

Новосибирский государственный технический университет

**Конспект лекций по курсу
"Современные проблемы прикладной математики и информатики"**

Новосибирск
2011

Составители: д.т.н., проф. М.Г. Персова,
д.т.н., проф. Ю.Г. Соловейчик

Работа подготовлена на кафедре прикладной математики

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Математические модели для описания тепловых и электромагнитных полей, модели для описания течения жидкости и газа	4
1.1. Математические модели для описания электромагнитных полей	4
1.2. Математические модели для описания тепловых полей, течения жидкости и газа	26
1.3. Адекватность моделей. Верификация моделей и принципы тестирования	29
2. Прямые и обратные задачи математической физики	38
3. Численные методы решения сложных прямых задач математической физики.....	42
4. Методы решения обратных задач математической физики	53

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕПЛОВЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ, МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

1.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Фундаментальной математической моделью, используемой для моделирования практически всех макроскопических электромагнитных явлений, является *система уравнений Максвелла*, устанавливающая связь между компонентами электрического и магнитного полей, параметрами среды (электропроводностью, магнитной и диэлектрической проницаемостью) и сторонними источниками электромагнитного поля в форме системы векторных дифференциальных уравнений:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}^{\text{ст}} + \sigma \vec{E} + \frac{\partial(\varepsilon \vec{E})}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = \rho, \quad (4)$$

где \vec{H} – напряжённость магнитного поля, $\vec{J}^{\text{ст}}$ – вектор плотностей сторонних токов (возбуждающих электромагнитное поле), \vec{E} – напряжённость электрического поля, σ – проводимость среды, ε – диэлектрическая проницаемость среды, \vec{B} – индукция магнитного поля (связанная с напряжённостью \vec{H} соотношением $\vec{B} = \mu \vec{H}$, μ – коэффициент магнитной проницаемости).

Как правило, при численном моделировании электромагнитных полей дискретные аналоги не строятся напрямую для системы уравнений (1)–(4). Численные аппроксимации строятся для несколько иных дифференциальных уравнений, полученных в результате преобразований этой системы с учётом характера исследуемого электромагнитного поля. Чаще всего такие преобразования проводятся

путём введения новых искомым функций, называемых *потенциалами*. Ниже мы рассмотрим именно такие математические модели электромагнитных процессов.

1.1.1. ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

Под **задачами электростатики** мы будем понимать задачи, в которых требуется найти распределение напряжённости электрического поля \vec{E} в непроводящей среде при условии неизменности во времени электромагнитного поля (хотя иногда задачами электростатики называют любые задачи моделирования *неизменного во времени* электрического поля, в том числе и в проводящей среде).

Очевидно, что при неизменности электромагнитного поля во времени в среде с нулевой проводимостью напряжённость электрического поля можно искать независимо от магнитного поля.

Действительно, при $\sigma = 0$ и $\partial\vec{E}/\partial t = \mathbf{0}$ только два уравнения (2) и (4) из системы (1)–(4) включают в себя неизвестную вектор-функцию \vec{E} , причём с учётом того, что $\partial\vec{B}/\partial t = \mathbf{0}$, уравнение (2) принимает вид

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

В этом случае вектор-функцию \vec{E} , удовлетворяющую уравнениям (4) и (5), удобно искать в виде градиента некоторой скалярной функции V , называемой **электрическим потенциалом**, причём обычно знак \vec{E} считается противоположным знаком градиента V :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V. \quad (6)$$

При таком представлении \vec{E} уравнение (5) выполняется автоматически (поскольку $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} V) \equiv \mathbf{0}$ для любой функции V), и поэтому математическая модель электростатического поля включает в себя единственное уравнение

$$-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} V) = \rho, \quad (7)$$

получаемое из (4) с учётом (6).

Таким образом, электрическое поле в задаче электростатики описывается эллиптическим уравнением с коэффициентом диффузии ε , являющимся *диэлектрической проницаемостью среды*, и правой частью ρ , являющейся *функцией распределения зарядов в пространстве*.

Обратим внимание на следующую особенность большинства задач электростатики. Несмотря на то, что источниками поля в этих задачах являются электри-

ческие заряды, чаще всего в них потенциал V требуется найти именно в той области, где $\rho = 0$. Как правило, в такого рода задачах плотность зарядов ρ в расчётной области задаётся равной нулю и поле описывается однородным уравнением:

$$-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} V) = 0. \quad (8)$$

В этом случае в качестве исходных данных для моделирования электрического поля используют значения потенциала V на тех границах области, которые являются границами некоторых проводящих тел (т.е. проводников, которые обычно называют *электродами*). Эти значения потенциалов на электродах задаются на границах расчётной области как правые части краевого условия первого рода.

1.1.2. СТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

Электромагнитные процессы такого типа характеризуются наличием стационарного (постоянного) тока в проводящих телах. Исходными данными для моделирования такого процесса могут быть как заданные на отдельных частях границы расчётной области значения электрического потенциала, так и плотности втекающих (или вытекающих) с некоторых частей границ расчётной области токов. Математическая модель такого рода процессов получается из системы уравнений Максвелла следующим образом.

Как и в рассмотренных в предыдущем разделе задачах электростатики, напряжённость электрического поля \vec{E} представляется в виде (6), что обеспечивает (как и в задачах электростатики) автоматическое выполнение уравнения (2) (имеющее и в этих задачах вид (5)). Однако в отличие от задач нахождения электрического поля в непроводящих средах уравнение (1) не может быть исключено из рассмотрения, поскольку теперь $\sigma \neq 0$ и правая часть (1) содержит \vec{E} . Поэтому основное уравнение для моделирования таких процессов получается как следствие из этого уравнения системы Максвелла.

Воздействуем оператором div на левую и правую части уравнения (1). Учитывая, что для любой вектор-функции \vec{W} справедливо тождество $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{W}) \equiv 0$, получим

$$\operatorname{div}(\vec{J}^{\text{ct}} + \sigma \vec{E}) = 0. \quad (9)$$

Заметим, что в рассматриваемых задачах под $\vec{J}^{ст}$ понимаются только токи вне расчётной области (которые в задаче могут быть учтены как краевые условия) и поэтому внутри расчётной области

$$\vec{J}^{ст} \equiv 0, \quad (10)$$

и тогда из уравнения (9) с учётом (6) получаем:

$$-\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} V) = 0. \quad (11)$$

Осталось проанализировать ситуацию с уравнением (4) системы уравнений Максвелла. Это уравнение связывает напряжённость электрического поля \vec{E} с распределением зарядов ρ . Однако в проводящих телах распределение зарядов, как правило, априорно неизвестно, поскольку заряды в них могут перераспределяться под воздействием электрического поля. Поэтому в областях с $\sigma \neq 0$ именно ρ является неизвестной функцией, которая может быть получена по известному распределению \vec{E} (или V) как $\rho = \operatorname{div}(\varepsilon \vec{E})$ (или $\rho = -\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} V)$).

В результате математической моделью рассматриваемого электромагнитного процесса является однородное уравнение эллиптического типа (11) (в котором коэффициент диффузии – это проводимость среды) с краевыми условиями первого и второго рода. Краевые условия первого рода задаются на тех границах расчётной области, где известны значения потенциала V , а вторые краевые условия – на тех границах, где известна плотность стекающего стороннего тока. Заметим, что ток не может перетекать из проводника в изолятор и поэтому на границе между проводником и изолятором плотность стекающего в проводник тока задаётся нулевой (и изолятор не включается в расчётную область).

1.1.3. ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ

Задачами магнитостатики называют задачи моделирования магнитного поля, создаваемого стационарным (постоянным) электрическим током с известной плотностью распределения \vec{J} . Очевидно, что такие поля описываются системой из двух уравнений полной системы Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}, \quad (12)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (13)$$

Для численного анализа стационарных магнитных полей в зависимости от их особенностей используются различные виды математических моделей, к которым может быть преобразована система (12)–(13). Мы рассмотрим наиболее часто ис-

пользуемые модели, получаемые с применением либо векторного потенциала, либо скалярного магнитного потенциала.

1.1.3.1. ОПИСАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛА

Представим \vec{B} в виде ротора некоторой вектор-функции \vec{A} , называемой **вектор-потенциалом**: $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$.

При таком представлении поля \vec{B} уравнение (13) превращается в тождество $\text{div}(\text{rot } \vec{A}) \equiv 0$, и вектор-потенциал \vec{A} может быть найден из уравнения (12), в котором $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}$, т.е. \vec{A} должен удовлетворять уравнению:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \right) = \vec{J}. \quad (14)$$

Наиболее просто вычислить потенциал \vec{A} в случае, когда $\mu = \text{const}$, т.е. среда однородна по магнитной проницаемости (для определённости будем считать, что $\mu = \mu_0$, где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума). В этом случае уравнению

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \quad (15)$$

удовлетворяет вектор-функция \vec{A} , компоненты которой являются решениями трёх независимых дифференциальных уравнений:

$$-\Delta A_x = \mu_0 J_x, \quad -\Delta A_y = \mu_0 J_y, \quad -\Delta A_z = \mu_0 J_z, \quad (16)$$

где **оператор Лапласа** Δ для любой достаточно гладкой скалярной функции F определяется соотношением

$$\Delta F = \text{div}(\text{grad } F). \quad (17)$$

Покажем, что вектор-потенциал \vec{A} , удовлетворяющий системе (16), является и решением векторного уравнения (15).

Поскольку $\text{div } \vec{J} = 0$ (что является следствием уравнения (12)), то из уравнений (16) их дифференцированием и сложением получим

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} \text{div}(\text{grad } A_x) + \frac{\partial}{\partial y} \text{div}(\text{grad } A_y) + \frac{\partial}{\partial z} \text{div}(\text{grad } A_z) \right) =$$

$$= -\operatorname{div}(\mu_0 \vec{\mathbf{J}}). \quad (18)$$

Меняя порядок дифференцирования в слагаемых левой части уравнения (18) (можно показать, что гладкость решений A_x , A_y и A_z уравнений (16) является для этого достаточной) и учитывая, что $\operatorname{div}(\mu_0 \vec{\mathbf{J}}) = \mu_0 \operatorname{div} \vec{\mathbf{J}} = 0$, получаем

$$-\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{\mathbf{A}})) = 0. \quad (19)$$

Таким образом, для функции $w = \operatorname{div} \vec{\mathbf{A}}$ справедливо **уравнение Лапласа**

$$-\Delta w = 0, \quad (20)$$

и, с учётом условия $\operatorname{div} \vec{\mathbf{A}} \rightarrow 0$ при стремлении координат к бесконечности (или при выполнении условия $w = \operatorname{div} \vec{\mathbf{A}} = 0$ на всех внешних границах расчётной области), единственным решением уравнения (20) является тривиальная функция $w \equiv 0$.

Таким образом, вектор-функция $\vec{\mathbf{A}}$, являющаяся решением системы (16) (для правой части $\mu_0 \vec{\mathbf{J}}$ которой справедливо $\operatorname{div}(\mu_0 \vec{\mathbf{J}}) = 0$), удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{A}} = 0. \quad (21)$$

Воспользуемся тождеством

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}}) = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} \vec{\mathbf{A}}) + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{\mathbf{A}}), \quad (22)$$

в котором выражение $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \vec{\mathbf{A}})$ означает вектор-функцию с компонентами ΔA_x , ΔA_y и ΔA_z .

Тогда из справедливости для $\vec{\mathbf{A}}$ уравнений (16) и с учётом того, что в этом случае для него справедливо условие (21), получим, что вектор-потенциал $\vec{\mathbf{A}}$ удовлетворяет и векторному уравнению (15), что и требовалось доказать.

Известно, что решением **уравнения Пуассона**

$$-\Delta v = f \quad (23)$$

в бесконечном пространстве (если $v(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ и $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) является функция

$$v(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{f(x', y', z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} dx' dy' dz'. \quad (24)$$

Поэтому компоненты вектор-потенциала \vec{A} , удовлетворяющего системе (16) (а значит и векторному уравнению (15) и условию (21)), могут быть вычислены как соответствующие интегралы от компонент вектора плотности тока \vec{J} . В векторном виде эта формула может быть записана следующим образом:

$$\vec{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{J}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}'. \quad (25)$$

Из формулы (25) соответствующим дифференцированием легко получить известный закон Био-Савара, описывающий магнитное поле токов в вакууме:

$$\vec{B}^c(\mathbf{r}) = \text{rot } \vec{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d\mathbf{r}'. \quad (26)$$

Таким образом, в однородном по магнитной проницаемости пространстве не только компоненты вектора-потенциала, но и компоненты индукции магнитного поля \vec{B} могут быть вычислены довольно просто в виде соответствующих интегралов от \vec{J} .

Вектор-потенциал \vec{A} довольно часто используется для решения двумерных задач магнитостатики в неоднородных по магнитной проницаемости средах. **Двумерными** называют задачи, в которых решение зависит только от двух пространственных координат (заметим, что если в цилиндрических координатах $\{r, \varphi, z\}$ решение задачи не зависит от угловой координаты φ , то такую задачу часто называют **осесимметричной**). В этом случае векторное уравнение (14) чаще всего оказывается эквивалентным одному скалярному уравнению для одной из компонент вектор-потенциала \vec{A} . Рассмотрим два наиболее часто встречающихся случая двумерных задач магнитостатики.

В первом случае предполагается, что в декартовых координатах вектор плотности токов имеет только одну ненулевую компоненту J_z , зависящую только от координат x и y , и при этом магнитная проницаемость μ зависит также только от координат x и y . В этом случае магнитное поле может быть полностью опре-

делено только через одну компоненту $A_z = A_z(x, y)$ вектор-потенциала \vec{A} , удовлетворяющую двумерному уравнению:

$$-\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad} A_z\right) = J_z. \quad (27)$$

Действительно, если взять вектор $\vec{A} = (0, 0, A_z(x, y))$, в котором $A_z = A_z(x, y)$ удовлетворяет уравнению (27), то легко убедиться, что такой вектор удовлетворяет уравнению (14). Таким образом, двумерное магнитное поле в декартовых координатах может быть описано эллиптическим уравнением (см. (35)) с коэффициентом диффузии $\lambda = 1/\mu$ и правой частью $f = J_z$. При этом, как правило, в соответствующей краевой задаче задаются однородные краевые условия первого или второго рода.

