1.4. Минимаксный подход

Перейдем к рассмотрению традиционных подходов к робастному оцениванию. И начнем с минимаксного подхода, который хронологически был предложен первым, его автор – П. Хьюбер.

Минимаксный подход основан на использовании наилучшей оценки в наихудшей точке окрестности. Критерием качества при этом является либо асимптотическое смещение (точнее, его модуль), либо асимптотическая дисперсия.

В первом случае имеем задачу

$$\inf_{\psi} \sup_{G \in \tilde{F}} |b(\psi, G)|, \tag{1.19}$$

где $b(\psi, G)$ – асимптотическое смещение, во втором –

$$\inf_{\psi} \sup_{G \in \tilde{F}} V(\psi, G), \tag{1.20}$$

причем в обоих случаях функция ψ удовлетворяет условию асимптотической несмещенности в центре окрестности (1.6).

Такие задачи при принятии решений в условиях неопределенности соответствуют позиции «крайнего пессимизма». Она сводится к тому, что надо всегда рассчитывать на худшее и принимать то решение, которое дает максимальный эффект в наихудших условиях. В любых других случаях минимаксное значение критерия будет не хуже. Это называется **принципом гарантированного результата**.

1.4.1. Минимаксное смещение

Рассмотрим первую задачу. В качестве окрестности выберем ε-засоренное распределение, точнее реальное распределение будет иметь вид

$$G(y,\theta) = (1-\varepsilon)F(y,\theta) + \varepsilon H(y,\theta). \tag{1.21}$$

Отравление – злонамеренное засорение.

В этом случае приближенное значение асимптотического смещения, когда ε конечно, но мало, с точностью до членов порядка ε имеет вид

$$b(\psi,G) = b(\psi,H) \approx \varepsilon \frac{\int\limits_Y \psi(y,\theta)\, dH(y,\theta)}{d}, \tag{1.23}$$

где $d = d(\theta) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\,\psi(y,t)\big|_{t=\theta} = -\mathbf{E}\psi'_\theta(y,\theta) = \int\limits_Y \psi(y,\theta) f'_\theta(y,\theta)\, dy$.

Возвращаясь к минимаксной задаче (1.19), получаем

$$\inf_{\psi} \sup_{H} | b(\psi, H) |.$$

Решение задачи имеет вид

$$\psi(y,\theta) = \operatorname{sign}\left[\psi_0(y,\theta) + \beta(\theta)\right].$$

Оценку с такой оценочной функцией будем называть *медианной*. Функция $\beta(\theta)$ определяется из условия асимптотической несмещенности (1.6):

$$\int_Y \operatorname{sign}\left[\psi_0(y,\theta) + \beta(\theta)\right] f(y,\theta)dy = 0.$$

Пример 1.5. Задана нормальная модель $F_\theta : N(\mu, \sigma^2)$ с известной дисперсией σ^2 и оцениваемым математическим ожиданием μ. Плотность распределения имеет вид

$$f(y,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}. \qquad (1.28)$$

В нашем случае $f(y,\mu) = f(y,\mu,\sigma)$ и

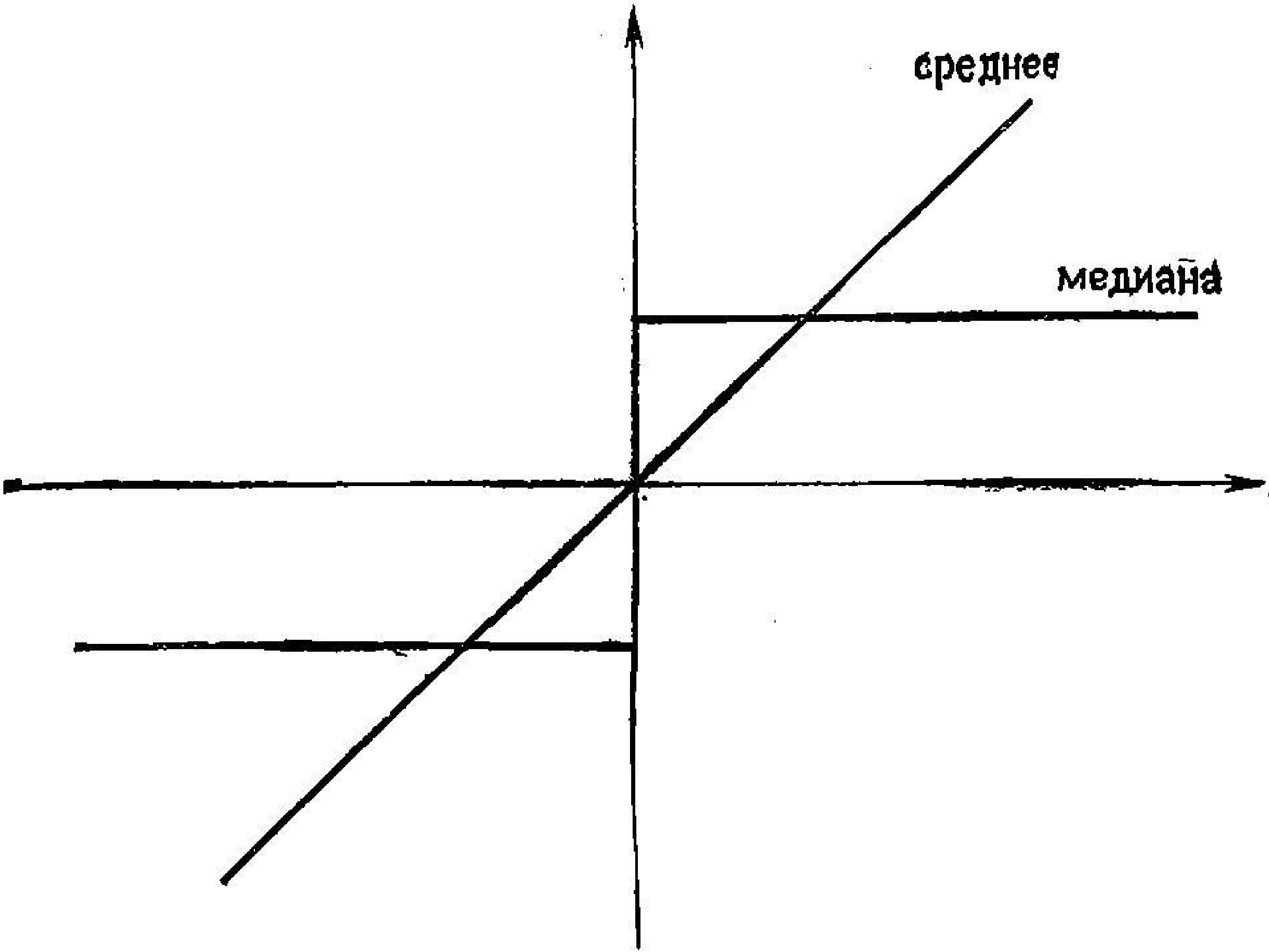
$$f'_\mu(y,\mu) = f(y,\mu)\frac{y-\mu}{\sigma^2},$$

$$\psi(y,\mu) = \mathrm{sign}\left[\frac{f'_\mu(y,\mu)}{f(y,\mu)} + \beta(\mu)\right] = \mathrm{sign}\left[\frac{y-\mu}{\sigma^2} + \beta(\mu)\right].$$

