцениванию параметров надежности по цензурированным выборкам / Б. Ю. Лемешко, С. Я. Гильдебрант, С. Н. Постовалов // Завод. лаб. Диагностика материалов. – 2001. – Т. 67. – № 1. – С. 52–64.
226. Лемешко Б. Ю. Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. I / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измер. техника. – 2009. – № 6. – С. 3–11.
227. Лемешко Б. Ю. Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. II / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измер. техника. – 2009. – № 8. – С. 17–26.
228. Лемешко Б. Ю. О сходимости распределений статистик и мощности критериев однородности Смирнова и Лемана–Розенблatta / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измер. техника. – 2005. – № 12. – С. 9–14.
229. Лемешко Б. Ю. Об устойчивости и мощности критериев проверки однородности средних / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измер. техника. – 2008. – № 9. – С. 23–28.
230. Лемешко Б. Ю. Расширение области применения критериев типа Граббса, используемых при отбраковке аномальных измерений / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измер. техника. – 2005. – № 6. – С. 13–19.
231. Лемешко Б. Ю. Сравнительный анализ критериев проверки отклонения распределения от нормального закона / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Метрология. – 2005. – № 2. – С. 3–24.
232. Лемешко Б. Ю. О применении и мощности критериев проверки однородности дисперсий. Ч. I. Параметрические критерии / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, А. А. Горбунова // Измер. техника. – 2010. – № 3. – С. 10–16.
233. Лемешко Б. Ю. О применении и мощности критериев проверки однородности дисперсий. Ч. II. Непараметрические критерии / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, А. А. Горбунова // Измер. техника. – 2010. – № 5. – С. 11–18.
234. Лемешко Б. Ю. Исследование критериев проверки гипотез, используемых в задачах управления качеством / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, Е. П. Миркин // АПЭП-2004. Актуальные проблемы электронного приборостроения : материалы VII междунар. конф. – Новосибирск, 2004. – Т. 6. – С. 269–272.
235. Моделирование распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обратного гауссовского закона / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, М. С. Никулин, Н. Саайдиа // Автоматика и телемеханика. – 2010. – Т. 71, № 7. – С. 83–102.
236. Лемешко Б. Ю. Мощность критериев согласия при близких альтернативах / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов // Измер. техника. – 2007. – № 2. – С. 22–27.

237. Лемешко Б. Ю. Сравнительный анализ мощности критерииев согласия при близких конкурирующих гипотезах. I. Проверка простых гипотез / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов // Сиб. журн. индустр. математики. – 2008. – Т. 11, № 2(34). – С. 96–111.
238. Лемешко Б. Ю. Сравнительный анализ мощности критерииев согласия при близких альтернативах. II. Проверка сложных гипотез / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов // Сиб. журн. индустр. математики. – 2008. – Т. 11, № 4(36). – С. 78–93.
239. Лемешко Б. Ю. Непараметрические критерии при проверке сложных гипотез о согласии с распределениями экспоненциального семейства / Б. Ю. Лемешко, А. А. Маклаков // Автометрия. – 2004. – № 3. – С. 3–20.
240. Лемешко Б. Ю. Критерии Бартлетта и Кокрена в измерительных задачах при вероятностных законах, отличающихся от нормального / Б. Ю. Лемешко, Е. П. Миркин // Измер. техника. – 2004. – № 10. – С. 10–16.
241. Лемешко Б. Ю. Статистическое моделирование как эффективный инструмент для исследования законов распределения функций случайных величин / Б. Ю. Лемешко, Д. В. Огурцов // Метрология. – 2007. – № 5. – С. 3–13.
242. Лемешко Б. Ю. Асимптотически оптимальное группирование данных при анализе наблюдений, распределенных по законам Лапласа и двойного показательного / Б. Ю. Лемешко, А. Г. Панфилов, Л. В. Панфилова // Математическое обеспечение стохастических и детерминированных моделей. – Новосибирск, 1986. – С. 15–23.
243. Лемешко Б. Ю. Исследование распределений статистик корреляционного анализа при отклонении многомерного закона от нормального / Б. Ю. Лемешко, С. С. Помадин // АПЭП-2000. Актуальные проблемы электронного приборостроения : тр. V междунар. конф. – Новосибирск, 2000. – Т. 7. – С. 184–187.
244. Лемешко Б. Ю. Корреляционный анализ многомерных случайных величин при нарушении предположений о нормальности / Б. Ю. Лемешко, С. С. Помадин // Тр. 10-го юбилейного междунар. симп. по непараметрическим и робастным методам в кибернетике. – Томск, 2002. – С. 125–141.
245. Лемешко Б. Ю. Корреляционный анализ наблюдений многомерных случайных величин при нарушении предположений о нормальности / Б. Ю. Лемешко, С. С. Помадин // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. – Т. 5, № 3. – С. 115–130.
246. Лемешко Б. Ю. Один подход к моделированию псевдослучайных векторов с «заданными» числовыми характеристиками по законам, отличным от нормального / Б. Ю. Лемешко, С. С. Помадин // Информатика и проблемы телекоммуникаций : материалы междунар. науч.-техн. конф. – Новосибирск, 2002. – С. 121–122.

247. Лемешко Б. Ю. Проверка гипотез о математических ожиданиях и дисперсиях в задачах метрологии и контроля качества при вероятностных законах, отличающихся от нормального / Б. Ю. Лемешко, С. С. Помадин // Метрология, 2004. – № 3. – С. 3–15.
248. Лемешко Б. Ю. Распределения статистик корреляционного анализа при отклонении многомерного закона от нормального / Б. Ю. Лемешко, С. С. Помадин // АПЭП-2002. Актуальные проблемы электронного приборостроения : материалы VI междунар. конф. – Новосибирск, 2002. – Т. 6. – С. 32–35.
249. Лемешко Б. Ю. Исследование распределений статистик, используемых для проверки гипотез о равенстве дисперсий при законах ошибок, отличных от нормального / Б. Ю. Лемешко, В. М. Пономаренко // Науч. вест. НГТУ. – 2006. – № 2(23). – С. 21–33.
250. Лемешко Б. Ю. Вопросы обработки выборок одномерных случайных величин / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Науч. вест. НГТУ. – Новосибирск, 1996. – № 2. – С. 3–24.
251. Лемешко Б. Ю. Исследование допредельных распределений статистик критериев согласия при проверке сложных гипотез / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Актуальные проблемы электронного приборостроения : тр. IV междунар. конф. – Новосибирск, 1998. – Т. 3. – С. 12–16.
252. Лемешко Б. Ю. К вопросу о рабочности оценок по группированным данным / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Сб. науч. тр. НГТУ. – Новосибирск : Изд-во НГТУ. – 1996. – № 2(4). – С. 9–18.
253. Лемешко Б. Ю. Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей : учеб. пособие / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2004. – 120 с.
254. Лемешко Б. Ю. Непараметрические критерии при проверке сложных гипотез о согласии с распределениями Джонсона / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Докл. СО АН высш. шк. – 2002. – № 1(5). – С. 65–74.
255. Лемешко Б. Ю. О зависимости предельных распределений статистик  $\chi^2$  Пирсона и отношения правдоподобия от способа группирования данных / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Завод. лаб. – 1998. – Т. 64, № 5. – С. 56–63.
256. Лемешко Б. Ю. О зависимости распределений статистик непараметрических критериев и их мощности от метода оценивания параметров / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Завод. лаб. Диагностика материалов. – 2001. – Т. 67, № 7. – С. 62–71.
257. Лемешко Б. Ю. О правилах проверки согласия опытного распределения с теоретическим / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Методы менеджмента качества. Надежность и контроль качества. – 1999. – № 11. – С. 34–43.
258. Лемешко Б. Ю. О распределениях статистик непараметрических критериев согласия при оценивании по выборкам параметров наблюдаемых

законов / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Завод. лаб. – 1998. – Т. 64, № 3. – С. 61–72.

259. *Лемешко Б. Ю.* Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим : метод. рек. / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1999. – Ч. II. Непараметрические критерии. – 85 с.

260. *Лемешко Б. Ю.* Прикладные аспекты использования критериев согласия в случае проверки сложных гипотез / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Надежность и контроль качества. – 1997. – № 11. – С. 3–17.

261. *Лемешко Б.Ю.* Применение непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Автометрия. – 2001. – № 2. – С. 88–102.

262. *Лемешко Б. Ю.* Статистический анализ одномерных наблюдений по частично группированным данным / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Изв. вузов. Физика. – Томск, 1995. – № 9. – С. 39–45.

263. *Лемешко Б. Ю.* Статистический анализ смесей распределений по частично группированным данным / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Сб. науч. тр. НГТУ. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1995. – № 1. – С. 25–31.

264. *Лемешко Б. Ю.* Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей : метод. указания к выполнению лаб. работ / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов, С. Б. Лемешко. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. – 71 с.

265. *Лемешко Б. Ю.* К применению непараметрических критериев согласия для проверки адекватности непараметрических моделей / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов, А. В. Французов // Автометрия. – 2002. – № 2. – С. 3–14.

266. *Лемешко Б. Ю.* О распределениях статистики и мощности критерия типа  $\chi^2$  Никулина / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов, Е. В. Чимитова // Завод. лаб. Диагностика материалов. – 2001. – Т. 67, № 3. – С. 52–58.

267. *Лемешко Б. Ю.* Исследование особенностей и мощности некоторых критериев нормальности / Б. Ю. Лемешко, А. П. Рогожников // Метрология. – 2009. – № 4. – С. 3–24.

268. *Лемешко Б. Ю.* Максимизация мощности критериев типа  $\chi^2$  / Б. Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова // Докл. СО АН высш. шк. – Новосибирск, 2000. – № 2. – С. 53–61.

269. *Лемешко Б. Ю.* О выборе числа интервалов в критериях согласия типа  $\chi^2$  / Б. Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова // Завод. лаб. Диагностика материалов. – 2003. – Т. 69, № 1. – С. 61–67.

270. *Лемешко Б. Ю.* Об ошибках и неверных действиях, совершаемых при использовании критериев согласия типа  $\chi^2$  / Б. Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова // Измер. техника. – 2002. – № 6. – С. 5–11.

271. Лемешко Б. Ю. Оптимальные  $L$ -оценки параметров сдвига и масштаба распределений по выборочным квантилям / Б. Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова // Завод. лаб. Диагностика материалов. 2004. – Т. 70, № 1. – С. 54–66.
272. Лемешко Б. Ю. Построение оптимальных  $L$ -оценок параметров сдвига и масштаба распределений по выборочным квантилям / Б. Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова // Сиб. журн. индустр. математики. – 2001. – Т. 4, № 2. – С. 166–183.
273. Лемешко Б. Ю. Численное сравнение оценок максимального правдоподобия с одношаговыми и влияние точности оценивания на распределения статистик критериев согласия / Б. Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова // Завод. лаб. Диагностика материалов. – 2003. – Т. 69, № 5. – С. 62–68.
274. Лемешко С. Б. Критерий независимости Аббе при нарушении предположений нормальности / С. Б. Лемешко // Измер. техника. – 2006. – № 10. – С.9–14.
275. Лемешко С. Б. Распределения статистик критериев согласия типа хи-квадрат при малых выборках / С. Б. Лемешко // АПЭП-2006 Актуальные проблемы электронного приборостроения : материалы VII междунар. конф. Новосибирск, 2006. – Т. 6. – С. 78–82.
276. Лемешко С. Б. Расширение прикладных возможностей некоторых классических методов математической статистики : дис. ... канд. тех. наук : 05.13.17 : защищена 16.05.07 / С. Б. Лемешко. – Новосибирск, 2007. – 306 с.
277. Лемешко С. Б. Распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке гипотез относительно бета-распределений / С. Б. Лемешко, Б. Ю. Лемешко // Докл. АН высш. шк. – 2007. – № 2(9). – С. 6–16.
278. Леонов В. П. Применение статистики в медицине и биологии: анализ публикаций 1990–1997 гг. / В. П. Леонов, П. В. Ижевский // Сиб. мед. журн. – 1997. – № 3, 4. – С. 64–74.
279. Лесин В. В. Основы методов оптимизации : учеб. пособие для вузов / В. В. Лесин. – М. : МАИ, 1998. – 340 с.
280. Мардиа К. Таблицы  $F$ -распределений и распределений, связанных с ними / К. Мардиа, П. Земроч. – М. : Наука, 1984. – 255 с.
281. Мартынов Г. В. Критерии омега-квадрат / Г. В. Мартынов. – М. : Наука, 1978. – 80 с.
282. МИ 2083–90. ГСИ. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.stroyplan.ru/docs.php?showitem=47087>. – Загл. с экрана.
283. Микешина Н. Г. Выявление и исключение аномальных значений / Н. Г. Микешина // Завод. лаб. 1966. – Т. 22, № 3. – С. 310–318.
284. Мирвалиев М. Критерии согласия типа хи-квадрат / М. Мирвалиев, М. С. Никулин // Завод. лаб. – 1992. – Т. 58, № 3. – С. 52–58.
285. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений / А. К. Митропольский. – М. : Наука, 1971. – 479 с.

286. *Миттаг Х.-Й.* Статистические методы обеспечения качества / Х.-Й. Миттаг, Х. Ринне. – М. : Машиностроение. 1995. – 600 с.
287. *Никулин М. С.* Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба / М. С. Никулин // Теория вероятностей и ее применение. – 1973. – Т. XVIII, № 3. – С. 583–591.
288. *Никулин М. С.* О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений / М. С. Никулин // Теория вероятностей и ее применение. – 1973. – Т. XVIII. – № 3. – С. 675–676.
289. *Никулин М. С.* Один вариант обобщенной статистики омега-квадрат / М. С. Никулин // Записки науч. семинаров ЛОМИ, 1989. – Т. 177. – С. 108–113.
290. *Новицкий П. В.* Оценка погрешностей результатов измерений / П. В. Новицкий, И. А. Зограф. – Л. : Энергоатомиздат, 1991. – 303 с.
291. *Орлов А. И.* Методы оценки близости допредельных и предельных распределений статистик / А. И. Орлов // Завод. лаб. – 1998. – Т. 64, № 5. – С. 64–67.
292. *Орлов А. И.* Неустойчивость параметрических методов отбраковки резко выделяющихся наблюдений / А. И. Орлов // Завод. лаб. – 1992. – Т. 58, № 7. – С. 40–42.
293. *Орлов А. И.* О проверке однородности двух независимых выборок / А. И. Орлов // Завод. лаб. – 2003. – Т. 69, № 1. – С. 55–60.
294. *Орлов А. И.* Распространенная ошибка при использовании критериев Колмогорова и омега-квадрат / А. И. Орлов // Завод. лаб. – 1985. – Т. 51, № 1. – С. 60–62.
295. *Орлов А. И.* Часто ли распределение результатов наблюдений является нормальным / А. И. Орлов // Завод. лаб. – 1991. – Т. 57, № 7. – С. 64–66.
296. *Пасман В. Р.* Робастные методы оценивания коэффициента корреляции / В. Р. Пасман, Г. Л. Шевляков // Автоматика и телемеханика. – 1987. – Т. 27, № 3. – С. 70–80.
297. *Петрович М. Л.* Численное исследование на ЭВМ некоторых алгоритмов прикладной статистики / М. Л. Петрович // Завод. лаб. Диагностика материалов. – 1991. – Т. 57, № 7. – С. 56–64.
298. *Постовалов С. Н.* Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин : дис. ... канд. техн. наук / С. Н. Постовалов. – Новосибирск, 1998. – 188 с.
299. *Пугачев В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика / В. С. Пугачев. – М. : Наука, 1979. – 496 с.
300. *Пшеничный Б. Н.* Численные методы экстремальных задач / Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин. – М.: Наука, 1975. – 320 с.
301. Р 50.1.033–2001. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. I. Критерии типа хи-квадрат. – М. : Изд-во стандартов, 2002. – 87 с.

302. Р 50.1.037–2002. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. II. Непараметрические критерии. – М. : Изд-во стандартов, 2002. – 64 с.
303. Rao C. R. Линейные статистические методы и их применение / С. Р. Рао. – М. : Наука, 1968. – 548 с.
304. РД 50-690-89. Надежность в технике. Методы оценки показателей надежности по экспериментальным данным. – М. : Изд-во стандартов, 1990.
305. Румшиский Л. З. Математическая обработка результатов эксперимента : справ. рук. / Л. З. Румшиский. – М. : Наука, 1971. – 192 с.
306. Саввушкина Н. Е. Критерий Колмогорова–Смирнова для логистического и гамма-распределения / Н. Е. Саввушкина // Сб. тр. ВНИИ систем. исслед. – 1990. – № 8.
307. Сархан А. Е. Введение в теорию порядковых статистик / А. Е. Сархан, Б. Г. Гринберг. – М. : Статистика, 1970. – 414 с.
308. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы / Ж. Сеа. – М. : Мир, 1973. – 244 с.
309. Скрипник В. М. Оценка надежности технических систем по цензурированным выборкам / В. М. Скрипник, А. Е. Назин. – Минск : Наука и техника, 1981. – 144 с.
310. Смирнов Н. В. Вероятности больших значений непараметрических односторонних критериев согласия / Н. В. Смирнов // Тр. матем. ин-та АН СССР. – 1961. – Т. 64. – С. 185–210.
311. Смирнов Н. В. Оценка максимального члена в ряду наблюдений / Н. В. Смирнов // Докл. АН СССР. – 1941. – Т. 33, № 5. – С. 346–349.
312. Смирнов Н. В. Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках / Н. В. Смирнов // Бюл. МГУ, Серия А. – 1939. – Т. 2, № 2. – С. 3–14.
313. Смирнов Н. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н. В. Смирнов, И. В. Дунин-Барковский. – М. : Наука, 1969. – 511 с.
314. Смоляк С. А. Устойчивые методы оценивания: Статистическая обработка неоднородных совокупностей / С. А. Смоляк, Б. П. Титаренко. – М. : Статистика, 1980. – 208 с.
315. Многомерный статистический анализ в экономике : учебное пособие для вузов / Л. А. Сошикова, В. Н. Тамашевич, Г. Уебе, М. Шефер ; под ред. В. Н. Тамашевича. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 1999. – 598 с.
316. СТ СЭВ 545–77. Прикладная статистика. Правила оценки аномальности результатов наблюдений. – М. : Изд-во стандартов, 1978. – 26 с.
317. Статистические методы в экспериментальной физике / В. Илье [и др.]. – М. : Атомиздат, 1976. – 335 с.

318. Статистические методы обработки эмпирических данных : рекомендации. – М. : Изд-во стандартов. 1978. – 232 с.
319. Статистический анализ цензурированных выборок (Современное состояние и перспективы развития теоретических основ и прикладных методов анализа по цензурированным выборкам) / В. М. Скрипник, А. Е. Назин, Ю. Г. Приходько, В. В. Пискун. – Минск : МВИЗРУ, 1987. – 174 с.
320. Струнов В. И. О применении критерия Аббе для анализа независимости рядов измерений, характеризующихся отличными от нормального законами распределения / В. И. Струнов // Измер. техника. – 2006. – № 8. – С. 13–17.
321. Таушанов З. Вычисление энтропийного коэффициента при малых выборках / З. Таушанов, Е. Тонева, Р. Пенова // Изобретательство, стандартизация и качество. – 1973. – № 5.
322. Тихов М. С. О предельных законах распределения оценок по цензурированным выборкам / М. С. Тихов // Статистические методы. – Пермь, 1984. – С. 145–154.
323. Тихов М. С. О предельных распределениях отношения правдоподобия и оценок по цензурированным выборкам / М. С. Тихов // Статистические методы. – Пермь, 1986. – С. 95–104.
324. Тихов М. С. О предельных распределениях оценок по двусторонне цензурированным выборкам / М. С. Тихов // Теория вероятностей и ее применение. – 1984. – Т. XXIX, № 2. – С. 354–360.
325. Тихов М. С. О сокращении длительности испытаний при цензурировании выборки / М. С. Тихов // Теория вероятностей и ее применение. – 1991. – Т. XXXVI, № 3. – С. 626–629.
326. Тихов М. С. Оценивание показателей качества по неполным выборкам / М. С. Тихов // Надежность и контроль качества. – 1996. – № 11. – С. 16–24.
327. Тихов М. С. Оценка показателей безотказности по случайному цензурированной выборке / М. С. Тихов // Надежность и контроль качества. – 1993. – № 2. – С. 11–17.
328. Тихов М. С. Статистический анализ по группированным и цензурированным наблюдениям / М. С. Тихов // Статистические методы. – Пермь, 1978. – С. 122–137.
329. Тонева Е. Аппроксимация распределений погрешности средств измерений / Е. Тонева // Измерит. техн. – 1981. – № 6. – С. 15–16.
330. Тюрин Ю. Н. Исследования по непараметрической статистике (непараметрические методы и линейная модель) : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Ю. Н. Тюрин. – М., 1985. – 33 с. – (МГУ).
331. Тюрин Ю. Н. О предельном распределении статистик Колмогорова–Смирнова для сложной гипотезы / Ю. Н. Тюрин // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1984. – Т. 48, № 6. – С. 1314–1343.

332. *Тюрин Ю. Н.* Анализ данных на компьютере / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров. – М. : ИНФРА-М, Финансы и статистика, 1995. – 384 с.
333. *Тюрин Ю. Н.* Критерий согласия для распределения Вейбулла–Гнеденко / Ю. Н. Тюрин, Н. Е. Саввушкина // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. – 1984. – № 3. – С. 109–112.
334. *Ферестер Э.* Методы корреляционного и регрессионного анализа / Э. Ферестер, Б. Ренц. – М. : Финансы и статистика, 1988. – 302 с.
335. *Фиакко А.* Нелинейное программирование: методы последовательной безусловной минимизации / А. Фиакко, Г. Мак-Кормик. – М. : Мир, 1972. – 240 с.
336. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М. : Мир, 1975. – 534 с.
337. *Хьюбер П.* Робастность в статистике / П. Хьюбер. – М. : Мир, 1984. – 303 с.
338. *Ченцов Н. Н.* Статистические решающие правила и оптимальные выводы / Н. Н. Ченцов. – М. : Наука, 1972. – 520 с.
339. *Чибисов Д. М.* Исследования мощности некоторых непараметрических критериев / Д. М. Чибисов // Теория вероятностей и ее применение. 1962. – Т. 7, № 3. – С. 355–356.
340. *Чибисов Д. М.* К исследованию асимптотической мощности критериев согласия / Д. М. Чибисов // Теория вероятностей и ее применение. 1965. – Т. 10, № 3. – С. 460–478.
341. *Чибисов Д. М.* Некоторые критерии типа хи-квадрат для непрерывных распределений / Д. М. Чибисов // Теория вероятностей и ее применение. – 1971. – Т. XVI, № 1. – С. 3–20.
342. *Чибисов Д. М.* Об асимптотической мощности и эффективности критерия  $\omega_n^2$  / Д. М. Чибисов // ДАН СССР. – 1961. – Т. 138, № 2. – С. 322–325.
343. *Чибисов Д. М.* Об асимптотической мощности критериев согласия при близких альтернативах / Д. М. Чибисов // Теория вероятностей и ее применение. – 1964. – Т. 9, № 3. – С. 561–566.
344. *Чибисов Д. М.* О критериях согласия, основанных на группированных данных / Д. М. Чибисов, Л. Г. Гванцеладзе // III советско-японский симпозиум по теории вероятностей. – Ташкент : Фан, 1975. – С. 183–185.
345. *Чимитова Е. В.* Исследование методами компьютерного моделирования свойств оценок и статистик критериев согласия по группированным и цензурированным выборкам : дис. ... канд. техн. наук / Е. В. Чимитова. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. гос. техн. ун-та, 2003. – 163 с.
346. Численные методы условной оптимизации / под ред. Ф. Гилла, У. Мюррэя. – М. : Мир, 1977. – 290 с.
347. *Чистяков В. П.* Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. – М. : Наука, 1982. – 256 с.

348. Шевчук В. П. Количественная оценка погрешности измерений обобщенных технологических параметров / В. П. Шевчук, Д. Н. Лясин // Измер. техника. – 2004. – № 10. – С. 16–20.
349. Шор Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества в надежности / Я. Б. Шор. – М. : Сов. радио, 1962. – 552 с.
350. Шторм Р. Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества / Р. Шторм. – М. : Мир, 1970. – 368 с.
351. Шуленин В. П. Введение в рабочую статистику / В. П. Шуленин. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 1993. – 227 с.
352. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений / Л. Яноши. – М. : Мир, 1968. – 462 с.

## **ПРИЛОЖЕНИЕ А**

**ТАБЛИЦЫ**

**АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОГО ГРУППИРОВАНИЯ  
НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ  
ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ  
И В КРИТЕРИЯХ СОГЛАСИЯ ТИПА  $\chi^2$**





Таблица А.1

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра экспоненциального распределения, параметра распределения Парето, масштабного параметра распределения Вейбулла, параметра сдвига распределения наименьшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$A$
2	1.5936	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6476
3	1.0176	2.6112	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8203
4	0.7541	1.7716	3.3652	—	—	—	—	—	—	—	0.8910
5	0.6004	1.3545	2.3720	3.9657	—	—	—	—	—	—	0.9269
6	0.4993	1.0997	1.8538	2.8714	4.4650	—	—	—	—	—	0.9606
7	0.4276	0.9269	1.5273	2.2813	3.2989	4.8925	—	—	—	—	0.9606
8	0.3739	0.8015	1.3008	1.9012	2.6553	3.6729	5.2665	—	—	—	0.9693
9	0.3323	0.7063	1.1338	1.6331	2.2336	2.9876	4.0052	5.5988	—	—	0.9754
10	0.2990	0.6314	1.0053	1.4329	1.9322	2.5326	3.2866	4.3042	5.8979	—	0.9798
11	0.2716	0.5695	0.9014	1.2746	1.7015	2.1989	2.7955	3.5429	4.5480	6.1176	0.9832

Таблица А.2

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра экспоненциального распределения, параметра распределения Рэлея, параметра распределения Парето, масштабного параметра распределения Вейбулла, параметра сдвига распределения наименьшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$A$
2	0.7968	0.2032	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6476
3	0.6385	0.2880	0.0735	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8203
4	0.5296	0.3004	0.1355	0.0345	—	—	—	—	—	—	—	0.8911
5	0.4514	0.2905	0.1648	0.0744	0.0189	—	—	—	—	—	—	0.9269
6	0.3930	0.2740	0.1763	0.1000	0.0451	0.0116	—	—	—	—	—	0.9476
7	0.3479	0.2563	0.1787	0.1150	0.0652	0.0294	0.0075	—	—	—	—	0.9606
8	0.3120	0.2394	0.1763	0.1229	0.0791	0.0449	0.0202	0.0052	—	—	—	0.9693
9	0.2827	0.2238	0.1717	0.1265	0.0882	0.0567	0.0322	0.0145	0.0037	—	—	0.9754
10	0.2584	0.2097	0.1659	0.1273	0.0938	0.0654	0.0421	0.0239	0.0107	0.0028	—	0.9798
11	0.2378	0.1964	0.1598	0.1264	0.0971	0.0715	0.0498	0.0322	0.0183	0.0083	0.0024	0.9832

Таблица А.3

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра распределения Рэлея) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	1.7853	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6476
3	1.4266	2.2853	—	—	—	—	—	—	—	0.8203
4	1.2280	1.8823	2.5943	—	—	—	—	—	—	0.8910
5	1.0954	1.6459	2.1781	2.8163	—	—	—	—	—	0.9269
6	0.9993	1.4831	1.9255	2.3964	2.9883	—	—	—	—	0.9476
7	0.9247	1.3615	1.7477	2.1360	2.5686	3.1281	—	—	—	0.9606
8	0.8648	1.2661	1.6130	1.9500	2.3045	2.7103	3.2455	—	—	0.9693
9	0.8152	1.1884	1.5058	1.8073	2.1136	2.4444	2.8303	3.3463	—	0.9754
10	0.7734	1.1237	1.4180	1.6928	1.9658	2.2506	2.5638	2.9340	3.4344	0.9798

Таблица А.4

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра распределения Максвелла) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	2.0451	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6451
3	1.6762	2.5366	—	—	—	—	—	—	—	0.8179
4	1.4689	2.1292	2.8402	—	—	—	—	—	—	0.8892
5	1.3292	1.8879	2.4221	3.0583	—	—	—	—	—	0.9254
6	1.2261	1.7205	2.1667	2.6379	3.2274	—	—	—	—	0.9464
7	1.1458	1.5947	1.9859	2.3759	2.8081	3.3649	—	—	—	0.9596
8	1.0807	1.4952	1.8481	2.1879	2.5431	2.9480	3.4803	—	—	0.9685
9	1.0267	1.4138	1.7377	2.0423	2.3499	2.6803	3.0652	3.5789	—	0.9747
10	0.9798	1.3447	1.6460	1.9252	2.2003	2.4857	2.7984	3.1668	3.6625	0.9792

Таблица А.5  
**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$   
(при оценивании масштабного параметра распределения Максвелла) и соответствующие значения  
относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0.7576	0.2424	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6451
3	0.5781	0.3296	0.0923	—	—	—	—	—	—	—	0.8179
4	0.4597	0.3310	0.1647	0.0446	—	—	—	—	—	—	0.8892
5	0.3778	0.3097	0.1942	0.0933	0.0250	—	—	—	—	—	0.9254
6	0.3185	0.2837	0.2022	0.1223	0.0579	0.0154	—	—	—	—	0.9464
7	0.2739	0.2585	0.2000	0.1374	0.0818	0.0383	0.0101	—	—	—	0.9596
8	0.2393	0.2357	0.1931	0.1438	0.0971	0.0573	0.0267	0.0070	—	—	0.9685
9	0.2119	0.2155	0.1840	0.1450	0.1063	0.0711	0.0418	0.0194	0.0050	—	0.9747
10	0.1891	0.1978	0.1745	0.1437	0.1112	0.0806	0.0536	0.0313	0.0145	0.0038	0.9792

Таблица А.6

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра полунармального распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	1.4821	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6523
3	1.1395	1.9952	—	—	—	—	—	—	—	0.8244
4	0.9553	1.5993	2.3124	—	—	—	—	—	—	0.8943
5	0.8355	1.3712	1.9002	2.5407	—	—	—	—	—	0.9295
6	0.7495	1.2163	1.6526	2.1225	2.7173	—	—	—	—	0.9496
7	0.6842	1.1025	1.4797	1.8658	2.3009	2.8632	—	—	—	0.9622
8	0.6277	1.0069	1.3432	1.6751	2.0278	2.4343	2.9742	—	—	0.9706
9	0.5892	0.9409	1.2488	1.5445	1.8503	2.1861	2.5844	3.1015	—	0.9765
10	0.5545	0.8838	1.1682	1.4380	1.7113	2.0012	2.3249	2.6993	3.2125	0.9808

Таблица А.7

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра полунармального распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0.8617	0.1383	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6523
3	0.7455	0.2085	0.0460	—	—	—	—	—	—	—	0.8244
4	0.6606	0.2297	0.0890	0.0207	—	—	—	—	—	—	0.8943
5	0.5966	0.2331	0.1129	0.0463	0.0111	—	—	—	—	—	0.9295
6	0.5464	0.2297	0.1255	0.0646	0.0272	0.0066	—	—	—	—	0.9496
7	0.5061	0.2236	0.1313	0.0769	0.0407	0.0172	0.0042	—	—	—	0.9622
8	0.4698	0.2162	0.1348	0.0853	0.0513	0.0277	0.0120	0.0029	—	—	0.9706
9	0.4443	0.2090	0.1350	0.0893	0.0582	0.0355	0.0190	0.0078	0.0019	—	0.9765
10	0.4208	0.2024	0.1341	0.0923	0.0634	0.0417	0.0253	0.0131	0.0056	0.0013	0.9808

Таблица А.8

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины  $A$  ( $m = 4$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	2.2759	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6435
3	1.9011	2.7621	—	—	—	—	—	—	—	0.8164
4	1.6877	2.3523	3.0619	—	—	—	—	—	—	0.8880
5	1.5409	2.1027	2.6375	3.2731	—	—	—	—	—	0.9245
6	1.4320	1.9320	2.3793	2.8420	3.4371	—	—	—	—	0.9456
7	1.3441	1.7985	2.1899	2.5797	3.0076	3.5655	—	—	—	0.9589
8	1.2773	1.6988	2.0537	2.3944	2.7499	3.1553	3.6866	—	—	0.9679
9	1.2376	1.6331	1.9559	2.2567	2.5594	2.8931	3.2773	3.7885	—	0.9742
10	1.1957	1.5742	1.8805	2.1615	2.4364	2.7194	3.0318	3.3999	3.8922	0.9788

Таблица А.9

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 4$ ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$ ]**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0.7306	0.2694	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6435
3	0.5393	0.3546	0.1061	—	—	—	—	—	—	—	0.8164
4	0.4165	0.3467	0.1844	0.0524	—	—	—	—	—	—	0.8880
5	0.3327	0.3153	0.2138	0.1082	0.0300	—	—	—	—	—	0.9245
6	0.2736	0.2830	0.2175	0.1383	0.0688	0.0188	—	—	—	—	0.9456
7	0.2287	0.2519	0.2105	0.1536	0.0953	0.0427	0.0128	—	—	—	0.9589
8	0.1969	0.2260	0.1997	0.1574	0.1110	0.0678	0.0325	0.0087	—	—	0.9679
9	0.1790	0.2060	0.1849	0.1522	0.1163	0.0827	0.0493	0.0234	0.0062	—	0.9742
10	0.1610	0.1905	0.1762	0.1498	0.1187	0.0875	0.0599	0.0355	0.0165	0.0044	0.9788

Таблица A.10

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины  $A$  ( $m = 5$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	2.4851	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6424
3	2.1047	2.9667	—	—	—	—	—	—	—	0.8154
4	1.8861	2.5542	3.2635	—	—	—	—	—	—	0.8871
5	1.7383	2.3089	2.8453	3.4778	—	—	—	—	—	0.9238
6	1.6274	2.1357	2.5880	3.0606	3.6463	—	—	—	—	0.9451
7	1.5434	2.0084	2.4056	2.7983	3.2306	3.7856	—	—	—	0.9585
8	1.4642	1.8929	2.2499	2.5904	2.9449	3.3472	3.8734	—	—	0.9676
9	1.4122	1.8192	2.1563	2.4668	2.7770	3.1092	3.4938	4.0021	—	0.9739
10	1.3523	1.7371	2.0514	2.3376	2.6193	2.9121	3.2278	3.6023	4.1009	0.9786

Таблица А.11

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 5$ ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A_4$ ]**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0.7105	0.2895	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6424
3	0.5106	0.3721	0.1173	—	—	—	—	—	—	—	0.8154
4	0.3853	0.3562	0.1997	0.0588	—	—	—	—	—	—	0.8871
5	0.3033	0.3199	0.2258	0.1175	0.0335	—	—	—	—	—	0.9238
6	0.2460	0.2822	0.2276	0.1489	0.0745	0.0208	—	—	—	—	0.9451
7	0.2059	0.2495	0.2171	0.1617	0.1021	0.0501	0.0136	—	—	—	0.9585
8	0.1711	0.2181	0.2025	0.1653	0.1202	0.0754	0.0371	0.0103	—	—	0.9676
9	0.1501	0.1975	0.1923	0.1620	0.1252	0.0876	0.0532	0.0253	0.0068	—	0.9739
10	0.1277	0.1750	0.1774	0.1580	0.1307	0.0995	0.0675	0.0406	0.0187	0.0049	0.9786

Таблица A.12

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины  $A$  ( $m = 6$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	2.6788	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6416
3	2.2937	3.1562	—	—	—	—	—	—	—	0.8146
4	2.0690	2.7373	3.4474	—	—	—	—	—	—	0.8865
5	1.9209	2.4937	3.0329	3.6644	—	—	—	—	—	0.9233
6	1.8077	2.3206	2.7794	3.2560	3.8376	—	—	—	—	0.9446
7	1.7052	2.1822	2.5885	2.9928	3.4297	3.9772	—	—	—	0.9581
8	1.6448	2.0820	2.4474	2.7948	3.1545	3.5620	4.0856	—	—	0.9673
9	1.5655	1.9772	2.3189	2.6446	2.9689	3.3159	3.7061	4.2064	—	0.9736
10	1.5219	1.9135	2.2322	2.5258	2.8116	3.1058	3.4252	3.7974	4.2833	0.9784

Таблица А.13

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 6$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0.6951	0.3049	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6416
3	0.4892	0.3845	0.1263	—	—	—	—	—	—	—	0.8146
4	0.3612	0.3611	0.2131	0.0646	—	—	—	—	—	—	0.8865
5	0.2815	0.3194	0.2364	0.1260	0.0367	—	—	—	—	—	0.9233
6	0.2254	0.2791	0.2365	0.1575	0.0790	0.0225	—	—	—	—	0.9446
7	0.1797	0.2456	0.2253	0.1734	0.1085	0.0528	0.0147	—	—	—	0.9581
8	0.1552	0.2133	0.2071	0.1721	0.1255	0.0785	0.0378	0.0105	—	—	0.9673
9	0.1261	0.1850	0.1925	0.1750	0.1371	0.0958	0.0558	0.0256	0.0071	—	0.9736
10	0.1115	0.1661	0.1764	0.1640	0.1369	0.1048	0.0721	0.0429	0.0199	0.0054	0.9784

Таблица А.14

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 7$ )] и соответсвующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	2.8592	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6410
3	2.4702	3.3335	—	—	—	—	—	—	—	0.8141
4	2.2424	2.9130	3.6227	—	—	—	—	—	—	0.8861
5	2.0892	2.6637	3.2017	3.8338	—	—	—	—	—	0.9229
6	1.9753	2.4906	2.9522	3.4307	4.0111	—	—	—	—	0.9444
7	1.8697	2.3537	2.7638	3.1754	3.6180	4.1618	—	—	—	0.9579
8	1.8095	2.2496	2.6140	2.9589	3.3148	3.7168	4.2420	—	—	0.9671
9	1.7284	2.1442	2.4877	2.8152	3.1416	3.4897	3.8810	4.3795	—	0.9734
10	1.6738	2.0692	2.3912	2.6935	2.9861	3.2910	3.6147	3.9779	4.4670	0.9782

Таблица А.15

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 7$ ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$ ]**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0.6826	0.3174	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6410
3	0.4720	0.3942	0.1338	—	—	—	—	—	—	—	0.8141
4	0.3435	0.3648	0.2226	0.0691	—	—	—	—	—	—	0.8861
5	0.2631	0.3179	0.2442	0.1347	0.0401	—	—	—	—	—	0.9229
6	0.2090	0.3866	0.1307	0.1653	0.0841	0.0243	—	—	—	—	0.9444
7	0.1643	0.2413	0.2288	0.1816	0.1140	0.0545	0.0155	—	—	—	0.9579
8	0.1414	0.2059	0.2061	0.1758	0.1316	0.0846	0.0426	0.0120	—	—	0.9671
9	0.1138	0.1772	0.1910	0.1787	0.1432	0.1012	0.0597	0.0276	0.0076	—	0.9734
10	0.0972	0.1559	0.1738	0.1702	0.1441	0.1237	0.0645	0.0438	0.0211	0.0057	0.9782

Таблица А.16

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 8$ )] и соответсвующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	3.0289	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6405
3	2.6345	3.4992	—	—	—	—	—	—	—	0.8136
4	2.4103	3.0825	3.7907	—	—	—	—	—	—	0.8857
5	2.2556	2.8342	3.3745	4.0004	—	—	—	—	—	0.9226
6	2.1318	2.6542	3.1120	3.5661	4.1522	—	—	—	—	0.9441
7	2.0383	2.5119	2.9189	3.3178	3.7560	4.3031	—	—	—	0.9577
8	1.9612	2.4048	2.7742	3.1251	3.4917	3.8964	4.4313	—	—	0.9669
9	1.8989	2.3089	2.6432	2.9523	3.2672	3.6044	3.9900	4.4952	—	0.9734
10	1.8477	2.2411	2.5569	2.8434	3.1248	3.4169	3.7366	4.1059	4.5926	0.9781

Таблица А.17

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 8$ ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$ ]**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0.6722	0.3278	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6405
3	0.4569	0.4024	0.1407	—	—	—	—	—	—	—	0.8136
4	0.3314	0.3668	0.2292	0.0726	—	—	—	—	—	—	0.8857
5	0.2518	0.3179	0.2496	0.1384	0.0423	—	—	—	—	—	0.9226
6	0.1950	0.2732	0.2439	0.1659	0.0944	0.0276	—	—	—	—	0.9441
7	0.1571	0.2303	0.2282	0.1831	0.1223	0.0614	0.0176	—	—	—	0.9577
8	0.1293	0.1992	0.2078	0.1819	0.1390	0.0871	0.0440	0.0117	—	—	0.9669
9	0.1092	0.1691	0.1836	0.1713	0.1460	0.1087	0.0686	0.0339	0.0096	—	0.9734
10	0.0942	0.1506	0.1680	0.1838	0.1215	0.1157	0.0835	0.0511	0.0248	0.0068	0.9781

Таблица А.18

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 9$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	3.1896	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6401
3	2.7889	3.65556	—	—	—	—	—	—	—	0.8132
4	2.5681	3.2422	3.9494	—	—	—	—	—	—	0.8854
5	2.4156	2.9987	3.5397	4.1663	—	—	—	—	—	0.9224
6	2.2791	2.7928	3.2466	3.7175	4.2994	—	—	—	—	0.9439
7	2.1972	2.6754	3.0764	3.4674	3.8929	4.4386	—	—	—	0.1576
8	2.1200	2.5657	2.9302	3.2748	3.6274	4.0259	4.5434	—	—	0.9668
9	2.0507	2.4729	2.8164	3.1248	3.4271	3.7451	4.1148	4.6058	—	0.9732
10	2.0025	2.3997	2.7147	2.9993	3.2763	3.5582	3.8621	4.2153	4.6964	0.9780

Таблица А.19

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m=9$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0.6634	0.3366	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6401
3	0.4433	0.4098	0.1469	—	—	—	—	—	—	—	0.8132
4	0.3208	0.3685	0.2349	0.0758	—	—	—	—	—	—	0.8854
5	0.2437	0.3183	0.2529	0.1417	0.0434	—	—	—	—	—	0.9224
6	0.1829	0.2626	0.2459	0.1797	0.0989	0.0300	—	—	—	—	0.9439
7	0.1509	0.2284	0.2251	0.1835	0.1253	0.0669	0.0199	—	—	—	0.9516
8	0.1240	0.1955	0.2041	0.1813	0.1395	0.0929	0.0484	0.0143	—	—	0.9668
9	0.1026	0.1691	0.1873	0.1711	0.1418	0.1067	0.0716	0.0381	0.0117	—	0.9732
10	0.0892	0.1469	0.1651	0.1610	0.1434	0.1158	0.0853	0.0553	0.0293	0.0087	0.9780

Таблица A.20

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании основного параметра распределения Вейбулла, масштабного параметра распределения наименьшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	3.4903	—	—	—	—	—	—	—	—	0.3282
3	0.1418	3.2891	—	—	—	—	—	—	—	0.6518
4	0.1505	2.6936	4.5643	—	—	—	—	—	—	0.7481
5	0.0516	0.2486	2.6173	4.4970	—	—	—	—	—	0.8235
6	0.0535	0.2580	2.3339	3.6005	5.3984	—	—	—	—	0.8639
7	0.0244	0.1154	0.3260	2.2878	3.5602	5.3523	—	—	—	0.8936
8	0.0251	0.1181	0.3342	2.1205	3.1036	4.2984	6.0540	—	—	0.9141
9	0.0136	0.0639	0.1731	0.3843	2.0935	3.0803	4.2767	6.0333	—	0.9288
10	0.0137	0.0649	0.1760	0.3917	1.9766	2.7906	3.7069	4.8673	6.6006	0.9408

Таблица А.21

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании основного параметра распределения Вейбулла, масштабного параметра распределения наименьшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0.9695	0.0305	—	—	—	—	—	—	—	—	0.3282
3	0.1322	0.8305	0.0373	—	—	—	—	—	—	—	0.6518
4	0.1397	0.7927	0.0572	0.0104	—	—	—	—	—	—	0.7481
5	0.0503	0.1698	0.7069	0.0619	0.0111	—	—	—	—	—	0.8235
6	0.0521	0.1753	0.6757	0.0696	0.0228	0.0045	—	—	—	—	0.8639
7	0.0241	0.0949	0.1692	0.6203	0.0731	0.0237	0.0047	—	—	—	0.8936
8	0.0248	0.0866	0.1727	0.5959	0.0751	0.0313	0.0113	0.0023	—	—	0.9141
9	0.0134	0.0465	0.0970	0.1602	0.5576	0.0774	0.0320	0.1115	0.0024	—	0.9288
10	0.0136	0.0492	0.0986	0.1627	0.5374	0.0771	0.0368	0.0169	0.0063	0.0014	0.9408

Таблица А.22

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров распределения Вейбулла, двух параметров распределения наименьшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$	$t_{14}$	$A$
3	0.2731	2.6067	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.4079
4	0.2109	1.3979	3.4137	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.5572
5	0.1044	0.5123	1.9590	3.8606	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6836
6	0.0772	0.3649	1.2269	2.5726	4.4096	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.7571
7	0.0501	0.2318	0.6758	1.7192	2.9922	4.7959	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8109
8	0.0377	0.1740	0.4837	1.1904	2.2041	3.4285	5.2049	—	—	—	—	—	—	—	0.8480
9	0.0275	0.1269	0.3431	0.7829	1.6027	2.5713	3.7667	5.5273	—	—	—	—	—	—	0.8756
10	0.0213	0.0988	0.2638	0.5770	1.1805	1.9932	2.9269	4.1024	5.8478	—	—	—	—	—	0.8963
11	0.0165	0.0771	0.2046	0.4359	0.8560	1.5344	2.3192	3.2319	4.3930	6.1270	—	—	—	—	0.9123
12	0.0123	0.0618	0.1638	0.3434	0.6517	1.1789	1.8570	2.6163	3.5103	4.6589	6.3853	—	—	—	0.9248
13	0.0106	0.0500	0.1326	0.2754	0.5106	0.9030	1.4807	2.1401	2.8810	3.7623	4.9016	6.6208	—	—	0.9349
14	0.0087	0.0412	0.1094	0.2261	0.3126	0.7116	1.1798	1.7608	2.4019	3.1286	3.9997	5.1314	6.8444	—	0.9431
15	0.0072	0.0344	0.0913	0.1881	0.3394	0.5734	0.9387	1.4426	2.0116	2.6381	3.3538	4.2169	5.3425	7.0506	0.9498

Таблица А.23

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров распределения Вейбулла, двух параметров распределения наименьшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	$P_{15}$	$A$
3	0.2390	0.6872	0.0738	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.4079
4	0.1901	0.5628	0.2142	0.0329	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.5572
5	0.0991	0.3018	0.4581	0.1199	0.0211	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6836
6	0.0743	0.2314	0.4011	0.2169	0.0641	0.0122	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.7572
7	0.0489	0.1581	0.2843	0.3295	0.1290	0.0419	0.0083	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8109
8	0.0370	0.1227	0.2238	0.3124	0.1938	0.0779	0.0269	0.0055	—	—	—	—	—	—	—	0.8480
9	0.0271	0.0921	0.1712	0.2525	0.2557	0.1250	0.0533	0.0191	0.0040	—	—	—	—	—	—	0.8756
10	0.0211	0.0729	0.1379	0.2065	0.2545	0.1708	0.0827	0.0371	0.0136	0.0029	—	—	—	—	—	0.8963
11	0.0164	0.0578	0.1108	0.1683	0.2218	0.2101	0.1164	0.0589	0.0271	0.0102	0.0022	—	—	—	—	0.9123
12	0.0131	0.0468	0.0912	0.1395	0.1882	0.2136	0.1515	0.0830	0.0432	0.0204	0.0078	0.0017	—	—	—	0.9248
13	0.0105	0.0383	0.0754	0.1165	0.1592	0.1947	0.1779	0.1099	0.0615	0.0329	0.0158	0.0061	0.0013	—	—	0.9349
14	0.0087	0.0317	0.0632	0.0988	0.1357	0.1710	0.1836	0.1354	0.0814	0.0467	0.0255	0.0124	0.0048	0.0011	—	0.9431
15	0.0072	0.0266	0.0535	0.0842	0.1163	0.1486	0.1725	0.1548	0.1025	0.0623	0.0365	0.0203	0.0099	0.0039	0.0009	0.9498

Таблица A.24

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании математического ожидания нормального распределения, параметра сдвига логарифмически нормальных распределений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6336
3	-0.6120	0.6120	—	—	—	—	—	—	—	0.8098
4	-0.9816	0.0	0.9816	—	—	—	—	—	—	0.8825
5	-1.2444	-0.3823	0.3823	1.2444	—	—	—	—	—	0.9201
6	-1.4468	-0.6589	0.0	0.6589	1.4468	—	—	—	—	0.9420
7	-1.6108	-0.8744	-0.2803	0.2803	0.8744	1.6108	—	—	—	0.9560
8	-1.7479	-1.0499	-0.5005	0.0	0.5005	1.0499	1.7479	—	—	0.9655
9	-1.8655	-1.1976	-0.6812	-0.2218	0.2218	0.6812	1.1976	1.8655	—	0.9721
10	-1.9682	-1.3246	-0.8338	-0.4047	0.0	0.4047	0.8338	1.3246	1.9682	0.9771

Таблица А.25

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании математического ожидания нормального распределения, параметра сдвига логарифмически нормальных распределений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0.5000	0.5000	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6336
3	0.2703	0.4594	0.2703	—	—	—	—	—	—	—	0.8098
4	0.1631	0.3369	0.3369	0.1631	—	—	—	—	—	—	0.8825
5	0.1067	0.2444	0.2978	0.2444	0.1067	—	—	—	—	—	0.9201
6	0.0740	0.1810	0.2450	0.2450	0.1810	0.0740	—	—	—	—	0.9320
7	0.0536	0.1373	0.1987	0.2208	0.1987	0.1373	0.0536	—	—	—	0.9560
8	0.0403	0.1066	0.1615	0.1916	0.1916	0.1615	0.1066	0.0403	—	—	0.9655
9	0.0310	0.0845	0.1323	0.1644	0.1756	0.1644	0.1323	0.0845	0.0310	—	0.9721
10	0.0245	0.0662	0.1095	0.1406	0.1572	0.1572	0.1406	0.1095	0.0662	0.0245	0.9771

Таблица A.26

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании стандартного отклонения нормального распределения, масштабного параметра логарифмически нормальных распределений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	-1.5750	-	-	-	-	-	-	-	-	0.3042
	1.5750	-	-	-	-	-	-	-	-	0.3042
3	-1.4821	1.4821	-	-	-	-	-	-	-	0.6522
4	-2.0249	-1.1865	1.4520	-	-	-	-	-	-	0.7358
	-1.4520	1.1855	2.0249	-	-	-	-	-	-	0.7358
5	-1.9956	-1.1401	1.1401	1.9958	-	-	-	-	-	0.8244
6	-2.3269	-1.6190	-0.9837	1.1190	1.9821	-	-	-	-	0.8588
	-1.9821	-1.1190	0.9837	1.6190	2.3269	-	-	-	-	0.8588
7	-2.3130	-1.6002	-0.9558	0.9558	1.6002	2.3130	-	-	-	0.8943
8	-2.5488	-1.9105	-1.3848	-0.8548	0.9400	1.5897	2.3053	-	-	0.9117
	-2.3053	-1.5897	-0.9400	0.8548	1.3848	1.9105	2.5488	-	-	0.9117
9	-2.5408	-1.9003	-1.3715	-0.8355	0.8355	1.3715	1.9003	2.5408	-	0.9294
10	-2.7223	-2.1286	-1.6602	-1.2260	-0.7634	0.8233	1.3632	1.8939	2.5358	0.9394
	-2.5358	-1.8939	-1.3632	-0.8233	0.7634	1.2260	1.6602	2.1286	2.7223	0.9394

Таблица А.27

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании стандартного отклонения нормального распределения, масштабного параметра логарифмически нормальных распределений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0.0576	0.9424	—	—	—	—	—	—	—	—	0.3042
	0.9424	0.0576	—	—	—	—	—	—	—	—	0.3042
3	0.0692	0.8616	0.0692	—	—	—	—	—	—	—	0.6522
	0.8616	0.0692	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6522
4	0.0214	0.0965	0.8089	0.0732	—	—	—	—	—	—	0.7358
	0.0732	0.8089	0.0965	0.0214	—	—	—	—	—	—	0.7358
5	0.0230	0.1041	0.7458	0.1041	0.0230	—	—	—	—	—	0.8244
	0.1041	0.0230	0.7458	0.1041	0.0230	—	—	—	—	—	0.8244
6	0.0100	0.0427	0.1099	0.7058	0.1079	0.0237	—	—	—	—	0.8588
	0.0237	0.1079	0.7058	0.1099	0.0427	0.0100	—	—	—	—	0.8588
7	0.0104	0.0444	0.1148	0.6608	0.1148	0.0444	0.0104	—	—	—	0.8943
	0.0054	0.0226	0.0550	0.1133	0.6300	0.1177	0.0454	0.0106	—	—	0.9117
	0.0106	0.0454	0.1177	0.6300	0.1133	0.0550	0.0226	0.0054	—	—	0.9117
9	0.0055	0.0232	0.0564	0.1166	0.5966	0.1166	0.0564	0.0232	0.0055	—	0.9294
10	0.0032	0.0134	0.0318	0.0617	0.1125	0.5722	0.1188	0.0573	0.0235	0.0056	0.9394
	0.0056	0.0235	0.0573	0.1188	0.5722	0.1126	0.0617	0.0318	0.0314	0.0032	0.9394

Таблица A.28

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров нормального распределения, двух параметров логарифмически нормальных распределений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

<i>k</i>	<i>t</i> <sub>1</sub>	<i>t</i> <sub>2</sub>	<i>t</i> <sub>3</sub>	<i>t</i> <sub>4</sub>	<i>t</i> <sub>5</sub>	<i>t</i> <sub>6</sub>	<i>t</i> <sub>7</sub>	<i>t</i> <sub>8</sub>	<i>t</i> <sub>9</sub>	<i>t</i> <sub>10</sub>	<i>t</i> <sub>11</sub>	<i>t</i> <sub>12</sub>	<i>t</i> <sub>13</sub>	<i>t</i> <sub>14</sub>	<i>A</i>
3	-1.1106	1.1106	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.4065
4	-1.3834	0.0	1.3834	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.5527
5	-1.6961	-0.6894	0.6894	1.6961	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.6826
6	-1.8817	-0.9970	0.0	0.9970	1.8817	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.7557
7	-2.0600	-1.2647	-0.4918	0.4918	1.2647	2.0600	-	-	-	-	-	-	-	-	0.8103
8	-2.1954	-1.4552	-0.7863	0.0	0.7863	1.4552	2.1954	-	-	-	-	-	-	-	0.8474
9	-2.3188	-1.6218	-1.0223	-0.3828	0.3828	1.0223	1.6218	2.3188	-	-	-	-	-	-	0.8753
10	-2.4225	-1.7578	-1.2046	-0.6497	0.0	0.6497	1.2046	1.7578	2.4225	-	-	-	-	-	0.8960
11	-2.5167	-1.8784	-1.3602	-0.8621	-0.3143	0.3143	0.8621	1.3602	1.8784	2.5167	-	-	-	-	0.9121
12	-2.5993	-1.9028	-1.4914	-1.0331	-0.5334	0.0	0.5334	1.0331	1.4914	1.9028	2.5993	-	-	-	0.9247
13	-2.6746	-2.0762	-1.6068	-1.1784	-0.7465	-0.2669	0.7465	1.1784	1.6068	2.0762	2.6746	-	-	-	0.9348
14	-2.7436	-2.1609	-1.7092	-1.3042	-0.9065	-0.4818	0.0	0.4818	0.9065	1.3042	1.7092	2.1609	2.7436	-	0.9430
15	-2.8069	-2.2378	-1.8011	-1.4150	-1.0435	-0.6590	-0.2325	0.2325	0.6590	1.0435	1.4150	1.8011	2.2378	2.8069	0.9498

Таблица А.29

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров нормального распределения, двух параметров логарифмически нормальных распределений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	$P_{15}$	$A$
3	0.1334	0.7332	0.1334	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.4065
4	0.0833	0.4167	0.4167	0.0833	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.5527
5	0.0449	0.2004	0.5094	0.2004	0.0449	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6826
6	0.0299	0.1295	0.3406	0.1295	0.0299	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.7557
7	0.0197	0.0833	0.2084	0.3772	0.2084	0.0833	0.0197	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8103
8	0.0141	0.0587	0.1431	0.2841	0.1431	0.0587	0.0141	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8474
9	0.0102	0.0422	0.1009	0.1976	0.2982	0.1976	0.1009	0.0422	0.0102	—	—	—	—	—	—	0.8753
10	0.0077	0.0317	0.0748	0.1438	0.2420	0.1438	0.0748	0.0317	0.0077	—	—	—	—	—	—	0.8960
11	0.0059	0.0243	0.0567	0.1074	0.1823	0.2468	0.1823	0.1074	0.0567	0.0243	0.0059	—	—	—	—	0.9121
12	0.0047	0.0190	0.0442	0.0829	0.1392	0.2100	0.1392	0.0829	0.0442	0.0190	0.0047	—	—	—	—	0.9247
13	0.0037	0.0152	0.0352	0.0652	0.1085	0.1670	0.2104	0.1670	0.1085	0.0652	0.0352	0.0152	0.0037	—	—	0.9348
14	0.0030	0.0124	0.0283	0.0524	0.0862	0.1327	0.1850	0.1850	0.1327	0.0862	0.0524	0.0283	0.0124	0.0030	—	0.9430
15	0.0025	0.0101	0.0232	0.0427	0.0698	0.1066	0.1532	0.1838	0.1532	0.1066	0.0698	0.0427	0.0232	0.0101	0.0025	0.9498

Таблица А.30

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра сдвига распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$A$
2	-0.4660	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.6476
3	-0.9598	-0.0174	-	-	-	-	-	-	-	-	0.8203
4	-1.2135	-0.5719	0.2822	-	-	-	-	-	-	-	0.8910
5	-1.3777	-0.8637	-0.3034	0.5102	-	-	-	-	-	-	0.9269
6	-1.4963	-1.0548	-0.6172	-0.0950	0.6945	-	-	-	-	-	0.9476
7	-1.5877	-1.1936	-0.8247	-0.4235	0.0759	0.8496	-	-	-	-	0.9606
8	-1.6614	-1.3010	-0.9766	-0.6425	-0.2630	0.2213	0.9838	-	-	-	0.9693
9	-1.7226	-1.3876	-1.0945	-0.8036	-0.4905	-0.1256	0.3477	1.0999	-	-	0.9754
10	-1.7746	-1.4596	-1.1899	-0.9292	-0.6587	-0.3597	-0.0053	0.4598	1.2073	-	0.9798
11	-1.8112	-1.5147	-1.2649	-1.0280	-0.7880	-0.5315	-0.2426	0.1038	0.5630	1.3034	0.9832

Таблица А.31

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра сдвига распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$A$
2	0.2032	0.7968	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6476
3	0.0735	0.2880	0.6385	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8203
4	0.0345	0.1355	0.3004	0.5296	—	—	—	—	—	—	—	0.8911
5	0.0189	0.0744	0.1648	0.2905	0.4514	—	—	—	—	—	—	0.9269
6	0.0116	0.0451	0.1000	0.1763	0.2740	0.3930	—	—	—	—	—	0.9476
7	0.0075	0.0294	0.0652	0.1150	0.1787	0.2563	0.3479	—	—	—	—	0.9606
8	0.0052	0.0202	0.0449	0.0791	0.1229	0.1763	0.2394	0.3120	—	—	—	0.9693
9	0.0037	0.0145	0.0322	0.0567	0.0882	0.1265	0.1717	0.2238	0.2827	—	—	0.9754
10	0.0028	0.0107	0.0239	0.0421	0.0654	0.0938	0.1273	0.1659	0.2097	0.2584	—	0.9798
11	0.0024	0.0083	0.0183	0.0322	0.0498	0.0715	0.0971	0.1264	0.1598	0.1964	0.2378	0.9832

Таблица А.32

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$A$
2	-1.2500	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.3282
3	-1.1906	1.9535	-	-	-	-	-	-	-	-	0.6518
4	-1.5183	-0.9909	1.8940	-	-	-	-	-	-	-	0.7481
5	-1.5034	-0.9622	1.3919	2.9638	-	-	-	-	-	-	0.8235
6	-1.6852	-1.2811	-0.8475	1.3546	2.9291	-	-	-	-	-	0.8639
7	-1.6788	-1.2709	-0.8295	1.1218	2.1591	3.7091	-	-	-	-	0.8936
8	-1.8007	-1.4582	-1.1326	-0.7516	1.0959	2.1361	3.6862	-	-	-	0.9141
9	-1.7973	-1.4532	-1.1250	-0.7389	0.9564	1.7540	2.7510	4.3053	-	-	0.9288
10	-1.8872	-1.5826	-1.3102	-1.0262	-0.6814	0.9372	1.7374	2.7350	4.2891	-	0.9408
11	-1.8851	-1.5796	-1.3061	-1.0204	-0.6717	0.8425	1.5010	2.2522	3.2414	4.8031	0.9490

Таблица А.33

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$A$
2	0.0305	0.9695	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.3282
3	0.0373	0.8305	0.1322	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6518
4	0.0104	0.0572	0.7927	0.1397	—	—	—	—	—	—	—	0.7481
5	0.0111	0.0619	0.7069	0.1698	0.0503	—	—	—	—	—	—	0.8235
6	0.0045	0.0228	0.0696	0.6756	0.1754	0.0521	—	—	—	—	—	0.8639
7	0.0047	0.0236	0.0727	0.6210	0.1690	0.0848	0.0242	—	—	—	—	0.8936
8	0.0023	0.0112	0.0313	0.0751	0.5959	0.1727	0.0867	0.0248	—	—	—	0.9141
9	0.0024	0.0115	0.0321	0.0773	0.5577	0.1601	0.0971	0.0484	0.0134	—	—	0.9288
10	0.0014	0.0063	0.0169	0.0369	0.0771	0.5374	0.1628	0.0985	0.0492	0.0136	—	0.9408
11	0.0014	0.0064	0.0171	0.0374	0.0788	0.5089	0.1501	0.1000	0.0615	0.0302	0.0082	0.9490

Таблица А.34

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$	$t_{14}$	$A$
3	-0.9581	1.2978	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.4079
4	-1.2278	-0.335	1.5562	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.5572
5	-1.3508	-0.6725	0.6688	2.2591	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6836
6	-1.4838	-0.9449	-0.2045	1.0080	2.5608	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.7571
7	-1.5676	-1.096	-0.5419	0.3919	1.4614	2.9934	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8109
8	-1.6496	-1.2321	-0.7903	-0.1743	0.7262	1.7490	3.2777	—	—	—	—	—	—	—	0.8480
9	-1.7097	-1.3265	-0.9444	-0.4717	0.2448	1.0698	2.0644	3.5952	—	—	—	—	—	—	0.8756
10	-1.7660	-1.4115	-1.0740	-0.6897	-0.1659	0.5499	1.3326	2.3149	3.8496	—	—	—	—	—	0.8963
11	-1.8119	-1.4787	-1.1715	-0.8397	-0.4262	0.1576	0.5877	1.5877	2.5639	4.1040	—	—	—	—	0.9123
12	-1.8540	-1.5388	-1.2557	-0.9617	-0.619	-0.1648	0.4282	1.0689	1.8092	2.7833	4.3280	—	—	—	0.9248
13	-1.8902	-1.5896	-1.3250	-1.0581	-0.7608	-0.3925	0.1020	0.6723	1.2894	2.0205	2.9948	4.5454	—	—	0.9349
14	-1.9234	-1.6354	-1.3862	-1.1406	-0.8763	-0.5658	-0.1654	0.3401	0.8852	1.4868	2.2126	3.1883	4.7419	—	0.9431
15	-1.9531	-1.6757	-1.4391	-1.2101	-0.9701	-0.6990	-0.3665	0.0632	0.5564	1.0811	1.6723	2.3949	3.3713	4.9279	0.9498

Таблица А.35

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	$P_{15}$	$A$
3	0.0738	0.6872	0.2390	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.4079
4	0.0329	0.2142	0.5628	0.1901	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.5572
5	0.0211	0.1199	0.4581	0.3018	0.0991	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6836
6	0.0122	0.0641	0.2169	0.4011	0.2314	0.0743	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.7571
7	0.0083	0.0419	0.1290	0.3295	0.2843	0.1581	0.0489	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8109
8	0.0055	0.0269	0.0779	0.1938	0.3124	0.22238	0.1227	0.0370	—	—	—	—	—	—	—	0.8480
9	0.0040	0.0191	0.0533	0.1250	0.2557	0.2525	0.1712	0.0921	0.0271	—	—	—	—	—	—	0.8756
10	0.0029	0.0136	0.0371	0.0827	0.1708	0.2545	0.2065	0.1379	0.0729	0.0211	—	—	—	—	—	0.8963
11	0.0022	0.0102	0.0271	0.0589	0.1164	0.2101	0.2218	0.1683	0.1108	0.0578	0.0164	—	—	—	—	0.9123
12	0.0017	0.0078	0.0204	0.0432	0.0830	0.1515	0.2136	0.1882	0.1395	0.0912	0.0463	0.0131	—	—	—	0.9248
13	0.0013	0.0061	0.0158	0.0329	0.0615	0.1099	0.1779	0.1947	0.1592	0.1165	0.0754	0.0383	0.0105	—	—	0.9349
14	0.0011	0.0048	0.0124	0.0255	0.0467	0.0814	0.1354	0.1836	0.1710	0.1357	0.0988	0.0632	0.0317	0.0087	—	0.9431
15	0.0009	0.0039	0.0099	0.0203	0.0365	0.0623	0.1025	0.1548	0.1725	0.1486	0.1163	0.0842	0.0535	0.0266	0.0072	0.9498

Таблица A.36

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра распределения Коши) и соответствующие значения величины А**

<i>k</i>	<i>t</i> <sub>1</sub>	<i>t</i> <sub>2</sub>	<i>t</i> <sub>3</sub>	<i>t</i> <sub>4</sub>	<i>t</i> <sub>5</sub>	<i>t</i> <sub>6</sub>	<i>t</i> <sub>7</sub>	<i>t</i> <sub>8</sub>	<i>t</i> <sub>9</sub>	<i>A</i>
2	-1.3274	-	-	-	-	-	-	-	-	0.2867
	1.3274	-	-	-	-	-	-	-	-	0.2867
3	-1.0000	1.0000	-	-	-	-	-	-	-	0.8106
4	-0.9597	0.7149	1.5797	-	-	-	-	-	-	0.8630
	-1.5797	-0.7149	0.9597	-	-	-	-	-	-	0.8630
5	-1.5171	-0.6591	0.6591	1.5171	-	-	-	-	-	0.9226
6	-1.4959	-0.6398	0.5438	1.0028	1.9562	-	-	-	-	0.9339
	-1.9562	-1.0228	-0.5438	0.6398	1.4959	-	-	-	-	0.9339
7	-1.9269	-1.0000	-0.5190	0.5190	1.0000	1.9269	-	-	-	0.9582
8	-1.9130	-0.9891	-0.5070	0.4529	0.8015	1.2806	2.2993	-	-	0.9715
	-2.2903	-1.2806	-0.8015	-0.4529	0.5070	0.9801	1.9130	-	-	0.9715
9	-2.2814	-1.2674	-0.7891	-0.4384	0.4384	0.7891	1.2674	2.2814	-	0.9739
10	-2.2712	-1.2600	-0.7819	-0.4300	0.3944	0.6759	1.0078	1.5060	2.6124	0.9780
	-2.6124	-1.5060	-1.0078	-0.6579	-0.3944	0.4300	0.7819	1.2600	2.2712	0.9780
11	-2.6002	-1.4972	-1.0000	-0.6679	-0.3846	0.6679	1.0000	1.4972	2.6002	0.9821