Второй случай соответствует осесимметричной задаче, в которой вектор плотности тока \vec{J} в цилиндрической системе координат $\{r, \varphi, z\}$ имеет только одну ненулевую компоненту J_φ , причём и J_φ , и магнитная проницаемость μ не зависят от координаты φ : $J_\varphi = J_\varphi(r, z)$, $\mu = \mu(r, z)$. В этом случае магнитное поле также может быть полностью определено только через одну компоненту $A_\varphi = A_\varphi(r, z)$ вектор-потенциала \vec{A} , удовлетворяющую двумерному уравнению:

$$-\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad} A_\varphi\right) + \frac{A_\varphi}{\mu r^2} - \frac{A_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mu}\right) = J_\varphi. \quad (28)$$

Это уравнение довольно просто можно получить из (14) с учётом того, что в цилиндрической системе координат для вектор-потенциала $\vec{A} = (0, A_\varphi(r, z), 0)$ справедливы следующие соотношения

$$\operatorname{rot}_\varphi\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot} \vec{A}\right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\mu} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\right) - A_\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mu r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right), \quad (29)$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad} A_\varphi\right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\mu} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right). \quad (30)$$

Обратим внимание на то, что в задачах магнитостатики производная коэффициента $1/\mu$ по координате r , как правило, отлична от нуля внутри магнитных материа-

лов, а на их границах эта производная в уравнении (28) определяет поверхностный источник (поскольку она является производной разрывной по r функции). Поэтому уравнение (28) удобно переписать в виде, близком к виду эллиптического уравнения (35):

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} A_\varphi) + \gamma A_\varphi + f^S(A_\varphi) = J_\varphi, \quad (31)$$

где коэффициент диффузии $\lambda = 1/\mu$, коэффициент $\gamma = 1/\mu r^2$ внутри подобластей с $\mu = \text{const}$ и $\gamma = \frac{1}{\mu r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu} \right)$ внутри подобластей с изменяющейся по r магнитной проницаемостью. Функция же $f^S(A_\varphi)$ определяет поверхностный источник на границах, где магнитная проницаемость терпит разрыв. Плотность этого источника определяется выражением $-\frac{A_\varphi}{r} \left[\frac{1}{\mu} \right]_S n_r$, где n_r — r -компонента вектора нормали \vec{n} к границе S , $\left[1/\mu \right]_S$ — скачок функции $1/\mu$ на границе S , посчитанный в соответствии с направлением нормали \vec{n} .

Заметим, что при построении конечноэлементных аппроксимаций осесимметричных задач в некоторых случаях лучше использовать исходное уравнение $\operatorname{rot}_\varphi \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} \right) = J_\varphi$.

1.1.3.2. ОПИСАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СКАЛЯРНОГО МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛА

При решении трёхмерных задач магнитостатики рассмотренная выше векторная постановка (для вектор-потенциала \vec{A}) приводит, как правило, к гораздо более трудоёмким вычислительным схемам, нежели любая эквивалентная ей по смыслу скалярная постановка. Действительно, если использовать уравнение (14) для описания трёхмерного поля, то при решении задачи нужно либо искать три неизвестные функции $A_x(x, y, z)$, $A_y(x, y, z)$ и $A_z(x, y, z)$, удовлетворяющие системе из трёх скалярных уравнений, либо решать задачу как векторную с использованием специальной технологии представления вектор-потенциала \vec{A} . И в том, и в другом случае вычислительные затраты гораздо (на порядок и более) выше, чем при решении одного скалярного уравнения для достижения той же точности вычисления характеристик магнитного поля. Дополнительной (и довольно суще-

ственной) трудностью является неоднозначность определения вектор-потенциала \vec{A} из уравнения (14): если уравнению (14) удовлетворяет вектор-функция \vec{A} , то ему удовлетворяет и вектор-функция $\vec{A} + \text{grad } W$, где W – произвольная скалярная функция. В результате гораздо более эффективным является использование скалярного магнитного потенциала для решения трёхмерных задач магнитостатики.

Будем искать напряжённость магнитного поля \vec{H} в виде

$$\vec{H} = \vec{H}^c - \text{grad } U, \quad (32)$$

где \vec{H}^c – магнитное поле токов \vec{J} в вакууме, U – некоторая скалярная функция, называемая **скалярным магнитным потенциалом**. При этом $\text{rot } \vec{H}^c = \vec{J}$ по определению \vec{H}^c , и тогда, учитывая, что $\text{rot grad } U \equiv 0$, убеждаемся, что \vec{H} автоматически удовлетворяет уравнению (12):

$$\text{rot } \vec{H} = \text{rot } \vec{H}^c - \text{rot grad } U = \vec{J}.$$

Поэтому для нахождения поля \vec{H} достаточно решить одно *скалярное* уравнение с одной неизвестной *скалярной* функцией U :

$$\text{div}(\mu \vec{H}^c) - \text{div}(\mu \text{grad } U) = 0, \quad (33)$$

которое при представлении \vec{H} в виде (32) полностью эквивалентно уравнению (13).

Уравнение (33) удобнее переписать в виде

$$-\text{div}(\mu \text{grad } U) = -\text{div}(\mu \vec{H}^c). \quad (34)$$

Таким образом, функция U может быть найдена как решение эллиптического уравнения вида

$$-\text{div}(\lambda \text{grad } u) + \gamma u = f \quad (35)$$

с коэффициентом диффузии $\lambda = \mu$ и правой частью $f = -\text{div}(\mu \vec{H}^c)$. Вектор-функция же \vec{H}^c в соответствии с (26) может быть вычислена по формуле

$$\vec{H}^c(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^c(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d\mathbf{r}'. \quad (36)$$

Заметим, что при использовании для численного анализа модели (34) могут возникать значительные трудности при решении **нелинейных задач магнитостатики**, т.е. при наличии в расчётной области подобластей, где магнитная проницаемость μ зависит от напряжённости магнитного поля: $\mu = \mu(\vec{H})$. Эти трудности могут быть преодолены введением так называемого *полного потенциала* U^p в тех подобластях, где $\mu = \mu(\vec{H})$ и $\vec{J} = 0$. Потенциал U^p в этих подобластях (называемых **подобластями полного потенциала**) определяет поле \vec{H} соотношением

$$\vec{H} = -\text{grad } U^p. \quad (37)$$

В остальных подобластях (называемых **подобластями неполного потенциала**) задаётся неполный потенциал U , определяемый соотношением (32). На границах же подобластей полного и неполного потенциала задаются специальные условия связи потенциалов.

1.1.4. МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВИДЕ ОДНОГО ВЕКТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

В случае моделирования нестационарных электромагнитных полей система уравнений (1)–(4) при условии независимости μ от времени может быть преобразована к векторному уравнению вида

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{E} \right) + \frac{\partial(\sigma \vec{E})}{\partial t} + \frac{\partial^2(\varepsilon \vec{E})}{\partial t^2} = -\frac{\partial \vec{J}^{\text{ct}}}{\partial t}. \quad (38)$$

Это уравнение может быть легко получено из уравнения (2) делением его на μ и применением операции rot к его левой и правой частям. При этом используются соотношение $\vec{B} = \mu \vec{H}$ (\vec{B}/μ заменяется на \vec{H}) и уравнение (1) ($\text{rot} \vec{H}$ заменяется на правую часть (1)), а также меняется порядок дифференцирования по времени и по пространственным координатам. После этого слагаемые с \vec{E} переносятся в левую часть уравнения.

Уравнение (38) довольно часто используется при моделировании нестационарных электромагнитных полей без учёта токов смещения в средах с однородной магнитной проницаемостью ($\mu = \mu_0$, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума). В этом случае оно принимает вид

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{\mathbf{E}}) + \mu_0\sigma \frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial\vec{\mathbf{J}}^{\text{ст}}}{\partial t}. \quad (39)$$

Уравнение такого вида очень часто используется при вычислении электромагнитных полей методом интегральных уравнений (МИУ). При этом обратим внимание на то, что искомая вектор-функция $\vec{\mathbf{E}}$ может быть разрывной на границах разрыва коэффициента σ , т.е. на границах сред с различной проводимостью. Действительно, если применить операцию div к обеим частям уравнения (1), то в областях, где нет сторонних токов $\vec{\mathbf{J}}^{\text{ст}}$, и при пренебрежении токами смещения получим

$$\operatorname{div}(\sigma\vec{\mathbf{E}}) = 0. \quad (40)$$

Это означает, что непрерывной является нормальная составляющая произведения $\sigma\vec{\mathbf{E}}$, и поэтому нормальная составляющая E_n вектор-функции $\vec{\mathbf{E}}$ должна иметь соответствующий разрыв на границе разрыва коэффициента σ (если, конечно, $E_n \neq 0$ на этой границе). Разрывность E_n никак не усложняет вычислительные схемы МИУ, но создаёт определённые трудности при применении метода конечных элементов (МКЭ).

В случае, когда решается нелинейная по μ нестационарная задача (т.е. μ является функцией $\vec{\mathbf{H}}(t)$ и, следовательно, зависит от времени), система уравнений (1)–(4) может быть преобразована к виду, аналогичному (38):

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{\mathbf{A}}\right) + \sigma \frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = \vec{\mathbf{J}}^{\text{ст}}, \quad (41)$$

где $\vec{\mathbf{A}}$ – вектор-потенциал, через который определяются индукция $\vec{\mathbf{B}}$ магнитного поля и напряжённость $\vec{\mathbf{E}}$ электрического поля:

$$\vec{\mathbf{B}} = \operatorname{rot}\vec{\mathbf{A}}, \quad (42)$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t}. \quad (43)$$

Нетрудно убедиться, что $\vec{\mathbf{B}}$ и $\vec{\mathbf{E}}$, вычисленные по вектор-потенциалу $\vec{\mathbf{A}}$ с помощью соотношений (42) и (43), удовлетворяют всем уравнениям системы Максвелла (1)–(3), если $\vec{\mathbf{A}}$ является решением уравнения (41) (напомним, что уравнение (4) в данном случае фактически определяет распределение зарядов ρ по известному полю $\vec{\mathbf{E}}$). Действительно, уравнение (3) с учетом (42) является тождеством. Уравнение (2)

также становится тождеством после подстановки в его левую часть соотношения (42), в правую – соотношения (43) и изменения порядка дифференцирования по пространственным и временной переменным в любой из его частей. А после подстановки (42) и (43) в уравнение (1) (с учетом того, что $\vec{H} = \vec{B}/\mu$) оно превращается в уравнение (41) (если ε не зависит от времени, что справедливо практически всегда), т.е. \vec{B} и \vec{E} , из (42) и (43) удовлетворяют и уравнению (1) (так как \vec{A} определяется как решение уравнения (41)).

Очевидно, что в случае, когда уравнение (38) справедливо (т.е. коэффициент μ не зависит от времени), оно может быть легко получено из уравнения (41) дифференцированием его по t (и заменой $\partial\vec{A}/\partial t$ на $-\vec{E}$ согласно соотношению (43)), т.е. уравнение (38) фактически является следствием уравнения (41). По своему виду уравнения (38) и (41) практически совпадают и поэтому процедуры их численного решения также одинаковы. Таким образом, можно было бы рассматривать только более общее уравнение (41), но в некоторых случаях уравнение (38) оказывается более удобным.

Например, если исследуются напряжённости \vec{E} электрического поля или производные по времени компонент индукции \vec{B} магнитного поля, то в этом случае при использовании уравнения (38) нет необходимости выполнять дифференцирование по времени полученного численного решения.

Обратим внимание ещё и на то, что вектор-потенциал \vec{A} , удовлетворяющий уравнению (41), так же, как и напряжённость электрического поля \vec{E} , может быть разрывен (например, на границах разрыва коэффициента σ или ε , т.е. на границах сред с различной проводимостью или диэлектрической проницаемостью). Причиной этого является связь \vec{A} и \vec{E} в виде соотношения (43) (ниже будет показано, что при другом способе определения вектор-потенциала \vec{A} он может быть непрерывным во всей области определения независимо от разрывности коэффициента σ).

Отметим также, что модель (41) в принципе может описывать и стационарные (не изменяющиеся во времени) поля, о чём уже говорилось в разделе 1.1.3 (см. соотношение (14)). Однако, уравнение (14) имеет не единственное решение, т.е. вектор \vec{A} определяется с точностью до градиента некоторой скалярной функции (см. раздел 1.1.3.2 на с. 12). Это может создавать дополнительные трудности при использовании модели (41) для расчёта электромагнитных полей, *выходящих на стационарный режим*. Модель же (38) в принципе непригодна для расчётов

полей, выходящих на стационарный режим, поскольку при $\partial \vec{E}/\partial t \rightarrow 0$ она позволяет определить неизвестную функцию \vec{E} лишь с точностью до градиента некоторой скалярной функции (в то время как в стационарном режиме, как было показано в разделах 1.1.1 и 1.1.2, напряжённость электрического поля \vec{E} определяется именно в виде градиента скалярной функции V).

Похожая ситуация возникает и в случае, когда в нестационарном электромагнитном поле токи смещения являются пренебрежимо малыми, т.е. можно считать, что $\partial(\epsilon \vec{E})/\partial t = 0$. Тогда уравнение (41) принимает вид

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}^{\text{ср}}. \quad (44)$$

Как правило, проводимость σ не во всей расчётной области отлична от нуля (например, во всех практических задачах $\sigma = 0$ в воздухе и любых других изоляторах). Тогда в этих подобластях (где коэффициент σ равен нулю) потенциал \vec{A} также не может быть однозначно определён, что создаёт дополнительные трудности при применении МКЭ.