Поскольку $f(y,\mu) = f(y-\mu)$ – четная функция (относительно μ), а $\psi(y,\mu) = \psi(y-\mu)$ при $\beta(\mu) = 0$ – нечетная, при $\beta(\mu) = 0$ условие (1.6) выполняется. Следовательно, $\beta(\mu) = 0$. Окончательно, отбрасывая несущественный знаменатель, имеем

$$\psi(y,\mu) = \mathrm{sign}[y-\mu].$$

В результате $\hat{\mu} = \underset{i}{med}\, y_i$ – выборочная медиана.


среднее
медиана

Пример 1.7. Распределение Коши с оцениваемым параметром сдвига μ и известным параметром масштаба λ. Функция плотности имеет вид

$$f(y,\mu,\lambda)=\frac{1}{\pi\lambda}\frac{1}{1+(y-\mu)^2/\lambda^2}=\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+(y-\mu)^2}.$$

В этом случае $f(y,\mu)=f(y,\mu,\lambda)$. Рассмотрим случай $\lambda=1$.

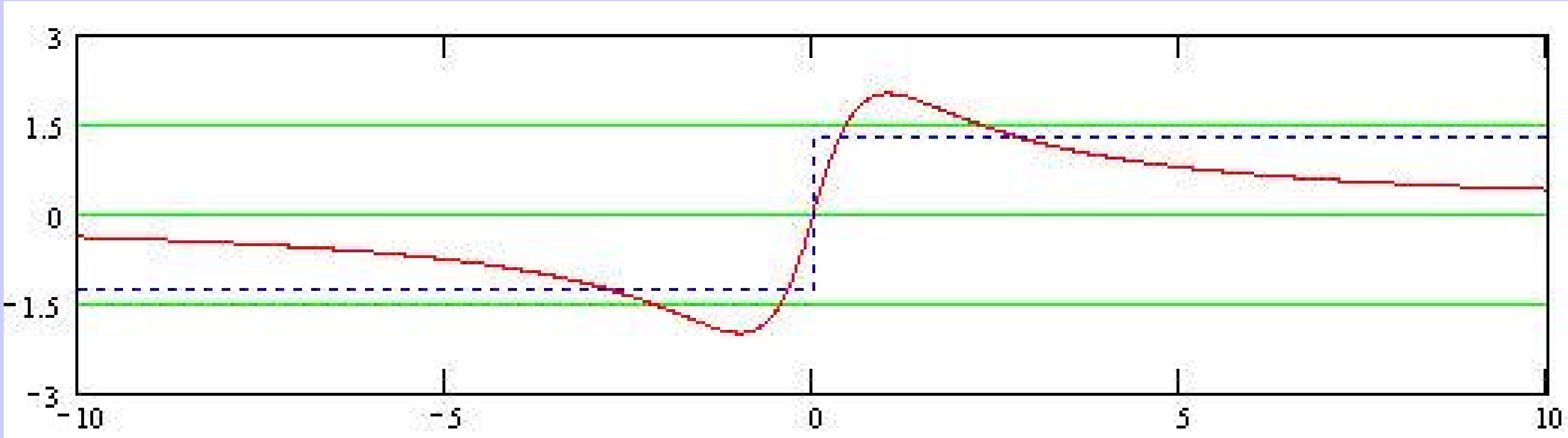
Распределение Коши является распределением Стьюдента с одной степенью свободы. Распределение симметрично относительно μ, но случайная величина не имеет математического ожидания. Оценка μ в виде выборочного среднего является несостоятельной, ММП приводит к состоятельной и устойчивой оценке с оценочной функцией $\psi(y,\mu)=\dfrac{y-\mu}{1+(y-\mu)^2}$.

Найдем оценочную функцию для оценки с минимаксным смещением

$$\psi(y,\mu)=\operatorname{sign}\left[\frac{f'_\mu(y,\mu)}{f(y,\mu)}+\beta(\mu)\right]=\operatorname{sign}\left[\frac{2(y-\mu)}{1+(y-\mu)^2}\right]=\operatorname{sign}[y-\mu].$$

Таким образом, $\hat{\mu}$ – выборочная медиана.

Наибольшее смещение оценки $\hat{\mu}$ составляет $\sup\limits_H|b(\psi,H)|\approx\varepsilon\dfrac{\pi}{2}$.


3
1.5
0
-1.5
-3
-10
-5
0
5
10

1.4.2. Минимаксная дисперсия

1.4.2.1. Оценивание параметра сдвига

Перейдем к обсуждению задачи минимаксно-дисперсионного оценивания параметра сдвига

$$\inf_{\psi} \sup_{G\in\tilde{F}} V(\psi, G).$$

В этом случае функция и плотность распределения имеют вид $F(y,\theta) = F(y-\theta)$ и

$$f(y,\theta) = f(y-\theta) \tag{1.32}$$

соответственно.

Решение задачи состоит в том, чтобы найти **наименее благоприятное распределение**, т.е. распределение с функцией

$$G^* = \arg\sup_{G\in\tilde{F}} V(\psi_0, G), \tag{1.33}$$

где ψ_0 – оценочная функция ММП-оценки, тогда ММП-оценка при распределении G^* и будет решением рассматриваемой задачи. Обоснованием данного пути для класса ε-засоренных распределений служит следующая теорема Хьюбера.