Таблица А.37

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра распределения Коши) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$A$
2	0.2055	0.7945	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.2867
3	0.7945	0.2055	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.2867
	0.2500	0.5000	0.2500	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8106
4	0.2565	0.4411	0.1228	0.1796	—	—	—	—	—	—	—	0.8630
	0.1796	0.1228	0.4411	0.2565	—	—	—	—	—	—	—	0.8630
5	0.1855	0.1290	0.3710	0.1290	0.1855	—	—	—	—	—	—	0.9226
6	0.1876	0.1312	0.3397	0.0951	0.0960	0.1504	—	—	—	—	—	0.9339
	0.1504	0.0960	0.0951	0.3397	0.1312	0.1876	—	—	—	—	—	0.9339
7	0.1524	0.0976	0.0976	0.3048	0.0976	0.0976	0.1524	—	—	—	—	0.9583
8	0.1533	0.0984	0.0989	0.2848	0.0797	0.0739	0.0804	0.1306	—	—	—	0.9715
	0.1306	0.0804	0.0739	0.7978	0.2848	0.0989	0.0984	0.1533	—	—	—	0.9715
9	0.1315	0.0811	0.0748	0.0811	0.2630	0.0811	0.0748	0.0811	0.1315	—	—	0.9739
10	0.1320	0.0815	0.0753	0.0819	0.2489	0.0696	0.0620	0.0622	0.0702	0.1164	—	0.9780
	0.1164	0.0702	0.0622	0.0620	0.0696	0.2489	0.0819	0.0753	0.0815	0.1320	—	0.9780
11	0.1169	0.0705	0.0626	0.0626	0.0705	0.2338	0.0705	0.0626	0.0705	0.1169	0.9821	

Таблица A.38

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра сдвига распределения Копли) и соответствующие значения отношения асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$A$
2	0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8106
3	-0.1794	0.1794	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8577
4	-3.2845	-0.2390	0.1570	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8991
	-0.1570	0.2390	3.2845	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8991
5	-3.3338	-0.2137	0.2137	3.3338	—	—	—	—	—	—	—	0.9393
6	-3.1577	-0.3168	0.0	0.3168	0.1577	—	—	—	—	—	—	0.9582
7	-3.0827	-0.3786	-0.1150	0.1150	0.3786	3.0827	—	—	—	—	—	0.9658
8	-5.0956	-2.2911	-0.4018	-0.1275	0.1072	0.3744	3.0863	—	—	—	—	0.9718
	-3.0863	0.3744	-0.1072	0.1275	0.4018	2.2911	5.0965	—	—	—	—	0.9718
9	-5.1041	-2.2961	-0.3972	-0.1196	0.1196	0.3972	2.2961	5.1041	—	—	—	0.9779
10	-5.0213	-2.2496	-0.4445	-0.1991	0.0	0.1991	0.4445	0.4445	2.2496	5.0213	—	0.9821
11	-4.9723	-2.2216	-0.4792	-0.2572	-0.0820	0.0820	0.2572	0.4792	2.2216	4.9723	—	0.9845
12	-4.9357	-2.2027	-0.5059	-0.3020	-0.1433	0.0	0.1433	0.3020	0.5059	2.2027	4.9357	0.9860

Таблица А.39

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра сдвига распределения Коши) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$A$
2	0.5	0.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8106
3	0.4435	0.1130	0.4435	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8577
4	0.0941	0.3312	0.1243	0.4504	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8991
	0.4504	0.1243	0.3312	0.0941	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8991
5	0.0928	0.3402	0.1340	0.3402	0.0928	—	—	—	—	—	—	—	0.9393
6	0.0976	0.3047	0.0977	0.3047	0.0976	—	—	—	—	—	—	—	0.9582
7	0.0998	0.2850	0.0788	0.0728	0.0788	0.2850	0.0998	—	—	—	—	—	0.9658
	0.0617	0.0693	0.2474	0.0812	0.0744	0.0800	0.2863	0.0997	—	—	—	—	0.9718
8	0.0997	0.2863	0.0800	0.0744	0.0812	0.2474	0.0693	0.0617	—	—	—	—	0.9718
9	0.0616	0.0691	0.2490	0.0824	0.0758	0.0824	0.2490	0.0691	0.0616	—	—	—	0.9779
10	0.0626	0.0705	0.2338	0.0705	0.0626	0.0626	0.0705	0.2338	0.0705	0.0626	—	—	0.9821
11	0.0632	0.0714	0.2232	0.0621	0.0541	0.0520	0.0541	0.0621	0.2232	0.0714	0.0632	—	0.9845
12	0.0636	0.0721	0.2152	0.0557	0.0481	0.0453	0.0481	0.0557	0.2152	0.0721	0.0636	0.9860	

Таблица А.40

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров распределения Коши) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$	$t_{14}$	$A$
3	-0.5773	0.5773	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.4677
4	-1.0000	0.0	1.0000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.6570
5	-1.3764	-0.3249	0.3249	1.3764	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.7659
6	-1.7320	-0.5773	0.0	0.5773	1.7320	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.8315
7	-2.0765	-0.7975	-0.2282	0.2282	0.7975	2.0765	-	-	-	-	-	-	-	-	0.8735
8	-2.4142	-1.0000	-0.4142	0.0	0.4142	1.0000	2.4142	-	-	-	-	-	-	-	0.9018
9	-2.7475	-1.1917	-0.5773	-0.1763	0.1763	0.5773	1.1917	2.7475	-	-	-	-	-	-	0.9217
10	-3.0778	-1.3764	-0.7266	-0.3249	0.0	0.3249	0.7266	1.3764	3.0778	-	-	-	-	-	0.9361
11	-3.4062	-1.5561	-0.8665	-0.4567	-0.1438	0.1438	0.4567	0.8665	1.5561	3.4062	-	-	-	-	0.9469
12	-3.7319	-1.7320	-1.0000	-0.5773	-0.2679	0.0	0.2679	0.5773	1.0000	1.7320	3.7319	-	-	-	0.9552
13	-4.0573	-1.9053	-1.1288	-0.6903	-0.3793	-0.1214	0.1214	0.3793	0.6903	1.1288	1.9053	4.0573	-	-	0.9617
14	-4.3809	-2.0763	-1.2538	-0.7974	-0.4815	-0.2282	0.0	0.2282	0.4815	0.7974	1.2538	2.0763	4.3809	-	0.9669
15	-4.7041	-2.2457	-1.3762	-0.9030	-0.5773	-0.3249	-0.1051	0.1051	0.3249	0.5773	0.9003	1.3762	2.2457	4.7041	0.9711

Таблица А.41

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании параметра сдвига логистического распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$A$
2	0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.7500
3	-0.6931	0.6931	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8889
4	-1.0986	0.0	1.0986	—	—	—	—	—	—	—	0.9375
5	-1.3863	-0.4055	0.4055	1.3863	—	—	—	—	—	—	0.9600
6	-1.6094	-0.6931	0.0	0.6931	1.6094	—	—	—	—	—	0.9722
7	-1.7918	-0.9163	-0.2877	0.2877	0.9163	1.7918	—	—	—	—	0.9796
8	-1.9459	-1.0986	-0.5108	0.0	0.5108	1.0986	1.9459	—	—	—	0.9844
9	-2.0794	-1.2528	-0.6931	-0.2231	0.2231	0.6931	1.2528	2.0794	—	—	0.9876
10	-2.1972	-1.3863	-0.8473	-0.4055	0.0	0.4055	0.8473	1.3863	2.1972	—	0.9900
11	-2.3026	-1.5041	-0.9808	-0.5596	-0.1823	0.1823	0.5596	0.9808	1.5041	2.3026	0.9921

Таблица А.42

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра логистического распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$A$
2	-2.3993	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.3074
	2.3993	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.3074
3	-2.1651	2.1651	-	-	-	-	-	-	-	-	0.6804
4	-3.2424	-1.6762	2.1049	-	-	-	-	-	-	-	0.7618
	-2.1049	1.6267	3.2424	-	-	-	-	-	-	-	0.7618
5	-3.1685	-1.5929	1.5929	3.1385	-	-	-	-	-	-	0.8449
6	-3.9427	-2.4141	-1.3564	1.5566	3.1368	-	-	-	-	-	0.8757
	3.1638	-1.5566	1.3564	2.4141	3.9427	-	-	-	-	-	0.8757
7	-3.9053	-2.3760	-1.3107	1.3107	2.3760	3.9053	-	-	-	-	0.9078
8	-4.5191	-2.9874	-1.9953	-1.1639	1.2856	2.3552	3.8845	-	-	-	0.9233
	-3.8845	-2.3552	-1.2866	1.1639	1.9953	2.9874	4.5191	-	-	-	0.9233
9	-4.4961	-2.9648	-1.9713	-1.1341	1.1341	1.9713	2.9648	4.4961	-	-	0.9391
10	-4.4819	-2.9508	-1.9565	-1.1156	1.0318	1.7314	2.4887	3.4650	5.0067	-	0.9478
	-5.0067	-3.4650	-2.4887	-1.7314	-1.0318	1.1156	1.9565	2.9508	4.4819	-	0.9478
11	-4.9907	-3.4496	-2.4733	-1.7145	-1.0104	1.0104	1.7145	2.4733	3.4496	4.9907	0.9568

Таблица А.43

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра логистического распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$A$
2	0.0832	0.9168	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.3074
	0.9168	0.0832	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.3074
3	0.1029	0.7942	0.1029	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6844
	0.7942	0.1029	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	0.0376	0.1200	0.7338	0.1086	—	—	—	—	—	—	—	0.7618
	0.1086	0.7338	0.1200	0.0376	—	—	—	—	—	—	—	0.7618
5	0.0404	0.1286	0.6620	0.1286	0.0404	—	—	—	—	—	—	0.8449
	0.0190	0.0631	0.1227	0.6211	0.1325	0.0416	—	—	—	—	—	0.8757
6	0.0416	0.1325	0.6211	0.1227	0.0631	0.0190	—	—	—	—	—	0.8757
	0.0197	0.0653	0.1274	0.5752	0.1274	0.0653	0.0197	—	—	—	—	0.9078
8	0.0108	0.0372	0.0717	0.1183	0.5454	0.1299	0.0666	0.0201	—	—	—	0.9233
	0.0201	0.0666	0.1299	0.5454	0.1183	0.0717	0.0372	0.0108	—	—	—	0.9233
9	0.0110	0.0380	0.0732	0.1212	0.5132	0.1212	0.0732	0.0380	0.0110	—	—	0.9391
	0.0066	0.0237	0.0464	0.0737	0.1123	0.4905	0.1230	0.0741	0.0385	0.0112	—	0.9478
10	0.0112	0.0385	0.0741	0.1239	0.4905	0.1123	0.0737	0.0464	0.0237	0.0066	—	0.9478
	0.0068	0.0240	0.0470	0.0748	0.1143	0.4662	0.1143	0.0748	0.0470	0.0240	0.0068	0.9568

Таблица А.44

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров логистического распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$	$t_{14}$	$A$
3	-1.1674	1.1674	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.4426
4	-1.9797	0.0	1.9797	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6026
5	-2.5090	-0.8470	0.8470	2.5090	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6861
6	-2.9083	-1.3335	0.0	1.3335	2.9083	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.7890
7	-3.2797	-1.7426	-0.5955	0.5955	1.7426	3.2797	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8369
8	-3.6023	-2.0786	-1.0165	0.0	1.0165	2.0786	3.6023	—	—	—	—	—	—	—	0.8701
9	-3.8981	-2.3777	-1.3604	-0.4631	0.4631	1.3604	2.3777	3.8981	—	—	—	—	—	—	0.8942
10	-4.1655	-2.6442	-1.6512	-0.8235	0.0	0.8235	1.6512	2.6442	4.1665	—	—	—	—	—	0.9123
11	-4.4148	-2.8883	-1.9085	-1.1227	-0.3805	0.3805	1.1227	1.9085	2.8883	4.4148	—	—	—	—	0.9261
12	-4.6437	-3.1123	-2.1394	-1.3798	-0.6929	0.0	0.6929	1.3798	2.1394	3.1123	4.6437	—	—	—	0.9371
13	-4.8577	-3.3212	-2.3511	-1.6081	-0.9580	-0.3225	0.3225	0.9580	1.6081	2.3511	3.3212	4.8577	—	—	0.9457
14	-5.0564	-3.5150	-2.5460	-1.8138	-1.1888	-0.5984	0.0	0.5984	1.1888	1.8138	2.5460	3.5150	5.0564	—	0.9526
15	-5.2452	-3.6987	-2.7289	-2.0032	-1.3953	-0.8364	-0.2818	0.2818	0.8364	1.3953	2.0032	2.4289	3.6987	5.2452	0.9585

Таблица А.45

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров логистического распределения) и соответствующие значения отношения асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	$P_{15}$	$A$
3	0.2373	0.5254	0.2373	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.4426
4	0.1214	0.3786	0.3786	0.1214	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6026
5	0.0752	0.2249	0.3998	0.2249	0.0752	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6861
6	0.0517	0.1568	0.2915	0.2915	0.1568	0.0517	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.7890
7	0.0363	0.1127	0.2064	0.2892	0.2064	0.1127	0.0363	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8369
8	0.0265	0.0847	0.1545	0.2343	0.2343	0.1545	0.0847	0.0265	—	—	—	—	—	—	—	0.8701
9	0.0199	0.0650	0.1193	0.1821	0.2274	0.1821	0.1193	0.0650	0.0199	—	—	—	—	—	—	0.8942
10	0.0153	0.0510	0.0946	0.1441	0.1950	0.1441	0.0946	0.0510	0.0153	—	—	—	—	—	—	0.9123
11	0.0119	0.0408	0.0764	0.1164	0.1605	0.1880	0.1605	0.1164	0.0764	0.0408	0.0119	—	—	—	—	0.9261
12	0.0095	0.0331	0.0627	0.0957	0.1324	0.1666	0.1666	0.1324	0.0957	0.0627	0.0331	0.0095	—	—	—	0.9371
13	0.0077	0.0271	0.0521	0.0799	0.1104	0.1425	0.1606	0.1425	0.1104	0.0799	0.0521	0.0271	0.0077	—	—	0.9457
14	0.0063	0.0226	0.0438	0.0675	0.0933	0.1212	0.1453	0.1453	0.1212	0.0933	0.0675	0.0438	0.0226	0.0063	—	0.9526
15	0.0053	0.0189	0.0371	0.0576	0.0797	0.1037	0.1277	0.1400	0.1277	0.1037	0.0797	0.0576	0.0371	0.0189	0.0053	0.9585

Таблица А.46

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра распределения Лапласа) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$A$
2	1.8416	—	—	—	—	—	—	—	—	0.2920
	-1.8416	—	—	—	—	—	—	—	—	0.2920
3	-1.5936	1.5936	—	—	—	—	—	—	—	0.6476
4	-2.7044	-1.1121	1.5183	—	—	—	—	—	—	0.7303
	-1.5183	1.1121	2.7044	—	—	—	—	—	—	0.7303
5	-2.6112	-1.0176	1.0176	2.6112	—	—	—	—	—	0.8203
6	-2.5670	-0.9745	0.8045	1.8233	3.4173	—	—	—	—	0.8548
	-3.4173	-1.8233	-0.8045	0.9745	2.5670	—	—	—	—	0.8548
7	-3.3652	-1.7716	-0.7544	0.7544	1.7716	3.3652	—	—	—	0.8910
8	-3.3329	-1.7388	-0.7266	0.6311	1.3816	2.3972	3.9879	—	—	0.9087
	-3.9879	-2.3972	-1.3816	-0.6311	0.7266	1.7388	3.3329	—	—	0.9087
9	-3.9657	-2.3720	-1.3545	-0.6004	0.6004	1.3545	2.3720	3.9657	—	0.9269
10	-3.9468	-2.3487	-1.3335	-0.5817	0.5217	1.1246	1.8811	2.9054	4.5228	0.9371
	-4.5228	-2.9054	-1.8811	-1.1246	-0.5217	0.5817	1.3335	2.3487	3.9468	0.9371

Таблица А.47

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра распределения Лапласа) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$\pm t_1$	$\pm t_2$	$\pm t_3$	$\pm t_4$	$\pm t_5$	$\pm t_6$	$\pm t_7$	$\pm t_8$	$\pm t_9$	$A$
11	$\pm 0.4993$	$\pm 1.0997$	$\pm 1.8538$	$\pm 2.8714$	$\pm 4.4650$	—	—	—	—	0.9476
13	$\pm 0.4276$	$\pm 0.9269$	$\pm 1.5273$	$\pm 2.2813$	$\pm 3.2989$	$\pm 4.8925$	—	—	—	0.9606
15	$\pm 0.3739$	$\pm 0.8015$	$\pm 1.3008$	$\pm 1.9012$	$\pm 2.6553$	$\pm 3.6729$	$\pm 5.2665$	—	—	0.9693
17	$\pm 0.3323$	$\pm 0.7063$	$\pm 1.1338$	$\pm 1.6331$	$\pm 2.2336$	$\pm 2.9876$	$\pm 4.0052$	$\pm 5.5988$	—	0.9754
19	$\pm 0.2990$	$\pm 0.6314$	$\pm 1.0053$	$\pm 1.4329$	$\pm 1.9322$	$\pm 2.5326$	$\pm 3.2866$	$\pm 4.3042$	$\pm 5.8979$	0.9798

**Примечание.** Граничные точки интервалов симметричны относительно нуля.

Таблица А.48

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра распределения Лапласа) и соответствующие значения отношения асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$A$
2	0.9207	0.0793	—	—	—	—	—	—	—	—	0.2920
	0.0793	0.9207	—	—	—	—	—	—	—	—	0.2920
3	0.1016	0.7968	0.1016	—	—	—	—	—	—	—	0.6476
4	0.0335	0.1310	0.7260	0.1095	—	—	—	—	—	—	0.7303
	0.1095	0.7260	0.1310	0.0335	—	—	—	—	—	—	0.7303
5	0.0367	0.1440	0.6386	0.1440	0.0367	—	—	—	—	—	0.8203
6	0.0384	0.1503	0.5877	0.1429	0.0643	0.0164	—	—	—	—	0.8548
	0.0164	0.0643	0.1429	0.5877	0.1503	0.0384	—	—	—	—	0.8548
7	0.0173	0.0677	0.1502	0.5296	0.1502	0.0677	0.0173	—	—	—	0.8910
8	0.0179	0.0700	0.1539	0.4922	0.1404	0.0801	0.0362	0.0093	—	—	0.9087
	0.0093	0.0362	0.0801	0.1404	0.4922	0.1593	0.0700	0.0178	—	—	0.9087
9	0.0094	0.0372	0.0824	0.1453	0.4514	0.1453	0.0824	0.0372	0.0094	—	0.9269
10	0.0097	0.0381	0.0840	0.1477	0.4238	0.1344	0.0862	0.0488	0.0219	0.0054	0.9371
	0.0054	0.0219	0.0488	0.0862	0.1344	0.4328	0.1477	0.0840	0.0381	0.0096	0.9371

Таблица А.49

**Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра распределения Лапласа) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$A$
11	0.3930	0.1370	0.0882	0.0500	0.0225	0.0058	—	—	—	—	0.9476
13	0.3478	0.1282	0.0894	0.0575	0.0326	0.0147	0.0037	—	—	—	0.9606
15	0.3120	0.1197	0.0882	0.0614	0.0396	0.0224	0.0101	0.0026	—	—	0.9693
17	0.2826	0.1119	0.0859	0.0633	0.0441	0.0283	0.0161	0.0073	0.0018	—	0.9754
19	0.2584	0.1049	0.0829	0.0637	0.0469	0.0327	0.0210	0.0119	0.0054	0.0014	0.9798

**Примечание.** В таблице приведены значения вероятностей попадания наблюдений в центральный интервал  $P_0$  и в интервалы правее центра:  $P_1, P_2, \dots$ . Значения вероятностей попадания в интервалы левее центра получаются зеркальным отражением.

Таблица A.50

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра двойного показательного распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_i$	$\theta_2$								
		0.5	1	2	3	4	5	6	7	8
2	$t_1$	3.4910	0.1058	0.0952	0.0864	0.0792	0.0730	0.0679	0.0634	0.0594
	$A$	0.5239	0.3283	0.5580	0.6494	0.6742	0.6798	0.6795	0.6774	0.6750
3	$t_1$	5.7236	3.2901	0.1714	0.1578	0.1458	0.1353	0.1260	0.1178	0.1106
	$t_2$	0.1704	0.1417	0.0371	0.0351	0.0330	0.0312	0.0295	0.0279	0.0265
4	$t_1$	0.6465	0.6518	0.6790	0.7947	0.8286	0.8384	0.8404	0.8397	0.8382
	$t_2$	8.2073	4.5218	1.9539	0.1979	0.1851	0.1737	0.1630	0.1535	0.1447
5	$t_1$	0.1986	0.1504	0.0404	0.0166	0.0161	0.0155	0.0149	0.0143	0.0138
	$t_2$	9.9575	4.5027	1.9227	1.4712	0.2135	0.2012	0.1906	0.1799	0.1709
6	$t_1$	6.4293	2.6201	0.2361	0.2097	0.1002	0.0950	0.0898	0.0851	0.0810
	$t_2$	9.8965	5.3402	2.5662	1.4602	0.2346	0.2231	0.2118	0.2007	0.1916



Окончание табл. А.50

$k$	$t_i$	$\theta_2$								
		0.5	1	2	3	4	5	6	7	8
9	$t_1$	12.2869	6.0573	2.9859	1.8703	1.2022	1.0648	0.2549	0.2449	0.2349
	$t_2$	8.8417	4.2945	2.0795	1.2237	0.2765	0.2619	0.1654	0.1574	0.1508
	$t_3$	6.5618	3.0962	1.4280	0.2939	0.1697	0.1608	0.1087	0.1037	0.0991
	$t_4$	4.7832	2.1001	0.3166	0.1693	0.1038	0.0987	0.0692	0.0661	0.0634
	$t_5$	3.2276	0.3840	0.1652	0.0946	0.0593	0.0569	0.0408	0.0391	0.0377
	$t_6$	0.4694	0.1733	0.0795	0.0467	0.0296	0.0287	0.0208	0.0202	0.0197
	$t_7$	0.1633	0.0642	0.0302	0.0181	0.0114	0.0113	0.0082	0.0080	0.0079
	$t_8$	0.0340	0.0136	0.0064	0.0039	0.0025	0.0024	0.0018	0.0018	0.0017
	$A$	0.9387	0.9288	0.9425	0.9577	0.9664	0.9713	0.9748	0.9770	0.9777
10	$t_1$	13.2458	6.6629	2.9794	1.8704	1.1963	1.0539	0.2636	0.2536	0.2457
	$t_2$	9.8558	4.9268	2.0697	1.2180	0.2912	0.2787	0.1769	0.1688	0.1637
	$t_3$	7.6321	3.7589	1.4116	0.3107	0.1888	0.1807	0.1220	0.1160	0.1127
	$t_4$	5.8941	2.8248	0.3426	0.1908	0.1234	0.1185	0.0826	0.0785	0.0766
	$t_5$	4.4362	1.9905	0.1972	0.1164	0.0776	0.0748	0.0530	0.0507	0.0494
	$t_6$	3.0918	0.3890	0.1090	0.0660	0.0452	0.0438	0.0311	0.0298	0.0279
	$t_7$	0.4764	0.1748	0.0533	0.0326	0.0228	0.0222	0.0158	0.0152	0.0151
	$t_8$	0.1658	0.0642	0.0202	0.0124	0.0088	0.0087	0.0061	0.0060	0.0059
	$t_9$	0.0346	0.0135	0.0043	0.0026	0.0019	0.0019	0.0013	0.0013	0.0013
	$A$	0.9493	0.9407	0.9513	0.9642	0.9712	0.9762	0.9784	0.9807	0.9815

Таблица А.51

**Оптимальные частоты при проверке сложных гипотез по критериям типа A (при оценивании масштабного параметра двойного показательного распределения)**

$k$	$P_i$	$\theta_2$								
		0.5	1	2	3	4	5	6	7	8
2	$P_1$	0.0517	0.0305	0.8094	0.7514	0.7078	0.6729	0.6452	0.6216	0.6024
	$P_2$	0.9483	0.9695	0.1906	0.2486	0.2922	0.3271	0.3548	0.3784	0.3976
3	$P_1$	0.0572	0.0373	0.7098	0.6229	0.5582	0.5084	0.4695	0.4383	0.4129
	$P_2$	0.8584	0.8306	0.2187	0.2772	0.3181	0.3472	0.3682	0.3841	0.3956
4	$P_3$	0.0844	0.1321	0.0715	0.0998	0.1237	0.1444	0.1623	0.1776	0.1913
	$P_1$	0.0165	0.0103	0.0201	0.5522	0.4768	0.4195	0.3760	0.3414	0.3143
5	$P_2$	0.0878	0.0571	0.6677	0.2494	0.2807	0.3009	0.3134	0.3211	0.3255
	$P_3$	0.8012	0.7929	0.2346	0.1497	0.1802	0.2050	0.2250	0.2420	0.2557
	$P_4$	0.0945	0.1397	0.0776	0.0487	0.0623	0.0746	0.0856	0.0955	0.1045
	$P_1$	0.0069	0.0111	0.0214	0.0121	0.4258	0.3656	0.3187	0.2839	0.2545
	$P_2$	0.0333	0.0617	0.6023	0.5209	0.2440	0.2563	0.2649	0.2672	0.2686
	$P_3$	0.0974	0.7073	0.2183	0.2602	0.1849	0.2956	0.2214	0.2340	0.2439

Продолжение табл. А.51

k	$P_i$	$\theta_2$									
		0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	
6	$P_4$	0.7629	0.1694	0.1209	0.1559	0.1103	0.1295	0.1453	0.1587	0.1704	0.1809
	$P_5$	0.0995	0.0505	0.0371	0.0509	0.0350	0.0430	0.0497	0.0562	0.0624	0.0680
	$P_1$	0.0071	0.0046	0.0059	0.0125	0.3912	0.3277	0.2806	0.2453	0.2159	0.1934
	$P_2$	0.0347	0.0228	0.0340	0.4728	0.2136	0.2232	0.2268	0.2272	0.2245	0.2217
	$P_3$	0.1027	0.0700	0.5718	0.2305	0.1750	0.1913	0.2041	0.2127	0.2182	0.2235
	$P_4$	0.6968	0.6751	0.2254	0.1634	0.1268	0.1446	0.1596	0.1714	0.1830	0.1908
7	$P_5$	0.1244	0.1756	0.1246	0.0927	0.0717	0.0856	0.0977	0.1080	0.1185	0.1269
	$P_6$	0.0343	0.0519	0.0383	0.0281	0.0217	0.0266	0.0312	0.0354	0.0399	0.0437
	$P_1$	0.0037	0.0047	0.0060	0.0131	0.0076	0.3019	0.2528	0.2170	0.1891	0.1670
	$P_2$	0.0170	0.0236	0.0356	0.4396	0.3688	0.1963	0.1970	0.1958	0.1919	0.1882
	$P_3$	0.0458	0.0728	0.5268	0.2058	0.2188	0.1748	0.1833	0.1900	0.1936	0.1959
	$P_4$	0.1051	0.6203	0.2034	0.1579	0.1793	0.1451	0.1579	0.1674	0.1758	0.1820
8	$P_5$	0.6632	0.1694	0.1350	0.1085	0.1297	0.1051	0.1187	0.1288	0.1385	0.1467
	$P_6$	0.0343	0.0519	0.0383	0.0281	0.0217	0.0266	0.0312	0.0354	0.0399	0.0437
	$P_1$	0.0037	0.0047	0.0060	0.0131	0.0076	0.3019	0.2528	0.2170	0.1891	0.1670
	$P_2$	0.0170	0.0236	0.0356	0.4396	0.3688	0.1963	0.1970	0.1958	0.1919	0.1882
	$P_3$	0.0458	0.0728	0.5268	0.2058	0.2188	0.1748	0.1833	0.1900	0.1936	0.1959
	$P_4$	0.1051	0.6203	0.2034	0.1579	0.1793	0.1451	0.1579	0.1674	0.1758	0.1820
9	$P_5$	0.6632	0.1694	0.1350	0.1085	0.1297	0.1051	0.1187	0.1288	0.1385	0.1467
	$P_6$	0.0343	0.0519	0.0383	0.0281	0.0217	0.0266	0.0312	0.0354	0.0399	0.0437
	$P_1$	0.0037	0.0047	0.0060	0.0131	0.0076	0.3019	0.2528	0.2170	0.1891	0.1670
	$P_2$	0.0170	0.0236	0.0356	0.4396	0.3688	0.1963	0.1970	0.1958	0.1919	0.1882
	$P_3$	0.0458	0.0728	0.5268	0.2058	0.2188	0.1748	0.1833	0.1900	0.1936	0.1959
	$P_4$	0.1051	0.6203	0.2034	0.1579	0.1793	0.1451	0.1579	0.1674	0.1758	0.1820
10	$P_5$	0.6632	0.1694	0.1350	0.1085	0.1297	0.1051	0.1187	0.1288	0.1385	0.1467
	$P_6$	0.0343	0.0519	0.0383	0.0281	0.0217	0.0266	0.0312	0.0354	0.0399	0.0437
	$P_1$	0.0037	0.0047	0.0060	0.0131	0.0076	0.3019	0.2528	0.2170	0.1891	0.1670
	$P_2$	0.0170	0.0236	0.0356	0.4396	0.3688	0.1963	0.1970	0.1958	0.1919	0.1882
	$P_3$	0.0458	0.0728	0.5268	0.2058	0.2188	0.1748	0.1833	0.1900	0.1936	0.1959
	$P_4$	0.1051	0.6203	0.2034	0.1579	0.1793	0.1451	0.1579	0.1674	0.1758	0.1820

8	$P_6$	0.1295	0.0850	0.0722	0.0582	0.0736	0.0592	0.0693	0.0770	0.0843	0.0909	0.0975
	$P_7$	0.0357	0.0242	0.0210	0.0169	0.0222	0.0175	0.0210	0.0239	0.0268	0.0293	0.0320
	$P_1$	0.0020	0.0024	0.0025	0.0034	0.0079	0.2816	0.2334	0.1966	0.1698	0.1465	0.1302
	$P_2$	0.0092	0.0113	0.0130	0.0209	0.3412	0.1735	0.1744	0.1707	0.1674	0.1619	0.1569
	$P_3$	0.0239	0.0315	0.0405	0.4176	0.1960	0.1594	0.1659	0.1683	0.1722	0.1718	0.1723
	$P_4$	0.0512	0.0754	0.5053	0.2083	0.1663	0.1394	0.1494	0.1573	0.1636	0.1681	0.1706
	$P_5$	0.1041	0.5953	0.2066	0.1602	0.1318	0.1125	0.1232	0.1339	0.1412	0.1488	0.1538
9	$P_6$	0.6411	0.1733	0.1371	0.1111	0.1921	0.0787	0.0891	0.0998	0.1059	0.1143	0.1204
	$P_7$	0.1320	0.0862	0.0735	0.0607	0.0502	0.0427	0.0500	0.0565	0.0614	0.0677	0.0731
	$P_8$	0.0365	0.0246	0.0215	0.0178	0.0145	0.0122	0.0146	0.0109	0.0186	0.0209	0.0227
	$P_1$	0.0021	0.0023	0.0025	0.0036	0.0082	0.0049	0.02166	0.1801	0.1527	0.1314	0.1167
	$P_2$	0.0099	0.0113	0.0131	0.0218	0.3227	0.2651	0.1541	0.1521	0.1466	0.1412	0.1374
	$P_3$	0.0256	0.0316	0.0419	0.3886	0.1763	0.1775	0.1501	0.1517	0.1532	0.1530	0.1537
	$P_4$	0.0539	0.0772	0.4734	0.1878	0.1530	0.1629	0.1393	0.1458	0.1497	0.1523	0.1555
	$P_5$	0.1076	0.5587	0.1877	0.1512	0.1285	0.1421	0.1228	0.1308	0.1373	0.1426	0.1465
	$P_6$	0.5917	0.1597	0.1344	0.1162	0.0995	0.1137	0.0999	0.1075	0.1150	0.1223	0.1257

Окончание табл. А.51

$k$	$P_i$	$\theta_2$										
		0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$P_7$	0.1308	0.0970	0.0883	0.0781	0.0672	0.0789	0.0691	0.0774	0.0842	0.0903	0.0945
	$P_8$	0.0616	0.0487	0.0459	0.0411	0.0348	0.0428	0.0374	0.0423	0.0474	0.0515	0.0538
	$P_9$	0.0168	0.0135	0.0128	0.0116	0.0098	0.0121	0.0107	0.0123	0.0139	0.0154	0.0162
10	$P_1$	0.0013	0.0013	0.0026	0.0037	0.0083	0.0052	0.2057	0.1694	0.1401	0.1206	0.1045
	$P_2$	0.0059	0.0060	0.0133	0.0222	0.3037	0.2430	0.1403	0.1372	0.1299	0.1264	0.1207
	$P_3$	0.0148	0.0161	0.0435	0.3678	0.1578	0.1570	0.1350	0.1372	0.1359	0.1361	0.1351
	$P_4$	0.0305	0.0360	0.4446	0.1704	0.1406	0.1478	0.1282	0.1334	0.1360	0.1389	0.1397
	$P_5$	0.0563	0.0773	0.1702	0.1411	0.1228	0.1348	0.1185	0.1238	0.1319	0.1342	0.1377
	$P_6$	0.1043	0.5411	0.1300	0.1152	0.1015	0.1155	0.1019	0.1104	0.1166	0.1215	0.1263
	$P_7$	0.5749	0.1619	0.0947	0.0865	0.0780	0.0914	0.0798	0.0875	0.0955	0.1001	0.1052
	$P_8$	0.1324	0.0982	0.0615	0.0567	0.0526	0.0628	0.0546	0.0602	0.0673	0.0715	0.0761
	$P_9$	0.0624	0.0488	0.0310	0.0285	0.0273	0.0332	0.0282	0.0320	0.0364	0.0393	0.0423
	$P_{10}$	0.0172	0.0133	0.0086	0.0079	0.0074	0.0093	0.0078	0.0089	0.0104	0.0114	0.0124

Таблица А.52

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров двойного показательного распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$	$t_{14}$	$A$
3	2.6067	0.2731	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.4079
4	3.4137	1.3979	0.2109	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.5572
5	3.8606	1.9590	0.5123	0.1044	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6836
6	4.4096	2.5726	1.2269	0.3649	0.0772	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.7571
7	4.7959	2.9922	1.7192	0.6758	0.2318	0.0501	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8109
8	5.2049	3.4285	2.2041	1.1904	0.4837	0.1740	0.0377	—	—	—	—	—	—	—	0.8480
9	5.5273	3.7667	2.5713	1.6027	0.7829	0.3431	0.1269	0.0275	—	—	—	—	—	—	0.8756
10	5.8478	4.1024	2.9269	1.9932	1.1805	0.5770	0.2638	0.0988	0.0213	—	—	—	—	—	0.8963
11	6.1270	4.3930	3.2319	2.3192	1.5344	0.8560	0.4359	0.2046	0.0771	0.0165	—	—	—	—	0.9123
12	6.3853	4.6589	3.5103	2.6163	1.8570	1.1789	0.6517	0.3434	0.1638	0.0618	0.0123	—	—	—	0.9248
13	6.6208	4.9016	3.7623	2.8810	2.1401	1.4807	0.9030	0.5106	0.2754	0.1326	0.0500	0.0106	—	—	0.9349
14	6.8444	5.1314	3.9997	3.1286	2.4019	1.7608	1.1798	0.7116	0.3126	0.2261	0.1094	0.0412	0.0087	—	0.9431
15	7.0506	5.3425	4.2169	3.3538	2.6381	2.0116	1.4426	0.9387	0.5734	0.3394	0.1881	0.0913	0.0344	0.0072	0.9498

Таблица A.53

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании основного параметра  $\theta_0$  гамма-распределения в зависимости от его значений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_i$	$\theta_0$												
		0.1	0.25	0.5	0.75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$t_1$	0.0001	0.0015	0.0513	0.1847	0.3697	1.2770	2.2507	3.2389	4.2389	5.2276	6.2246	7.2223	8.2209
	$A$	0.5582	0.6349	0.6241	0.6213	0.6217	0.6266	0.6295	0.6312	0.6312	0.6330	0.6335	0.6342	0.6342
3	$t_1$	0.0001	0.0001	0.0072	0.0486	0.1320	0.7104	1.4483	2.2477	3.0797	3.9331	4.7998	5.6776	6.5651
	$t_2$	0.0107	0.0119	0.1849	0.4548	0.7585	2.0041	3.2128	4.3894	5.5430	6.6830	7.8083	8.9249	10.0345
4	$t_1$	0.0001	0.0001	0.0017	0.0183	0.0628	0.4750	1.0777	1.7666	2.5032	3.2712	4.0605	4.8667	5.6859
	$t_2$	0.0024	0.0046	0.0407	0.1593	0.3309	1.2132	2.1777	3.1630	4.1555	5.1501	6.1471	7.1423	8.1399
5	$t_1$	0.0598	0.1029	0.3422	0.7193	1.1017	2.5616	3.9121	5.2047	6.4588	7.6841	8.8927	10.0770	11.2527
	$A$	0.5964	0.8594	0.8771	0.8754	0.8753	0.8772	0.8787	0.8796	0.8801	0.8805	0.8808	0.8810	0.8812
6	$t_1$	0.0001	0.0001	0.0005	0.0085	0.0354	0.3472	0.8613	1.4748	2.1424	2.8509	3.5885	4.3438	5.1164
	$t_2$	0.0010	0.0021	0.0128	0.0721	0.1805	0.8501	1.6675	2.5337	3.4201	4.3267	5.2437	6.1642	7.0915
7	$t_3$	0.0117	0.0325	0.1009	0.2965	0.5452	1.6339	2.7524	3.8565	4.9443	6.0309	7.1122	8.1814	9.2491
	$t_4$	0.1236	0.2779	0.5111	0.9639	1.4159	3.0120	4.4759	5.8487	7.1625	8.4527	9.7195	10.9557	12.1801
8	$A$	0.5987	0.8786	0.9162	0.9150	0.9148	0.9161	0.9172	0.9179	0.9183	0.9186	0.9188	0.9189	0.9191

6	$t_1$	0.0001	0.0001	0.0002	0.00044	0.0215	0.2687	0.7181	1.2744	1.8922	2.5580	3.2519	3.9678	4.7046
	$t_2$	0.0007	0.0013	0.0053	0.0374	0.1083	0.6423	1.3543	2.1362	2.9496	3.7960	4.6533	5.5169	6.3949
$t_3$	0.0067	0.0133	0.0412	0.1497	0.3154	1.1836	2.1466	3.1328	4.1173	5.1224	6.1180	7.1093	8.1070	
	$t_4$	0.0496	0.0894	0.1930	0.4426	0.7422	1.9977	3.2241	4.4200	5.5757	6.7415	7.8782	8.9940	10.1176
$t_5$	0.3139	0.4711	0.7737	1.1900	1.6659	3.3991	4.9418	6.3832	7.7412	9.1011	10.4031	11.6661	12.9383	
	$A$	0.5998	0.8879	0.9389	0.9383	0.9381	0.9390	0.9399	0.9403	0.9407	0.9409	0.9410	0.9412	0.9412
7	$t_1$	0.0001	0.0001	0.0001	0.0026	0.0146	0.2171	0.6186	1.1309	1.7093	2.3332	2.9988	3.6820	4.3897
	$t_2$	0.0005	0.0008	0.0031	0.0218	0.0731	0.5102	1.1471	1.8632	2.6240	3.4080	4.2263	5.0457	5.8840
$t_3$	0.0030	0.0055	0.0243	0.0864	0.2092	0.9178	1.7754	2.6727	3.5869	4.5057	5.4518	6.3835	7.3311	
	$t_4$	0.0161	0.0281	0.1128	0.2461	0.4752	1.4858	2.5661	3.6407	4.7026	5.7498	6.8211	7.8579	8.9109
$t_5$	0.0785	0.1281	0.4070	0.6139	0.9682	2.3185	3.6392	4.9055	6.1241	7.3089	8.5154	9.6612	10.8234	
	$t_6$	0.3641	0.5483	1.1660	1.4213	1.9761	3.7328	5.3499	6.8529	8.2562	9.6122	10.9755	12.2600	13.5624
$A$	0.6004	0.8935	0.9521	0.9531	0.9529	0.9535	0.9543	0.9547	0.9549	0.9551	0.9552	0.9553	0.9554	
	$t_1$	0.0001	0.0001	0.0001	0.0016	0.0098	0.1784	0.5404	1.0152	1.5649	2.1542	2.7984	3.4508	4.1331
$t_2$	0.0004	0.0005	0.0011	0.0131	0.0489	0.4155	0.9904	1.6520	2.3718	3.1110	3.9004	4.6821	5.4852	
	$t_3$	0.0019	0.0030	0.0073	0.0515	0.1381	0.7355	1.5094	2.3329	3.1953	4.0582	4.9692	5.8519	6.7541
$t_4$	0.0088	0.0137	0.0305	0.1450	0.3061	1.1623	2.1332	3.1107	4.1077	5.0847	6.1093	7.0845	8.0765	
	$t_5$	0.0364	0.0540	0.1008	0.3414	0.5997	1.7435	2.9199	4.0545	5.1847	6.2784	7.4181	8.4880	9.5668
$t_6$	0.1372	0.1911	0.2947	0.7368	1.1125	2.5864	3.9929	5.3042	6.5736	7.7931	9.0609	10.2371	11.4088	
	$t_7$	0.5132	0.6608	0.8568	1.6048	2.1277	4.0015	5.7046	7.2378	8.6726	10.0464	11.4837	12.7955	14.0743
$A$	0.6008	0.8968	0.9632	0.9631	0.9630	0.9634	0.9641	0.9644	0.9646	0.9647	0.9648	0.9649	0.9650	

Окончание табл. А.53

$k$	$t_i$	$\theta_0$												
		0.1	0.25	0.5	0.75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	$t_1$	0.0001	0.0001	0.0001	0.0013	0.0070	0.1530	0.4820	0.9280	1.4472	2.0142	2.6267	3.2788	3.9300
	$t_2$	0.0004	0.0006	0.0012	0.0109	0.0348	0.3528	0.8748	1.4972	2.1744	2.8840	3.6306	4.4127	5.1757
	$t_3$	0.0020	0.0035	0.0085	0.0426	0.0979	0.6176	1.3174	2.0917	2.8984	3.7253	4.5811	5.4663	6.3141
	$t_4$	0.0088	0.0162	0.0359	0.1181	0.2136	0.9611	1.8339	2.7493	3.6755	4.6078	5.5630	6.5453	7.4689
	$t_5$	0.0338	0.0579	0.1080	0.2673	0.4088	1.4083	2.4560	3.5096	4.5561	5.5877	6.6434	7.7191	8.7179
	$t_6$	0.1045	0.1629	0.2658	0.5513	0.7273	2.0082	3.2445	4.4375	5.6109	6.7483	7.9071	9.0767	10.1554
	$t_7$	0.2544	0.3677	0.6014	1.1038	1.2617	2.8682	4.3192	5.6654	6.9793	8.2363	9.5076	10.7895	11.9544
	$t_8$	0.7853	0.9597	1.3541	1.9491	2.3730	4.2945	6.0374	7.5654	9.0699	10.4673	11.8848	13.3029	14.5811
	$A$	0.6010	0.8983	0.9694	0.9696	0.9701	0.9704	0.9710	0.9713	0.9714	0.9715	0.9716	0.9717	0.9717
10	$t_1$	0.0001	0.0001	0.0001	0.0008	0.0057	0.1286	0.4338	0.8578	1.3486	1.9032	2.4925	3.1060	3.7579
	$t_2$	0.0003	0.0003	0.0006	0.0066	0.0283	0.2949	0.7825	1.3747	2.0130	2.7092	3.4238	4.1501	4.9167
	$t_3$	0.0016	0.0012	0.0026	0.0256	0.0795	0.5129	1.1686	1.9036	2.6636	3.4726	4.2864	5.1051	5.9607
	$t_4$	0.0064	0.0042	0.0090	0.0708	0.1728	0.7908	1.6095	2.4773	3.3469	4.2579	5.1601	6.0628	6.9967
	$t_5$	0.0234	0.0130	0.0261	0.1615	0.3261	1.1420	2.1240	3.1212	4.0977	5.1035	6.0920	7.0735	8.0841
	$t_6$	0.0744	0.0370	0.0676	0.3289	0.5665	1.5937	2.7466	3.8739	4.9577	6.0581	7.1346	8.1975	9.2821
	$t_7$	0.2103	0.0994	0.1652	0.6304	0.9409	2.1950	3.5364	4.8009	5.9965	7.1919	8.3648	9.5131	10.6742
	$t_8$	0.4568	0.2598	0.3972	1.1740	1.5499	3.0541	4.6113	6.0295	7.3547	8.6527	9.9446	11.1855	12.4307
	$t_9$	1.0251	0.7082	1.0120	2.5526	2.7021	4.4768	6.3189	7.9303	9.4257	10.8507	12.3101	13.6776	15.0095
	$A$	0.6011	0.9003	0.9734	0.9747	0.9754	0.9755	0.9761	0.9763	0.9765	0.9766	0.9766	0.9767	0.9767

Таблица А.54

**Оптимальные вероятности (частоты) интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании основного параметра  $\theta_0$  гамма-распределения в зависимости от его значений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_i$	$\theta_0$												
		0.1	0.25	0.5	0.75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$P_1$	0.4185	0.2171	0.2513	0.2837	0.3091	0.3650	0.3908	0.4061	0.4177	0.4239	0.4297	0.4344	0.4383
	$P_2$	0.5815	0.7829	0.7487	0.7163	0.6909	0.6350	0.6092	0.5939	0.5823	0.5761	0.5703	0.5656	0.5617
3	$P_1$	0.4185	0.1103	0.0955	0.1103	0.1237	0.1594	0.1783	0.1901	0.1983	0.2045	0.2092	0.2130	0.2162
	$P_2$	0.2487	0.2533	0.3614	0.3901	0.4080	0.4357	0.4445	0.4486	0.4508	0.4525	0.4535	0.4543	0.4548
4	$P_3$	0.3329	0.6365	0.5431	0.4996	0.4684	0.4049	0.3772	0.3613	0.3509	0.3430	0.3373	0.3328	0.3289
	$P_1$	0.4185	0.1103	0.0465	0.0537	0.0609	0.0827	0.0951	0.1034	0.1092	0.1137	0.1171	0.1198	0.1221
5	$P_2$	0.1564	0.1767	0.1781	0.2028	0.2209	0.2594	0.2762	0.2858	0.2923	0.2967	0.3002	0.3027	0.3049
	$P_3$	0.2140	0.3253	0.3673	0.3821	0.3860	0.3830	0.3774	0.3733	0.3702	0.3677	0.3660	0.3642	0.3627
	$P_4$	0.2111	0.3876	0.4081	0.3614	0.3323	0.2749	0.2513	0.2375	0.2283	0.2219	0.2167	0.2134	0.2103
	$P_1$	0.4185	0.1103	0.0252	0.0303	0.0348	0.0480	0.0566	0.0625	0.0664	0.0696	0.0723	0.0743	0.0760
	$P_2$	0.1083	0.1258	0.1019	0.1165	0.1304	0.1613	0.1776	0.1871	0.1931	0.1981	0.2019	0.2046	0.2070
	$P_3$	0.1462	0.2293	0.2196	0.2397	0.2551	0.2766	0.2849	0.2884	0.2901	0.2915	0.2926	0.2931	0.2938
	$P_4$	0.1705	0.2943	0.3413	0.3424	0.3370	0.3167	0.3046	0.2968	0.2916	0.2875	0.2843	0.2819	0.2797
	$P_5$	0.1565	0.2403	0.3120	0.2711	0.2427	0.1974	0.1763	0.1652	0.1587	0.1532	0.1488	0.1461	0.1436

Окончание табл. А.54

$k$	$P_i$	$\theta_0$												
		0.1	0.25	0.5	0.75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	$P_1$	0.4185	0.1103	0.0160	0.0186	0.0213	0.0302	0.0364	0.0406	0.0435	0.0460	0.0478	0.0492	0.0505
	$P_2$	0.0899	0.0991	0.0660	0.0725	0.0814	0.1058	0.1192	0.1277	0.1329	0.1378	0.1412	0.1434	0.1456
	$P_3$	0.1285	0.1642	0.1439	0.1548	0.1679	0.1954	0.2074	0.2142	0.2177	0.2217	0.2236	0.2250	0.2263
	$P_4$	0.1381	0.2191	0.2397	0.2468	0.2534	0.2619	0.2622	0.2615	0.2601	0.2596	0.2589	0.2578	0.2579
	$P_5$	0.1365	0.2453	0.3209	0.2982	0.2870	0.2597	0.2453	0.2358	0.2304	0.2252	0.2218	0.2195	0.2171
	$P_6$	0.0885	0.1619	0.2135	0.2092	0.1890	0.1469	0.1296	0.1201	0.1154	0.1097	0.1067	0.1051	0.1026
7	$P_1$	0.4185	0.1103	0.0113	0.0125	0.0145	0.0204	0.0250	0.0281	0.0302	0.0318	0.0334	0.0344	0.0354
	$P_2$	0.0731	0.0752	0.0515	0.0486	0.0560	0.0729	0.0843	0.0910	0.0958	0.0987	0.1021	0.1038	0.1057
	$P_3$	0.0963	0.1146	0.1117	0.1060	0.1183	0.1407	0.1536	0.1608	0.1651	0.1676	0.1708	0.1721	0.1740
	$P_4$	0.1067	0.1491	0.1907	0.1759	0.1895	0.2034	0.2102	0.2135	0.2148	0.2153	0.2169	0.2167	0.2176
	$P_5$	0.1147	0.1945	0.2679	0.2466	0.2420	0.2360	0.2311	0.2281	0.2253	0.2236	0.2222	0.2207	0.2194
	$P_6$	0.1122	0.2156	0.2402	0.2492	0.2412	0.2134	0.1978	0.1888	0.1829	0.1798	0.1749	0.1736	0.1714
8	$P_7$	0.0786	0.1407	0.1267	0.1612	0.1386	0.1132	0.0981	0.0898	0.0859	0.0833	0.0796	0.0787	0.0767
	$P_1$	0.4185	0.1103	0.0113	0.0087	0.0098	0.0141	0.0176	0.0199	0.0218	0.0228	0.0243	0.0249	0.0256
	$P_2$	0.0622	0.0546	0.0261	0.0332	0.0380	0.0516	0.0609	0.0662	0.0706	0.0727	0.0762	0.0775	0.0788
	$P_3$	0.0810	0.0931	0.0588	0.0732	0.0813	0.1025	0.1150	0.1212	0.1262	0.1285	0.1328	0.1336	0.1351
	$P_4$	0.0926	0.1184	0.0989	0.1254	0.1347	0.1555	0.1658	0.1702	0.1736	0.1749	0.1779	0.1780	0.1787
	$P_5$	0.0979	0.1498	0.1515	0.1815	0.1873	0.1964	0.1993	0.1996	0.1991	0.1990	0.1993	0.1990	0.1982
	$P_6$	0.0992	0.1768	0.2108	0.2241	0.2202	0.2098	0.2022	0.1980	0.1931	0.1911	0.1882	0.1875	0.1859

	$P_7$	0.0915	0.1811	0.2521	0.2226	0.2096	0.1786	0.1626	0.1547	0.1485	0.1456	0.1405	0.1396	0.1379
9	$P_8$	0.0571	0.1159	0.1905	0.1314	0.1191	0.0915	0.0765	0.0702	0.0671	0.0654	0.0608	0.0601	0.0598
	$P_2$	0.0622	0.0623	0.0278	0.0291	0.0272	0.0388	0.0457	0.0504	0.0536	0.0556	0.0578	0.0604	0.0608
	$P_3$	0.0839	0.0955	0.0647	0.0637	0.0591	0.0784	0.0881	0.0945	0.0982	0.1009	0.1037	0.1068	0.1067
	$P_4$	0.0898	0.1242	0.1075	0.1083	0.0991	0.1222	0.1316	0.1370	0.1401	0.1420	0.1444	0.1475	0.1469
	$P_5$	0.0926	0.1427	0.1466	0.1533	0.1432	0.1611	0.1664	0.1686	0.1705	0.1705	0.1720	0.1733	0.1729
	$P_6$	0.0840	0.1440	0.1762	0.1952	0.1812	0.1852	0.1845	0.1816	0.1810	0.1799	0.1792	0.1778	0.1778
	$P_7$	0.0659	0.1228	0.1932	0.2122	0.2000	0.1841	0.1757	0.1693	0.1656	0.1635	0.1605	0.1577	0.1576
	$P_8$	0.0687	0.1260	0.1729	0.1409	0.1900	0.1475	0.1346	0.1270	0.1222	0.1192	0.1155	0.1112	0.1116
	$P_9$	0.0345	0.0722	0.0998	0.0899	0.0932	0.0722	0.0603	0.0567	0.0527	0.0513	0.0488	0.0461	0.0464
10	$P_1$	0.4185	0.1103	0.0113	0.0052	0.0057	0.0076	0.0099	0.0115	0.0123	0.0133	0.0140	0.0144	0.0150
	$P_2$	0.0486	0.0349	0.0164	0.0199	0.0222	0.0282	0.0351	0.0394	0.0415	0.0442	0.0456	0.0462	0.0478
	$P_3$	0.0850	0.0601	0.0299	0.0438	0.0485	0.0583	0.0688	0.0750	0.0779	0.0813	0.0830	0.0840	0.0859
	$P_4$	0.0818	0.0753	0.0492	0.0760	0.0823	0.0938	0.1053	0.1153	0.1177	0.1143	0.1176	0.1190	0.1201
	$P_5$	0.0866	0.0909	0.0740	0.1140	0.1196	0.1284	0.1377	0.1423	0.1442	0.1458	0.1469	0.1475	0.1487
	$P_6$	0.0847	0.1088	0.1062	0.1534	0.1542	0.1567	0.1609	0.1616	0.1618	0.1614	0.1617	0.1620	0.1617
	$P_7$	0.0778	0.1272	0.1477	0.1854	0.1772	0.1712	0.1681	0.1644	0.1624	0.1595	0.1590	0.1584	0.1569
	$P_8$	0.0528	0.1420	0.1927	0.1892	0.1780	0.1646	0.1527	0.1455	0.1425	0.1384	0.1372	0.1357	0.1334
	$P_9$	0.0409	0.1434	0.2179	0.1663	0.1452	0.1289	0.1123	0.1042	0.1008	0.0975	0.0952	0.0939	0.0915
	$P_{10}$	0.0233	0.1071	0.1548	0.0467	0.0671	0.0623	0.0492	0.0444	0.0422	0.0410	0.0385	0.0377	0.0373

Таблица A.55

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра гамма-распределения и известных значениях основного параметра  $\theta_0$ ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_i$	$\theta_0$												
		0.1	0.25	0.5	0.75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$t_1$	0.7065	0.8525	1.0982	1.3455	1.5936	2.5897	3.5881	4.5877	5.5870	6.5859	7.5862	8.5859	9.5857
	$t_2$	0.6598	0.6563	0.6522	0.6495	0.6476	0.6435	0.6416	0.6405	0.6398	0.6393	0.6390	0.6387	0.6385
3	$t_1$	0.3798	0.4780	0.6499	0.8305	1.0178	1.8046	2.6312	3.4804	4.3449	5.2218	6.1064	6.9992	
	$t_2$	1.4817	1.6753	1.9909	2.3027	2.6117	3.8120	4.9820	6.1305	7.2633	8.3868	9.4992	10.6068	
4	$t_1$	0.8308	0.8279	0.8244	0.8220	0.8203	0.8164	0.8146	0.8136	0.8129	0.8125	0.8121	0.8119	
	$t_2$	0.2500	0.3231	0.4566	0.6008	0.7530	1.4224	2.1483	2.9086	3.6932	4.4963	5.3143	6.1450	6.9826
5	$t_1$	0.8951	1.0374	1.2808	1.5254	1.7695	2.7638	3.7603	4.7580	5.7561	6.7558	7.7565	8.7582	9.7563
	$t_2$	2.1030	2.3188	2.6760	3.0230	3.3606	4.6854	5.9544	7.1908	8.4032	9.6011	10.7828	11.9543	13.1133
$A$	$t_1$	0.8992	0.8969	0.8943	0.8924	0.8910	0.8880	0.8865	0.8857	0.8851	0.8847	0.8844	0.8842	0.8840
	$t_2$	0.1814	0.2397	0.3493	0.4702	0.6009	1.1887	1.8439	2.5439	3.2734	4.0293	4.7968	5.5778	
$t_3$	$t_1$	0.6258	0.7412	0.9408	1.1456	1.3552	2.2182	3.1084	4.0131	4.9275	5.8543	6.7808	7.7121	
	$t_2$	1.3482	1.5201	1.8053	2.0892	2.3734	3.4899	4.5910	5.6816	6.7625	7.8416	8.9114	9.9743	
$t_4$	$t_1$	2.6117	2.8443	3.2256	3.5998	3.9653	5.3694	6.7061	8.0054	9.2782	10.5214	11.7564	12.9657	
	$t_2$	0.9332	0.9315	0.9294	0.9280	0.9269	0.9245	0.9233	0.9226	0.9222	0.9219	0.9216	0.9214	

6	$t_1$	0.1397	0.1880	0.2802	0.3846	0.4991	1.0287	1.6324	2.2861	2.9731	3.6884	4.4221	5.1685	5.9306
	$t_2$	0.4723	0.5687	0.7375	0.9159	1.0989	1.8751	2.6869	3.5271	4.3810	5.2533	6.1283	7.0103	7.9015
7	$t_3$	0.9797	1.1220	1.3614	1.6074	1.8527	2.8453	3.8373	4.8364	5.8320	6.8391	7.8333	8.8296	9.8291
	$t_4$	1.7436	1.9343	2.2447	2.5606	2.8691	4.0795	5.2552	6.4136	7.5539	8.6922	9.8063	10.9170	12.0216
8	$t_5$	3.0400	3.2810	3.6791	4.0753	4.4615	5.9323	7.3220	8.6669	9.9786	11.2763	12.5327	13.7804	15.0086
	$t_6$	0.9525	0.9512	0.9496	0.9484	0.9476	0.9456	0.9447	0.9441	0.9437	0.9435	0.9433	0.9432	0.9430
9	$t_7$	0.1131	0.1535	0.2327	0.3256	0.4289	0.9116	1.4752	1.4752	2.0898	2.7453	3.4230	4.1327	4.8496
	$t_8$	0.3774	0.4584	0.6042	0.7635	0.9301	1.6347	2.3887	2.3887	3.1734	3.9861	4.8075	5.6502	6.4924
10	$t_9$	0.7654	0.8835	1.0901	1.3105	1.5337	2.4264	3.3424	3.3424	4.2660	5.2083	6.1476	7.1031	8.0461
	$t_{10}$	1.3102	1.4654	1.7321	2.0130	2.2901	3.3666	4.4352	4.4352	5.4938	6.5580	7.6079	8.6690	9.7087
11	$t_{11}$	2.1079	2.2992	2.6297	2.9770	3.3091	4.5805	5.8134	5.8134	7.0140	8.2107	9.3769	10.5512	11.6878
	$t_{12}$	3.4340	3.6717	4.0807	4.5037	4.8997	6.4177	7.8427	7.8427	9.2242	10.5817	11.8875	13.2029	14.4619
12	$t_{13}$	0.9645	0.9634	0.9622	0.9613	0.9606	0.9590	0.9582	0.9582	0.9577	0.9574	0.9572	0.9571	0.9569
	$t_{14}$	0.0928	0.1287	0.1984	0.2806	0.3728	0.8186	1.3521	1.9358	2.5678	3.2212	3.8961	4.5905	5.3113
13	$t_{15}$	0.3073	0.3808	0.5100	0.6507	0.7986	1.4483	2.1644	2.9061	3.6879	4.4737	5.2738	6.0845	6.9238
	$t_{16}$	0.6139	0.7233	0.9067	1.0983	1.2961	2.1198	2.9845	3.8549	4.7574	5.6484	6.5509	7.4522	8.3854
14	$t_{17}$	1.0279	1.1720	1.4081	1.6492	1.8963	2.8816	3.8846	4.8743	5.8884	6.8772	7.8721	8.8570	9.8751
	$t_{18}$	1.5906	1.7692	2.0609	2.3535	2.6486	3.7983	4.9392	6.0508	7.1773	8.2659	9.3493	10.4202	11.5211
15	$t_{19}$	2.3979	2.6129	2.9689	3.3173	3.6638	4.9957	6.2884	7.5340	8.7777	9.9785	11.1583	12.3244	13.5127
	$t_{20}$	3.7311	3.9860	4.4222	4.8452	5.2560	6.8140	8.2993	9.7080	11.1068	12.4460	13.7466	15.0296	16.3311
16	$t_{21}$	0.9725	0.9716	0.9706	0.9698	0.9693	0.9679	0.9673	0.9669	0.9666	0.9665	0.9663	0.9662	0.9662

$k$	$t_i$	$\theta_0$												
		0.1	0.25	0.5	0.75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	$t_1$	0.0787	0.1105	0.1732	0.2468	0.3317	0.7477	1.2542	1.8125	2.4090	3.0500	3.7153	4.3829	
	$t_2$	0.2591	0.3247	0.4424	0.5680	0.7048	1.3128	1.9916	2.6985	3.4307	4.2015	4.9899	5.7656	
	$t_3$	0.5125	0.6105	0.7786	0.9500	1.1321	1.9002	2.7182	3.5447	4.3833	5.2588	6.1427	7.0020	
	$t_4$	0.8458	0.9750	1.1920	1.4057	1.6306	2.5477	3.4928	4.4258	5.3630	6.3299	7.3017	8.2363	
	$t_5$	1.2812	1.4412	1.7062	1.9630	2.2298	3.2927	4.3622	5.3998	6.4329	7.4887	8.5432	9.5533	
	$t_6$	1.8630	2.0541	2.3699	2.6730	2.9815	4.1986	5.3936	6.5420	7.6728	8.8184	9.9642	11.0508	
	$t_7$	2.6943	2.9094	3.2901	3.6410	3.9971	5.3871	6.7224	7.9931	9.2315	10.4797	11.7227	12.8984	
	$t_8$	4.0599	4.2886	4.7684	5.1767	5.5918	7.1980	8.7046	10.1363	11.5204	12.8944	14.2592	15.5515	
	$A$	0.9781	0.9773	0.9765	0.9758	0.9754	0.9742	0.9737	0.9734	0.9732	0.9730	0.9729	0.9728	
10	$t_1$	0.0688	0.0954	0.1512	0.2198	0.2986	0.6874	1.1730	1.7117	2.2813	2.9098	3.5438	4.2105	4.8959
	$t_2$	0.2248	0.2791	0.3834	0.5018	0.6306	1.1971	1.8453	2.5302	3.2241	3.9814	4.7306	5.5070	6.2958
	$t_3$	0.4410	0.5213	0.6695	0.8323	1.0042	1.7168	2.4972	3.2967	4.0903	4.9485	5.7853	6.6483	7.5161
	$t_4$	0.7198	0.8247	1.0138	1.2192	1.4307	2.2753	3.1775	4.0800	4.9588	5.9058	6.8241	7.7616	8.6968
	$t_5$	1.0737	1.2005	1.4309	1.6780	1.9290	2.9025	3.9192	4.9213	5.8812	6.9146	7.9042	8.9150	9.9149
	$t_6$	1.5258	1.6740	1.9473	2.2374	2.5283	3.6316	4.7651	5.8642	6.9038	8.0252	9.0883	10.1727	11.2369
	$t_7$	2.1200	2.2914	2.6096	2.9480	3.2830	4.5230	5.7806	6.9823	8.1053	9.3172	10.4638	11.6243	12.7553
	$t_8$	2.9522	3.1494	3.5210	3.9151	4.3071	5.6989	7.0952	8.4071	9.6315	10.9424	12.1842	13.4376	14.6399
	$t_9$	4.3042	4.5387	4.9765	5.4556	5.9238	7.4973	9.0832	10.5148	11.8868	13.3275	14.6888	16.0601	17.3658
	$A$	0.9821	0.9815	0.9807	0.9802	0.9798	0.9789	0.9784	0.9781	0.9779	0.9778	0.9777	0.9776	0.9776

Таблица А.56

**Оптимальные вероятности (частоты) интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного параметра гамма-распределения и известных значениях основного параметра  $\theta_0$ ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$t_i$	$\theta_0$												
		0.1	0.25	0.5	0.75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$P_1$	0.9604	0.9149	0.8617	0.8245	0.7968	0.7306	0.6951	0.6723	0.6559	0.6433	0.6335	0.6254	0.6187
	$P_2$	0.0396	0.0851	0.1383	0.1755	0.2032	0.2694	0.3049	0.3277	0.3441	0.3567	0.3665	0.3746	0.3813
3	$P_1$	0.9242	0.8401	0.7458	0.6832	0.6386	0.5385	0.4894	0.2708	0.2709	0.2708	0.2709	0.2708	0.2708
	$P_2$	0.0641	0.1335	0.2083	0.2556	0.2880	0.3551	0.3844	0.4616	0.4612	0.4608	0.4606	0.4605	0.4604
4	$P_3$	0.0116	0.0264	0.0460	0.0612	0.0734	0.1064	0.1262	0.2676	0.2680	0.2684	0.2687	0.2688	
	$P_1$	0.8956	0.7825	0.6607	0.5831	0.5290	0.4159	0.3634	0.3323	0.3115	0.2964	0.2851	0.2762	0.2686
5	$P_2$	0.0758	0.1532	0.2298	0.2734	0.3005	0.3468	0.3612	0.3670	0.3695	0.3706	0.3709	0.3708	0.3704
	$P_3$	0.0237	0.0527	0.0888	0.1152	0.1357	0.1848	0.2113	0.2283	0.2403	0.2492	0.2560	0.2614	0.2662
	$P_4$	0.0049	0.0115	0.0207	0.0283	0.0347	0.0525	0.0640	0.0723	0.0788	0.0838	0.0880	0.0915	0.0947
	$P_1$	0.8722	0.7373	0.5967	0.5100	0.4517	0.3333	0.2812	0.1159	0.1148	0.1139	0.1137	0.1130	0.1124
	$P_2$	0.0819	0.1612	0.2331	0.2700	0.2904	0.3166	0.3195	0.2612	0.2590	0.2574	0.2566	0.2556	0.2550
	$P_3$	0.0317	0.0690	0.1127	0.1429	0.1647	0.2132	0.2357	0.2958	0.2963	0.2966	0.2970	0.2969	
	$P_4$	0.0116	0.0265	0.0463	0.0619	0.0742	0.1073	0.1267	0.2287	0.2306	0.2323	0.2337	0.2344	
	$P_5$	0.0026	0.0060	0.0111	0.0153	0.0190	0.0297	0.0369	0.0984	0.0993	0.0998	0.1005	0.1007	0.1013

