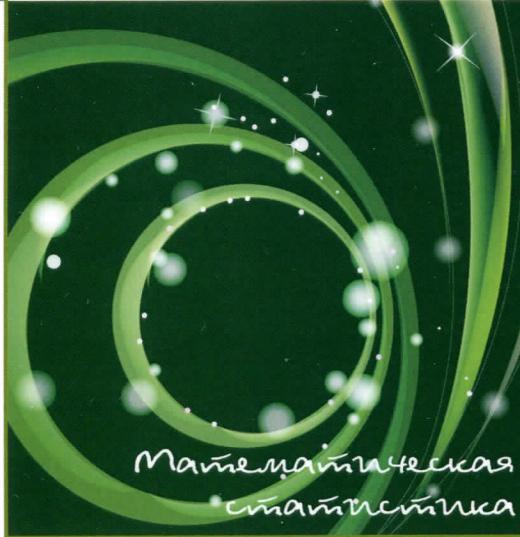


НАУЧНАЯ МЫСЛЬ



Б.Ю. Лемешко

**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ
ОТКЛОНЕНИЯ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ОТ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА**

Руководство по применению



НАУЧНАЯ МЫСЛЬ

СЕРИЯ ОСНОВАНА В 2008 ГОДУ

Б.Ю. ЛЕМЕШКО

**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ
ОТКЛОНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ОТ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА
руководство по применению**

МОНОГРАФИЯ

2-е издание, переработанное и дополненное

**Электронно-
Библиотечная
Система
znanium.com**

Москва
ИНФРА-М
2023

УДК 519.23(075.4)

ББК 60.6

Л44

Р е ц е н з е н т ы:

Попов А.А., доктор технических наук, профессор, профессор кафедры теоретической и прикладной информатики Новосибирского государственного технического университета;

Селезнев В.А., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой инженерной математики Новосибирского государственного технического университета

Лемешко Б.Ю.

Л44

Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению : монография / Б.Ю. Лемешко. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : ИНФРА-М, 2023. — 353 с. — (Научная мысль). — DOI 10.12737/1896110.

ISBN 978-5-16-017901-8 (print)

ISBN 978-5-16-110911-3 (online)

В монографии рассматриваются вопросы применения статистических критериев, ориентированных на проверку гипотезы о принадлежности анализируемых данных нормальному закону распределения вероятностей. Рассматриваются и сравниваются специальные критерии, непараметрические критерии согласия и критерии типа χ^2 . Указываются недостатки и преимущества различных критериев. Приводятся таблицы, содержащие процентные точки и модели распределений статистик, необходимые для корректного применения критериев.

По сравнению с первым изданием существенно расширено множество рассмотренных специальных критериев нормальности. Все множество критериев проранжировано по мощности относительно ряда близких конкурирующих гипотез, что облегчает выбор наиболее предпочтительных критериев. Показано, что в приложениях свойства критериев могут существенно изменяться вследствие наличия ошибок округления и это необходимо учитывать при формировании статистических выводов.

Следование рекомендациям при анализе данных обеспечит корректность статистических выводов и повысит их обоснованность.

Рассчитана на специалистов, в той или иной мере сталкивающихся в своей деятельности с вопросами статистического анализа данных, обработкой результатов экспериментов, применением статистических методов для анализа различных аспектов и тенденций окружающей действительности. Будет полезна инженерам, научным сотрудникам, специалистам различного профиля (медикам, биологам, социологам, экономистам и др.), преподавателям вузов, аспирантам и студентам.

УДК 519.23(075.4)

ББК 60.6

© Лемешко Б.Ю., 2015

ISBN 978-5-16-017901-8 (print)

ISBN 978-5-16-110911-3 (online)

© Лемешко Б.Ю., 2022,

с изменениями

Оглавление

Предисловие	6
Введение	9
1. Общие положения	13
1.1. Общие сведения о проверке статистических гипотез	13
1.2. Конкурирующие гипотезы	20
2. Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона	24
2.1. Критерий проверки на симметричность	24
2.2. Критерий проверки на эксцесс	26
2.3. Критерий Шапиро–Уилка (Shapiro–Wilk Test)	29
2.4. Критерий Эппса–Пулли (Epps–Pulley Test)	34
2.5. Модифицированный критерий Шапиро–Уилка	40
2.6. Критерий Харке–Бера проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса (Jarque–Bera Test)	43
2.7. Модификация Гелы–Гаствирта критерия проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса (Gel–Gastwirth Test)	47
2.8. Модификация Д’Агостино критерия проверки на симметричность	50
2.9. Модификация Д’Агостино критерия проверки на симметричность и значение эксцесса	52
2.10. Совместный критерий проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса Д’Агостино	56
2.11. Критерий Фросини (Frosini Test)	60
2.12. Критерии Хегази–Грина (Hegazy–Green Test)	64
2.13. Критерий Гири (Geary Test)	69
2.14. Критерий Дэвида–Хартли–Пирсона (David–Hartley–Pearson Test)	74
2.15. Критерий Шпигельхальтера (Spiegelhalter Test)	78
2.16. Критерий Ройстона (Royston Test)	83
2.17. Критерий Васичека (Vasicek Test)	89
2.18. Критерий Коррея (Correa Test)	100