1.1.5. МОДЕЛЬ В ВИДЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Рассмотрим довольно часто встречающуюся на практике ситуацию, когда токами смещения можно пренебречь, коэффициент магнитной проницаемости $\mu = \mu_0$ (μ_0 – магнитная проницаемость вакуума), а проводимость σ равна нулю в некоторых подобластях расчётной области. Исключение токов смещения из уравнения (1) приводит его к виду

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}^{\text{ср}} + \sigma \vec{E}. \quad (45)$$

При $\mu = \mu_0$ соотношение (45) принимает вид

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{J}^{\text{ср}} + \sigma \vec{E}. \quad (46)$$

Введение вектор-потенциала \vec{A} и скалярного потенциала V с помощью соотношений

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (47)$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \text{grad } V \quad (48)$$

позволяет преобразовать систему (46), (2), (3) к виду

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta \vec{\mathbf{A}} + \sigma \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} + \text{grad } V \right) = \vec{\mathbf{J}}^{\text{ст}}, \quad (49)$$

$$-\text{div}(\sigma \text{grad } V) - \text{div} \left(\sigma \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \right) = -\text{div} \vec{\mathbf{J}}^{\text{ст}}, \quad (50)$$

где под $\Delta \vec{\mathbf{A}}$ понимается вектор функция, в общем случае (т.е. не только в декартовой, но и в цилиндрической и сферической системах координат) определяемая соотношением

$$\Delta \vec{\mathbf{A}} = \text{grad}(\text{div} \vec{\mathbf{A}}) - \text{rot}(\text{rot} \vec{\mathbf{A}}). \quad (51)$$

Отметим, что в декартовой системе координат векторное уравнение (49) фактически является системой трёх скалярных уравнений:

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_x + \sigma \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = J_x^{\text{ст}} \quad (52)$$

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_y + \sigma \left(\frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = J_y^{\text{ст}} \quad (53)$$

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_z + \sigma \left(\frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) = J_z^{\text{ст}} \quad (54)$$

Система (49)–(50) (или (50)–(54)) решается, как правило, в области большого объёма, на внешней границе S которой напряжённости электрического и магнитного поля должны быть очень малы. Соответственно и краевые условия для скалярного потенциала V и компонент вектор-потенциала $\vec{\mathbf{A}}$ нужно задавать таким образом, чтобы выполнялись условия $\text{rot} \vec{\mathbf{A}} \approx \mathbf{0}$ и $\text{grad} V \approx \mathbf{0}$. Этого можно добиться, если задать в качестве краевых условий для $\vec{\mathbf{A}}$ и V однородные краевые условия первого рода:

$$\vec{\mathbf{A}}|_S = \mathbf{0}, \quad V|_S = 0. \quad (55)$$

Тогда решение $(\vec{\mathbf{A}}, V)$ системы (49)–(50) обладает следующим свойством: при удалении границы S от подобластей с ненулевыми сторонними токами простран-

ственные производные функции V и компонент вектор-функции $\vec{\mathbf{A}}$ на S довольно быстро стремятся к нулю. Поэтому границу S можно удалить настолько, что пространственные производные V и компонент $\vec{\mathbf{A}}$ на S станут сколь угодно малыми. Это обеспечит выполнение не только условий $\text{rot} \vec{\mathbf{A}} \approx \mathbf{0}$ и $\text{grad} V \approx \mathbf{0}$, но и условия $\text{div} \vec{\mathbf{A}} \approx 0$.

Покажем теперь, что если потенциалы $(\vec{\mathbf{A}}, V)$ удовлетворяют системе уравнений (49)–(50) в области Ω , на внешней границе которой выполняется условие

$$(\text{div} \vec{\mathbf{A}})|_S = 0, \quad (56)$$

то определяемые через потенциалы $(\vec{\mathbf{A}}, V)$ с помощью соотношений (47) и (48) вектор-функции $\vec{\mathbf{B}}$ и $\vec{\mathbf{E}}$ внутри Ω удовлетворяют системе уравнений (46), (2), (3).

Легко убедиться, что справедливость уравнений (2) и (3) сразу же следует из соотношений (47) и (48) (как и из соотношений (42) и (43), обоснование этого приведено выше в разделе 1.1.4). Остается показать справедливость соотношения (46).

Для этого применим к левой и правой частям уравнения (49) операцию div :

$$-\frac{1}{\mu_0} \text{div}(\Delta \vec{\mathbf{A}}) + \text{div} \left(\sigma \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} + \text{grad} V \right) \right) = \text{div} \vec{\mathbf{J}}^{\text{ст}}. \quad (57)$$

Учитывая соотношение (50) и соотношения (51) и (17), определяющие воздействие оператора Δ на вектор-функцию и скалярную функцию соответственно, получим

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta(\text{div} \vec{\mathbf{A}}) = 0. \quad (58)$$

В результате мы получили, что функция $W = \text{div} \vec{\mathbf{A}}$ (где $\vec{\mathbf{A}}$ удовлетворяет системе (49)–(50)) является решением первой краевой задачи для уравнения Лапласа (58) с однородным краевым условием (56). Отсюда следует, что во всей области Ω выполняется условие

$$\text{div} \vec{\mathbf{A}} = 0. \quad (59)$$

Тогда с учётом соотношений (51) и (59), получим, что потенциалы $(\vec{\mathbf{A}}, V)$, удовлетворяющие системе уравнений (49)–(50), удовлетворяют и уравнению

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) + \sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} V \right) = \vec{J}^{\text{ст}}. \quad (60)$$

Заменяя в (60) $\operatorname{rot} \vec{A}$ на \vec{B} (см. (47)) и $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} V$ на $-\vec{E}$ (см. (48)), убеждаемся в справедливости и уравнения (46).

Использование системы уравнений (49)–(50) при выполнении условий её применимости (т.е. несущественности токов смещения и постоянстве коэффициента магнитной проницаемости) оказывается довольно выгодным при конечно-элементном моделировании нестационарных электромагнитных полей в расчетных областях, содержащих значительные подобласти с $\sigma = 0$. Уравнения системы (49)–(50) естественным образом учитывают разрывность коэффициента σ (при сохранении непрерывности вектор-потенциала \vec{A} во всей расчётной области Ω), а их конечноэлементная аппроксимация приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с достаточно сильно разреженной и хорошо обусловленной матрицей.

Однако при необходимости учёта токов смещения или включении в расчётную область объектов с $\mu \neq \mu_0$ система (49)–(50) не может быть использована для описания электромагнитного поля. Определённые трудности её использования могут возникать и в случае необходимости расчёта электромагнитных процессов в средах, содержащих объекты с проводимостями, которые на несколько порядков превышают проводимость вмещающей среды. Для решения задач с отдельными проводящими объектами, окруженными непроводящей средой, а также с объектами, магнитная проницаемость которых отличается от магнитной проницаемости вакуума, могут быть использованы подходы, основанные на другом представлении характеристик поля через скалярный и векторный потенциалы.

1.1.6. МОДЕЛЬ С СОВМЕСТНЫМ ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛА И СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Существует довольно большой класс нестационарных задач электромагнетизма, в которых электромагнитное поле формируется в основном за счёт вихревых токов, циркулирующих в отдельных объектах с высокой проводимостью, окруженных непроводящей или очень слабопроводящей средой. Это, например, задачи моделирования нестационарных электромагнитных полей в средах с металлическими объектами и в высокоомных средах (например, в вечной мерзлоте) с

рудными месторождениями. При этом металлы и руды могут иметь магнитную проницаемость среды, существенно отличающуюся от магнитной проницаемости вакуума (т.е. могут быть ферромагнетиками). В данном разделе рассматривается модель, позволяющая достаточно эффективно решать задачи такого типа с использованием метода конечных элементов.

Будем считать, что среда, в которой изучается электромагнитное поле, состоит из двух (возможно, неодносвязных) подобластей Ω^σ и Ω^0 , причём в подобласти Ω^σ удельная проводимость σ отлична от нуля, а в подобласти Ω^0 проводимость равна нулю. Магнитная проницаемость μ в обеих подобластях может быть произвольной функцией координат (в том числе и зависеть от напряжённости магнитного поля). Будем также считать, что в подобласти Ω^0 отсутствуют сторонние токи. Если же в задаче есть изолированные обмотки с заданными (сторонними) токами, то такие обмотки не входят в расчётную область и их влияние учитывается специальным образом.

Таким образом, в подобласти Ω^0 для напряжённости и индукции магнитного поля должны выполняться уравнения

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}}^0 = \mathbf{0}, \quad (61)$$

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}}^0 = 0. \quad (62)$$

Уравнение же (2) можно не принимать во внимание, поскольку оно служит для определения напряжённости $\vec{\mathbf{E}}$ электрического поля (через изменение магнитного поля во времени), а для задач рассматриваемого типа значения $\vec{\mathbf{E}}$ в подобласти Ω^0 , как правило, вычислять не нужно.

Поэтому в подобласти Ω^0 (как и в задачах магнитостатики) напряжённость магнитного поля $\vec{\mathbf{H}}^0$ можно представить в виде

$$\vec{\mathbf{H}}^0 = -\operatorname{grad} U, \quad (63)$$

где U – полный скалярный магнитный потенциал. Соответственно индукция магнитного поля $\vec{\mathbf{B}}^0$ в подобласти Ω^0 представляется в виде

$$\vec{\mathbf{B}}^0 = -\mu \operatorname{grad} U. \quad (64)$$

Очевидно, что соотношение (63) автоматически обеспечивает выполнение уравнения (61) (так как оно превращает это уравнение в тождество $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) \equiv \mathbf{0}$). Поэтому в подобласти Ω^0 нам остаётся добиться выполнения

уравнения (62), т.е. нужно, чтобы скалярный потенциал U в Ω^0 удовлетворял уравнению

$$-\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} U) = 0. \quad (65)$$

В подобласти Ω^σ индукцию магнитного поля \vec{B}^σ представим через вектор-потенциал \vec{A} с помощью соотношения

$$\vec{B}^\sigma = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (66)$$

Полагая, что напряжённость электрического поля \vec{E}^σ в подобласти Ω^σ определяется через вектор-потенциал \vec{A} с помощью соотношения

$$\vec{E}^\sigma = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (67)$$

убеждаемся, что при таком представлении \vec{B} и \vec{E} в Ω^σ автоматически выполняются уравнения (2) и (3) из системы уравнений Максвелла. Уравнение же (45) (полученное из уравнения (1) при пренебрежимо малых токах смещения) с учетом соотношений (66) и (67) преобразуется к виду:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}^{\text{ст}}. \quad (68)$$

Таким образом, в подобласти Ω^0 с нулевой проводимостью индукция магнитного поля \vec{B}^0 определяется через скалярный потенциал U и магнитное поле описывается уравнением (65), а в подобласти Ω^σ с проводимостью σ , отличной от нуля, индукция \vec{B}^σ определяется через вектор-потенциал \vec{A} и электромагнитное поле описывается уравнением (68). Чтобы индукция \vec{B} , определяемая соотношением

$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{B}^0 & \text{в } \Omega^0, \\ \vec{B}^\sigma & \text{в } \Omega^\sigma, \end{cases} \quad (69)$$

удовлетворяла системе (45), (2), (3) во всей расчетной области $\Omega = \Omega^0 \cup \Omega^\sigma$, на границе S^\cap между подобластями Ω^0 и Ω^σ должны выполняться следующие соотношения (обеспечивающие непрерывность нормальной составляющей \vec{B} и тангенциальных составляющих \vec{H}):

$$\vec{\mathbf{B}}_n^0 = \vec{\mathbf{B}}_n^\sigma, \quad (70)$$

$$\vec{\mathbf{H}}_\tau^0 = \vec{\mathbf{H}}_\tau^\sigma, \quad (71)$$

где $\vec{\mathbf{n}}$ – любая (например, внешняя по отношению к Ω_σ) нормаль к рассматриваемой границе S^\cap , $\vec{\tau}$ – произвольный касательный к границе S^\cap (т.е. ортогональный к её нормали $\vec{\mathbf{n}}$) вектор.

Особенностью рассмотренной модели является то, что во многих случаях для сохранения её корректности требуется либо вводить поверхности разрыва скалярного магнитного потенциала внутри Ω^0 , либо изменять способ разделения расчётной области на подобласти Ω^0 и Ω^σ . Это необходимо делать в случае, когда внутри Ω^0 можно провести такой замкнутый контур L , что интеграл от всех токов, пересекающих натянутую на этот контур поверхность Γ_L , не равен нулю.

Простейший пример такой ситуации приведён на рис. 1. Здесь по полому цилиндру с ненулевой проводимостью циркулирует ток, и поэтому мы будем считать этот цилиндр подобластью Ω^σ . Вне этого цилиндра (включая его полость) проводимость равна нулю и токов нет, и поэтому, казалось бы, везде вне полого цилиндра (включая полость) можно определить поле $\vec{\mathbf{H}}$ в виде градиента скалярного потенциала U , считая это пространство подобластью Ω^0 . Однако получить правильные значения характеристик электромагнитного поля по такой модели нельзя.