		$\theta_0$												
$k$	$t_i$	0.1	0.25	0.5	0.75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	$P_1$	0.8528	0.7005	0.5459	0.4536	0.3929	0.2748	0.2250	0.1978	0.1802	0.1683	0.1591	0.1516	0.1457
	$P_2$	0.0852	0.1638	0.2295	0.2598	0.2738	0.2843	0.2781	0.2714	0.2649	0.2601	0.2552	0.2513	0.2480
	$P_3$	0.0371	0.0790	0.1256	0.1557	0.1764	0.2174	0.2339	0.2421	0.2467	0.2499	0.2515	0.2530	0.2539
	$P_4$	0.0169	0.0379	0.0648	0.0846	0.1001	0.1376	0.1582	0.1708	0.1800	0.1860	0.1913	0.1956	0.1988
	$P_5$	0.0066	0.0152	0.0274	0.0371	0.0452	0.0675	0.0815	0.0911	0.0985	0.1039	0.1089	0.1130	0.1163
	$P_6$	0.0015	0.0036	0.0067	0.0093	0.0115	0.0184	0.0232	0.0268	0.0297	0.0318	0.0339	0.0357	0.0373
7	$P_1$	0.8368	0.6702	0.5049	0.4098	0.3488	0.2318	0.1850	0.0626	0.0611	0.0604	0.0595	0.0594	0.0587
	$P_2$	0.0870	0.1639	0.2235	0.2473	0.2567	0.2544	0.2424	0.1564	0.1535	0.1523	0.1507	0.1500	0.1488
	$P_3$	0.0405	0.0848	0.1319	0.1603	0.1788	0.2111	0.2217	0.2101	0.2083	0.2078	0.2071	0.2072	0.2064
	$P_4$	0.0207	0.0460	0.0771	0.0987	0.1145	0.1521	0.1700	0.2176	0.2185	0.2188	0.2190	0.2193	0.2196
	$P_5$	0.0101	0.0232	0.0409	0.0542	0.0647	0.0935	0.1102	0.1847	0.1868	0.1880	0.1890	0.1895	0.1900
	$P_6$	0.0040	0.0096	0.0175	0.0238	0.0291	0.0451	0.0553	0.1215	0.1239	0.1247	0.1258	0.1260	0.1272
8	$P_1$	0.8219	0.6444	0.4713	0.3733	0.3112	0.1979	0.1550	0.1315	0.1181	0.1078	0.1001	0.0942	0.0903
	$P_2$	0.0881	0.1627	0.2162	0.2343	0.2388	0.2268	0.2127	0.2003	0.1924	0.1847	0.1787	0.1735	0.1707
	$P_3$	0.0431	0.0884	0.1344	0.1602	0.1764	0.2007	0.2056	0.2059	0.2055	0.2037	0.2026	0.2006	0.2001
	$P_4$	0.0238	0.0517	0.0848	0.1072	0.1235	0.1570	0.1712	0.1792	0.1838	0.1870	0.1893	0.1907	0.1919
	$P_5$	0.0131	0.0295	0.0510	0.0671	0.0794	0.1100	0.1256	0.1364	0.1428	0.1486	0.1525	0.1562	0.1581
	$P_6$	0.0066	0.0153	0.0275	0.0373	0.0451	0.0670	0.0796	0.0889	0.0945	0.1002	0.1044	0.1085	0.1105

	$P_7$	0.0027	0.0064	0.0119	0.0165	0.0204	0.0320	0.0394	0.0451	0.0489	0.0526	0.0557	0.0586	0.0602
	$P_8$	0.0006	0.0016	0.0029	0.0041	0.0052	0.0086	0.0109	0.0128	0.0141	0.0153	0.0166	0.0177	0.0183
9	$P_1$	0.8095	0.6225	0.4438	0.3437	0.2823	0.1725	0.1325	0.0387	0.0373	0.0362	0.0361	0.0360	0.0351
	$P_2$	0.0886	0.1608	0.2093	0.2223	0.2235	0.2052	0.1886	0.1027	0.0996	0.0971	0.0966	0.0964	0.0945
	$P_3$	0.0448	0.0905	0.1348	0.1585	0.1719	0.1886	0.1898	0.1486	0.1462	0.1439	0.1438	0.1436	0.1416
	$P_4$	0.0261	0.0557	0.0895	0.1115	0.1265	0.1560	0.1670	0.1719	0.1707	0.1702	0.1700	0.1703	0.1692
	$P_5$	0.0155	0.0343	0.0579	0.0754	0.0883	0.1182	0.1325	0.1721	0.1729	0.1737	0.1738	0.1738	0.1743
	$P_6$	0.0088	0.0201	0.0352	0.0475	0.0568	0.0814	0.0945	0.1520	0.1543	0.1558	0.1559	0.1566	0.1578
	$P_7$	0.0045	0.0105	0.0192	0.0264	0.0323	0.0488	0.0587	0.1166	0.1190	0.1207	0.1211	0.1211	0.1230
	$P_8$	0.0019	0.0045	0.0083	0.0117	0.0146	0.0231	0.0286	0.0713	0.0733	0.0750	0.0751	0.0749	0.0765
	$P_9$	0.0004	0.0011	0.0020	0.0029	0.0037	0.0061	0.0079	0.0261	0.0268	0.0274	0.0275	0.0274	0.0280
10	$P_1$	0.7994	0.6018	0.4176	0.3186	0.2581	0.1514	0.1147	0.0949	0.0816	0.0751	0.0687	0.0647	0.0615
	$P_2$	0.0886	0.1586	0.2012	0.2104	0.2096	0.1849	0.1668	0.1540	0.1421	0.1369	0.1309	0.1267	0.1232
	$P_3$	0.0458	0.0919	0.1340	0.1549	0.1659	0.1756	0.1739	0.1700	0.1651	0.1630	0.1597	0.1577	0.1555
	$P_4$	0.0276	0.0588	0.0927	0.1137	0.1272	0.1515	0.1599	0.1631	0.1634	0.1641	0.1645	0.1643	0.1635
	$P_5$	0.0172	0.0381	0.0638	0.0812	0.0938	0.1224	0.1344	0.1418	0.1465	0.1492	0.1510	0.1528	0.1537
	$P_6$	0.0105	0.0242	0.0423	0.0554	0.0655	0.0916	0.1043	0.1125	0.1193	0.1228	0.1264	0.1289	0.1309
	$P_7$	0.0061	0.0145	0.0261	0.0351	0.0423	0.0627	0.0734	0.0810	0.0882	0.0912	0.0954	0.0978	0.1001
	$P_8$	0.0032	0.0078	0.0144	0.0196	0.0240	0.0375	0.0449	0.0506	0.0567	0.0589	0.0622	0.0644	0.0664
	$P_9$	0.0013	0.0034	0.0064	0.0088	0.0108	0.0177	0.0218	0.0250	0.0288	0.0302	0.0321	0.0332	0.0348
	$P_{10}$	0.0003	0.0008	0.0016	0.0022	0.0027	0.0047	0.0058	0.0071	0.0082	0.0087	0.0093	0.0096	0.0102

Таблица А.57

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного и основного параметров гамма-распределения в зависимости от значений основного параметра  $\theta_0$ ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$

$k$	$t_i$	$\theta_0$								
3	$t_1$	0.1	0.25	0.5	0.75	1	2	3	4	5
	$t_2$	0.0002	0.0001	0.0174	0.0674	0.1465	0.6326	1.2531	1.9397	2.6678
4	$t_1$	0.0001	0.0009	0.0141	0.0547	0.1192	0.5255	1.0651	1.6535	2.3099
	$t_2$	0.1050	0.4420	0.7205	0.9295	1.1408	2.0195	2.9542	3.7846	4.7349
5	$t_1$	0.0001	0.0001	0.0022	0.0163	0.0489	0.3372	0.7833	1.3162	1.9088
	$t_2$	0.0067	0.0069	0.0562	0.1567	0.2866	0.9477	1.7049	2.5067	3.3384
6	$t_1$	0.0001	0.0001	0.0015	0.0117	0.0359	0.2749	0.6666	1.1605	1.7122
	$t_2$	0.0084	0.0081	0.0395	0.1075	0.1994	0.7283	1.3734	2.0974	2.8583



$k$	$t_i$	$\theta_0$												
		0.1	0.25	0.5	0.75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	$t_1$	0.0001	0.0001	0.0002	0.0017	0.1574	0.4415	0.8250	1.2787	1.8036	2.3310	2.9325	3.5049	
	$t_2$	0.0036	0.0018	0.0037	0.0189	0.0595	0.3801	0.8363	1.3799	1.9839	2.6636	3.3046	4.0472	4.7203
	$t_3$	0.1629	0.0233	0.0294	0.0782	0.1800	0.7206	1.3446	2.0408	2.7845	3.6131	4.3498	5.2235	5.9677
	$t_4$	0.4542	0.2630	0.1561	0.2537	0.4663	1.3046	2.1024	2.9543	3.8605	4.8731	5.6929	6.7298	7.5272
	$t_5$	0.8449	0.6803	0.7006	0.8015	1.1711	2.3623	3.3756	4.4160	5.5171	6.7275	7.6700	8.8737	9.8149
	$t_6$	1.3601	1.2444	1.4308	1.5324	2.0444	3.5295	4.7341	5.9506	7.2053	8.5518	9.6244	10.9257	11.9962
	$t_7$	2.0236	2.0557	2.4709	2.4940	3.1377	4.8994	6.2737	7.6705	9.0544	10.5335	11.7263	13.1211	14.3026
	$t_8$	3.2912	3.3968	4.0759	3.9852	4.7460	6.9403	8.4320	9.9701	11.5363	13.1888	14.4967	15.9995	17.3478
	$A$	0.5331	0.8132	0.8731	0.8746	0.8752	0.8777	0.8750	0.8751	0.8751	0.8752	0.8751	0.8752	
10	$t_1$	0.0001	0.0001	0.0017	0.0088	0.1354	0.4037	0.7710	1.2056	1.7008	2.2056	2.7623	3.3874	
	$t_2$	0.0014	0.0011	0.0015	0.0148	0.0445	0.3236	0.7554	1.2761	1.8522	2.4850	3.1019	3.7698	4.5270
	$t_3$	0.0258	0.0105	0.0114	0.0599	0.1314	0.5997	1.1925	1.8495	2.5594	3.3033	4.0198	4.7890	5.6411
	$t_4$	0.1769	0.0813	0.0537	0.1839	0.3195	1.0272	1.7976	2.6008	3.4385	4.3011	5.1228	5.9921	6.9987
	$t_5$	0.4189	0.3690	0.2154	0.5363	0.7622	1.7846	2.7624	3.7386	4.7390	5.7567	6.6818	7.6452	8.7656
	$t_6$	0.7642	0.7764	1.1571	1.4768	2.7934	3.9800	5.1491	6.3872	7.4632	8.5358	9.6020	10.8348	
	$t_7$	1.2344	1.3290	1.3022	1.9077	2.3108	3.8955	5.2602	6.5860	7.9069	9.1388	10.3168	11.5153	12.8376
	$t_8$	1.9812	2.1251	2.1657	2.9083	3.3819	5.2597	6.7736	8.2430	9.6771	11.0173	12.3097	13.6369	15.0781
	$t_9$	3.1510	3.4573	3.5785	4.4672	5.0088	7.3134	8.9003	10.5600	12.2411	13.5436	15.0178	16.4962	18.0356
	$A$	0.5362	0.8245	0.8936	0.8956	0.8958	0.8990	0.8957	0.8958	0.8956	0.8958	0.8959	0.8959	

Таблица А.58

**Оптимальные вероятности (частоты) интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании масштабного и основного параметров гамма-распределения в зависимости от значений основного параметра  $\theta_0$ ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$**

$k$	$P_i$	$\theta_0$												
		0.1	0.25	0.5	0.75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	$P_1$	0.1085	0.1103	0.1480	0.1399	0.1363	0.1327	0.1322	0.1323	0.1325	0.1324	0.1334	0.1115	
	$P_2$	0.8260	0.8157	0.7573	0.7523	0.7486	0.7418	0.7391	0.7374	0.7368	0.7361	0.7357	0.7234	0.7031
4	$P_1$	0.0655	0.0740	0.0947	0.1079	0.1151	0.1255	0.1287	0.1304	0.1308	0.1314	0.1319	0.1432	0.1854
	$P_2$	0.4352	0.6429	0.6366	0.5976	0.5681	0.5012	0.4738	0.4370	0.4269	0.4620	0.4568	0.4249	0.4069
5	$P_1$	0.1254	0.1423	0.1920	0.2351	0.2660	0.3339	0.3617	0.3977	0.4075	0.3753	0.3707	0.4093	0.4271
	$P_2$	0.0221	0.0237	0.0380	0.0471	0.0535	0.0668	0.0719	0.0789	0.0807	0.0738	0.0785	0.0815	0.0848
6	$P_1$	0.4185	0.1103	0.0528	0.0493	0.0477	0.0456	0.0451	0.0447	0.0448	0.0447	0.0451	0.0447	0.0446
	$P_2$	0.2184	0.2072	0.2097	0.2044	0.2015	0.1995	0.1990	0.1991	0.1996	0.1994	0.2003	0.1991	0.1995
$P_3$	0.3012	0.5283	0.5582	0.5444	0.5360	0.5237	0.5179	0.5163	0.5147	0.5137	0.5128	0.5125	0.5125	
	$P_4$	0.0526	0.1309	0.1482	0.1664	0.1765	0.1899	0.1947	0.1960	0.1970	0.1978	0.1977	0.1993	0.1989
$P_5$	0.0093	0.0233	0.0311	0.0355	0.0383	0.0413	0.0433	0.0439	0.0439	0.0443	0.0441	0.0444	0.0445	
	$P_6$	0.4184	0.1103	0.0437	0.0385	0.0353	0.0315	0.0302	0.0304	0.0304	0.0301	0.0299	0.0305	0.0300
$P_7$	0.2328	0.2201	0.1777	0.1567	0.1455	0.1342	0.1299	0.1304	0.1311	0.1300	0.1291	0.1332	0.1297	
	$P_8$	0.2757	0.4891	0.4626	0.4142	0.3858	0.3574	0.3461	0.3463	0.3483	0.3452	0.3417	0.3499	0.3427
$P_9$	0.0491	0.1286	0.2225	0.2733	0.3022	0.3292	0.3393	0.3386	0.3354	0.3386	0.3413	0.3317	0.3393	
	$P_{10}$	0.0194	0.0427	0.0766	0.0959	0.1071	0.1205	0.1258	0.1260	0.1259	0.1267	0.1288	0.1258	0.1285
$P_{11}$	0.0046	0.0092	0.0170	0.0214	0.0241	0.0271	0.0287	0.0283	0.0289	0.0294	0.0293	0.0289	0.0298	

		$\theta_0$												
$k$	$P_i$	0.1	0.25	0.5	0.75	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	$P_1$	0.4185	0.1103	0.0226	0.0225	0.0219	0.0203	0.0198	0.0199	0.0197	0.0194	0.0196	0.0196	0.0196
	$P_2$	0.1834	0.1362	0.0943	0.0901	0.0882	0.0847	0.0824	0.0841	0.0830	0.0828	0.0823	0.0824	0.0830
	$P_3$	0.2697	0.2459	0.2160	0.2141	0.2137	0.2108	0.2047	0.2101	0.2083	0.2080	0.2060	0.2060	0.2083
	$P_4$	0.0732	0.3436	0.4245	0.4107	0.4025	0.3904	0.3859	0.3827	0.3813	0.3816	0.3815	0.3813	0.3791
	$P_5$	0.0328	0.1099	0.1659	0.1793	0.1848	0.2000	0.2062	0.2035	0.2064	0.2065	0.2081	0.2085	0.2077
	$P_6$	0.0184	0.0436	0.0621	0.0677	0.0714	0.0765	0.0818	0.0808	0.0819	0.0821	0.0829	0.0829	0.0828
	$P_7$	0.0041	0.0104	0.0146	0.0156	0.0175	0.0174	0.0193	0.0189	0.0194	0.0193	0.0198	0.0194	0.0194
	$P_8$	0.4185	0.1103	0.0195	0.0173	0.0158	0.0150	0.0142	0.0143	0.0140	0.0140	0.0144	0.0140	0.0150
8	$P_2$	0.1632	0.1285	0.0836	0.0691	0.0635	0.0619	0.0588	0.0594	0.0589	0.0587	0.0597	0.0584	0.0625
	$P_3$	0.2425	0.2276	0.1896	0.1600	0.1498	0.1498	0.1424	0.1448	0.1433	0.1434	0.1453	0.1422	0.1521
	$P_4$	0.0899	0.3416	0.3800	0.3250	0.3037	0.3019	0.2874	0.2891	0.2877	0.2864	0.2899	0.2851	0.3021
	$P_5$	0.0386	0.1181	0.2034	0.2553	0.2764	0.2751	0.2863	0.2821	0.2835	0.2851	0.2804	0.2859	0.2700
	$P_6$	0.0316	0.0505	0.0859	0.1167	0.1276	0.1319	0.1404	0.1396	0.1418	0.1414	0.1397	0.1424	0.1321
	$P_7$	0.0119	0.0191	0.0312	0.0457	0.0512	0.0526	0.0570	0.0570	0.0574	0.0574	0.0569	0.0583	0.0535
	$P_8$	0.0038	0.0042	0.0067	0.0110	0.0121	0.0118	0.0135	0.0136	0.0134	0.0136	0.0135	0.0137	0.0128

9	$P_1$	0.4185	0.1103	0.0160	0.0110	0.0116	0.0112	0.0103	0.0101	0.0100	0.0105	0.0100
	$P_2$	0.1802	0.1168	0.0526	0.0440	0.0461	0.0451	0.0424	0.0414	0.0412	0.0434	0.0414
	$P_3$	0.2656	0.2019	0.1230	0.1006	0.1070	0.1067	0.1005	0.0988	0.0987	0.1038	0.0989
	$P_4$	0.0713	0.3223	0.2321	0.1942	0.2080	0.2118	0.1977	0.1922	0.1940	0.2041	0.1943
	$P_5$	0.0333	0.1365	0.3398	0.3223	0.3173	0.3085	0.3045	0.3008	0.3012	0.3014	0.3002
	$P_6$	0.0172	0.0645	0.1458	0.1854	0.1806	0.1839	0.1956	0.2010	0.1998	0.1911	0.1997
	$P_7$	0.0084	0.0315	0.0645	0.0926	0.0861	0.0888	0.0981	0.1028	0.1019	0.0963	0.1024
	$P_8$	0.0044	0.0130	0.0219	0.0396	0.0347	0.0363	0.0410	0.0423	0.0427	0.0399	0.0428
	$P_9$	0.0011	0.0031	0.0043	0.0102	0.0087	0.0077	0.0098	0.0106	0.0105	0.0095	0.0105
	$P_{10}$											
10	$P_1$	0.4185	0.1103	0.0113	0.0091	0.0088	0.0084	0.0081	0.0080	0.0079	0.0080	0.0076
	$P_2$	0.1263	0.0906	0.0324	0.0368	0.0348	0.0339	0.0331	0.0327	0.0324	0.0330	0.0330
	$P_3$	0.1827	0.1515	0.0763	0.0825	0.0796	0.0795	0.0777	0.0760	0.0766	0.0765	0.0738
	$P_4$	0.1429	0.2273	0.1369	0.1544	0.1504	0.1524	0.1498	0.1474	0.1461	0.1460	0.1432
	$P_5$	0.0601	0.2227	0.2315	0.2659	0.2599	0.2583	0.2528	0.2497	0.2496	0.2510	0.2459
	$P_6$	0.0337	0.1017	0.2683	0.2341	0.2383	0.2352	0.2374	0.2414	0.2509	0.2400	0.2457
	$P_7$	0.0190	0.0536	0.1367	0.1231	0.1292	0.1327	0.1367	0.1386	0.1315	0.1380	0.1410
	$P_8$	0.0109	0.0275	0.0692	0.0622	0.0652	0.0670	0.0693	0.0701	0.0691	0.0704	0.0729
	$P_9$	0.0045	0.0118	0.0299	0.0258	0.0273	0.0270	0.0284	0.0291	0.0296	0.0310	0.0311
	$P_{10}$	0.0014	0.0029	0.0075	0.0062	0.0067	0.0055	0.0068	0.0064	0.0075	0.0075	0.0074

Таблица А.59

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров нормального распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$  (при  $A$ -оптимальном способе группирования)**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$	$t_{14}$	$A$
3	-1.2370	1.2370													0.6275
4	-1.4138	0.0000	1.4138												0.7164
5	-1.7827	-0.8153	0.8153	1.7827											0.8136
6	-1.9257	-1.0504	0.0000	1.0504	1.9257										0.8538
7	-2.1270	-1.3509	-0.5967	0.5967	1.3509	2.1270									0.8628
8	-2.2423	-1.5121	-0.8494	0.0000	0.8494	1.5121	2.2423								0.9107
9	-2.3758	-1.6915	-1.1047	-0.4667	0.4667	1.1047	1.6915	2.3758							0.9280
10	-2.4701	-1.8144	-1.2692	-0.7164	0.0000	0.7164	1.2692	1.8144	2.4701						0.9399
11	-2.5682	-1.9399	-1.4311	-0.9410	-0.3823	0.3823	0.9410	1.4311	1.9399	2.5682					0.9494
12	-2.6456	-2.0374	-1.5537	-1.1016	-0.6199	0.0000	0.6199	1.1016	1.5537	2.0374	2.6456				0.9565
13	-2.7230	-2.1331	-1.6713	-1.2503	-0.8221	-0.3235	0.3235	0.8221	1.2503	1.6713	2.1331	2.7230			0.9624
14	-2.7886	-2.2137	-1.7688	-1.3702	-0.9769	-0.5462	0.0000	0.5462	0.9769	1.3702	1.7688	2.2137	2.7886		0.9671
15	-2.8523	-2.2908	-1.8609	-1.4813	-1.1154	-0.7317	-0.2806	0.2806	0.7317	1.1154	1.4813	1.8609	2.2908	2.8523	0.9713

Таблица А.60

**Оптимальные вероятности (частоты) интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров нормального распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$  (при  $A$ -оптимальном способе группирования)**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	$P_{15}$	$A$
3	0.1080	0.7840	0.1080													0.6275
4	0.0787	0.4213	0.4213	0.0787												0.7164
5	0.0373	0.1701	0.5852	0.1701	0.0373											0.8136
6	0.0271	0.1197	0.3532	0.3532	0.1197	0.0271										0.8538
7	0.0167	0.0716	0.1870	0.4494	0.1870	0.0716	0.0167									0.8628
8	0.0125	0.0528	0.1325	0.3022	0.3022	0.1325	0.0528	0.0125								0.9107
9	0.0087	0.0366	0.0893	0.1857	0.3594	0.1857	0.0893	0.0366	0.0087							0.9280
10	0.0067	0.0281	0.0674	0.1347	0.2631	0.1347	0.0674	0.0281	0.0067							0.9399
11	0.0051	0.0211	0.0500	0.0972	0.1777	0.2978	0.1777	0.0972	0.0500	0.0211	0.0051					0.9494
12	0.0041	0.0167	0.0393	0.0753	0.1323	0.2323	0.1323	0.0753	0.0393	0.0167	0.0041					0.9565
13	0.0032	0.0132	0.0309	0.0583	0.0999	0.1676	0.2538	0.1676	0.0999	0.0583	0.0309	0.0132	0.0032			0.9624
14	0.0026	0.0108	0.0251	0.0468	0.0750	0.1322	0.2075	0.2075	0.1322	0.0750	0.0468	0.0251	0.0108	0.0026		0.9671
15	0.0022	0.0088	0.0204	0.0379	0.0631	0.0998	0.1573	0.2210	0.1573	0.0998	0.0631	0.0379	0.0204	0.0088	0.0022	0.9713

Таблица А.61

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$  (при  $A$ -оптимальном способе группирования)**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$	$t_{14}$	$A$
3	-1.0174	1.6069													0.6472
4	-1.3583	-0.6880	1.6401												0.7672
5	-1.3801	-0.7358	0.9252	2.5544											0.8004
6	-1.5592	-1.0824	-0.5041	1.0323	2.6318										0.8641
7	-1.5873	-1.1304	-0.6001	0.5343	1.6528	3.2085									0.8820
8	-1.6980	-1.3086	-0.9152	-0.3983	0.7376	1.8168	3.3701								0.8949
9	-1.7267	-1.3527	-0.9878	-0.5366	0.2905	1.1952	2.2151	3.7599							0.9109
10	-1.7659	-1.4116	-1.0836	-0.7054	-0.1651	0.6988	1.5179	2.5153	4.0561						0.9276
11	-1.8193	-1.4912	-1.1883	-0.8679	-0.4669	0.2418	0.9909	1.7670	2.7411	4.2492					0.9338
12	-1.8508	-1.5298	-1.2497	-0.9574	-0.6102	-0.1212	0.5724	1.2295	1.9531	2.8771	4.2492				0.9393
13	-1.8679	-1.5733	-1.3040	-1.0329	-0.7555	-0.3604	0.2270	0.8383	1.4641	2.1529	3.0440	4.3710			0.9463
14	-1.9117	-1.6202	-1.3666	-1.1277	-0.8612	-0.5360	-0.0766	0.4980	1.0459	1.6167	2.2770	3.1115	4.3006		0.9508
15	-1.9227	-1.6264	-1.3813	-1.1404	-0.8938	-0.6009	-0.2024	0.3404	0.8288	1.3200	1.8506	2.4608	3.2424	4.3313	0.9579

Таблица А.62

**Оптимальные вероятности (частоты) интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$  (при  $A$ -оптимальном способе группирования)**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	$P_{15}$	$A$
3	0.0629	0.7554	0.1817													0.6472
4	0.0205	0.1163	0.6869	0.1763												0.7672
5	0.0188	0.1053	0.5487	0.2525	0.0747											0.8004
6	0.0086	0.0437	0.1387	0.5093	0.2303	0.0694										0.8641
7	0.0075	0.0377	0.1165	0.3948	0.2692	0.1347	0.0396									0.8820
8	0.0042	0.0205	0.0576	0.1432	0.3943	0.2301	0.1163	0.0338								0.8949
9	0.0036	0.0173	0.0474	0.1126	0.2925	0.2655	0.1577	0.0804	0.0230							0.9109
10	0.0029	0.0136	0.0355	0.0800	0.1754	0.3008	0.1949	0.1192	0.0605	0.0172						0.9276
11	0.0021	0.0097	0.0258	0.0548	0.1125	0.2512	0.2338	0.1531	0.0946	0.0483	0.0141					0.9338
12	0.0017	0.0082	0.0206	0.0434	0.0848	0.1647	0.2454	0.1776	0.1213	0.0776	0.0406	0.0141				0.9393
13	0.0015	0.0065	0.0171	0.0351	0.0639	0.1143	0.2123	0.1982	0.1446	0.0968	0.0631	0.0340	0.0126			0.9463
14	0.0012	0.0052	0.0134	0.0258	0.0483	0.0872	0.1587	0.2048	0.1591	0.1162	0.0826	0.0539	0.0301	0.0135		0.9508
15	0.0011	0.0051	0.0125	0.0251	0.0426	0.0751	0.1325	0.1969	0.1553	0.1193	0.0890	0.0636	0.0435	0.0253	0.0131	0.9579

Таблица А.63

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров распределения Вейбулла) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$  (при  $A$ -оптимальном способе группирования)**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$	$t_{14}$	$A$
3	0.2006	2.7658													0.6260
4	0.1940	1.9900	3.8901												0.7434
5	0.0801	0.4020	2.0874	3.9740											0.8117
6	0.0721	0.3565	1.6554	2.9521	4.7555										0.8607
7	0.0413	0.1958	0.6020	1.8326	3.1037	4.8959									0.8890
8	0.0348	0.1643	0.4835	1.4981	2.5031	3.7071	5.4653								0.9130
9	0.0299	0.1409	0.4039	1.1463	2.0200	2.9612	4.1345	5.8749							0.9282
10	0.0196	0.0921	0.2530	0.5928	1.4261	2.2511	3.1723	4.3345	6.0675						0.9407
11	0.0169	0.0796	0.2169	0.4913	1.1495	1.8875	2.6573	3.5513	4.6966	6.4164					0.9498
12	0.0123	0.0582	0.1569	0.3400	0.7007	1.4080	2.1055	2.8568	3.7405	4.8792	6.5955				0.9571
13	0.0105	0.0498	0.1340	0.2869	0.5677	1.1567	1.7950	2.4490	3.1775	4.0472	5.1755	6.8839			0.9629
14	0.0083	0.0396	0.1063	0.2245	0.4271	0.8109	1.4218	2.0234	2.6586	3.3760	4.2373	5.3600	7.0635		0.9676
15	0.0070	0.0335	0.0900	0.1889	0.3526	0.6386	1.1718	1.7336	2.3034	2.9217	3.6279	4.4820	5.5977	7.2953	0.9715

Таблица А.64

**Оптимальные вероятности (частоты) интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров распределения Вейбулла) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$  (при  $A$ -оптимальном способе группирования)**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	$P_{15}$	$A$
3	0.1818	0.7553	0.0629													0.6260
4	0.1763	0.6870	0.1163	0.0204												0.7434
5	0.0769	0.2541	0.5450	0.1052	0.0188											0.8117
6	0.0696	0.2303	0.5091	0.1388	0.0436	0.0086										0.8607
7	0.0404	0.1374	0.2745	0.3877	0.1152	0.0374	0.0074									0.8890
8	0.0342	0.1173	0.2319	0.3931	0.1417	0.0573	0.0203	0.0042								0.9130
9	0.0295	0.1021	0.2008	0.3499	0.1851	0.0809	0.0357	0.0132	0.0028							0.9282
10	0.0194	0.0687	0.1355	0.2236	0.3126	0.1350	0.0634	0.0288	0.0108	0.0023						0.9407
11	0.0167	0.0598	0.1184	0.1932	0.2950	0.1653	0.0814	0.0415	0.0196	0.0075	0.0016					0.9498
12	0.0122	0.0443	0.0887	0.1432	0.2155	0.2516	0.1228	0.0643	0.0338	0.0161	0.0062	0.0013				0.9571
13	0.0104	0.0382	0.0769	0.1240	0.1838	0.2523	0.1484	0.0797	0.0447	0.0242	0.0118	0.0046	0.0010			0.9629
14	0.0083	0.0305	0.0621	0.1003	0.1465	0.2079	0.2033	0.1091	0.0622	0.0359	0.0197	0.0097	0.0038	0.0007		0.9676
15	0.0070	0.0259	0.0532	0.0861	0.1250	0.1748	0.2183	0.1332	0.0767	0.0461	0.0273	0.0153	0.0076	0.0029	0.0006	0.9715

Таблица А.65

**Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров логистического распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$  (при  $A$ -оптимальном способе группирования)**

$k$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$	$t_{14}$	$A$
3	-1.4892	1.4892													0.6595
4	-1.9790	0.0000	1.9790												0.7692
5	-2.5439	-0.8822	0.8822	2.5439											0.8421
6	-2.9386	-1.3623	0.0000	1.3623	2.9386										0.8826
7	-3.3233	-1.7851	-0.6300	0.6300	1.7851	3.3233									0.9102
8	-3.6454	-2.1203	-1.0537	0.0000	1.0537	2.1203	3.6454								0.9287
9	-3.9467	-2.4247	-1.4051	-0.4925	0.4925	1.4051	2.4247	3.9467							0.9422
10	-4.2160	-2.6920	-1.6971	-0.8617	0.0000	0.8617	1.6971	2.6920	4.2160						0.9522
11	-4.4665	-2.9383	-1.9570	-1.1671	-0.4055	0.4055	1.1671	1.9570	2.9383	4.4665					0.9598
12	-4.6967	-3.1635	-2.1892	-1.4274	-0.7295	0.0000	0.7295	1.4264	2.1892	3.1635	4.6967				0.9657
13	-4.9117	-3.3734	-2.4021	-1.6573	-1.0012	-0.3452	0.3452	1.0012	1.6573	2.4021	3.3734	4.9117			0.9704
14	-5.1122	-3.5689	-2.5985	-1.8646	-1.2362	-0.6326	0.0000	0.6326	1.2360	1.8646	2.5993	3.5689	5.1122		0.9742
15	-5.3007	-3.7527	-2.7816	-2.0547	-1.4442	-0.8777	-0.3008	0.3008	0.8777	1.4442	2.0547	2.7816	3.7527	5.3007	0.9773

Таблица А.66

**Оптимальные вероятности (частоты) интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа  $\chi^2$  (при оценивании двух параметров логистического распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации  $A$  (при  $A$ -оптимальном способе группирования)**

$k$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	$P_{15}$	$A$
3	0.1840	0.6320	0.1840													0.6595
4	0.1213	0.3787	0.3787	0.1213												0.7692
5	0.0728	0.2199	0.4146	0.2199	0.0728											0.8421
6	0.0502	0.1536	0.2962	0.2962	0.1536	0.0502										0.8826
7	0.0347	0.1089	0.2039	0.3050	0.2038	0.1089	0.0347									0.9102
8	0.0254	0.0817	0.1514	0.2415	0.2415	0.1514	0.0817	0.0254								0.9287
9	0.0189	0.0624	0.1157	0.1823	0.2415	0.1822	0.1157	0.0623	0.0189							0.9422
10	0.0145	0.0489	0.0914	0.1422	0.2030	0.2030	0.1422	0.0914	0.0489	0.0145						0.9522
11	0.0113	0.0389	0.0735	0.1136	0.1627	0.2000	0.1627	0.1136	0.0735	0.0389	0.0113					0.9598
12	0.0090	0.0315	0.0602	0.0928	0.1318	0.1747	0.1747	0.1318	0.0928	0.0602	0.0315	0.0090				0.9657
13	0.0073	0.0258	0.0499	0.0771	0.1086	0.1458	0.1710	0.1458	0.1086	0.0771	0.0499	0.0258	0.0073			0.9704
14	0.0059	0.0214	0.0418	0.0649	0.0910	0.1218	0.1532	0.1532	0.1218	0.0910	0.0649	0.0418	0.0214	0.0059		0.9742
15	0.0049	0.0180	0.0354	0.0553	0.0773	0.1027	0.1318	0.1492	0.1318	0.1027	0.0773	0.0553	0.0354	0.0180	0.0049	0.9773

(1 -  $\alpha$ )-квантили  $\chi^2$ -распределения с  $r$  степенями свободы

$r$	$\alpha$
0.5	0.4
1	0.455
2	1.386
3	2.366
4	3.357
5	4.351
6	5.348
7	6.346
8	7.344
9	8.343
10	9.342
11	10.342
12	11.340
13	12.340
14	13.339
15	14.339
16	15.338
0.5	0.3
1	0.708
2	2.408
3	3.665
4	4.045
5	5.132
6	6.211
7	7.283
8	8.351
9	9.414
10	10.473
11	11.530
12	12.584
13	13.636
14	14.685
15	15.733
16	16.780
0.2	1.642
3.219	4.605
6.251	7.815
5.989	7.779
6.064	7.289
7.231	8.558
9.803	12.017
11.030	13.362
10.656	12.242
11.781	13.442
14.631	17.275
15.812	18.549
16.985	19.812
18.151	21.064
19.311	22.307
20.465	23.542
21.780	24.996
22.322	27.488
23.542	26.296
24.996	29.845
27.488	32.000
29.845	34.267
32.000	39.252
34.267	41.308
0.1	2.706
5.991	7.378
9.248	11.345
9.488	11.143
9.236	11.070
12.592	14.449
16.013	14.067
16.919	19.023
17.275	19.675
21.336	21.026
22.362	24.736
23.685	26.119
24.996	26.119
27.488	29.141
29.845	31.319
32.000	36.123
34.267	37.697
39.252	41.308
0.05	3.841
6.355	7.879
9.210	10.597
11.345	12.838
11.143	13.277
12.832	14.860
14.449	16.812
16.013	18.475
19.023	21.666
19.675	20.278
21.026	20.090
24.736	21.955
26.119	23.589
27.488	27.877
29.845	29.666
31.319	31.420
36.123	33.136
37.697	34.821
39.252	36.478
41.308	38.109
0.025	5.024
6.355	7.879
9.210	10.597
11.345	12.838
13.277	14.860
16.812	18.475
18.475	20.278
20.278	21.666
21.955	23.589
23.589	27.877
24.458	26.322
26.322	27.868
27.868	29.666
29.666	31.420
31.420	33.136
33.136	34.821
34.821	36.478
36.478	38.109
0.01	6.355
7.879	10.597
10.597	13.816
12.838	16.266
14.860	18.467
18.467	19.997
20.278	22.105
22.105	24.103
24.103	26.018
26.018	27.868
27.868	29.666
29.666	31.420
31.420	33.136
33.136	34.821
34.821	36.478
36.478	38.109
0.005	6.355
7.879	10.597
10.597	13.816
13.816	15.202
16.266	17.730
18.467	19.997
19.997	22.105
22.105	24.103
24.103	26.018
26.018	27.868
27.868	29.666
29.666	31.420
31.420	33.136
33.136	34.821
34.821	36.478
36.478	38.109
38.109	41.308

## **ПРИЛОЖЕНИЕ В**

### **ТАБЛИЦЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТАТИСТИК НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ ПРИ ПРОСТЫХ И СЛОЖНЫХ ГИПОТЕЗАХ**







Таблица В.1

Функция распределения статистики Колмогорова  $K(S)$  при проверке простой гипотезы

$S$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.2	0.0000000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 004
0.3	0.0000009	0.000 021	0.000 046	0.000 091	0.000 171	0.000 303	0.000 511	0.000 826	0.001 285	0.001 929
0.4	0.002808	0.003 972	0.005 476	0.007 377	0.009 730	0.012 589	0.016 005	0.020 022	0.024 682	0.030 017
0.5	0.036055	0.042 814	0.050 306	0.058 534	0.067 497	0.077 183	0.087 577	0.098 656	0.110 394	0.122 760
0.6	0.135718	0.149 229	0.163 255	0.177 752	0.192 677	0.207 987	0.223 637	0.239 582	0.255 780	0.272 188
0.7	0.288765	0.305 471	0.322 265	0.339 114	0.355 981	0.372 833	0.389 640	0.406 372	0.423 002	0.439 505
0.8	0.455858	0.472 039	0.488 028	0.503 809	0.519 365	0.534 682	0.549 745	0.564 545	0.579 071	0.593 315
0.9	0.607269	0.620 928	0.634 285	0.647 337	0.660 081	0.672 515	0.684 836	0.696 445	0.707 941	0.719 126
1.0	0.730000	0.740 566	0.750 825	0.760 781	0.770 436	0.779 794	0.788 860	0.797 637	0.806 130	0.814 343
1.1	0.8222282	0.829 951	0.837 356	0.844 502	0.851 395	0.858 040	0.864 443	0.870 610	0.876 546	0.882 258
1.2	0.887750	0.893 030	0.898 102	0.903 973	0.907 648	0.912 134	0.916 435	0.920 557	0.924 506	0.928 288
1.3	0.931908	0.935 371	0.938 682	0.941 847	0.944 871	0.947 758	0.950 514	0.953 144	0.955 651	0.958 041
1.4	0.960318	0.962 487	0.964 551	0.966 515	0.968 383	0.970 159	0.971 846	0.973 448	0.974 969	0.976 413
1.5	0.977782	0.979 080	0.980 310	0.981 475	0.982 579	0.983 623	0.984 610	0.985 544	0.986 427	0.987 261
1.6	0.988048	0.988 791	0.989 492	0.990 154	0.990 777	0.991 364	0.991 917	0.992 438	0.992 928	0.993 389
1.7	0.993823	0.994 230	0.994 612	0.994 972	0.995 309	0.995 625	0.995 922	0.996 200	0.996 460	0.996 704
1.8	0.996932	0.997 146	0.997 346	0.997 533	0.997 707	0.997 870	0.998 023	0.998 165	0.998 297	0.998 421
1.9	0.998536	0.998 644	0.998 744	0.998 837	0.998 924	0.999 004	0.999 079	0.999 149	0.999 213	0.999 273
2.0	0.999329	0.999 381	0.999 429	0.999 473	0.999 514	0.999 553	0.999 588	0.999 620	0.999 651	0.999 679
2.1	0.999705	0.999 728	0.999 750	0.999 771	0.999 790	0.999 807	0.999 823	0.999 837	0.999 851	0.999 863
2.2	0.999874	0.999 886	0.999 895	0.999 904	0.999 912	0.999 920	0.999 927	0.999 933	0.999 939	0.999 944
2.3	0.999949	0.999 954	0.999 958	0.999 961	0.999 965	0.999 968	0.999 971	0.999 974	0.999 976	0.999 978
2.4	0.999980	0.999 982	0.999 984	0.999 985	0.999 987	0.999 988	0.999 989	0.999 990	0.999 991	0.999 992

Таблица В.2

**Процентные точки распределения статистики Колмогорова при проверке простой гипотезы**

Функция распределения		Верхние процентные точки										
		0.15			0.1		0.05		0.025		0.01	
$K(S)$	1.1379	1.2238			1.3581		1.4802		1.6276			
0.0	0.00000	0.0001	0.00300	0.02568	0.06685	0.12372	0.18602	0.24844	0.30815	0.36386		
0.1	0.41513	46.196	50.457	54.329	57.846	61.042	63.951	66.600	69.019	71.229		
0.2	0.73253	75.109	76.814	78.383	79.829	81.163	82.396	83.536	84.593	85.573		
0.3	0.86483	87.329	88.115	88.848	89.531	90.167	90.762	91.317	91.836	92.321		
0.4	0.92775	93.201	93.599	93.972	94.323	94.651	94.960	95.249	95.521	95.777		
0.5	0.96017	96.242	96.455	96.655	96.843	97.020	97.186	97.343	97.491	97.630		
0.6	0.97762	97.886	98.002	98.112	98.216	98.314	98.406	98.493	98.575	98.653		
0.7	0.98726	98.795	98.861	98.922	98.981	99.036	99.088	99.137	99.183	99.227		
0.8	0.99268	99.308	99.345	99.380	99.413	99.444	99.474	99.502	99.528	99.553		
0.9	0.99577	99.599	99.621	99.641	99.660	99.678	99.695	99.711	99.726	99.740		
1.0	0.99754	99.764	99.776	99.787	99.799	99.812	99.820	99.828	99.837	99.847		
1.1	0.99856	99.862	99.869	99.876	99.883	99.890	99.895	99.900	99.905	99.910		
1.2	0.99916	99.919	99.923	99.927	99.931	99.935	99.938	99.941	99.944	99.947		
1.3	0.99950	99.953	99.955	99.957	99.959	99.962	99.964	99.965	99.967	99.969		
1.4	0.99971	99.972	99.973	99.975	99.976	99.978	99.979	99.980	99.980	99.980		

Таблица В.3

**Функция распределения статистики  $\chi^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова  $a1(S)$  при проверке простой гипотезы**

$S$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.00000	0.0001	0.00300	0.02568	0.06685	0.12372	0.18602	0.24844	0.30815	0.36386
0.1	0.41513	46.196	50.457	54.329	57.846	61.042	63.951	66.600	69.019	71.229
0.2	0.73253	75.109	76.814	78.383	79.829	81.163	82.396	83.536	84.593	85.573
0.3	0.86483	87.329	88.115	88.848	89.531	90.167	90.762	91.317	91.836	92.321
0.4	0.92775	93.201	93.599	93.972	94.323	94.651	94.960	95.249	95.521	95.777
0.5	0.96017	96.242	96.455	96.655	96.843	97.020	97.186	97.343	97.491	97.630
0.6	0.97762	97.886	98.002	98.112	98.216	98.314	98.406	98.493	98.575	98.653
0.7	0.98726	98.795	98.861	98.922	98.981	99.036	99.088	99.137	99.183	99.227
0.8	0.99268	99.308	99.345	99.380	99.413	99.444	99.474	99.502	99.528	99.553
0.9	0.99577	99.599	99.621	99.641	99.660	99.678	99.695	99.711	99.726	99.740
1.0	0.99754	99.764	99.776	99.787	99.799	99.812	99.820	99.828	99.837	99.847
1.1	0.99856	99.862	99.869	99.876	99.883	99.890	99.895	99.900	99.905	99.910
1.2	0.99916	99.919	99.923	99.927	99.931	99.935	99.938	99.941	99.944	99.947
1.3	0.99950	99.953	99.955	99.957	99.959	99.962	99.964	99.965	99.967	99.969
1.4	0.99971	99.972	99.973	99.975	99.976	99.978	99.979	99.980	99.980	99.980

Таблица В.4  
Процентные точки распределения статистики  $\phi^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке простой гипотезы

Функция распределения	Верхние процентные точки						
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01		
$a_1(S)$	0.2841	0.3473	0.4614	0.5806		0.7434	

Таблица В.5  
Функция распределения статистики  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга  $a_2(S)$  при проверке простой гипотезы

$S$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.00000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 001
0.1	0.00003	00 008	00 020	00 043	00 081	00 141	00 228	00 349	00 508	00 710
0.2	0.00959	01 256	01 605	02 005	02 457	02 961	03 514	04 115	04 762	05 453
0.3	0.06184	06 954	07 759	08 596	09 463	10 356	11 273	12 211	13 168	14 140
0.4	0.15127	16 124	17 132	18 146	19 166	20 190	21 217	22 244	23 271	24 296
0.5	0.25319	26 337	27 351	28 359	29 360	30 355	31 342	32 320	33 290	34 250
0.6	0.35200	36 141	37 071	37 991	38 900	39 798	40 684	41 560	42 424	43 277
0.7	0.44118	44 947	45 765	46 572	47 367	48 150	48 922	49 683	50 432	51 170
0.8	0.51897	52 613	53 318	54 012	54 695	55 368	56 030	56 682	57 324	57 956
0.9	0.58577	59 189	59 791	60 383	60 966	61 540	62 104	62 660	63 206	63 744
1.0	0.64273	64 794	65 306	65 811	66 307	66 795	67 275	67 748	68 213	68 670
1.1	0.69120	69 563	69 999	70 428	70 851	71 266	71 675	72 077	72 473	72 863
1.2	0.73247	73 624	73 996	74 361	74 721	75 075	75 424	75 767	76 105	76 438
1.3	0.76765	77 088	77 405	77 717	78 025	78 328	78 626	78 919	79 209	79 493
1.4	0.79773	80 049	80 321	80 589	80 852	81 112	81 368	81 620	81 868	82 112
1.5	0.82352	82 589	82 823	83 053	83 279	83 503	83 723	83 939	84 153	84 363
1.6	0.84570	84 774	84 975	85 173	85 369	85 561	85 751	85 938	86 122	86 303

Окончание табл. В.5

Таблица В.6

Процентные точки распределения статистики  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга при проверке простой гипотезы

Функция распределения $a2(S)$	0.15		0.1		Верхние процентные точки	
	0.05	0.025	0.05	0.025	0.01	
	1.6212	1.9330	2.4924	3.0775	3.8781	

Таблица В.7

Аппроксимация предельных распределений статистики Колмогорова при использовании метода максимального правдоподобия

Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
Экспоненциальное	$\gamma(5.1092; 0.0861; 0.2950)$	—	—
Полунормальное	$\gamma(4.5462; 0.1001; 0.3100)$	—	—
Рэлея	$\gamma(5.1092; 0.0861; 0.2950)$	—	—
Маковелла	$\gamma(5.4566; 0.0794; 0.2870)$	—	—
Лапласа	$B_{\text{III}}(4.4680; 4.8450; 3.9105; 2.3784; 0.324)$ $1.7652; 0.302)$	$B_{\text{III}}(5.3541; 7.2519; 2.5630; 1.7652; 0.302)$	$\gamma(6.2949; 0.0624; 0.2613)$
Нормальное	$B_{\text{III}}(4.8849; 5.2341; 3.6279; 2.3872; 0.303)$ $1.4774; 0.30)$	$B_{\text{III}}(5.2604; 7.4327; 2.1872; 1.4774; 0.30)$	$\gamma(6.4721; 0.0580; 0.2620)$
Логнормальное	$B_{\text{III}}(4.8849; 5.2341; 3.6279; 2.3872; 0.303)$ $1.4774; 0.30)$	$B_{\text{III}}(5.2604; 7.4327; 2.1872; 1.4774; 0.30)$	$\gamma(6.4721; 0.0580; 0.2620)$
Копи	$\gamma(3.0987; 0.1463; 0.3350)$	$\gamma(5.9860; 0.0780; 0.2528)$	$\gamma(5.3642; 0.0654; 0.2600)$
Логистическое	$\gamma(3.4954; 0.1411; 0.3325)$	$\gamma(7.6325; 0.0531; 0.2368)$	$\gamma(7.5402; 0.0451; 0.2422)$
Наибольшего значения	$\gamma(3.6805; 0.1355; 0.3350)$	$\gamma(5.2194; 0.0848; 0.2920)$	$\gamma(6.6012; 0.0563; 0.2598)$
Наименьшего значения	$\gamma(3.6805; 0.1355; 0.3350)$ <sup>1)</sup>	$\gamma(5.2194; 0.0848; 0.2920)$	$\gamma(6.6012; 0.0563; 0.2598)$
Вейбулла	$\gamma(3.6805; 0.1355; 0.3350)$ <sup>1)</sup>	$\gamma(5.2194; 0.0848; 0.2920)$	$\gamma(6.6012; 0.0563; 0.2598)$

<sup>1)</sup> Оценивали параметр формы распределения Вейбулла.

<sup>2)</sup> Оценивали параметр масштаба распределения Вейбулла.

Таблица В.8

**Процентные точки распределения статистики Колмогорова  
при использовании метода максимального правдоподобия**

Распределение случайной величины	Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
		0.9	0.95	0.99
Экспоненциальное	Масштабный	0.995	1.094	1.292
Полунормальное	Масштабный	1.051	1.160	1.381
Рэлея	Масштабный	0.995	1.094	1.292
Максвелла	Масштабный	0.969	1.062	1.251
Лапласа	Масштабный	1.177	1.313	1.587
	Сдвиг	0.957	1.045	1.223
	Два параметра	0.863	0.940	1.095
Нормальное	Масштабный	1.190	1.327	1.600
	Сдвиг	0.888	0.963	1.114
	Два параметра	0.835	0.909	1.057
Логнормальное	Масштабный	1.190	1.327	1.600
	Сдвиг	0.888	0.963	1.114
	Два параметра	0.835	0.909	1.057
Коши	Масштабный	1.137	1.275	1.550
	Сдвиг	0.975	1.070	1.260
	Два параметра	0.815	0.893	1.048
Логистическое	Масштабный	1.180	1.316	1.589
	Сдвиг	0.837	0.907	1.046
	Два параметра	0.746	0.805	0.923
Наибольшего значения	Масштабный	1.182	1.316	1.583
	Сдвиг	0.995	1.093	1.292
	Два параметра	0.824	0.895	1.037
Наименьшего значения	Масштабный	1.182	1.316	1.583
	Сдвиг	0.995	1.093	1.292
	Два параметра	0.824	0.895	1.037
Вейбулла	Формы	1.182	1.316	1.583
	Масштаба	0.995	1.093	1.292
	Два параметра	0.824	0.895	1.037

Таблица В.9

**Аппроксимация предельных распределений минимума статистики Колмогорова  
(при использовании  $MD$ -оценок, минимизирующих статистику  $S_k$ )**

Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
Экспоненциальное	$\gamma(4.4983; 0.0621; 0.2891)$	—	—
Полунормальное	$\gamma(4.2884; 0.0705; 0.3072)$	—	—
Рэлея	$\gamma(4.8579; 0.0639; 0.2900)$	—	—
Максвелла	$\gamma(5.3106; 0.0581; 0.2865)$	—	—
Лапласа	$\gamma(3.0431; 0.1355; 0.3182)$	$\gamma(5.0103; 0.0602; 0.2968)$ $\ln N(-0.5358; 0.2122)$	$Su(-2.1079; 2.4629; 0.1661; 0.3340)$ $\ln N(-0.6970; 0.1952)$
Нормальное	$\gamma(3.2458; 0.1343; 0.3072)$	$\ln N(-0.5469; 0.2152)$	$\ln N(-0.7236; 0.1837)$
Логнормальное	$\gamma(3.2458; 0.1343; 0.3072)$	$\ln N(-0.5469; 0.2152)$	$\ln N(-0.7236; 0.1837)$
Копи	$\gamma(3.4398; 0.1255; 0.3022)$	$\ln N(-0.5182; 0.2268)$	$Su(-1.6929; 2.5234; 0.1892; 0.3607)$ $\ln N(-0.6946; 0.1938)$
Логистическое	$Su(-2.6522; 1.8288;0.1738; 0.3384)$ $\gamma(3.6342; 0.1284; 0.2772)$	$Su(-3.8497; 3.2770;0.2136; 0.2607)$ $\ln N(-0.5511; 0.2045)$	$\ln N(-0.7389; 0.1771)$ $Su(-2.5093; 3.1277; 0.1932; 0.3041)$
Наибольшего значения	$\gamma(3.5424; 0.1203; 0.2975)$	$Su(-1.9028; 2.3972;0.2227; 0.389)$	$Su(-1.3144; 2.2480; 0.1616; 0.3858)$ $\ln N(-0.7174; 0.1841)$
Наименьшего значения	$\gamma(3.5424; 0.1203; 0.2975)$	$Su(-1.9028; 2.3972;0.2227; 0.389)$	$Su(-1.3144; 2.2480; 0.1616; 0.3858)$ $\ln N(-0.7174; 0.1841)$
Вейбулла	$\gamma(3.5424; 0.1203; 0.2975)$ <sup>1)</sup>	$Su(-1.9028; 2.3972;0.2227; 0.389)$ <sup>2)</sup>	$Su(-1.3144; 2.2480; 0.1616; 0.3858)$ $\ln N(-0.7174; 0.1841)$

<sup>1)</sup> Оценивали параметр формы распределения Вейбулла.

<sup>2)</sup> Оценивали параметр масштаба распределения Вейбулла.

Таблица В.10

**Процентные точки распределения минимума статистики Колмогорова  
(при использовании  $MD$ -оценок, минимизирующих статистику  $S_K$ )**

Распределение случайной величины	Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
		0.9	0.95	0.99
Экспоненциальное	Масштабный	0.745	0.814	0.962
Полунормальное	Масштабный	0.805	0.883	1.048
Рэлея	Масштабный	0.789	0.862	1.017
Максвелла	Масштабный	0.774	0.843	0.988
Лапласа	Масштабный	1.048	1.180	1.467
	Сдвиг	0.779	0.849	0.997
	Два параметра	0.642	0.697	0.823
Нормальное	Масштабный	1.068	1.202	1.492
	Сдвиг	0.763	0.825	0.955
	Два параметра	0.614	0.656	0.744
Логнормальное	Масштабный	1.068	1.202	1.492
	Сдвиг	0.763	0.825	0.955
	Два параметра	0.614	0.656	0.744
Коши	Масштабный	1.046	1.174	1.449
	Сдвиг	0.797	0.865	1.010
	Два параметра	0.639	0.691	0.807
Логистическое	Масштабный	1.081	1.234	1.488
	Сдвиг	0.750	0.812	0.948
	Два параметра	0.599	0.639	0.721
Наибольшего значения	Масштабный	1.027	1.151	1.417
	Сдвиг	0.780	0.853	1.020
	Два параметра	0.617	0.666	0.778
Наименьшего значения	Масштабный	1.027	1.151	1.417
	Сдвиг	0.780	0.853	1.020
	Два параметра	0.617	0.666	0.778
Вейбулла	Формы	1.027	1.151	1.417
	Масштаба	0.780	0.853	1.020
	Два параметра	0.617	0.666	0.778

Таблица В.11

**Аппроксимация предельных распределений статистики Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия**

Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
Экспоненциальное	$\ln N(0.2260; 0.6951)$	—	—
Полунормальное	$\ln N(0.2050; 0.7718)$	—	—
Рэлея	$\ln N(0.2248; 0.7248)$	—	—
Максвелла	$\ln N(0.2462; 0.6779)$	—	—
Лапласа	$\gamma(0.8539; 1.9952; 0.0000)$	$\gamma(1.7941; 0.8324; 0.0149)$	$\gamma(1.7071; .7234; 0.0170)$
Нормальное	$\gamma(0.8700; 2.0786; 0.0004)$	$\gamma(2.6428; 0.5089; 0.2056)$ $\ln N(0.2992; 0.5298)$	$\ln N(0.1164; 0.5436)$
Логнормальное	$\gamma(0.8231; 2.1973; 0.0001)$	$Su(-2.5588; 1.6251; 0.4763;$ $0.2134)$	$Su(-2.2909; 1.3491; 0.3115;$ $0.3134)$
Копли	$\gamma(0.8839; 1.7507; 0.0019)$	$\gamma(1.4108; 1.0209; 0.0004)$	$\gamma(1.3546; 0.7565; 0.0005)$
Логистическое	$\gamma(0.8376; 2.1815; 0.0001)$	$Su(-2.9441; 1.7404; 0.3783;$ $0.3082)$	$\ln N(0.0831; 0.4473)$
Наибольшего значения	$\gamma(0.8856; 2.0700; 0.0002)$	$\ln N(0.2414; 0.7017)$	$\ln N(0.1501; 0.5108)$
Наименьшего значения	$\gamma(0.8856; 0.4831; 0.0002)$	$\ln N(0.2414; 0.7017)$	$\ln N(0.1501; 0.5108)$
Вейбулла	$\gamma(0.8856; 0.4831; 0.0002)$ <sup>1)</sup>	$\ln N(0.2414; 0.7017)$ <sup>2)</sup>	$\ln N(0.1501; 0.5108)$

<sup>1)</sup> Оценивали параметр формы распределения Вейбулла.  
<sup>2)</sup> Оценивали параметр масштаба распределения Вейбулла.

Таблица В.12

**Процентные точки распределения статистики Смирнова  
при использовании метода максимального правдоподобия**

Распределение случайной величины	Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
		0.9	0.95	0.99
Экспоненциальное	Масштабный	3.055	3.933	6.316
Полунормальное	Масштабный	3.301	4.369	7.393
Рэлея	Масштабный	3.170	4.125	6.759
Максвелла	Масштабный	3.050	3.901	6.192
Лапласа	Масштабный	4.078	5.399	8.503
	Сдвиг	2.983	3.801	5.823
	Два параметра	2.434	3.016	4.450
Нормальное	Масштабный	4.309	5.693	8.940
	Сдвиг	2.688	3.221	4.416
	Два параметра	2.286	2.810	4.058
Логнормальное	Масштабный	4.368	5.807	9.200
	Сдвиг	2.721	3.360	5.014
	Два параметра	2.503	3.185	5.081
Коши	Масштабный	3.675	4.846	7.589
	Сдвиг	3.047	3.831	5.607
	Два параметра	2.190	2.763	4.067
Логистическое	Масштабный	4.488	6.022	8.740
	Сдвиг	2.436	2.937	4.207
	Два параметра	1.928	2.268	3.076
Наибольшего значения	Масштабный	4.349	5.735	8.980
	Сдвиг	3.036	3.918	6.321
	Два параметра	2.236	2.692	3.813
Наименьшего значения	Масштабный	4.349	5.735	8.980
	Сдвиг	3.036	3.918	6.321
	Два параметра	2.236	2.692	3.813
Вейбулла	Формы	4.349	5.735	8.980
	Масштаба	3.036	3.918	6.321
	Два параметра	2.236	2.692	3.813

**Таблица В.13**  
**Аппроксимация предельных распределений статистики  $\phi^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия**

Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
Экспоненциальное	Sb(3.3738; 1.2145; 1.0792; 0.0110)	—	—
Полунормальное	Sb(3.5270; 1.1515; 1.5527; 0.0121)	—	—
Рэлея	Sb(3.3738; 1.2145; 1.0792; 0.0110)	—	—
Маковелла	Sb(3.3531; 1.2201; 0.9786; 0.0118)	—	—
Лапласа	B <sub>3</sub> (3.9800; 1.4667; 38.0035; 1.13; 0.0111)	B <sub>III</sub> (3.3130; 3.8338; 10.097; 0.7517; 0.011)	B <sub>III</sub> (4.489; 3.7706; 17.577; 0.0765; 0.0085)
Нормальное	Sb(3.153; 0.9448; 2.5477; 0.0160)	B <sub>III</sub> (4.433; 3.6365; 13.920; 0.6632; 0.0084)	B <sub>III</sub> (4.1153; 4.1748; 11.035; 0.5116; 0.009)
Логнормальное	Sb(3.153; 0.9448; 2.5477; 0.0160)	B <sub>III</sub> (4.433; 3.6365; 13.920; 0.6632; 0.0084)	B <sub>III</sub> (4.1153; 4.1748; 11.035; 0.5116; 0.009)
Копи	Sb(3.1895; 0.9134; 2.6900; 0.0130)	Sb((2.3588; 1.0732; 0.5950; 0.0129)	Sb(3.4364; 1.0678; 1.0000; 0.0110)
Логистическое	Sb(3.2637; 0.9581; 2.7046; 0.0138)	Sb(4.0026; 1.2853; 1.0000; 0.0122)	Sb(3.2137; 1.3612; 0.3600; 0.0105)
Наибольшего значения	Sb(3.3431; 0.9817; 2.7533; 0.0148)	Sb(3.4978; 1.2236; 1.1632; 0.0110)	Sb(3.3854; 1.4453; 0.4986; 0.0070)
Наименьшего значения	Sb(3.3431; 0.9817; 2.7533; 0.0148)	Sb(3.4978; 1.2236; 1.1632; 0.0110)	Sb(3.3854; 1.4453; 0.4986; 0.0070)
Вейбулла	Sb(3.3431; 0.9817; 2.7533; 0.0148) <sup>1)</sup>	Sb(3.4978; 1.2236; 1.1632; 0.0110) <sup>2)</sup>	Sb(3.3854; 1.4453; 0.4986; 0.0070)

<sup>1)</sup> Оценивали параметр формы распределения Вейбулла.

<sup>2)</sup> Оценивали параметр масштаба распределения Вейбулла.

Таблица В.14

**Процентные точки распределения статистики  $\omega^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия**

Распределение случайной величины	Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
		0.9	0.95	0.99
Экспоненциальное	Масштабный	0.174	0.221	0.337
Полунормальное	Масштабный	0.205	0.266	0.415
Рэлея	Масштабный	0.174	0.221	0.337
Максвелла	Масштабный	0.162	0.204	0.306
Лапласа	Масштабный	0.323	0.439	0.719
	Сдвиг	0.151	0.187	0.268
	Два параметра	0.115	0.144	0.213
Нормальное	Масштабный	0.327	0.442	0.725
	Сдвиг	0.134	0.165	0.238
	Два параметра	0.103	0.126	0.178
Логнормальное	Масштабный	0.327	0.443	0.727
	Сдвиг	0.134	0.165	0.238
	Два параметра	0.103	0.126	0.178
Коши	Масштабный	0.316	0.430	0.711
	Сдвиг	0.172	0.216	0.319
	Два параметра	0.129	0.170	0.271
Логистическое	Масштабный	0.323	0.438	0.719
	Сдвиг	0.119	0.148	0.216
	Два параметра	0.081	0.098	0.135
Наибольшего значения	Масштабный	0.320	0.431	0.704
	Сдвиг	0.174	0.221	0.336
	Два параметра	0.102	0.124	0.174
Наименьшего значения	Масштабный	0.320	0.431	0.704
	Сдвиг	0.174	0.221	0.336
	Два параметра	0.102	0.124	0.174
Вейбулла	Формы	0.320	0.431	0.704
	Масштаба	0.174	0.221	0.336
	Два параметра	0.102	0.124	0.174

Таблица В.15

**Аппроксимация предельных распределений минимума статистики  $\chi^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова  
(при использовании MD-оценок, минимизирующих статистику  $S_{(o)}$ )**

Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только коэффициента сдвига	При оценивании двух параметров
Экспоненциальное	$Su(-1.9324; 1.1610; 0.0134; 0.0203)$	—	—
Полунормальное	$Su(-1.5024; 1.0991; 0.0173; 0.0256)$	—	—
Рэлея	$Su(-1.4705; 1.1006; 0.0164; 0.0259)$	—	—
Максвелла	$Su(-1.7706; 1.2978; 0.0188; 0.0220)$	—	—
Лапласа	$S(1.0117; 0.9485; 0.2162; 0.0137)$	$\ln N(-2.8601; 0.5471)$	$\ln N(-3.2853; 0.4666)$
Нормальное	$S(1.0477; 0.9883; 0.2356; 0.0112)$	$\ln N(-2.8649; 0.5668)$	$\ln N(-3.2715; 0.4645)$
Логнормальное	$S(1.0477; 0.9883; 0.2356; 0.0112)$	$\ln N(-2.8649; 0.5668)$	$\ln N(-3.2715; 0.4645)$
Кони	$S(1.2759; 1.0437; 0.2825; 0.0089)$	$\ln N(-2.8577; 0.5739)$	$\ln N(-3.2603; 0.4874)$
Логистическое	$S(1.0898; 1.0225; 0.2399; 0.0096)$	$\ln N(-2.8831; 0.5367)$	$\ln N(-3.2915; 0.4592)$
Наибольшего значения	$S(1.0771; 1.0388; 0.2065; 0.0109)$	$Su(-1.5348; 1.1226; 0.0166; 0.0252)$	$Su(-1.5326; 1.4446; 0.0147; 0.0188)$ $\ln N(-3.2627; 0.4680)$
Наименьшего значения	$S(1.0771; 1.0388; 0.2065; 0.0109)$	$Su(-1.5348; 1.1226; 0.0166; 0.0252)$	$Su(-1.5326; 1.4446; 0.0147; 0.0188)$ $\ln N(-3.2627; 0.4680)$
Вейбулла	$S(1.0771; 1.0388; 0.2065; 0.0109)$	$Su(-1.5348; 1.1226; 0.0166; 0.0252)$	$Su(-1.5326; 1.4446; 0.0147; 0.0188)$ $\ln N(-3.2627; 0.4680)$

<sup>1)</sup> Оценивали параметр формы распределения Вейбулла.

<sup>2)</sup> Оценивали параметр масштаба распределения Вейбулла.