Теорема 1.1. Пусть $\tilde{F}$ – класс ε-засоренных распределений

$$\tilde{F} = \left\{ G : G(y-\theta) = (1-\varepsilon)F(y-\theta) + \varepsilon H(y-\theta) \right\},$$

где ε – известный фиксированный уровень засорения, распределение F симметрично, имеет дважды непрерывно дифференцируемую плотность $f(y)$, для которой $-\ln f(y)$ является выпуклой функцией, распределение H симметрично, имеет ограниченную плотность, $Y = R^1$.

В этих условиях справедливо:

1. Функционал $V(\psi, G)$ имеет седловую точку, т.е. существует такая функция распределения $G^*(y) = (1-\varepsilon)F(y) + \varepsilon H^*(y)$ и такая оценочная функция ψ^*, что

$$V(\psi^*, G) \le V(\psi^*, G^*) \le V(\psi, G^*),$$

а G таково, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(y) dG(y) = 0$.

2. Пусть $y_0 < y_1$ – концы интервала, где

$$\left|\psi_0(y)\right| \le k,$$

причем один или оба конца могут обратиться в бесконечность, тогда наименее благоприятная плотность распределения имеет вид

$$g^*(y) = (1-\varepsilon)\begin{cases} f(y_0)e^{k(y-y_0)}, y \le y_0 \\ f(y), y_0 \le y \le y_1 \\ f(y_1)e^{-k(y-y_1)}, y \ge y_1 \end{cases},$$

а величина $k = k(\varepsilon)$ определяется из условия нормировки плотности $g^*(y)$, которое имеет вид

$$\frac{1}{1-\varepsilon} = \int_{y_0}^{y_1} f(y)dy + \frac{f(y_0) - f(y_1)}{k}.$$

Таким образом, в центральной части наименее благоприятная плотность совпадает (с точностью до константы) с плотностью модельного распределения, а хвосты являются лапласовскими.

3. Функция $\psi^*(y) = -\dfrac{\left[g^*(y)\right]'}{g^*(y)}$ монотонна, ограничена и имеет вид

$$\psi^*(y) = \begin{cases} -k, y \le y_0 \\ -\dfrac{f'(y)}{f(y)}, y_0 \le y \le y_1 \\ k, y \ge y_1 \end{cases}.$$

4. Асимптотическая дисперсия оценки имеет вид

$$V(\psi^*, G^*) = \frac{(1-\varepsilon)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\psi^*(y)\right]^2 f(y)dy + \varepsilon k^2}{\left\{(1-\varepsilon)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\psi^*(y)\right]' f(y)dy\right\}^2}.$$

Теорему Хьюбера можно применять к различным симметричным распределениям, получая для них наименее благоприятную плотность и соответствующую оценочную функцию.

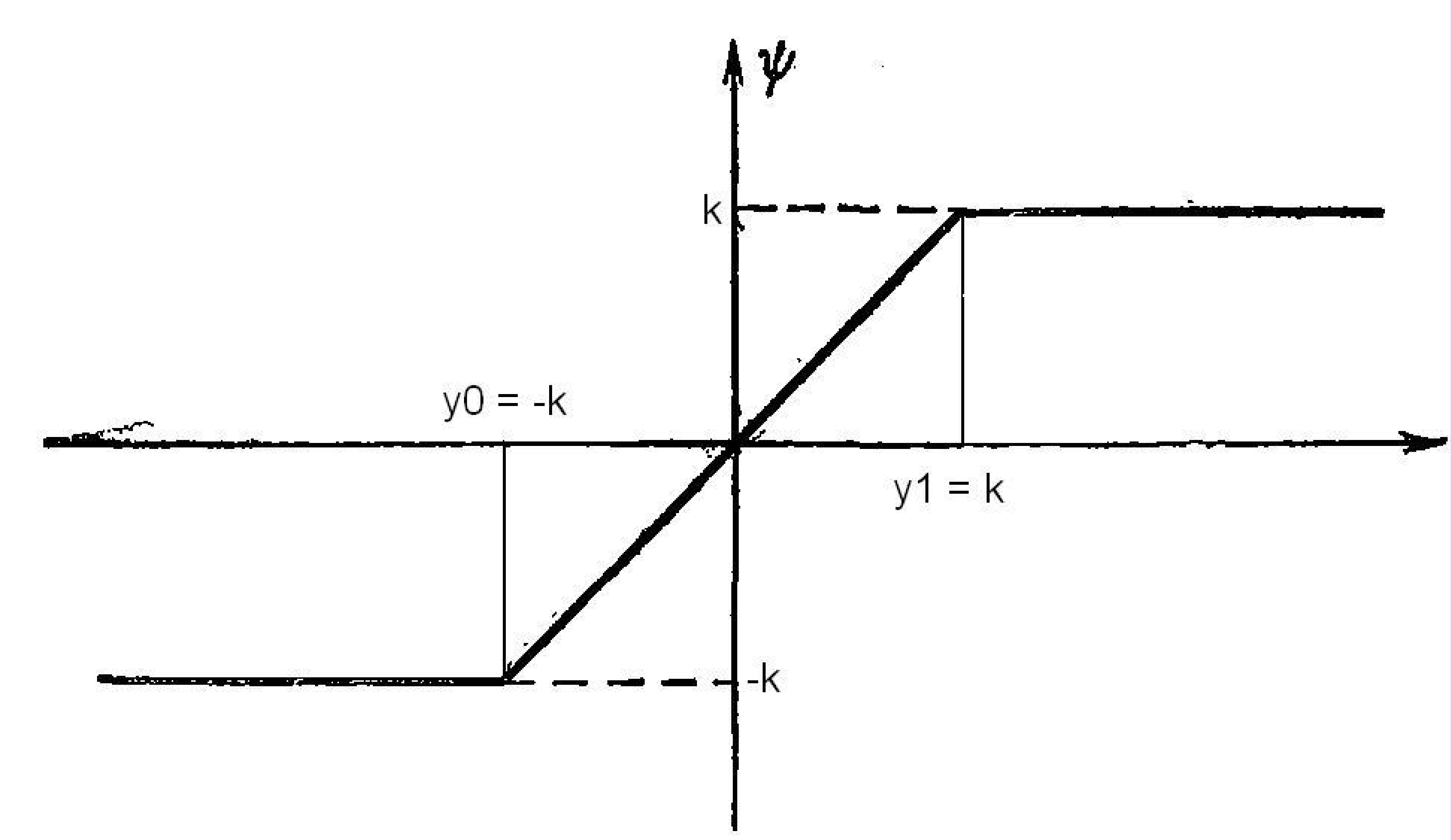
Пример 1.9. Для нормального распределения с плотностью (1.28) имеем

$$g^*\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}\sigma}\begin{cases}\exp\left[-\dfrac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \dfrac{|y-\mu|}{\sigma}\le k\\ \exp\left[\dfrac{k^2}{2}-\dfrac{k}{\sigma}|y-\mu|\right], \dfrac{|y-\mu|}{\sigma}\ge k\end{cases},$$

$$\psi^*\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)=\begin{cases}-k, \dfrac{y-\mu}{\sigma}\le -k\\ \dfrac{y-\mu}{\sigma}, \left|\dfrac{y-\mu}{\sigma}\right|\le k\\ k, \dfrac{y-\mu}{\sigma}\ge k\end{cases}.$$

Получаемая в результате оценка носит название оценки Хьюбера.