Действительно, если мы проинтегрируем левую и правую части уравнения (45) по поверхности Γ_L , натянутой на контур L , и воспользуемся формулой Стокса $\int_{\Gamma_L} \text{rot } \vec{\mathbf{H}} d\vec{\mathbf{S}} = \oint_L \vec{\mathbf{H}} d\vec{\mathbf{l}}$, то получим

$$\oint_L \vec{\mathbf{H}} d\vec{\mathbf{l}} = \int_{\Gamma_L} (\vec{\mathbf{J}}^{\text{ст}} + \sigma \vec{\mathbf{E}}) d\vec{\mathbf{S}}. \quad (72)$$

Учитывая, что L полностью лежит в подобласти Ω^0 и $\vec{\mathbf{H}}$ в Ω^0 представляется в виде $-\text{grad } U$ (см.(63)), получаем, что

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = -\oint_L \text{grad} U d\vec{l} \equiv 0.$$

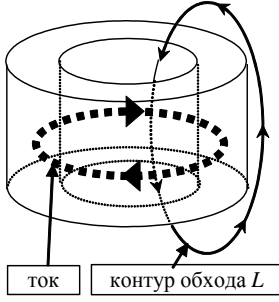


Рис. 1. Пример
обхода тока

Поскольку контур L выбирался так, чтобы правая часть (72) (т.е. сумма протекающих токов) была ненулевой, фактически мы получили, что нарушена справедливость уравнения (45). Нетрудно убедиться, что основной причиной, приводящей к нарушению интегрального эквивалента дифференциального уравнения (45), является не представление индукции магнитного поля в непроводящей подобласти Ω^0 с помощью соотношения (64), а только взаиморасположение подобластей Ω^σ и Ω^0 .

Проанализируем возможные пути разрешения связанных с этим проблем. Одним из способов устранения возможности обхода ненулевого тока по контуру, целиком лежащему в Ω^0 , является введение внутри Ω^0 поверхности S^p разрыва скалярного магнитного потенциала. Эта поверхность должна быть построена так, чтобы все замкнутые контуры L , по которым можно обойти ненулевой ток, пересекали её нечётное число раз.

Будем считать, что по некоторой обмотке течёт ненулевой суммарный ток I ($I = \int_{\Gamma_L} \vec{J}^{\text{ct}} d\vec{S}$, Γ_L – любая поверхность, натянутая на любой из контуров L , окружающих обмотку). В этом случае во всех точках поверхности S^p нужно задать скачок скалярного потенциала, равный I , т.е. значение $U|_{S^p_-}$ функции U с одной стороны от поверхности S^p должно отличаться от значения $U|_{S^p_+}$ функции U с другой стороны S^p на величину I :

$$U|_{S^p_-} = U|_{S^p_+} + I. \quad (74)$$

Кроме того, наложим на U дополнительное ограничение:

$$\mu^- \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{S^p_-} = \mu^+ \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{S^p_+}, \quad (75)$$

где $\frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{S^p_-}$ и $\frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{S^p_+}$ – значения нормальных производных U с разных сторон поверхности S^p (\vec{n} – нормаль к S^p), а μ^+ и μ^- – значения коэффициента μ с разных

сторон поверхности S^p . При этом будем считать, что нормальная составляющая \vec{H} на разных сторонах поверхности S^p определяется как $\frac{\partial U}{\partial n}\Big|_{S^p_-}$ или $\frac{\partial U}{\partial n}\Big|_{S^p_+}$ соответственно.

Выполнение условия (75) обеспечивает непрерывность нормальных составляющих индукции \vec{B} на S^p (непрерывность касательных составляющих \vec{H} на S^p сразу следует из (74) с учётом того, что $I = \text{const}$).

В результате циркуляция \vec{H} по контуру L , пересекающему поверхность S^p , должна вычисляться следующим образом:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = - \int_{q_-}^{q_+} \text{grad} U d\vec{l} = - \left(U|_{S^p_+} - U|_{S^p_-} \right) = I, \quad (76)$$

где q – точка пересечения контуром L поверхности S^p . Таким образом, уравнение (72) (и, следовательно, (45)) оказывается справедливым.

Более сложной является ситуация, когда ток, обходимый по контуру $L \subset \Omega^0$, не является сторонним, т.е. должен быть вычислен в ходе решения задачи. В этом случае для предотвращения возможности обхода ненулевых токов $\int_{\Gamma_L} \sigma \vec{E} d\vec{S}$ (Γ_L – поверхность, натянутая на L) в подобласть Ω^σ следует включить

часть расчётной области, в которой коэффициент σ равен нулю, так, чтобы все контуры L , по которым можно обойти ненулевой ток, пересекали подобласть Ω^σ . Заметим, что в этом случае в той части подобласти Ω^σ , где $\sigma = 0$, решение \vec{A} уравнения (68) перестаёт быть единственным, что заметно усложняет численный анализ электромагнитного поля с использованием рассмотренной в данном разделе модели. Тем не менее разработанные на основе именно этой модели в последнее время вычислительные схемы МКЭ являются наиболее эффективными для численного анализа электромагнитных полей в задачах с существенным влиянием вихревых токов (и при пренебрежимо малых токах смещения).

1.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ, ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

При построении математической модели, описывающей температурное поле $T(x, y, z)$, вводится понятие теплового потока $\vec{Q}(x, y, z)$

$$\vec{Q} = -\lambda \text{grad } T,$$

где λ – коэффициент теплопроводности. Физический смысл λ заключается в следующем: при одном и том же ΔT (изменении температуры) чем больше λ , тем больше тепловой поток.

Из закона сохранения

$$\text{div} \vec{Q} = f, \quad (77)$$

где f – плотность источников, получаем уравнение

$$-\text{div} \lambda \text{grad } T = f, \quad (78)$$

описывающее стационарное температурное поле в некоторой области Ω с границей $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, на которой могут быть заданы краевые условия

$$T|_{S_1} = T_g, \quad (79)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{S_2} = \theta, \quad (80)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{S_3} + \beta (T|_{S_3} - T_\beta) = 0. \quad (81)$$

При этом краевое условие первого рода (79) соответствует заданию на S_1 температуры T_g , краевое условие второго рода (80) – заданию на S_2 плотности теплового потока, равного θ , а краевое условие третьего рода (81) – заданию на S_3 плотности теплового потока, пропорциональной разности температуры T на границе S_3 и температуры T_β окружающей среды (коэффициент пропорциональности $\beta > 0$ в этом случае называется *коэффициентом теплоотдачи*).

Если принять область Ω за поперечное сечение канала, λ – за коэффициент вязкости, u – за скорость течения жидкости вдоль оси канала, а f – за плотность силы, то при однородном краевом условии $u|_S = 0$ и отсутствии вторичных те-

чений профиль продольной скорости течения вязкой жидкости в канале с постоянным поперечным сечением может быть найден из решения уравнения

$$-\operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} u = f, \quad (82)$$

с краевым условием $u|_S = 0$, которое задаёт условие прилипания частиц жидкости к стенкам канала.

Уравнение (82) с краевыми условиями первого и второго рода, характеризующими проницаемые и непроницаемые участки границы области Ω , описывает процесс фильтрации, если u – напор, а λ – коэффициент фильтрации.

Краевая задача для уравнения

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0 \quad (83)$$

может быть использована для описания установившегося безвихревого течения невязкой несжимаемой жидкости или газа, причём u в этом случае является потенциалом вектора скорости \vec{V} (т.е. $\vec{V} = -\operatorname{grad} u$).

Используя (77), введем понятие количества тепла, выделяемого в области Ω

$$\int_{\Omega} f d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div} Q d\Omega = \int_S Q_n dS. \quad (84)$$

Если перейти к рассмотрению процесса, описываемого уравнением (78), за промежуток времени Δt , то получим

$$\Delta t (-\operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T) = \Delta t f^s + f^t, \quad (85)$$

где f^s – сторонние источники тепла, а f^t – запасенная энергия, величина которой зависит от соответствующих характеристик вещества: от плотности ρ и коэффициента теплоемкости c_p , физический смысл которого заключается в следующем:

c_p – количество тепла, необходимое для нагрева одного килограмма вещества на один градус. При этом запасенная энергия определяется соотношением

$$f^t = \rho c_p \Delta T. \quad (86)$$

Для получения модели нестационарного теплопереноса разделим (85) на Δt и устремим его к нулю. В результате из (85) и (86) получим

$$-\operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T + \rho c_p \frac{dT}{dt} = f^s. \quad (87)$$

Если среда движется, то координаты x , y и z зависят от t , следовательно,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} T, \quad (88)$$

где \vec{v} – вектор скорости.

В результате уравнение (87) примет вид

$$-\text{div} \lambda \text{grad} T + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \vec{v} \text{grad} T = f^s. \quad (89)$$

Чтобы получить уравнения для скорости движущейся жидкости или газа, воспользуемся законом Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (90)$$

где \vec{F} – сила, m – масса, \vec{a} – ускорение, и разделив обе части (90) на объем, перейдем к выражению для плотности

$$\vec{F}_p = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right), \quad (91)$$

где, очевидно, v_x , v_y и v_z – компоненты вектора скорости.

Векторное уравнение (91) можно записать покомпонентно в виде

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \vec{v} \text{grad} v_x = F_{p_x}, \quad (92)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho \vec{v} \text{grad} v_y = F_{p_y}, \quad (93)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho \vec{v} \text{grad} v_z = F_{p_z}. \quad (94)$$

Плотность силы $\vec{F}_p = (F_{p_x}, F_{p_y}, F_{p_z})$ в общем случае определяется в виде

$$F_{p_x} = F_{p_x}^s - \frac{\partial P}{\partial x} + \text{div}(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}), \quad (95)$$

$$F_{p_y} = F_{p_y}^s - \frac{\partial P}{\partial y} + \text{div}(\tau_{xy}, \sigma_y, \tau_{yz}), \quad (96)$$

$$F_{p_z} = F_{p_z}^s - \frac{\partial P}{\partial z} + \text{div}(\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z), \quad (97)$$

где P – давление, $\vec{F}_p^s = (F_{p_x}^s, F_{p_y}^s, F_{p_z}^s)$ – плотность сторонних сил, например, сил тяжести (в этом случае $\vec{F}_p^s = \rho \vec{g}$), σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} – напряжения, опреде-

ляемые через первые производные компонент вектора скорости по пространственным координатам.

Из (92)-(97) получаем

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \vec{v} \text{grad} v_x - \text{div}(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}) = F_{p_x}^s - \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (98)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho \vec{v} \text{grad} v_y - \text{div}(\tau_{xy}, \sigma_y, \tau_{yz}) = F_{p_y}^s - \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (99)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho \vec{v} \text{grad} v_z - \text{div}(\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z) = F_{p_z}^s - \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (100)$$

Доопределяет систему уравнений (89), (98)-(100) (где неизвестными являются температура, давление и три компоненты скорости) уравнение сохранения массы, которое может быть записано либо в интегральном виде

$$\int_S \rho v_n dS = D,$$

где D – источники массы, либо в дифференциальном виде

$$\text{div} \rho \vec{v} = d, \quad (101)$$

где d – плотность источников массы. На практике, чаще всего, $d = 0$, за исключением некоторых случаев, например, когда плотность жидкости или газа изменяется во времени (тогда $d = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$) или когда дополнительная масса зарождается (исчезает) в результате химической реакции.

1.3. АДЕКВАТНОСТЬ МОДЕЛЕЙ. ВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ И ПРИНЦИПЫ ТЕСТИРОВАНИЯ

Математическая модель считается адекватной, если получаемые при ее использовании характеристики моделируемых физических процессов в необходимой степени отражают характеристики реальных физических процессов.

На первый взгляд, самым очевидным способом подтверждения адекватности математической модели является совпадение получаемых при ее использовании данных с экспериментальными данными. Однако необходимо учитывать тот факт, что в экспериментальных данных практически всегда присутствуют погрешности измерений, а также погрешности исходных данных (например, информация о характеристиках материалов объектов, присутствующих в эксперименте и т.д.).

Поэтому, для верификации математической модели и тестирования соответствующего программного обеспечения, построенного на основе этих моделей, помимо экспериментальных данных может быть использовано следующее:

- использование аналитических решений, которые могут быть получены для некоторых специальных случаев;
- построение тестовых задач меньшей размерности;
- построение двойственных задач;
- контроль выполнения основных законов сохранения.

Примером использования аналитических решений может быть задача о нахождении электрического поля, которое создаётся в проводящем полупространстве точечным источником, моделирующим ток, втекающий в это полупространство из расположенной на его поверхности точки. Проводящее полупространство представляет собой однородную по проводимости вмещающую среду, содержащую один или несколько трехмерных объектов с отличающейся (от вмещающей среды) проводимостью. Электрическое поле $\vec{E} = -\text{grad}u$ в этом случае полностью описывается электрическим потенциалом u , удовлетворяющим дифференциальному уравнению

$$-\Delta u = \frac{\rho^P}{\lambda} \delta^P, \quad (102)$$

где λ – электрическая проводимость полупространства, $f^P = \rho^P \delta^P$ – сосредоточенный в точке \mathbf{p} с координатами (x_p, y_p, z_p) источник, ρ^P – величина стекающего из \mathbf{p} тока, Δ – оператор Лапласа.

В этом случае искомая функция u определяется формулой

$$u(x, y, z) = \frac{\rho^P}{2\pi\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x - x^P)^2 + (y - y^P)^2 + (z - z^P)^2}}. \quad (103)$$

Другим примером использования аналитических решений может быть задача о нахождении стационарного магнитного поля, возбуждаемого в однородном по магнитной проницаемости током в бесконечном проводе. В этом случае вектор-потенциал $\vec{A} = (0, 0, A_z(x, y))$ (определяющий магнитное поле в виде $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$) имеет только одну ненулевую компоненту (совпадающую с направлением тока) $A_z = A_z(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (27) и определяемую в однородном пространстве формулой

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \sqrt{(x - x^P)^2 + (y - y^P)^2},$$

где (x^P, y^P) – положение провода.

При тестировании некоторых трехмерных задач очень полезными могут быть осесимметричные задачи. Это задачи, которые определены в области, состоящей из цилиндров, и решения которых не зависят от координаты φ в цилиндрической системе координат $\{r, \varphi, z\}$. Примером может служить задача в расчетной области, изображённой на рис. 2,а.