Таблица В.16

**Процентные точки распределения минимума статистики  $\chi^2$  Крамера–Мизеса–Смирнова (при использовании  $MD$ -оценок, минимизирующих статистику  $S_{\omega}$ )**

Распределение случайной величины	Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
		0.9	0.95	0.99
Экспоненциальное	Масштабный	0.127	0.166	0.283
Полунормальное	Масштабный	0.134	0.177	0.307
Рэлея	Масштабный	0.125	0.165	0.284
Максвелла	Масштабный	0.120	0.152	0.243
Лапласа	Масштабный	0.299	0.408	0.625
	Сдвиг	0.115	0.141	0.205
	Два параметра	0.068	0.081	0.111
Нормальное	Масштабный	0.312	0.425	0.694
	Сдвиг	0.118	0.145	0.213
	Два параметра	0.069	0.082	0.112
Логнормальное	Масштабный	0.312	0.425	0.694
	Сдвиг	0.118	0.145	0.213
	Два параметра	0.069	0.082	0.112
Коши	Масштабный	0.295	0.392	0.689
	Сдвиг	0.120	0.148	0.218
	Два параметра	0.072	0.086	0.119
Логистическое	Масштабный	0.330	0.445	0.694
	Сдвиг	0.111	0.135	0.195
	Два параметра	0.067	0.079	0.108
Наибольшего значения	Масштабный	0.262	0.368	0.698
	Сдвиг	0.127	0.166	0.284
	Два параметра	0.069	0.084	0.125
Наименьшего значения	Масштабный	0.262	0.368	0.698
	Сдвиг	0.127	0.166	0.284
	Два параметра	0.069	0.084	0.125
Вейбулла	Формы	0.262	0.368	0.698
	Масштаба	0.127	0.166	0.284
	Два параметра	0.069	0.084	0.125

Таблица В.17

**Аппроксимация предельных распределений статистики  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга при использовании метода максимального правдоподобия**

Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
Экспоненциальное	Sb(3.8386; 1.3429; 7.5000; 0.0900)	—	—
Полунормальное	Sb(4.2019; 1.2918; 11.5000; 0.0000)	—	—
Рэлея	Sb(3.8386; 1.3429; 7.5000; 0.0900)	—	—
Максвелла	Sb(3.9591; 1.3296; 7.8000; 0.1010)	—	—
Лапласа	B <sub>III</sub> (4.0842; 1.7532; 28.1434; 6.00; 0.105)	B <sub>III</sub> (4.2734; 4.0281; 10.9008; 4.9365; 0.085)	B <sub>III</sub> (5.3576; 3.869; 17.215; 4.2386; 0.073)
Нормальное	B <sub>III</sub> (3.4638; 2.330; 35.7115; 12.603; 0.105)	B <sub>III</sub> (4.1081; 5.0598; 16.9721; 7.9065; 0.09)	B <sub>III</sub> (4.7262; 4.6575; 9.4958; 2.717; 0.0775)
Логнормальное	B <sub>III</sub> (3.4638; 2.330; 35.7115; 12.603; 0.105)	B <sub>III</sub> (4.1081; 5.0598; 16.9721; 7.9065; 0.09)	B <sub>III</sub> (4.7262; 4.6575; 9.4958; 2.717; 0.0775)
Копи	Sb(3.7830; 1.0678; 18.0000; 0.1100)	Sb(3.4814; 1.2375; 7.8100; 0.1000)	Sb(3.2902; 1.1290; 5.8367; 0.0990)
Логистическое	Sb(3.5159; 1.0544; 14.7484; 0.1167)	Sb(5.1316; 1.5681; 10.0000; 0.0651)	Sb(3.4091; 1.4337; 2.4482; 0.0950)
Наибольшего значения	Sb(3.5122; 1.0640; 14.4957; 0.1250)	Sb(4.7988; 1.4023; 13.0000; 0.0850)	Sb(3.4830; 1.5138; 3.0000; 0.0700)
Наименьшего значения	Sb(3.5122; 1.0640; 14.4957; 0.1250)	Sb(4.7988; 1.4023; 13.0000; 0.0850)	Sb(3.4830; 1.5138; 3.0000; 0.0700)
Вейбулла	Sb(3.5122; 1.0640; 14.4957; 0.1250) <sup>2)</sup>	Sb(4.7988; 1.4023; 13.0000; 0.0850) <sup>2)</sup>	Sb(3.4830; 1.5138; 3.0000; 0.0700)

<sup>1)</sup> Оценивали параметр формы распределения Вейбулла.

<sup>2)</sup> Оценивали параметр масштаба распределения Вейбулла.

Таблица В.18

**Процентные точки распределения статистики  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга  
при использовании метода максимального правдоподобия**

Распределение случайной величины	Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
		0.9	0.95	0.99
Экспоненциальное	Масштабный	1.060	1.319	1.954
Полунормальное	Масштабный	1.188	1.499	2.267
Рэлея	Масштабный	1.060	1.319	1.954
Максвелла	Масштабный	1.010	1.247	1.832
Лапласа	Масштабный	1.725	2.290	3.685
	Сдвиг	1.071	1.302	1.837
	Два параметра	0.798	0.982	1.439
Нормальное	Масштабный	1.743	2.309	3.704
	Сдвиг	0.892	1.087	1.552
	Два параметра	0.630	0.750	1.032
Логнормальное	Масштабный	1.745	2.310	3.708
	Сдвиг	0.892	1.087	1.551
	Два параметра	0.630	0.751	1.034
Коши	Масштабный	1.716	2.277	3.673
	Сдвиг	1.215	1.512	2.211
	Два параметра	0.948	1.226	1.913
Логистическое	Масштабный	1.724	2.285	3.682
	Сдвиг	0.856	1.043	1.495
	Два параметра	0.562	0.665	0.903
Наибольшего значения	Масштабный	1.723	2.273	3.634
	Сдвиг	1.059	1.318	1.952
	Два параметра	0.634	0.755	1.040
Наименьшего значения	Масштабный	1.723	2.273	3.634
	Сдвиг	1.059	1.318	1.952
	Два параметра	0.634	0.755	1.040
Вейбулла	Формы	1.723	2.273	3.634
	Масштаба	1.059	1.318	1.952
	Два параметра	0.634	0.755	1.040

Таблица В.19

**Аппроксимация предельных распределений минимума статистики  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга  
(при использовании MD-оценок, минимизирующих статистику  $S_{\Omega}$ )**

Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра		При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
	Экспоненциальное	Полунормальное		
Рэлея	$Su(-2.2734; 1.3473; 0.1101; 0.1280)$	$Su(-2.2734; 1.3473; 0.1101; 0.1496)$	—	—
Максвелла	$Su(-2.2759; 1.3988; 0.1171; 0.1514)$	$Su(-2.3884; 1.0811; 0.0948; 0.1548)$	$Su(-2.7267; 1.4972; 0.1044; 0.1239)$	$Su(-2.4334; 1.6104; 0.0902; 0.1123)$
Лапласа	$Su(-2.4180; 1.0702; 0.0957; 0.1464)$	$Su(-2.4180; 1.0702; 0.0957; 0.1464)$	$Su(-2.7639; 1.5393; 0.1102; 0.1115)$	$Su(-2.5746; 1.7505; 0.0979; 0.1043)$
Нормальное	$Su(-2.4180; 1.0702; 0.0957; 0.1464)$	$Su(-2.4180; 1.0702; 0.0957; 0.1464)$	$Su(-2.7639; 1.5393; 0.1102; 0.1115)$	$Su(-2.5746; 1.7505; 0.0979; 0.1043)$
Логнормальное	$Su(-2.5043; 1.1355; 0.1035; 0.1384)$	$Su(-2.5043; 1.1355; 0.1035; 0.1384)$	$Su(-2.7029; 1.5179; 0.1188; 0.1100)$	$Su(-2.1046; 1.4364; 0.0929; 0.1301)$
Кони	$S(0.3223; 1.1159; 0.6836; 0.0953)$	$S(0.3223; 1.1159; 0.6836; 0.0953)$	$Su(-2.6212; 1.4318; 0.0932; 0.1370)$	$Su(-3.0152; 1.7751; 0.0800; 0.0898)$
Логистическое	$Su(-2.3007; 1.0135; 0.0906; 0.1593)$	$Su(-2.3007; 1.0135; 0.0906; 0.1593)$	$Su(-2.6557; 1.4282; 0.1024; 0.1254)$	$Su(-2.1580; 1.5446; 0.0941; 0.1279)$
Наибольшего значения	$Su(-2.4454; 1.1083; 0.0968; 0.1459)$	$Su(-2.4454; 1.1083; 0.0968; 0.1459)$	$Su(-2.6557; 1.4282; 0.1024; 0.1254)$	$Su(-2.1580; 1.5446; 0.0941; 0.1279)$
Наименьшего значения	$Su(-2.4454; 1.1083; 0.0968; 0.1459)$	$Su(-2.4454; 1.1083; 0.0968; 0.1459)$	$Su(-2.6557; 1.4282; 0.1024; 0.1254)$	$Su(-2.1580; 1.5446; 0.0941; 0.1279)$
Вейбулла	$Su(-2.4454; 1.1083; 0.0968; 0.1459)$ <sup>1)</sup>	$Su(-2.4454; 1.1083; 0.0968; 0.1459)$ <sup>2)</sup>	$Su(-2.6557; 1.4282; 0.1024; 0.1254)$	$Su(-2.1580; 1.5446; 0.0941; 0.1279)$

<sup>1)</sup> Оценивали параметр формы распределения Вейбулла.<sup>2)</sup> Оценивали параметр масштаба распределения Вейбулла.

Таблица В.20

**Процентные точки распределения минимума статистики  $\Omega^2$  Андерсона–Дарлинга (при использовании  $MD$ -оценок, минимизирующих статистику  $S_\Omega$ )**

Распределение случайной величины	Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
		0.9	0.95	0.99
Экспоненциальное	Масштабный	0.917	1.153	1.797
Полунормальное	Масштабный	0.969	1.225	1.929
Рэлея	Масштабный	0.916	1.155	1.821
Максвелла	Масштабный	0.892	1.114	1.721
Лапласа	Масштабный	1.644	2.179	3.320
	Сдвиг	0.880	1.089	1.648
	Два параметра	0.561	0.676	0.977
Нормальное	Масштабный	1.730	2.253	3.598
	Сдвиг	0.871	1.075	1.614
	Два параметра	0.542	0.645	0.906
Логнормальное	Масштабный	1.730	2.253	3.598
	Сдвиг	0.871	1.075	1.614
	Два параметра	0.542	0.645	0.906
Коши	Масштабный	1.629	2.093	3.473
	Сдвиг	0.926	1.148	1.740
	Два параметра	0.616	0.759	1.144
Логистическое	Масштабный	1.710	2.332	4.214
	Сдвиг	0.845	1.052	1.612
	Два параметра	0.536	0.639	0.899
Наибольшего значения	Масштабный	1.542	2.084	3.732
	Сдвиг	0.929	1.163	1.800
	Два параметра	0.559	0.676	0.983
Наименьшего значения	Масштабный	1.542	2.084	3.732
	Сдвиг	0.929	1.163	1.800
	Два параметра	0.559	0.676	0.983
Вейбулла	Формы	1.542	2.084	3.732
	Масштаба	0.929	1.163	1.800
	Два параметра	0.559	0.676	0.983

Таблица В.21

**Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае проверки гипотез относительно распределений Sb-Джонсона при использовании ОМП**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
<i>Для критерия Колмогорова</i>				
$\theta_0$	0.888	0.963	1.115	$B_{III}(6.3484; 7.4913; 2.3663; 1.4790; 0.27)$
$\theta_1$	1.189	1.326	1.600	$B_{III}(6.8242; 4.7737; 5.2621; 2.3878; 0.27)$
$\theta_0, \theta_1$	0.836	0.909	1.058	$B_{III}(6.6559; 8.1766; 2.9405; 1.6143; 0.27)$
<i>Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова</i>				
$\theta_0$	0.134	0.165	0.238	$B_{III}(4.2304; 3.8058; 13.1934; 0.6908; 0.0086)$
$\theta_1$	0.327	0.442	0.724	$B_{III}(2.9153; 2.0048; 33.4135; 2.07821; 0.0114)$
$\theta_0, \theta_1$	0.104	0.126	0.179	$B_{III}(4.3897; 4.0574; 12.1009; 0.5119; 0.0086)$
<i>Для критерия Андерсона–Дарлинга</i>				
$\theta_0$	0.893	1.086	1.553	$B_{III}(4.2657; 4.3788; 11.4946; 4.6551; 0.084)$
$\theta_1$	1.741	2.309	3.702	$B_{III}(4.1703; 2.3363; 42.0833; 12.6019; 0.088)$
$\theta_0, \theta_1$	0.631	0.751	1.034	$B_{III}(4.0891; 5.9708; 9.6497; 4.0000; 0.082)$

Таблица В.22

**Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае проверки гипотез относительно распределений SI-Джонсона при использовании ОМП**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
<b>Для критерия Колмогорова</b>				
$\theta_0$	0.888	0.963	1.115	$B_{III}(6.3484; 7.4913; 2.3663; 1.4790; 0.27)$
$\theta_1$	1.189	1.326	1.600	$B_{III}(6.8242; 4.7737; 5.2621; 2.3878; 0.27)$
$\theta_2$	0.888	0.963	1.115	$B_{III}(6.3484; 7.4913; 2.3663; 1.4790; 0.27)$
$\theta_0, \theta_1$	0.836	0.909	1.058	$B_{III}(6.6559; 8.1766; 2.9405; 1.6143; 0.27)$
$\theta_0, \theta_2$	0.888	0.963	1.115	$B_{III}(6.3484; 7.4913; 2.3663; 1.4790; 0.27)$
$\theta_1, \theta_2$	0.836	0.909	1.058	$B_{III}(6.6559; 8.1766; 2.9405; 1.6143; 0.27)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.836	0.909	1.058	$B_{III}(6.6559; 8.1766; 2.9405; 1.6143; 0.27)$
<b>Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова</b>				
$\theta_0$	0.134	0.165	0.238	$B_{III}(4.2304; 3.8058; 13.1934; 0.6908; 0.0086)$
$\theta_1$	0.327	0.442	0.724	$B_{III}(2.9153; 2.0048; 33.4135; 2.07821; 0.0114)$
$\theta_2$	0.134	0.165	0.238	$B_{III}(4.2304; 3.8058; 13.1934; 0.6908; 0.0086)$
$\theta_0, \theta_1$	0.104	0.126	0.179	$B_{III}(4.3897; 4.0574; 12.1009; 0.5119; 0.0086)$
$\theta_0, \theta_2$	0.134	0.165	0.238	$B_{III}(4.2304; 3.8058; 13.1934; 0.6908; 0.0086)$
$\theta_1, \theta_2$	0.104	0.126	0.179	$B_{III}(4.3897; 4.0574; 12.1009; 0.5119; 0.0086)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.104	0.126	0.179	$B_{III}(4.3897; 4.0574; 12.1009; 0.5119; 0.0086)$
<b>Для критерия Андерсона–Дарлинга</b>				
$\theta_0$	0.893	1.086	1.553	$B_{III}(4.2657; 4.3788; 11.4946; 4.6551; 0.084)$
$\theta_1$	1.741	2.309	3.702	$B_{III}(4.1703; 2.3363; 42.0833; 12.6019; 0.088)$
$\theta_2$	0.893	1.086	1.553	$B_{III}(4.2657; 4.3788; 11.4946; 4.6551; 0.084)$
$\theta_0, \theta_1$	0.631	0.751	1.034	$B_{III}(4.0891; 5.9708; 9.6497; 4.0000; 0.082)$
$\theta_0, \theta_2$	0.893	1.086	1.553	$B_{III}(4.2657; 4.3788; 11.4946; 4.6551; 0.084)$
$\theta_1, \theta_2$	0.631	0.751	1.034	$B_{III}(4.0891; 5.9708; 9.6497; 4.0000; 0.082)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.631	0.751	1.034	$B_{III}(4.0891; 5.9708; 9.6497; 4.0000; 0.082)$

Таблица В.23

**Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае проверки гипотез относительно распределений Су-Джонсона при использовании ОМП**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
<i>Для критерия Колмогорова</i>				
$\theta_0$	0.888	0.963	1.115	$B_{III}(6.3484; 7.4913; 2.3663; 1.4790; 0.27)$
$\theta_1$	1.189	1.326	1.600	$B_{III}(6.8242; 4.7737; 5.2621; 2.3878; 0.27)$
$\theta_2$	1.161	1.300	1.576	$B_{III}(5.3417; 4.6440; 4.7448; 2.3802; 0.29)$
$\theta_3$	0.880	0.960	1.122	$B_{III}(6.6252; 7.4025; 3.0590; 1.6516; 0.27)$
$\theta_0, \theta_1$	0.836	0.909	1.058	$B_{III}(6.4792; 7.0243; 2.8437; 1.4260; 0.27)$
$\theta_0, \theta_2$	0.798	0.872	1.024	$B_{III}(6.4496; 6.7714; 3.3119; 1.4226; 0.27)$
$\theta_0, \theta_3$	0.802	0.875	1.023	$B_{III}(6.3069; 6.1065; 3.2916; 1.3317; 0.27)$
$\theta_1, \theta_2$	1.142	1.282	1.561	$B_{III}(5.9751; 4.4559; 5.6810; 2.4123; 0.27)$
$\theta_1, \theta_3$	0.792	0.858	0.994	$B_{III}(6.4839; 7.0152; 2.7376; 1.2838; 0.27)$
$\theta_2, \theta_3$	0.733	0.791	0.910	$B_{III}(6.2438; 6.9161; 2.5011; 1.0904; 0.27)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.776	0.851	1.007	$B_{III}(6.2414; 6.4027; 3.7458; 1.4361; 0.27)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_3$	0.720	0.780	0.901	$B_{III}(6.4262; 6.9732; 2.7325; 1.1317; 0.26)$
$\theta_0, \theta_2, \theta_3$	0.658	0.706	0.806	$B_{III}(6.1239; 7.9516; 2.24033; 0.9839; 0.26)$
$\theta_1, \theta_2, \theta_3$	0.704	0.760	0.878	$B_{III}(7.1354; 8.0363; 2.7466; 1.1766; 0.25)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$	0.622	0.666	0.755	$B_{III}(6.6889; 8.1712; 2.3857; 0.9291; 0.25)$
<i>Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова</i>				
$\theta_0$	0.134	0.165	0.238	$B_{III}(3.6736; 3.9355; 11.2146; 0.6908; 0.01)$
$\theta_1$	0.327	0.442	0.724	$B_{III}(2.9153; 2.0048; 33.4135; 2.07821; 0.0114)$
$\theta_2$	0.318	0.433	0.716	$B_{III}(2.2077; 1.7250; 28.4959; 1.75; 0.015)$
$\theta_3$	0.125	0.154	0.225	$B_{III}(3.6990; 3.8775; 11.9942; 0.6601; 0.01)$
$\theta_0, \theta_1$	0.103	0.126	0.178	$B_{III}(4.3897; 4.0574; 12.1009; 0.5119; 0.0086)$
$\theta_0, \theta_2$	0.090	0.110	0.161	$B_{III}(5.2030; 3.9325; 15.6968; 0.4659; 0.0075)$

Окончание табл. В.23

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
$\theta_0, \theta_3$	0.104	0.133	0.203	$B_{III}(5.9540; 3.1023; 30.6943; 0.6380; 0.0071)$
$\theta_1, \theta_2$	0.314	0.428	0.711	$B_{III}(2.4905; 1.6985; 45.9674; 2.3084; 0.012)$
$\theta_1, \theta_3$	0.094	0.113	0.158	$B_{III}(4.6011; 5.7370; 19.1580; 1.0; 0.0075)$
$\theta_2, \theta_3$	0.080	0.096	0.137	$B_{III}(4.7686; 4.6085; 11.1421; 0.3929; 0.0075)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.083	0.104	0.155	$B_{III}(5.2574; 3.6440; 19.9213; 0.4707; 0.0075)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_3$	0.071	0.086	0.122	$B_{III}(5.7750; 4.7935; 18.1182; 0.4777; 0.0065)$
$\theta_0, \theta_2, \theta_3$	0.056	0.066	0.089	$B_{III}(7.3500; 5.4726; 13.7452; 0.2883; 0.0052)$
$\theta_1, \theta_2, \theta_3$	0.073	0.089	0.130	$B_{III}(5.6379; 4.0985; 18.5518; 0.42100; 0.007)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$	0.048	0.056	0.075	$B_{III}(6.9739; 6.6406; 13.7433; 0.3151; 0.0052)$
Для критерия Андерсона–Дарлинга				
$\theta_0$	0.892	1.087	1.552	$B_{III}(4.2329; 4.5369; 10.8807; 4.6551; 0.082)$
$\theta_1$	1.743	2.309	3.704	$B_{III}(4.1703; 2.3363; 42.0833; 12.6019; 0.088)$
$\theta_2$	1.707	2.275	3.667	$B_{III}(2.6348; 1.9774; 21.3842; 7.75; 0.125)$
$\theta_3$	0.952	1.161	1.648	$B_{III}(3.5597; 4.9656; 11.4180; 6.5202; 0.092)$
$\theta_0, \theta_1$	0.630	0.750	1.032	$B_{III}(4.0891; 5.9708; 9.6497; 4.0000; 0.082)$
$\theta_0, \theta_2$	0.576	0.689	0.961	$B_{III}(5.5368; 4.9114; 13.1278; 3.0625; 0.07)$
$\theta_0, \theta_3$	0.737	0.920	1.386	$B_{III}(5.6629; 3.4912; 25.1600; 4.5052; 0.07)$
$\theta_1, \theta_2$	1.666	2.232	3.627	$B_{III}(3.8896; 1.6253; 31.1820; 5.80; 0.09)$
$\theta_1, \theta_3$	0.694	0.842	1.200	$B_{III}(4.6199; 5.2874; 19.2708; 6.5610; 0.074)$
$\theta_2, \theta_3$	0.642	0.935	1.140	$B_{III}(4.4276; 4.30288; 14.6688; 3.7865; 0.08)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.518	0.627	0.898	$B_{III}(5.5158; 4.3512; 14.7750; 2.6199; 0.067)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_3$	0.454	0.536	0.733	$B_{III}(5.3306; 5.8858; 10.7581; 2.5087; 0.065)$
$\theta_0, \theta_2, \theta_3$	0.395	0.459	0.606	$B_{III}(5.7098; 6.8325; 7.9837; 1.8803; 0.06)$
$\theta_1, \theta_2, \theta_3$	0.585	0.729	1.087	$B_{III}(5.1840; 3.2993; 19.3614; 2.7865; 0.073)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$	0.329	0.378	0.488	$B_{III}(7.1015; 5.8708; 7.1323; 1.0517; 0.05)$

Таблица В.24

**Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистики критерия Колмогорова при проверке гипотез относительно гамма-распределения при использовании ОМП**

Значение параметра формы	Оцениваемые параметры	Пропентные точки		Модель
		0,9	0,95	
<b>0,3</b>	Масштаба	1,096	1,211	1,444 $B_{III}(6,6871; 4,8368; 4,4047; 1,9440; 0,281)$
	Формы	0,976	1,070	1,262 $B_{III}(6,4536; 5,7519; 3,3099; 1,6503; 0,280)$
	Два параметра	0,905	0,990	1,162 $B_{III}(6,9705; 5,6777; 3,6297; 1,5070; 0,270)$
	Масштаба	1,051	1,160	1,379 $B_{III}(6,9356; 5,0081; 4,3582; 1,8470; 0,280)$
<b>0,5</b>	Формы	0,961	1,052	1,236 $B_{III}(6,3860; 5,9685; 3,1228; 1,6154; 0,280)$
	Два параметра	0,884	0,965	1,131 $B_{III}(6,4083; 5,9339; 3,2063; 1,4483; 0,2774)$
	Масштаба	0,994	1,095	1,299 $B_{III}(6,7187; 5,3740; 3,7755; 1,6875; 0,282)$
	Формы	0,936	1,022	1,191 $B_{III}(6,1176; 6,4704; 2,6933; 1,5501; 0,280)$
<b>1,0</b>	Два параметра	0,862	0,940	1,097 $B_{III}(5,6031; 6,1293; 2,7065; 1,3607; 0,2903)$
	Масштаба	0,952	1,044	1,228 $B_{III}(5,8359; 22,6032; 2,1921; 4,00; 0,282)$
	Формы	0,915	0,995	1,155 $B_{III}(6,1387; 6,5644; 2,6021; 1,4840; 0,280)$
	Два параметра	0,849	0,924	1,077 $B_{III}(5,8324; 6,1446; 2,7546; 1,3280; 0,2862)$
<b>3,0</b>	Масштаба	0,933	1,020	1,200 $B_{III}(5,9055; 24,4312; 2,0996; 4,00; 0,282)$
	Формы	0,906	0,985	1,140 $B_{III}(6,1221; 6,6131; 2,5536; 1,4590; 0,280)$
	Два параметра	0,845	0,919	1,070 $B_{III}(6,0393; 6,1276; 2,8312; 1,3203; 0,2827)$
	Масштаба	0,923	1,008	1,181 $B_{III}(5,9419; 27,1264; 1,9151; 4,00; 0,282)$
<b>4,0</b>	Формы	0,901	0,980	1,132 $B_{III}(6,0827; 6,7095; 2,4956; 1,4494; 0,280)$
	Два параметра	0,843	0,916	1,066 $B_{III}(6,1584; 6,1187; 2,8748; 1,3170; 0,2807)$
	Масштаба	0,917	1,000	1,170 $B_{III}(5,8774; 30,0692; 1,7199; 4,00; 0,282)$
	Формы	0,899	0,977	1,127 $B_{III}(6,0887; 6,7265; 2,4894; 1,4432; 0,280)$
<b>5,0</b>	Два параметра	0,842	0,915	1,063 $B_{III}(6,1957; 6,1114; 2,8894; 1,3140; 0,2801)$

**Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистики критерия Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке гипотез относительно гамма-распределения при использовании ОМП**

Значение параметра формы	Оцениваемые параметры	Пропорциональные точки			Модель
		0,9	0,95	0,99	
<b>0,3</b>	Масштаба	0,233	0,305	0,482	$B_{\text{III}}(3,2722; 1,9595; 16,1768; 0,750; 0,013)$
	Формы	0,166	0,209	0,316	$B_{\text{III}}(3,0247; 3,2256; 11,113; 0,7755; 0,0125)$
<b>0,5</b>	Два параметра	0,127	0,158	0,233	$B_{\text{III}}(2,3607; 4,0840; 7,0606; 0,6189; 0,0145)$
	Масштаба	0,205	0,264	0,413	$B_{\text{III}}(3,2296; 2,1984; 14,3153; 0,700; 0,013)$
<b>1,0</b>	Формы	0,159	0,199	0,298	$B_{\text{III}}(3,0143; 3,3504; 10,095; 0,7214; 0,0125)$
	Два параметра	0,119	0,146	0,212	$B_{\text{III}}(2,7216; 3,9844; 7,4993; 0,5372; 0,013)$
<b>2,0</b>	Масштаба	0,175	0,220	0,336	$B_{\text{III}}(3,1201; 2,5460; 11,1200; 0,600; 0,013)$
	Формы	0,149	0,186	0,273	$B_{\text{III}}(2,9928; 3,4716; 8,8275; 0,6346; 0,0125)$
<b>3,0</b>	Два параметра	0,111	0,136	0,194	$B_{\text{III}}(3,0000; 3,8959; 7,3247; 0,4508; 0,012)$
	Масштаба	0,155	0,193	0,288	$B_{\text{III}}(2,9463; 3,1124; 9,1160; 0,600; 0,013)$
<b>4,0</b>	Формы	0,142	0,176	0,256	$B_{\text{III}}(2,9909; 3,5333; 8,2010; 0,5786; 0,0125)$
	Два параметра	0,107	0,131	0,185	$B_{\text{III}}(3,0533; 3,9402; 7,1173; 0,4246; 0,0118)$
<b>5,0</b>	Масштаба	0,148	0,184	0,272	$B_{\text{III}}(2,8840; 3,3796; 8,4342; 0,600; 0,013)$
	Формы	0,139	0,172	0,251	$B_{\text{III}}(2,9737; 3,5528; 7,8843; 0,5549; 0,0125)$
	Два параметра	0,106	0,129	0,182	$B_{\text{III}}(3,0703; 3,9618; 7,034; 0,4163; 0,0117)$
	Масштаба	0,145	0,179	0,264	$B_{\text{III}}(2,8522; 3,5285; 8,1044; 0,600; 0,013)$
	Формы	0,138	0,171	0,248	$B_{\text{III}}(2,9677; 3,5426; 7,7632; 0,5418; 0,0125)$
	Два параметра	0,105	0,128	0,180	$B_{\text{III}}(3,0967; 3,9539; 7,064; 0,4122; 0,0116)$
	Масштаба	0,142	0,176	0,259	$B_{\text{III}}(2,8249; 3,6280; 7,8756; 0,6000; 0,013)$
	Формы	0,137	0,169	0,246	$B_{\text{III}}(2,9638; 3,5465; 7,6558; 0,5334; 0,0125)$
	Два параметра	0,105	0,128	0,179	$B_{\text{III}}(4,4332; 3,6256; 10,552; 0,4098; 0,0084)$

Таблица В.26

**Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистики критерия Андерсона-Дарлинга при проверке гипотез относительно гамма-распределения при использовании ОМП**

Значение параметра формы	Оцениваемые параметры	Пропентные точки			Модель
		0.9	0.95	0.99	
<b>0.3</b>	Масштаба	1.300	1.655	2.543	$B_{III}(3.3848; 2.8829; 14.684; 6.0416; 0.1088)$
	Формы	1.021	1.258	1.865	$B_{III}(3.1073; 3.7039; 8.6717; 4.3439; 0.1120)$
	Два параметра	0.718	0.870	1.233	$B_{III}(4.5322; 4.060; 10.0718; 2.9212; 0.078)$
	Масштаба	1.183	1.490	2.260	$B_{III}(5.0045; 2.9358; 18.8524; 5.2436; 0.077)$
<b>0.5</b>	Формы	0.993	1.221	1.791	$B_{III}(3.1104; 3.7292; 8.0678; 4.0132; 0.1120)$
	Два параметра	0.684	0.824	1.145	$B_{III}(5.0079; 4.056; 10.0292; 2.5872; 0.073)$
	Масштаба	1.058	1.313	1.955	$B_{III}(5.0314; 3.1848; 15.4626; 4.3804; 0.077)$
	Формы	0.952	1.166	1.696	$B_{III}(3.1149; 3.7919; 7.4813; 3.6770; 0.1120)$
<b>1.0</b>	Два параметра	0.657	0.785	1.084	$B_{III}(5.0034; 4.1093; 9.1610; 2.3427; 0.073)$
	Масштаба	0.980	1.203	1.771	$B_{III}(4.9479; 3.3747; 13.0426; 3.8304; 0.077)$
	Формы	0.922	1.125	1.625	$B_{III}(3.0434; 4.1620; 7.1516; 3.8500; 0.1120)$
	Два параметра	0.643	0.766	1.051	$B_{III}(4.9237; 4.2091; 8.6643; 2.2754; 0.073)$
<b>3.0</b>	Масштаба	0.952	1.163	1.702	$B_{III}(5.0367; 3.4129; 12.9013; 3.6867; 0.077)$
	Формы	0.912	1.110	1.601	$B_{III}(3.0565; 3.9092; 6.7844; 3.3972; 0.1120)$
	Два параметра	0.639	0.761	1.043	$B_{III}(4.9475; 4.2070; 8.6686; 2.2512; 0.073)$
	Масштаба	0.937	1.141	1.662	$B_{III}(4.9432; 3.5038; 12.2240; 3.6302; 0.077)$
<b>4.0</b>	Формы	0.906	1.103	1.590	$B_{III}(3.0531; 3.9437; 6.7619; 3.3993; 0.1120)$
	Два параметра	0.637	0.758	1.039	$B_{III}(4.9274; 4.2279; 8.5573; 2.2390; 0.073)$
	Масштаба	0.927	1.130	1.640	$B_{III}(4.8810; 3.5762; 11.7894; 3.6051; 0.077)$
	Формы	0.902	1.099	1.586	$B_{III}(3.0502; 3.9640; 6.7510; 3.4024; 0.1120)$
<b>5.0</b>	Два параметра	0.636	0.757	1.037	$B_{III}(4.9207; 4.2432; 8.4881; 2.2314; 0.073)$

Таблица В.27

**Аппроксимация предельных распределений статистики Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия и проверке соглашения с гамма-распределением**

Значение параметра формы	При оценивании		Других параметров
	Только масштабного параметра	Только параметра формы	
<b>0.3</b>	Su(-3.1901; 1.1381; 0.1399; 0.0081)	Su(-2.8117; 1.3517; 0.2973; 0.1474)	Su(-2.4288; 1.2878; 0.2749; 0.2074)
<b>0.5</b>	Su(-2.8625; 1.1796; 0.2003; 0.079)	Su(-2.8816; 1.4625; 0.3377; 0.1280)	Su(-2.4027; 1.3861; 0.3389; 0.2290) ln N(-0.1506; 0.6511)
<b>1.0</b>	ln N(0.2062; 0.7337) Su(-2.5635; 1.2797; 0.2922; 0.1584)	Su(-2.5861; 1.4818; 0.4130; 0.174)	Su(-2.2666; 1.3824; 0.3515; 0.2731)
<b>2.0</b>	Su(-2.5372; 1.3749; 0.3464; 0.2162)	Su(-2.3222; 1.4442; 0.4335; 0.2845)	Su(-2.2109; 1.3527; 0.3317; 0.3149)
<b>3.0</b>	Su(-2.3014; 1.3875; 0.3991; 0.2750)	Su(-2.3895; 1.4817; 0.4344; 0.2824)	Su(-2.4295; 1.4110; 0.3163; 0.2784)
<b>4.0</b>	Su(-2.3759; 1.4418; 0.4149; 0.2480)	Su(-2.2574; 1.4921; 0.4694; 0.3216)	Su(-2.4153; 1.4306; 0.3318; 0.2604)
<b>5.0</b>	Su(-2.4574; 1.4599; 0.3976; 0.2712)	Su(-2.2611; 1.4644; 0.4393; 0.3231)	Su(-2.1345; 1.3945; 0.3655; 0.3263)

Таблица В.28

**Процентные точки распределения статистики Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия и проверке гипотезы о согласии с гамма-распределением**

Значение параметра формы	Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
		0.9	0.95	0.99
0.3	Масштабный	3.564	4.903	8.917
	Формы	3.211	4.160	6.797
	Два параметра	2.651	3.452	5.722
0.5	Масштабный	3.436	4.649	8.226
	Формы	3.027	3.850	6.066
	Два параметра	2.635	3.362	5.361
1.0	Масштабный	3.147	4.108	6.774
	Формы	2.967	3.751	5.851
	Два параметра	2.548	3.239	5.140
2.0	Масштабный	2.990	3.835	6.165
	Формы	2.895	3.651	5.694
	Два параметра	2.495	3.174	5.056
3.0	Масштабный	2.900	3.693	5.873
	Формы	2.852	3.575	5.511
	Два параметра	2.461	3.108	4.874
4.0	Масштабный	2.853	3.608	5.651
	Формы	2.815	3.513	5.377
	Два параметра	2.446	3.085	4.818
5.0	Масштабный	2.830	3.561	5.530
	Формы	2.772	3.471	5.351
	Два параметра	2.428	3.061	4.797

Таблица В.29

**Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно двустороннего экспоненциального распределения (3.27) в случае использования ОМП при значении параметра формы  $\theta_0 = 0.5$**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
<b>Для критерия Колмогорова</b>				
$\theta_0$	1.184	1.322	1.596	$\gamma(3.7437; 0.1349; 0.325)$
$\theta_1$	1.165	1.303	1.578	$\gamma(3.5811; 0.1366; 0.325)$
$\theta_2$	1.182	1.308	1.560	$\gamma(4.4361; 0.1186; 0.320)$
$\theta_0, \theta_1$	1.123	1.259	1.534	$\gamma(3.1115; 0.1442; 0.330)$
$\theta_0, \theta_2$	1.144	1.271	1.528	$\gamma(3.8417; 0.1265; 0.322)$
$\theta_1, \theta_2$	1.110	1.233	1.480	$\gamma(3.6713; 0.1251; 0.326)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	1.129	1.255	1.508	$B_{III}(4.4961; 5.7241; 3.1229; 2.26825; 0.306)$
<b>Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова</b>				
$\theta_0$	0.325	0.441	0.723	$B_{III}(2.6596; 1.5374; 22.6346; 1.100; 0.015)$
$\theta_1$	0.321	0.435	0.718	$B_{III}(2.3196; 1.5425; 22.7256; 1.2000; 0.016)$
$\theta_2$	0.318	0.421	0.676	$B_{III}(2.8412; 1.9552; 17.4052; 1.200; 0.014)$
$\theta_0, \theta_1$	0.313	0.428	0.711	$B_{III}(1.6693; 1.3771; 15.5765; 0.940; 0.017)$
$\theta_0, \theta_2$	0.300	0.405	0.664	$B_{III}(2.4600; 1.7966; 19.8161; 1.20; 0.014)$
$\theta_1, \theta_2$	0.286	0.388	0.637	$B_{III}(3.8085; 1.5324; 32.1564; 0.950; 0.011)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.295	0.399	0.656	$B_{III}(3.0778; 1.6214; 30.1798; 1.2; 0.013)$
<b>Для критерия Андерсона–Дарлинга</b>				
$\theta_0$	1.735	2.303	3.697	$B_{III}(5.1673; 1.7964; 33.1733; 6.000; 0.088)$
$\theta_1$	1.718	2.286	3.676	$B_{III}(5.3595; 1.7388; 37.1241; 6.000; 0.087)$
$\theta_2$	1.819	2.335	3.617	$B_{III}(3.4953; 2.2898; 14.9125; 6.400; 0.116)$
$\theta_0, \theta_1$	1.671	2.238	3.633	$B_{III}(5.786; 1.500; 45.3895; 5.200; 0.08)$
$\theta_0, \theta_2$	1.631	2.159	3.454	$B_{III}(3.1191; 2.0392; 20.4775; 6.600; 0.116)$
$\theta_1, \theta_2$	1.578	2.093	3.356	$B_{III}(3.0953; 2.0351; 22.1953; 6.800; 0.118)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	1.608	2.132	3.416	$B_{III}(4.5039; 2.0396; 37.0448; 8.000; 0.092)$

Таблица В.30

**Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно двустороннего экспоненциального распределения (3.27) в случае использования ОМП при значении параметра формы  $\theta_0 = 0.75$**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
<i>Для критерия Колмогорова</i>				
$\theta_0$	1.196	1.333	1.605	$\gamma(3.7808; 0.1349; 0.330)$
$\theta_1$	1.172	1.309	1.584	$B_{III}(4.5525; 4.9086; 3.8651; 2.3718; 0.315)$
$\theta_2$	1.068	1.173	1.384	$B_{III}(4.7066; 10.8120; 1.8954; 2.50; 0.302)$
$\theta_0, \theta_1$	1.126	1.263	1.560	$B_{III}(4.0450; 4.9340; 3.7586; 2.3832; 0.310)$
$\theta_0, \theta_2$	1.021	1.123	1.328	$B_{III}(4.9912; 6.4499; 2.6816; 1.90; 0.295)$
$\theta_1, \theta_2$	0.985	1.084	1.283	$B_{III}(5.5451; 7.3578; 3.0559; 2.100; 0.280)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.937	1.032	1.223	$B_{III}(4.5753; 6.8907; 2.74626; 1.8903; 0.294)$
<i>Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова</i>				
$\theta_0$	0.329	0.4440	0.726	$B_{III}(4.9844; 1.4891; 37.5211; 1.001; 0.0085)$
$\theta_1$	0.322	0.437	0.719	$B_{III}(6.1042; 1.2892; 53.3676; 0.8800; 0.009)$
$\theta_2$	0.226	0.289	0.443	$B_{III}(3.5628; 2.6431; 16.5587; 1.030; 0.010)$
$\theta_0, \theta_1$	0.313	0.428	0.711	$B_{III}(1.6779; 1.3775; 15.6587; 0.940; 0.017)$
$\theta_0, \theta_2$	0.202	0.265	0.420	$B_{III}(2.5230; 2.8292; 19.5602; 1.4650; 0.014)$
$\theta_1, \theta_2$	0.192	0.255	0.408	$B_{III}(2.6652; 2.4143; 24.7681; 1.300; 0.013)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.184	0.248	0.404	$B_{III}(3.2636; 1.7846; 29.6713; 0.800; 0.0118)$
<i>Для критерия Андерсона–Дарлинга</i>				
$\theta_0$	1.755	2.322	3.715	$B_{III}(5.5017; 1.7097; 32.6151; 5.4000; 0.09)$
$\theta_1$	1.721	2.290	3.681	$B_{III}(5.7288; 1.7042; 38.1627; 5.700; 0.085)$
$\theta_2$	1.422	1.779	2.626	$B_{III}(3.1406; 2.9653; 10.3579; 5.500; 0.12)$
$\theta_0, \theta_1$	1.669	2.236	3.632	$B_{III}(5.7330; 1.5217; 44.0784; 5.200; 0.078)$
$\theta_0, \theta_2$	1.208	1.553	2.410	$B_{III}(5.9765; 2.6769; 32.3123; 6.400; 0.070)$
$\theta_1, \theta_2$	1.166	1.509	2.362	$B_{III}(6.5437; 2.5007; 38.5262; 6.000; 0.07)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	1.116	1.465	2.322	$B_{III}(6.2120; 2.1027; 40.3780; 4.800; 0.075)$

Таблица В.31

**Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно двустороннего экспоненциального распределения (3.27) в случае использования ОМП при значении параметра формы  $\theta_0 = 1$**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
<i>Для критерия Колмогорова</i>				
$\theta_0$	1.204	1.340	1.613	$\gamma(3.9433; 0.1340; 0.3200)$
$\theta_1$	1.177	1.313	1.587	$B_{III}(4.4680; 4.8450; 3.9105; 2.3784; 0.324)$
$\theta_2$	0.957	1.045	1.223	$B_{III}(5.3541; 7.2519; 2.5630; 1.7652; 0.302)$
$\theta_0, \theta_1$	1.1300	1.268	1.545	$B_{III}(3.9724; 4.8877; 3.7872; 2.3973; 0.3150)$
$\theta_0, \theta_2$	0.911	0.995	1.162	$B_{III}(4.9365; 8.1400; 2.2383; 1.7312; 0.3)$
$\theta_1, \theta_2$	0.863	0.940	1.095	$\gamma(6.2949; 0.0624; 0.2613)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.798	0.870	1.014	$\gamma(5.5391; 0.0606; 0.2700)$
<i>Для критерия Крамера–Мизесса–Смирнова</i>				
$\theta_0$	0.333	0.447	0.7295	$B_{III}(2.8981; 1.5614; 20.0694; 1.00; 0.014)$
$\theta_1$	0.323	0.438	0.719	$B_{III}(3.9800; 1.4667; 38.0035; 1.13; 0.0111)$
$\theta_2$	0.152	0.187	0.268	$B_{III}(3.3130; 3.8338; 10.0967; 0.7517; 0.011)$
$\theta_0, \theta_1$	0.313	0.428	0.711	$B_{III}(3.7712; 1.1413; 38.6694; 0.790; 0.011)$
$\theta_0, \theta_2$	0.131	0.162	0.234	$B_{III}(3.9062; 3.9000; 13.5396; 0.7491; 0.009)$
$\theta_1, \theta_2$	0.115	0.144	0.213	$B_{III}(4.4891; 3.7706; 17.5774; 0.7065; 0.0085)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.103	0.132	0.207	$B_{III}(5.2856; 3.0510; 34.1638; 0.7312; 0.0079)$
<i>Для критерия Андерсона–Дарлинга</i>				
$\theta_0$	1.775	2.342	3.734	$B_{III}(2.9208; 2.5613; 25.6028; 12.5850; 0.117)$
$\theta_1$	1.725	2.290	3.685	$B_{III}(4.0842; 1.7532; 28.1434; 6.00; 0.105)$
$\theta_2$	1.071	1.302	1.837	$B_{III}(4.2270; 3.0430; 8.4289; 3.000; 0.09)$
$\theta_0, \theta_1$	1.668	2.235	3.630	$B_{III}(3.7352; 1.5349; 29.4582; 5.300; 0.098)$
$\theta_0, \theta_2$	0.871	1.062	1.522	$B_{III}(4.8431; 4.1424; 14.2651; 4.6769; 0.073)$
$\theta_1, \theta_2$	0.798	0.982	1.439	$B_{III}(5.3576; 3.8690; 17.2148; 4.2386; 0.073)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.726	1.116	1.394	$B_{III}(5.2973; 3.3781; 27.5085; 4.8145; 0.073)$

Таблица В.32

**Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно двустороннего экспоненциального распределения (3.27) в случае использования ОМП при значении параметра формы  $\theta_0 = 1.6$**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
<i>Для критерия Колмогорова</i>				
$\theta_0$	1.216	1.351	1.621	$B_{III}(4.2366; 5.7254; 2.8969; 2.4200; 0.330)$
$\theta_1$	1.185	1.322	1.596	$B_{III}(4.3698; 5.2853; 3.3545; 2.3863; 0.318)$
$\theta_2$	0.851	0.923	1.069	$B_{III}(5.4129; 7.6381; 2.1289; 1.3936; 0.290)$
$\theta_0, \theta_1$	1.141	1.280	1.557	$B_{III}(4.9730; 4.5743; 4.6422; 2.3576; 0.29)$
$\theta_0, \theta_2$	0.828	0.898	1.039	$B_{III}(6.2506; 7.4916; 2.5914; 1.4130; 0.275)$
$\theta_1, \theta_2$	0.770	0.831	0.953	$B_{III}(5.3623; 7.3149; 2.1379; 1.1702; 0.29))$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.704	0.759	0.873	$B_{III}(7.4853; 7.2752; 3.2095; 1.14609; 0.260)$
<i>Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова</i>				
$\theta_0$	0.339	0.453	0.735	$Sb(3.6139; 1.0337; 3.400; 0.013)$
$\theta_1$	0.325	0.440	0.723	$Sb(2.7348; 0.9148; 1.800; 0.016)$
$\theta_2$	0.121	0.149	0.219	$B_{III}(4.5239; 3.7332; 15.6889; 0.6596; 0.009)$
$\theta_0, \theta_1$	0.314	0.429	0.711	$Sb(2.3111; 0.8115; 1.350; 0.016)$
$\theta_0, \theta_2$	0.109	0.134	0.194	$B_{III}(4.2190; 3.9949; 12.6139; 0.5642; 0.0087)$
$\theta_1, \theta_2$	0.087	0.104	0.143	$B_{III}(4.5491; 4.8658; 9.0448; 0.4000; 0.008)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.069	0.083	0.118	$B_{III}(6.8750; 4.6392; 18.020; 0.3937; 0.006)$
<i>Для критерия Андерсона–Дарлинга</i>				
$\theta_0$	1.819	2.383	3.774	$B_{III}(3.7982; 2.4042; 26.2612; 10.00; 0.095)$
$\theta_1$	1.735	2.304	3.697	$B_{III}(3.6908; 2.1990; 32.1310; 10.00; 0.10)$
$\theta_2$	0.864	1.052	1.513	$B_{III}(4.0782; 5.1594; 17.0570; 7.900; 0.09)$
$\theta_0, \theta_1$	1.669	2.235	3.630	$B_{III}(4.6625; 1.4267; 33.5120; 4.500; 0.09)$
$\theta_0, \theta_2$	0.716	0.863	1.207	$B_{III}(4.5576; 4.2326; 10.9573; 3.23142; 0.08)$
$\theta_1, \theta_2$	0.589	0.695	0.941	$B_{III}(4.5825; 5.3012; 7.9243; 2.5555; 0.0775)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.492	0.587	0.819	$B_{III}(5.08840; 5.2459; 10.6760; 2.4738; 0.068)$

Таблица В.33

**Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно двустороннего экспоненциального распределения (3.27) в случае использования ОМП при значении параметра формы  $\theta_0 = 2$**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
<i>Для критерия Колмогорова</i>				
$\theta_0$	1.219	1.354	1.624	$B_{III}(4.6934; 5.6544; 3.0971; 2.4099; 0.315)$
$\theta_1$	1.190	1.327	1.600	$B_{III}(4.8849; 5.2341; 3.6279; 2.3872; 0.303)$
$\theta_2$	0.888	0.963	1.114	$B_{III}(5.2604; 7.4327; 2.1872; 1.4774; 0.30)$
$\theta_0, \theta_1$	1.148	1.287	1.564	$B_{III}(4.6127; 4.8440; 4.1337; 2.4080; 0.295)$
$\theta_0, \theta_2$	0.880	0.956	1.108	$B_{III}(5.7052; 7.2179; 2.5877; 1.5433; 0.29)$
$\theta_1, \theta_2$	0.835	0.909	1.057	$\gamma(6.4721; 0.0580; 0.2620)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.784	0.861	1.021	$B_{III}(9.3597; 5.7532; 5.8275; 1.4507; 0.2500)$
<i>Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова</i>				
$\theta_0$	0.341	0.456	0.737	$Sb(2.7740; 0.9495; 1.9000; 0.0170)$
$\theta_1$	0.327	0.442	0.725	$Sb(3.3182; 0.94801; 2.9500; 0.016)$
$\theta_2$	0.134	0.165	0.238	$B_{III}(4.4331; 3.6365; 13.9198; 0.6632; 0.0084)$
$\theta_0, \theta_1$	0.315	0.430	0.712	$Sb(2.2458; 0.7970; 1.300; 0.017)$
$\theta_0, \theta_2$	0.127	0.156	0.225	$B_{III}(4.0430; 3.72568; 12.5794; 0.6313; 0.0087)$
$\theta_1, \theta_2$	0.103	0.126	0.178	$B_{III}(4.1153; 4.1748; 11.0347; 0.5116; 0.009)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.086	0.107	0.161	$B_{III}(6.7594; 3.8575; 28.6668; 0.5921; 0.006)$
<i>Для критерия Андерсона–Дарлинга</i>				
$\theta_0$	1.842	2.404	3.796	$B_{III}(3.0026; 2.7848; 21.7432; 12.5565; 0.111)$
$\theta_1$	1.743	2.309	3.704	$B_{III}(3.4638; 2.3300; 35.7115; 12.6033; 0.105)$
$\theta_2$	0.892	1.087	1.552	$B_{III}(4.1081; 5.0598; 16.9721; 7.9065; 0.09)$
$\theta_0, \theta_1$	1.672	2.237	3.632	$B_{III}(4.2125; 1.5874; 32.6127; 5.500; 0.09)$
$\theta_0, \theta_2$	0.779	0.945	1.335	$B_{III}(4.6827; 3.7977; 12.6413; 3.4486; 0.08)$
$\theta_1, \theta_2$	0.630	0.750	1.032	$B_{III}(4.7262; 4.6575; 9.4958; 2.7171; 0.0775)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.529	0.640	0.919	$B_{III}(4.3857; 5.7110; 17.3440; 5.0052; 0.075)$

Таблица В.34

**Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно двустороннего экспоненциального распределения (3.27) в случае использования ОМП при значении параметра формы  $\theta_0 = 3$**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
Для критерия Колмогорова				
$\theta_0$	1.222	1.357	1.626	$B_{III}(6.5249; 5.0755; 4.5306; 2.4069; 0.285)$
$\theta_1$	1.197	1.334	1.606	$B_{III}(5.2350; 5.0903; 3.9316; 2.3905; 0.300)$
$\theta_2$	0.998	1.095	1.291	$B_{III}(8.5402; 6.1019; 4.4047; 1.8871; 0.250)$
$\theta_0, \theta_1$	1.161	1.301	1.577	$B_{III}(5.5689; 4.6553; 4.9339; 2.4147; 0.280)$
$\theta_0, \theta_2$	0.999	1.096	1.293	$B_{III}(6.5008; 7.8186; 3.25827; 2.1735; 0.270)$
$\theta_1, \theta_2$	0.970	1.069	1.269	$B_{III}(6.8503; 6.2212; 3.9819; 1.9216; 0.265)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.936	1.039	1.247	$\gamma(3.6025; 0.10128; 0.3125)$
Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова				
$\theta_0$	0.345	0.459	0.741	$B_{III}(3.2178; 1.6133; 19.2436; 1.000; 0.0125)$
$\theta_1$	0.330	0.445	0.727	$B_{III}(3.6534; 1.5249; 28.5258; 1.0550; 0.0117)$
$\theta_2$	0.179	0.224	0.329	$B_{III}(3.6203; 2.6395; 11.3638; 0.600; 0.010)$
$\theta_0, \theta_1$	0.317	0.432	0.715	$B_{III}(6.6688; 1.2016; 63.6672; 0.830; 0.008)$
$\theta_0, \theta_2$	0.177	0.222	0.329	$B_{III}(3.5065; 2.5837; 11.5972; 0.600; 0.010)$
$\theta_1, \theta_2$	0.154	0.196	0.299	$B_{III}(3.7581; 2.3887; 13.3525; 0.500; 0.010)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.138	0.181	0.289	$Sl(1.1736; 1.2083; 0.1163; 0.0103)$
Для критерия Андерсона–Дарлинга				
$\theta_0$	1.881	2.441	3.835	$B_{III}(3.7511; 2.3357; 19.6979; 8.0000; 0.095)$
$\theta_1$	1.757	2.324	3.718	$B_{III}(4.1218; 2.1349; 30.0763; 8.500; 0.094)$
$\theta_2$	1.049	1.282	1.823	$B_{III}(4.6108; 3.3193; 12.0931; 4.0000; 0.079)$
$\theta_0, \theta_1$	1.679	2.245	3.638	$B_{III}(6.0616; 1.6126; 47.4733; 5.800; 0.074)$
$\theta_0, \theta_2$	0.989	1.215	1.741	$B_{III}(4.7371; 3.2610; 13.7406; 4.0000; 0.070)$
$\theta_1, \theta_2$	0.819	1.009	1.472	$B_{III}(5.2098; 3.5915; 16.7524; 4.0000; 0.070)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.716	0.908	1.391	$B_{III}(5.9548; 2.9777; 28.5342; 3.800; 0.069)$

Таблица В.35

**Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно двустороннего экспоненциального распределения (3.27) в случае использования ОМП при значении параметра формы  $\theta_0 = 4$**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
<i>Для критерия Колмогорова</i>				
$\theta_0$	1.223	1.358	1.626	$B_{III}(3.6243; 5.3291; 2.4503; 2.1853; 0.36)$
$\theta_1$	1.202	1.338	1.610	$B_{III}(4.4775; 5.7536; 2.9612; 2.4028; 0.31)$
$\theta_2$	1.060	1.169	1.388	$B_{III}(3.8031; 7.8639; 1.9955; 2.1337; 0.34)$
$\theta_0, \theta_1$	1.172	1.311	1.586	$B_{III}(2.6607; 6.1554; 2.0175; 2.4197; 0.364)$
$\theta_0, \theta_2$	1.061	1.170	1.389	$B_{III}(4.1178; 7.0193; 2.3554; 2.1116; 0.330)$
$\theta_1, \theta_2$	1.039	1.150	1.372	$B_{III}(4.4530; 6.5204; 2.8504; 2.1247; 0.315)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	1.013	1.126	1.353	$\gamma(3.5001; 0.1150; 0.3200)$
<i>Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова</i>				
$\theta_0$	0.346	0.460	0.742	$B_{III}(2.6493; 2.3780; 23.7392; 2.3027; 0.0133)$
$\theta_1$	0.332	0.447	0.729	$B_{III}(2.9074; 1.7706; 24.9344; 1.40; 0.0134)$
$\theta_2$	0.212	0.270	0.409	$B_{III}(3.2370; 2.7787; 15.5238; 1.05; 0.011)$
$\theta_0, \theta_1$	0.319	0.434	0.717	$B_{III}(2.8323; 1.4558; 24.26690; 1.0; 0.012)$
$\theta_0, \theta_2$	0.212	0.271	0.412	$B_{III}(2.9892; 2.7082; 14.1961; 1.0; 0.0117)$
$\theta_1, \theta_2$	0.193	0.250	0.390	$B_{III}(3.7333; 2.7350; 28.9872; 1.4094; 0.0094)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.178	0.236	0.381	$B_{III}(3.5304; 2.1937; 29.8592; 1.000; 0.01)$
<i>Для критерия Андерсона–Дарлинга</i>				
$\theta_0$	1.899	2.458	3.853	$B_{III}(2.7055; 3.0084; 16.8946; 12.5483; 0.12)$
$\theta_1$	1.771	2.338	3.729	$B_{III}(2.6333; 2.6314; 22.5692; 12.5941; 0.125)$
$\theta_2$	1.188	1.467	2.118	$B_{III}(2.7800; 5.1280; 11.7638; 10.5031; 0.11)$
$\theta_0, \theta_1$	1.687	2.255	3.648	$B_{III}(2.0354; 2.3209; 23.5136; 12.7679; 0.132)$
$\theta_0, \theta_2$	1.153	1.432	2.090	$B_{III}(3.6594; 3.4364; 13.5600; 5.9140; 0.084)$
$\theta_1, \theta_2$	0.985	1.239	1.862	$B_{III}(4.0113; 3.4057; 19.6395; 6.2684; 0.084)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.886	1.143	1.785	$B_{III}(4.1564; 2.7774; 30.5627; 6.0165; 0.0822)$

Таблица В.36

**Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно двустороннего экспоненциального распределения (3.27) в случае использования ОМП при значении параметра формы  $\theta_0 = 5$**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
Для критерия Колмогорова				
$\theta_0$	1.223	1.357	1.626	$B_{III}(3.4549; 6.2388; 2.0813; 2.300; 0.3600)$
$\theta_1$	1.205	1.342	1.613	$B_{III}(3.1581; 6.2159; 1.9964; 2.300; 0.360)$
$\theta_2$	1.097	1.212	1.443	$B_{III}(4.8171; 5.5295; 3.0757; 2.000; 0.320)$
$\theta_0, \theta_1$	1.179	1.318	1.593	$B_{III}(3.7224; 4.6425; 3.1224; 2.2000; 0.330)$
$\theta_0, \theta_2$	1.097	1.213	1.444	$B_{III}(4.9052; 5.6639; 2.9616; 2.0000; 0.310)$
$\theta_1, \theta_2$	1.080	1.196	1.429	$B_{III}(4.5122; 5.6639; 2.8588; 2.0000; 0.310)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	1.057	1.176	1.414	$B_{III}(3.5446; 6.6218; 2.5197; 2.2850; 0.325)$
Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова				
$\theta_0$	0.347	0.460	0.742	$B_{III}(3.3548; 1.7217; 20.2585; 1.1000; 0.012)$
$\theta_1$	0.334	0.448	0.731	$B_{III}(3.2927; 1.6388; 23.4040; 1.100; 0.012)$
$\theta_2$	0.236	0.303	0.469	$B_{III}(4.0012; 2.0310; 17.0057; 0.730; 0.0095)$
$\theta_0, \theta_1$	0.321	0.436	0.719	$B_{III}(4.0952; 1.3628; 33.3948; 0.900; 0.0095)$
$\theta_0, \theta_2$	0.236	0.304	0.470	$B_{III}(3.8227; 2.0270; 16.0637; 0.7200; 0.0095)$
$\theta_1, \theta_2$	0.219	0.287	0.453	$B_{III}(4.1888; 1.9896; 21.3460; 0.7450; 0.009)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.206	0.275	0.444	$B_{III}(4.5253; 1.7162; 31.4699; 0.715; 0.009)$
Для критерия Андерсона–Дарлинга				
$\theta_0$	1.908	2.467	3.861	$B_{III}(3.2750; 2.7257; 19.7022; 11.000; 0.105)$
$\theta_1$	1.782	2.349	3.740	$B_{III}(3.7185; 2.2262; 24.9194; 8.500; 0.10)$
$\theta_2$	1.292	1.608	2.358	$B_{III}(3.8528; 2.9989; 12.7999; 5.2000; 0.09)$
$\theta_0, \theta_1$	1.696	2.264	3.658	$B_{III}(3.9441; 1.9099; 34.2183; 8.000; 0.085)$
$\theta_0, \theta_2$	1.271	1.588	2.346	$B_{III}(3.6684; 3.0110; 13.4931; 5.550; 0.085)$
$\theta_1, \theta_2$	1.110	1.411	2.153	$B_{III}(4.1345; 3.0883; 22.0926; 6.800; 0.080)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	1.014	1.322	2.084	$B_{III}(4.3601; 2.6164; 38.0670; 7.4729; 0.0785)$

Таблица В.37

**Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно двустороннего экспоненциального распределения (3.27) в случае использования ОМП при значении параметра формы  $\theta_0 = 7$**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
<i>Для критерия Колмогорова</i>				
$\theta_0$	1.222	1.357	1.625	$B_{III}(3.4527; 6.2874; 2.062; 2.300; 0.3600)$
$\theta_1$	1.210	1.345	1.616	$B_{III}(3.1789; 6.3997; 1.9239; 2.300; 0.360)$
$\theta_2$	1.137	1.137	1.502	$B_{III}(4.4660; 5.47624; 2.6851; 2.000; 0.320)$
$\theta_0, \theta_1$	1.190	1.328	1.601	$B_{III}(3.8325; 4.7340; 3.0569; 2.2000; 0.330)$
$\theta_0, \theta_2$	1.137	1.259	1.503	$B_{III}(4.9890; 5.1511; 3.1470; 2.0000; 0.310)$
$\theta_1, \theta_2$	1.124	1.247	1.493	$B_{III}(4.5766; 5.2588; 2.9181; 2.0000; 0.310)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	1.107	1.232	1.480	$B_{III}(3.5462; 6.6218; 2.2864; 2.2850; 0.325)$
<i>Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова</i>				
$\theta_0$	0.347	0.460	0.742	$B_{III}(3.4065; 1.72170; 20.5769; 1.1000; 0.012)$
$\theta_1$	0.336	0.451	0.733	$B_{III}(3.3961; 1.6388; 23.7205; 1.100; 0.012)$
$\theta_2$	0.265	0.345	0.542	$B_{III}(4.0337; 1.7885; 18.1049; 0.730; 0.0095)$
$\theta_0, \theta_1$	0.325	0.440	0.722	$B_{III}(4.5574; 1.36280; 36.1643; 0.900; 0.0095)$
$\theta_0, \theta_2$	0.266	0.346	0.545	$B_{III}(4.1853; 1.7329; 19.4044; 0.7200; 0.0095)$
$\theta_1, \theta_2$	0.253	0.333	0.531	$B_{III}(4.3597; 1.7257; 23.2817; 0.7450; 0.009)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.241	0.323	0.522	$B_{III}(4.3835; 1.5744; 28.6719; 0.715; 0.009)$
<i>Для критерия Андерсона–Дарлинга</i>				
$\theta_0$	1.916	2.475	3.864	$B_{III}(3.3337; 2.7380; 19.7773; 11.000; 0.105)$
$\theta_1$	1.800	2.366	3.755	$B_{III}(3.7496; 2.2445; 24.3153; 8.500; 0.10)$
$\theta_2$	1.431	1.804	2.698	$B_{III}(3.9524; 2.6173; 14.0679; 5.2000; 0.09)$
$\theta_0, \theta_1$	1.714	2.282	3.674	$B_{III}(4.4259; 1.8843; 34.1400; 7.30; 0.085)$
$\theta_0, \theta_2$	1.419	1.793	2.697	$B_{III}(3.6688; 2.7003; 13.7324; 5.550; 0.085)$
$\theta_1, \theta_2$	1.279	1.644	2.539	$B_{III}(4.1773; 2.7020; 22.9667; 6.800; 0.080)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	1.188	1.560	2.470	$B_{III}(4.5480; 2.1191; 28.5121; 5.000; 0.0785)$

Таблица В.38

**Процентные точки и распределения статистики Колмогорова при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП двух параметров обратного гауссовского распределения**

$\theta_0$	$\theta_1$	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
1	1	0.910	0.998	1.180	$B_{III}(5.9569; 6.7824; 3.0220; 1.6782; 0.2806)$
1	2	0.957	1.055	1.264	$B_{III}(6.2372; 6.7506; 3.6809; 1.9867; 0.2800)$
1	3	0.997	1.105	1.342	$B_{III}(6.6946; 6.3716; 4.5298; 2.2117; 0.2775)$
1	4	1.034	1.151	1.400	$B_{III}(6.0585; 5.8419; 4.3611; 2.2007; 0.2883)$
1	5	1.066	1.189	1.450	$B_{III}(6.1201; 5.4407; 4.5330; 2.2010; 0.2880)$
1	6	1.094	1.221	1.489	$B_{III}(6.1759; 5.1904; 4.6124; 2.2013; 0.2878)$
1	7	1.121	1.250	1.525	$B_{III}(6.2265; 4.9927; 4.6521; 2.2018; 0.2873)$
1	8	1.143	1.273	1.548	$B_{III}(6.0718; 4.9852; 4.4776; 2.2284; 0.2896)$
1	9	1.159	1.292	1.565	$B_{III}(5.6511; 4.9390; 4.0653; 2.1915; 0.2975)$
1	10	1.172	1.306	1.577	$B_{III}(5.6247; 4.8832; 4.0106; 2.1894; 0.2995)$
2	1	0.882	0.964	1.137	$B_{III}(6.3443; 7.5748; 2.9473; 1.6876; 0.2713)$
2	2	0.917	1.006	1.199	$B_{III}(10.791; 6.9904; 5.6290; 1.9870; 0.2247)$
2	3	0.948	1.045	1.258	$B_{III}(5.0737; 7.2993; 2.9576; 1.9859; 0.3000)$
2	4	0.977	1.082	1.319	$B_{III}(5.4784; 7.0420; 3.5741; 2.2027; 0.2950)$
2	5	1.006	1.120	1.369	$B_{III}(5.9645; 6.1578; 4.3007; 2.2159; 0.2900)$
2	6	1.032	1.152	1.408	$B_{III}(7.6025; 5.4045; 5.7487; 2.2002; 0.2700)$
2	7	1.057	1.180	1.446	$B_{III}(7.9396; 5.1500; 6.0298; 2.2004; 0.2650)$
2	8	1.079	1.206	1.476	$B_{III}(5.9398; 5.1990; 4.6104; 2.2008; 0.2930)$
2	9	1.100	1.228	1.503	$B_{III}(5.7955; 5.1024; 4.4620; 2.2011; 0.2950)$
2	10	1.120	1.250	1.528	$B_{III}(5.9634; 4.9581; 4.5469; 2.1960; 0.2920)$
3	1	0.869	0.949	1.118	$B_{III}(6.3357; 7.5977; 2.8564; 1.6279; 0.2706)$
3	2	0.897	0.984	1.168	$B_{III}(6.5174; 7.4125; 3.2234; 1.7769; 0.2700)$
3	3	0.923	1.016	1.217	$B_{III}(12.343; 6.5394; 6.7642; 1.9877; 0.2179)$
3	4	0.947	1.046	1.269	$B_{III}(8.9671; 6.1291; 5.5576; 1.9890; 0.2500)$
3	5	0.971	1.078	1.318	$B_{III}(10.2720; 6.0888; 6.8884; 2.1989; 0.2400)$
3	6	0.997	1.110	1.361	$B_{III}(12.4552; 5.4731; 8.9051; 2.2027; 0.2300)$
3	7	1.019	1.137	1.395	$B_{III}(14.7050; 5.1363; 10.7535; 2.2125; 0.2200)$
3	8	1.040	1.162	1.429	$B_{III}(14.7958; 4.8912; 11.0081; 2.1998; 0.2200)$
3	9	1.061	1.187	1.457	$B_{III}(15.9316; 4.7067; 11.8935; 2.2001; 0.2150)$
3	10	1.079	1.208	1.478	$B_{III}(16.1109; 4.5707; 12.1176; 2.2003; 0.2150)$
4	1	0.862	0.941	1.107	$B_{III}(6.6438; 7.7673; 2.9294; 1.6332; 0.2653)$
4	2	0.885	0.969	1.149	$B_{III}(6.1888; 7.3858; 2.9758; 1.6875; 0.2750)$