Заметим, что помимо класса ε-засоренных распределений рассматривают также классы распределений, лежащих в ε-окрестности модельного распределения относительно некоторой метрики (например, Колмогорова, Леви).


ψ
k
y0 = -k
y1 = k
-k

1.5. Локальный подход

В минимаксном подходе рассматриваются конечные, хотя и малые, окрестности точной параметрической модели. Локальный (инфинитезимальный) подход, предложенный Ф. Хампелем, имеет дело с бесконечно малыми окрестностями.

1.5.1. Основные понятия

1.5.1.1. Качественная робастность

Будем рассматривать оценки параметра θ как функционалы от функции распределения: $\hat{\theta} = \theta(F)$.

M-оценка как функционал от эмпирической функции распределения $G_N(y)$ задается уравнением $\sum_{i=1}^{N} \psi\left(y_i, \hat{\theta}_N\right) = 0$, что эквивалентно

$$\int_Y \psi(y, \hat{\theta}_N) dG_N(y) = 0, \qquad (1.36)$$

где обозначение $\hat{\theta}_N$ подчеркивает зависимость оценки от объема выборки. Поэтому можно записать $\hat{\theta} = \hat{\theta}_N = \hat{\theta}(G_N)$, отражая зависимость оценки от данных через зависимость от $G_N(y)$.

Например, математическое ожидание, определяемое как

$$\theta(G) = \int_Y y dG(y),$$

естественно оценивается как

$$\hat{\theta}(G_N) = \int_Y y dG_N(y).$$

Тогда можно ввести функциональный аналог (1.36) как

$$\int_Y \psi[y, \theta(G)] dG(y) = 0, \qquad (1.36а)$$

а для модельного распределения

$$\int_Y \psi[y, \theta(F)] dF(y) = 0. \qquad (1.37)$$

Решения уравнений (1.36а) и (1.37) будут определять величины $\theta(G)$ и $\theta(F)$.

С оценкой $\hat{\theta}_N$ связывается ее распределение с функцией $L_F(\hat{\theta}_N)$ при распределении наблюдений с функцией $F(y)$. Тогда на качественном уровне мы хотели бы, чтобы при малом изменении функции $F(y)$ функция $L_F(\hat{\theta}_N)$ также изменялась мало. Рассмотрим случай $Y = R^1$.

Определение. Последовательность оценок $\left\{\hat{\theta}_N\right\}$ называется **качественно робастной** *в* F, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall G$ и $\forall N$

$$d(F,G) < \delta \Rightarrow d(L_F(\hat{\theta}_N), L_G(\hat{\theta}_N)) < \varepsilon,$$

где d – метрика Леви

$$d(F,G) = \inf\left\{\varepsilon : G(y-\varepsilon) - \varepsilon \le F(y) \le G(y+\varepsilon) + \varepsilon, \ \forall y \in R^1\right\}.$$

M-оценка **качественно робастна**, если

1) оценочная функция ограничена;

2) решение уравнения (1.37) единственно.

1.5.1.2. Количественная робастность

Качественная робастность отвечает на вопрос, робастна ли оценка. Однако на практике требуется как-то измерить величину робастности. Среди мер количественной робастности в первую очередь используется **функция влияния**, которая определяется формулой

$$IF(y, \theta(F), F) = \lim_{t \to 0} \frac{\theta[(1-t)F + t\Delta_y] - \theta(F)}{t},$$

где Δ_y – функция вырожденного распределения, сосредоточенного в точке y. Функция влияния определяет воздействие на оценку, оказываемое добавлением к очень большой выборке одного наблюдения в точке y. В результате она отражает асимптотическое смещение оценки, вызываемое засорением наблюдений.

На основе функции влияния вводятся следующие характеристики робастности:

– чувствительность к грубой ошибке;

– чувствительность к локальному сдвигу;

– точка удаления.

Чувствительность к грубой ошибке определяется формулой

$$\gamma^* = \sup_y | IF(y, \theta(F), F) |.$$

Данная величина измеряет наибольшее (приближенное) влияние на значение оценки небольшого засорения фиксированного объема. Поэтому с ней можно соотносить верхнюю границу для (нормированного) асимптотического смещения оценки. Желательно, чтобы величина γ^* была конечна, и если это так, то оценка θ называется *B-робастной* в F.

Функция влияния *M*-оценки имеет вид

$$IF(y, \psi, F) = \frac{\psi(y, \theta)}{d}, \qquad (1.38)$$

где d определяется в формуле (1.23).

Таким образом, функция влияния *M*-оценки как функция первого аргумента пропорциональна оценочной функции. В результате *B*-робастная *M*-оценка должна иметь ограниченную оценочную функцию.