В этой задаче можно задать значения параметров дифференциального уравнения

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \gamma u = f. \quad (104)$$

в виде

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1 & \text{в } \Omega^1, \\ \lambda_2 & \text{в } \Omega^2, \end{cases} \quad \gamma = \begin{cases} \gamma_1 & \text{в } \Omega^1, \\ \gamma_2 & \text{в } \Omega^2, \end{cases} \quad f = \begin{cases} f_1 & \text{в } \Omega^1, \\ f_2 & \text{в } \Omega^2, \end{cases} \quad (105)$$

и краевые условия

$$u|_{S_1} = u_g, \quad \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_2^1} = \theta_2^1, \quad \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_2^2} = \theta_2^2. \quad (106)$$

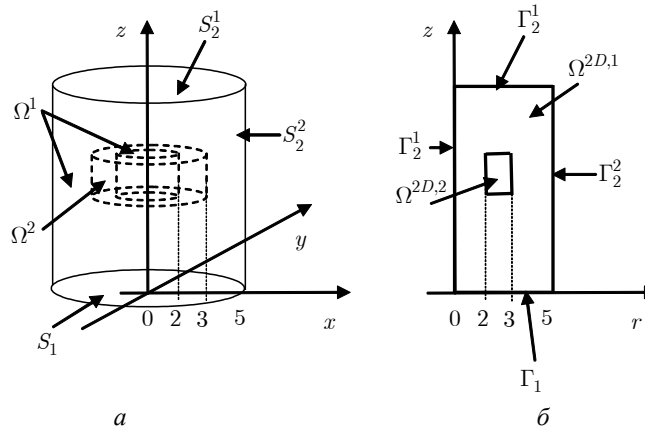


Рис. 2. Расчётные области для тестирования трёхмерных задач

Очевидно, что решение этой задачи может быть найдено в виде двумерной функции $u^{2D}(r, z)$ в расчетной области, изображённой на рис. 2,б. Для этого достаточно решить *двумерную* задачу для уравнения

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial u^{2D}}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial u^{2D}}{\partial z} \right) + \gamma u^{2D} = f \quad (107)$$

с параметрами, определяемыми теми же соотношениями (105) и (106), в которых эти параметры (λ , γ , f , θ и т.д.) фактически являются функциями координат r и z :

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1 \text{ в } \Omega^{2D,1}, \\ \lambda_2 \text{ в } \Omega^{2D,2}, \end{cases} \quad \gamma = \begin{cases} \gamma_1 \text{ в } \Omega^{2D,1}, \\ \gamma_2 \text{ в } \Omega^{2D,2}, \end{cases} \quad f = \begin{cases} f_1 \text{ в } \Omega^{2D,1}, \\ f_2 \text{ в } \Omega^{2D,2}, \end{cases}$$

$$u^{2D} \Big|_{\Gamma_1} = u_g, \quad \lambda \frac{\partial u^{2D}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2^1} = \theta_2^1, \quad \lambda \frac{\partial u^{2D}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2^2} = \theta_2^2, \quad \lambda \frac{\partial u^{2D}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2^0} = 0.$$

Решение этой задачи в декартовой системе координат является трехмерной функцией, и качество полученного в трёхмерной области (см. рис. 2,а) конечно-элементного решения u^h можно оценить путем сравнения с трёхмерной функцией $u^{3D}(x, y, z)$, полученной пересчетом из решения $u^{2D}(r, z)$ осесимметричной задачи (107) с помощью соотношения

$$u^{3D}(x, y, z) = u^{2D}(\sqrt{x^2 + y^2}, z).$$

Такие проверки особенно полезны и важны тогда, когда решаемые трёхмерные задачи в некотором смысле близки к каким-либо осесимметричным задачам.

Для векторных задач существуют довольно много ситуаций (при определённом виде источников поля и коэффициентов уравнений), когда решаемая векторная задача вырождается в скалярную задачу, причём меньшей размерности. Например, трехмерное электромагнитное поле может быть описано с помощью трехмерных функций $A_x = A_x(x, y, z, t)$, $A_y = A_y(x, y, z, t)$, $A_z = A_z(x, y, z, t)$ и $V = V(x, y, z, t)$, удовлетворяющих в расчетной области Ω системе уравнений

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_x + \sigma \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = J_x^{\text{сг}}, \quad (108)$$

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_y + \sigma \left(\frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = J_y^{\text{сг}}, \quad (109)$$

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_z + \sigma \left(\frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) = J_z^{\text{сг}}, \quad (110)$$

$$-\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} V) - \operatorname{div}\left(\sigma \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}\right) = -\operatorname{div} \vec{\mathbf{J}}^{\text{ст}}, \quad (111)$$

а на границе S области Ω – краевым условиям

$$\vec{\mathbf{A}}|_S = \mathbf{0}, \quad V|_S = 0. \quad (112)$$

Будем считать, что электромагнитное поле возбуждается круговым током, а вмещающая среда имеет круговую симметрию. Тогда при условии однородности среды по магнитной проницаемости электромагнитное поле полностью описывается одной компонентой $A_\varphi = A_\varphi(r, z, t)$ вектор-потенциала $\vec{\mathbf{A}}$ (в цилиндрической системе координат), и эта функция $A_\varphi(r, z, t)$ может быть найдена из решения двумерного уравнения:

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_\varphi + \frac{A_\varphi}{\mu_0 r^2} + \sigma \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = J_\varphi. \quad (113)$$

Таким образом, в качестве тестовой задачи может быть выбрана задача нахождения распределения вектор-потенциала в цилиндрической области Ω , состоящей из нескольких подобластей Ω^k с различными значениями в них коэффициента σ (т.е. $\sigma = \sigma_k = \text{const}$ в Ω^k). В одной из подобластей, описывающей кольцо, можно задать $J_\varphi = 1$, а в остальных – отсутствие стороннего тока, (т.е. $J_\varphi = 0$).

Эту же трехмерную задачу можно использовать и для тестирования процедуры, реализующей схему с выделением поля. Математическая модель, определяющая добавочное поле $\vec{\mathbf{E}}^+ = -\partial \vec{\mathbf{A}}^+ / \partial t - \operatorname{grad} V^+$ (и равное разности $\vec{\mathbf{E}}$ и $\vec{\mathbf{E}}^0$) описывается системой уравнений

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_x^+ + \sigma \left(\frac{\partial A_x^+}{\partial t} + \frac{\partial V^+}{\partial x} \right) = J_x^{\text{ст}} - J_x^0 + (\sigma - \sigma^0) E_x^0, \quad (114)$$

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_y^+ + \sigma \left(\frac{\partial A_y^+}{\partial t} + \frac{\partial V^+}{\partial y} \right) = J_y^{\text{ст}} - J_y^0 + (\sigma - \sigma^0) E_y^0, \quad (115)$$

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_z^+ + \sigma \left(\frac{\partial A_z^+}{\partial t} + \frac{\partial V^+}{\partial z} \right) = J_z^{\text{ст}} - J_z^0 + (\sigma - \sigma^0) E_z^0, \quad (116)$$

$$-\operatorname{div}\left(\sigma \operatorname{grad} V^+\right)-\operatorname{div}\left(\sigma \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}^+}{\partial t}\right)=-\operatorname{div}\left(\left(\sigma-\sigma^0\right) \vec{\mathbf{E}}^0\right), \quad (117)$$

где σ^0 и $\vec{\mathbf{J}}^0$ – проводимость среды и вектор сторонних токов, соответствующие полю $\vec{\mathbf{E}}^0$ (для простоты считаем, что $\operatorname{div} \vec{\mathbf{J}}^0 = 0$ и $\operatorname{div} \vec{\mathbf{J}}^{\text{ст}} = 0$), которое, в свою очередь, полностью описывает приближение в виде более простой задачи $\vec{\mathbf{E}}^0 = -\partial \vec{\mathbf{A}}^0 / \partial t - \operatorname{grad} V^0$.

Для тестирования процедуры, реализующей схему с выделением поля, в качестве σ^0 можно взять кусочно-постоянную функцию, совпадающую с σ во всех подобластях Ω^k кроме одной (т.е. $\sigma^0 - \sigma$ будет отлична от нуля только в одной подобласти). Входящий же в правые части уравнений (114)–(117) вектор $\vec{\mathbf{E}}^0$ может быть получен из функции $E_\varphi^0(r, z, t) = -\frac{\partial A_\varphi^0(r, z, t)}{\partial t}$ по стандартным формулам преобразования векторов при переходе из цилиндрической в декартову систему координат:

$$E_x^0(x, y, z, t) = -E_\varphi^0\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z, t\right) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (118)$$

$$E_y^0(x, y, z, t) = E_\varphi^0\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z, t\right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (119)$$

$$E_z^0(x, y, z, t) = 0. \quad (120)$$

Вектор-потенциал $\vec{\mathbf{A}}^+$, являющийся решением задачи на добавочное поле (114)–(117), нужно сравнивать с вектор-потенциалом, полученным после пересчета в декартову систему координат разности решений A_φ^0 (в среде с σ^0) и A_φ (в среде с σ) двух двумерных задач. Пересчет A_φ в $\vec{\mathbf{A}} = (A_x(x, y, z, t), A_y(x, y, z, t), A_z(x, y, z, t))$ (а также и A_φ^0 и $A_\varphi - A_\varphi^0$) выполняется по формулам, аналогичным (118)–(120).

К сожалению, тестовые задачи, основанные на решении уравнения (113), не позволяют проверить правильность аппроксимации членов уравнений (108)–(110), содержащих скалярный потенциал V , а также правильность аппроксимации уравнения (111) и связей между всеми уравнениями системы (108)–(111). Наибо-

лее полное тестирование системы (108)–(111) можно осуществить на основе другой осесимметричной скалярной задачи.

Рассмотрим задачу моделирования электромагнитного поля так называемой вертикальной электрической линии (ВЭЛ) в проводящей среде. Сторонний ток в этой задаче течет вдоль отрезка, параллельного оси z , и вытекает из этого отрезка в проводящую среду с одного его конца, а втекает – с другого. Поле ВЭЛ в осесимметричной среде Ω_φ может быть описано следующим уравнением:

$$-\operatorname{div}\left(\frac{1}{\sigma}\operatorname{grad}H_\varphi\right)+\frac{1}{\sigma r^2}H_\varphi-\frac{H_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\mu\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}=0, \quad (121)$$

$$H_\varphi|_{\Gamma'}=\frac{I}{2\pi r_0}, \quad H_\varphi|_{\Gamma}=0, \quad (122)$$

где I – сторонний ток в ВЭЛ (текущий вдоль оси z в подобласти $r < r_0$, не входящей в расчетную область), r_0 – значение r -координаты левой границы прямоугольника Ω^φ (являющегося расчетной областью для задачи (121)–(122)), Γ' – часть левой границы Ω^φ , соответствующая ВЭЛ, а Γ – остальные границы Ω^φ .

Заметим, что двумерное уравнение (121) содержит член $-\frac{H_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sigma}\right)$, фактически являющийся сосредоточенным на поверхностях $S_{[\sigma]}$ (где σ терпит разрыв) источником с плотностью $\frac{H_\varphi}{r}\left[\frac{1}{\sigma}\right]n_r$, где $\left[\frac{1}{\sigma}\right]$ – скачок $\frac{1}{\sigma}$ на $S_{[\sigma]}$, а n_r – r -компонента вектора единичной нормали к $S_{[\sigma]}$.

Значения компонент напряжённости электрического поля могут быть получены по значениям H_φ с помощью соотношений (следующих из уравнения $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{H}}=\sigma\vec{\mathbf{E}}$):

$$E_r=-\frac{1}{\sigma}\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \quad E_z=\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial r}+\frac{H_\varphi}{r}\right). \quad (123)$$

Если решать эту задачу в декартовой системе координат, то она, естественно, будет описываться системой трёхмерных уравнений (108)–(111), и в решении $(\vec{\mathbf{A}}, V)$ этой системы ненулевыми окажутся все три компоненты вектор-

потенциала \vec{A} и скалярный потенциал V . Таким образом, с помощью рассмотренной задачи для ВЭЛ можно наиболее полно протестировать процедуры решения системы уравнений (108)–(111). При этом сравнивать можно как значения \vec{E} , которые из решения (\vec{A}, V) задачи (108)–(111) можно получить в виде

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } V,$$

а из решения H_φ задачи (121)–(122) с помощью соотношений (123) и пересчета функций $E_r(r, z, t)$ и $E_z(r, z, t)$ в декартову систему координат по формулам:

$$E_x(x, y, z, t) = E_r(\sqrt{x^2 + y^2}, z, t) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (124)$$

$$E_y(x, y, z, t) = E_r(\sqrt{x^2 + y^2}, z, t) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (125)$$

$$E_z(x, y, z, t) = E_z(\sqrt{x^2 + y^2}, z, t), \quad (126)$$

так и значения \vec{H} , которые из решения задачи (108)–(111) можно получить в виде $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{A}$, а из решения $H_\varphi(r, z, t)$ задачи (121)–(122) его пересчётом в ком-

поненты H_x , H_y и H_z вектора \vec{H} по формулам

$$H_x(x, y, z, t) = -H_\varphi(\sqrt{x^2 + y^2}, z, t) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$H_y(x, y, z, t) = H_\varphi(\sqrt{x^2 + y^2}, z, t) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$H_z(x, y, z, t) = 0.$$

Аналогичным образом можно построить и тесты для задачи (114)–(117) на добавочное поле.

Кроме того, задачи меньшей размерности, как правило, могут быть решены с использованием других, например, полуаналитических методов, решения которых также могут быть использованы в качестве эталонных.

Еще одним способом верификации, о котором уже в принципе говорилось выше, является сравнение решений двойственных задач. В качестве примера

можно привести уже рассмотренную выше задачу расчета электромагнитного поля ВЭЛ в осесимметричной среде, но при условии, что ток в проводе является постоянным.