Продолжение табл. В.38

$\theta_0$	$\theta_1$	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
4	3	0.907	0.997	1.189	$B_{III}(6.9205; 7.8981; 3.6110; 1.9962; 0.2650)$
4	4	0.928	1.023	1.234	$B_{III}(5.9780; 9.1512; 3.3926; 2.400; 0.2806)$
4	5	0.950	1.051	1.282	$B_{III}(11.9075; 5.7447; 7.5201; 1.9905; 0.2300)$
4	6	0.971	1.079	1.323	$B_{III}(11.9043; 5.8982; 8.1014; 2.2019; 0.2300)$
4	7	0.993	1.107	1.360	$B_{III}(16.9484; 5.3410; 11.9176; 2.1990; 0.2100)$
4	8	1.013	1.131	1.391	$B_{III}(17.0835; 5.1135; 12.3060; 2.2027; 0.2100)$
4	9	1.032	1.155	1.423	$B_{III}(17.3084; 4.8961; 12.7239; 2.1996; 0.2100)$
4	10	1.051	1.177	1.449	$B_{III}(17.2467; 4.7356; 12.8311; 2.1997; 0.2100)$
5	1	0.857	0.935	1.099	$B_{III}(6.7006; 7.8312; 2.9541; 1.6335; 0.2651)$
5	2	0.877	0.960	1.135	$B_{III}(9.00487; 6.9071; 4.2573; 1.6881; 0.2400)$
5	3	0.897	0.984	1.172	$B_{III}(8.9213; 7.7502; 4.5226; 2.0008; 0.2400)$
5	4	0.915	1.008	1.212	$B_{III}(9.4154; 6.9359; 5.2226; 1.9946; 0.2400)$
5	5	0.934	1.033	1.2518	$B_{III}(5.8431; 14.4730; 3.6811; 4.000; 0.2806)$
5	6	0.953	1.057	1.294	$B_{III}(14.8173; 5.6823; 9.4427; 2.0492; 0.2150)$
5	7	0.974	1.083	1.331	$B_{III}(15.2826; 5.6389; 10.5512; 2.2057; 0.2150)$
5	8	0.993	1.109	1.364	$B_{III}(20.7049; 5.2372; 14.5735; 2.200; 0.2000)$
5	9	1.011	1.130	1.392	$B_{III}(20.6647; 5.0521; 14.7877; 2.2001; 0.2000)$
5	10	1.029	1.152	1.421	$B_{III}(26.3791; 4.8072; 19.0811; 2.2027; 0.1900)$
6	1	0.854	0.932	1.093	$B_{III}(6.6964; 7.8242; 2.9493; 1.6287; 0.2640)$
6	2	0.871	0.953	1.126	$B_{III}(8.8962; 7.1069; 4.1210; 1.6892; 0.2400)$
6	3	0.888	0.974	1.159	$B_{III}(9.1443; 6.9243; 4.5492; 1.7798; 0.2400)$
6	4	0.906	0.996	1.193	$B_{III}(9.2454; 7.2428; 4.9786; 1.9991; 0.2400)$
6	5	0.923	1.018	1.228	$B_{III}(12.5264; 6.3510; 7.1854; 1.9935; 0.2200)$
6	6	0.940	1.041	1.269	$B_{III}(5.8883; 17.8508; 4.6295; 6.000; 0.2806)$
6	7	0.956	1.064	1.306	$B_{III}(18.3816; 5.8741; 11.9529; 2.2081; 0.2000)$
6	8	0.977	1.088	1.343	$B_{III}(23.3374; 5.4599; 15.6767; 2.2051; 0.1900)$
6	9	0.995	1.111	1.369	$B_{III}(34.6437; 5.1591; 23.3905; 2.2019; 0.1750)$
6	10	1.011	1.131	1.395	$B_{III}(39.1153; 4.9860; 26.4984; 2.1988; 0.1700)$
7	1	0.854	0.930	1.091	$B_{III}(6.5586; 8.0638; 2.8375; 1.6313; 0.2673)$
7	2	0.867	0.948	1.119	$B_{III}(7.1224; 7.6538; 3.2597; 1.6903; 0.2600)$
7	3	0.883	0.967	1.149	$B_{III}(7.2034; 7.5737; 3.4800; 1.7800; 0.2600)$
7	4	0.898	0.987	1.180	$B_{III}(7.3038; 7.9550; 3.8033; 2.0010; 0.2600)$
7	5	0.914	1.007	1.214	$B_{III}(8.5307; 6.9961; 4.8484; 1.9974; 0.2500)$
7	6	0.930	1.028	1.250	$B_{III}(15.1195; 5.9784; 8.9543; 1.9927; 0.2100)$
7	7	0.946	1.049	1.285	$B_{III}(5.8391; 17.5429; 4.6421; 6.000; 0.2806)$

Окончание табл. В.38

$\theta_0$	$\theta_1$	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
7	8	0.963	1.071	1.322	$B_{III}(31.3194; 5.6956; 19.4931; 2.2085; 0.1700)$
7	9	0.980	1.094	1.353	$B_{III}(42.2228; 5.0877; 30.0214; 2.2059; 0.1800)$
7	10	0.997	1.115	1.376	$B_{III}(42.3418; 5.0662; 28.8200; 2.2033; 0.1700)$
4	6	0.971	1.079	1.323	$B_{III}(11.9043; 5.8982; 8.1014; 2.2019; 0.2300)$
8	1	0.854	0.930	1.091	$B_{III}(6.7259; 7.9921; 2.8961; 1.6227; 0.2658)$
8	2	0.864	0.943	1.113	$B_{III}(13.28101; 6.7409; 6.0703; 1.6914; 0.2100)$
8	3	0.878	0.961	1.140	$B_{III}(13.1182; 6.5995; 6.1889; 1.7308; 0.2100)$
8	4	0.892	0.980	1.168	$B_{III}(12.8930; 7.2771; 6.5124; 2.0016; 0.2100)$
8	5	0.907	0.998	1.201	$B_{III}(14.5402; 6.6949; 7.78121; 2.0005; 0.2050)$
8	6	0.921	1.017	1.231	$B_{III}(17.0918; 6.1135; 9.7622; 1.9962; 0.2000)$
8	7	0.936	1.037	1.267	$B_{III}(21.3221; 5.5875; 13.0056; 1.9922; 0.1950)$
8	8	0.952	1.057	1.300	$B_{III}(5.8759; 19.0528; 5.7987; 8.000; 0.2806)$
8	9	0.968	1.079	1.332	$B_{III}(26.8192; 5.4765; 18.0105; 2.2088; 0.1850)$
8	10	0.984	1.100	1.360	$B_{III}(33.2892; 5.1108; 23.7224; 2.2066; 0.1850)$
9	1	0.855	0.932	1.092	$B_{III}(7.0181; 8.0734; 2.9699; 1.6366; 0.2620)$
9	2	0.861	0.940	1.108	$B_{III}(14.8480; 6.7456; 6.6141; 1.6911; 0.2000)$
9	3	0.874	0.956	1.133	$B_{III}(15.1905; 6.3828; 7.0328; 1.6895; 0.2000)$
9	4	0.887	0.973	1.161	$B_{III}(14.5137; 7.3126; 7.1548; 2.0020; 0.2000)$
9	5	0.900	0.991	1.191	$B_{III}(15.4545; 6.7896; 8.1115; 2.0011; 0.2000)$
9	6	0.914	1.008	1.220	$B_{III}(16.8407; 6.2819; 9.4483; 1.9990; 0.2000)$
9	7	0.928	1.027	1.254	$B_{III}(26.4103; 5.6444; 15.7438; 1.9953; 0.1850)$
9	8	0.943	1.046	1.285	$B_{III}(27.0115; 5.3931; 16.5812; 1.9918; 0.1850)$
9	9	0.958	1.066	1.318	$B_{III}(5.9761; 18.1201; 6.9936; 9.000; 0.2806)$
9	10	0.973	1.086	1.346	$B_{III}(28.3999; 5.3460; 19.5082; 2.2090; 0.1850)$
10	1	0.858	0.935	1.094	$B_{III}(6.3708; 8.3028; 2.6724; 1.6339; 0.2719)$
10	2	0.859	0.937	1.105	$B_{III}(21.0180; 6.2702; 9.1530; 1.6325; 0.1800)$
10	3	0.871	0.952	1.128	$B_{III}(20.8492; 6.2545; 9.3852; 1.6899; 0.1800)$
10	4	0.883	0.968	1.153	$B_{III}(18.5209; 7.3068; 8.7206; 2.0024; 0.1800)$
10	5	0.896	0.985	1.179	$B_{III}(20.1426; 6.8010; 10.0869; 2.0016; 0.1800)$
10	6	0.908	1.001	1.209	$B_{III}(22.0824; 6.3600; 11.7113; 2.0008; 0.1800)$
10	7	0.921	1.018	1.239	$B_{III}(25.7879; 5.8810; 14.6469; 1.9979; 0.1800)$
10	8	0.935	1.037	1.269	$B_{III}(31.0404; 5.5468; 18.2144; 1.9946; 0.1750)$
10	9	0.949	1.055	1.301	$B_{III}(31.0159; 5.7740; 19.6302; 2.2075; 0.1750)$
10	10	0.964	1.075	1.331	$B_{III}(5.9754; 17.6996; 7.5357; 9.5000; 0.2806)$

Таблица В.39

**Процентные точки и распределения статистики Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП двух параметров обратного гауссовского распределения**

$\theta_0$	$\theta_1$	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
1	1	0.130	0.162	0.246	$B_{III}(4.7725; 2.8933; 15.4899; 0.500; 0.0086)$
1	2	0.150	0.194	0.321	$B_{III}(4.7817; 2.7916; 24.1428; 0.800; 0.0086)$
1	3	0.173	0.229	0.408	$B_{III}(5.0019; 2.4825; 33.657; 1.000; 0.0086)$
1	4	0.195	0.265	0.481	$B_{III}(4.8570; 2.3136; 39.4252; 1.200; 0.0087)$
1	5	0.218	0.298	0.537	$B_{III}(4.8192; 2.1138; 40.1445; 1.200; 0.0088)$
1	6	0.239	0.328	0.575	$B_{III}(4.7926; 1.9813; 40.1460; 1.200; 0.0089)$
1	7	0.260	0.355	0.613	$B_{III}(4.3522; 1.9184; 38.5472; 1.300; 0.0097)$
1	8	0.277	0.378	0.645	$B_{III}(4.1660; 1.9401; 36.7953; 1.400; 0.0097)$
1	9	0.290	0.395	0.663	$B_{III}(1.7177; 2.5911; 14.9047; 2.0049; 0.020)$
1	10	0.302	0.409	0.682	$B_{III}(1.7373; 2.6035; 14.6773; 2.0578; 0.020)$
2	1	0.119	0.146	0.216	$B_{III}(5.5933; 2.8761; 15.0784; 0.400; 0.0075)$
2	2	0.132	0.167	0.265	$B_{III}(4.7336; 2.9815; 17.9631; 0.600; 0.0086)$
2	3	0.146	0.189	0.323	$B_{III}(5.0307; 2.7954; 26.1410; 0.800; 0.0084)$
2	4	0.162	0.214	0.387	$B_{III}(5.2560; 2.5116; 32.9308; 0.900; 0.0084)$
2	5	0.178	0.242	0.446	$B_{III}(5.4485; 2.2935; 39.9250; 1.000; 0.0084)$
2	6	0.195	0.267	0.498	$B_{III}(5.3297; 2.1938; 42.6895; 1.100; 0.0084)$
2	7	0.212	0.292	0.534	$B_{III}(5.3797; 2.0580; 45.8508; 1.150; 0.0084)$
2	8	0.228	0.316	0.565	$B_{III}(5.4058; 1.9526; 46.3260; 1.150; 0.0084)$
2	9	0.244	0.336	0.590	$B_{III}(5.3765; 1.8676; 45.9372; 1.150; 0.0084)$
2	10	0.259	0.356	0.618	$B_{III}(5.3119; 1.8093; 45.0334; 1.160; 0.0084)$
3	1	0.114	0.140	0.204	$B_{III}(4.6237; 3.1152; 11.9551; 0.400; 0.0087)$
3	2	0.124	0.155	0.239	$B_{III}(4.5231; 3.3129; 15.9686; 0.600; 0.0087)$
3	3	0.135	0.172	0.284	$B_{III}(4.7701; 3.0644; 22.1622; 0.750; 0.0087)$
3	4	0.146	0.191	0.336	$B_{III}(4.9007; 2.7581; 26.0854; 0.8000; 0.0087)$
3	5	0.159	0.212	0.391	$B_{III}(5.1313; 2.4877; 31.2188; 0.8500; 0.0087)$
3	6	0.174	0.235	0.440	$B_{III}(5.1565; 2.4026; 40.7673; 1.1000; 0.0087)$
3	7	0.187	0.256	0.483	$B_{III}(5.2195; 2.2343; 42.6422; 1.1000; 0.0087)$
3	8	0.202	0.278	0.520	$B_{III}(5.2685; 2.1243; 47.574; 1.2000; 0.0087)$
3	9	0.216	0.299	0.548	$B_{III}(5.2645; 2.0191; 47.9732; 1.2000; 0.0087)$
3	10	0.229	0.318	0.570	$B_{III}(5.2768; 1.9423; 48.0147; 1.2000; 0.0087)$
4	1	0.112	0.137	0.198	$B_{III}(4.5782; 3.2113; 11.6509; 0.4000; 0.0087)$
4	2	0.120	0.148	0.224	$B_{III}(4.6470; 3.0937; 13.7864; 0.4645; 0.0087)$

Продолжение табл. В.39

$\theta_0$	$\theta_1$	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
4	3	0.128	0.162	0.262	$B_{III}(4.7447; 3.0421; 18.1139; 0.6000; 0.0087)$
4	4	0.137	0.177	0.304	$B_{III}(4.6410; 3.2743; 29.7398; 1.100; 0.0087)$
4	5	0.148	0.194	0.354	$B_{III}(4.9182; 2.9156; 37.7830; 1.2000; 0.0087)$
4	6	0.159	0.213	0.402	$B_{III}(4.9451; 2.8167; 54.9745; 1.7197; 0.0087)$
4	7	0.172	0.234	0.442	$B_{III}(4.9463; 2.6275; 56.8175; 1.7197; 0.0087)$
4	8	0.184	0.253	0.479	$B_{III}(5.2218; 2.4515; 61.8564; 1.7198; 0.0083)$
4	9	0.197	0.272	0.512	$B_{III}(5.1854; 2.3115; 63.0610; 1.7198; 0.0085)$
4	10	0.210	0.291	0.542	$B_{III}(5.1470; 2.2041; 63.2902; 1.7198; 0.0085)$
5	1	0.111	0.135	0.194	$B_{III}(4.5239; 3.2857; 11.3509; 0.4000; 0.0087)$
5	2	0.117	0.144	0.216	$B_{III}(4.3756; 3.6726; 14.4290; 0.6000; 0.0087)$
5	3	0.124	0.156	0.247	$B_{III}(4.4097; 3.6237; 19.2576; 0.8000; 0.0087)$
5	4	0.132	0.168	0.283	$B_{III}(4.5663; 3.4838; 28.1077; 1.1000; 0.0087)$
5	5	0.140	0.183	0.325	$B_{III}(4.6087; 3.2941; 37.3032; 1.4000; 0.0087)$
5	6	0.150	0.199	0.369	$B_{III}(4.6721; 3.0859; 44.9449; 1.6000; 0.0087)$
5	7	0.161	0.217	0.415	$B_{III}(4.9820; 2.8196; 64.4405; 2.0000; 0.0086)$
5	8	0.172	0.235	0.448	$B_{III}(4.9695; 2.6609; 69.3170; 2.1000; 0.0086)$
5	9	0.183	0.252	0.483	$B_{III}(4.9353; 2.5489; 72.7848; 2.2000; 0.0086)$
5	10	0.195	0.270	0.511	$B_{III}(4.9489; 2.4090; 74.7198; 2.2000; 0.0086)$
6	1	0.110	0.133	0.192	$B_{III}(4.5010; 3.2285; 10.9781; 0.380; 0.0088)$
6	2	0.115	0.141	0.210	$B_{III}(4.5811; 3.3997; 13.7378; 0.5000; 0.0087)$
6	3	0.121	0.151	0.235	$B_{III}(4.5344; 3.3779; 16.0429; 0.6000; 0.0087)$
6	4	0.128	0.162	0.269	$B_{III}(4.7010; 3.1896; 20.2456; 0.7000; 0.0087)$
6	5	0.135	0.174	0.305	$B_{III}(4.7778; 3.1179; 26.6577; 0.9000; 0.0087)$
6	6	0.143	0.188	0.348	$B_{III}(4.6979; 3.2496; 45.496; 1.6546; 0.0087)$
6	7	0.152	0.205	0.389	$B_{III}(4.7377; 3.0239; 52.3921; 1.8000; 0.0087)$
6	8	0.163	0.221	0.426	$B_{III}(4.8088; 2.8386; 61.3983; 2.0000; 0.0087)$
6	9	0.173	0.237	0.453	$B_{III}(4.8848; 2.6529; 70.0431; 2.1500; 0.0087)$
6	10	0.183	0.253	0.487	$B_{III}(4.9708; 2.5260; 74.5301; 2.2000; 0.0087)$
7	1	0.110	0.133	0.191	$B_{III}(4.3709; 3.2673; 10.5551; 0.3800; 0.0090)$
7	2	0.114	0.140	0.207	$B_{III}(4.5828; 3.2976; 12.7789; 0.4500; 0.0087)$
7	3	0.119	0.148	0.227	$B_{III}(4.4677; 3.4969; 15.4121; 0.6000; 0.0087)$
7	4	0.125	0.158	0.258	$B_{III}(4.6214; 3.3308; 19.2746; 0.7000; 0.0087)$
7	5	0.131	0.168	0.289	$B_{III}(4.7195; 3.2125; 24.4491; 0.8500; 0.0087)$
7	6	0.138	0.181	0.327	$B_{III}(4.6567; 3.3731; 44.3195; 1.6546; 0.0087)$
7	7	0.146	0.194	0.364	$B_{III}(4.8434; 3.0794; 51.5559; 1.7197; 0.0087)$

Окончание табл. В.39

$\theta_0$	$\theta_1$	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
7	8	0.155	0.209	0.405	$B_{III}(4.7910; 2.9523; 57.1575; 1.9000; 0.0087)$
7	9	0.165	0.225	0.436	$B_{III}(4.8713; 2.7903; 72.7647; 2.3000; 0.0086)$
7	10	0.175	0.241	0.463	$B_{III}(4.2642; 2.6670; 74.6989; 2.6000; 0.01)$
4	6	0.159	0.213	0.402	$B_{III}(4.9451; 2.8167; 54.9745; 1.7197; 0.0087)$
8	1	0.110	0.134	0.191	$B_{III}(4.4757; 3.2680; 10.7031; 0.380; 0.0090)$
8	2	0.113	0.138	0.203	$B_{III}(4.5960; 3.1619; 11.8642; 0.4000; 0.0087)$
8	3	0.117	0.145	0.221	$B_{III}(4.4434; 3.5777; 15.1135; 0.6000; 0.0087)$
8	4	0.122	0.154	0.247	$B_{III}(4.4746; 3.6125; 19.9058; 0.8000; 0.0087)$
8	5	0.128	0.164	0.278	$B_{III}(4.5738; 3.4174; 23.8064; 0.9000; 0.0087)$
8	6	0.135	0.174	0.312	$B_{III}(4.7719; 3.2182; 31.9744; 1.1000; 0.0087)$
8	7	0.142	0.187	0.349	$B_{III}(4.7862; 3.1033; 40.0738; 1.3500; 0.0087)$
8	8	0.149	0.200	0.384	$B_{III}(4.9118; 2.9697; 53.987; 1.7197; 0.0087)$
8	9	0.159	0.215	0.420	$B_{III}(4.9553; 2.8177; 68.7411; 2.1000; 0.0087)$
8	10	0.167	0.230	0.447	$B_{III}(4.8712; 2.7161; 74.7643; 2.3000; 0.0087)$
9	1	0.111	0.135	0.192	$B_{III}(4.3128; 3.3456; 10.2390; 0.390; 0.0092)$
9	2	0.112	0.137	0.200	$B_{III}(4.6271; 3.1831; 11.9529; 0.4000; 0.0087)$
9	3	0.116	0.143	0.217	$B_{III}(4.3927; 3.6661; 14.6644; 0.6000; 0.0087)$
9	4	0.121	0.151	0.240	$B_{III}(4.3715; 3.7463; 18.8452; 0.8000; 0.0087)$
9	5	0.126	0.160	0.269	$B_{III}(4.5116; 3.6109; 25.0174; 1.0000; 0.0087)$
9	6	0.131	0.169	0.169	$B_{III}(4.6314; 3.4428; 31.9594; 1.2000; 0.0087)$
9	7	0.138	0.181	0.333	$B_{III}(4.7526; 3.2398; 40.0792; 1.4000; 0.0087)$
9	8	0.145	0.193	0.368	$B_{III}(4.9123; 3.0606; 49.4625; 1.6000; 0.0087)$
9	9	0.153	0.207	0.403	$B_{III}(5.1040; 2.8347; 58.579; 1.7197; 0.0086)$
9	10	0.161	0.221	0.432	$B_{III}(4.9243; 2.7838; 65.2796; 2.0000; 0.0087)$
10	1	0.112	0.137	0.195	$B_{III}(4.5358; 3.2996; 10.6858; 0.390; 0.0088)$
10	2	0.111	0.136	0.198	$B_{III}(4.6058; 3.2130; 11.8374; 0.4000; 0.0087)$
10	3	0.115	0.142	0.213	$B_{III}(4.4094; 3.7077; 14.6643; 0.6000; 0.0087)$
10	4	0.119	0.149	0.233	$B_{III}(4.2916; 3.9108; 17.7709; 0.8000; 0.0087)$
10	5	0.124	0.157	0.261	$B_{III}(4.4707; 3.7166; 24.2703; 1.0000; 0.0087)$
10	6	0.129	0.165	0.288	$B_{III}(4.5864; 3.5556; 30.9135; 1.2000; 0.0087)$
10	7	0.135	0.176	0.320	$B_{III}(4.6398; 3.3941; 37.6304; 1.4000; 0.0087)$
10	8	0.141	0.187	0.354	$B_{III}(4.8071; 3.1823; 48.6216; 1.6546; 0.0087)$
10	9	0.148	0.199	0.388	$B_{III}(4.8468; 3.0568; 60.6841; 2.0000; 0.0087)$
10	10	0.156	0.213	0.420	$B_{III}(5.0443; 2.7436; 59.626; 1.7197; 0.0088)$

Таблица В.40

**Процентные точки и распределения статистики Андерсона–Дарлинга при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП двух параметров обратного гауссовского распределения**

$\theta_0$	$\theta_1$	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
1	1	0.737	0.895	1.313	$B_{III}(6.1238; 3.1751; 14.0035; 2.400; 0.0698)$
1	2	0.843	1.059	1.735	$B_{III}(6.0219; 3.6293; 30.2458; 6.200; 0.0675)$
1	3	0.961	1.255	2.196	$B_{III}(6.5550; 3.0737; 46.299; 7.800; 0.0663)$
1	4	1.098	1.454	2.580	$B_{III}(6.8209; 2.6705; 51.187; 7.700; 0.0667)$
1	5	1.228	1.647	2.869	$B_{III}(6.6473; 2.4177; 51.272; 7.700; 0.0680)$
1	6	1.351	1.809	3.071	$B_{III}(6.3414; 2.2618; 48.992; 7.700; 0.0716)$
1	7	1.467	1.950	3.257	$B_{III}(5.9850; 2.2012; 44.595; 7.800; 0.0731)$
1	8	1.558	2.067	3.412	$B_{III}(5.2130; 2.2645; 33.943; 7.700; 0.0735)$
1	9	1.634	2.156	3.490	$B_{III}(5.3059; 2.2709; 32.7287; 7.800; 0.0714)$
1	10	1.698	2.224	3.572	$B_{III}(5.9944; 2.0162; 30.5401; 6.000; 0.0708)$
2	1	0.690	0.829	1.181	$B_{III}(6.0060; 3.5986; 12.5163; 2.400; 0.0675)$
2	2	0.754	0.925	1.428	$B_{III}(5.5094; 4.2127; 21.2179; 5.200; 0.0698)$
2	3	0.826	1.041	1.764	$B_{III}(6.4998; 3.7767; 45.2636; 8.6662; 0.0650)$
2	4	0.908	1.181	2.096	$B_{III}(6.8554; 3.2620; 53.0151; 8.6676; 0.0650)$
2	5	1.007	1.337	2.424	$B_{III}(7.4420; 2.8256; 66.5455; 9.0239; 0.0650)$
2	6	1.104	1.483	2.677	$B_{III}(7.4598; 2.6158; 68.3448; 9.0242; 0.0650)$
2	7	1.203	1.624	2.864	$B_{III}(7.4859; 2.4311; 69.9471; 9.0242; 0.0650)$
2	8	1.299	1.746	3.026	$B_{III}(6.9268; 2.4170; 69.9882; 10.3004; 0.0650)$
2	9	1.387	1.854	3.153	$B_{III}(6.9942; 2.3297; 69.5407; 10.2998; 0.0650)$
2	10	1.471	1.958	3.286	$B_{III}(6.0278; 2.3810; 54.3565; 10.2991; 0.0650)$
3	1	0.673	0.805	1.134	$B_{III}(5.8991; 3.7868; 11.8595; 2.400; 0.0672)$
3	2	0.718	0.873	1.311	$B_{III}(6.1369; 4.8632; 35.6146; 8.6670; 0.0650)$
3	3	0.771	0.955	1.561	$B_{III}(5.7293; 4.0413; 27.6069; 6.200; 0.0698)$
3	4	0.829	1.057	1.840	$B_{III}(6.4965; 3.7146; 46.0939; 8.6656; 0.0650)$

Продолжение табл. В.40

$\theta_0$	$\theta_1$	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
3	5	0.900	1.176	2.132	$B_{III}(7.4099; 3.1291; 61.1273; 8.6667; 0.0650)$
3	6	0.980	1.308	2.399	$B_{III}(7.9874; 2.7921; 74.4933; 9.0231; 0.0650)$
3	7	1.063	1.427	2.600	$B_{III}(8.0571; 2.7087; 72.5225; 9.0237; 0.0600)$
3	8	1.146	1.554	2.781	$B_{III}(8.5422; 2.4144; 63.7751; 7.0000; 0.0600)$
3	9	1.227	1.667	2.935	$B_{III}(8.7988; 2.2737; 68.9529; 7.2000; 0.0600)$
3	10	1.307	1.763	3.047	$B_{III}(8.8004; 2.1754; 68.9524; 7.2000; 0.0600)$
4	1	0.664	0.793	1.110	$B_{III}(5.8519; 3.8882; 11.5594; 2.400; 0.0671)$
4	2	0.698	0.845	1.238	$B_{III}(5.3538; 5.3288; 22.9349; 7.0000; 0.0675)$
4	3	0.740	0.910	1.436	$B_{III}(5.6387; 4.5708; 27.5081; 7.0000; 0.0675)$
4	4	0.787	0.986	1.686	$B_{III}(5.7589; 4.09340; 39.9826; 9.000; 0.0698)$
4	5	0.842	1.084	1.934	$B_{III}(6.5537; 3.4655; 46.4219; 8.0000; 0.0675)$
4	6	0.904	1.190	2.194	$B_{III}(6.8253; 3.1718; 61.2636; 9.5000; 0.0675)$
4	7	0.974	1.307	2.419	$B_{III}(7.4076; 2.8129; 69.3032; 9.0224; 0.0675)$
4	8	1.048	1.412	2.592	$B_{III}(7.4062; 2.6410; 71.0431; 9.0231; 0.0675)$
4	9	1.123	1.524	2.760	$B_{III}(7.4858; 2.4792; 73.6341; 9.0235; 0.0675)$
4	10	1.195	1.628	2.897	$B_{III}(7.4411; 2.3667; 73.6365; 9.0239; 0.0675)$
5	1	0.659	0.786	1.096	$B_{III}(5.8800; 3.9339; 11.5621; 2.400; 0.0671)$
5	2	0.687	0.827	0.827	$B_{III}(5.3832; 5.5916; 27.7521; 8.6678; 0.0675)$
5	3	0.720	0.881	1.360	$B_{III}(5.5318; 5.0043; 31.1395; 8.6673; 0.0675)$
5	4	0.760	0.944	1.571	$B_{III}(5.8814; 4.3301; 37.6029; 8.6663; 0.0675)$
5	5	0.803	1.023	1.799	$B_{III}(6.1596; 3.8709; 60.9340; 12.000; 0.0698)$
5	6	0.856	1.113	2.035	$B_{III}(6.6082; 3.3950; 51.7023; 8.6650; 0.0675)$
5	7	0.917	1.220	2.268	$B_{III}(7.2066; 2.9940; 65.5245; 9.0213; 0.0680)$
5	8	0.979	1.318	1.318	$B_{III}(7.3289; 2.7883; 69.4323; 9.0220; 0.0680)$
5	9	1.044	1.414	2.602	$B_{III}(7.4884; 2.6173; 73.2183; 9.0226; 0.0680)$
5	10	1.114	1.514	2.757	$B_{III}(7.4934; 2.4672; 75.0000; 9.0231; 0.0680)$
6	1	0.655	0.781	1.085	$B_{III}(5.7986; 3.9980; 11.2400; 2.400; 0.0671)$

Продолжение табл. В.40

$\theta_0$	$\theta_1$	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
6	2	0.679	0.815	1.174	$B_{III}(5.2935; 5.8182; 26.4298; 8.6680; 0.0680)$
6	3	0.707	0.860	1.305	$B_{III}(5.3441; 5.3154; 28.5532; 8.6676; 0.0680)$
6	4	0.740	0.915	1.489	$B_{III}(5.7947; 4.5262; 35.9854; 8.6670; 0.0680)$
6	5	0.778	0.979	1.694	$B_{III}(6.1074; 4.0045; 42.1634; 8.6662; 0.0680)$
6	6	0.822	1.0587	1.907	$B_{III}(6.1637; 3.6120; 46.396; 8.6652; 0.0698)$
6	7	0.872	1.145	2.123	$B_{III}(6.7575; 3.1650; 57.3316; 8.6649; 0.0700)$
6	8	0.929	1.246	2.340	$B_{III}(7.1614; 2.8755; 68.2312; 9.0211; 0.0700)$
6	9	0.988	1.333	2.474	$B_{III}(7.2146; 2.7131; 70.7516; 9.0217; 0.0700)$
6	10	1.049	1.422	2.628	$B_{III}(7.2844; 2.5752; 72.9798; 9.0222; 0.0700)$
7	1	0.655	0.780	1.081	$B_{III}(5.8421; 4.0362; 11.1704; 2.400; 0.0672)$
7	2	0.673	0.807	1.156	$B_{III}(5.4561; 5.9720; 26.4093; 8.6680; 0.0650)$
7	3	0.697	0.846	1.270	$B_{III}(5.5685; 5.4358; 29.1024; 8.6678; 0.0650)$
7	4	0.726	0.894	1.427	$B_{III}(5.9802; 4.7226; 35.6184; 8.6673; 0.0650)$
7	5	0.759	0.948	1.617	$B_{III}(6.3225; 4.1978; 41.7939; 8.6668; 0.0650)$
7	6	0.779	0.984	1.734	$B_{III}(6.8608; 3.8616; 49.1300; 8.6666; 0.0640)$
7	7	0.841	1.096	2.018	$B_{III}(6.1138; 3.6208; 63.498; 12.000; 0.0698)$
7	8	0.891	1.181	2.217	$B_{III}(7.1968; 3.1822; 61.7629; 9.0202; 0.0650)$
7	9	0.943	1.272	2.388	$B_{III}(7.5770; 2.9005; 69.9780; 9.0208; 0.0650)$
7	10	1.001	1.357	2.515	$B_{III}(7.7412; 2.7373; 73.7918; 9.0214; 0.0650)$
8	1	0.660	0.785	1.081	$B_{III}(6.1227; 4.0360; 11.5336; 2.400; 0.0666)$
8	2	0.668	0.801	1.138	$B_{III}(5.5121; 5.8006; 27.9640; 8.6681; 0.0670)$
8	3	0.690	0.836	1.241	$B_{III}(5.4002; 5.5554; 27.9506; 8.6679; 0.0670)$
8	4	0.715	0.877	1.380	$B_{III}(5.6470; 4.9453; 32.4456; 8.6676; 0.0670)$
8	5	0.745	0.926	1.550	$B_{III}(5.9674; 4.4102; 37.9915; 8.6671; 0.0670)$
8	6	0.779	0.984	1.734	$B_{III}(6.4110; 3.8911; 45.8150; 8.6666; 0.0670)$
8	7	0.817	1.054	1.929	$B_{III}(7.0348; 3.4829; 55.3483; 8.6659; 0.0660)$
8	8	0.859	1.129	2.106	$B_{III}(6.4429; 3.4105; 71.057; 12.000; 0.0698)$

Окончание табл. В.40

$\theta_0$	$\theta_1$	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
8	9	0.910	1.220	2.295	$B_{III}(7.8320; 2.8953; 75.0000; 9.0201; 0.0670)$
8	10	0.961	1.300	2.435	$B_{III}(7.6032; 2.8065; 72.8901; 9.0207; 0.0670)$
9	1	0.667	0.794	1.091	$B_{III}(6.0785; 4.0967; 11.0332; 2.400; 0.0672)$
9	2	0.664	0.796	1.126	$B_{III}(5.2061; 6.2168; 24.4769; 8.6680; 0.0670)$
9	3	0.684	0.827	1.210	$B_{III}(5.3219; 5.7271; 26.7940; 8.6680; 0.0670)$
9	4	0.707	0.865	1.345	$B_{III}(5.4618; 5.1961; 29.9012; 8.6677; 0.0670)$
9	5	0.734	0.910	1.496	$B_{III}(5.9892; 4.487; 37.8576; 8.6674; 0.0670)$
9	6	0.763	0.959	1.666	$B_{III}(6.2913; 4.0565; 43.4772; 8.6670; 0.0670)$
9	7	0.797	1.023	1.855	$B_{III}(6.4827; 3.7214; 48.0168; 8.6664; 0.0670)$
9	8	0.836	1.092	2.036	$B_{III}(6.7595; 3.4190; 53.6318; 8.6659; 0.0670)$
9	9	0.881	1.170	2.211	$B_{III}(6.3746; 3.3201; 74.534; 12.500; 0.0698)$
9	10	0.927	1.252	2.362	$B_{III}(7.7636; 2.8465; 75.0000; 9.0201; 0.0670)$
10	1	0.678	0.808	1.108	$B_{III}(5.8108; 4.1511; 10.1199; 2.400; 0.0676)$
10	2	0.662	0.792	1.119	$B_{III}(5.4827; 5.5338; 20.0888; 6.0043; 0.0671)$
10	3	0.679	0.820	1.192	$B_{III}(5.2739; 5.8610; 26.0201; 8.6680; 0.0670)$
10	4	0.700	0.854	1.312	$B_{III}(5.4167; 5.3561; 28.8890; 8.6678; 0.0670)$
10	5	0.724	0.895	1.455	$B_{III}(5.8460; 4.6549; 35.7438; 8.6676; 0.0670)$
10	6	0.751	0.939	1.616	$B_{III}(6.1462; 4.2118; 41.1210; 8.6672; 0.0670)$
10	7	0.782	0.997	1.785	$B_{III}(6.5669; 3.7838; 48.4614; 8.6668; 0.0670)$
10	8	0.818	1.059	1.959	$B_{III}(7.0172; 3.4172; 56.7255; 8.6663; 0.0670)$
10	9	0.855	1.128	2.120	$B_{III}(6.4784; 3.4405; 74.0853; 12.5000; 0.0692)$
10	10	0.902	1.210	2.295	$B_{III}(6.2788; 3.2908; 73.169; 12.500; 0.0698)$

Таблица В.41

**Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ( $\theta_1 = 0.5$ )**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель распределения статистик
	0.9	0.95	0.99	
<b>Критерий Колмогорова</b>				
$\theta_0$	1.001	1.102	1.309	$B_{III}(6.5294; 6.8315; 3.5901; 2.0446; 0.2801)$
$\theta_1$	1.084	1.199	1.427	$B_{III}(5.4860; 5.9744; 3.4348; 2.1402; 0.3000)$
$\theta_2$	1.038	1.144	1.360	$B_{III}(4.7833; 6.1285; 3.0596; 2.0214; 0.3200)$
$\theta_0, \theta_1$	0.849	0.922	1.071	$B_{III}(6.2332; 6.0259; 2.8200; 1.3000; 0.2800)$
$\theta_0, \theta_2$	0.837	0.909	1.054	$Sb(2.1787; 1.8756; 1.5259; 0.2567)$
$\theta_1, \theta_2$	0.848	0.922	1.076	$Sb(2.4861; 1.8758; 1.7026; 0.2664)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.780	0.845	0.979	$Sb(2.3507; 1.9291; 1.4629; 0.2495)$
<b>Критерий <math>\omega^2</math> Крамера–Мизеса–Смирнова</b>				
$\theta_0$	0.181	0.232	0.359	$B_{III}(5.1297; 2.5959; 22.9591; 0.8000; 0.0081)$
$\theta_1$	0.227	0.296	0.466	$B_{III}(7.4650; 2.6576; 44.4162; 1.3633; 0.0000)$
$\theta_2$	0.198	0.255	0.395	$B_{III}(5.4489; 2.7019; 31.5609; 1.1500; 0.0062)$
$\theta_0, \theta_1$	0.110	0.135	0.192	$B_{III}(6.3779; 4.6451; 27.3376; 1.0000; 0.0050)$
$\theta_0, \theta_2$	0.106	0.129	0.183	$Sb(3.7541; 1.5434; 0.5800; 0.0058)$
$\theta_1, \theta_2$	0.112	0.138	0.200	$B_{III}(10.3369; 4.0734; 25.8270; 0.5802; 0.0000)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.086	0.103	0.145	$B_{III}(6.7252; 4.6508; 16.7920; 0.4800; 0.0050)$
<b>Критерий <math>\Omega^2</math> Андерсона–Дарлинга</b>				
$\theta_0$	1.125	1.415	2.140	$B_{III}(4.9800; 4.1685; 17.0454; 7.1000; 0.0500)$
$\theta_1$	1.279	1.625	2.478	$B_{III}(4.7602; 5.1000; 9.8527; 6.8675; 0.0000)$
$\theta_2$	1.157	1.454	2.186	$B_{III}(3.0331; 4.0598; 9.3429; 5.9880; 0.1000)$
$\theta_0, \theta_1$	0.673	0.806	1.120	$B_{III}(5.7172; 5.0419; 10.1641; 3.0044; 0.0550)$
$\theta_0, \theta_2$	0.655	0.781	1.079	$Sb(3.8953; 1.6481; 3.5052; 0.0513)$
$\theta_1, \theta_2$	0.743	0.902	1.290	$Sb(4.1462; 1.6136; 4.6254; 0.0535)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.523	0.617	0.839	$Sb(3.9313; 1.6905; 2.7078; 0.0530)$

Таблица В.42

**Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ( $\theta_1 = 1$ )**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель распределения статистики
	0.9	0.95	0.99	
Критерий Колмогорова				
$\theta_0$	1.181	1.316	1.585	$B_{III}(6.9734; 4.8247; 5.3213; 2.3800; 0.2690)$
$\theta_1$	1.083	1.196	1.425	$B_{III}(4.6425; 6.6688; 2.8491; 2.2246; 0.3200)$
$\theta_2$	0.994	1.092	1.290	$B_{III}(6.2635; 7.1481; 3.2059; 2.0000; 0.2800)$
$\theta_0, \theta_1$	0.874	0.954	1.117	$Sb(2.4299; 1.8866; 1.7504; 0.2598)$
$\theta_0, \theta_2$	0.823	0.893	1.033	$B_{III}(5.8989; 7.5040; 2.4180; 1.3724; 0.2800)$
$\theta_1, \theta_2$	0.815	0.883	1.023	$Sb(2.4499; 1.9720; 1.6016; 0.2486)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.758	0.820	0.946	$Sb(2.3012; 1.9386; 1.3863; 0.2464)$
Критерий $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова				
$\theta_0$	0.320	0.431	0.706	$B_{III}(2.2422; 2.2970; 16.4663; 1.6500; 0.0130)$
$\theta_1$	0.227	0.295	0.464	$B_{III}(5.3830; 2.6954; 40.5199; 1.6450; 0.0050)$
$\theta_2$	0.174	0.221	0.336	$B_{III}(3.6505; 3.2499; 16.5445; 1.0000; 0.0100)$
$\theta_0, \theta_1$	0.117	0.144	0.209	$Sb(3.8667; 1.4603; 0.7583; 0.0059)$
$\theta_0, \theta_2$	0.102	0.123	0.174	$B_{III}(12.2776; 4.1107; 27.2069; 0.4875; 0.0000)$
$\theta_1, \theta_2$	0.103	0.127	0.182	$B_{III}(4.7144; 4.6690; 10.8816; 0.5261; 0.0059)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.080	0.097	0.135	$Sb(4.1842; 1.6587; 0.4794; 0.0061)$
Критерий $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга				
$\theta_0$	1.724	2.280	3.639	$B_{III}(4.8106; 2.6855; 35.5593; 11.8700; 0.0500)$
$\theta_1$	1.275	1.617	2.468	$B_{III}(3.6999; 3.9108; 16.4841; 9.0300; 0.0740)$
$\theta_2$	1.056	1.314	1.953	$B_{III}(4.9871; 4.1479; 16.5432; 6.4500; 0.0600)$
$\theta_0, \theta_1$	0.687	0.827	1.161	$B_{III}(4.6368; 6.6727; 7.1680; 3.6356; 0.0521)$
$\theta_0, \theta_2$	0.633	0.753	1.037	$B_{III}(3.0467; 5.9239; 5.0944; 2.7870; 0.1000)$
$\theta_1, \theta_2$	0.696	0.842	1.194	$B_{III}(6.9638; 4.5238; 17.7792; 3.8000; 0.0522)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.494	0.582	0.786	$Sb(3.9578; 1.6861; 2.5760; 0.0547)$

Таблица В.43

**Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ( $\theta_1 = 2$ )**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель распределения статистики
	0.9	0.95	0.99	
Критерий Колмогорова				
$\theta_0$	1.177	1.311	1.578	$B_{III}(6.7515; 4.8240; 5.0591; 2.3291; 0.2717)$
$\theta_1$	1.084	1.199	1.427	$B_{III}(7.2140; 5.6650; 4.4446; 2.1402; 0.2673)$
$\theta_2$	0.926	1.010	1.183	$B_{III}(6.5000; 7.9678; 2.4137; 1.6736; 0.2571)$
$\theta_0, \theta_1$	0.939	1.032	1.221	$Sb(2.5036; 1.8528; 2.0153; 0.2538)$
$\theta_0, \theta_2$	0.815	0.885	1.027	$B_{III}(7.0390; 6.6412; 3.0252; 1.3277; 0.2614)$
$\theta_1, \theta_2$	0.795	0.859	0.990	$Sb(2.2155; 1.9799; 1.4517; 0.2396)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.744	0.802	0.924	$B_{III}(8.2570; 7.1724; 3.0694; 1.1864; 0.2393)$
Критерий $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова				
$\theta_0$	0.311	0.418	0.682	$B_{III}(1.4500; 2.8637; 11.1054; 2.1513; 0.0190)$
$\theta_1$	0.227	0.295	0.465	$B_{III}(3.2000; 2.8218; 18.9578; 1.3633; 0.0100)$
$\theta_2$	0.145	0.181	0.266	$B_{III}(4.7339; 3.9276; 14.1490; 0.7643; 0.0060)$
$\theta_0, \theta_1$	0.141	0.178	0.270	$B_{III}(3.3876; 3.6600; 14.8708; 0.8911; 0.0100)$
$\theta_0, \theta_2$	0.098	0.119	0.168	$B_{III}(3.1294; 5.5738; 6.3802; 0.5092; 0.0100)$
$\theta_1, \theta_2$	0.097	0.119	0.170	$B_{III}(5.3732; 4.5740; 12.3385; 0.4921; 0.0050)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.078	0.093	0.131	$B_{III}(5.6572; 4.1890; 12.1005; 0.3299; 0.0066)$
Критерий $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга				
$\theta_0$	1.666	2.198	3.506	$B_{III}(4.1450; 2.6539; 29.9915; 10.8869; 0.0700)$
$\theta_1$	1.279	1.624	2.478	$B_{III}(5.0009; 3.4025; 18.8098; 6.8675; 0.0535)$
$\theta_2$	0.944	1.158	1.684	$B_{III}(4.9000; 4.5319; 10.9284; 4.6019; 0.0530)0$
$\theta_0, \theta_1$	0.766	0.939	1.365	$B_{III}(4.7000; 4.0810; 14.1974; 4.0623; 0.0750)$
$\theta_0, \theta_2$	0.617	0.734	1.009	$B_{III}(4.8500; 5.5248; 8.1915; 2.8374; 0.0650)$
$\theta_1, \theta_2$	0.653	0.784	1.099	$B_{III}(7.2191; 4.6227; 16.4456; 3.3293; 0.0515)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.482	0.567	0.766	$Sb(3.9777; 1.6702; 2.4230; 0.0556)$

Таблица В.44

**Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ( $\theta_1 = 3$ )**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель распределения статистики
	0.9	0.95	0.99	
Критерий Колмогорова				
$\theta_0$	1.150	1.279	1.538	$B_{III}(5.0155; 5.4869; 3.3992; 2.2476; 0.3000)$
$\theta_1$	1.084	1.199	1.427	$B_{III}(5.4860; 5.9744; 3.4348; 2.1402; 0.3000)$
$\theta_2$	0.892	0.968	1.121	$B_{III}(4.6527; 7.8624; 1.8636; 1.4770; 0.3110)$
$\theta_0, \theta_1$	0.992	1.095	1.301	$B_{III}(37.6836; 9.6249; 24.7703; 4.2400; 0.1000)$
$\theta_0, \theta_2$	0.823	0.895	1.041	$B_{III}(6.6694; 6.5961; 3.0264; 1.3700; 0.2650)$
$\theta_1, \theta_2$	0.807	0.877	1.020	$B_{III}(5.3859; 8.4947; 2.3199; 1.4900; 0.2850)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.751	0.811	0.932	$B_{III}(5.7236; 7.0743; 2.3212; 1.1488; 0.2714)$
Критерий $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова				
$\theta_0$	0.286	0.383	0.620	$Sb(3.4745; 1.1215; 2.1611; 0.0065)$
$\theta_1$	0.227	0.296	0.466	$B_{III}(8.0420; 2.6222; 50.1417; 1.3950; 0.0000)$
$\theta_2$	0.135	0.167	0.240	$B_{III}(9.8988; 3.6331; 27.2342; 0.6611; 0.0000)$
$\theta_0, \theta_1$	0.167	0.215	0.334	$Sb(3.6343; 1.2549; 1.1752; 0.0074)$
$\theta_0, \theta_2$	0.100	0.121	0.172	$B_{III}(4.9109; 4.8805; 11.3991; 0.5400; 0.0058)$
$\theta_1, \theta_2$	0.099	0.121	0.174	$B_{III}(9.7955; 5.0455; 35.0176; 0.9000; 0.0000)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.078	0.094	0.133	$B_{III}(4.2414; 3.7719; 8.6839; 0.2744; 0.0087)$
Критерий $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга				
$\theta_0$	1.556	2.040	3.234	$B_{III}(4.3943; 2.4670; 38.0035; 10.7000; 0.0900)$
$\theta_1$	1.279	1.625	2.478	$B_{III}(5.3689; 3.2667; 21.3222; 6.8675; 0.0535)$
$\theta_2$	0.900	1.096	1.572	$B_{III}(3.5132; 4.3501; 8.8168; 4.2500; 0.1000)$
$\theta_0, \theta_1$	0.871	1.088	1.623	$B_{III}(5.6254; 3.7452; 20.0868; 4.9237; 0.0588)$
$\theta_0, \theta_2$	0.619	0.737	1.015	$B_{III}(7.1939; 6.8828; 3.2613; 1.5626; 0.2598)$
$\theta_1, \theta_2$	0.640	0.769	1.072	$B_{III}(30.1793; 4.4373; 60.5986; 3.2000; 0.0000)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.483	0.568	0.773	$B_{III}(5.2772; 4.4958; 7.9102; 1.5891; 0.0664)$

Таблица В.45

**Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ( $\theta_1 = 4$ )**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модели распределения статистики
	0.9	0.95	0.99	
Критерий Колмогорова				
$\theta_0$	1.131	1.256	1.506	$B_{III}(5.0752; 5.5757; 3.3089; 2.1797; 0.3000)$
$\theta_1$	1.084	1.199	1.427	$B_{III}(3.8892; 6.2974; 2.5413; 2.1402; 0.3400)$
$\theta_2$	0.890	0.966	1.119	$Sb(2.1569; 1.8555; 1.6361; 0.2661)$
$\theta_0, \theta_1$	1.024	1.133	1.352	$B_{III}(14.6423; 5.3789; 9.0355; 2.1287; 0.2000)$
$\theta_0, \theta_2$	0.839	0.914	1.068	$B_{III}(5.1515; 6.1071; 2.8573; 1.3900; 0.3000)$
$\theta_1, \theta_2$	0.833	0.909	1.065	$B_{III}(7.3590; 7.0743; 3.0755; 1.4500; 0.2450)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.769	0.834	0.970	$B_{III}(4.0431; 7.9330; 1.6664; 1.2059; 0.3007)$
Критерий $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова				
$\theta_0$	0.269	0.359	0.578	$Sb(3.4774; 1.1443; 1.9761; 0.0066)$
$\theta_1$	0.227	0.296	0.466	$B_{III}(7.2936; 2.6369; 40.7763; 1.2800; 0.0000)$
$\theta_2$	0.135	0.166	0.240	$B_{III}(6.9544; 4.2952; 17.0098; 0.7100; 0.0000)$
$\theta_0, \theta_1$	0.186	0.242	0.379	$B_{III}(10.0457; 2.7234; 74.1688; 1.4000; 0.0000)$
$\theta_0, \theta_2$	0.104	0.127	0.182	$B_{III}(10.3993; 4.2771; 25.5455; 0.5600; 0.0000)$
$\theta_1, \theta_2$	0.104	0.128	0.186	$B_{III}(5.2006; 4.4814; 13.7165; 0.5770; 0.0050)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.082	0.099	0.141	$B_{III}(4.3747; 3.2066; 9.2236; 0.2479; 0.0088)$
Критерий $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга				
$\theta_0$	1.484	1.934	3.047	$B_{III}(12.5725; 2.7914; 75.0000; 9.6500; 0.0000)$
$\theta_1$	1.279	1.625	2.478	$B_{III}(6.9691; 2.9121; 32.3978; 6.8675; 0.0535)$
$\theta_2$	0.895	1.090	1.556	$B_{III}(16.0792; 4.1280; 41.0115; 4.9000; 0.0000)$
$\theta_0, \theta_1$	0.958	1.213	1.838	$B_{III}(5.9821; 3.4306; 23.7037; 5.4000; 0.0500)$
$\theta_0, \theta_2$	0.632	0.754	1.043	$B_{III}(19.4692; 4.7303; 32.4566; 2.8950; 0.0000)$
$\theta_1, \theta_2$	0.645	0.776	1.087	$B_{III}(19.2831; 4.8148; 37.5002; 3.4100; 0.0000)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.496	0.587	0.805	$B_{III}(5.9771; 4.3144; 9.7987; 1.7085; 0.0619)$

Таблица В.46

**Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ( $\theta_1 = 5$ )**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модели распределения статистики
	0.9	0.95	0.99	
Критерий Колмогорова				
$\theta_0$	1.118	1.241	1.486	$B_{III}(4.7261; 5.4585; 3.2780; 2.1396; 0.3160)$
$\theta_1$	1.084	1.199	1.427	$B_{III}(4.0737; 5.8618; 2.8588; 2.1180; 0.3400)$
$\theta_2$	0.907	0.989	1.153	$Sb(2.2461; 1.8567; 1.7288; 0.2655)$
$\theta_0, \theta_1$	1.045	1.157	1.381	$B_{III}(5.7499; 6.4880; 3.3727; 2.1574; 0.2750)$
$\theta_0, \theta_2$	0.858	0.937	1.098	$B_{III}(4.7054; 3.4609; 2.8365; 0.9900; 0.3000)$
$\theta_1, \theta_2$	0.859	0.940	1.105	$Sb(2.4735; 1.8966; 1.7594; 0.2472)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.794	0.862	1.012	$B_{III}(6.8107; 5.1464; 3.5600; 1.1675; 0.2650)$
Критерий $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова				
$\theta_0$	0.256	0.342	0.550	$B_{III}(3.9503; 2.5327; 30.3512; 1.6890; 0.0066)$
$\theta_1$	0.227	0.296	0.466	$B_{III}(7.5116; 2.6526; 44.4963; 1.3550; 0.0000)$
$\theta_2$	0.140	0.173	0.252	$Sb(2.2461; 1.8567; 1.7288; 0.2655)$
$\theta_0, \theta_1$	0.199	0.260	0.409	$B_{III}(6.5731; 2.8621; 38.4570; 1.2800; 0.0000)$
$\theta_0, \theta_2$	0.109	0.134	0.194	$B_{III}(9.3325; 3.9118; 20.9934; 0.4950; 0.0000)$
$\theta_1, \theta_2$	0.110	0.137	0.201	$B_{III}(10.0324; 4.0962; 31.9612; 0.7050; 0.0000)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.087	0.106	0.152	$B_{III}(4.3111; 4.0100; 12.1625; 0.4264; 0.0084)$
Критерий $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга				
$\theta_0$	1.436	1.862	2.924	$B_{III}(4.8285; 3.2562; 24.8506; 9.4000; 0.0500)$
$\theta_1$	1.279	1.625	2.478	$B_{III}(4.7132; 3.5578; 16.7301; 6.8675; 0.0535)$
$\theta_2$	0.913	1.113	1.592	$B_{III}(14.4674; 4.1995; 38.4078; 5.2500; 0.0000)$
$\theta_0, \theta_1$	1.025	1.305	1.995	$B_{III}(2.9220; 3.4603; 12.4402; 5.6400; 0.1000)$
$\theta_0, \theta_2$	0.650	0.778	1.083	$B_{III}(18.0147; 4.7011; 31.4251; 3.0541; 0.0000)$
$\theta_1, \theta_2$	0.660	0.796	1.126	$B_{III}(4.2178; 5.1030; 9.9078; 3.5340; 0.0800)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.516	0.614	0.852	$B_{III}(5.0163; 4.7355; 9.8990; 2.2172; 0.0687)$

Таблица В.47

**Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ( $\theta_1 = 6$ )**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модели распределения статистики
	0.9	0.95	0.99	
Критерий Колмогорова				
$\theta_2$	1.110	1.230	1.471	Sb(2.3074; 1.7536; 2.3680; 0.2609)
$\theta_0$	1.084	1.199	1.427	B <sub>III</sub> (4.2825; 5.6444; 3.1666; 2.1430; 0.3350)
$\theta_1$	0.931	1.018	1.193	B <sub>III</sub> (6.9118; 6.0758; 3.3941; 1.6000; 0.2700)
$\theta_0, \theta_1$	1.057	1.170	1.400	Sb(2.3818; 1.7319; 2.2919; 0.2652)
$\theta_0, \theta_2$	0.877	0.959	1.126	B <sub>III</sub> (4.4099; 7.2683; 2.3131; 1.6000; 0.3100)
$\theta_0, \theta_1$	0.882	0.967	1.140	B <sub>III</sub> (5.2085; 2.3642; 4.3216; 0.9100; 0.3100)
$\theta_2, \theta_1, \theta_0$	0.818	0.893	1.052	B <sub>III</sub> (4.8898; 13.5936; 2.0728; 2.2000; 0.2840)
Критерий $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова				
$\theta_0$	0.251	0.331	0.530	Sb(3.4475; 1.1730; 1.7364; 0.0066)
$\theta_1$	0.227	0.296	0.466	B <sub>III</sub> (7.1391; 2.5851; 39.6158; 1.2500; 0.0000)
$\theta_1$	0.148	0.184	0.270	B <sub>III</sub> (5.8171; 4.3928; 16.4865; 0.8900; 0.0000)
$\theta_0, \theta_2$	0.207	0.271	0.430	Sb(3.8191; 1.2084; 1.7811; 0.0073)
$\theta_1, \theta_2$	0.116	0.143	0.208	B <sub>III</sub> (9.1508; 3.9676; 25.5001; 0.6300; 0.0000)
$\theta_1, \theta_2$	0.117	0.146	0.218	B <sub>III</sub> (11.2722; 4.0296; 63.6319; 1.2000; 0.0000)
$\theta_2, \theta_1, \theta_0$	0.093	0.114	0.167	B <sub>III</sub> (3.8686; 3.8037; 11.8789; 0.4544; 0.0092)
Критерий $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга				
$\theta_0$	1.404	1.812	2.837	B <sub>III</sub> (4.2257; 2.6227; 14.8469; 5.0000; 0.0800)
$\theta_1$	1.279	1.625	2.478	B <sub>III</sub> (6.7753; 2.9441; 31.0263; 6.8675; 0.0535)
$\theta_2$	0.940	1.150	1.652	B <sub>III</sub> (14.9774; 4.0274; 44.0425; 5.5800; 0.0000)
$\theta_0, \theta_1$	1.073	1.371	2.116	B <sub>III</sub> (5.9148; 3.2311; 37.2579; 8.2700; 0.0569)
$\theta_0, \theta_2$	0.671	0.806	1.129	B <sub>III</sub> (3.9744; 4.9635; 8.1400; 3.1000; 0.0800)
$\theta_1, \theta_2$	0.679	0.823	1.173	B <sub>III</sub> (25.5888; 4.1738; 49.2114; 3.0000; 0.0000)
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.539	0.644	0.908	B <sub>III</sub> (6.6461; 4.0515; 13.9839; 2.1420; 0.0591)

Таблица В.48

**Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ( $\theta_1 = 7$ )**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модели распределения статистики
	0.9	0.95	0.99	
Критерий Колмогорова				
$\theta_0$	1.104	1.223	1.461	$B_{III}(5.0453; 5.6018; 3.3300; 2.1145; 0.3100)$
$\theta_1$	1.084	1.199	1.427	$B_{III}(5.3655; 6.0543; 3.3092; 2.1402; 0.3000)$
$\theta_2$	0.955	1.047	1.231	$B_{III}(8.8643; 20.9468; 7.9001; 9.1000; 0.2300)$
$\theta_0, \theta_1$	1.066	1.180	1.409	$Sb(2.4625; 1.7390; 2.3814; 0.2668)$
$\theta_0, \theta_2$	0.895	0.980	1.153	$B_{III}(4.2520; 7.5684; 2.1829; 1.6786; 0.3100)$
$\theta_1, \theta_2$	0.902	0.991	1.169	$B_{III}(4.5096; 5.6482; 3.0218; 1.6000; 0.3100)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.839	0.918	1.079	$B_{III}(8.5291; 6.5470; 4.4062; 1.6000; 0.2400)$
Критерий $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова				
$\theta_0$	0.246	0.323	0.516	$B_{III}(7.5042; 2.4317; 48.3146; 1.4000; 0.0000)$
$\theta_1$	0.227	0.296	0.466	$B_{III}(6.2641; 2.8729; 33.7742; 1.3750; 0.0000)$
$\theta_2$	0.156	0.196	0.290	$B_{III}(4.1621; 3.9072; 14.0226; 0.8986; 0.0059)$
$\theta_0, \theta_1$	0.213	0.278	0.441	$Sb(3.4488; 1.2020; 1.4196; 0.0061)$
$\theta_0, \theta_2$	0.122	0.151	0.223	$B_{III}(7.9405; 3.8743; 23.4697; 0.6700; 0.0000)$
$\theta_1, \theta_2$	0.124	0.155	0.234	$B_{III}(7.5192; 4.0675; 25.1497; 0.7945; 0.0000)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.010	0.123	0.181	$B_{III}(5.5784; 3.2913; 17.0579; 0.4290; 0.0067)$
Критерий $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга				
$\theta_0$	1.380	1.778	2.770	$Sb(3.7593; 1.3295; 9.6362; 0.0552)$
$\theta_1$	1.279	1.625	2.478	$B_{III}(4.8031; 3.4732; 17.6302; 6.8675; 0.0535)$
$\theta_2$	0.972	1.193	1.724	$B_{III}(3.4890; 4.7102; 10.2828; 5.9597; 0.0800)$
$\theta_0, \theta_1$	1.111	1.420	2.184	$B_{III}(5.4232; 3.1894; 26.3229; 6.7000; 0.0539)$
$\theta_0, \theta_2$	0.692	0.835	1.178	$B_{III}(11.9769; 4.7144; 19.2233; 3.0000; 0.0000)$
$\theta_1, \theta_2$	0.701	0.852	1.225	$B_{III}(22.3537; 4.1744; 51.2639; 3.6000; 0.0000)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.563	0.677	0.955	$B_{III}(8.0353; 3.9949; 18.1724; 2.4000; 0.0500)$

Таблица В.49

**Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ( $\theta_1 = 8$ )**

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модели распределения статистики
	0.9	0.95	0.99	
Критерий Колмогорова				
$\theta_0$	1.100	1.218	1.454	$B_{III}(8.0781; 4.8128; 5.8094; 2.0960; 0.2735)$
$\theta_1$	1.084	1.199	1.428	$Sb(2.4326; 1.7778; 2.3797; 0.2673)$
$\theta_2$	0.978	1.074	1.266	$B_{III}(8.4485; 5.1812; 5.5890; 1.8364; 0.2700)$
$\theta_0, \theta_1$	1.072	1.186	1.417	$B_{III}(5.7833; 6.1641; 3.2903; 2.1269; 0.2699)$
$\theta_0, \theta_2$	0.911	0.999	1.179	$Sb(2.6863; 1.8734; 2.0545; 0.2559)$
$\theta_1, \theta_2$	0.929	1.012	1.198	$Sb(2.6357; 1.8244; 2.0497; 0.2612)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.863	0.948	1.117	$B_{III}(11.1281; 6.1031; 6.0962; 1.7021; 0.2200)$
Критерий $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова				
$\theta_0$	0.242	0.319	0.507	$B_{III}(4.5895; 2.5584; 15.2153; 0.8500; 0.0000)$
$\theta_1$	0.228	0.296	0.467	$B_{III}(6.0112; 2.5379; 23.0339; 0.8900; 0.0000)$
$\theta_2$	0.166	0.209	0.314	$B_{III}(5.8877; 4.0329; 23.3907; 1.2150; 0.0000)$
$\theta_0, \theta_1$	0.217	0.284	0.450	$Sb(3.4552; 1.1997; 1.4606; 0.0061)$
$\theta_0, \theta_2$	0.128	0.160	0.239	$Sb(4.6035; 1.4434; 1.3182; 0.0060)$
$\theta_1, \theta_2$	0.131	0.165	0.252	$Sb(4.4612; 1.4003; 1.3183; 0.0059)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.107	0.134	0.201	$B_{III}(6.9845; 2.7596; 2.6920; 0.4000; 0.0060)$
Критерий $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга				
$\theta_0$	1.363	1.752	2.722	$B_{III}(5.6824; 4.0065; 18.9636; 8.4000; 0.0000)$
$\theta_1$	1.279	1.624	2.477	$Sb(3.4000; 1.3163; 7.4752; 0.0535)$
$\theta_2$	1.005	1.240	1.799	$B_{III}(3.4843; 5.3032; 9.1592; 6.2767; 0.0800)$
$\theta_0, \theta_1$	1.139	1.457	2.243	$B_{III}(6.3736; 2.8599; 35.0312; 6.7458; 0.0538)$
$\theta_0, \theta_2$	0.713	0.864	1.227	$B_{III}(4.6820; 5.7296; 7.8880; 3.4597; 0.0523)$
$\theta_1, \theta_2$	0.722	0.881	1.275	$B_{III}(4.3613; 6.0352; 7.6499; 3.8116; 0.0520)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.589	0.714	1.009	$B_{III}(7.9147; 4.0088; 21.3294; 2.9120; 0.0500)$

Таблица В.50

**Процентные точки и распределения статистики Колмогорова при проверке сложных гипотез и вычислении ОМП одного или двух параметров формы бета-распределений первого и второго рода**

		При оценивании одного из параметров $\theta_0$ или $\theta_1$			
$\theta_0$	$\theta_1$	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
0.25	0.25	1.058	1.170	1.398	$B_{III}(6.8597; 5.1140; 4.5522; 1.9581; 0.2803)$
0.5	0.5	1.030	1.135	1.348	$B_{III}(6.6547; 5.0791; 4.0459; 1.7722; 0.2827)$
0.75	0.75	1.010	1.113	1.314	$B_{III}(6.3949; 5.6417; 3.5771; 1.7799; 0.2833)$
1	1	0.994	1.091	1.289	$B_{III}(7.3246; 5.4328; 4.0112; 1.7102; 0.2702)$
2	2	0.957	1.046	1.233	$B_{III}(5.9642; 5.6154; 2.9990; 1.5292; 0.2885)$
3	3	0.939	1.025	1.202	$B_{III}(8.3807; 5.1719; 4.1359; 1.4690; 0.2601)$
4	4	0.928	1.012	1.181	$B_{III}(7.2512; 4.8654; 3.6112; 1.3522; 0.2748)$
5	5	0.921	1.004	1.171	$B_{III}(6.5326; 5.3666; 3.1539; 1.3856; 0.2838)$
6	6	0.915	0.997	1.161	$B_{III}(7.6098; 5.6551; 3.4763; 1.4386; 0.2652)$
7	7	0.912	0.993	1.155	$B_{III}(5.1333; 5.9954; 2.3336; 1.3716; 0.3032)$
8	8	0.909	0.988	1.150	$B_{III}(6.4544; 5.9324; 2.8642; 1.4047; 0.2798)$
9	9	0.907	0.986	1.142	$B_{III}(6.2320; 5.8571; 2.7868; 1.3812; 0.2839)$
10	10	0.905	0.984	1.142	$B_{III}(8.0358; 5.2786; 3.6801; 1.3578; 0.2615)$
		При оценивании двух параметров $\theta_0$ и $\theta_1$			
$\theta_0$	$\theta_1$	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
0.25	0.25	0.911	1.004	1.208	$B_{III}(6.2931; 6.1562; 3.7837; 1.7288; 0.2826)$
0.5	0.5	0.887	0.970	1.141	$\gamma(5.7078; 0.0687; 0.2744;)$
0.75	0.75	0.877	0.957	1.122	$B_{III}(8.7698; 5.4387; 4.4166; 1.4233; 0.2515)$
1	1	0.869	0.948	1.110	$\gamma(6.0588; 0.0641; 0.2695;)$
2	2	0.854	0.929	1.083	$B_{III}(6.9450; 5.6772; 3.3264; 1.3184; 0.2709)$
3	3	0.849	0.924	1.076	$B_{III}(8.0883; 5.3028; 3.9525; 1.2880; 0.2608)$
4	4	0.846	0.921	1.071	$B_{III}(7.1541; 5.9954; 3.3447; 1.3508; 0.2664)$
5	5	0.844	0.918	1.069	$B_{III}(6.4824; 5.5411; 3.0032; 1.2364; 0.2748)$
6	6	0.843	0.916	1.067	$B_{III}(6.0438; 6.1303; 2.7738; 1.3066; 0.2798)$
7	7	0.840	0.916	1.066	$B_{III}(6.4246; 5.7070; 2.9437; 1.2503; 0.2744)$
8	8	0.841	0.914	1.066	$B_{III}(7.3916; 5.4188; 3.5829; 1.2627; 0.2683)$
9	9	0.840	0.913	1.064	$B_{III}(7.5935; 6.2434; 3.4384; 1.3711; 0.2602)$
10	10	0.840	0.913	1.062	$B_{III}(7.3966; 5.7184; 3.5120; 1.3084; 0.2651)$