При некоторых условиях регулярности можно установить связь между функцией влияния и асимптотической дисперсией. Она имеет вид

$$V(\psi, F) = \mathbf{E} IF^2(y, \psi, F) = \int_Y IF^2(y, \psi, F) dF(y, \theta).$$

Чувствительность к локальному сдвигу. Данная характеристика связана с малыми флуктуациями в наблюдениях. При округлении и группировке наблюдения случайной величины слегка искажаются, и оценка претерпевает определенные изменения. Эффект (приближенный и нормированный), вызываемый заменой наблюдения y_1 близким ему наблюдением y_2, можно оценить величиной **чувствительности к локальному сдвигу**

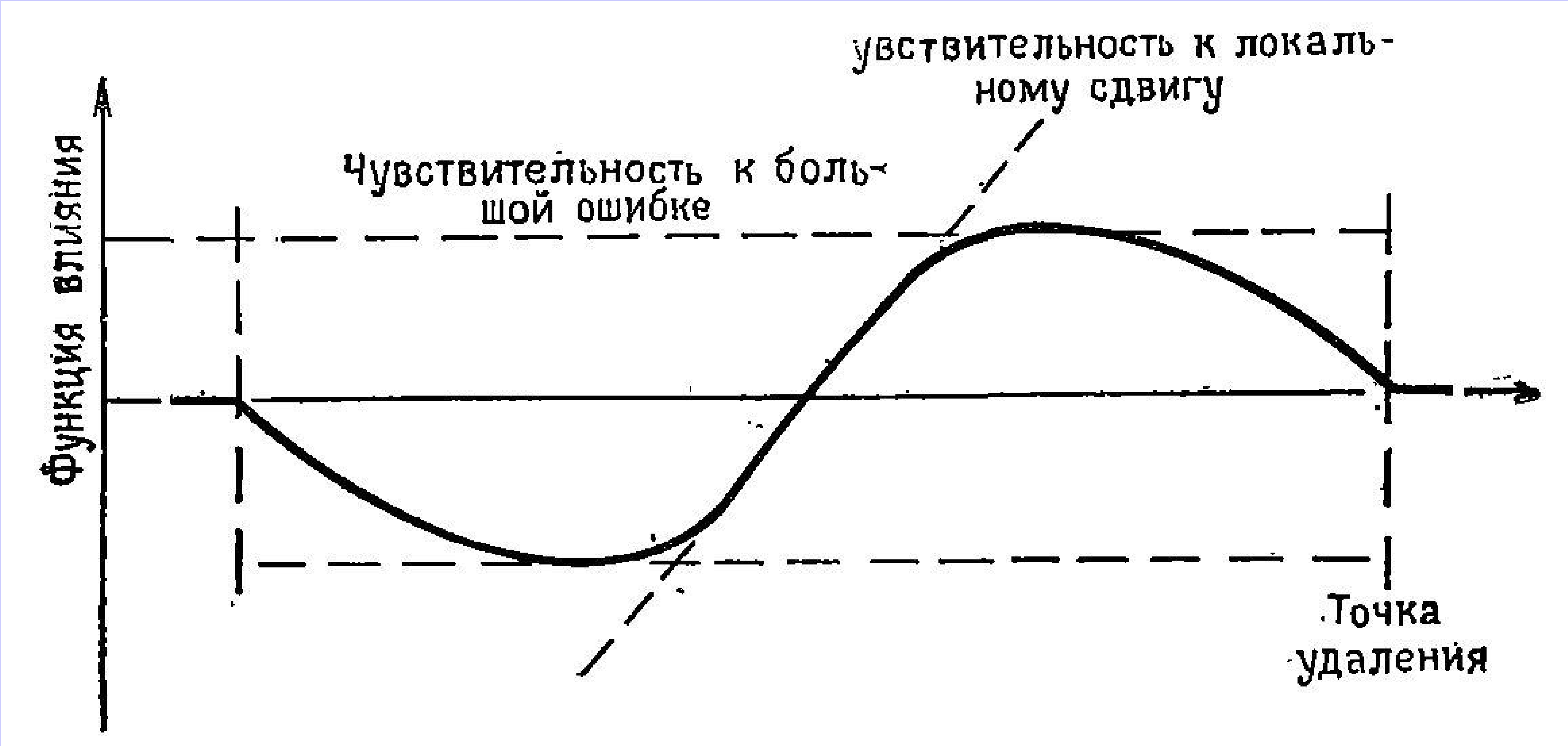
$$\lambda^* = \sup_{y_1 \neq y_2} |IF(y_1, \theta(F), F) - IF(y_2, \theta(F), F)| / |y_1 - y_2|.$$

Желательна конечность данной характеристики. Отметим, однако, что даже бесконечное значение λ^* из-за нормировки может относиться к очень небольшому изменению в действительности.

Точка удаления для симметричного модельного распределения F (с нулевым сдвигом) определяется формулой

$$\rho^* = \inf\left\{r > 0 : IF(y, \theta(F), F) = 0 \ \text{\textit{при}} \ |y| > r\right\}.$$

Наблюдения, значения которых превышают порог ρ^*, при построении оценки полностью игнорируются, что реализует жесткое правило отбраковки резко выделяющихся наблюдений.


увствительность к локаль-
ному сдвигу
Чувствительность к боль-
шой ошибке
Функция влияния
Точка
удаления

1.5.1.3. Пороговая точка

Функция влияния, будучи производной, предлагает нам локальное линеаризованное представление оценки в точке идеального распределения. Пороговая точка показывает, на каком расстоянии от модели еще можно пользоваться локальной линеаризацией.