В этом случае напряженность электрического поля, с одной стороны, может быть найдена с помощью соотношений (123), в которых напряженность магнитного поля H_φ ищется из решения краевой задачи

$$-\operatorname{div}\left(\frac{1}{\sigma}\operatorname{grad}H_\varphi\right)+\frac{1}{\sigma r^2}H_\varphi-\frac{H_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sigma}\right)=0, \quad (127)$$

$$H_\varphi|_{\Gamma'}=\frac{I}{2\pi r_0}, \quad H_\varphi|_{\Gamma}=0. \quad (128)$$

С другой стороны, напряженность электрического поля может быть найдена в виде

$$E_r=\frac{\partial V}{\partial r}, \quad E_z=\frac{\partial V}{\partial z}, \quad (129)$$

где скалярный электрический потенциал $V(r, z)$, в свою очередь, может быть найден из решения эллиптической краевой задачи

$$-\operatorname{div}(\sigma\operatorname{grad}V)=\delta^A+\delta^B, \quad V|_{\Gamma_3}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_4}=0. \quad (130)$$

где δ^A и δ^B – положительный и отрицательный источники, описывающие токи, стекающие с электродов А и В, Γ_1 – поверхность, определяемая соотношением $r=r_0$ (r_0 – достаточно малый радиус), Γ_2 – дневная поверхность, Γ_3 – удаленная вертикальная граница, определяемая соотношением $r=R$ (R – достаточно большое число, размер «бака»), Γ_4 – горизонтальная граница, являющаяся либо удаленной, либо границей между средой и непроводящим фундаментом.

Более подробно способы тестирования рассмотрены в учебном пособии [1].

2. ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Под *прямыми задачами* понимают задачи моделирования каких-либо физических полей, процессов или явлений (электромагнитных, акустических, сейсмических, тепловых, гравитационных и т.п.). В прямых задачах требуется найти функцию, описывающую физическое поле или процесс в каждой точке исследуемой области и в каждый момент времени (если поле нестационарное). Для решения прямой задачи задаются

1. область, в которой процесс изучается;
2. уравнение, описывающее данный процесс;
3. условия на границе исследуемой области;
4. начальные условия (если процесс нестационарный).

Примером прямой задачи может служить задача нахождения распределения напряженности стационарного электрического поля, возбуждаемого точечным источником в горизонтально-слоистой среде, в которой слои имеют проводимость σ_i и толщину h_i (i – номер слоя).

Распределение электрического поля в области Ω с границей $S_1 \cup S_2$ описывается эллиптическим уравнением

$$-\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} V) = 0 \quad (131)$$

в цилиндрической системе координат (r, z) с краевыми условиями первого и второго рода

$$V|_{S_1} = 0, \quad (132)$$

$$\sigma \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{S_2} = \theta. \quad (133)$$

Для прямой задачи входными данными являются значения удельной электрической проводимости слоев среды σ_i и их толщины h_i , а также плотность стекающего в среду тока θ , заданная с помощью дельта-функции. Неизвестной величиной является V – скалярный потенциал электрического поля такой, что напряженность электрического поля $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$. Таким образом, в прямой задаче

при известном положении и плотности источника θ и известной толщине h_i и проводимости σ_i слоев необходимо найти распределение потенциала $V(r, z)$, описываемое уравнением (131) с краевыми условиями (132)-(133).

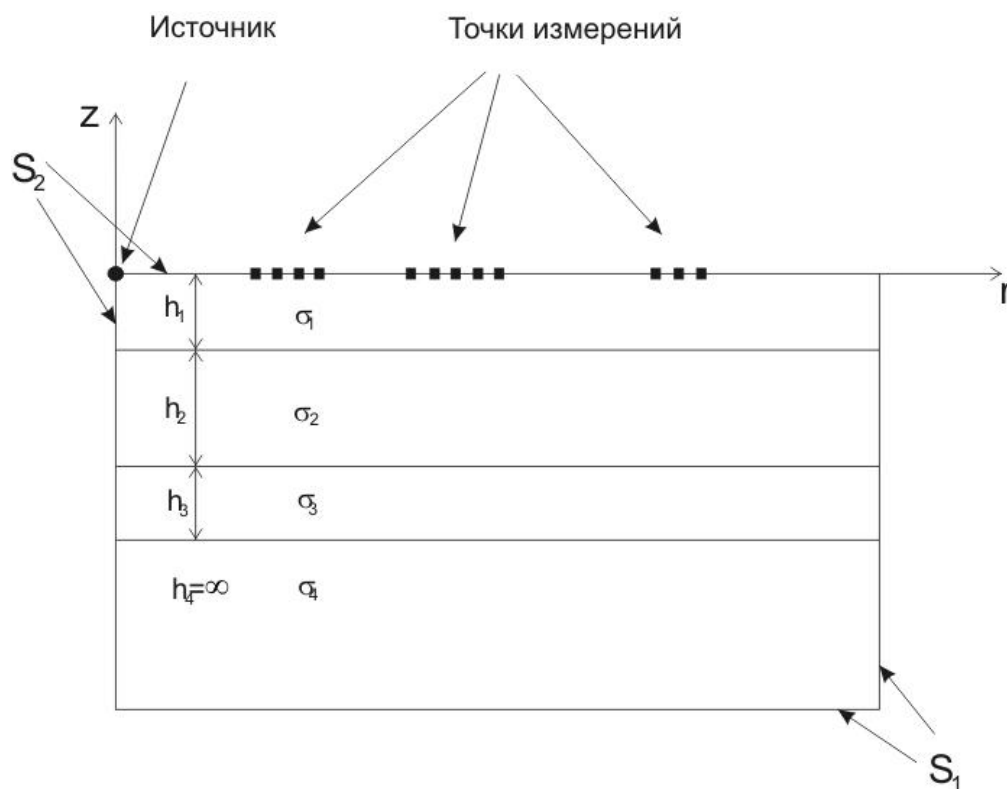


Рисунок 1. Вид расчетной области для задачи распределения электрического поля от точечного источника в горизонтально-слоистой среде

В *обратной задаче* неизвестными являются некоторые параметры, являющиеся исходными для прямой задачи. Эти неизвестные параметры называются *решением обратной задачи*. Для их определения к заданным уравнениям (131)-(133) и известным параметрам (входным данным прямой задачи) добавляется информация в виде измеренных значений поля (являющегося искомым при решении прямой задачи) в некоторых точках. Измеренные значения могут быть некоторой функцией $\varepsilon = \varphi(V)$ поля V , в нашем случае $\vec{E} = -\text{grad } V$.

Например, обратная задача может быть сформулирована так: при заданных значениях \vec{E} (или некоторых компонент $\vec{E} - E_x$ или E_y) в точках измерения и известной толщине h_i и проводимости слоев σ_i найти мощность источника. Или

так: при заданных значениях \vec{E} в точках измерения, заданном источнике и известной толщине h_i слоев найти проводимости слоев σ_i .

К обратным задачам также относятся и другие задачи определения характеристик материалов или физических процессов, например, задача определения теплофизических характеристик материала по результатам измерения температуры в некоторых точках, задача гравиметрии по определению формы и размера аномалии плотности на основании данных измерения силы тяжести на поверхности Земли и т.д.

Вообще говоря, в зависимости от постановки задачи получаемая модель среды (решение обратной задачи) может быть не единственной или не существовать вовсе. Задача для уравнения в частных производных *поставлена корректно*, если решение этой задачи существует, единственно и устойчиво по входным данным. Соответственно, задача называется *некорректно поставленной* или *некорректной*, если задача либо не имеет решения, либо, напротив, имеет много решений, либо процедура нахождения решения неустойчива (т.е. при очень малых ошибках измерений полученное решение может как угодно сильно отличаться от точного). На практике используются специальные методы регуляризации, которые связаны с переходом к некоторой "близкой", но уже корректно поставленной задаче (*условно корректной*).

В работе [2] приведены формальные определения корректности и условной корректности задачи.

Задача

$$Au = f, \quad f \in F, \quad (134)$$

где $A : D_A \subseteq U \rightarrow F$ – оператор с непустой областью определения D_A , действующий из метрического пространства U в аналогичное пространство F , называется *корректной* (по Ж.Адамару), если выполнены условия:

- 1) область значений Q_A оператора A совпадает с F (условие разрешимости);
- 2) равенство $Au_1 = Au_2$ для некоторых $u_1, u_2 \in D_A$ влечет за собой равенство $u_1 = u_2$ (условие единственности);
- 3) обратный оператор A^{-1} непрерывен на F (условие устойчивости).

А.Н.Тихонову принадлежит следующее обобщение классического (по Адамару) понятия корректности, в основе которого лежит фундаментальная идея су-

жения области определения исходного оператора. Задача (134) называется *корректной по Тихонову (условно корректной)*, если:

- 1) априори известно, что решение задачи (134) существует для некоторого класса данных из F и принадлежит априорно заданному множеству $M \subset D_A$;
- 2) решение единственно в классе M ;
- 3) бесконечно малым вариациям правой части (134), не выводящим решение из класса M , соответствуют бесконечно малые вариации решения.

Множество M называют *множеством корректности*.

Понятия линейной и нелинейной обратной задачи будут рассмотрены нами в разделе 4 при рассмотрении алгоритмов построения инверсий.

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛОЖНЫХ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Одними из основных задач, где необходимо применение численных методов решения задач математической физики, являются задачи расчета электромагнитных и/или тепловых полей в технических устройствах (таких как ускорители заряженных частиц, электродвигатели, турбогенераторы и др.), задачи геоэлектроразведки и др.

При этом если при решении полевых задач в технических устройствах неоспоримыми преимуществами обладает метод конечных элементов, то при решении задач геоэлектроразведки вплоть до последнего времени наиболее эффективным считался метод интегральных уравнений. Это связано с тем, что специфика задач геоэлектроразведки такова, что в них источник, как правило, является сосредоточенным, а в измеряемом сигнале, как правило, достаточно большую часть составляет поле вмещающей (одномерной) среды. Кроме того, основными задачами геоэлектроразведки являются обратные задачи, при решении которых (как будет показано далее) необходимо вычисление именно полей влияния различных частей геоэлектрической модели.

В этом курсе мы не будем подробно останавливаться на основах метода конечных элементов, поскольку все теоретические и практические аспекты этого метода рассматриваются нами в курсе «Методы конечно-элементного анализа» и учебном пособии [1].

Здесь мы остановимся лишь на некоторых аспектах применения метода интегральных уравнений (МИУ).

При использовании МИУ вводится понятие функции Грина $G(x, y, z, x', y', z')$, которая определяется как реакция среды в точке с координатами (x, y, z) на точечный источник, расположенный в точке с координатами (x', y', z') . При этом для скалярных полей функция Грина является скаляром, а для векторных полей – тензором, компоненты которого определяются как реакция соответствующей компоненты векторного поля в точке с координатами (x, y, z)

на соответствующим образом сориентированный точечный источник (электрический диполь), расположенный в точке с координатами (x', y', z') .

Рассмотрим уравнение Пуассона в виде

$$-\Delta u = f, \quad (135)$$

где $f(x, y, z)$ – некоторая трехмерная функция, а Δ – оператор Лапласа.

Как уже говорилось, для оператора Лапласа функция Грина имеет достаточно простой вид

$$G(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}, \quad (136)$$

тогда решение уравнения (135) будет иметь вид

$$u(x, y, z) = \int_{\Omega} G(x, y, z, x', y', z') f(x', y', z') dx' dy' dz'. \quad (137)$$

Заметим, что соотношение (137) не является уравнением, и решение уравнения (135) может быть получено простым интегрированием по той части области Ω , где $f \neq 0$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$-\Delta u + \gamma u = f. \quad (138)$$

Решение уравнения (138) в интегральном виде будет иметь вид

$$u(x, y, z) = \int_{\Omega} G(x, y, z, x', y', z') (f(x', y', z') - \gamma u(x', y', z')) dx' dy' dz' \quad (139)$$

и в этом случае полученное соотношение (139) является уже интегральным уравнением. Для его решения весь объем с ненулевым значением γ можно разбить на ячейки, для каждой из них выполнить расчет интегралов и записать соответствующее уравнение. Заметим, что полученная конечноэлементная СЛАУ будет плотной, поскольку значение в каждой из ячеек будет связано с значениями в других ячейках. Таким образом, если подобласть с ненулевым значением γ невелика и получаемая СЛАУ будет иметь небольшой размер, такой метод будет достаточно эффективным. С ростом же области с ненулевым значением γ вычислительные затраты будут довольно резко возрастать.

В качестве следующего примера рассмотрим уже рассмотренную нами выше задачу о нахождении стационарного электрического поля, которое создаётся в

проводящем полупространстве точечным источником, моделирующим ток, втекающий в это полупространство из расположенной на его поверхности точки.

Напряженность такого поля полностью описывается градиентом скалярного потенциала V , который, в свою очередь, может быть найден из решения уравнения

$$-\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} V) = \delta. \quad (140)$$

При этом, как уже говорилось, функция Грина достаточно легко может быть построена для однородного проводящего полупространства с удельной проводимостью σ^0 (функция σ^0 является постоянной во всей расчетной области Ω). Таким образом, чтобы получить соответствующий вид интегрального уравнения, необходимо переписать уравнение (140) так, чтобы в левой части полученного уравнения стоял оператор Лапласа. Нетрудно убедиться, что соответствующее уравнение будет иметь вид

$$-\Delta V^+ = -\frac{1}{\sigma^0} \operatorname{div}((\sigma^0 - \sigma) \operatorname{grad} V), \quad (141)$$

где $V^+ = V - V^0$, а V^0 — описывает поле точечного источника в проводящем полупространстве с удельной проводимостью σ^0 .