Таблица В.51

**Процентные точки и распределения статистики Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке сложных гипотез и вычислении ОМП одного или двух параметров формы бета-распределений первого и второго рода**

		При оценивании одного из параметров $\theta_0$ или $\theta_1$			Модель распределения статистики	
$\theta_0$	$\theta_1$	Процентные точки				
		0.9	0.95	0.99		
0.25	0.25	0.210	0.273	0.433	$B_{III}(4.143; 2.689; 42.948; 1.988; 0.009)$	
0.5	0.5	0.192	0.247	0.384	$B_{III}(4.352; 2.723; 29.754; 1.286; 0.009)$	
0.75	0.75	0.182	0.232	0.357	$B_{III}(4.440; 2.556; 20.019; 0.790; 0.009)$	
1	1	0.174	0.221	0.334	$B_{III}(4.223; 3.025; 19.991; 0.974; 0.009)$	
2	2	0.158	0.197	0.294	$B_{III}(5.319; 2.744; 22.232; 0.714; 0.009)$	
3	3	0.150	0.187	0.276	$B_{III}(4.244; 3.346; 15.550; 0.768; 0.009)$	
4	4	0.147	0.182	0.265	$B_{III}(4.657; 3.144; 14.774; 0.623; 0.008)$	
5	5	0.144	0.179	0.260	$B_{III}(3.950; 3.532; 13.323; 0.725; 0.010)$	
6	6	0.142	0.177	0.255	$B_{III}(4.087; 3.376; 12.456; 0.627; 0.009)$	
7	7	0.142	0.175	0.251	$B_{III}(3.710; 3.568; 11.878; 0.681; 0.010)$	
8	8	0.140	0.173	0.250	$B_{III}(3.884; 3.392; 11.710; 0.611; 0.010)$	
9	9	0.140	0.173	0.250	$B_{III}(4.419; 3.353; 14.121; 0.641; 0.009)$	
10	10	0.139	0.172	0.249	$B_{III}(4.277; 3.450; 13.006; 0.631; 0.009)$	

При оценивании двух параметров  $\theta_0$  и  $\theta_1$ 

$\theta_0$	$\theta_1$	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
0.25	0.25	0.129	0.165	0.267	$B_{III}(4.017; 3.864; 28.496; 1.380; 0.009)$
0.5	0.5	0.119	0.148	0.217	$B_{III}(5.619; 3.214; 19.551; 0.561; 0.007)$
0.75	0.75	0.116	0.143	0.209	$B_{III}(4.392; 3.703; 15.289; 0.632; 0.009)$
1	1	0.113	0.139	0.201	$B_{III}(4.878; 3.391; 12.997; 0.453; 0.008)$
2	2	0.109	0.132	0.190	$B_{III}(4.274; 3.912; 11.443; 0.505; 0.009)$
3	3	0.107	0.131	0.187	$B_{III}(4.432; 3.890; 12.071; 0.503; 0.009)$
4	4	0.107	0.130	0.186	$B_{III}(4.626; 3.442; 10.879; 0.388; 0.008)$
5	5	0.106	0.129	0.182	$B_{III}(5.187; 3.435; 12.058; 0.388; 0.007)$
6	6	0.106	0.129	0.182	$B_{III}(4.550; 3.598; 11.115; 0.417; 0.008)$
7	7	0.105	0.128	0.182	$B_{III}(4.784; 3.556; 11.311; 0.402; 0.008)$
8	8	0.105	0.128	0.182	$B_{III}(4.317; 3.406; 10.160; 0.374; 0.009)$
9	9	0.105	0.128	0.181	$B_{III}(4.426; 3.789; 11.165; 0.449; 0.008)$
10	10	0.105	0.127	0.180	$B_{III}(5.929; 3.738; 15.611; 0.478; 0.006)$

Таблица В.52

**Процентные точки и распределения статистики Андерсона–Дарлинга при проверке сложных гипотез и вычислении ОМП одного или двух параметров формы бета-распределений первого и второго рода**

При оценивании одного из параметров $\theta_0$ или $\theta_1$						
$\theta_0$	$\theta_1$	Процентные точки			Модель распределения статистики	
		0.9	0.95	0.99		
0.25	0.25	1.185	1.501	2.271	$B_{III}(4.7998; 3.0039; 23.1645; 6.6020; 0.0822)$	
0.5	0.5	1.131	1.425	2.137	$B_{III}(4.9816; 3.3050; 22.1179; 6.6710; 0.0762)$	
0.75	0.75	1.093	1.362	2.025	$B_{III}(5.5470; 2.9940; 19.1035; 4.6460; 0.0741)$	
1	1	1.060	1.311	1.934	$B_{III}(4.5154; 3.5339; 15.5727; 5.3919; 0.0818)$	
2	2	0.991	1.219	1.776	$B_{III}(4.9038; 3.2305; 13.9134; 3.8897; 0.0827)$	
3	3	0.958	1.179	1.707	$B_{III}(4.6551; 3.7018; 13.4390; 4.4449; 0.0820)$	
4	4	0.945	1.155	1.652	$B_{III}(5.4124; 3.6231; 14.5538; 4.1091; 0.0719)$	
5	5	0.935	1.142	1.638	$B_{III}(4.9905; 3.7778; 13.6025; 4.2775; 0.0759)$	
6	6	0.927	1.132	1.619	$B_{III}(4.9358; 3.7760; 13.3678; 4.2059; 0.0776)$	
7	7	0.923	1.126	1.600	$B_{III}(4.3926; 3.8138; 11.7944; 4.1217; 0.0870)$	
8	8	0.918	1.120	1.589	$B_{III}(5.0646; 3.7081; 12.8357; 3.8722; 0.0760)$	
9	9	0.916	1.115	1.588	$B_{III}(4.5928; 3.6144; 11.2996; 3.6085; 0.0834)$	
10	10	0.912	1.113	1.587	$B_{III}(4.9414; 3.8613; 12.9902; 4.1448; 0.0759)$	
При оценивании двух параметров $\theta_0$ и $\theta_1$						
$\theta_0$	$\theta_1$	Процентные точки			Модель распределения статистики	
		0.9	0.95	0.99		
0.25	0.25	0.696	0.844	1.201	$B_{III}(5.6142; 3.8769; 13.8704; 2.9981; 0.0687)$	
0.5	0.5	0.680	0.823	1.163	$B_{III}(6.7982; 3.7476; 15.9038; 2.7538; 0.0634)$	
0.75	0.75	0.671	0.809	1.144	$B_{III}(5.6255; 4.4234; 12.9940; 3.1863; 0.0661)$	
1	1	0.662	0.797	1.107	$B_{III}(6.0913; 3.8879; 11.6826; 2.3628; 0.0653)$	
2	2	0.647	0.772	1.072	$B_{III}(5.1445; 4.4750; 9.8938; 2.6415; 0.0704)$	
3	3	0.644	0.766	1.063	$B_{III}(5.2646; 4.4997; 10.4705; 2.7149; 0.0701)$	
4	4	0.641	0.765	1.058	$B_{III}(5.6445; 3.8763; 9.6984; 2.0719; 0.0678)$	
5	5	0.637	0.762	1.052	$B_{III}(7.1551; 3.8144; 12.1629; 2.0749; 0.0567)$	
6	6	0.639	0.761	1.050	$B_{III}(5.7710; 4.1758; 10.8466; 2.4035; 0.0660)$	
7	7	0.636	0.760	1.049	$B_{III}(4.6915; 4.0848; 8.0924; 2.1196; 0.0777)$	
8	8	0.636	0.760	1.048	$B_{III}(5.6450; 3.8687; 10.1194; 2.1099; 0.0700)$	
9	9	0.636	0.759	1.047	$B_{III}(5.5236; 4.1458; 9.8416; 2.2648; 0.0678)$	
10	10	0.635	0.759	1.046	$B_{III}(6.7183; 4.3985; 12.6458; 2.6038; 0.0556)$	

## **ПРИЛОЖЕНИЕ С**

### **ТАБЛИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОПТИМАЛЬНЫХ $L$ -ОЦЕНОК ДЛЯ БОЛЬШИХ ВЫБОРОК**





Таблица С.1

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига нормального распределения. Известен масштабный параметр**

$k$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
2	0	1								
3	0	0.5	0.5							
4	0	0.295397	0.409207	0.295397						
5	0	0.191747	0.308253	0.308253	0.191747					
6	0	0.132788	0.232629	0.232629	0.269166	0.232629	0.132788			
7	0	0.096375	0.178771	0.224854	0.224854	0.224854	0.178771	0.096375		
8	0	0.072178	0.140209	0.186282	0.202664	0.202664	0.186282	0.140209	0.072178	
9	0	0.056339	0.111523	0.154649	0.177489	0.177489	0.154649	0.111523	0.056339	
10	0	0.041318	0.097367	0.127902	0.152800	0.161226	0.152800	0.127902	0.097367	0.041318

Таблица С.2

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба нормального распределения. Известен параметр сдвига**

$k$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
2	0.634921	-0.634921								
3	0	-0.337359	0.337359							
4	0.064150	-0.122413	-0.252996	0.311258						
5	0	-0.115285	-0.236766	0.236766	0.115285					
6	0.021513	-0.055242	-0.126006	-0.185699	0.231609	0.113824				
7	0	-0.054640	-0.124571	-0.182339	0.182339	0.124571	0.054640			
8	0.010586	-0.030816	-0.073132	-0.117180	-0.148499	0.180589	0.123829	0.054624		
9	0	-0.031157	-0.072629	-0.116643	-0.147029	0.147029	0.116643	0.072629	0.031157	
10	0.005915	-0.019601	-0.046317	-0.077199	-0.1106036	-0.123379	0.146340	0.116468	0.072905	0.030905

Таблица С.3

Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига нормального распределения. Неизвестны оба параметра

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$	$\gamma_{10}$	$\gamma_{11}$	$\gamma_{12}$	$\gamma_{13}$	$\gamma_{14}$
3	0.500000	0.500000												
4	0.224374	0.551252	0.224374											
5	0.108579	0.391421	0.391421	0.108579										
6	0.067815	0.234061	0.396249	0.234061	0.067815									
7	0.043180	0.141936	0.314884	0.314884	0.141936	0.043180								
8	0.029871	0.096902	0.216939	0.312575	0.216939	0.096902	0.029871							
9	0.021547	0.068108	0.148605	0.261739	0.261739	0.148605	0.068108	0.021547						
10	0.016187	0.050213	0.107748	0.196679	0.258345	0.196679	0.107748	0.050213	0.016187					
11	0.012568	0.037666	0.080500	0.145524	0.223741	0.223741	0.145524	0.080500	0.037666	0.012568				
12	0.002356	0.078666	0.032450	0.099837	0.188002	0.197378	0.188002	0.099837	0.032450	0.078666	0.002356			
13	0.008056	0.023716	0.048181	0.086640	0.138225	0.195182	0.195182	0.138225	0.086640	0.048181	0.023716	0.008056		
14	0.006737	0.018173	0.039623	0.068299	0.109776	0.161527	0.191732	0.161527	0.109776	0.068299	0.039623	0.018173	0.006737	
15	0.005076	0.015581	0.032157	0.055371	0.088028	0.130918	0.172869	0.130918	0.088028	0.055371	0.032157	0.015581	0.005076	

Таблица С.4

Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба нормального распределения. Неизвестны оба параметра

$k$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$	$v_{12}$	$v_{13}$	$v_{14}$
3	-0.450207	0.450207												
4	-0.361428	0	0.361428											
5	-0.201360	-0.229872	0.229872	0.201360										
6	-0.140732	-0.235892	0	0.235892	0.140732									
7	-0.095717	-0.186279	-0.136715	0.136715	0.186279	0.095717								
8	-0.070411	-0.147147	-0.166972	0	0.166972	0.147147	0.070411							
9	-0.052747	-0.114684	-0.153492	-0.090860	0.090860	0.153492	0.114684	0.052747						
10	-0.040995	-0.091463	-0.132388	-0.123812	0	0.123812	0.132388	0.091463	0.040995					
11	-0.032533	-0.073373	-0.111849	-0.124976	-0.064980	0.064980	0.124976	0.111849	0.073373	0.032533				
12	-0.019239	-0.098971	-0.069069	-0.112065	-0.080404	0	0.080404	0.112065	0.069069	0.098971	0.019239			
13	-0.021688	-0.050048	-0.079521	-0.102566	-0.102357	-0.048835	0.048835	0.102357	0.102566	0.079521	0.050048	0.021688		
14	-0.018214	-0.041087	-0.068460	-0.090418	-0.099244	-0.075434	0	0.075434	0.099244	0.090418	0.068460	0.041087	0.018214	
15	-0.014676	-0.035496	-0.058652	-0.079499	-0.092263	-0.085051	-0.038353	0.038353	0.085051	0.092263	0.079499	0.058652	0.035496	0.014676

Таблица С.5

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига логистического распределения. Известен масштабный параметр**

$k$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
2	0	1.000000								
3	0	0.500000	0.500000							
4	0	0.300005	0.399990	0.300005						
5	0	0.200003	0.299997	0.299997	0.200003					
6	0	0.142866	0.228583	0.257103	0.228583	0.142866				
7	0	0.107125	0.178585	0.214290	0.214290	0.178585	0.107125			
8	0	0.083334	0.142856	0.178581	0.190456	0.178581	0.142856	0.083334		
9	0	0.066695	0.116598	0.150057	0.166650	0.166650	0.150057	0.116598	0.066695	
10	0	0.054558	0.096957	0.127285	0.145431	0.151541	0.145431	0.127285	0.096957	0.054558

**Таблица С.6**  
**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба логистического распределения. Известен параметр сдвига**

$k$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
2	0.755970	-0.755970								
3	0	-0.418872	0.418872							
4	0.061267	-0.135300	-0.322464	0.396497						
5	0	-0.130116	-0.305735	0.302100	0.138061					
6	0.019847	-0.058311	-0.152800	-0.243988	0.304532	0.130720				
7	0	-0.058446	-0.152535	-0.241265	0.241265	0.152535	0.058446			
8	0.008962	-0.030625	-0.084527	-0.147981	-0.197890	0.240583	0.152676	0.058803		
9	0	-0.031087	-0.084851	-0.148233	-0.196942	0.148233	0.084851	0.031087		
10	0.005069	-0.018618	-0.051311	-0.093647	-0.137254	-0.165922	0.196706	0.148756	0.085222	0.030999

Таблица С.7

Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига логистического распределения. Неизвестны оба параметра

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$	$\gamma_{10}$	$\gamma_{11}$	$\gamma_{12}$	$\gamma_{13}$	$\gamma_{14}$
3	0.500000	0.500000												
4	0.180032	0.639926	0.180032											
5	0.068759	0.431241	0.431241	0.068759										
6	0.032667	0.235580	0.463506	0.235580	0.032667									
7	0.016276	0.127108	0.356615	0.356615	0.127108	0.016276								
8	0.009070	0.073276	0.235704	0.363901	0.235704	0.073276	0.009070							
9	0.005027	0.044244	0.151113	0.299616	0.299616	0.151113	0.044244	0.005027						
10	0.002907	0.027965	0.098968	0.220560	0.220560	0.220560	0.098968	0.027965	0.002907					
11	0.002076	0.017817	0.066423	0.156705	0.256979	0.256979	0.156705	0.066423	0.017817	0.002076				
12	0.001340	0.011776	0.045582	0.111840	0.202450	0.254025	0.202450	0.111840	0.045582	0.011776	0.001340			
13	0.000801	0.008215	0.032047	0.080289	0.154017	0.224845	0.224247	0.154184	0.080289	0.032047	0.008215	0.000801		
14	0.000669	0.005497	0.022853	0.058798	0.116512	0.185366	0.220609	0.185366	0.116512	0.058798	0.022853	0.005497	0.000669	
15	0.000199	0.003813	0.015948	0.041514	0.084367	0.141300	0.189859	0.189859	0.141300	0.084367	0.041514	0.015948	0.003813	0.000199

Таблица С.8

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба логистического распределения. Незвестны оба параметра**

$k$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$	$v_{12}$	$v_{13}$	$v_{14}$
3	-0.776854	0.776854												
4	-0.458100	0	0.458100											
5	-0.258222	-0.305810	0.305810	0.258222										
6	-0.168553	-0.312483	0	0.312483	0.168553									
7	-0.112256	-0.248569	-0.177290	0.177290	0.248569	0.112256								
8	-0.079479	-0.191015	-0.219920	0	0.219920	0.191015	0.079479							
9	-0.057642	-0.146792	-0.205412	-0.116039	0.116039	0.205412	0.146792	0.057642						
10	-0.043187	-0.114395	-0.176647	-0.161259	0	0.161259	0.176647	0.114395	0.043187					
11	-0.033660	-0.089706	-0.147760	-0.165782	-0.081671	0.081671	0.165782	0.147760	0.089706	0.033660				
12	-0.026443	-0.071718	-0.123177	-0.154062	-0.122382	0	0.122382	0.154062	0.123177	0.071718	0.026443			
13	-0.020990	-0.058367	-0.102783	-0.137369	-0.135186	-0.059276	0.059789	0.134756	0.137369	0.102783	0.058367	0.020990		
14	-0.017295	-0.047587	-0.086118	-0.120354	-0.132429	-0.095578	0	0.095578	0.132429	0.120354	0.086118	0.047587	0.017295	
15	-0.013019	-0.037789	-0.069312	-0.099835	-0.117940	-0.105469	-0.044735	0.044735	0.105469	0.117940	0.045811	0.187676	0.018911	0.013019

Таблица С.9

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения Коши. Известен масштабный параметр**

$k$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
2	0	1.000000								
3	0	0.500000	0.500000							
4	-0.069618	-0.032472	0.502862	0.529609						
5	0	-0.029899	0.529899	-0.029899						
6	0	-0.033723	0.336301	0.394844	0.336301	-0.033723				
7	0	-0.035583	0.240362	0.295221	0.295221	0.240362	-0.035583			
8	-0.009075	-0.009071	-0.035351	0.236730	0.298054	0.300385	0.244491	-0.035238		
9	0	-0.008981	-0.034899	0.240933	0.302947	0.302947	0.240933	-0.034899	-0.008981	
10	0	-0.009367	-0.036311	0.183752	0.236240	0.251371	0.236240	0.183752	-0.036311	-0.009367

Таблица С.10

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения Коши. Известен параметр сдвига**

$k$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
2	0.753352	-0.753352								
3	0	-0.500000	0.500000							
4	-0.019303	-0.507605	0.369455	0.157453						
5	0	-0.164801	0.379276	0.379276	0.164801					
6	-0.008426	-0.168069	-0.384011	0.287400	0.196815	0.076291				
7	0	-0.078485	-0.197507	-0.291445	0.291445	0.197507	0.078485			
8	-0.001648	-0.079673	-0.200011	-0.293518	0.231220	0.184869	0.1144843	0.043918		
9	0	-0.044722	-0.116728	-0.187479	-0.232872	0.232872	0.187479	0.116728	0.044722	
10	-0.000755	-0.045237	-0.117888	-0.189199	-0.233560	0.191379	0.167963	0.124473	0.074757	0.028066

Таблица С.11

Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения Коши. Неизвестны оба параметра

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$	$\gamma_{10}$	$\gamma_{11}$	$\gamma_{12}$	$\gamma_{13}$	$\gamma_{14}$
3	0.500000	0.500000												
4	0	1.000000	0											
5	-0.085415	0.585415	0.585415	-0.085415										
6	-0.083338	0.250058	0.666560	0.250058	-0.083338									
7	-0.067065	0.077672	0.489393	0.489393	0.077672	-0.067065								
8	-0.051776	-0.000008	0.301801	0.499967	0.301801	-0.000008	-0.051776							
9	-0.039830	-0.031878	0.166716	0.404992	0.404992	0.166716	-0.031878	-0.039830						
10	-0.030901	-0.042682	0.080792	0.292814	0.399953	0.292814	0.080792	-0.042682	-0.030901					
11	-0.024278	-0.044162	0.029601	0.197000	0.341839	0.341839	0.197000	0.029601	-0.044162	-0.024278				
12	-0.019338	-0.041657	-0.000054	0.125080	0.269365	0.333208	0.269365	0.125080	-0.000054	-0.041657	-0.019338			
13	-0.015605	-0.037732	-0.016315	0.073863	0.201276	0.294513	0.294513	0.201276	0.073863	-0.016315	-0.037732	-0.015605		
14	-0.012750	-0.033543	-0.024668	0.038828	0.144688	0.244642	0.285606	0.244642	0.144688	0.038828	-0.024668	-0.033543	-0.012750	
15	-0.010537	-0.029522	-0.026876	0.010359	0.103436	0.195122	0.257985	0.257985	0.195122	0.100008	0.015434	-0.028455	-0.029522	-0.010537

Таблица С.12

Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения Коши. Неизвестны оба параметра

$k$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$	$v_{12}$	$v_{13}$	$v_{14}$
3	-0.866101	0.866101												
4	-0.500000	0	0.500000											
5	-0.262874	-0.425301	0.425301	0.262874										
6	-0.144359	-0.433000	0	0.433000	0.144359									
7	-0.084109	-0.340573	-0.235501	0.235501	0.340573	0.084109								
8	-0.051778	-0.250008	-0.301759	0	0.301759	0.250008	0.051778							
9	-0.033418	-0.180883	-0.288675	-0.147331	0.147331	0.288675	0.180883	0.033418						
10	-0.022447	-0.131427	-0.249032	-0.212590	0	0.212590	0.249032	0.131427	0.022447					
11	-0.015590	-0.096691	-0.205584	-0.227389	-0.100494	0.100494	0.227389	0.205584	0.096691	0.015590				
12	-0.011168	-0.072177	-0.166688	-0.216527	-0.155371	0	0.155371	0.216527	0.166688	0.072177	0.011168			
13	-0.008186	-0.054700	-0.134282	-0.194830	-0.178544	-0.072310	0.072310	0.178544	0.194830	0.134282	0.054700	0.008186		
14	-0.006141	-0.042072	-0.108315	-0.170289	-0.181275	-0.117732	0	0.117732	0.181275	0.170289	0.108315	0.042072	0.006141	
15	-0.004690	-0.032807	-0.087472	-0.146571	-0.172799	-0.141745	-0.054838	0.054838	0.141745	0.173154	0.146442	0.087636	0.032807	0.004690

Таблица С.13

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения минимального значения.  
Известен масштабный параметр**

$k$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
2	-0.465996	1.000000								
3	-0.457864	0.532646	0.467354							
4	-0.451558	0.337327	0.401156	0.261517						
5	-0.446464	0.234433	0.319531	0.282886	0.163150					
6	-0.439500	0.173268	0.255595	0.260389	0.204166	0.106582				
7	-0.438789	0.132909	0.206402	0.227756	0.205867	0.150678	0.076389			
8	-0.435234	0.105473	0.170026	0.197786	0.193612	0.163122	0.115124	0.054857		
9	-0.434650	0.085691	0.141899	0.171209	0.176729	0.162204	0.130588	0.089212	0.042467	
10	-0.431147	0.071154	0.120352	0.149321	0.159955	0.154513	0.135559	0.106161	0.072205	0.030780

Таблица С.14

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения минимального значения.  
Известен параметр сдвига**

$k$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
2	-0.800008	0.800008								
3	-0.215568	-0.236436	0.452003							
4	-0.282815	-0.217377	0.324412	0.175780						
5	-0.224455	-0.070208	-0.177386	0.304291	0.167758					
6	-0.247175	-0.069342	-0.173996	0.233460	0.172956	0.084097				
7	-0.227945	-0.030560	-0.083598	-0.141485	0.228320	0.171070	0.084197			
8	-0.238506	-0.030609	-0.083324	-0.140479	0.183618	0.156220	0.103241	0.049839		
9	-0.228374	-0.016560	-0.045192	-0.082831	-0.117161	0.182167	0.156321	0.103947	0.047683	
10	-0.233782	-0.016276	-0.045826	-0.083200	-0.117318	0.151883	0.139842	0.107086	0.069284	0.028207

Таблица С.15

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения минимального значения.  
Неизвестны оба параметра**

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$	$\gamma_{10}$	$\gamma_{11}$	$\gamma_{12}$	$\gamma_{13}$	$\gamma_{14}$
3	0.424683	0.575317												
4	0.259011	0.567488	0.173501											
5	0.087506	0.370746	0.421752	0.119996										
6	0.059067	0.240645	0.409087	0.226108	0.065093									
7	0.034040	0.128765	0.314224	0.327084	0.150634	0.045253								
8	0.024398	0.088128	0.223156	0.321325	0.214830	0.098316	0.029848							
9	0.016937	0.058429	0.144647	0.267738	0.266161	0.152971	0.071629	0.021488						
10	0.012575	0.043104	0.102543	0.204335	0.265207	0.195430	0.108795	0.052394	0.015617					
11	0.009448	0.031650	0.073962	0.147302	0.231116	0.228465	0.144645	0.082857	0.038607	0.011948				
12	0.004967	0.026789	0.056002	0.109884	0.186937	0.225597	0.176844	0.110986	0.063256	0.029678	0.009060			
13	0.006079	0.018848	0.042830	0.082698	0.143306	0.202875	0.195379	0.138991	0.086621	0.050101	0.023869	0.008403		
14	0.005025	0.016026	0.035664	0.036904	0.124799	0.262761	0.197126	0.158732	0.108465	0.066662	0.038618	0.018720	0.004305	
15	0.003854	0.012502	0.026878	0.050692	0.086782	0.136910	0.180218	0.173365	0.130048	0.089562	0.055200	0.034471	0.015626	0.003891

Таблица С.16

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения минимального значения.  
Неизвестны оба параметра**

$k$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$	$v_{12}$	$v_{13}$	$v_{14}$
3	-0.443262	0.443262												
4	-0.362597	0.010676	0.351921											
5	-0.164819	-0.265862	0.194586	0.236094										
6	-0.116846	-0.249166	-0.024255	0.231207	0.159060									
7	-0.072171	-0.178331	-0.170090	0.107189	0.196781	0.116621								
8	-0.052789	-0.136821	-0.184766	-0.024164	0.155898	0.157513	0.085128							
9	-0.037595	-0.100410	-0.159593	-0.116944	0.068569	0.151888	0.128660	0.065425						
10	-0.028437	-0.078267	-0.132102	-0.142130	-0.020502	0.111319	0.135342	0.104056	0.050722					
11	-0.021709	-0.060751	-0.106995	-0.136589	-0.084165	0.046187	0.120032	0.118560	0.084909	0.049520				
12	-0.013695	-0.051398	-0.088032	-0.121692	-0.113227	-0.017017	0.083450	0.114646	0.102898	0.071025	0.033041			
13	-0.013850	-0.038567	-0.071379	-0.103285	-0.115343	-0.065555	0.034214	0.093916	0.104064	0.087906	0.059204	0.028715		
14	-0.011017	-0.031711	-0.059539	-0.084847	-0.09454	-0.086942	-0.017490	0.060535	0.092338	0.092034	0.075032	0.050203	0.020858	
15	-0.009104	-0.026590	-0.049557	-0.075451	-0.096666	-0.097958	-0.052212	0.026068	0.077015	0.091604	0.084358	0.067620	0.043148	0.017726

Таблица С.17

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения максимального значения.  
Известен масштабный параметр**

$k$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
2	0.466000	1.000000								
3	0.457846	0.467366	0.532634							
4	0.451551	0.261502	0.401151	0.337347						
5	0.446446	0.163107	0.282950	0.319530	0.234412					
6	0.439447	0.106538	0.204170	0.260439	0.255570	0.173284				
7	0.438801	0.076396	0.150624	0.205966	0.227713	0.206407	0.132894			
8	0.435196	0.054833	0.115141	0.163062	0.193653	0.197802	0.170041	0.105469		
9	0.434402	0.042420	0.089228	0.130487	0.162259	0.176658	0.171181	0.141422	0.086345	
10	0.431129	0.030780	0.072225	0.106010	0.135783	0.154368	0.159998	0.149319	0.120359	0.071157

Таблица С.18

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения максимального значения.  
Известен параметр сдвига**

$k$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
2	0.800000	-0.800000								
3	0.215640	-0.452038	0.236398							
4	0.282847	-0.175751	-0.324447	0.217351						
5	0.224370	-0.167758	-0.304212	0.177338	0.070262					
6	0.247618	-0.084962	-0.172411	-0.233338	0.173928	0.069165				
7	0.227562	-0.082969	-0.171188	-0.229064	0.141544	0.083647	0.030668			
8	0.239557	-0.049378	-0.104800	-0.155945	-0.183386	0.140280	0.083182	0.030489		
9	0.229374	-0.047729	-0.104272	-0.155873	-0.182392	0.1117264	0.082857	0.045594	0.016178	
10	0.233517	-0.028196	-0.069328	-0.107331	-0.139477	-0.151871	0.117331	0.083271	0.045744	0.016340

Таблица С.19

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения максимального значения.**  
**Неизвестны оба параметра**

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$	$\gamma_{10}$	$\gamma_{11}$	$\gamma_{12}$	$\gamma_{13}$	$\gamma_{14}$
3	0.575291	0.424709												
4	0.173521	0.567426	0.259052											
5	0.120076	0.421664	0.370677	0.087583										
6	0.065096	0.226173	0.409017	0.240575	0.059140									
7	0.045393	0.150584	0.326990	0.314076	0.128907	0.034050								
8	0.029839	0.098336	0.214838	0.321288	0.223260	0.087985	0.024454							
9	0.021566	0.071175	0.153266	0.266189	0.267807	0.144652	0.058529	0.016816						
10	0.015625	0.052488	0.108575	0.195528	0.265200	0.204361	0.102587	0.043083	0.012553					
11	0.010606	0.035637	0.077872	0.136593	0.219031	0.177120	0.256522	0.045453	0.031558	0.009610				
12	0.009273	0.030094	0.063836	0.111789	0.177120	0.225086	0.186016	0.108941	0.055241	0.025406	0.007196			
13	0.008419	0.023822	0.050164	0.086647	0.139064	0.195342	0.202864	0.143174	0.082790	0.042654	0.018953	0.006107		
14	0.004876	0.020009	0.040625	0.0668983	0.110637	0.159960	0.196076	0.170246	0.110870	0.065887	0.033886	0.015181	0.004761	
15	0.003892	0.015612	0.034470	0.055220	0.089524	0.129984	0.173410	0.180334	0.137064	0.087013	0.050281	0.026874	0.012305	0.004016

Таблица С.20

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения максимального значения.  
Неизвестны оба параметра**

$k$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$	$v_{12}$	$v_{13}$	$v_{14}$
3	-0.443282	0.443282												
4	-0.351904	-0.010733	0.362637											
5	-0.236074	-0.194577	0.265752	0.164899										
6	-0.159023	-0.231198	0.024209	0.249065	0.116946									
7	-0.1116742	-0.196654	-0.107178	0.170028	0.178352	0.072194								
8	-0.085122	-0.157524	-0.155873	0.024169	0.184789	0.136716	0.052846							
9	-0.065490	-0.128455	-0.152073	-0.068643	0.117014	0.150652	0.100547	0.037447						
10	-0.050761	-0.104111	-0.135300	-0.111312	0.020548	0.142141	0.132144	0.078250	0.028400					
11	-0.041868	-0.087939	-0.122325	-0.123398	-0.047017	0.121113	0.087018	0.130226	0.061918	0.022272				
12	-0.032743	-0.070381	-0.102042	-0.113745	-0.082907	0.016227	0.111896	0.120328	0.086999	0.049424	0.016944			
13	-0.028719	-0.059143	-0.087926	-0.104051	-0.093872	-0.034199	0.065508	0.115339	0.103269	0.071232	0.038662	0.013898		
14	-0.021210	-0.051141	-0.076712	-0.094397	-0.095515	-0.064268	0.013982	0.090474	0.107864	0.088280	0.059537	0.031866	0.011140	
15	-0.017731	-0.043137	-0.067618	-0.084341	-0.091560	-0.077010	-0.026040	0.052158	0.098110	0.096826	0.075233	0.049476	0.026311	0.009324

Таблица С.21

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига экспоненциального распределения.**  
**Известен масштабный параметр**

$k$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
2	-1.593600	1.000000								
3	-1.017438	1.000102	-0.000101							
4	-0.754284	0.999914	0.000025	0.000061						
5	-0.600472	1.000031	-0.000034	-0.000055	0.000058					
6	-0.499093	1.000006	0.000049	0.000004	0.000004	-0.000064				
7	-0.427654	1.000006	-0.000045	-0.000003	0.000037	0.000006	-0.000001			
8	-0.373854	0.999966	0.000056	-0.000004	-0.000004	-0.000022	0.000030	-0.000022		
9	-0.332335	1.000018	-0.000052	0.000015	-0.000007	0.000034	-0.000019	0.000012	-0.000001	
10	-0.298922	1.000029	0.000002	0.000010	-0.000024	-0.000011	-0.000009	-0.000008	0.000035	-0.000025

Таблица С.22

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба экспоненциального распределения.**  
**Известен параметр сдвига**

$k$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
2	-0.627510	0.627510								
3	-0.702414	0.593434	0.178981							
4	-0.751473	0.447324	0.226437	0.077712						
5	-0.786766	0.390462	0.235904	0.119260	0.041140					
6	-0.814880	0.347021	0.232423	0.140462	0.071103	0.023870				
7	-0.834158	0.310826	0.222679	0.149123	0.090241	0.045675	0.015613			
8	-0.851302	0.282088	0.212135	0.152049	0.101837	0.061432	0.031344	0.010416		
9	-0.864189	0.257873	0.200905	0.151005	0.108217	0.072620	0.043710	0.022274	0.007585	
10	-0.876537	0.237973	0.190612	0.148533	0.111631	0.079967	0.053526	0.032301	0.016775	0.005219

Таблица С.23

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига экспоненциального распределения. Несколько оба параметра**

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$
3	1.638554	-0.638554							
4	1.529414	-0.394234	-0.135179						
5	1.451127	-0.268568	-0.135844	-0.046715					
6	1.393581	-0.195435	-0.1118152	-0.059806	-0.020188				
7	1.347928	-0.148110	-0.099144	-0.059935	-0.030356	-0.010382			
8	1.312099	-0.116249	-0.083388	-0.055851	-0.033721	-0.017145	-0.005744		
9	1.282714	-0.093743	-0.070183	-0.050465	-0.033810	-0.020407	-0.010368	-0.003538	
10	1.258692	-0.077205	-0.060151	-0.045249	-0.032405	-0.021693	-0.013095	-0.006747	-0.002147

Таблица С.24

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба экспоненциального распределения.****Несколько оба параметра**

$k$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
3	-0.627510	0.627510							
4	-0.701990	0.522694	0.179296						
5	-0.751236	0.447204	0.226138	0.077894					
6	-0.788580	0.391679	0.236742	0.119838	0.040321				
7	-0.813559	0.346226	0.231825	0.140236	0.070997	0.024274			
8	-0.834905	0.311098	0.223038	0.149383	0.090140	0.045940	0.015307		
9	-0.850634	0.281917	0.211828	0.151828	0.101839	0.061345	0.031234	0.010642	
10	-0.8665318	0.258285	0.201258	0.151293	0.108372	0.072540	0.043779	0.022689	0.007101

Таблица С.25

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига полунармального распределения  
(модуля многомерного нормального вектора  $m = 1$ ). Известен масштабный параметр**

$k$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
2	-1.482100	1.000000								
3	-1.227631	0.897007	0.102993							
4	-1.081004	0.844696	0.119280	0.036024						
5	-0.980236	0.815760	0.116454	0.051892	0.015894					
6	-0.905831	0.798161	0.108885	0.057728	0.026811	0.008414				
7	-0.847462	0.787421	0.100687	0.058840	0.032634	0.015498	0.004920			
8	-0.795816	0.780196	0.092560	0.058012	0.035894	0.020097	0.009806	0.003435		
9	-0.760019	0.776119	0.086147	0.055968	0.036836	0.023025	0.013578	0.006235	0.002091	
10	-0.726530	0.774120	0.079968	0.053882	0.037061	0.024659	0.015764	0.008925	0.004263	0.001358

Таблица С.26

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба полунармального распределения  
(модуля многомерного нормального вектора  $m = 1$ ). Известен параметр сдвига**

$k$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
2	-0.674718	0.674718								
3	-0.704142	0.473184	0.230958							
4	-0.722413	0.363462	0.248570	0.110382						
5	-0.735740	0.294563	0.233732	0.146226	0.061220					
6	-0.744850	0.246291	0.212493	0.155010	0.093037	0.038019				
7	-0.751695	0.211079	0.192007	0.152944	0.107565	0.062886	0.025213			
8	-0.757243	0.181841	0.173142	0.146711	0.113487	0.077846	0.045357	0.018858		
9	-0.760482	0.162097	0.158149	0.138578	0.113130	0.085305	0.058454	0.032049	0.012720	
10	-0.763981	0.145625	0.145153	0.130952	0.111389	0.088885	0.065966	0.043083	0.023880	0.009048

Таблица С.27

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига полунормального распределения  
(модуля многомерного нормального вектора  $m = 1$ ). Неизвестны оба параметра**

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$
3	2.331657	-1.331658							
4	2.062342	-0.682096	-0.380245						
5	1.890308	-0.404082	-0.327990	-0.158235					
6	1.767838	-0.256992	-0.254186	-0.176657	-0.080004				
7	1.676566	-0.170900	-0.194988	-0.161235	-0.104130	-0.045314			
8	1.599207	-0.113820	-0.147829	-0.136952	-0.105326	-0.066159	-0.029122		
9	1.547135	-0.080680	-0.116946	-0.116452	-0.099067	-0.073097	-0.042943	-0.017951	
10	1.502026	-0.057287	-0.092729	-0.098588	-0.089717	-0.072285	-0.050289	-0.029411	-0.011722

Таблица С.28

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба полунормального распределения  
(модуля многомерного нормального вектора  $m = 1$ ). Неизвестны оба параметра**

$k$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
3	-1.168633	1.168633							
4	-1.126402	0.741325	0.385076						
5	-1.096213	0.531031	0.387542	0.177640					
6	-1.070483	0.403913	0.344340	0.224620	0.097610				
7	-1.049187	0.320471	0.299515	0.228764	0.141160	0.059275			
8	-1.029147	0.259331	0.258654	0.217193	0.157603	0.095455	0.040911		
9	-1.014471	0.219505	0.227513	0.201689	0.160643	0.114043	0.064707	0.026372	
10	-1.001894	0.188919	0.201795	0.186708	0.157427	0.121190	0.081502	0.046349	0.018003

Таблица С.29

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения Рэлея. Известен масштабный параметр**

$k$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
2	-1.785300	1.000000								
3	-1.553687	0.852000	0.148000							
4	-1.422130	0.762609	0.182889	0.054501						
5	-1.333035	0.703070	0.188847	0.081988	0.026095					
6	-1.267274	0.659900	0.186468	0.095575	0.044327	0.013731				
7	-1.217782	0.626298	0.181093	0.101443	0.055937	0.026611	0.008619			
8	-1.176753	0.600017	0.175329	0.103670	0.062798	0.035425	0.017393	0.005368		
9	-1.143445	0.578335	0.169358	0.104005	0.066779	0.041930	0.023958	0.011791	0.003844	
10	-1.114384	0.560558	0.163911	0.103050	0.069250	0.045989	0.029213	0.016946	0.008697	0.002387

Таблица С.30

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения Рэлея. Известен параметр сдвига**

$k$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
2	-0.560130	0.560130								
3	-0.577885	0.373401	0.204483							
4	-0.588607	0.274654	0.213152	0.100801						
5	-0.595888	0.213808	0.194262	0.129885	0.057933					
6	-0.601818	0.173390	0.172322	0.135237	0.085201	0.035668				
7	-0.605079	0.143669	0.151606	0.130333	0.096385	0.058668	0.024418			
8	-0.608350	0.122011	0.134286	0.122610	0.099289	0.070765	0.042496	0.016894		
9	-0.610375	0.105118	0.119343	0.113767	0.097769	0.076721	0.053463	0.031503	0.012691	
10	-0.612741	0.092122	0.107007	0.105288	0.094530	0.078586	0.060214	0.041423	0.024598	0.008974

Таблица С.31

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения Рэля. Неизвестны оба параметра**

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$
3	2.661347	-1.661348							
4	2.283366	-0.738014	-0.545353						
5	2.032754	-0.340908	-0.443225	-0.248621					
6	1.854648	-0.134459	-0.319414	-0.268175	-0.132599				
7	1.715171	-0.013414	-0.217654	-0.2333479	-0.170377	-0.080246			
8	1.606495	0.060914	-0.142937	-0.190203	-0.168405	-0.114788	-0.051076		
9	1.516663	0.108900	-0.086342	-0.149020	-0.151609	-0.123065	-0.080214	-0.035315	
10	1.443694	0.140822	-0.045027	-0.113795	-0.131115	-0.119458	-0.092112	-0.059004	-0.024005

Таблица С.32

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения Рэля. Неизвестны оба параметра**

$k$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
3	-1.164550	1.164550							
4	-1.069352	0.647552	0.421800						
5	-0.997485	0.397405	0.393997	0.206083					
6	-0.942770	0.253242	0.327466	0.246594	0.115468				
7	-0.894145	0.159722	0.262032	0.237659	0.161759	0.072973			
8	-0.855301	0.097229	0.209566	0.214999	0.173214	0.112327	0.047966		
9	-0.820615	0.052873	0.166468	0.188727	0.169259	0.128579	0.080463	0.034246	
10	-0.792488	0.020719	0.132878	0.164257	0.158925	0.133411	0.097864	0.060752	0.023683

Таблица С.33

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения Максвелла  
(модуля многомерного нормального вектора  $m = 3$ ). Известен масштабный параметр**

$k$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
2	-2.045100	1.000000								
3	-1.832302	0.818571	0.181429							
4	-1.713140	0.705480	0.224522	0.069998						
5	-1.633745	0.627780	0.231934	0.106264	0.034022					
6	-1.576747	0.570246	0.227929	0.123635	0.059058	0.019132				
7	-1.534117	0.525447	0.220090	0.131216	0.074684	0.036546	0.012016			
8	-1.499676	0.489580	0.211538	0.134013	0.084183	0.048637	0.024022	0.008027		
9	-1.472579	0.459795	0.202827	0.133917	0.089489	0.057481	0.033793	0.016748	0.005950	
10	-1.448280	0.434739	0.194684	0.132557	0.092735	0.063400	0.041253	0.024378	0.012070	0.004184

Таблица С.34

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения Максвелла  
(модуля многомерного нормального вектора  $m = 3$ ). Известен параметр сдвига**

$k$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
2	-0.488974	0.488974								
3	-0.501083	0.315026	0.186058							
4	-0.508340	0.225477	0.189297	0.093566						
5	-0.513416	0.171572	0.169164	0.118712	0.053967					
6	-0.516893	0.135790	0.147065	0.121084	0.078741	0.034214				
7	-0.519125	0.110515	0.127344	0.115003	0.087872	0.055030	0.023360			
8	-0.521039	0.092084	0.111005	0.106610	0.089403	0.065389	0.039856	0.016692		
9	-0.522084	0.077975	0.097134	0.097481	0.086834	0.069903	0.050045	0.029938	0.012773	
10	-0.523556	0.067099	0.085820	0.089131	0.083034	0.070974	0.055739	0.039149	0.023026	0.009583

Таблица С.35

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения Максвелла  
(модуля многомерного нормального вектора  $m = 3$ ). Неизвестны оба параметра**

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$
3	2.948165	-1.948165							
4	2.471730	-0.772553	-0.699178						
5	2.155425	-0.275646	-0.543897	-0.335881					
6	1.925171	-0.021384	-0.363707	-0.351887	-0.188193				
7	1.748046	0.121461	-0.222060	-0.295297	-0.235147	-0.117003			
8	1.607809	0.206152	-0.118326	-0.228225	-0.226090	-0.163530	-0.077790		
9	1.492147	0.258618	-0.041663	-0.166015	-0.196621	-0.172592	-0.118251	-0.055623	
10	1.396352	0.291189	0.014351	-0.113848	-0.162943	-0.163283	-0.133699	-0.088015	-0.040105

Таблица С.36

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения Максвелла  
(модуля многомерного нормального вектора  $m = 3$ ). Неизвестны оба параметра**

$k$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
3	-1.162251	1.162251							
4	-1.031002	0.582016	0.448986						
5	-0.935057	0.310685	0.397958	0.226414					
6	-0.859317	0.158119	0.309081	0.260628	0.131489				
7	-0.796939	0.064290	0.230280	0.241169	0.177101	0.084100			
8	-0.745647	0.003592	0.168263	0.208317	0.183190	0.125062	0.057223		
9	-0.701050	-0.037887	0.119233	0.173508	0.172556	0.140152	0.091675	0.041813	
10	-0.6663969	-0.0666634	0.081618	0.142640	0.156284	0.141227	0.109148	0.069107	0.030580

Таблица С.37

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного вектора  $m = 4$ . Известен масштабный параметр**

$k$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
2	-2.275900	1.000000								
3	-2.079245	0.793096	0.206905							
4	-1.969454	0.664061	0.253514	0.082425						
5	-1.897094	0.573286	0.258796	0.125967	0.041951					
6	-1.846131	0.507296	0.251132	0.144789	0.072391	0.024391				
7	-1.806249	0.454964	0.239105	0.153042	0.091075	0.046222	0.015591			
8	-1.778109	0.415517	0.227011	0.154243	0.101402	0.060965	0.030364	0.010498		
9	-1.762589	0.390168	0.213688	0.149549	0.104567	0.070595	0.042599	0.021323	0.007513	
10	-1.745787	0.366985	0.205367	0.147642	0.106566	0.074620	0.049350	0.029640	0.014908	0.004921

Таблица С.38

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора  $m = 4$ . Известен параметр сдвига**

$k$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
2	-0.439387	0.429387								
3	-0.448175	0.276311	0.171864							
4	-0.453622	0.194246	0.171946	0.087430						
5	-0.457339	0.144435	0.150906	0.110297	0.051701					
6	-0.459793	0.112319	0.129212	0.110423	0.074442	0.033397				
7	-0.461838	0.089556	0.109943	0.103841	0.082099	0.053230	0.023169			
8	-0.462865	0.073889	0.094804	0.094938	0.082295	0.062122	0.038342	0.016476		
9	-0.463164	0.064637	0.082987	0.084795	0.077421	0.064884	0.047522	0.028674	0.012245	
10	-0.463799	0.056671	0.074680	0.078549	0.073874	0.063712	0.050561	0.035900	0.021265	0.008587

Таблица С.39

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора  $m = 4$ . Неизвестны оба параметра**

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$
3	3.208013	-2.208014							
4	2.640431	-0.798451	-0.841980						
5	2.260663	-0.207623	-0.629040	-0.423999					
6	1.984236	0.083283	-0.390752	-0.430251	-0.246516				
7	1.768356	0.244385	-0.208197	-0.345077	-0.301100	-0.158367			
8	1.605500	0.330209	-0.082308	-0.253860	-0.279672	-0.213653	-0.106217		
9	1.504315	0.367129	0.000492	-0.173692	-0.238350	-0.224160	-0.159110	-0.076624	
10	1.408522	0.394064	0.055239	-0.117720	-0.192360	-0.204507	-0.173583	-0.116742	-0.052913

Таблица С.40

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора  $m = 4$ . Неизвестны оба параметра**

$k$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
3	-1.161440	1.161440							
4	-1.003512	0.534141	0.469371						
5	-0.889453	0.245860	0.397981	0.245612					
6	-0.800019	0.090919	0.290089	0.272268	0.146744				
7	-0.727138	-0.002923	0.199994	0.241469	0.192289	0.096309			
8	-0.6669241	-0.058038	0.133035	0.199797	0.191573	0.137234	0.065640		
9	-0.632108	-0.087054	0.084567	0.157869	0.175279	0.151345	0.102368	0.047734	
10	-0.596600	-0.108087	0.052929	0.128473	0.152928	0.145412	0.116408	0.075410	0.033128

Таблица С.41

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора  $m = 5$ . Известен масштабный параметр**

$k$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
2	-2.485100	1.000000								
3	-2.300468	0.772891	0.227109							
4	-2.198605	0.631399	0.275211	0.093391						
5	-2.134295	0.535411	0.277013	0.139695	0.047881					
6	-2.088460	0.465014	0.266221	0.159932	0.081293	0.027540				
7	-2.056818	0.412611	0.250599	0.166571	0.101071	0.051540	0.017608			
8	-2.027428	0.365771	0.233580	0.167282	0.114075	0.070076	0.036385	0.012832		
9	-2.009192	0.336157	0.222346	0.165331	0.117443	0.078976	0.047627	0.023958	0.008162	
10	-1.989013	0.303763	0.207996	0.161449	0.121758	0.088132	0.035287	0.017676	0.005463	

Таблица С.42

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора  $m = 5$ . Известен параметр сдвига**

$k$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
2	-0.402334	0.402334								
3	-0.409478	0.246911	0.162567							
4	-0.413313	0.170656	0.159267	0.083390						
5	-0.416283	0.126919	0.139023	0.101898	0.048443					
6	-0.418665	0.096308	0.120929	0.105386	0.065885	0.030157				
7	-0.419907	0.074246	0.101784	0.101234	0.078549	0.043504	0.020590			
8	-0.419328	0.062137	0.082904	0.085419	0.075710	0.056226	0.040790	0.016141		
9	-0.423326	0.052049	0.073398	0.080790	0.078806	0.064745	0.041721	0.021729	0.010087	
10	-0.424170	0.045923	0.063263	0.070189	0.071398	0.064225	0.052255	0.031881	0.016984	0.008052

Таблица С.43

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора  $m = 5$ . Неизвестны оба параметра**

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$
3	3.428556	-2.428555							
4	2.783602	-0.803275	-0.980326						
5	2.355620	-0.151390	-0.705993	-0.498237					
6	2.043555	0.164766	-0.435469	-0.490363	-0.282489				
7	1.782190	0.373138	-0.227676	-0.414154	-0.334708	-0.178790			
8	1.607576	0.434028	-0.045189	-0.267969	-0.318367	-0.272797	-0.137282		
9	1.463982	0.478547	0.071690	-0.194371	-0.298178	-0.269695	-0.169329	-0.082646	
10	1.346885	0.493328	0.134505	-0.093007	-0.223633	-0.256662	-0.210475	-0.128142	-0.062799

Таблица С.44

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора  $m = 5$ . Неизвестны оба параметра**

$k$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
3	-1.157006	1.157006							
4	-0.979843	0.491271	0.488572						
5	-0.853685	0.202044	0.395791	0.255850					
6	-0.759257	0.051947	0.287701	0.271183	0.148425				
7	-0.674108	-0.054899	0.196837	0.252455	0.184050	0.095665			
8	-0.611964	-0.099096	0.104368	0.188077	0.189726	0.155181	0.073708		
9	-0.567693	-0.129183	0.050442	0.161089	0.190971	0.155890	0.093411	0.045073	
10	-0.525385	-0.145992	0.013136	0.110849	0.159084	0.161123	0.121158	0.071338	0.034689

Таблица С.45

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного вектора  $m = 6$ . Известен масштабный параметр**

$k$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
2	-2.678800	1.000000								
3	-2.504070	0.756093	0.243907							
4	-2.407327	0.603953	0.292330	0.103716						
5	-2.349550	0.504136	0.290268	0.152131	0.053465					
6	-2.307831	0.431536	0.276404	0.172904	0.088584	0.030571				
7	-2.273124	0.371933	0.260207	0.181441	0.111390	0.055441	0.019589			
8	-2.253708	0.332680	0.238885	0.178164	0.123086	0.075590	0.038441	0.013154		
9	-2.229712	0.290285	0.222084	0.178534	0.132917	0.089294	0.052712	0.025963	0.008210	
10	-2.218104	0.266342	0.206559	0.169610	0.131952	0.096028	0.064964	0.038944	0.018902	0.006699

Таблица С.46

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного вектора  $m = 6$ . Известен параметр сдвига**

$k$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
2	-0.373301	0.373301								
3	-0.378908	0.227142	0.151766							
4	-0.382431	0.154543	0.148387	0.079501						
5	-0.384266	0.113395	0.127634	0.096563	0.046674					
6	-0.385703	0.086889	0.108214	0.096249	0.064970	0.029381				
7	-0.386902	0.067287	0.091623	0.090440	0.072185	0.045287	0.020081			
8	-0.387581	0.055629	0.077252	0.080742	0.071583	0.054390	0.033664	0.014321		
9	-0.388468	0.043996	0.065364	0.073979	0.070844	0.058677	0.041646	0.024342	0.009621	
10	-0.388706	0.037958	0.056986	0.065437	0.064996	0.057698	0.046346	0.032678	0.018743	0.007865

Таблица С.47

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора  $m = 6$ . Неизвестны оба параметра**

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$
3	3.659356	-2.659357							
4	2.922188	-0.817554	-1.104634						
5	2.446899	-0.098970	-0.769450	-0.578480					
6	2.102723	0.242718	-0.448040	-0.558472	-0.338930				
7	1.816912	0.430926	-0.200293	-0.437227	-0.394119	-0.216198			
8	1.638730	0.512081	-0.030070	-0.302286	-0.371445	-0.295865	-0.151146		
9	1.436076	0.570453	0.101498	-0.187145	-0.310383	-0.299983	-0.211564	-0.098952	
10	1.321730	0.581665	0.177527	-0.088641	-0.231857	-0.274560	-0.243369	-0.164519	-0.077975

Таблица С.48

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора  $m = 6$ . Неизвестны оба параметра**

$k$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
3	-1.159418	1.159418							
4	-0.962991	0.461044	0.501947						
5	-0.826866	0.165665	0.392237	0.268964					
6	-0.724137	0.014596	0.269060	0.280374	0.160107				
7	-0.635680	-0.075103	0.167934	0.241349	0.197772	0.103728			
8	-0.579512	-0.121221	0.092397	0.188743	0.198355	0.148336	0.072902		
9	-0.513874	-0.156239	0.034550	0.143544	0.179251	0.158179	0.106528	0.048061	
10	-0.475806	-0.169111	-0.003569	0.099451	0.147822	0.153070	0.127277	0.082693	0.038174

Таблица С.49

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного вектора  $m = 7$ . Известен масштабный параметр**

$k$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
2	-2.859200	1.000000								
3	-2.692969	0.741957	0.258043							
4	-2.601920	0.582543	0.305334	0.112123						
5	-2.546329	0.477678	0.299610	0.163804	0.058909					
6	-2.447666	0.426197	0.364707	0.081822	0.094079	0.033195				
7	-2.476063	0.344170	0.264487	0.191800	0.119698	0.059657	0.020189			
8	-2.459507	0.304208	0.238013	0.184314	0.131065	0.083075	0.043851	0.015474		
9	-2.438386	0.262153	0.219773	0.184243	0.141231	0.097046	0.057580	0.028113	0.009860	
10	-2.433102	0.231930	0.200089	0.174337	0.140724	0.081104	0.128340	0.016117	0.020574	0.006784

Таблица С.50

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного вектора  $m = 7$ . Известен параметр сдвига**

$k$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
2	-0.349748	0.349748								
3	-0.354431	0.210235	0.144196							
4	-0.357313	0.141525	0.139620	0.076167						
5	-0.359002	0.102526	0.118920	0.092275	0.045281					
6	-0.365230	0.099219	0.091696	0.081969	0.063340	0.029005				
7	-0.361113	0.060279	0.084923	0.085733	0.068935	0.042872	0.018371			
8	-0.361578	0.049440	0.070259	0.074587	0.067219	0.052174	0.033348	0.014550		
9	-0.362132	0.038852	0.059325	0.068513	0.066749	0.056019	0.039850	0.023096	0.009728	
10	-0.361971	0.031963	0.050120	0.059982	0.061270	0.047191	0.067379	0.019439	0.017593	0.007034

Таблица С.51

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора  $m = 7$ . Неизвестны оба параметра**

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$
3	3.861346	-2.861345							
4	3.048389	-0.824273	-1.224115						
5	2.522790	-0.037267	-0.828744	-0.656778					
6	1.729003	1.322780	-1.120450	-0.574857	-0.356476				
7	1.841224	0.512109	-0.193464	-0.481650	-0.439231	-0.238989			
8	1.649642	0.589102	0.007825	-0.309505	-0.408755	-0.344812	-0.183497		
9	1.431118	0.642106	0.146870	-0.184021	-0.338081	-0.338415	-0.241093	-0.118483	
10	1.292343	0.655069	0.238034	-0.070008	-0.282641	-0.298439	-0.261377	-0.186375	-0.086607

Таблица С.52

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора  $m = 7$ . Неизвестны оба параметра**

$k$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
3	-1.158346	1.158345							
4	-0.947702	0.434144	0.513559						
5	-0.803161	0.132299	0.389795	0.281066					
6	-0.532265	-0.391423	0.491191	0.273295	0.159201				
7	-0.604611	-0.100007	0.155595	0.242864	0.201485	0.104673			
8	-0.547034	-0.142748	0.071758	0.179129	0.199971	0.158025	0.080899		
9	-0.479401	-0.173202	0.015327	0.133389	0.178449	0.162400	0.110403	0.052634	
10	-0.435828	-0.186996	-0.026179	0.086611	0.149498	0.175405	0.114049	0.085056	0.038384

Таблица С.53

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного вектора  $m = 8$ . Известен масштабный параметр**

$k$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
2	-3.028900	1.000000								
3	-2.868365	0.729542	0.270458							
4	-2.785714	0.566605	0.314663	0.118731						
5	-2.733808	0.459868	0.306510	0.170574	0.063048					
6	-2.695790	0.381429	0.286223	0.188151	0.104579	0.039618				
7	-2.669615	0.322863	0.260739	0.196621	0.128079	0.067392	0.024306			
8	-2.650425	0.279572	0.237666	0.191931	0.140007	0.088620	0.045762	0.016441		
9	-2.634598	0.244288	0.212002	0.180628	0.143953	0.105031	0.066781	0.035157	0.012159	
10	-2.619368	0.218427	0.194892	0.167614	0.174833	0.084040	0.077932	0.048520	0.024326	0.009414

Таблица С.54

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного вектора  $m = 8$ . Известен параметр сдвига**

$k$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
2	-0.330153	0.330153								
3	-0.334295	0.196328	0.137967							
4	-0.336413	0.131726	0.131893	0.072794						
5	-0.337778	0.095115	0.112123	0.087129	0.043411					
6	-0.338888	0.071186	0.093597	0.084278	0.060454	0.029373				
7	-0.339557	0.055019	0.077352	0.079310	0.065724	0.042863	0.019289			
8	-0.339994	0.044059	0.064917	0.070836	0.065044	0.050140	0.031365	0.013632		
9	-0.340608	0.035845	0.053571	0.061071	0.060685	0.053402	0.040326	0.025097	0.010611	
10	-0.341435	0.030383	0.046560	0.057523	0.058450	0.047088	0.043263	0.031391	0.018497	0.008281

Таблица С.55

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора  $m = 8$ . Неизвестны оба параметра**

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$
3	4.046716	-3.046718							
4	3.176717	-0.839354	-1.337362						
5	2.609637	-0.000179	-0.883030	-0.726428					
6	2.192860	0.392291	-0.451772	-0.675612	-0.457767				
7	1.881918	0.580025	-0.161547	-0.506653	-0.502989	-0.290753			
8	1.646565	0.663589	0.042334	-0.327583	-0.447786	-0.377964	-0.199155		
9	1.460026	0.690438	0.192252	-0.155180	-0.347461	-0.384486	-0.301682	-0.153908	
10	1.314122	0.690312	0.160334	0.205687	-0.371968	-0.334950	-0.319007	-0.228338	-0.116189

Таблица С.56

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора  $m = 8$ . Неизвестны оба параметра**

$k$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
3	-1.156469	1.156469							
4	-0.936963	0.414263	0.522700						
5	-0.786364	0.112184	0.385398	0.288783					
6	-0.671948	-0.039346	0.237379	0.289411	0.184504				
7	-0.584000	-0.119600	0.134165	0.237762	0.213657	0.1118017			
8	-0.515763	-0.160700	0.056443	0.176421	0.202385	0.159871	0.081344		
9	-0.461451	-0.181597	-0.004412	0.1113540	0.171750	0.171285	0.127852	0.063033	
10	-0.418305	-0.189137	0.002779	-0.011779	0.174091	0.157627	0.140312	0.096460	0.047952

Таблица С.57

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора  $m = 9$ . Известен масштабный параметр**

$k$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
2	-3.189600	1.000000								
3	-2.817506	0.966994	0.033006							
4	-2.626830	0.917130	0.078817	0.004054						
5	-2.500927	0.870043	0.112901	0.016540	0.000515					
6	-2.392547	0.818473	0.142571	0.033552	0.005449	-0.000045				
7	-2.329834	0.783888	0.157308	0.045708	0.011501	0.001762	-0.000167			
8	-2.272209	0.748379	0.169912	0.057663	0.018735	0.004862	0.000562	-0.000113		
9	-2.221608	0.715909	0.180274	0.067517	0.025252	0.008602	0.002337	0.000211	-0.000102	
10	-2.187397	0.689109	0.184025	0.075979	0.032274	0.013073	0.004485	0.001134	0.000012	-0.000091

Таблица С.58

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора  $m = 9$ . Известен параметр сдвига**

$k$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
2	-0.313519	0.313519								
3	-0.3117299	0.184515	0.132784							
4	-0.318861	0.123458	0.125531	0.069871						
5	-0.319886	0.089384	0.106453	0.082926	0.041123					
6	-0.321349	0.064414	0.086391	0.082210	0.059743	0.028591				
7	-0.321631	0.051658	0.072519	0.073975	0.061929	0.042199	0.019352			
8	-0.322007	0.041234	0.060533	0.065858	0.060594	0.048081	0.031323	0.014383		
9	-0.322398	0.033420	0.051517	0.058426	0.056153	0.048505	0.037835	0.024815	0.011728	
10	-0.322666	0.028238	0.043536	0.051002	0.052282	0.048367	0.040476	0.030443	0.019449	0.008873

Таблица С.59

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора  $m = 9$ . Неизвестны оба параметра**

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$
3	4.217833	-3.217836							
4	4.099474	-2.422484	-0.676987						
5	3.887614	-1.791502	-0.874541	-0.221571					
6	3.650745	-1.268228	-0.8899839	-0.392981	-0.099699				
7	3.473038	-0.954817	-0.815399	-0.458305	-0.195128	-0.049386			
8	3.298503	-0.694257	-0.727332	-0.481441	-0.258806	-0.108231	-0.028436		
9	3.130699	-0.496636	-0.633413	-0.465903	-0.289816	-0.157502	-0.068386	-0.019043	
10	3.013535	-0.341902	-0.549523	-0.456375	-0.315485	-0.192015	-0.102198	-0.043999	-0.012037

Таблица С.60

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора  $m = 9$ . Неизвестны оба параметра**

$k$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
3	-1.153799	1.153799							
4	-0.927007	0.396600	0.530408						
5	-0.773495	0.097285	0.383923	0.292286					
6	-0.648693	-0.067170	0.227166	0.296605	0.192093				
7	-0.570524	-0.131720	0.121440	0.231293	0.221666	0.127845			
8	-0.501396	-0.170335	0.043559	0.165280	0.201752	0.168518	0.092622		
9	-0.444080	-0.190964	-0.009850	0.106906	0.161914	0.168016	0.134040	0.074018	
10	-0.402716	-0.196149	-0.047436	0.062075	0.127568	0.152036	0.141946	0.106829	0.055847

Таблица С.61

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения Лапласа. Известен масштабный параметр**

$k$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
2	-1.841600	1.000000								
3	0.000000	0.500000	0.500000							
4	0.153723	-0.000141	0.635880	0.364261						
5	0.000000	0.000059	0.499941	0.499941	0.000059					
6	-0.042959	-0.000046	0.428192	0.571756	0.000125	-0.000027				
7	0.000000	-0.000076	0.000242	0.499834	0.499834	0.000242	-0.000076			
8	-0.018034	-0.000119	0.000041	0.451693	0.548434	-0.000020	0.000039	-0.000069		
9	0.000000	0.000156	-0.000060	0.000043	0.499861	0.499861	0.000043	-0.000060	0.000156	
10	-0.009764	-0.000067	-0.000055	0.000086	0.464625	0.535177	0.000010	0.0000160	0.000028	0.000036

Таблица С.62

**Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения Лапласа. Известен параметр сдвига**

$k$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
2	-0.543006	0.543006								
3	0.000000	-0.313755	0.313755							
4	0.058556	-0.091442	-0.267173	0.300059						
5	0.000000	-0.089579	-0.261490	0.261490	0.089579					
6	-0.020830	-0.089715	-0.262001	0.221856	0.112329	0.038361				
7	0.000000	-0.038686	-0.113417	-0.2233865	0.2233865	0.113417	0.038686			
8	-0.010112	-0.039114	-0.114626	-0.225531	0.192772	0.116919	0.059435	0.020257		
9	0.000000	-0.020751	-0.059528	-0.117747	-0.194904	0.194904	0.117747	0.059528	0.020751	
10	-0.006010	-0.020473	-0.060411	-0.118934	-0.196739	0.171596	0.114761	0.069361	0.035042	0.011807

Таблица С.63

Коэффициенты  $L$ -оценки параметра сдвига распределения Лапласа. Неизвестны оба параметра

$k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$
3	0.500000	0.500000							
4	-0.014327	0.600212	0.414115						
5	0.000059	0.499941	0.499941	0.000059					
6	0.003811	0.439841	0.562729	-0.004705	-0.001676				
7	-0.000076	0.000242	0.499834	0.499834	0.000242	-0.000076			
8	0.000587	0.002108	0.455844	0.545057	-0.002129	-0.001033	-0.000434		
9	0.000156	-0.000060	0.000043	0.499861	0.499861	0.000043	-0.000060	0.000156	
10	0.000133	0.000535	0.001247	0.466574	0.533533	-0.001111	-0.000517	-0.000315	-0.000079

Таблица С.64

Коэффициенты  $L$ -оценки параметра масштаба распределения Лапласа. Неизвестны оба параметра

$k$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
3	-0.313755	0.313755							
4	-0.092281	-0.232027	0.324308						
5	-0.089579	-0.261490	0.261490	0.089579					
6	-0.089794	-0.271163	0.210135	0.112427	0.038395				
7	-0.038686	-0.113417	-0.2233865	0.2233865	0.113417	0.038686			
8	-0.039120	-0.114648	-0.230140	0.187260	0.116940	0.059446	0.020261		
9	-0.020751	-0.059528	-0.117747	-0.194904	0.194904	0.117747	0.059528	0.020751	
10	-0.020474	-0.060414	-0.118942	-0.199543	0.168389	0.114767	0.069364	0.035044	0.011807