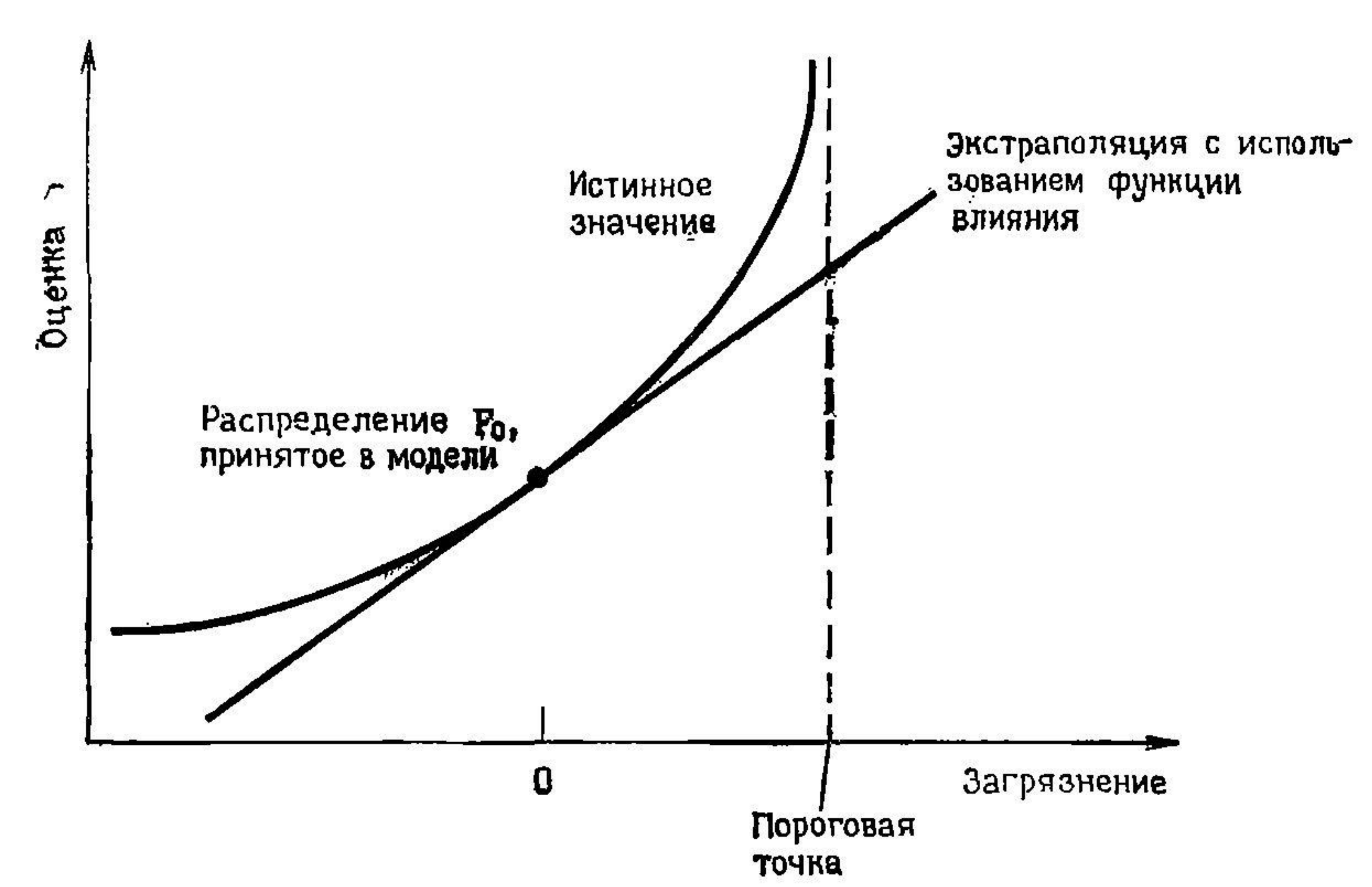
Пороговая точка – максимально возможное (точнее, супремальное) отклонение, при котором смещение оценки еще остается ограниченным (иногда ее называют точкой срыва). Таким образом, пороговая точка является глобальной характеристикой.

Пороговая точка для множества засоренных распределений – максимальная доля засоряющих наблюдений, при которой смещение оценки еще остается ограниченным.

Другая формализация понятия пороговой точки имеет вид

$$\varepsilon^* = \sup\left\{\varepsilon : \sup_{G: d(G,F)<\varepsilon} \left|\theta(G) - \theta(F)\right| < \infty\right\}.$$

Максимальное значение пороговой точки есть $\varepsilon^* = 1/2$.



Оценка
Истинное
значение
Экстраполяция с использованием функции влияния
Распределение F_0,
принятое в модели
0
Загрязнение
Пороговая
точка

Пример 1.10. Рассмотрим случай M-оценивания параметра сдвига симметричного распределения F. В этом случае естественно взять нечетную оценочную функцию ψ. Если оценочная функция ψ вдобавок ограниченна и строго монотонна, то $\varepsilon^* = 1/2$. Для неограниченной оценочной функции $\varepsilon^* = 0$.

Имеется эмпирическое правило для *M*-оценок сдвига, согласно которому линейная экстраполяция по функции влияния остается очень точной до $\varepsilon^*/4$, а до $\varepsilon^*/2$ – вполне приемлемой.

Понятия качественной робастности, функции влияния и пороговой точки Хьюбер сравнил с характеристиками устойчивости моста:

1) качественная робастность – устойчивость к малым возмущениям, влекущим за собой лишь небольшие эффекты;

2) функция влияния – измеритель величины эффектов, возникающих из-за бесконечно малых возмущений;

3) пороговая точка – величина возмущения, которое мост может выдержать, не разрушившись.

Пример 1.11. Рассмотрим две оценки параметра сдвига стандартного нормального распределения $N(0,1)$.

1. Арифметическое среднее является M-оценкой с $\psi(y) = y$, а для модельного распределения оно является ММП-оценкой. В этом случае $IF(y) = y$, поэтому $\gamma^* = \infty$ – оценка не B-робастна, $\lambda^* = 1$ – оценка нечувствительна к малому изменению наблюдений, $\rho^* = \infty$ – оценка не удаляет резко выделяющиеся наблюдения.

2. Выборочная медиана является M-оценкой с $\psi_{med}(y) = \mathrm{sign}(y)$. Для нормального распределения $IF(y) = \sqrt{\pi/2}\,\mathrm{sign}(y)$, поэтому $\gamma^* = \sqrt{\pi/2}$ – оценка B-робастна, $\lambda^* = \infty$ – оценка чувствительна к малому изменению наблюдений, $\rho^* = \infty$ – оценка не удаляет резко выделяющиеся наблюдения, и они оказывают известное (фиксированное) влияние.

1.5.3. Оптимальные оценки

Поскольку один из основных показателей качества оценивания в подходе Хампеля – это чувствительность к грубой ошибке γ^*, представляет интерес оценка, наилучшая с этой точки зрения. Оценка θ^*, доставляющая минимальное значение чувствительности к грубой ошибке γ^*, называется **наиболее B-робастной**.

Низкая чувствительность к грубой ошибке обычно входит в противоречие с требованием эффективности (т. е. малой асимптотической дисперсии). Некого компромисса позволяют достигнуть **оптимальные B-робастные оценки** – это наиболее эффективные оценки при наложении на величину γ^* ограничения сверху. Для M -оценок можно записать:

$$\min_{\psi} V(\psi, F) \text{ при } \gamma^*(\psi, F) \le k\,.$$

Далее мы изучим наиболее B-робастные и оптимальные B-робастные M-оценки параметра сдвига распределений, удовлетворяющих некоторым условиям (в частности, им удовлетворяют распределения из теоремы 1.1), на широком множестве оценочных функций.

1.5.3.1. Оптимальные *M*-оценки параметра сдвига

Наиболее *B*-робастной оценкой является выборочная медиана с оценочной функцией

$$\psi_{med}(y) = \mathrm{sign}(y),$$

и для оценочной функции ψ справедливо

$$\gamma^*(\psi) \geq \frac{1}{2f(0)} = \gamma^*_{med}.$$

Асимптотическая дисперсия и чувствительность к грубой ошибке, таким образом, имеют положительные нижние значения: $\min V$ – граница Рао-Крамера, достигаемая на ММП-оценке, $\min \gamma^* = \dfrac{1}{2f(0)}$ соответствует выборочной медиане. Но одновременное их уменьшение невозможно.