Таким образом, соответствующее интегральное уравнение примет вид:

$$V^+ = -\frac{1}{\sigma^0} \int_{\Omega} G \cdot \operatorname{div}((\sigma^0 - \sigma) \operatorname{grad} V) d\Omega. \quad (142)$$

Будем считать, что подобласти Ω^+ , где удельная электрическая проводимость трехмерной задачи σ отлична от σ^0 , лежат строго внутри расчетной области Ω . С учетом этого факта и в результате применения формулы Грина уравнение (142) примет вид:

$$V^+ = \frac{1}{\sigma^0} \int_{\Omega^+} (\sigma^0 - \sigma) \operatorname{grad}(V^0 + V^+) \operatorname{grad} G d\Omega. \quad (143)$$

Рассмотрим еще один пример. Пусть необходимо найти распределение электромагнитного поля, возбуждаемого гармоническим источником в трехмерной среде. В этом случае для описания электромагнитного поля может быть использовано уравнение

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\text{rot} \vec{\mathbf{A}}) + i\omega\sigma \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{J}}, \quad (144)$$

В этом случае функция Грина будет тензором. При этом этот тензор будет диагональным в случае, если функция Грина будет строиться для оператора $\frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\text{rot} \bullet)$, и в общем случае не диагональным, если функция Грина будет

строиться для оператора $\frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\text{rot} \bullet) + i\omega\sigma^0 \bullet$, где σ^0 – проводимость одномер-

ной среды. В этом случае решение трехмерной задачи (144) будет иметь вид

$$\vec{\mathbf{A}}^+ = \int_{\Omega} \mathbf{G} \cdot i\omega(\sigma^0 - \sigma) \vec{\mathbf{A}} d\Omega. \quad (145)$$

Если $\sigma^0 = 0$, то компоненты диагонального тензора Грина могут быть найдены по простым формулам (см. (25)), в противном же случае компоненты тензора вычисляются более сложным образом (соответствующие вычислительные процедуры можно найти в специальной литературе).

Основным достоинством МИУ является естественное разделение искомого поля на нормальную и аномальную составляющие, что позволяет находить поле влияние небольших трехмерных объектов (аномальную составляющую) с очень высокой точностью, особенно в случаях, когда это аномальное поле мало по сравнению с полем вмещающей среды. В то же время МИУ, очень эффективный для моделирования поля влияния локальных трехмерных аномалий, с ростом аномальной области (а это характерно для большинства практических задач) резко теряет свои преимущества. Это связано с тем, что (как уже говорилось выше) аппроксимация задачи по методу интегральных уравнений приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с плотной матрицей, и с ростом аномальной области размерность этой СЛАУ с плотной матрицей быстро увеличивается. Поэтому основной проблемой становится поиск эффективного метода решения такого рода СЛАУ.

Еще одним существенным ограничением МИУ является то, что реализующие его вычислительные схемы эффективны, в основном, в частотной области. Расчет же нестационарных процессов, являющихся основой большинства современных технологий геоэлектроразведки, при получении решения задачи переводом из частотной области во временную будет очень вычислительно затратным,

поскольку в этом случае потребуется решение довольно большого числа трехмерных задач на различных частотах.

Таким образом, с переходом во временную область и, как уже говорилось, с ростом в геоэлектрической модели числа трехмерных неоднородностей (что, необходимо для описания реальных сред) МИУ начинает существенно уступать по вычислительной эффективности МКЭ, который основан на аппроксимациях дифференциальных уравнений в частных производных. Основным преимуществом МКЭ перед МИУ является разреженность матриц систем уравнений, получаемых в результате аппроксимаций соответствующих трехмерных задач. Но вместе с тем МКЭ требует включения в расчетную область помимо самих трехмерных объектов довольно большого пространства вокруг них, и при этом для достижения хорошей точности необходимы достаточно подробные сетки, причем мелкие ячейки нужны не только в 3D-объектах, но и в окружающем их пространстве, особенно вблизи источников поля. В результате, при решении задач с контролируемыми источниками, если 3D-объекты в них дают относительно слабые отклики, МКЭ в классических постановках требует довольно высоких (по сравнению с МИУ) вычислительных затрат на получение решения с приемлемой точностью.

Существенного повышения вычислительной эффективности МКЭ удалось добиться путем использования модификации МКЭ с включением в него возможности выделения поля простой структуры (что является стандартным для МИУ и не использовалось в МКЭ) – так называемого нормального поля или поля вмещающей среды, что позволило без снижения точности численного решения использовать достаточно грубые дискретизации по пространству и, соответственно, существенно расширило возможности МКЭ при решении трехмерных задач геоэлектрики.

Ниже приведем основные математические модели с выделением поля, которые могут быть использованы для исследования электромагнитных полей в задачах геоэлектроразведки при использовании МКЭ [3].

Математическая модель для расчета трехмерных составляющих нестационарных геоэлектромагнитных полей при использовании технологии выделения поля является одной и той же для всех типов контролируемых источников. Для векторного МКЭ эта модель имеет вид

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{\mathbf{A}}^a\right)+\sigma\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}^a}{\partial t}=\left(\sigma-\sigma^n\right)\vec{\mathbf{E}}^n+\operatorname{rot}\left[\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu}\right)\operatorname{rot}\vec{\mathbf{A}}^n\right], \quad (146)$$

а для скалярного

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_x^a + \sigma \left(\frac{\partial A_x^a}{\partial t} + \frac{\partial V^a}{\partial x} \right) = (\sigma - \sigma^n) E_x^n, \quad (147)$$

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_y^a + \sigma \left(\frac{\partial A_y^a}{\partial t} + \frac{\partial V^a}{\partial y} \right) = (\sigma - \sigma^n) E_y^n, \quad (148)$$

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_z^a + \sigma \left(\frac{\partial A_z^a}{\partial t} + \frac{\partial V^a}{\partial z} \right) = (\sigma - \sigma^n) E_z^n, \quad (149)$$

$$-\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} V^a) - \operatorname{div} \left(\sigma \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}^a}{\partial t} \right) = -\operatorname{div}((\sigma - \sigma^n) \vec{\mathbf{E}}^n), \quad (150)$$

где $\vec{\mathbf{A}}^a = (A_x^a, A_y^a, A_z^a)$ – вектор-потенциал и V^a – скалярный электрический потенциал аномального поля (определяемого трехмерными неоднородностями), μ и μ_0 – магнитная проницаемость среды и вакуума, σ^n – проводимость вмещающей горизонтально-слоистой среды, $\vec{\mathbf{E}}^n$ – вектор напряженности электрического поля в горизонтально-слоистой среде (нормальное поле), а функция σ характеризует проводимость трехмерной среды. При использовании модели для векторного МКЭ аномальная составляющая напряженности электрического поля определяется в виде $\vec{\mathbf{E}}^a = -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}^a}{\partial t}$, а для скалярного – в виде

$$\vec{\mathbf{E}}^a = -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}^a}{\partial t} - \operatorname{grad} V^a.$$

Для нахождения нормальных составляющих электромагнитных полей используются следующие математические модели.

Электромагнитное нестационарное поле в осесимметричной среде, вызванное круговой генераторной петлей с током, находящейся в плоскости $z = \text{const}$, полностью описывается единственной ненулевой компонентой $A_\varphi(r, z, t)$ ($E_\varphi = -\partial A_\varphi / \partial t$) вектор-потенциала $\vec{\mathbf{A}} = (A_r, A_\varphi, A_z)$, которая в среде с однородной магнитной проницаемостью может быть найдена как решение следующей начально-краевой задачи:

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_\varphi + \frac{1}{\mu_0 r^2} A_\varphi + \sigma^0 \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = J_\varphi \text{ в } \Omega, \quad (151)$$

$$A_\varphi|_\Gamma = 0, \quad (152)$$

где Δ – скалярный оператор Лапласа в координатах (r, z) , σ^0 – удельная проводимость осесимметричной среды (при выделении нормальной составляющей поля $\sigma^0 = \sigma^n$ – проводимость вмещающей среды), J_φ – плотность стороннего тока (определяемая током в генераторной петле), Γ – граница расчетной области Ω . Начальное условие задается в виде $A_\varphi|_{t=t_0} = 0$, если $J_\varphi(t)$ задана с момента включения тока в генераторе. Если же изменение тока в источнике описывается функцией Хевисайда, то в качестве $A_\varphi|_{t=t_0}$ берется решение стационарной задачи:

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_\varphi + \frac{1}{\mu_0 r^2} A_\varphi = J_\varphi, \quad A_\varphi|_\Gamma = 0, \quad (153)$$

а правая часть уравнения (151) принимается равной нулю.

Нормальное поле для источника в виде вертикальной электрической линии (ВЭЛ) удобно искать в виде распределения φ -компоненты напряженности магнитного поля $(H_\varphi(r, z, t))$, являющейся единственной ненулевой составляющей вектора напряженности магнитного поля $\vec{H} = (H_r, H_\varphi, H_z)$ в цилиндрической системе координат. Если изменение тока в ВЭЛ описывается функцией Хевисайда, то для нахождения начального распределения H_φ , соответствующего моменту выключения тока в питающем кабеле ВЭЛ, необходимо решить стационарную краевую задачу:

$$-\operatorname{div} \left(\frac{1}{\sigma} \operatorname{grad} H_\varphi \right) + \frac{1}{\sigma r^2} H_\varphi - \frac{H_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sigma} \right) = 0, \quad (154)$$

$$H_\varphi|_{\Gamma'_1} = \frac{1}{2\pi r_0}, \quad H_\varphi|_{\Gamma_1 \setminus \Gamma'_1} = H_\varphi|_{\Gamma_2} = H_\varphi|_{\Gamma_3} = H_\varphi|_{\Gamma_4} = 0. \quad (155)$$

Здесь осесимметричная область Ω , в которой ищется решение H_φ , ограничивается поверхностью Γ_1 , определяемой соотношением $r = r_0$ (r_0 – достаточно малый радиус), а также дневной поверхностью Γ_2 , удаленной вертикальной границей Γ_3 , определяемой соотношением $r = R$ (R – достаточно большое число, размер «бака»), и горизонтальной границей Γ_4 , являющейся либо удаленной, либо границей между средой и непроводящим фундаментом. Токовая линия со сто-

ронным током \vec{J} не включается в расчетную область Ω , а на границе Γ_1' , являющейся частью границы Γ_1 , заключенной между электродами ВЭЛ, задается неоднородное первое краевое условие.

Аналогично строится и краевая задача для нахождения начального распределения H_φ , соответствующего моменту выключения тока в круговом электрическом диполе (КЭД). Только в этом случае неоднородное первое краевое условие задается на границе Γ_2' , являющейся частью границы Γ_2 и заключенной между краями КЭД:

$$H_\varphi|_{\Gamma_2'} = \frac{1}{2\pi r}. \quad (156)$$

После выключения тока нестационарный процесс становления поля от ВЭЛ и КЭД без учета токов смещения описывается следующей краевой задачей:

$$-\operatorname{div}\left(\frac{1}{\sigma}\operatorname{grad}H_\varphi\right) + \frac{1}{\sigma r^2}H_\varphi - \frac{H_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \mu\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (157)$$

$$H_\varphi|_{\Gamma_1} = H_\varphi|_{\Gamma_2} = H_\varphi|_{\Gamma_3} = H_\varphi|_{\Gamma_4} = 0, \quad (158)$$

т.е. на всех границах расчетной области Ω (включая Γ_1' для ВЭЛ или Γ_2' для КЭД) для H_φ задается однородное краевое условие первого рода.

После нахождения поля $H_\varphi(r, z, t)$ напряженность электрического поля может быть вычислена с помощью соотношения $\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}\vec{H}$.

При расчете поля от ВЭЛ, помещенной в обсаженную скважину, расчет поля с использованием постановки (154)-(155) и (157)-(158) требует очень больших вычислительных затрат, поэтому при наличии в расчетной области обсаженной скважины используется постановка для векторного МКЭ и соответствующая вычислительная схема для расчета начального приближения в нестационарном процессе.

Основной трудностью использования МКЭ для расчета нестационарного поля горизонтальной электрической линии (ГЭЛ) в горизонтально-слоистой среде является то, что в отличие от всех рассмотренных выше источников, для которых в горизонтально-слоистой среде или в среде с соосными объектами соответствующие поля были осесимметричными и могли быть найдены из решения соот-

ветствующих двумерных задач, для ГЭЛ даже в такой по сути одномерной среде поле фактически является трехмерным, т.е. компоненты вектора напряженности электрического поля \vec{E} зависят от всех трех пространственных координат. Однако и для ГЭЛ поле \vec{E} в горизонтально-слоистой среде может быть вычислено через решение нескольких осесимметричных задач. Для этого ГЭЛ представляется в виде суммы нескольких источников: двух поверхностных заземленных радиальных (ЗР) источников и комбинированного индукционного (КИ) источника, состоящего из двух поверхностных незаземленных радиальных (НР) источников и токовой линии АВ. При этом поле ЗР может быть рассчитано с использованием модели (154),(156)-(158) с учетом того, что в (156) граница Γ_2' – это вся дневная поверхность, на которой находится ГЭЛ. Для расчета поля от источника НР может быть также использована математическая модель (151)-(153), записанная относительно A_r , в которой правая часть (т.е. функция J_r , стоящая на месте J_φ) определяется через δ -функцию, сосредоточенную на поверхности, где лежит ГЭЛ. Расчет поля токовой линии АВ может быть сведено либо к решению задачи (151)-(153) от токовой петли, либо к расчету нестационарного поля от точечного источника.

При использовании схемы с выделением поля для расчетов трехмерных нестационарных полей от гальванических источников требуется вычисление начального (стационарного) распределения аномального поля $\vec{A}^a|_{t=0}$. Математические модели для расчетов стационарных электромагнитных полей ВЭЛ, КЭД и ГЭЛ также учитывают разделение искомого поля на двумерную и трехмерную составляющие. При этом решается следующая последовательность задач.

Первая задача – это расчет нормальной составляющей электрического поля $\vec{E}^n = -\text{grad } V^n$ в горизонтально-слоистой (или осесимметричной) среде. При этом для ВЭЛ и КЭД потенциал $V^n(x, y, z)$ может быть найден путем пересчета (с учетом положения источника) поля $V^{rz}(r, z)$, удовлетворяющего решению двумерной краевой задачи в цилиндрических координатах

$$-\text{div}(\sigma^{rz} \text{grad } V^{rz}) = \delta^A + \delta^B, \quad V^{rz}|_{\Gamma_3} = 0, \quad \frac{\partial V^{rz}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4} = 0. \quad (159)$$

где δ^A и δ^B – положительный и отрицательный источники, описывающие токи, стекающие с электродов А и В.