## **ПРИЛОЖЕНИЕ D**

**ТАБЛИЦЫ  
ДЛЯ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ НОРМАЛЬНОСТИ**



Таблица D.1

**Процентные точки для статистики критерия проверки симметричности**

$n$	$p = 1 - \alpha$		$n$	$p = 1 - \alpha$	
	0.95	0.99		0.95	0.99
8	0.99	1.42	400	0.2	0.28
9	0.97	1.41	450	0.19	0.27
10	0.95	1.39	500	0.18	0.26
12	0.91	1.34	550	0.17	0.24
15	0.85	1.26	600	0.16	0.23
20	0.77	1.15	650	0.16	0.22
25	0.71	1.06	700	0.15	0.22
30	0.66	0.98	750	0.15	0.21
35	0.62	0.92	800	0.14	0.2
40	0.59	0.87	850	0.14	0.2
45	0.56	0.82	900	0.13	0.19
50	0.53	0.79	950	0.13	0.18
60	0.49	0.72	1000	0.13	0.18
70	0.46	0.67	1200	0.12	0.16
80	0.43	0.63	1400	0.11	0.15
90	0.41	0.6	1600	0.10	0.14
100	0.39	0.57	1800	0.10	0.13
125	0.35	0.51	2000	0.09	0.13
150	0.32	0.46	2500	0.08	0.11
175	0.30	0.43	3000	0.07	0.10
200	0.28	0.4	3500	0.07	0.10
250	0.25	0.36	4000	0.06	0.09
300	0.23	0.33	4500	0.06	0.08
350	0.21	0.3	5000	0.06	0.08

Таблица D.2

## Процентные точки для статистики критерия проверки на эксцесс

<i>n</i>	<i>p</i>				<i>n</i>	<i>p</i>			
	0.01	0.05	0.95	0.99		0.01	0.05	0.95	0.99
8	1.31	1.46	3.7	4.53	500	2.57	2.67	3.37	3.6
9	1.35	1.53	3.86	4.82	550	2.58	2.69	3.38	3.57
10	1.39	1.56	3.95	5	600	2.6	2.71	3.34	3.54
12	1.46	1.64	4.05	5.2	650	2.61	2.71	3.33	3.52
15	1.55	1.72	4.13	5.3	700	2.62	2.72	3.31	350
20	1.65	1.82	4.17	5.36	750	2.64	2.73	3.30	3.48
25	1.72	1.91	4.18	5.3	800	2.65	2.74	3.29	3.46
30	1.79	1.98	4.11	5.21	850	2.66	2.74	3.28	3.45
35	1.84	2.03	4.1	5.13	900	2.66	2.75	3.28	3.43
40	1.89	2.07	4.05	5.04	950	2.67	2.76	3.27	3.42
45	1.93	2.11	4.00	4.94	1000	2.68	2.76	3.26	3.41
50	1.95	2.15	3.99	4.88	1200	2.71	2.78	3.24	3.37
75	2.08	2.27	3.87	4.59	1400	2.72	2.8	3.22	3.34
100	2.18	2.35	3.77	4.39	1600	2.74	2.81	3.21	3.32
125	2.24	2.40	3.71	4.24	1800	2.76	2.82	3.20	3.3
150	2.29	2.45	3.65	4.13	2000	2.77	2.83	3.18	3.28
200	2.37	2.51	3.57	3.98	2500	2.79	2.85	3.16	3.25
250	2.42	2.55	3.52	3.87	3000	2.81	2.86	3.15	3.22
300	2.46	2.59	3.47	3.79	3500	2.82	2.87	3.14	3.21
350	2.50	2.62	3.44	3.72	4000	2.83	2.88	3.13	3.19
400	2.25	2.64	3.41	3.67	4500	2.84	2.88	3.12	3.18
450	2.55	2.66	3.39	3.63	5000	2.85	2.89	3.12	3.17

Таблица D.3

Коэффициенты  $a_k$  для вычисления статистики критерия Шапиро-Уилка

$n$	$k$														$n$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
8	0.6052	0.3164	0.1743	0.0561											8
9	0.5888	0.3244	0.1976	0.0947											9
10	0.5739	0.3291	0.2141	0.1224	0.0399										10
11	0.5601	0.3315	0.2260	0.1429	0.0695										11
12	0.5475	0.3325	0.2347	0.1586	0.0922	0.0303									12
13	0.5359	0.3325	0.2412	0.1707	0.1099	0.0539									13
14	0.5251	0.3318	0.2430	0.1802	0.1240	0.0727	0.024								14
15	0.5150	0.3306	0.2495	0.1878	0.1353	0.0980	0.0433								15
16	0.5056	0.3290	0.2521	0.1939	0.1447	0.1005	0.0593	0.0196							16
17	0.4968	0.3273	0.2540	0.1988	0.1524	0.1109	0.0725	0.0359							17
18	0.4886	0.3253	0.2553	0.2027	0.1587	0.1197	0.0837	0.0496	0.0163						18
19	0.4808	0.3232	0.2561	0.2059	0.1641	0.1271	0.0932	0.0612	0.0303						19
20	0.4734	0.3211	0.2565	0.2085	0.1686	0.1334	0.1013	0.0711	0.0422	0.014					20
21	0.4643	0.3185	0.2578	0.2119	0.1736	0.1399	0.1092	0.0804	0.053	0.0263					21
22	0.4590	0.3156	0.2571	0.2131	0.1764	0.1443	0.1150	0.0878	0.0618	0.0368	0.0120				22
23	0.4542	0.3126	0.2563	0.2139	0.1787	0.1480	0.1201	0.0941	0.0696	0.0459	0.0228				23
24	0.4493	0.3098	0.2554	0.2145	0.1807	0.1512	0.1245	0.0997	0.0764	0.0559	0.0321	0.0107			24
25	0.4450	0.3069	0.2543	0.2148	0.1822	0.1539	0.1283	0.1046	0.0823	0.0610	0.0403	0.0200			25
26	0.4407	0.3043	0.2533	0.2151	0.1836	0.1563	0.1316	0.1089	0.0876	0.0672	0.0476	0.0284	0.0094		26
27	0.4366	0.3018	0.2522	0.2152	0.1848	0.1584	0.1346	0.1128	0.0923	0.0728	0.0540	0.0358	0.0178		27
28	0.4328	0.2992	0.2510	0.2151	0.1857	0.1601	0.1372	0.1162	0.0965	0.0778	0.0598	0.0424	0.0253	0.0084	28
29	0.4291	0.2968	0.2499	0.2150	0.1864	0.1616	0.1395	0.1192	0.1002	0.0822	0.0650	0.0483	0.0320	0.0159	29
30	0.4254	0.2944	0.2487	0.2148	0.1870	0.1630	0.1415	0.1219	0.1036	0.0862	0.0697	0.0537	0.0381	0.0227	30
$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$n$

Продолжение табл. D.3

<i>n</i>	<i>k</i>													<i>n</i>	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
31	0.4220	0.2921	0.2475	0.2145	0.1874	0.1641	0.1433	0.1243	0.1066	0.0899	0.0739	0.0585	0.0435	0.0289	31
32	0.4188	0.2898	0.2463	0.2141	0.1878	0.1651	0.1449	0.1265	0.1093	0.0931	0.0777	0.0629	0.0485	0.0344	32
33	0.4156	0.2876	0.2451	0.2137	0.1880	0.1660	0.1463	0.1284	0.1118	0.0961	0.0812	0.0669	0.0530	0.0395	33
34	0.4127	0.2854	0.2439	0.2132	0.1882	0.1667	0.1475	0.1301	0.1140	0.0988	0.0844	0.0706	0.0572	0.0441	34
35	0.4098	0.2834	0.2427	0.2127	0.1883	0.1673	0.1487	0.1317	0.1160	0.1013	0.0873	0.0739	0.0610	0.0484	35
36	0.4068	0.2813	0.2415	0.2121	0.1883	0.1678	0.1496	0.1331	0.1179	0.1036	0.0900	0.0770	0.0645	0.0523	36
37	0.4040	0.2794	0.2403	0.2116	0.1883	0.1683	0.1505	0.1344	0.1196	0.1056	0.0924	0.0798	0.0677	0.0559	37
38	0.4015	0.2774	0.2391	0.211	0.1881	0.1686	0.1513	0.1356	0.1211	0.1075	0.0947	0.0824	0.0706	0.0592	38
39	0.3989	0.2755	0.2380	0.2104	0.1880	0.1689	0.1520	0.1366	0.1225	0.1092	0.0967	0.0848	0.0733	0.0622	39
40	0.3964	0.2737	0.2368	0.2098	0.1878	0.1691	0.1526	0.1376	0.1237	0.1108	0.0986	0.0870	0.0759	0.0651	40
41	0.3949	0.2719	0.2357	0.2091	0.1876	0.1693	0.1531	0.1384	0.1249	0.1123	0.1004	0.0891	0.0782	0.0677	41
42	0.3917	0.2701	0.2345	0.2085	0.1874	0.1694	0.1535	0.1392	0.1259	0.1136	0.1020	0.0909	0.0804	0.0701	42
43	0.3894	0.2684	0.2334	0.2078	0.1871	0.1695	0.1539	0.1398	0.1269	0.1149	0.1035	0.0927	0.0824	0.0724	43
44	0.3872	0.2667	0.2323	0.2072	0.1868	0.1695	0.1542	0.1405	0.1278	0.1160	0.1049	0.0943	0.0842	0.0745	44
45	0.3850	0.2651	0.2313	0.2065	0.1868	0.1695	0.1545	0.1410	0.1286	0.1170	0.1062	0.0959	0.0860	0.0765	45
46	0.3830	0.2635	0.2302	0.2058	0.1862	0.1695	0.1548	0.1415	0.1293	0.1180	0.1073	0.0972	0.0876	0.0783	46
47	0.3808	0.2620	0.2291	0.2052	0.1869	0.1695	0.1550	0.1420	0.1300	0.1189	0.1085	0.0986	0.0892	0.0801	47
48	0.3789	0.2604	0.2281	0.2045	0.1855	0.1693	0.1551	0.1423	0.1306	0.1197	0.1095	0.0998	0.0906	0.0817	48
49	0.3770	0.2589	0.2271	0.2038	0.1851	0.1692	0.1553	0.1427	0.1312	0.1205	0.1105	0.1010	0.0919	0.0832	49
50	0.3751	0.2574	0.2260	0.2032	0.1847	0.1691	0.1554	0.1430	0.1317	0.1212	0.1113	0.1020	0.0932	0.0846	50
<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	<i>n</i>

Таблица D.3

Коэффициенты  $a_k$  для вычисления статистики критерия Шапиро–Уилка (окончание)

$n$	$k$										$n$	
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
30	0.0076											30
31	0.0144											31
32	0.0206	0.0068										32
33	0.0262	0.0131										33
34	0.0314	0.0187	0.0062									34
35	0.0361	0.0239	0.0119									35
36	0.0404	0.0287	0.0172	0.0057								36
37	0.0444	0.0331	0.0220	0.011								37
38	0.0481	0.0372	0.0264	0.0158	0.0053							38
39	0.0515	0.0409	0.0305	0.0203	0.0101							39
40	0.0546	0.0444	0.0343	0.0244	0.0146	0.0049						40
41	0.0575	0.0476	0.0379	0.0283	0.0188	0.0094						41
42	0.0602	0.0506	0.0411	0.0318	0.0227	0.0136	0.0045					42
43	0.0628	0.0534	0.0442	0.0352	0.0263	0.0175	0.0087					43
44	0.0651	0.0560	0.0471	0.0383	0.0296	0.0211	0.0126	0.0042				44
45	0.0673	0.0584	0.0497	0.0412	0.0328	0.0245	0.0163	0.0081				45
46	0.0694	0.0607	0.0522	0.0439	0.0357	0.0277	0.0197	0.0118	0.0039			46
47	0.0713	0.0628	0.0546	0.0465	0.0385	0.0307	0.0229	0.0153	0.0076			47
48	0.0731	0.0648	0.0568	0.0489	0.0411	0.0335	0.0259	0.0185	0.0111	0.0037		48
49	0.0748	0.0667	0.0588	0.0511	0.0436	0.0361	0.0288	0.0215	0.0143	0.0071		49
50	0.0764	0.0685	0.0608	0.0532	0.0459	0.0386	0.0314	0.0244	0.0174	0.0104	0.0035	50
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

Таблица D.4

## Процентные точки для статистики критерия Шапиро–Уилка

<i>n</i>	<i>p</i>		<i>n</i>	<i>p</i>	
	0.01	0.05		0.01	0.05
8	0.749	0.818	30	0.9	0.927
9	0.764	0.829	31	0.902	0.929
10	0.781	0.842	32	0.904	0.93
11	0.792	0.85	33	0.906	0.931
12	0.805	0.859	34	0.908	0.933
13	0.814	0.866	35	0.91	0.934
14	0.825	0.874	36	0.912	0.935
15	0.835	0.881	37	0.914	0.936
16	0.844	0.887	38	0.916	0.938
17	0.851	0.892	39	0.917	0.939
18	0.858	0.897	40	0.919	0.94
19	0.863	0.901	41	0.93	0.941
20	0.868	0.905	42	0.922	0.942
21	0.873	0.908	43	0.923	0.943
22	0.878	0.911	44	0.924	0.944
23	0.881	0.914	45	0.926	0.945
24	0.884	0.916	46	0.927	0.945
25	0.888	0.918	47	0.928	0.946
26	0.891	0.92	48	0.929	0.947
27	0.894	0.92	49	0.929	0.947
28	0.896	0.924	50	0.93	0.947
29	0.898	0.926			

Таблица D.5

**Процентные точки для статистики критерия Эпписа–Палли**

<i>n</i>	$p = 1 - \alpha$			
	0.90	0.95	0.975	0.99
8	0.271	0.347	0.426	0.526
9	0.275	0.35	0.428	0.537
10	0.279	0.357	0.437	0.545
15	0.284	0.366	0.447	0.560
20	0.287	0.368	0.450	0.564
30	0.288	0.371	0.459	0.569
50	0.290	0.374	0.463	0.574
100	0.291	0.376	0.464	0.583
200	0.29	0.379	0.467	0.590

Таблица D.6

**Коэффициенты для вычисления статистики модифицированного критерия Шапиро–Уилка**

$n$	$\gamma(n)$	$\delta(n)$	$\varepsilon(n)$	$n$	$\gamma(n)$	$\delta(n)$	$\varepsilon(n)$
8	-2.696	1.333	0.4186	30	-6.150	1.949	0.1872
9	-2.968	1.400	0.3900	31	-6.248	1.965	0.1840
10	-3.262	1.471	0.3660	32	-6.324	1.976	0.1811
11	-3.485	1.515	0.3451	33	-6.402	1.988	0.1781
12	-3.731	1.571	0.3270	34	-6.480	2.000	0.1755
13	-3.936	1.613	0.3111	35	-6.559	2.012	0.1727
14	-4.155	1.655	0.2969	36	-6.640	2.024	0.1702
15	-4.373	1.695	0.2842	37	-6.721	2.037	0.1677
16	-4.567	1.724	0.2727	38	-6.803	2.049	0.1656
17	-4.713	1.739	0.2622	39	-6.887	2.062	0.1633
18	-4.885	1.770	0.2528	40	-6.961	2.075	0.1612
19	-5.018	1.786	0.2440	41	-7.035	2.088	0.1591
20	-5.153	1.802	0.2359	42	-7.111	2.101	0.1572
21	-5.291	1.818	0.2264	43	-7.188	2.114	0.1552
22	-5.413	1.835	0.2207	44	-7.266	2.128	0.1534
23	-5.508	1.848	0.2157	45	-7.345	2.141	0.1516
24	-5.605	1.862	0.2106	46	-7.414	2.155	0.1499
25	-5.704	1.876	0.2063	47	-7.484	2.169	0.1482
26	-5.803	1.890	0.2020	48	-7.555	2.183	0.1466
27	-5.905	1.905	0.1980	49	-7.615	2.198	0.1451
28	-5.988	1.919	0.1943	50	-7.677	2.212	0.1436
29	-6.074	1.934	0.1907				

## **ПРИЛОЖЕНИЕ Е**

### **ТАБЛИЦЫ ПРОЦЕНТНЫХ ТОЧЕК ДЛЯ КРИТЕРИЕВ ИСКЛЮЧЕНИЯ АНОМАЛЬНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ТИПА ГРАББСА**



Таблица Е.1

## Верхние процентные точки статистик (10.1) и (10.5) критерия Граббса [42]

<i>n</i>	0.1 %	0.5 %	1 %	2.5 %	5 %	10 %
3	1.155	1.155	1.155	1.155	1.153	1.148
4	1.499	1.496	1.492	1.431	1.463	1.425
5	1.780	1.764	1.749	1.715	1.672	1.602
6	2.011	1.973	1.944	1.887	1.822	1.729
7	2.201	2.139	2.097	2.020	1.938	1.828
8	2.358	2.274	2.221	2.126	2.032	1.909
9	2.492	2.387	2.323	2.215	2.110	1.977
10	2.606	2.482	2.410	2.290	2.176	2.036
11	2.705	2.564	2.485	2.355	2.234	2.088
12	2.791	2.636	2.550	2.412	2.285	2.134
13	2.867	2.699	2.607	2.462	2.331	2.175
14	2.935	2.755	2.659	2.507	2.371	2.213
15	2.997	2.806	2.705	2.549	2.409	2.247
16	3.052	2.852	2.747	2.585	2.443	2.279
17	3.103	2.894	2.785	2.620	2.475	2.309
18	3.149	2.932	2.821	2.651	2.504	2.335
19	3.191	2.968	2.854	2.681	2.532	2.361
20	3.230	3.001	2.884	2.709	2.557	2.385
21	3.266	3.031	2.912	2.733	2.580	2.408
22	3.300	3.060	2.939	2.758	2.603	2.429
23	3.332	3.087	2.963	2.781	2.624	2.448
24	3.362	3.112	2.987	2.802	2.644	2.467
25	3.389	3.135	3.009	2.822	2.663	2.486
26	3.415	3.157	3.029	2.841	2.681	2.502
27	3.440	3.178	3.049	2.859	2.698	2.519
28	3.464	3.199	3.068	2.876	2.714	2.534
29	3.486	3.218	3.085	2.893	2.730	2.549
30	3.507	3.236	3.103	2.908	2.745	2.563
31	3.528	3.253	3.119	2.924	2.759	2.577
32	3.546	3.270	3.135	2.938	2.773	2.591
33	3.565	3.286	3.150	2.952	2.786	2.604
34	3.582	3.301	3.164	2.965	2.799	2.616
35	3.599	3.316	3.178	2.979	2.811	2.628
36	3.616	3.330	3.191	2.991	2.823	2.639
37	3.631	3.343	3.204	3.003	2.835	2.650
38	3.646	3.356	3.216	3.014	2.846	2.661
39	3.660	3.369	3.228	3.025	2.857	2.671
40	3.673	3.381	3.240	3.036	2.866	2.682

Продолжение табл. Е.1

<i>n</i>	0.1 %	0.5 %	1 %	2.5 %	5 %	10 %
41	3.687	3.393	3.251	3.046	2.877	2.692
42	3.700	3.404	3.261	3.057	2.887	2.700
43	3.712	3.415	3.271	3.067	2.896	2.710
44	3.724	3.425	3.282	3.075	2.905	2.719
45	3.736	3.435	3.292	3.085	2.914	2.727
46	3.747	3.445	3.302	3.094	2.923	2.736
47	3.757	3.455	3.310	3.103	2.931	2.744
48	3.768	3.464	3.319	3.111	2.940	2.753
49	3.779	3.474	3.329	3.120	2.948	2.760
50	3.789	3.483	3.336	3.128	2.956	2.768
51	3.798	3.491	3.345	3.136	2.964	2.775
52	3.808	3.500	3.353	3.143	2.971	2.783
53	3.316	3.507	3.361	3.151	2.973	2.790
54	3.825	3.516	3.368	3.158	2.986	2.798
55	3.834	3.524	3.376	3.166	2.992	2.804
56	3.842	3.531	3.383	3.172	3.000	2.811
57	3.851	3.539	3.391	3.180	3.006	2.818
58	3.858	3.546	3.397	3.186	3.013	2.824
59	3.867	3.553	3.405	3.193	3.019	2.831
60	3.874	3.560	3.411	3.199	3.035	2.837
61	3.382	3.566	3.418	3.205	3.032	2.842
62	3.889	3.573	3.424	3.212	3.037	2.349
63	3.896	3.579	3.430	3.218	3.044	2.854
64	3.903	3.586	3.437	3.224	3.049	2.860
65	3.910	3.592	3.442	3.230	3.055	2.866
66	3.917	3.598	3.449	3.235	3.061	2.871
67	3.923	3.605	3.454	3.241	3.066	0.288
68	3.930	3.610	3.460	3.246	3.071	2.883
69	3.936	3.617	3.466	3.252	3.076	2.888
70	3.942	3.622	3.471	3.257	3.082	2.893
71	3.948	3.627	3.476	3.262	3.087	2.897
72	3.954	3.633	3.482	3.267	3.092	2.903
73	3.960	3.638	3.487	3.272	3.098	2.908
74	3.965	3.643	3.492	3.278	3.102	2.912
75	3.971	3.648	3.496	3.282	3.107	2.917
76	3.977	3.654	3.502	3.287	3.111	2.922
77	3.982	3.658	3.507	3.291	3.117	2.927
78	3.987	3.663	3.511	3.297	3.121	2.931
79	3.992	3.669	3.516	3.301	3.125	2.935

## Продолжение табл. Е.1

<i>n</i>	0.1 %	0.5 %	1 %	2.5 %	5 %	10 %
80	3.998	3.673	3.521	3.305	3.130	2.940
81	4.002	3.677	3.525	3.309	3.134	2.945
82	4.007	3.682	3.529	3.315	3.139	2.949
83	4.012	3.687	3.534	3.319	3.143	0.295
84	4.017	3.691	3.539	3.323	3.147	2.957
85	4.021	3.695	3.543	3.327	3.151	2.961
86	4.026	3.699	3.547	3.331	3.155	2.966
87	4.031	3.704	3.551	3.335	3.160	2.970
88	4.035	3.708	3.555	3.339	3.163	2.973
89	4.039	3.712	3.559	3.343	3.167	2.977
90	4.044	3.716	3.563	3.347	3.171	2.981
91	4.049	3.720	3.567	3.350	3.174	2.984
92	4.053	3.725	3.570	3.355	3.179	2.989
93	4.067	3.728	3.575	3.358	3.182	2.993
94	4.060	3.732	3.579	3.362	3.186	2.996
95	4.064	3.736	3.582	3.365	3.189	3.000
96	4.069	3.739	3.586	3.369	3.193	3.003
97	4.073	3.744	3.589	3.372	3.196	3.006
98	4.076	3.747	3.593	3.377	3.201	3.011
99	4.080	3.750	3.597	3.380	3.204	3.014
100	4.084	3.754	3.600	3.383	3.207	3.017
101	4.088	3.757	3.603	3.386	3.210	3.021
102	4.092	3.760	3.607	3.390	3.214	3.024
103	4.095	3.765	3.610	3.393	3.217	3.027
104	4.098	3.768	3.614	3.397	3.220	3.030
105	4.102	3.771	3.617	3.400	3.224	3.033
106	4.105	3.774	3.620	3.403	3.227	3.037
107	4.109	3.777	3.623	3.406	3.230	3.040
108	4.112	3.780	3.626	3.409	3.233	3.043
109	4.116	3.784	3.629	3.412	3.236	3.046
110	4.119	3.787	3.632	3.415	3.239	3.049
111	4.122	3.790	3.636	3.418	3.242	3.052
112	4.125	3.793	3.639	3.422	3.245	3.055
113	4.129	3.796	3.642	3.424	3.248	3.058
114	4.132	3.799	3.645	3.427	3.251	3.061

Окончание табл. Е.1

<i>n</i>	0.1 %	0.5 %	1 %	2.5 %	5 %	10 %
115	4.135	3.802	3.647	3.430	3.254	3.064
116	4.138	3.805	3.650	3.433	3.257	3.067
117	4.141	3.808	3.653	3.435	3.259	3.070
118	4.144	3.811	3.656	3.438	3.262	3.073
119	4.146	3.814	3.659	3.441	3.265	3.075
120	4.150	3.817	3.662	3.444	3.267	3.073
121	4.153	3.819	3.665	3.447	3.270	3.081
122	4.156	3.822	3.667	3.450	3.274	3.083
123	4.159	3.824	3.670	3.452	3.276	3.086
124	4.161	3.827	3.672	3.455	3.279	3.089
125	4.164	3.831	3.675	3.457	3.281	3.092
126	4.166	3.833	3.677	3.460	3.284	3.095
127	4.169	3.836	3.680	3.462	3.286	3.097
128	4.173	3.838	3.683	3.465	3.289	3.100
129	4.175	3.840	3.686	3.467	3.291	3.102
130	4.178	3.843	3.688	3.470	3.294	3.104
131	4.180	3.845	3.690	3.473	3.296	3.107
132	4.133	3.848	3.693	3.475	3.298	3.109
133	4.185	3.850	3.695	3.478	3.302	3.112
134	4.188	3.853	3.697	3.480	3.304	3.114
135	4.190	3.856	3.700	3.482	3.306	3.116
136	4.193	3.858	3.702	3.484	3.309	3.119
137	4.196	3.860	3.704	3.487	3.311	3.122
138	4.198	3.863	3.707	3.489	3.313	3.124
139	4.200	3.865	3.710	3.491	3.315	3.126
140	4.203	3.867	3.712	3.493	3.318	3.129
141	4.205	3.869	3.714	3.497	3.320	3.131
142	4.207	3.871	3.716	3.499	3.322	3.133
143	4.209	3.874	3.719	3.501	3.324	3.135
144	4.212	3.876	3.721	3.503	3.326	3.138
145	4.214	3.879	3.723	3.505	3.328	3.140
146	4.216	3.881	3.725	3.507	3.331	3.142
147	4.219	3.883	3.727	3.509	3.334	3.144

Таблица Е.2

## Нижние процентные точки статистик (10.7) и (10.11) критерия Граббса [42]

<i>n</i>	0.1 %	0.5 %	1 %	2.5 %	5 %	10 %
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0031
5	0.0003	0.0018	0.0035	0.0090	0.0183	0.0376
6	0.0039	0.0116	0.0186	0.0349	0.0564	0.0920
7	0.0135	0.0308	0.0440	0.0708	0.1020	0.1479
8	0.0290	0.0563	0.7500	0.1101	0.7478	0.1994
9	0.0489	0.0851	0.1082	0.1492	0.1909	0.2454
10	0.0714	0.1150	0.1414	0.1864	0.2305	0.2863
11	0.0953	0.1448	0.1736	0.2213	0.2667	0.3227
12	0.1198	0.1738	0.2043	0.2537	0.2996	0.3552
13	0.1441	0.2016	0.2333	0.2836	0.3295	0.3843
14	0.1680	0.2280	0.2505	0.3112	0.3568	0.4106
15	0.1912	0.2530	0.2859	0.3367	0.3818	0.4345
16	0.2136	0.2767	0.3098	0.3603	0.4048	0.4562
17	0.2350	0.2990	0.3321	0.3822	0.4259	0.4761
18	0.2556	0.3200	0.3530	0.4025	0.4455	0.4944
19	0.2752	0.3398	0.3725	0.4214	0.4636	0.5113
20	0.2939	0.3585	0.3909	0.4391	0.4804	0.5270
21	0.3118	0.3761	0.4082	0.4556	0.4961	0.5415
22	0.3288	0.3927	0.4245	0.4711	0.5107	0.5550
23	0.3450	0.4085	0.4398	0.4857	0.5244	0.5677
24	0.3605	0.4234	0.4543	0.4994	0.5373	0.5795
25	0.3752	0.4376	0.4680	0.5123	0.5495	0.5906
26	0.3893	0.4510	0.4810	0.5245	0.5609	0.6011
27	0.4027	0.4638	0.4933	0.5360	0.5717	0.6110
28	0.4156	0.4759	0.5050	0.5470	0.5819	0.6203
29	0.4279	0.4875	0.5162	0.5574	0.5916	0.6292
30	0.4397	0.4985	0.5268	0.5672	0.6008	0.6375
31	0.4510	0.5091	0.5369	0.5766	0.6095	0.6455
32	0.4618	0.5192	0.5465	0.5856	0.6178	0.6530
33	0.4722	0.5288	0.5557	0.5941	0.6257	0.6602
34	0.4821	0.5381	0.5646	0.6023	0.6333	0.6671
35	0.4917	0.5469	0.5730	0.6101	0.6405	0.6737
36	0.5009	0.5554	0.5811	0.6175	0.6474	0.6800
37	0.5098	0.5636	0.5889	0.6247	0.6541	0.6860
38	0.5184	0.5714	0.5963	0.6316	0.6604	0.6917
39	0.5266	0.5789	0.6035	0.6382	0.6665	0.6972
40	0.5345	0.5862	0.6104	0.6445	0.6724	0.7025
41	0.5422	0.5932	0.6170	0.6506	0.6780	0.7076

Продолжение табл. Е.2

<i>n</i>	0.1 %	0.5 %	1 %	2.5 %	5 %	10 %
42	0.5496	0.5999	0.6234	0.6565	0.6834	0.7125
43	0.5568	0.6064	0.6296	0.6621	0.6886	0.7172
44	0.5637	0.6127	0.6355	0.6676	0.6936	0.7218
45	0.5704	0.6188	0.6412	0.6728	0.6985	0.7261
46	0.5768	0.6246	0.6468	0.6779	0.7032	0.7304
47	0.5831	0.6303	0.6521	0.6828	0.7077	0.7345
48	0.5892	0.6358	0.6573	0.6876	0.7120	0.7384
49	0.5951	0.6411	0.6623	0.6921	0.7163	0.7422
50	0.6008	0.6462	0.6672	0.6966	0.7203	0.7459
51	0.6063	0.6512	0.6719	0.7009	0.7243	0.7495
52	0.6117	0.6560	0.6765	0.7051	0.7281	0.7529
53	0.6169	0.6607	0.6809	0.7091	0.7319	0.7563
54	0.6220	0.6653	0.6852	0.7130	0.7355	0.7595
55	0.6269	0.6697	0.6894	0.7168	0.7390	0.7627
56	0.6317	0.6740	0.6934	0.7205	0.7424	0.7658
57	0.6364	0.6782	0.6974	0.7241	0.7456	0.7687
58	0.6410	0.6823	0.7012	0.7276	0.7489	0.7716
59	0.6454	0.6862	0.7049	0.7310	0.7520	0.7744
60	0.6497	0.6901	0.7086	0.7343	0.7550	0.7772
61	0.6539	0.6938	0.7121	0.7375	0.7580	0.7798
62	0.6580	0.6975	0.7155	0.7406	0.7608	0.7824
63	0.6620	0.7010	0.7189	0.7437	0.7636	0.7850
64	0.6658	0.7045	0.7221	0.7467	0.7564	0.7874
65	0.6696	0.7079	0.7253	0.7496	0.7690	0.7898
66	0.6733	0.7112	0.7284	0.7524	0.7716	0.7921
67	0.6770	0.7144	0.7314	0.7551	0.7741	0.7944
68	0.6805	0.7175	0.7344	0.7578	0.7766	0.7966
69	0.6839	0.7206	0.7373	0.7604	0.7790	0.7986
70	0.6873	0.7236	0.7401	0.7630	0.7813	0.8009
71	0.6906	0.7265	0.7429	0.7655	0.7836	0.8030
72	0.6938	0.7294	0.7455	0.7679	0.7859	0.8050
73	0.6970	0.7322	0.7482	0.7703	0.7881	0.8070
74	0.7000	0.7349	0.7507	0.7727	0.7902	0.8089
75	0.7031	0.7376	0.7532	0.7749	0.7923	0.8108
76	0.7060	0.7402	0.7557	0.7772	0.7944	0.8127
77	0.7089	0.7427	0.7581	0.7794	0.7964	0.8145
78	0.7117	0.7453	0.7605	0.7815	0.7983	0.8162
79	0.7145	0.7477	0.7628	0.7836	0.8002	0.8180
80	0.7172	0.7501	0.7650	0.7856	0.8021	0.8197

## Продолжение табл. Е.2

<i>n</i>	0.1 %	0.5 %	1 %	2.5 %	5 %	10 %
81	0.7199	0.7525	0.7672	0.7876	0.8040	0.8213
82	0.7225	0.7548	0.7694	0.7896	0.3058	0.8230
83	0.7250	0.7570	0.7715	0.7915	0.3075	0.8245
84	0.7275	0.7592	0.7736	0.7934	0.6093	0.8261
85	0.7300	0.7614	0.7756	0.7953	0.8109	0.8276
86	0.7324	0.7635	0.7776	0.7971	0.8126	0.6291
87	0.7348	0.7656	0.7796	0.7989	0.8142	0.8306
88	0.7371	0.7677	0.7815	0.8006	0.8158	0.8321
89	0.7394	0.7697	0.7834	0.8023	0.8174	0.8335
90	0.7416	0.7717	0.7853	0.8040	0.8190	0.8349
91	0.7438	0.7736	0.7871	0.8057	0.8205	0.8362
92	0.7459	0.7755	0.7889	0.8073	0.8220	0.8376
93	0.7481	0.7774	0.7906	0.8089	0.8234	0.8389
94	0.7501	0.7792	0.7923	0.3104	0.8248	0.8402
95	0.7522	0.7810	0.7940	0.8120	0.8263	0.8414
96	0.7542	0.7828	0.7957	0.8135	0.8276	0.8427
97	0.7562	0.7845	0.7973	0.8149	0.3290	0.8439
98	0.7581	0.7862	0.7989	0.8164	0.8303	0.8451
99	0.7600	0.7879	0.8005	0.8178	0.8316	0.8463
100	0.7619	0.7896	0.8020	0.8192	0.6329	0.8475
101	0.7637	0.7912	0.8036	0.8206	0.8342	0.8486
102	0.7655	0.7928	0.8051	0.8220	0.8354	0.8497
103	0.7673	0.7944	0.8065	0.8233	0.8367	0.8508
104	0.7691	0.7959	0.8080	0.8246	0.8379	0.8519
105	0.7708	0.7974	0.8094	0.8259	0.8391	0.8530
106	0.7725	0.7989	0.8108	0.8272	0.8402	0.8541
107	0.7742	0.8004	0.8122	0.8284	0.8414	0.8551
108	0.7758	0.8018	0.8136	0.8297	0.8425	0.8163
109	0.7774	0.8033	0.8149	0.8309	0.8436	0.8571
110	0.7790	0.8047	0.8162	0.8321	0.8447	0.8581
111	0.7806	0.8061	0.8175	0.8333	0.8458	0.8591
112	0.7821	0.8074	0.8188	0.8344	0.8469	0.8600
113	0.7837	0.8088	0.8200	0.8356	0.8479	0.8610
114	0.7852	0.8101	0.8213	0.8367	0.8489	0.8619
115	0.7866	0.8114	0.8225	0.8378	0.8500	0.8628

Окончание табл. Е.2

<i>n</i>	0.1 %	0.5 %	1 %	2.5 %	5 %	10 %
116	0.7881	0.8127	0.8237	0.8389	0.8510	0.8637
117	0.7895	0.8139	0.8249	0.8400	0.8519	0.8646
118	0.7909	0.8152	0.8261	0.8410	0.8529	0.8655
119	0.7923	0.8164	0.8272	0.8421	0.8539	0.8664
120	0.7937	0.8176	0.8284	0.8431	0.8548	0.8672
121	0.7951	0.8188	0.8295	0.8441	0.8557	0.8681
122	0.7964	0.8200	0.8306	0.8451	0.8567	0.8689
123	0.7977	0.8211	0.8317	0.8461	0.8576	0.8697
124	0.7990	0.8223	0.8327	0.8471	0.8585	0.8705
125	0.8003	0.8234	0.8338	0.8480	0.8593	0.8713
126	0.8016	0.8245	0.8348	0.8490	0.8602	0.8721
127	0.8028	0.8256	0.8359	0.8499	0.8611	0.8729
128	0.8041	0.8267	0.8369	0.8508	0.8619	0.8737
129	0.8053	0.8278	0.8379	0.8517	0.8627	0.8744
130	0.8065	0.8288	0.8389	0.8526	0.8636	0.8752
131	0.8077	0.8299	0.8398	0.8535	0.8644	0.8759
132	0.8088	0.8309	0.8408	0.8544	0.8652	0.8766
133	0.8100	0.8319	0.8418	0.8553	0.8660	0.8773
134	0.8111	0.8329	0.8427	0.8561	0.8668	0.8780
135	0.8122	0.8339	0.8436	0.8570	0.8675	0.8787
136	0.8134	0.8349	0.8445	0.8578	0.8683	0.8794
137	0.8145	0.8358	0.8454	0.8586	0.8690	0.8801
138	0.8155	0.8368	0.8463	0.8594	0.3698	0.8808
139	0.8166	0.8377	0.8472	0.8602	0.8705	0.8814
140	0.8176	0.8387	0.8481	0.8610	0.8712	0.8821
141	0.8187	0.8396	0.8489	0.8618	0.8720	0.8827
142	0.8197	0.8405	0.8498	0.8625	0.8727	0.8834
143	0.8207	0.8414	0.8506	0.8633	0.8734	0.8840
144	0.8218	0.8423	0.8515	0.8641	0.8741	0.8846
145	0.8227	0.8431	0.8523	0.8648	0.8747	0.8853
146	0.8237	0.8440	0.8531	0.8655	0.8754	0.8859
147	0.8247	0.8449	0.8539	0.8663	0.8761	0.8865
148	0.8256	0.8457	0.8547	0.8670	0.8767	0.8871
149	0.8266	0.8465	0.8555	0.8677	0.8774	0.8877

Таблица Е.3

**Нижние процентные точки статистик (10.14) – (10.15) критерия типа Граббса**

<i>n</i>	0.1 %	0.5 %	1 %	2.5 %	5 %	10 %
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015
6	0.0002	0.0009	0.0019	0.0048	0.0099	0.0207
7	0.0023	0.0065	0.0106	0.0200	0.0332	0.0552
8	0.0079	0.0186	0.0268	0.0437	0.0640	0.0943
9	0.0176	0.0355	0.0478	0.0711	0.0966	0.1333
10	0.0314	0.0561	0.0717	0.1001	0.1302	0.1703
11	0.0471	0.0779	0.0968	0.1293	0.1619	0.2047
12	0.0659	0.1012	0.1222	0.1576	0.1925	0.2368
13	0.0841	0.1237	0.1471	0.1850	0.2206	0.2660
14	0.1035	0.1468	0.1707	0.2104	0.2475	0.2935
15	0.1234	0.1692	0.1943	0.2351	0.2726	0.3182
16	0.1412	0.1905	0.2170	0.2583	0.2962	0.3419
17	0.1607	0.2109	0.2374	0.2799	0.3178	0.3631
18	0.1797	0.2309	0.2583	0.3008	0.3382	0.3828
19	0.1973	0.2503	0.2782	0.3197	0.3575	0.4016
20	0.2161	0.2688	0.2966	0.3387	0.3757	0.4190
21	0.2313	0.2856	0.3139	0.3558	0.3924	0.4348
22	0.2488	0.3023	0.3303	0.3718	0.4082	0.4505
23	0.2643	0.3197	0.3466	0.3881	0.4238	0.4645
24	0.2795	0.3339	0.3606	0.4020	0.4375	0.4782
25	0.2952	0.3491	0.3762	0.4164	0.4510	0.4906
26	0.3091	0.3625	0.3890	0.4294	0.4638	0.5028
27	0.3209	0.3750	0.4022	0.4415	0.4756	0.5144
28	0.3357	0.3887	0.4151	0.4536	0.4874	0.5250
29	0.3475	0.4001	0.4270	0.4658	0.4984	0.5353
30	0.3608	0.4127	0.4382	0.4763	0.5087	0.5451
31	0.3710	0.4228	0.4486	0.4867	0.5186	0.5544
32	0.3797	0.4331	0.4596	0.4968	0.5282	0.5634
33	0.3935	0.4441	0.4692	0.5060	0.5370	0.5716
34	0.4040	0.4547	0.4793	0.5151	0.5456	0.5798
35	0.4131	0.4643	0.4885	0.5242	0.5541	0.5876
36	0.4239	0.4730	0.4974	0.5330	0.5623	0.5952
37	0.4317	0.4824	0.5064	0.5411	0.5697	0.6023
38	0.4414	0.4915	0.5149	0.5487	0.5772	0.6090
39	0.4511	0.4999	0.5228	0.5563	0.5843	0.6158
40	0.4610	0.5077	0.5296	0.5630	0.5910	0.6219
41	0.4667	0.5146	0.5381	0.5706	0.5978	0.6279

Продолжение табл. Е.3

<i>n</i>	0.1 %	0.5 %	1 %	2.5 %	5 %	10 %
42	0.4751	0.5226	0.5452	0.5774	0.6041	0.6338
43	0.4839	0.5299	0.5517	0.5836	0.6102	0.6397
44	0.4910	0.5366	0.5585	0.5899	0.6159	0.6450
45	0.4997	0.5436	0.5651	0.5960	0.6217	0.6504
46	0.5057	0.5498	0.5713	0.6020	0.6274	0.6553
47	0.5131	0.5562	0.5775	0.6075	0.6327	0.6605
48	0.5191	0.5622	0.5833	0.6131	0.6380	0.6653
49	0.5247	0.5684	0.5891	0.6183	0.6430	0.6698
50	0.5316	0.5745	0.5947	0.6239	0.6477	0.6743
51	0.5374	0.5803	0.6000	0.6284	0.6524	0.6786
52	0.5436	0.5853	0.6051	0.6333	0.6568	0.6828
53	0.5491	0.5909	0.6104	0.6383	0.6616	0.6870
54	0.5540	0.5956	0.6150	0.6427	0.6660	0.6910
55	0.5605	0.6009	0.6199	0.6471	0.6697	0.6948
56	0.5664	0.6060	0.6246	0.6514	0.6739	0.6985
57	0.5706	0.6107	0.6295	0.6555	0.6777	0.7023
58	0.5753	0.6156	0.6338	0.6597	0.6816	0.7056
59	0.5803	0.6191	0.6375	0.6639	0.6855	0.7091
60	0.5860	0.6238	0.6423	0.6678	0.6891	0.7124
61	0.5898	0.6280	0.6461	0.6717	0.6925	0.7158
62	0.5963	0.6333	0.6507	0.6753	0.6962	0.7191
63	0.5997	0.6364	0.6543	0.6793	0.6997	0.7222
64	0.6042	0.6409	0.6578	0.6824	0.7026	0.7250
65	0.6084	0.6446	0.6618	0.6861	0.7060	0.7280
66	0.6127	0.6479	0.6651	0.6892	0.7089	0.7310
67	0.6164	0.6518	0.6685	0.6926	0.7122	0.7339
68	0.6202	0.6556	0.6722	0.6958	0.7152	0.7365
69	0.6245	0.6592	0.6753	0.6988	0.7181	0.7393
70	0.6283	0.6626	0.6789	0.7022	0.7210	0.7418
71	0.6310	0.6658	0.6820	0.7051	0.7239	0.7444
72	0.6362	0.6695	0.6854	0.7078	0.7265	0.7469
73	0.6388	0.6728	0.6884	0.7109	0.7292	0.7494
74	0.6432	0.6759	0.6913	0.7136	0.7317	0.7519
75	0.6449	0.6787	0.6940	0.7163	0.7345	0.7541
76	0.6497	0.6816	0.6974	0.7189	0.7370	0.7566
77	0.6526	0.6851	0.7002	0.7217	0.7394	0.7586
78	0.6558	0.6878	0.7028	0.7241	0.7416	0.7610
79	0.6589	0.6911	0.7060	0.7269	0.7442	0.7632
80	0.6624	0.6938	0.7084	0.7293	0.7465	0.7652
81	0.6645	0.6965	0.7108	0.7315	0.7486	0.7673

## Продолжение табл. Е.3

<i>n</i>	0.1 %	0.5 %	1 %	2.5 %	5 %	10 %
82	0.6681	0.6992	0.7139	0.7339	0.7508	0.7692
83	0.6710	0.7015	0.7157	0.7361	0.7528	0.7712
84	0.6747	0.7045	0.7184	0.7384	0.7551	0.7732
85	0.6769	0.7072	0.7212	0.7410	0.7571	0.7750
86	0.6800	0.7094	0.7234	0.7429	0.7592	0.7770
87	0.6819	0.7114	0.7254	0.7452	0.7612	0.7789
88	0.6845	0.7143	0.7280	0.7476	0.7634	0.7806
89	0.6875	0.7165	0.7303	0.7494	0.7652	0.7825
90	0.6897	0.7185	0.7323	0.7515	0.7672	0.7843
91	0.6937	0.7217	0.7346	0.7534	0.7689	0.7860
92	0.6956	0.7235	0.7368	0.7554	0.7707	0.7876
93	0.6988	0.7259	0.7388	0.7572	0.7725	0.7893
94	0.7003	0.7280	0.7409	0.7594	0.7744	0.7909
95	0.7029	0.7303	0.7429	0.7612	0.7761	0.7924
96	0.7050	0.7325	0.7448	0.7630	0.7779	0.7940
97	0.7077	0.7341	0.7469	0.7649	0.7795	0.7957
98	0.7089	0.7363	0.7486	0.7666	0.7811	0.7971
99	0.7119	0.7382	0.7507	0.7684	0.7827	0.7986
100	0.7145	0.7404	0.7526	0.7702	0.7845	0.8002
101	0.7170	0.7422	0.7540	0.7717	0.7860	0.8015
102	0.7188	0.7441	0.7559	0.7732	0.7875	0.8030
103	0.7209	0.7460	0.7579	0.7750	0.7890	0.8044
104	0.7224	0.7479	0.7596	0.7765	0.7904	0.8058
105	0.7243	0.7495	0.7613	0.7782	0.7919	0.8070
106	0.7264	0.7512	0.7631	0.7799	0.7934	0.8084
107	0.7276	0.7529	0.7648	0.7812	0.7948	0.8097
108	0.7307	0.7548	0.7665	0.7827	0.7963	0.8110
109	0.7322	0.7567	0.7678	0.7842	0.7977	0.8122
110	0.7339	0.7585	0.7698	0.7858	0.7990	0.8135
111	0.7361	0.7601	0.7713	0.7871	0.8004	0.8148
112	0.7380	0.7616	0.7729	0.7888	0.8017	0.8160
113	0.7394	0.7633	0.7745	0.7900	0.8031	0.8172
114	0.7416	0.7647	0.7759	0.7914	0.8044	0.8184
115	0.7431	0.7665	0.7775	0.7929	0.8056	0.8195
116	0.7441	0.7680	0.7789	0.7942	0.8068	0.8207

Окончание табл. Е.3

<i>n</i>	0.1 %	0.5 %	1 %	2.5 %	5 %	10 %
117	0.7464	0.7694	0.7801	0.7955	0.8079	0.8218
118	0.7484	0.7709	0.7818	0.7968	0.8092	0.8230
119	0.7497	0.7724	0.7830	0.7982	0.8105	0.8241
120	0.7505	0.7738	0.7846	0.7995	0.8117	0.8250
121	0.7531	0.7753	0.7859	0.8007	0.8128	0.8262
122	0.7547	0.7768	0.7872	0.8019	0.8140	0.8273
123	0.7560	0.7782	0.7886	0.8030	0.8151	0.8283
124	0.7579	0.7793	0.7897	0.8043	0.8162	0.8293
125	0.7592	0.7808	0.7911	0.8054	0.8174	0.8304
126	0.7610	0.7824	0.7926	0.8068	0.8184	0.8314
127	0.7624	0.7834	0.7934	0.8079	0.8197	0.8324
128	0.7631	0.7850	0.7950	0.8091	0.8205	0.8333
129	0.7653	0.7859	0.7960	0.8102	0.8216	0.8343
130	0.7662	0.7877	0.7974	0.8112	0.8228	0.8353
131	0.7686	0.7889	0.7985	0.8123	0.8237	0.8362
132	0.7696	0.7901	0.7996	0.8135	0.8247	0.8371
133	0.7706	0.7911	0.8006	0.8146	0.8257	0.8380
134	0.7721	0.7924	0.8018	0.8155	0.8267	0.8388
135	0.7730	0.7934	0.8032	0.8168	0.8277	0.8398
136	0.7749	0.7949	0.8042	0.8176	0.8286	0.8407
137	0.7757	0.7958	0.8051	0.8186	0.8296	0.8416
138	0.7771	0.7968	0.8063	0.8195	0.8306	0.8424
139	0.7785	0.7979	0.8074	0.8206	0.8314	0.8432
140	0.7803	0.7993	0.8086	0.8216	0.8324	0.8441
141	0.7806	0.8003	0.8096	0.8226	0.8333	0.8450
142	0.7821	0.8013	0.8104	0.8235	0.8341	0.8458
143	0.7834	0.8026	0.8116	0.8246	0.8351	0.8466
144	0.7841	0.8038	0.8127	0.8254	0.8360	0.8474
145	0.7853	0.8044	0.8135	0.8262	0.8367	0.8481
146	0.7866	0.8056	0.8148	0.8274	0.8377	0.8489
147	0.7883	0.8067	0.8155	0.8283	0.8384	0.8497
148	0.7895	0.8078	0.8166	0.8291	0.8393	0.8505
149	0.7902	0.8088	0.8174	0.8299	0.8400	0.8513
150	0.7915	0.8099	0.8184	0.8309	0.8410	0.8520

Таблица Е.4

**Нижние процентные точки статистик (10.20) критерия типа Граббса**

<i>n</i>	0.1 %	0.5 %	1 %	2.5 %	5 %	10 %
5	0.0003	0.0012	0.0025	0.0063	0.0129	0.0265
6	0.0030	0.0089	0.0140	0.0262	0.0427	0.0698
7	0.0110	0.0243	0.0349	0.0562	0.0809	0.1178
8	0.0242	0.0468	0.0620	0.0908	0.1218	0.1644
9	0.0408	0.0712	0.0908	0.1252	0.1608	0.2073
10	0.0610	0.0991	0.1215	0.1606	0.1981	0.2464
11	0.0845	0.1279	0.1529	0.1939	0.2334	0.2821
12	0.1072	0.1544	0.1813	0.2247	0.2648	0.3135
13	0.1307	0.1813	0.2091	0.2538	0.2948	0.3428
14	0.1527	0.2065	0.2356	0.2808	0.3219	0.3696
15	0.1747	0.2313	0.2605	0.3059	0.3463	0.3936
16	0.1964	0.2537	0.2837	0.3291	0.3697	0.4160
17	0.2162	0.2756	0.3052	0.3512	0.3907	0.4367
18	0.2357	0.2969	0.3268	0.3718	0.4110	0.4556
19	0.2571	0.3164	0.3465	0.3912	0.4298	0.4730
20	0.2762	0.3358	0.3650	0.4094	0.4474	0.4895
21	0.2950	0.3543	0.3829	0.4264	0.4636	0.5051
22	0.3114	0.3702	0.3994	0.4424	0.4787	0.5191
23	0.3268	0.3864	0.4154	0.4573	0.4932	0.5326
24	0.3448	0.4013	0.4297	0.4714	0.5064	0.5451
25	0.3590	0.4153	0.4440	0.4848	0.5187	0.5567
26	0.3732	0.4294	0.4576	0.4973	0.5310	0.5679
27	0.3865	0.4423	0.4699	0.5097	0.5422	0.5784
28	0.3994	0.4547	0.4818	0.5208	0.5529	0.5884
29	0.4133	0.4673	0.4930	0.5317	0.5631	0.5978
30	0.4257	0.4791	0.5050	0.5422	0.5731	0.6067
31	0.4376	0.4885	0.5145	0.5511	0.5819	0.6152
32	0.4477	0.4995	0.5249	0.5608	0.5908	0.6235
33	0.4558	0.5099	0.5346	0.5702	0.5993	0.6314
34	0.4688	0.5189	0.5431	0.5783	0.6072	0.6384
35	0.4779	0.5285	0.5524	0.5864	0.6149	0.6456
36	0.4874	0.5374	0.5612	0.5946	0.6225	0.6525
37	0.4970	0.5459	0.5688	0.6022	0.6296	0.6591
38	0.5048	0.5540	0.5767	0.6091	0.6359	0.6652
39	0.5145	0.5617	0.5839	0.6166	0.6425	0.6711
40	0.5211	0.5692	0.5917	0.6229	0.6489	0.6768
41	0.5307	0.5767	0.5985	0.6295	0.6548	0.6823
42	0.5385	0.5835	0.6052	0.6360	0.6606	0.6877

Продолжение табл. Е.4

<i>n</i>	0.1 %	0.5 %	1 %	2.5 %	5 %	10 %
43	0.5450	0.5902	0.6117	0.6417	0.6662	0.6928
44	0.5522	0.5970	0.6181	0.6476	0.6715	0.6977
45	0.5599	0.6033	0.6237	0.6529	0.6767	0.7025
46	0.5675	0.6090	0.6295	0.6582	0.6817	0.7071
47	0.5742	0.6154	0.6356	0.6637	0.6865	0.7115
48	0.5789	0.6211	0.6412	0.6687	0.6913	0.7159
49	0.5861	0.6270	0.6461	0.6733	0.6957	0.7200
50	0.5910	0.6324	0.6512	0.6783	0.7002	0.7240
51	0.5972	0.6374	0.6557	0.6824	0.7044	0.7278
52	0.6037	0.6420	0.6605	0.6868	0.7085	0.7315
53	0.6086	0.6475	0.6655	0.6916	0.7126	0.7351
54	0.6147	0.6520	0.6698	0.6955	0.7163	0.7388
55	0.6186	0.6571	0.6746	0.6995	0.7198	0.7420
56	0.6244	0.6617	0.6791	0.7037	0.7237	0.7456
57	0.6291	0.6657	0.6828	0.7072	0.7271	0.7488
58	0.6337	0.6696	0.6870	0.7112	0.7308	0.7521
59	0.6385	0.6744	0.6910	0.7148	0.7341	0.7548
60	0.6434	0.6786	0.6948	0.7182	0.7372	0.7579
61	0.6468	0.6825	0.6984	0.7217	0.7405	0.7608
62	0.6520	0.6858	0.7020	0.7250	0.7435	0.7636
63	0.6553	0.6895	0.7056	0.7282	0.7467	0.7665
64	0.6595	0.6931	0.7093	0.7316	0.7496	0.7692
65	0.6641	0.6974	0.7126	0.7345	0.7524	0.7717
66	0.6677	0.7006	0.7159	0.7375	0.7552	0.7743
67	0.6706	0.7033	0.7187	0.7403	0.7578	0.7768
68	0.6752	0.7067	0.7221	0.7432	0.7604	0.7791
69	0.6799	0.7106	0.7255	0.7462	0.7632	0.7815
70	0.6824	0.7137	0.7280	0.7487	0.7655	0.7837
71	0.6862	0.7167	0.7309	0.7515	0.7681	0.7860
72	0.6890	0.7192	0.7338	0.7540	0.7706	0.7883
73	0.6922	0.7229	0.7369	0.7567	0.7729	0.7904
74	0.6956	0.7251	0.7391	0.7591	0.7752	0.7926
75	0.6992	0.7286	0.7422	0.7615	0.7775	0.7947
76	0.7025	0.7313	0.7447	0.7638	0.7794	0.7966
77	0.7052	0.7338	0.7472	0.7663	0.7819	0.7986
78	0.7074	0.7360	0.7494	0.7686	0.7840	0.8005
79	0.7110	0.7388	0.7521	0.7706	0.7861	0.8024
80	0.7137	0.7418	0.7547	0.7730	0.7881	0.8044
81	0.7169	0.7438	0.7566	0.7750	0.7901	0.8061

## Продолжение табл. Е.4

<i>n</i>	0.1 %	0.5 %	1 %	2.5 %	5 %	10 %
82	0.7189	0.7464	0.7590	0.7772	0.7919	0.8079
83	0.7215	0.7488	0.7614	0.7792	0.7938	0.8097
84	0.7246	0.7509	0.7635	0.7812	0.7957	0.8114
85	0.7275	0.7537	0.7660	0.7833	0.7975	0.8130
86	0.7288	0.7556	0.7678	0.7853	0.7994	0.8147
87	0.7321	0.7581	0.7703	0.7873	0.8012	0.8163
88	0.7337	0.7598	0.7718	0.7890	0.8028	0.8178
89	0.7372	0.7620	0.7739	0.7909	0.8046	0.8194
90	0.7395	0.7644	0.7762	0.7927	0.8062	0.8210
91	0.7418	0.7665	0.7780	0.7945	0.8079	0.8224
92	0.7437	0.7683	0.7797	0.7961	0.8095	0.8240
93	0.7464	0.7703	0.7817	0.7980	0.8111	0.8253
94	0.7484	0.7726	0.7837	0.7996	0.8126	0.8267
95	0.7497	0.7738	0.7852	0.8012	0.8141	0.8282
96	0.7522	0.7758	0.7869	0.8029	0.8157	0.8296
97	0.7547	0.7779	0.7891	0.8045	0.8172	0.8309
98	0.7567	0.7798	0.7905	0.8060	0.8185	0.8322
99	0.7577	0.7818	0.7921	0.8075	0.8200	0.8335
100	0.7604	0.7833	0.7939	0.8090	0.8213	0.8348
101	0.7626	0.7849	0.7956	0.8105	0.8227	0.8360
102	0.7645	0.7866	0.7972	0.8119	0.8241	0.8372
103	0.7661	0.7877	0.7983	0.8134	0.8254	0.8385
104	0.7680	0.7897	0.8001	0.8148	0.8267	0.8397
105	0.7698	0.7916	0.8017	0.8161	0.8279	0.8407
106	0.7712	0.7932	0.8031	0.8176	0.8291	0.8419
107	0.7735	0.7946	0.8046	0.8188	0.8304	0.8430
108	0.7749	0.7963	0.8061	0.8202	0.8316	0.8442
109	0.7768	0.7975	0.8073	0.8214	0.8328	0.8454
110	0.7787	0.7991	0.8089	0.8229	0.8341	0.8464
111	0.7799	0.8004	0.8104	0.8240	0.8353	0.8475
112	0.7811	0.8019	0.8115	0.8252	0.8364	0.8485
113	0.7829	0.8035	0.8131	0.8266	0.8375	0.8495
114	0.7843	0.8047	0.8141	0.8276	0.8386	0.8506
115	0.7862	0.8059	0.8156	0.8289	0.8398	0.8515
116	0.7876	0.8076	0.8167	0.8300	0.8408	0.8526

Окончание табл. Е.4

<i>n</i>	0.1 %	0.5 %	1 %	2.5 %	5 %	10 %
117	0.7900	0.8088	0.8180	0.8310	0.8419	0.8536
118	0.7903	0.8104	0.8191	0.8322	0.8429	0.8546
119	0.7924	0.8113	0.8203	0.8333	0.8440	0.8554
120	0.7939	0.8127	0.8218	0.8344	0.8450	0.8564
121	0.7953	0.8139	0.8230	0.8356	0.8461	0.8573
122	0.7965	0.8152	0.8242	0.8367	0.8470	0.8582
123	0.7980	0.8164	0.8251	0.8377	0.8480	0.8591
124	0.7996	0.8179	0.8265	0.8388	0.8489	0.8601
125	0.8007	0.8189	0.8275	0.8399	0.8499	0.8609
126	0.8019	0.8202	0.8286	0.8407	0.8508	0.8617
127	0.8038	0.8214	0.8298	0.8418	0.8517	0.8626
128	0.8040	0.8223	0.8308	0.8427	0.8527	0.8635
129	0.8058	0.8234	0.8318	0.8437	0.8536	0.8642
130	0.8070	0.8247	0.8329	0.8448	0.8545	0.8651
131	0.8082	0.8255	0.8338	0.8456	0.8554	0.8659
132	0.8092	0.8267	0.8348	0.8466	0.8563	0.8667
133	0.8106	0.8276	0.8360	0.8475	0.8572	0.8675
134	0.8118	0.8290	0.8369	0.8484	0.8578	0.8682
135	0.8138	0.8299	0.8379	0.8493	0.8588	0.8690
136	0.8137	0.8311	0.8390	0.8502	0.8596	0.8697
137	0.8153	0.8322	0.8400	0.8512	0.8604	0.8705
138	0.8163	0.8330	0.8408	0.8520	0.8612	0.8712
139	0.8173	0.8340	0.8418	0.8528	0.8620	0.8720
140	0.8186	0.8351	0.8426	0.8536	0.8627	0.8727
141	0.8194	0.8360	0.8437	0.8545	0.8634	0.8733
142	0.8211	0.8369	0.8444	0.8554	0.8643	0.8741
143	0.8219	0.8381	0.8454	0.8561	0.8651	0.8748
144	0.8227	0.8389	0.8464	0.8570	0.8658	0.8755
145	0.8237	0.8398	0.8472	0.8577	0.8665	0.8761
146	0.8251	0.8409	0.8481	0.8585	0.8673	0.8768
147	0.8260	0.8415	0.8488	0.8593	0.8681	0.8775
148	0.8268	0.8426	0.8497	0.8601	0.8687	0.8782
149	0.8280	0.8432	0.8505	0.8608	0.8694	0.8788
150	0.8289	0.8442	0.8513	0.8616	0.8701	0.8794

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	7
1. Оценивание параметров распределений .....	13
1.1. Введение .....	13
1.2. Методы оценивания.....	15
1.2.1. Метод максимального правдоподобия .....	15
1.2.2. Методы минимального расстояния .....	17
1.2.3. Оценивание параметров по порядковым статистикам.....	19
1.3. Оценки параметров распределений по группированным данным .....	19
1.3.1. Методы оценивания параметров по группированным данным .....	19
1.3.2. Решение задачи асимптотически оптимального группирования ....	21
1.4. Оценивание параметров распределений по цензурированным данным .....	26
1.4.1. Количество информации Фишера как мера возможной точ- ности оценивания.....	26
1.4.2. Экспериментальные оценки точности оценивания по цензу- рированным выборкам.....	32
1.4.3. Влияние аномальных измерений на оценки по цензуриро- ванным выборкам.....	44
1.4.4. Цензурированные выборки и оптимальное группирование.....	46
1.4.5. Проблемы и надежды, связанные с анализом цензурирова- ных выборок .....	52
1.5. Оптимальные $L$ -оценки по выборочным квантилям .....	53
1.5.1. Построение $L$ -оценок параметров сдвига и масштаба .....	53
1.5.2. Выбор квантилей стандартного распределения и вычисление коэффициентов $L$ -оценок .....	57
1.5.3. Точность оценивания квантилей и $L$ -оценок .....	65

---

1.5.4. Пример построения $L$ -оценок.....	72
1.6. Робастность оценок .....	75
1.6.1. Подходы к построению робастных оценок.....	75
1.6.2. Группирование наблюдений как способ получения робаст- ных оценок.....	76
1.6.3. Функции влияния и робастность оценок.....	82
1.7. Выводы .....	90
2. Применение критериев согласия типа $\chi^2$ .....	93
2.1. Введение .....	93
2.2. Критерии типа $\chi^2$ при простых гипотезах.....	97
2.3. Критерий типа $\chi^2$ при сложных гипотезах.....	100
2.4. Статистика типа $\chi^2$ Никиулина .....	101
2.5. Связь мощности критериев со способом группирования наблю- дений .....	104
2.6. Асимптотически оптимальное группирование .....	106
2.7. Характер влияния способов группирования и метода оценивания на распределения статистик типа $\chi^2$ .....	109
2.8. Выбор числа интервалов .....	118
2.9. Рекомендации по использованию асимптотически оптимального группирования в критериях согласия .....	140
2.10. Примеры использования таблиц асимптотически оптимального группирования .....	165
2.11. Порядок применения критериев типа $\chi^2$ при проверке простой гипотезы .....	175
2.12. Порядок применения критериев типа $\chi^2$ при проверке сложной гипотезы .....	177
2.13. Выводы .....	178
3. Применение непараметрических критериев согласия .....	181
3.1. Введение .....	181
3.2. Распределения статистик непараметрических критериев согласия при простых гипотезах .....	183
3.2.1. Критерий Колмогорова.....	183
3.2.2. Критерий Смирнова .....	184
3.2.3. Критерии $\omega^2$ .....	185

---

3.3. Непараметрические критерии согласия при сложных гипотезах .....	187
3.3.1. Потеря критериями свойства «свободы от распределения».....	187
3.3.2. Методика компьютерного анализа статистических закономерностей.....	189
3.3.3. Факторы, влияющие на распределения статистик критериев при проверке сложных гипотез.....	192
3.3.4. Влияние объема выборки на распределения статистик непараметрических критериев при простых и сложных гипотезах ...	193
3.3.5. Влияние объема выборки на мощность непараметрических критериев при простых и сложных гипотезах.....	196
3.3.6. Влияние метода оценивания на распределения статистик непараметрических критериев при сложных гипотезах.....	201
3.3.7. Метод оценивания и мощность непараметрических критериев согласия .....	210
3.3.8. Зависимость распределений статистик непараметрических критериев от конкретных значений параметра .....	213
3.3.8.1. Распределения статистик непараметрических критериев согласия в случае проверки согласия с гамма-распределением .....	214
3.3.8.2. Распределения статистик непараметрических критериев согласия в случае проверки согласия с двусторонним экспоненциальным распределением.....	217
3.3.8.3. Распределения статистик непараметрических критериев согласия в случае проверки согласия с обратным гауссовским законом .....	222
3.3.8.4. Распределения статистик непараметрических критериев согласия в случае проверки согласия с обобщенным распределением Вейбулла.....	223
3.3.8.5. Распределения статистик непараметрических критериев согласия в случае проверки согласия с семействами бета-распределений .....	227
3.4. Порядок проверки гипотез о согласии.....	232
3.4.1. Перечень распределений, для которых регламентирована проверка сложных гипотез.....	232
3.4.2. Порядок проверки простой гипотезы о согласии .....	238
3.4.2.1. Критерий Колмогорова при простой гипотезе.....	239
3.4.2.2. Критерий Смирнова при простой гипотезе .....	239

---

3.4.2.3. Критерий $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова при простой гипотезе .....	240
3.4.2.4. Критерий $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга при простой гипотезе.....	240
3.4.3. Порядок проверки сложной гипотезы .....	241
3.4.4. Примеры применения критериев согласия при простых и сложных гипотезах .....	243
3.5. Выводы .....	255
4. Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах .....	259
4.1. Введение .....	259
4.2. Исследуемые критерии.....	261
4.3. Методы исследований .....	267
4.4. Рассматриваемые альтернативы.....	267
4.5. Мощность критериев в случае проверки простых гипотез при альтернативе «нормальное распределение – логистическое» .....	269
4.6. Мощности критериев в случае проверки простых гипотез и пары гипотез «распределение Вейбулла – гамма-распределение».....	276
4.7. Мощность критериев в случае проверки сложных гипотез при альтернативе «нормальное распределение – логистическое» .....	278
4.8. Мощности критериев в случае проверки сложных гипотез и пары конкурирующих гипотез «распределение Вейбулла – гамма-распределение» .....	291
4.9. Замечания о максимизации мощности критерия $\chi^2$ Пирсона.....	296
4.10. Выводы .....	304
5. Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона ..	307
5.1. Введение .....	307
5.2. Критерий проверки на симметричность .....	309
5.3. Критерий проверки на эксцесс .....	312
5.4. Критерий Шапиро–Уилка .....	315
5.5. Критерий Эпписа–Палли.....	320
5.6. Модифицированный критерий Шапиро–Уилка.....	324
5.7. Совместный критерий проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса .....	327
5.8. Модификация D'Agostino критерия проверки на симметричность ...	329