Пример 1.12. Для параметра сдвига нормального распределения среднее арифметическое эффективно, но не *B*-робастно, выборочная медиана имеет наибольшую *B*-робастность, но ее эффективность составляет 64%.

В результате интерес представляют оптимальные *B*-робастные оценки.

Обозначим

$$\psi_k(y) = \begin{cases} -k, & \psi_0(y) < -k \\ \psi_0(y), & -k \le \psi_0(y) \le k, \\ k, & \psi_0(y) > k \end{cases}$$

где $\psi_0 = -f'/f = (-\ln f)'$, $0 < k < \bar{\psi}_0 = \sup\limits_y |\psi_0(y)|$.

Фактически это оценочная функция, получаемая в теореме Хьюбера и доставляющая асимптотической дисперсии минимаксное значение.

Имеет место следующий результат.

Если функция ψ_0 неограниченна, то оптимальные B-робастные оценки задаются множеством $\{\psi_{med}, \psi_k (0 < k < \infty)\}$. Если функция ψ_0 ограничена: $|\psi_0| < \bar{\psi}_0$, то указанное множество имеет вид $\{\psi_{med}, \psi_k (0 < k < \bar{\psi}_0), \psi_0\}$.

1.5.4. Сравнение подходов Хьюбера и Хампеля

Рассмотрим для M-оценки модель ε-засоренного распределения. Приближенное значение асимптотического смещения согласно (1.23), (1.38) имеет вид

$$b(\psi, H) \approx \varepsilon \frac{\int_Y \psi(y, \theta) dH(y, \theta)}{d} = \varepsilon \int_Y IF(y, \theta, F) dH(y, \theta), \qquad (1.39)$$

откуда

$$\sup_H |b(\psi, H)| \approx \varepsilon \sup_H \left| \int_Y IF(y, \theta, F) dH(y, \theta) \right| = \varepsilon \sup_y |IF(y, \theta, F)| = \varepsilon \gamma^*(\psi).$$

Минимизация левой части последней цепочки равенств дает оценку с минимаксным смещением. Минимизация правой части цепочки дает наиболее B-робастную оценку. Например, для параметра сдвига симметричного распределения в обоих случаях эта оценка – выборочная медиана (при соответствующих ограничениях). Таким образом, имеется связь этих двух задач в подходах Хьюбера и Хампеля.

Заметим, что связь между данными подходами проявляется также в совпадении дисперсионно-минимаксных оценок в подходе Хьюбера с оптимальными B-робастными оценками в подходе Хампеля (при некоторых условиях).

Многие результаты, полученные в рамках подходов Хьюбера и Хампеля, существенно опираются на симметричность засорения. Для изучения влияния асимметричного засорения на параметр сдвига в Принстонском университете было проведено обширное исследование методом Монте-Карло. Оно показало, в частности, неустойчивость выборочной медианы и оценки Хьюбера при оценивании параметра сдвига нормального распределения. Для решения указанной задачи был предложены **сниженные** оценки.

В первую очередь это оценки с конечной точкой удаления $r < \infty$, когда оценочная функция является нулевой вне отрезка $[-r,\ r]$. Для данного класса оценок была развита ветвь теории Хампеля.

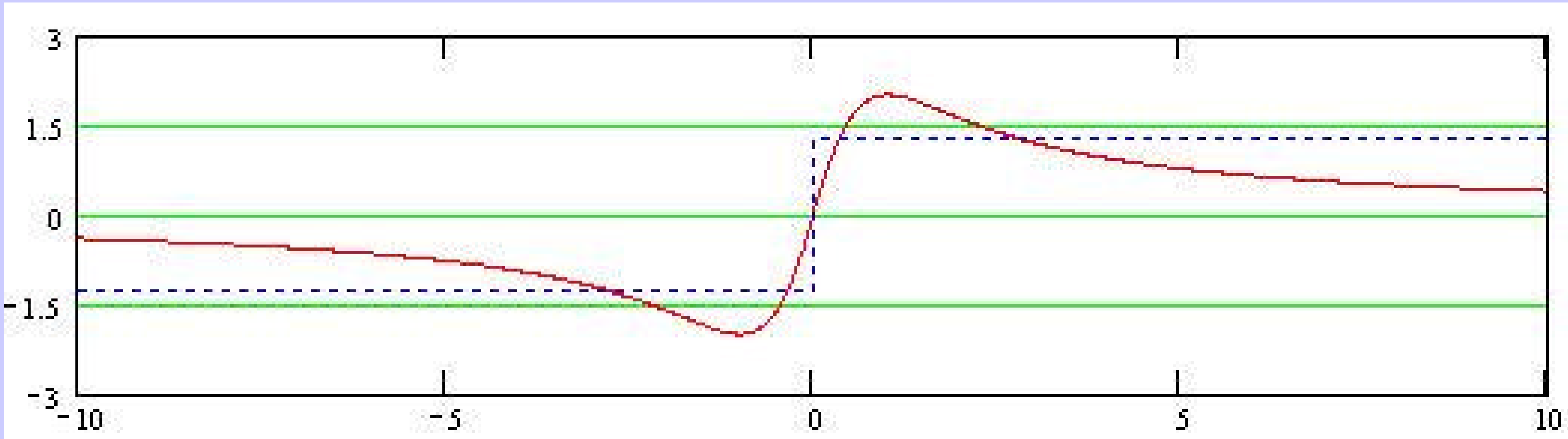
Однако наличие конечной точки удаления – не обязательное свойство оценок, устойчивых к асимметричному засорению. Для обеспечения устойчивости в указанном смысле можно рассматривать более широкий класс оценочных функций, лишь стремящихся к нулю при увеличении/уменьшении аргумента. Эти функции не осуществляют полного удаления резко выделяющихся наблюдений, а лишь сильно уменьшают их влияние.