Стационарное электрическое поле ГЭЛ, описываемое с помощью скалярного электрического потенциала $V^n(x, y, z)$ может быть получено из функции $V^{rz}(r, z)$ с помощью формулы

$$V^n(x, y, z) = V^{rz}\left(\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}, z\right) - V^{rz}\left(\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}, z\right),$$

где x_A, y_A и x_B, y_B – координаты точек заземления ГЭЛ, а $V^{rz}(r, z)$ – решение осесимметричной краевой задачи с одним точечным источником в начале координат.

Вторая задача – это расчет аномальной (трехмерной) составляющей \vec{E}^a напряженности электрического поля. Она полностью описывается скалярным потенциалом V^a ($\vec{E}^a = -\text{grad } V^a$), который может быть получен как решение следующей краевой задачи:

$$-\text{div}(\sigma \text{grad } V^a) = -\text{div}((\sigma^n - \sigma) \text{grad } V^n), \quad V^a|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial V^a}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad (160)$$

где Γ_1 – удаленная граница трехмерной области, а Γ_2 – дневная поверхность и, возможно, граница с непроводящим фундаментом (если он есть в решаемой задаче).

Таким образом, распределение трехмерного стационарного электрического поля \vec{E} может быть найдено как сумма \vec{E}^n и \vec{E}^a .

Третья задача – это расчет аномальной (трехмерной) составляющей магнитного поля. Математическая модель для расчета стационарного трехмерного магнитного поля при условии, что магнитная проницаемость в земле является постоянной, равной μ_0 – магнитной проницаемости в вакууме, выглядит следующим образом:

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta \vec{A}^a = -\sigma \text{grad } V^a - (\sigma - \sigma^n) \text{grad } V^n, \quad \vec{A}^a|_{\Gamma} = 0. \quad (161)$$

где Γ – граница трехмерной расчетной области Ω (здесь все границы Ω являются удаленными, то есть такими, что изучаемое магнитное поле на них можно считать пренебрежимо малым).

Рассмотрим математические модели векторного и скалярного МКЭ для расчета трехмерных гармонических геоэлектромагнитных полей при решении задач магнитотеллурического зондирования.

Математическая модель с использованием векторного МКЭ имеет вид

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}}^a) + i\omega\sigma \vec{\mathbf{A}}^a = (\sigma - \sigma^n) \vec{\mathbf{E}}^n, \quad (162)$$

где $\vec{\mathbf{A}}^a$ связана с аномальной составляющей электрической напряженности поля $\vec{\mathbf{E}}^a$ с помощью соотношения

$$\vec{\mathbf{E}}^a = -i\omega \vec{\mathbf{A}}^a. \quad (163)$$

При использовании скалярного МКЭ применяется математическая модель в виде системы уравнений

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta \vec{\mathbf{A}}^a + i\omega\sigma \vec{\mathbf{A}}^a + \sigma \operatorname{grad} V^a = (\sigma - \sigma^n) \vec{\mathbf{E}}^n, \quad (164)$$

$$-\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} V^a) - i\omega \operatorname{div}(\sigma \vec{\mathbf{A}}^a) = -\operatorname{div}((\sigma - \sigma^n) \vec{\mathbf{E}}^n). \quad (165)$$

Аномальная составляющая $\vec{\mathbf{A}}^a$ вектор-потенциала и скалярный электрический потенциал V^a связаны с аномальной составляющей электрической напряженности поля $\vec{\mathbf{E}}^a$ соотношением

$$\vec{\mathbf{E}}^a = -i\omega \vec{\mathbf{A}}^a - \operatorname{grad} V^a. \quad (166)$$

Электрическое поле $\vec{\mathbf{E}}^n$, связанное с вектор-потенциалом $\vec{\mathbf{A}}^n$ соотношением $\vec{\mathbf{E}}^n = -i\omega \vec{\mathbf{A}}^n$, может быть вычислено через решение одномерной задачи в декартовых координатах. Если принять, что токи направлены вдоль y , то вектор-потенциал $\vec{\mathbf{A}}^n(z) = (0, A_y^{1D}(z), 0)$ и функция $A_y^{1D}(z)$ может быть найдена из решения одномерного уравнения:

$$-\frac{1}{\mu_0} \frac{d^2}{dz^2} A_y^{1D} + i\omega\sigma A_y^{1D} = J_y. \quad (167)$$

Математические модели (162) и (164)-(165) используются и для расчета гармонических полей от контролируемых источников.

4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Процесс решения обратной задачи часто называют *инверсией практических (измеренных) данных* (или просто *инверсией*).

В данном курсе мы будем рассматривать методы решения обратных задач на основе метода наименьших квадратов.

Пусть $\varepsilon^* = (\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_N^*)$ – экспериментальные (практические) данные в N точках измерения, соответствующие (возможно, с некоторой погрешностью) "точным" значениям параметров $u^* = (u_1^*, \dots, u_M^*)^T$ среды, а $\varepsilon(u) = (\varepsilon_1(u), \dots, \varepsilon_N(u))^T$ – данные в тех же N точках измерения, полученные при решении прямой задачи с некоторыми "неточными" параметрами среды $u = (u_1, \dots, u_M)^T$. В дальнейшем данные ε мы будем называть *теоретическими*, и целью решения обратной задачи будет поиск таких значений u , чтобы соответствующие им теоретические данные $\varepsilon(u)$ были максимально близки к экспериментальным данным ε^* .

Количество наблюдений N обычно не меньше числа восстанавливаемых параметров M : $N \geq M$. Если $M = 1$, то обратную задачу иногда называют *одномерной*. Если $M > 1$, то – *многомерной*.

Например, если в задаче электроразведки, расчетная область для которой изображена на рисунке 1, неизвестными являются проводимости слоев мощность P источника (где число P устанавливает связь между плотностью источника θ и δ -функцией в виде $\theta = P\delta(r, z)$), то вектор параметров среды будет выглядеть следующим образом: $u = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, P)$. Если же, например, неизвестными являются проводимость и толщина второго слоя, то $u = (\sigma_2, h_2)$.

Поиск параметров среды будем осуществлять путем решения задачи минимизации функционала

$$J(u) = \sum_{i=1}^N (\delta\varepsilon(u))^2, \quad (168)$$

где

$$\delta\varepsilon(u) = \varepsilon^* - \varepsilon(u) \quad (169)$$

это отклонения теоретических данных от практических.

В прикладных исследованиях типичной является ситуация с заданием входных данных с погрешностью, поэтому при вычислении суммы квадратов отклонений $\varepsilon(u)$ от ε^* имеет смысл использовать некоторые весовые коэффициенты ω_i . Кроме того, значения параметров u имеет смысл искать в окрестности некоторых априорно заданных значений, что позволяет сделать процедуру поиска параметров более устойчивой. В результате, вместо (168) рассмотрим функционал

$$J_\alpha(u) = \sum_{i=1}^N (\omega_i \delta\varepsilon(u))^2 + \alpha \sum_{j=1}^M (u_j - \bar{u}_j)^2, \quad (170)$$

где ω_i – некоторые веса, отражающие уровень погрешности при приеме сигнала в i -м приемнике, α – параметр регуляризации, $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_M)^T$ – вектор некоторых фиксированных параметров среды, определяющих регуляризующую добавку в функционале (т.е. большие отклонения искоемых параметров u_j от их зафиксированных значений \bar{u}_j "штрафуются" с весом α).

Заметим также, что в случае изучения нестационарных или гармонических по времени процессов веса ω_i отражают масштаб изменения принимаемого сигнала по времени или по частотам, а количество наблюдений N складывается из количества точек измерений и из количества времен измерения (при изучении нестационарного процесса) или из количества частот (при изучении гармонических процессов). В этом случае функционал (170) удобно записывать в виде

$$J_\alpha(u) = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K (\omega_{lk} \delta\varepsilon_{lk}(u))^2 + \alpha \sum_{j=1}^M (u_j - \bar{u}_j)^2, \quad (171)$$

где L – количество приемников, K – количество времен (или частот) (т.е. $\delta\varepsilon_{lk}(u)$ – отклонение теоретических данных от практических в l -м приемнике в момент времени t_k , если изучается нестационарный процесс, или на частоте ν_k – если изучается гармонический процесс).

Например, при построении алгоритма *одномерной*¹ инверсии для данных МТЗ (где гармоническое электромагнитное поле возбуждается плоской волной – соответствующие математические модели приведены в п. 1.3, уравнения (162)-(167)) количество приемников будет равно 1 (поскольку для такого источника поле горизонтально-слоистой среды во всех точках поверхности будет одинаковым), а количество частот на практике обычно находится в диапазоне от 20 до 40 (когда измерения ведутся в диапазоне $10^{-4} - 10^2$ Гц, где сами значения частот располагаются логарифмически). Очевидно, что при построении процедур двумерной и трехмерной инверсий количество приемников берется равным количеству всех приемников, расположенных в пределах площади, где восстанавливается модель среды.

Рассмотрим итерационную процедуру минимизации функционала (170). Для этого представим $\varepsilon(u)$ в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки u^0 , причем этот ряд ограничим членами с первыми производными:

$$\delta\varepsilon_i(u) \approx \delta\varepsilon_i(u^0) + \sum_{j=1}^M \frac{\partial(\delta\varepsilon_i(u))}{\partial u_j} \Delta u_j, \quad (172)$$

где $u^0 = (u_1^0, \dots, u_M^0)^T$ – полученные на предыдущей итерации параметры среды (на первой итерации $u^0 = \bar{u}$), $\Delta u_j = u_j - u_j^0$, $\frac{\partial(\delta\varepsilon_i(u))}{\partial u_j}$ – производные, отражающие влияние изменения j -го параметра в i -м приемнике. После подстановки (172) в (170) задача принимает вид:

$$J_\alpha(u) = \sum_{i=1}^N \left(\omega_i \delta\varepsilon_i(u^0) + \omega_i \sum_{j=1}^M \frac{\partial(\delta\varepsilon_i(u))}{\partial u_j} \Delta u_j \right)^2 + \alpha \sum_{j=1}^M (u_j^0 - \bar{u}_j + \Delta u_j)^2. \quad (173)$$

Продифференцируем функционал (173) по Δu_j и приравняем к нулю. В результате получим СЛАУ вида

$$(A + \alpha I) \Delta u = f - \alpha(u^0 - \bar{u}), \quad (174)$$

¹ Необходимо отметить, что следует различать понятие одномерной обратной задачи (когда «мерность» определяется количеством искомых параметров, как это было показано выше), и одномерной инверсии, когда «мерность» определяется размерностью прямой задачи. Очевидно, что в данном случае понятие «одномерная» относится к размерности прямой задачи. Обратная задача при этом может быть как одномерной, если восстанавливается только один параметр – например, проводимость или толщина какого-либо слоя (при условии, что толщины и проводимости других слоев фиксированы), так и многомерной, если восстанавливается проводимости и/или толщины нескольких слоев.

где I – единичная матрица, а элементы матрицы A и вектора правой части f определяются соотношениями

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \omega_k^2 \frac{\partial(\delta\varepsilon_k(u))}{\partial u_i} \frac{\partial(\delta\varepsilon_k(u))}{\partial u_j}, \quad (175)$$

$$f_i = -\sum_{k=1}^N \omega_k^2 \delta\varepsilon_k(u^0) \frac{\partial(\delta\varepsilon_k(u))}{\partial u_i}, \quad i, j = 1, 2, \dots, M. \quad (176)$$

Если производные $\frac{\partial(\delta\varepsilon_i(u))}{\partial u_j}$ не зависят от u и равны константе, то обратная задача является *линейной*, в противном случае – *нелинейной*.

Найденное решение Δu системы (174) является направлением поиска для вектора параметров среды $u := u^0 + \beta \Delta u$, где β – параметр релаксации. Далее берем $u^0 := u$, вычисляем новое значение $\varepsilon(u^0)$ путем решения прямой задачи, вычисляем значение функционала

$$J(u) = \sum_{i=1}^N (\omega_i \delta\varepsilon(u))^2, \quad (177)$$

и если это значение стало меньше, чем на предыдущей итерации, то осуществляется переход к следующему шагу, в противном случае уменьшается значение параметра релаксации β .

Отметим, что основные вычислительные затраты при решении обратной задачи составляет решение серии прямых задач.

Кроме предложенного метода линеаризации для минимизации функционала (170) можно использовать любой другой метод минимизации, однако, как правило, по эффективности они уступают описанному выше методу линеаризации.

В заключение нужно отметить следующее. Если в случае восстановления параметров так называемой одномерной среды количество параметров невелико, так как для каждого из слоев восстанавливаются их проводимость и толщина, то в двумерном и, особенно, в трехмерном случаях количество параметров существенно возрастает.

Поэтому в многомерном случае могут использоваться различные подходы к выбору искомым параметров. Достаточно очевидным и самым распространенным подходом является разбиение изучаемого объема на ячейки, в каждой из которых восстанавливается значение проводимости. При этом довольно часто полагается, что увеличение количества ячеек позволяет точнее описывать искомую геометрию.

рию среды. Однако такое представление зачастую оказывается не верным, поскольку увеличение количества ячеек помимо резкого роста вычислительных затрат приводит к потере устойчивости решения обратной задачи.

Список использованных источников

1. Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э., Персова М.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач // Учебное пособие. Сер. «Учебники НГТУ». Новосибирск: НГТУ. 2007. 896 с.
2. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука. Гл. ред. физ.мат. лит., 1987. – 240 с.
3. М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, Г.М. Тригубович. Компьютерное моделирование геоэлектромагнитных полей в трехмерных средах методом конечных элементов. // Физика Земли –2011. – vol. 47. – № 2. – С. 3–14.