5.9. Модификация D'Agostino критерия проверки на симметричность и значение эксцесса .....	331
5.10. Совместный критерий проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса D'Agostino .....	334
5.11. Критерий Фросини .....	336
5.12. Критерии Хегази–Грина.....	340
5.13. Критерий Гири .....	344
5.14. Критерий Дэвида–Хартли–Пирсона .....	348
5.15. Критерий Шпигельхальтера .....	351
5.16. Выводы .....	356
6. Критерии однородности .....	361
6.1. Введение .....	361
6.2. Критерий Смирнова.....	363
6.3. Критерий однородности Лемана–Розенблатта.....	372
6.4. Выводы .....	377
7. Об устойчивости и мощности критериев проверки однородности средних.....	379
7.1. Введение .....	379
7.2. Критерии однородности средних .....	380
7.3. Исследование устойчивости параметрических критериев к нарушению предположений нормальности .....	385
7.4. Исследование мощности критериев .....	388
7.5. Выводы .....	396
8. Применение и мощность критериев проверки однородности дисперсий....	397
8.1. Введение .....	397
8.2. Критерий Бартлетта .....	400
8.3. Критерий Кокрена .....	403
8.4. Критерий Хартли .....	404
8.5. Критерий Левене.....	405
8.6. Критерий Фишера.....	408
8.7. Сравнительный анализ мощности параметрических критериев .....	409
8.8. КритерийAnsари–Бредли .....	413
8.9. Критерий Муда .....	415

---

8.10. Критерий Сижела–Тьюки .....	416
8.11. Критерий Кейпена .....	418
8.12. Критерий Клотца .....	419
8.13. Сравнительный анализ мощности непараметрических критериев ..	420
8.14. Применение критерия Кокрена при законах, отличных от нормального .....	425
8.15. Выводы .....	431
9. Критерии проверки гипотез независимости и отсутствия тренда .....	433
9.1. Исследование распределений и мощности критерия Аббе.....	433
9.1.1. Предпосылки применения критерия Аббе.....	433
9.1.2. Степень близости распределений статистики Аббе к нормальному.....	435
9.1.3. Степень зависимости распределений статистики Аббе от наблюдаемого закона.....	437
9.1.4. Исследование мощности критерия Аббе.....	440
9.2. Исследование критериев проверки случайности и отсутствия тренда.....	447
9.2.1. Проверка гипотез об отсутствии тренда .....	447
9.2.2. Критерий автокорреляции .....	448
9.2.3. Критерий Фостера–Стюарта .....	451
9.2.4. Критерий Кокса–Стюарта.....	453
9.2.5. Критерий Вальда–Вольфовитца.....	454
9.2.6. Критерий Бартелса .....	456
9.2.7. Критерий Хсу.....	457
9.2.8. Ранговый критерий обнаружения сдвига дисперсии в неизвестной точке.....	460
9.2.9. Сравнительный анализ мощности критериев .....	462
9.3. Выводы .....	463
10. Отбраковка аномальных наблюдений .....	465
10.1. Введение .....	465
10.2. Критерии отбраковки аномальных измерений при нормальном законе распределения .....	466
10.3. Критерий Граббса проверки на один выброс .....	467

10.4. Проверка на два выброса .....	471
10.5. Проверка на три выброса .....	474
10.6. Одновременная проверка на выброс наименьшего и наибольшего значений.....	477
10.7. Параметрические методы отбраковки .....	481
10.8. Выводы .....	486
11. Моделирование и исследование распределений функций от случайных величин .....	487
11.1. Введение .....	487
11.2. Компьютерное моделирование законов распределения функций от случайных величин .....	489
11.3. Исследование распределений функций от случайных величин .....	492
11.4. Выводы .....	506
12. Моделирование и исследование распределений статистик многомерного анализа .....	507
12.1. Введение .....	507
12.2. Моделирование многомерных псевдослучайных векторов .....	509
12.2.1. Моделирование псевдослучайных нормальных векторов.....	511
12.2.2. Моделирование многомерных величин по законам, отличным от нормального .....	513
12.2.3. Моделирование псевдослучайных векторов, подчиняющихся многомерному распределению Стьюдента .....	518
12.2.4. Моделирование функциональной линейной зависимости между $X_i$ и $X_j$ .....	520
12.3. Исследование критерииев проверки гипотез о векторе математических ожиданий и ковариационной матрице .....	521
12.3.1. Классические критерии проверки гипотез о векторе математических ожиданий и ковариационной матрице .....	521
12.3.2. Исследование распределений статистик критериев в случае принадлежности наблюдений нормальному закону .....	523
12.3.3. Исследование распределений статистик при законах, отличающихся от нормального.....	526
12.4. Исследование критерииев проверки гипотез о коэффициентах корреляции .....	533
12.4.1. Критерии проверки гипотез о коэффициентах корреляции .....	533

---

12.4.2. Исследование распределений статистик критериев проверки гипотез о коэффициентах корреляции при многомерном нормальном законе .....	539
12.4.3. Исследование распределений статистик критериев проверки гипотез о коэффициентах корреляции при законах, отличных от многомерного нормального .....	545
12.4.4. Распределения статистик критериев проверки гипотез о коэффициентах корреляции при многомерном законе Стьюдента .....	549
12.5. Исследование критериев проверки гипотез о корреляционном отношении .....	553
12.5.1. Классические критерии проверки гипотез о корреляционном отношении .....	553
12.5.2. Влияние различных способов группирования и количества интервалов на оценки корреляционного отношения .....	555
12.5.3. Исследование распределений статистики критерия проверки гипотезы о незначимости корреляционного отношения .....	560
12.5.4. Исследование распределений статистики критерия линейности регрессии $X_i$ по $X_j$ .....	563
12.6. Выводы .....	567
13. Система статистического анализа одномерных наблюдений .....	571
13.1. Возможности системы.....	571
13.2. Модели используемых параметрических законов распределения ...	574
13.3. Проведение статистического анализа .....	582
13.3.1. Оценивание параметров и проверка согласия .....	582
13.3.2. Проверка на нормальность .....	584
13.3.3. Проверка однородности распределений .....	585
13.3.4. Проверка однородности дисперсий (параметров масштаба)....	587
13.4. Моделирование и исследование распределений статистик .....	587
13.4.1. Моделирование выборок псевдослучайных величин .....	589
13.4.2. Моделирование распределений оценок параметров .....	590
13.4.3. Моделирование распределений статистик критериев проверки гипотез .....	591
13.5. Выводы .....	595
Послесловие.....	596
Библиографический список.....	600

<b>Приложение А.</b> Таблицы асимптотически оптимального группирования наблюдений при оценивании параметров распределений и в критериях согласия типа $\chi^2$ .....	625
<i>Таблица А.1.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании параметра экспоненциального распределения, параметра распределения Парето, масштабного параметра распределения Вейбулла, параметра сдвига распределения наименьшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	627
<i>Таблица А.2.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании масштабного параметра экспоненциального распределения, параметра распределения Рэлея, параметра распределения Парето, масштабного параметра распределения Вейбулла, параметра сдвига распределения наименьшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	628
<i>Таблица А.3.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании параметра распределения Рэлея) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	629
<i>Таблица А.4.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании параметра распределения Максвелла) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	630
<i>Таблица А.5.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании масштабного параметра распределения Максвелла) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	631
<i>Таблица А.6.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании параметра полунормального распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ ..	632
<i>Таблица А.7.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании параметра полунормального распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	633
<i>Таблица А.8.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ [при оценивании параметра распределения модуля нормальной	

---

случайной величины ( $m = 4$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	634
<i>Таблица A.9.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 4$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	635
<i>Таблица A.10.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 5$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	636
<i>Таблица A.11.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 5$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	637
<i>Таблица A.12.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 6$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	638
<i>Таблица A.13.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 6$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	639
<i>Таблица A.14.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 7$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	640
<i>Таблица A.15.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 7$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	641
<i>Таблица A.16.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 8$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	642

---

чайной величины ( $m = 8$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	642
<i>Таблица A.17.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 8$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	643
<i>Таблица A.18.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 9$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	644
<i>Таблица A.19.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ [при оценивании параметра распределения модуля нормальной случайной величины ( $m = 9$ )] и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	645
<i>Таблица A.20.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании основного параметра распределения Вейбулла, масштабного параметра распределения наименьшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	646
<i>Таблица A.21.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании основного параметра распределения Вейбулла, масштабного параметра распределения наименьшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	647
<i>Таблица A.22.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании двух параметров распределения Вейбулла, двух параметров распределения наименьшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	648
<i>Таблица A.23.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании двух параметров распределения Вейбулла, двух параметров распределения наименьшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	649

<i>Таблица A.24.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании математического ожидания нормального распределения, параметра сдвига логарифмически нормальных распределений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	650
<i>Таблица A.25.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании математического ожидания нормального распределения, параметра сдвига логарифмически нормальных распределений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	651
<i>Таблица A.26.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании стандартного отклонения нормального распределения, масштабного параметра логарифмически нормальных распределений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	652
<i>Таблица A.27.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании стандартного отклонения нормального распределения, масштабного параметра логарифмически нормальных распределений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	653
<i>Таблица A.28.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании двух параметров нормального распределения, двух параметров логарифмически нормальных распределений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	654
<i>Таблица A.29.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании двух параметров нормального распределения, двух параметров логарифмически нормальных распределений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	655
<i>Таблица A.30.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании параметра сдвига распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	656
<i>Таблица A.31.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании параметра сдвига распределения наибольшего экстремального значения)	

---

и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	657
<i>Таблица A.32.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании масштабного параметра распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	658
<i>Таблица A.33.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании масштабного параметра распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	659
<i>Таблица A.34.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании двух параметров распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	660
<i>Таблица A.35.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании двух параметров распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	661
<i>Таблица A.36.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании масштабного параметра распределения Коши) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	662
<i>Таблица A.37.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании масштабного параметра распределения Коши) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	663
<i>Таблица A.38.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании параметра сдвига распределения Коши) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	664
<i>Таблица A.39.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании параметра сдвига распределения Коши) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	665

---

<i>Таблица A.40.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании двух параметров распределения Коши) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	666
<i>Таблица A.41.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании параметра сдвига логистического распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	667
<i>Таблица A.42.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании масштабного параметра логистического распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	668
<i>Таблица A.43.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании масштабного параметра логистического распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	669
<i>Таблица A.44.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании двух параметров логистического распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	670
<i>Таблица A.45.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании двух параметров логистического распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	671
<i>Таблица A.46.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании масштабного параметра распределения Лапласа) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	672
<i>Таблица A.47.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании масштабного параметра распределения Лапласа) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	673
<i>Таблица A.48.</i> Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании масштабного параметра распределения Лапласа) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	674

Таблица A.49. Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании масштабного параметра распределения Лапласа) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	675
Таблица A.50. Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании масштабного параметра двойного показательного распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	676
Таблица A.51. Оптимальные частоты при проверке сложных гипотез по критериям типа $A$ (при оценивании масштабного параметра двойного показательного распределения) .....	679
Таблица A.52. Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании двух параметров двойного показательного распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	683
Таблица A.53. Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании основного параметра $\theta_0$ гамма-распределения в зависимости от его значений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	684
Таблица A.54. Оптимальные вероятности (частоты) интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании основного параметра $\theta_0$ гамма-распределения в зависимости от его значений) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	687
Таблица A.55. Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании масштабного параметра гамма-распределения и известных значениях основного параметра $\theta_0$ ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	690
Таблица A.56. Оптимальные вероятности (частоты) интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании масштабного параметра гамма-распределения и известных значениях основного параметра $\theta_0$ ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	693
Таблица A.57. Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании масштабного и основного параметров гамма-распределения	

---

в зависимости от значений основного параметра $\theta_0$ ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	696
<i>Таблица A.58.</i> Оптимальные вероятности (частоты) интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании масштабного и основного параметров гамма-распределения в зависимости от значений основного параметра $\theta_0$ ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ .....	699
<i>Таблица A.59.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании двух параметров нормального распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ (при $A$ -оптимальном способе группирования) .....	702
<i>Таблица A.60.</i> Оптимальные вероятности (частоты) интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании двух параметров нормального распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ (при $A$ -оптимальном способе группирования) .....	703
<i>Таблица A.61.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании двух параметров распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ (при $A$ -оптимальном способе группирования) .....	704
<i>Таблица A.62.</i> Оптимальные вероятности (частоты) интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании двух параметров распределения наибольшего экстремального значения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ (при $A$ -оптимальном способе группирования) .....	705
<i>Таблица A.63.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании двух параметров распределения Вейбулла) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ (при $A$ -оптимальном способе группирования) .....	706
<i>Таблица A.64.</i> Оптимальные вероятности (частоты) интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании двух параметров распределения Вейбулла) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ (при $A$ -оптимальном способе группирования) .....	707
<i>Таблица A.65.</i> Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при	

оценивании двух параметров логистического распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ (при $A$ -оптимальном способе группирования) .....	708
<i>Таблица A.66.</i> Оптимальные вероятности (частоты) интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа $\chi^2$ (при оценивании двух параметров логистического распределения) и соответствующие значения относительной асимптотической информации $A$ (при $A$ -оптимальном способе группирования) .....	709
<i>Таблица A.67.</i> $(1 - \alpha)$ -квантили $\chi^2$ -распределения с $r$ степенями свободы .....	710
<b>Приложение В.</b> Таблицы распределений статистик непараметрических критериев согласия при простых и сложных гипотезах .....	711
<i>Таблица B.1.</i> Функция распределения статистики Колмогорова $K(S)$ при проверке простой гипотезы .....	713
<i>Таблица B.2.</i> Процентные точки распределения статистики Колмогорова при проверке простой гипотезы.....	714
<i>Таблица B.3.</i> Функция распределения статистики $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова $a1(S)$ при проверке простой гипотезы .....	714
<i>Таблица B.4.</i> Процентные точки распределения статистики $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке простой гипотезы .....	715
<i>Таблица B.5.</i> Функция распределения статистики $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга $a2(S)$ при проверке простой гипотезы.....	715
<i>Таблица B.6.</i> Процентные точки распределения статистики $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга при проверке простой гипотезы.....	717
<i>Таблица B.7.</i> Аппроксимация предельных распределений статистики Колмогорова при использовании метода максимального правдоподобия .....	717
<i>Таблица B.8.</i> Процентные точки распределения статистики Колмогорова при использовании метода максимального правдоподобия .....	718
<i>Таблица B.9.</i> Аппроксимация предельных распределений минимума статистики Колмогорова (при использовании $MD$ -оценок, минимизирующих статистику $S_K$ ) .....	719
<i>Таблица B.10.</i> Процентные точки распределения минимума статистики Колмогорова (при использовании $MD$ -оценок, минимизирующих статистику $S_K$ ) .....	720
<i>Таблица B.11.</i> Аппроксимация предельных распределений статистики Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия ....	721

---

Таблица В.12. Процентные точки распределения статистики Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия .....	722
Таблица В.13. Аппроксимация предельных распределений статистики $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия .....	723
Таблица В.14. Процентные точки распределения статистики $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия .....	724
Таблица В.15. Аппроксимация предельных распределений минимума статистики $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова (при использовании $MD$ -оценок, минимизирующих статистику $S_\omega$ ) .....	725
Таблица В.16. Процентные точки распределения минимума статистики $\omega^2$ Крамера–Мизеса–Смирнова (при использовании $MD$ -оценок, минимизирующих статистику $S_\omega$ ) .....	726
Таблица В.17. Аппроксимация предельных распределений статистики $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга при использовании метода максимального правдоподобия .....	727
Таблица В.18. Процентные точки распределения статистики $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга при использовании метода максимального правдоподобия .....	728
Таблица В.19. Аппроксимация предельных распределений минимума статистики $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга (при использовании $MD$ -оценок, минимизирующих статистику $S_\Omega$ ) .....	729
Таблица В.20. Процентные точки распределения минимума статистики $\Omega^2$ Андерсона–Дарлинга (при использовании $MD$ -оценок, минимизирующих статистику $S_\Omega$ ) .....	730
Таблица В.21. Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае проверки гипотез относительно распределений $S_b$ -Джонсона при использовании ОМП .....	731
Таблица В.22. Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае проверки гипотез относительно распределений $S_1$ -Джонсона при использовании ОМП .....	732
Таблица В.23. Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае проверки гипотез относительно распределений $S_u$ -Джонсона при использовании ОМП .....	733

---

<i>Таблица B.24.</i> Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистики критерия Колмогорова при проверке гипотез относительно гамма-распределения при использовании ОМП.....	735
<i>Таблица B.25.</i> Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистики критерия Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке гипотез относительно гамма-распределения при использовании ОМП.....	736
<i>Таблица B.26.</i> Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистики критерия Андерсона–Дарлинга при проверке гипотез относительно гамма-распределения при использовании ОМП... ..	737
<i>Таблица B.27.</i> Аппроксимация предельных распределений статистики Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия и проверке согласия с гамма-распределением .....	738
<i>Таблица B.28.</i> Процентные точки распределения статистики Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия и проверке гипотезы о согласии с гамма-распределением .....	739
<i>Таблица B.29.</i> Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно двустороннего экспоненциального распределения (3.27) в случае использования ОМП при значении параметра формы $\theta_0 = 0.5$ .....	740
<i>Таблица B.30.</i> Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно двустороннего экспоненциального распределения (3.27) в случае использования ОМП при значении параметра формы $\theta_0 = 0.75$ .....	741
<i>Таблица B.31.</i> Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно двустороннего экспоненциального распределения (3.27) в случае использования ОМП при значении параметра формы $\theta_0 = 1$ .....	742
<i>Таблица B.32.</i> Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно двустороннего экспоненциального распределения (3.27) в случае использования ОМП при значении параметра формы $\theta_0 = 1.6$ .....	743
<i>Таблица B.33.</i> Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно двустороннего экспоненци-	

---

ального распределения (3.27) в случае использования ОМП при зна- чении параметра формы $\theta_0 = 2$ .....	744
<i>Таблица B.34.</i> Верхние процентные точки и модели предельных рас- пределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно двустороннего экспоненци- ального распределения (3.27) в случае использования ОМП при зна- чении параметра формы $\theta_0 = 3$ .....	745
<i>Таблица B.35.</i> Верхние процентные точки и модели предельных рас- пределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно двустороннего экспоненци- ального распределения (3.27) в случае использования ОМП при зна- чении параметра формы $\theta_0 = 4$ .....	746
<i>Таблица B.36.</i> Верхние процентные точки и модели предельных рас- пределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно двустороннего экспоненци- ального распределения (3.27) в случае использования ОМП при зна- чении параметра формы $\theta_0 = 5$ .....	747
<i>Таблица B.37.</i> Верхние процентные точки и модели предельных рас- пределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно двустороннего экспоненци- ального распределения (3.27) в случае использования ОМП при зна- чении параметра формы $\theta_0 = 7$ .....	748
<i>Таблица B.38.</i> Процентные точки и распределения статистики Колмо- горова при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП двух па- раметров обратного гауссовского распределения .....	749
<i>Таблица B.39.</i> Процентные точки и распределения статистики Краме- ра–Мизеса–Смирнова при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП двух параметров обратного гауссовского распределения .....	752
<i>Таблица B.40.</i> Процентные точки и распределения статистики Андер- сона–Дарлинга при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП двух параметров обратного гауссовского распределения .....	755
<i>Таблица B.41.</i> Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипо- тез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ( $\theta_1 = 0.5$ ) .....	759
<i>Таблица B.42.</i> Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипо- тез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ( $\theta_1 = 1$ ) .....	760

---

<i>Таблица В.43.</i> Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ( $\theta_1 = 2$ ).....	761
<i>Таблица В.44.</i> Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ( $\theta_1 = 3$ ).....	762
<i>Таблица В.45.</i> Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ( $\theta_1 = 4$ ).....	763
<i>Таблица В.46.</i> Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ( $\theta_1 = 5$ ).....	764
<i>Таблица В.47.</i> Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ( $\theta_1 = 6$ ).....	765
<i>Таблица В.48.</i> Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ( $\theta_1 = 7$ ).....	766
<i>Таблица В.49.</i> Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ( $\theta_1 = 8$ ).....	767
<i>Таблица В.50.</i> Процентные точки и распределения статистики Колмогорова при проверке сложных гипотез и вычислении ОМП одного или двух параметров формы бета-распределений первого и второго рода .....	768
<i>Таблица В.51.</i> Процентные точки и распределения статистики Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке сложных гипотез и вычислении ОМП одного или двух параметров формы бета-распределений первого и второго рода .....	769
<i>Таблица В.52.</i> Процентные точки и распределения статистики Андерсона–Дарлинга при проверке сложных гипотез и вычислении ОМП одного или двух параметров формы бета-распределений первого и второго рода .....	770

---

<b>Приложение С.</b> Таблицы коэффициентов оптимальных $L$ -оценок для больших выборок .....	771
<i>Таблица С.1.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига нормального распределения. Известен масштабный параметр.....	773
<i>Таблица С.2.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба нормального распределения. Известен параметр сдвига .....	773
<i>Таблица С.3.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига нормального распределения. Неизвестны оба параметра.....	774
<i>Таблица С.4.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба нормального распределения. Неизвестны оба параметра .....	775
<i>Таблица С.5.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига логистического распределения. Известен масштабный параметр .....	776
<i>Таблица С.6.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба логистического распределения. Известен параметр сдвига .....	776
<i>Таблица С.7.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига логистического распределения. Неизвестны оба параметра .....	777
<i>Таблица С.8.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба логистического распределения. Неизвестны оба параметра.....	778
<i>Таблица С.9.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения Коши. Известен масштабный параметр.....	779
<i>Таблица С.10.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения Коши. Известен параметр сдвига .....	779
<i>Таблица С.11.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения Коши. Неизвестны оба параметра .....	780
<i>Таблица С.12.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения Коши. Неизвестны оба параметра .....	781
<i>Таблица С.13.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения минимального значения. Известен масштабный параметр.....	782
<i>Таблица С.14.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения минимального значения. Известен параметр сдвига .....	782
<i>Таблица С.15.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения минимального значения. Неизвестны оба параметра .....	783
<i>Таблица С.16.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения минимального значения. Неизвестны оба параметра .....	784
<i>Таблица С.17.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения максимального значения. Известен масштабный параметр.....	785
<i>Таблица С.18.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения максимального значения. Известен параметр сдвига .....	785

---

<i>Таблица C.19.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения максимального значения. Неизвестны оба параметра.....	786
<i>Таблица C.20.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения максимального значения. Неизвестны оба параметра .....	787
<i>Таблица C.21.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига экспоненциального распределения. Известен масштабный параметр .....	788
<i>Таблица C.22.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба экспоненциального распределения. Известен параметр сдвига .....	788
<i>Таблица C.23.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига экспоненциального распределения. Неизвестны оба параметра .....	789
<i>Таблица C.24.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба экспоненциального распределения. Неизвестны оба параметра .....	789
<i>Таблица C.25.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига полунонормального распределения (модуля многомерного нормального вектора $m = 1$ ). Известен масштабный параметр .....	790
<i>Таблица C.26.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба полунонормального распределения (модуля многомерного нормального вектора $m = 1$ ). Известен параметр сдвига .....	790
<i>Таблица C.27.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига полунонормального распределения (модуля многомерного нормального вектора $m = 1$ ). Неизвестны оба параметра .....	791
<i>Таблица C.28.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба полунонормального распределения (модуля многомерного нормального вектора $m = 1$ ). Неизвестны оба параметра .....	791
<i>Таблица C.29.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения Рэлея. Известен масштабный параметр .....	792
<i>Таблица C.30.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения Рэлея. Известен параметр сдвига .....	792
<i>Таблица C.31.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения Рэлея. Неизвестны оба параметра .....	793
<i>Таблица C.32.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения Рэлея. Неизвестны оба параметра.....	793
<i>Таблица C.33.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения Максвелла (модуля многомерного нормального вектора $m = 3$ ). Известен масштабный параметр.....	794
<i>Таблица C.34.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения Максвелла (модуля многомерного нормального вектора $m = 3$ ). Известен параметр сдвига .....	794

---

<i>Таблица С.35.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения Максвелла (модуля многомерного нормального вектора $m = 3$ ). Неизвестны оба параметра.....	795
<i>Таблица С.36.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения Максвелла (модуля многомерного нормального вектора $m = 3$ ). Неизвестны оба параметра .....	795
<i>Таблица С.37.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 4$ . Известен масштабный параметр .....	796
<i>Таблица С.38.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 4$ . Известен параметр сдвига .....	796
<i>Таблица С.39.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 4$ . Неизвестны оба параметра.....	797
<i>Таблица С.40.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 4$ . Неизвестны оба параметра .....	797
<i>Таблица С.41.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 5$ . Известен масштабный параметр .....	798
<i>Таблица С.42.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 5$ . Известен параметр сдвига .....	798
<i>Таблица С.43.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 5$ . Неизвестны оба параметра.....	799
<i>Таблица С.44.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 5$ . Неизвестны оба параметра .....	799
<i>Таблица С.45.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 6$ . Известен масштабный параметр .....	800
<i>Таблица С.46.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 6$ . Известен параметр сдвига .....	800
<i>Таблица С.47.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 6$ . Неизвестны оба параметра.....	801

---

<i>Таблица С.48.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 6$ . Неизвестны оба параметра .....	801
<i>Таблица С.49.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 7$ . Известен масштабный параметр .....	802
<i>Таблица С.50.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 7$ . Известен параметр сдвига .....	802
<i>Таблица С.51.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 7$ . Неизвестны оба параметра .....	803
<i>Таблица С.52.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 7$ . Неизвестны оба параметра .....	803
<i>Таблица С.53.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 8$ . Известен масштабный параметр .....	804
<i>Таблица С.54.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 8$ . Известен параметр сдвига .....	804
<i>Таблица С.55.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 8$ . Неизвестны оба параметра .....	805
<i>Таблица С.56.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 8$ . Неизвестны оба параметра .....	805
<i>Таблица С.57.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 9$ . Известен масштабный параметр .....	806
<i>Таблица С.58.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 9$ . Известен параметр сдвига .....	806
<i>Таблица С.59.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 9$ . Неизвестны оба параметра .....	807
<i>Таблица С.60.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения модуля многомерного нормального вектора $m = 9$ . Неизвестны оба параметра .....	807

---

<i>Таблица С.61.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения Лапласа. Известен масштабный параметр .....	808
<i>Таблица С.62.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения Лапласа. Известен параметр сдвига .....	808
<i>Таблица С.63.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра сдвига распределения Лапласа. Неизвестны оба параметра .....	809
<i>Таблица С.64.</i> Коэффициенты $L$ -оценки параметра масштаба распределения Лапласа. Неизвестны оба параметра .....	810
<b>Приложение D.</b> Таблицы для критерии проверки нормальности .....	811
<i>Таблица D.1.</i> Процентные точки для статистики критерия проверки симметричности .....	813
<i>Таблица D.2.</i> Процентные точки для статистики критерия проверки на эксцесс .....	814
<i>Таблица D.3.</i> Коэффициенты $a_k$ для вычисления статистики критерия Шапиро–Уилка .....	815
<i>Таблица D.4.</i> Процентные точки для статистики критерия Шапиро–Уилка .....	818
<i>Таблица D.5.</i> Процентные точки для статистики критерия Эпса–Палли .....	819
<i>Таблица D.6.</i> Коэффициенты для вычисления статистики модифицированного критерия Шапиро–Уилка .....	820
<b>Приложение Е.</b> Таблицы процентных точек для критериев исключения аномальных наблюдений типа Граббса .....	821
<i>Таблица Е.1.</i> Верхние процентные точки статистик (10.1) и (10.5) критерия Граббса [4] .....	823
<i>Таблица Е.2.</i> Нижние процентные точки статистик (10.7) и (10.11) критерия Граббса [4] .....	827
<i>Таблица Е.3.</i> Нижние процентные точки статистик (10.14) – (10.15) критерия типа Граббса .....	831
<i>Таблица Е.4.</i> Нижние процентные точки статистик (10.20) критерия типа Граббса .....	835

## CONTENTS

Preface.....	7
1. Estimation of Distribution Tests.....	13
1.1. Introduction.....	13
1.2. Estimation methods.....	15
1.2.1. The maximum likelihood method .....	15
1.2.2. The minimum distance method .....	17
1.2.3. Parameter estimation by order statistics .....	19
1.3. Distribution parameter estimation by grouped data .....	19
1.3.1. Parameter estimation methods by grouped data .....	19
1.3.2. Solving the problem of asymptotically optimum grouping .....	21
1.4. Distribution parameter estimation by censored data.....	26
1.4.1. Fisher's information amount as a measure of possible estimation accuracy .....	26
1.4.2. Experimental estimates of estimation accuracy by censored samples .....	32
1.4.3. An effect of abnormal measurements on estimates by censored samples.....	44
1.4.4. Censored samples and optimal grouping.....	46
1.4.5. Problems and prospects of censored sample analysis.....	52
1.5. Optimal $L$ -estimates by sample quantiles .....	53
1.5.1. $L$ -estimate construction of shift and scale parameters .....	53
1.5.2. The choice of standard distribution quantiles and calculation of $L$ -estimate coefficients .....	57
1.5.3. The estimation accuracy of quantiles and $L$ -estimates .....	65
1.5.4. An example of $L$ -estimate construction.....	72

---

1.6. The robustness of estimates .....	75
1.6.1. Approaches to robust estimate construction.....	75
1.6.2. Observation grouping as a method of obtaining robust estimates .....	76
1.6.3. The influence function and estimate robustness.....	82
1.7. Conclusions.....	90
2. Application of the $\chi^2$ Goodness-of-Fit Tests .....	93
2.1. Introduction.....	93
2.2. The $\chi^2$ tests for simple hypotheses .....	97
2.3. The $\chi^2$ tests for complex hypotheses .....	100
2.4. The $\chi^2$ Nikulin statistic.....	101
2.5. The connection between the test power and the method of observation grouping.....	104
2.6. Asymptotically optimal grouping .....	106
2.7. An effect of grouping methods and an estimation technique on the $\chi^2$ statistic distributions .....	109
2.8. The choice of the number of intervals .....	118
2.9. Recommendations on using asymptotically optimal grouping in goodness-f-fit tests.....	140
2.10. Examples of using tables of asymptotically optimal grouping .....	165
2.11. The procedure of using the $\chi^2$ tests when checking a simple hypothesis ...	175
2.12. The procedure of using the $\chi^2$ tests when checking a complex hypothesis .....	177
2.13. Conclusions.....	178
3. Application of Nonparametric Goodness-of-Fit Tests .....	181
3.1. Introduction.....	181
3.2. Distributions of nonparametric goodness-of-fit- test statistics for simple hypotheses.....	183
3.2.1. The Kolmogorov test.....	183
3.2.2. The Smirnov test .....	184
3.2.3. The $\omega^2$ test .....	185
3.3. Nonparametric Goodness-of-Fit Tests for Complex Hypotheses .....	187
3.3.1. The loss of the ‘freedom from distribution’ property by tests .....	187
3.3.2. Computer methods of statistical regularities analysis .....	189
3.3.3. Factors influencing test statistics distribution when testing complex hypotheses .....	192

3.3.4. An effect of a sample volume on nonparametric test statistics distribution with simple and complex hypotheses .....	193
3.3.5. An effect of a sample volume on the nonparametric test power with simple and complex hypotheses.....	196
3.3.6. An effect of an estimation method on nonparametric test statistics distribution with complex hypotheses.....	201
3.3.7. An estimation method and nonparametric goodness-of-fit test power.....	210
3.3.8. The dependence of nonparametric test statistics distribution on specific parameter values .....	213
3.3.8.1. Distribution of nonparametric goodness-of-fit test statistics when testing goodness-of-fit with gamma distribution .....	214
3.3.8.2. Distribution of nonparametric goodness-of-fit test statistics when testing goodness-of-fit with two-sided exponential distribution .....	217
3.3.8.3. Distribution of nonparametric goodness-of-fit test statistics when testing goodness-of-fit with the inverse Gaussian law.....	222
3.3.8.4. Distribution of nonparametric goodness-of-fit test statistics when testing goodness-of-fit with the generalized Weibull distribution .....	223
3.3.8.5. Distribution of nonparametric goodness-of-fit test statistics when testing goodness-of-fit with families of beta distribution.....	227
3.4. The Order of Testing Goodness-of-Fit Hypotheses .....	232
3.4.1. The list of distributions for which checking complex hypotheses is regulated .....	232
3.4.2. The order of testing a simple goodness-of-fit hypothesis.....	238
3.4.2.1. The Kolmogorov test for a simple hypothesis .....	239
3.4.2.2. The Smirnov test for a simple hypothesis.....	239
3.4.2.3. The $\omega^2$ Cramer–Mises–Smirnov test for a simple hypothesis....	240
3.4.2.4. The $\Omega^2$ Anderson–Darling test for a simple hypothesis.....	240
3.4.3. The order of testing a complex hypothesis.....	241
3.4.4. Examples of using goodness-of-fit tests for simple and complex hypotheses.....	243
3.5. Conclusions.....	255

4. A Comparative Analysis of Goodness-of-Fit Tests for Close Competing Hypotheses .....	259
4.1. Introduction.....	259
4.2. Tests under study .....	261
4.3. Methods of study .....	267
4.4. Alternatives under study .....	267
4.5. Test power when checking simple hypotheses with the “normal distribution-logistic distribution” alternative .....	269
4.6. Test power when checking simple hypotheses and a pair of “Weibull distribution-gamma distribution” hypotheses .....	276
4.7. Test power when checking complex hypotheses with the “normal distribution-logistic distribution” alternative .....	278
4.8. Test power when checking complex hypotheses and a pair of competing “Weibull distribution-gamma distribution” hypotheses.....	291
4.9. Remarks on the maximization of the Pearson $\chi^2$ test power .....	296
4.10. Conclusions.....	304
5. Test for Departure of Distribution from the Normal Law .....	307
5.1. Introduction.....	307
5.2. The test of symmetry .....	309
5.3. The excess test .....	312
5.4. The Shapiro–Wilk test .....	315
5.5. The Epps–Pally test .....	320
5.6. A modified Shapiro–Wilk test .....	324
5.7. A combined test of symmetry and the zero excess coefficient .....	327
5.8. Modification of the D’Agostino test of symmetry .....	329
5.9. Modification of D’Agostino test of symmetry and the value of excess....	331
5.10. A combined test of symmetry and the zero coefficient of the D’Agostino excess .....	334
5.11. The Frosini test .....	336
5.12. The Hegazy–Green test.....	340
5.13. The Geary test.....	344
5.14. The David–Hartley–Pearson test .....	348
5.15. The Shpigelhalter test .....	351
5.16. Conclusions.....	356

---

6. The Homogeneity Test .....	361
6.1. Introduction.....	361
6.2. The Smirnov test.....	363
6.3. The Lehmann–Rosenblatt test.....	372
6.4. Conclusions.....	377
7. Stability and Power of the Homogeneity Test of Means .....	379
7.1 Introduction.....	379
7.2. Tests for homogeneity of means .....	380
7.3. Study of parametric criteria stability against violation of normality assumption .....	385
7.4. Study of the test power .....	388
7.5. Conclusions.....	396
8. Application and Power of Tests for Homogeneity of Variances .....	397
8.1. Introduction.....	397
8.2. The Bartlett test .....	400
8.3. The Cochran test .....	403
8.4. The Hartley test.....	404
8.5. The Levene test.....	405
8.6. The Fisher test.....	408
8.7. A comparative analysis of the power of parametric tests.....	409
8.8. The Ansari–Bradley test .....	413
8.9. The Mood test.....	415
8.10. The Siegel–Tukey test .....	416
8.11. The Capon test .....	418
8.12. The Klotz test.....	419
8.13. A comparative analysis of the power of nonparametric tests.....	420
8.14. Application of the Cochran test for non-normal laws .....	425
8.15. Conclusions.....	431
9. Tests of Hypotheses of Independence and a Lack of Trend .....	433
9.1. A study of the Abbe test distribution and power.....	433
9.1.1. Prerequisites for the Abbe test application .....	433
9.1.2. A degree of proximity of the Abbe statistic distributions to the normal law.....	435

9.1.3. A degree of dependence of the Abbe statistic distribution on the observed law.....	437
9.1.4. A study of the Abbe test power .....	440
9.2. Tests for randomness and a lack of trend.....	447
9.2.1. Test of lack of trend hypotheses.....	447
9.2.2. The self-correlation test.....	448
9.2.3. The Foster-Stuart test .....	451
9.2.4. The Cox-Stuart test.....	453
9.2.5. The Wald-Wolfowitz test .....	454
9.2.6. The Bartlett test .....	456
9.2.7. The Hsu test.....	457
9.2.8. The rank test of dispersion shift at an unknown point.....	460
9.2.9. A comparative analysis of the power of the tests .....	462
9.3. Conclusions.....	463
10. Anomalous Observations Rejection .....	465
10.1. Introduction.....	465
10.2. Anomalous measurement rejection tests with the normal distribution law .....	466
10.3. The Grubbs test for one outlier .....	467
10.4. The Grubbs test for two outliers .....	471
10.5. The Grubbs test for three outliers .....	474
10.6. Simultaneous testing for the outlier of minimum and maximum values ...	477
10.7. Parametric methods of rejection .....	481
10.8. Conclusions.....	486
11. Modeling and Study of Distributions of Random Variate Functions .....	487
11.1. Introduction.....	487
11.2. Computer modeling of distribution laws of random variate functions ...	489
11.3. Study of distributions of random variate functions.....	492
11.4. Conclusions.....	506
12. Modeling and Study of Distributions of Multivariate Analysis Statistics .....	507
12.1. Introduction.....	507
12.2. Simulating of multidimensional pseudorandom vectors.....	509
12.2.1. Simulating of pseudorandom normal vectors.....	511
12.2.2. Simulating of multidimensional variates by non-normal laws .....	513

12.2.3. Simulating of pseudorandom vectors subject to the multidimensional Student distribution.....	518
12.2.4. Simulating of functional linear $X_i - X_j$ dependence.....	520
12.3. Tests of hypotheses of the mathematical expectation vector and the covariate matrix .....	521
12.3.1. Classic tests of hypotheses of the mathematical expectation vec- tor and the covariate matrix.....	521
12.3.2. Distributions of test statistics, with observations belonging to the normal law.....	523
12.3.3. Statistic distributions under non-normal laws .....	526
12.4. Study on tests of hypotheses of correlation coefficients .....	533
12.4.1. Tests of hypotheses of correlation coefficient .....	533
12.4.2. Distributions of test statistics of correlation coefficient hypothe- ses with the multivariate normal law.....	539
12.4.3. Distributions of test statistics of correlation coefficient hypothe- ses with laws different from the multivariate normal law .....	545
12.4.4. Distributions of test statistics of correlation coefficients with the multidimensional Student distribution law .....	549
12.5. Tests of correlation ratio hypotheses .....	553
12.5.1. Classic tests of correlation ratio hypotheses.....	553
12.5.2. An effect of various methods of grouping and the number of in- tervals on correlation ratio estimates .....	555
12.5.3. Distributions of test statistics of the hypothesis of the correlation ratio insignificance .....	560
12.5.4. Distributions of the test statistic of the $X_i$ of $X_j$ regression linearity ...	563
12.6 Conclusions.....	567
13. A System of Univariate Observations Statistical Analysis.....	571
13.1. Capabilities of the system .....	571
13.2. Models of parametric distribution laws used .....	574
13.3. Carrying out a statistical analysis .....	582
13.3.1. Parameter estimation and goodness-of-fit testing.....	582
13.3.2. The test of normality .....	584
13.3.3. The test for homogeneity of distribution .....	585
13.3.4. The test for homogeneity of variances (scale parameters) .....	587

---

13.4. Simulating and study of statistic distributions .....	587
13.4.1. Simulating of pseudorandom variate samples .....	589
13.4.2. Simulating of parameter estimate distributions .....	590
13.4.3. Simulating of statistics distributions of hypothesis testing.....	591
13.5. Conclusions.....	595
Afterword .....	596
References .....	600

**Appendix A.** Tables of Asymptotically Optimal Grouping of Observations when Estimating Parameter Distributions by the  $\chi^2$  Goodness-of-Fit Test ..... 625

*Table A.1.* Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the  $\chi^2$  tests (when estimating the exponential distribution parameter, the Pareto distribution parameter, the Weibull distribution scale parameter, the shift parameter of the minimum extreme value) and corresponding values of the relative asymptotic information  $A$  ..... 627

*Table A.2.* Optimal probabilities (frequencies) of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the  $\chi^2$  tests (when estimating the exponential distribution scale parameter, the Rayleigh distribution parameter, the Pareto distribution parameter, the Weibull distribution scale parameter, the shift parameter of the minimum extreme value) and corresponding values of the relative asymptotic information  $A$  ..... 628

*Table A.3.* Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the  $\chi^2$  tests (when estimating the Rayleigh distribution parameter) and corresponding values of the relative asymptotic information  $A$  ..... 629

*Table A.4.* Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the  $\chi^2$  tests (when estimating the Maxwell distribution parameter) and corresponding values of the relative asymptotic information  $A$  ..... 630

*Table A.5.* Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the  $\chi^2$  tests (when estimating the Maxwell distribution scale parameter) and corresponding values of the relative asymptotic information  $A$  ..... 631

*Table A.6.* Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the  $\chi^2$  tests (when estimating the half-normal distribution parameter) and corresponding values of the relative asymptotic information  $A$  ..... 632

*Table A.7.* Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the  $\chi^2$  tests (when estimating the half-normal dis-

---

tribution parameter) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	633
<i>Table A.8.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests [when estimating the distribution parameter of the modulus of the normal random value ( $m = 4$ )] and corresponding values of the asymptotic information $A$ .....	634
<i>Table A.9.</i> Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests [when estimating the distribution parameter of the modulus of the normal random value ( $m = 4$ )] and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	635
<i>Table A.10.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests [when estimating the distribution parameter of the modulus of the normal random value ( $m = 5$ )] and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	636
<i>Table A.11.</i> Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests [when estimating the distribution parameter of the modulus of the normal random value ( $m = 5$ )] and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	637
<i>Table A.12.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests [when estimating the distribution parameter of the modulus of the normal random value ( $m = 6$ )] and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	638
<i>Table A.13.</i> Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests [when estimating the distribution parameter of the modulus of the normal random value ( $m = 6$ )] and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	639
<i>Table A.14.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests [when estimating the distribution parameter of the modulus of the normal random value ( $m = 7$ )] and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	638
<i>Table A.15.</i> Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests [when estimating the distribution parameter of the modulus of the normal random value ( $m = 7$ )] and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	641
<i>Table A.16.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests [when estimating the distribution parameter of the modulus of the normal random value ( $m = 8$ )] and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	642
<i>Table A.17.</i> Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests [when estimating the distribution	

---

parameter of the modulus of the normal random value ( $m = 8$ )] and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	643
<i>Table A.18.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests [when estimating the distribution parameter of the modulus of the normal random value ( $m = 9$ )] and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	644
<i>Table A.19.</i> Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests [when estimating the distribution parameter of the modulus of the normal random value ( $m = 9$ )] and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	645
<i>Table A.20.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating the main parameter of the Weibull distribution, the distribution scale parameter of the minimum extreme value) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	646
<i>Table A.21.</i> Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating the main parameter of the Weibull distribution, the distribution scale parameter of the minimum extreme value) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	647
<i>Table A.22.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating two main parameters of the Weibull distribution, two distribution scale parameters of the minimum extreme value) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	648
<i>Table A.23.</i> Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating two main parameters of the Weibull distribution, two distribution scale parameters of the minimum extreme value) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	649
<i>Table A.24.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating the mathematical expectation of the normal distribution, a shift parameter of logarithmically normal distributions) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	650
<i>Table A.25.</i> Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating the mathematical expectation of the normal distribution, a shift parameter of logarithmically normal distributions) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	651

Table A.26. Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ (when estimating a standard deviation of the normal distribution, a scale parameter of logarithmically normal distributions) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	652
Table A.27. Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a standard deviation of the normal distribution, a scale parameter of logarithmically normal distributions) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	653
Table A.28. Optimal boundary points of grouping intervals when testing simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating two parameters of the normal distribution, two parameters of logarithmically normal distributions) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	654
Table A.29. Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating two parameters of the normal distribution, two parameters of logarithmically normal distributions) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ ..	655
Table A.30. Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a distribution shift parameter of the maximum extreme value) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	656
Table A.31. Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a distribution shift parameter of the maximum extreme value) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	657
Table A.32. Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests )when estimating a distribution scale parameter of the maximum extreme value) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	658
Table A.33. Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a distribution scale parameter of the maximum extreme value) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	659
Table A.34. Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating two distribution parameters of the maximum extreme value) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	660
Table A.35. Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating two distribution	

---

parameters of the maximum extreme value) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	661
<i>Table A.36.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a scale parameter of the Cauchy distribution) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	662
<i>Table A.37.</i> Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a scale parameter of the Cauchy distribution) and corresponding values of the relative as- ymptotic information $A$ .....	663
<i>Table A.38.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a shift pa- rameter of the Cauchy distribution) and corresponding values of the rela- tive asymptotic information $A$ .....	664
<i>Table A.39.</i> Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a shift parameter of the Cauchy distribution) and corresponding values of the relative as- ymptotic information $A$ .....	665
<i>Table A.40.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating two pa- rameters of the Cauchy distribution) and corresponding values of the rela- tive asymptotic information $A$ .....	666
<i>Table A.41.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a shift pa- rameter of the logistic distribution) and corresponding values of the rela- tive asymptotic information $A$ .....	667
<i>Table A.42.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a scale parameter of the logistic distribution) and corresponding values of the rela- tive asymptotic information $A$ .....	668
<i>Table A.43.</i> Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a scale parameter of the logistic distribution) and corresponding values of the relative as- ymptotic information $A$ .....	669
<i>Table A.44.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating two pa- rameters of the logistic distribution) and corresponding values of the rela- tive asymptotic information $A$ .....	670
<i>Table A.45.</i> Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating two parameters	

of the logistic distribution) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	671
<i>Table A.46.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a scale parameter of the Laplace distribution) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	672
<i>Table A.47.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a scale parameter of the Laplace distribution) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	673
<i>Table A.48.</i> Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a scale parameter of the Laplace distribution) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	674
<i>Table A.49.</i> Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a scale parameter of the Laplace distribution) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	675
<i>Table A.50.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a scale parameter of the double exponential distribution) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	676
<i>Table A.51.</i> Optimal frequencies when checking complex hypotheses by the $A$ -type tests (when estimating a scale parameter of the double exponential distribution) .....	679
<i>Table A.52.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating two parameters of the double exponential distribution) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	683
<i>Table A.53.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating the main parameter $\theta_0$ of the gamma distribution depending on its value) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	684
<i>Table A.54.</i> Optimal probabilities (frequencies) when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating the main parameter $\theta_0$ of the gamma distribution depending on its value) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	687
<i>Table A.55.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking simple and complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a scale parameter of the gamma distribution and known values of the main pa-	

---

rameter $\theta_0$ ) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	690
<i>Table A.56.</i> Optimal probabilities (frequencies) of grouping intervals when checking complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a scale parameter of the gamma distribution and known values of the main parameter $\theta_0$ ) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	693
<i>Table A.57.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a scale and main parameters of the gamma distribution depending on values of the main parameter $\theta_0$ ) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	696
<i>Table A.58.</i> Optimal probabilities (frequencies) of grouping intervals when checking complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating a scale and main parameters of the gamma distribution depending on values of the main parameter $\theta_0$ ) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ .....	699
<i>Table A.59.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating two parameters of the normal distribution) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ (with the $A$ -optimal method of grouping) .....	702
<i>Table A.60.</i> Optimal probabilities (frequencies) of grouping intervals when checking complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating two parameters of the normal distribution) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ (with the $A$ -optimal method of grouping) .....	703
<i>Table A.61.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating two distribution parameters of the maximum extreme value) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ (with the $A$ -optimal method of grouping) .....	704
<i>Table A.62.</i> Optimal probabilities (frequencies) of grouping intervals when checking complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating two distribution parameters of the maximum extreme value) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ (with the $A$ -optimal method of grouping) .....	705
<i>Table A.63.</i> Optimal boundary points of grouping intervals when checking complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating two parameters of the Weibull distribution) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ (with the $A$ -optimal method of grouping) .....	706

---

Table A.64. Optimal probabilities (frequencies) of grouping intervals when Checking complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating two parameters of the Weibull distribution) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ (with the $A$ -optimal method of grouping).....	707
Table A.65. Optimal boundary points of grouping intervals when checking complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating two parameters of the logistic distribution) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ (with the $A$ -optimal method of grouping) .....	708
Table A.66. Optimal probabilities (frequencies) of grouping intervals when checking complex hypotheses by the $\chi^2$ tests (when estimating two parameters of the logistic distribution) and corresponding values of the relative asymptotic information $A$ (with the $A$ -optimal method of grouping) .....	709
Table A.67. $(1 - \alpha)$ quantiles of the $\chi^2$ -distribution with $r$ -degrees of freedom .....	710
<b>Appendix B.</b> Tables of Statistics Distributions of Nonparametric Goodness-of Fit Tests for Simple and Complex Hypotheses.....	711
Table B.1. The Kolmogorov statistic distribution function when checking a simple hypothesis.....	713
Table B.2. Percentage points of the Kolmogorov statistic distribution when checking a simple hypothesis.....	714
Table B.3. The distribution function of the $\omega^2$ Cramer–Mises–Smirnov statistic $a1(S)$ when checking a simple hypothesis.....	714
Table B.4. Percentage points of the $\omega^2$ Cramer–Mises–Smirnov statistic distribution when checking a simple hypothesis.....	715
Table B.5. The distribution function of the $\Omega^2$ Anderson–Darling statistic $a2(S)$ when checking a simple hypothesis .....	715
Table B.6. Percentage points of the $\Omega^2$ Anderson–Darling statistic when checking a simple hypothesis.....	717
Table B.7. An approximation of limit distributions of the Kolmogorov statistic by the maximum likelihood method .....	717
Table B.8. Percentage points of the Kolmogorov statistic distribution by the maximum likelihood method .....	718
Table B.9. An approximation of limit distributions of the Kolmogorov statistic minimum (when using $MD$ -estimates minimizing the $S_K$ statistic)....	719
Table B.10. Percentage distribution points of the Kolmogorov statistic minimum (when using $MD$ -estimates minimizing the $S_K$ statistic).....	720
Table B.11. An approximation of limit distributions of the Smirnov statistic by the maximum likelihood method .....	721

---

Table B.12. Percentage distribution points of the Smirnov statistic by the maximum likelihood method .....	722
Table B.13. An approximation of limit distributions of the $\omega^2$ Cramer–Mises–Smirnov statistic by the maximum likelihood method .....	723
Table B.14. Percentage distribution points of the $\omega^2$ Cramer–Mises–Smirnov statistic by the maximum likelihood method .....	724
Table B.15. An approximation of limit distributions of the $\omega^2$ Cramer–Mises–Smirnov statistic minimum (when using MD-estimates minimizing the $S_{\omega}$ statistic) .....	725
Table B.16. Percentage distribution points of the $\omega^2$ Cramer–Mises–Smirnov statistic minimum (when using MD-estimates minimizing the $S_{\omega}$ statistic).....	726
Table B.17. An approximation of limit distributions of the $\Omega^2$ Anderson–Darling statistic by the maximum likelihood method .....	727
Table B.18. Percentage points of the $\Omega^2$ Anderson–Darling statistic by the maximum likelihood method .....	728
Table B.19. An approximation of limit distributions of the $\Omega^2$ Anderson–Darling statistic minimum (when using MD-estimates minimizing the $S_{\Omega}$ statistic).....	729
Table B.20. Percentage distribution points of limit distributions of the $\Omega^2$ Anderson–Darling statistic minimum (when using MD-estimates minimizing the $S_{\Omega}$ statistic).....	730
Table B.21. Upper percentage points and models of statistic limit distributions of nonparametric goodness-of-fit tests when checking hypotheses relative to the Sb-Johnson distribution by the maximum likelihood estimate (MLE) .....	731
Table B.22. Upper percentage points and models of statistic limit distributions of nonparametric goodness-of-fit tests when checking hypotheses relative to the Sl-Johnson distribution by MLE .....	732
Table B.23. Upper percentage points and models of statistic limit distributions of nonparametric goodness-of-fit tests when checking hypotheses relative to the Su-Johnson distribution by MLE .....	733
Table B.24. Upper percentage points and models of statistic limit distributions of the Kolmogorov test when checking hypotheses relative to the gamma distribution by MLE .....	735
Table B.25. Upper percentage points and models of statistic limit distributions of the Cramer–Mises–Smirnov test when checking hypotheses relative to the gamma distribution by MLE .....	736

<i>Table B.26.</i> Upper percentage points and models of statistic limit distributions of the Anderson–Darling test when checking hypotheses relative to the gamma distribution by MLE .....	737
<i>Table B.27.</i> An approximation of limit distributions of the Smirnov statistic by using the maximum likelihood method and checking the goodness with the gamma distribution .....	738
<i>Table B.28.</i> Percentage distribution points of the Smirnov statistic by using the maximum likelihood method and checking the goodness hypothesis with the gamma distribution .....	739
<i>Table B.29.</i> Upper percentage points and models of limit distributions of statistics of nonparametric goodness tests when checking complex hypotheses relative to the two-sided exponential distribution (3.27) by MLE with the parameter value $\theta_0 = 0.5$ .....	740
<i>Table B.30.</i> Upper percentage points and models of limit distributions of statistics of nonparametric goodness tests when checking complex hypotheses relative to the two-sided exponential distribution (3.27) by MLE with the parameter value $\theta_0 = 0.75$ .....	741
<i>Table B.31.</i> Upper percentage points and models of limit distributions of statistics of nonparametric goodness tests when checking complex hypotheses relative to the two-sided exponential distribution (3.27) by MLE with the parameter value $\theta_0 = 1$ .....	742
<i>Table B.32.</i> Upper percentage points and models of limit distributions of statistics of nonparametric goodness tests when checking complex hypotheses relative to the two-sided exponential distribution (3.27) by MLE with the parameter value $\theta_0 = 1.6$ .....	743
<i>Table B.33.</i> Upper percentage points and models of limit distributions of statistics of nonparametric goodness tests when checking complex hypotheses relative to the two-sided exponential distribution (3.27) by MLE with the parameter value $\theta_0 = 2$ .....	744
<i>Table B.34.</i> Upper percentage points and models of limit distributions of statistics of nonparametric goodness tests when checking complex hypotheses relative to the two-sided exponential distribution (3.27) by MLE with the parameter value $\theta_0 = 3$ .....	745
<i>Table B.35.</i> Upper percentage points and models of limit distributions of statistics of nonparametric goodness tests when checking complex hypotheses relative to the two-sided exponential distribution (3.27) by MLE with the parameter value $\theta_0 = 4$ .....	746
<i>Table B.36.</i> Upper percentage points and models of limit distributions of statistics of nonparametric goodness tests when checking complex hy-	

---

potheses relative to the two-sided exponential distribution (3.27) by MLE with the parameter value $\theta_0 = 5$ .....	747
<i>Table B.37.</i> Upper percentage points and models of limit distributions of statistics of nonparametric goodness tests when checking complex hypotheses relative to the two-sided exponential distribution (3.27) by MLE with the parameter value $\theta_0 = 7$ .....	748
<i>Table B.38.</i> Percentage points and distributions of the Kolmogorov statistic when checking complex hypotheses with calculating MLE of two parameters of the inverse Gauss distribution .....	749
<i>Table B.39.</i> Percentage points and distributions of the Cramer–Mises–Smirnov statistic when checking complex hypotheses with calculating MLE of two parameters of the inverse Gauss distribution .....	752
<i>Table B.40.</i> Percentage points and distributions of the Anderson–Darling statistic when checking complex hypotheses with calculating MLE of two parameters of the inverse Gauss distribution .....	755
<i>Table B.41.</i> Percentage points and distribution models of nonparametric goodness statistics when checking complex hypotheses with calculating MLE of parameters of the generalized Weibull distribution ( $\theta_1 = 0.5$ ).....	759
<i>Table B.42.</i> Percentage points and distribution models of nonparametric goodness statistics when checking complex hypotheses with calculating MLE of parameters of the generalized Weibull distribution ( $\theta_1 = 1$ ).....	760
<i>Table B.43.</i> Percentage points and distribution models of nonparametric goodness statistics when checking complex hypotheses with calculating MLE of parameters of the generalized Weibull distribution ( $\theta_1 = 2$ ).....	761
<i>Table B.44.</i> Percentage points and distribution models of nonparametric goodness statistics when checking complex hypotheses with calculating MLE of parameters of the generalized Weibull distribution ( $\theta_1 = 3$ ).....	762
<i>Table B.45.</i> Percentage points and distribution models of nonparametric goodness statistics when checking complex hypotheses with calculating MLE of parameters of the generalized Weibull distribution ( $\theta_1 = 4$ ).....	763
<i>Table B.46.</i> Percentage points and distribution models of nonparametric goodness statistics when checking complex hypotheses with calculating MLE of parameters of the generalized Weibull distribution ( $\theta_1 = 5$ ).....	764
<i>Table B.47.</i> Percentage points and distribution models of nonparametric goodness statistics when checking complex hypotheses with calculating MLE of parameters of the generalized Weibull distribution ( $\theta_1 = 6$ ).....	765
<i>Table B.48.</i> Percentage points and distribution models of nonparametric goodness statistics when checking complex hypotheses with calculating MLE of parameters of the generalized Weibull distribution ( $\theta_1 = 7$ ).....	766

---

<i>Table B.49.</i> Percentage points and distribution models of nonparametric goodness statistics when checking complex hypotheses with calculating MLE of parameters of the generalized Weibull distribution ( $\theta_1 = 8$ ).....	767
<i>Table B.50.</i> Percentage points and distributions of the Kolmogorov statistic when checking complex hypotheses and calculating MLE of one or two parameters of the beta distribution of the first and second kind .....	768
<i>Table B.51.</i> Percentage points and distributions of the Cramer–Mises–Smirnov statistic when checking complex hypotheses and calculating MLE of one or two parameters of the beta distribution of the first and second kind .....	769
<i>Table B.52.</i> Percentage points and distributions of the Anderson–Darling statistic when checking complex hypotheses and calculating MLE of one or two parameters of the beta distribution of the first and second kind .....	770
<b>Appendix C.</b> Tables of Optimal <i>L</i> -Estimate Coefficients for Large Samples ....	771
<i>Table C.1.</i> <i>L</i> -estimate coefficients of the normal distribution shift parameter, with a scale parameter being known.....	773
<i>Table C.2.</i> <i>L</i> -estimate coefficients of the normal distribution scale parameter, with a shift parameter being known.....	773
<i>Table C.3.</i> <i>L</i> -estimate coefficients of the normal distribution shift parameter, with both parameters being unknown.....	774
<i>Table C.4.</i> <i>L</i> -estimate coefficients of the normal distribution scale parameter, with both parameters being unknown.....	775
<i>Table C.5.</i> <i>L</i> -estimate coefficients of the logistic distribution shift parameter, with a scale parameter being known.....	776
<i>Table C.6.</i> <i>L</i> -estimate coefficients of the logistic distribution scale parameter, with a shift parameter being known.....	776
<i>Table C.7.</i> <i>L</i> -estimate coefficients of the logistic distribution shift parameter, with both parameters being unknown.....	777
<i>Table C.8.</i> <i>L</i> -estimate coefficients of the logistic distribution scale parameter, with both parameters being known.....	778
<i>Table C.9.</i> <i>L</i> -estimate coefficients of the Cauchy distribution shift parameter, with a scale parameter being known.....	779
<i>Table C.10.</i> <i>L</i> -estimate coefficients of the Cauchy distribution scale parameter, with a shift parameter being known.....	779
<i>Table C.11.</i> <i>L</i> -estimate coefficients of the Cauchy distribution shift parameter, with both parameters being unknown.....	780
<i>Table C.12.</i> <i>L</i> -estimate coefficients of the Cauchy distribution scale parameter, with both parameters being unknown .....	781

---

<i>Table C.13.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the minimum value distribution, with a scale parameter being known .....	782
<i>Table C.14.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the minimum value distribution, with a shift parameter being known .....	782
<i>Table C.15.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the minimum value distribution, with both parameters being unknown .....	783
<i>Table C.16.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the minimum value distribution, with both parameters being unknown .....	784
<i>Table C.17.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the maximum value distribution, with a scale parameter being known .....	785
<i>Table C.18.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the maximum value distribution, with a shift parameter being known .....	785
<i>Table C.19.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the maximum value distribution, with both parameters being unknown .....	786
<i>Table C.20.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the maximum value distribution, with both parameters being unknown .....	787
<i>Table C.21.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the exponential distribution, with a scale parameter being known .....	788
<i>Table C.22.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the exponential distribution, with a shift parameter being known .....	788
<i>Table C.23.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the exponential distribution, with both parameters being unknown .....	789
<i>Table C.24.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the exponential distribution, with both parameters being unknown .....	789
<i>Table C.25.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the half-normal distribution, (of the modulus of the multidimensional normal vector $m = 1$ ) with the scale parameter being known .....	790
<i>Table C.26.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the half-normal distribution, (of the modulus of the multidimensional normal vector $m = 1$ ) with the shift parameter being known .....	790
<i>Table C.27.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the half-normal distribution, (of the modulus of the multidimensional normal vector $m = 1$ ), with both parameters being unknown .....	791
<i>Table C.28.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the half-normal distribution, (of the modulus of the multidimensional normal vector $m = 1$ ), with both parameters being unknown .....	791
<i>Table C.29.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the Rayleigh distribution, with the scale parameter being known .....	792
<i>Table C.30.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the Rayleigh distribution, with the shift parameter being known .....	792

<i>Table C.31.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the Rayleigh distribution, with both parameters being unknown.....	793
<i>Table C.32.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the Rayleigh distribution, with both parameters being unknown.....	793
<i>Table C.33.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the Maxwell distribution (of the modulus of the multidimensional normal vector $m = 3$ ), with the scale parameter being known.....	794
<i>Table C.34.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the Maxwell distribution (of the modulus of the multidimensional normal vector $m = 3$ ), with the shift parameter being known.....	794
<i>Table C.35.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the Maxwell distribution (of the modulus of the multidimensional normal vector $m = 3$ ), with both parameters being unknown .....	795
<i>Table C.36.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the Maxwell distribution (of the modulus of the multidimensional normal vector $m = 3$ ), with both parameters being unknown .....	795
<i>Table C.37.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector $m = 4$ , with the scale parameter being known.....	796
<i>Table C.38.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector $m = 4$ , with the shift parameter being known.....	796
<i>Table C.39.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector $m = 4$ , with both parameters being unknown .....	797
<i>Table C.40.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector $m = 4$ , with both parameters being unknown.....	797
<i>Table C.41.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector $m = 5$ , with the scale parameter being known.....	798
<i>Table C.42.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the modulus Distribution of the multidimensional normal vector $m = 5$ , with the shift parameter being known.....	798
<i>Table C.43.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector $m = 5$ , with both parameters being unknown .....	799
<i>Table C.44.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector $m = 5$ , with both parameters being unknown .....	799

---

<i>Table C.45. L-estimate coefficients of the shift parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector <math>m = 6</math>, with the scale parameter being known.....</i>	800
<i>Table C.46. L-estimate coefficients of the scale parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector <math>m = 6</math>, with the shift parameter being known.....</i>	800
<i>Table C.47. L-estimate coefficients of the shift parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector <math>m = 6</math>, with both parameters being unknown.....</i>	801
<i>Table C.48. L-estimate coefficients of the scale parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector <math>m = 6</math>, with both parameters being unknown.....</i>	801
<i>Table C.49. L-estimate coefficients of the shift parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector <math>m = 7</math>, with the scale parameter being known.....</i>	802
<i>Table C.50. L-estimate coefficients of the scale parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector <math>m = 7</math>, with the shift parameter being known.....</i>	802
<i>Table C.51. L-estimate coefficients of the shift parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector <math>m = 7</math>, with both parameters being unknown.....</i>	803
<i>Table C.52. L-estimate coefficients of the scale parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector <math>m = 7</math>, with both parameters being unknown.....</i>	803
<i>Table C.53. L-estimate coefficients of the shift parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector <math>m = 8</math>, with the scale parameter being known.....</i>	804
<i>Table C.54. L-estimate coefficients of the scale parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector <math>m = 8</math>, with the shift parameter being known.....</i>	804
<i>Table C.55. L-estimate coefficients of the shift parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector <math>m = 8</math>, with both parameters being unknown.....</i>	805
<i>Table C.56. L-estimate coefficients of the scale parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector <math>m = 8</math>, with both parameters being unknown.....</i>	805
<i>Table C.57. L-estimate coefficients of the shift parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector <math>m = 9</math> modulus distribution, with the scale parameter being known.....</i>	806

<i>Table C.58.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector $m = 9$ , with the shift parameter being known.....	806
<i>Table C.59.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector $m = 9$ , with both parameters being unknown.....	807
<i>Table C.60.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the modulus distribution of the multidimensional normal vector $m = 9$ , with both parameters being unknown.....	807
<i>Table C.61.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the Laplace distribution, with the scale parameter being known.....	808
<i>Table C.62.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the Laplace distribution, with the shift parameter being known .....	808
<i>Table C.63.</i> L-estimate coefficients of the shift parameter of the Laplace distribution, with both parameters being unknown.....	809
<i>Table C.64.</i> L-estimate coefficients of the scale parameter of the Laplace distribution, with both parameters being unknown.....	810
<b>Appendix D.</b> Tables of Tests of Normality .....	811
<i>Table D.1.</i> Percentage points for symmetry test statistics .....	813
<i>Table D.2.</i> Percentage points for excess test statistics .....	814
<i>Table D.3.</i> Coefficients $a_k$ for calculating the Shapiro–Wilk test statistic .....	815
<i>Table D.4.</i> Percentage points for the Shapiro–Wilk test statistic.....	818
<i>Table D.5.</i> Percentage points for the Epps–Pally test statistic .....	819
<i>Table D.6.</i> Coefficients for calculating statistics of the modified Shapiro–Wilk test.....	820
<b>Appendix E.</b> Tables of Percentage Points for Grubbs' Tests of Anomalous Observation Elimination .....	821
<i>Table E.1.</i> Upper percentage points of statistics (10.1) and (10.5) of Grubbs' test [4].....	823
<i>Table E.2.</i> Lower percentage points of statistics (10.7) and (10.11) of Grubbs' test [4].....	827
<i>Table E.3.</i> Lower percentage points of statistics (10.14) and (10.15) of Grubbs' test [4].....	831
<i>Table E.4.</i> Lower percentage points of statistics (10.20) of Grubbs' test .....	835

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Лемешко Борис Юрьевич  
Лемешко Станислав Борисович  
Постовалов Сергей Николаевич  
Чимитова Екатерина Владимировна

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ,  
МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ  
ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ  
КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПОДХОД

Монография

Редактор *И.Л. Кескевич*

Выпускающий редактор *И.П. Брованова*

Художественный редактор *А.В. Ладыжская*

Корректор *И.Е. Семенова*

Рисунки и компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Подписано в печать 28.02.11  
Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная  
Уч.-изд. л. 55,5. Печ. л. 55,5  
Тираж 3000 экз. (1-й з-д – 1–100 экз.)  
Изд. № 207. Заказ № 431

Издательство Новосибирского государственного  
технического университета  
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20  
Тел. (383) 346-31-87  
E-mail: [office@publish.nstu.ru](mailto:office@publish.nstu.ru)

Отпечатано в типографии  
Новосибирского государственного технического университета  
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20