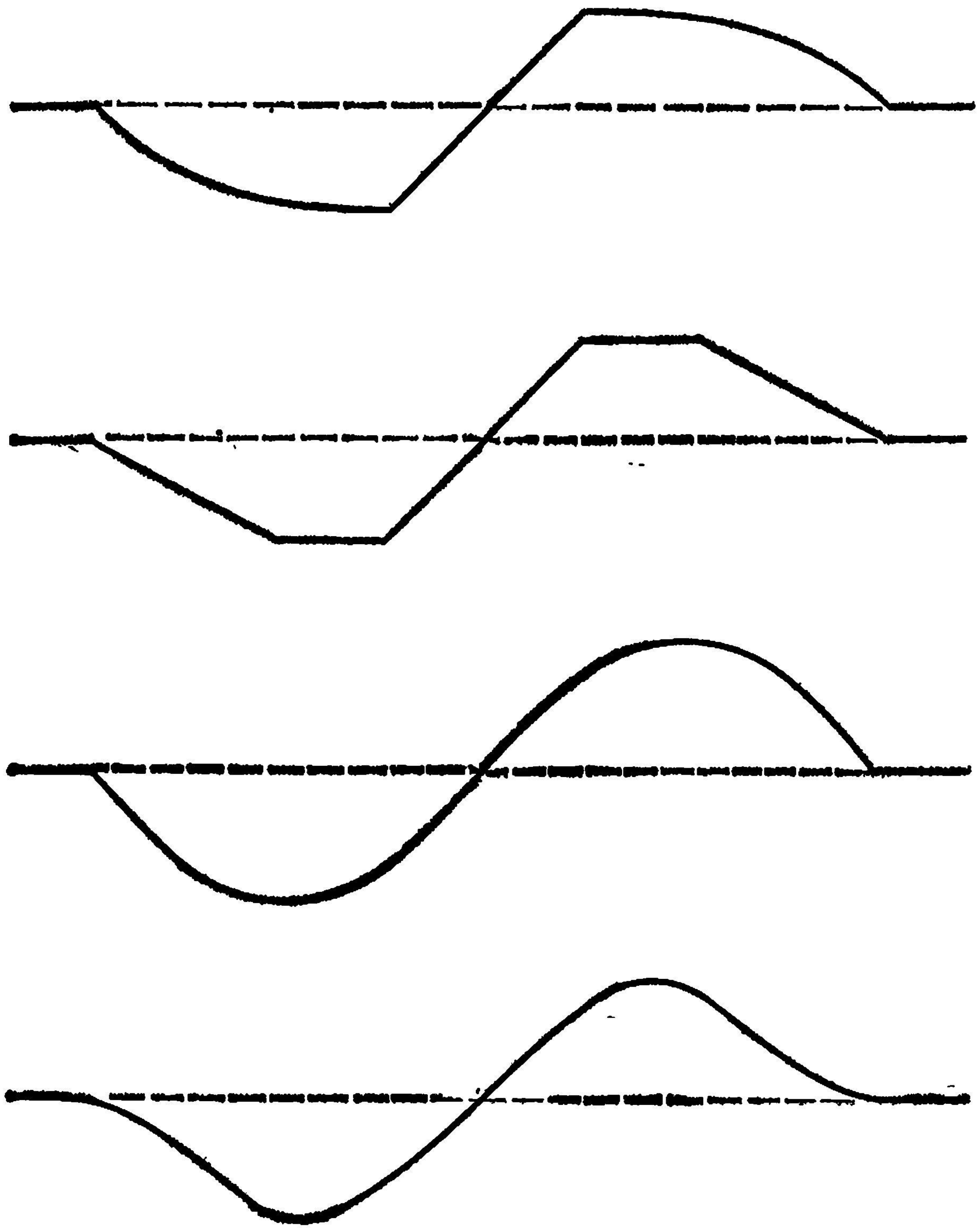
Пример 1.14. ММП-оценка параметра сдвига распределения Стьюдента с параметром формы ν имеет оценочную функцию

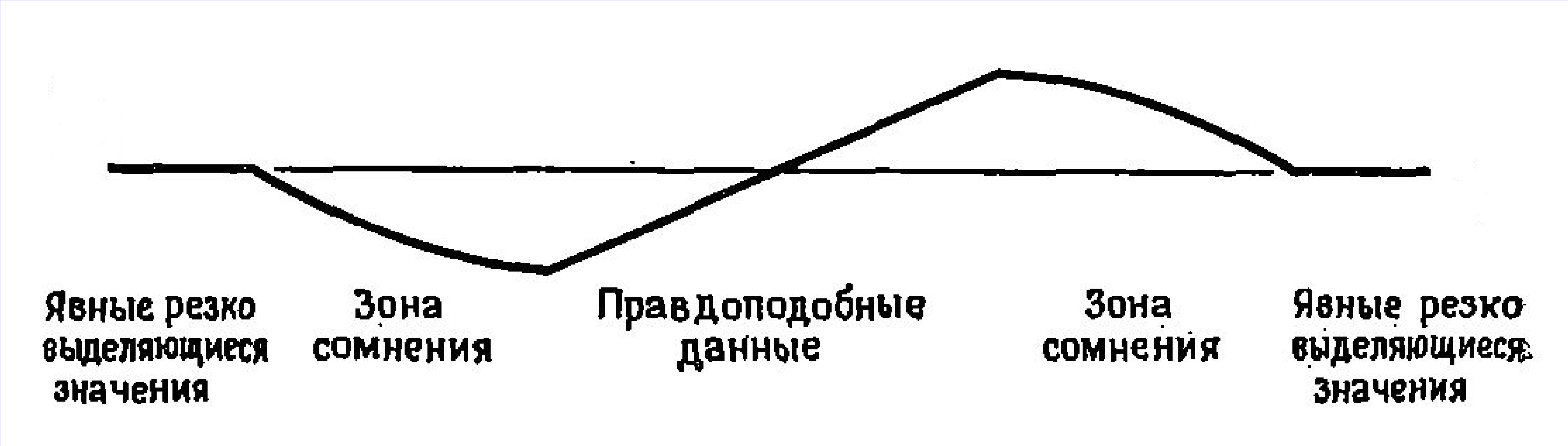
$$\psi(y) = y/(\nu + y^2)$$

и обладает устойчивостью к асимметричному засорению.

Во втором разделе пособия мы сосредоточимся на изучении нового подхода, который часто приводит к оценкам, устойчивым к асимметричному засорению.




Минимаксная
Хэмпела
Эндрюса
Тьюка


Явные резко выделяющиеся значения
Зона сомнения
Правдоподобные данные
Зона сомнения
Явные резко выделяющиеся значения