2.19. Критерий Ван Эса (Van Es Test)	109
2.20. Критерий Эбрахими (Ebrahimi Test)	118
2.21. Критерии Заманзаде–Аргами (Zamanzade–Arghami Test)	127
2.22. Критерий Гаствирта (Gel–Miao–Gastwirth Test)	145
2.23. Критерии Локка–Сперриера (Locke–Spurrier Tests)	149
2.24. Критерий Мартинеса–Иглевича (Martinez–Iglewitz Test).....	157
2.25. Критерий Филлибена (Filliben Test).....	162
2.26. Критерий Шапиро–Франциа (Shapiro–Francia Test).....	166
2.27. Критерий Вайсберга–Бингема (Weisberg–Bingham Test).....	167
2.28. Критерий Жанга (Zhang Test)	170
2.29. Критерий Лина–Мудхолкара (Lin–Mudholkar Test)	174
2.30. Критерий Чена–Шапиро (Chen–Shapiro Test)	177
2.31. Критерий Бонетта–Сейер (Bonett–Seier Test).....	181
2.32. Критерий Али–Чорго–Ревеса (Aly–Csorgo–Revesz Test) ..	184
2.33. Критерии Бонтемпса–Меддахи (Bontemps–Meddahi Test).....	187
2.34. Критерии Десгань–Мишо (Desgagne–Micheaux Tests)....	193
2.35. Критерии Оя (Oja Tests)	201
2.36. Модификация критерии Оя.....	210
2.37. Критерий Чена (Chen Test).....	211
2.38. Критерий Брис–Хьюберт–Стройфа (Brys–Hubert–Struyf Test)	214
3. Непараметрические критерии согласия при проверке нормальности.....	219
3.1. Критерий Колмогорова.....	219
3.2. Критерий Купера.....	223
3.3. Критерий Крамера–Мизеса–Смирнова.....	226
3.4. Критерий Ватсона	229
3.5. Критерий Андерсона–Дарлинга	232
3.6. Критерии Жанга	235
3.7. О применении непараметрических критериев согласия	244
4. Критерии согласия типа хи-квадрат при проверке нормальности.....	247
4.1. Критерий согласия χ^2 Пирсона	247
4.2. Критерий согласия Никулина–Рао–Робсона	259

4.3. О применении критериев согласия типа χ^2	265
5. Ранжирование критериев нормальности по мощности ...	267
6. Анализ погрешностей измерений в классических экспериментах.....	278
6.1. О роли проверки нормальности.....	278
6.2. Анализируемые эксперименты.....	280
6.3. Применяемые критерии нормальности.....	283
6.4. Проверка гипотезы о принадлежности анализируемых выборок нормальному закону.....	285
6.5. О вычислении достигнутых уровней значимости	289
6.6. Конкурирующие законы, пригодные для описания результатов анализируемых экспериментов	291
6.7. Выводы по результатам анализа.....	296
7. Развитие технологий проверки статистических гипотез.	298
7.1. Изменение роли компьютерных технологий при статистическом анализе данных	298
7.2. Интерактивный подход к вычислению p-value	299
8. Применение критериев нормальности в условиях влияния ошибок округления	303
8.1. Влияние ошибок округления на распределения статистик критериев нормальности	303
8.2. Применение критериев нормальности в условиях округления измерений.....	312
8.3. Реализация применения критериев в условиях влияния ошибок округления.....	320
9. Заключение.....	327
Библиографический список	328
Приложение А. Таблицы для критериев проверки нормальности....	338

Предисловие

Нормальный закон распределения вероятностей занимает особое место в прикладной математической статистике.

С одной стороны, применение нормального распределения в приложениях обосновывает ряд центральных предельных теорем, суть которых заключается в том, что сумма большого количества независимых (слабо зависимых) случайных величин с конечными математическими ожиданиями и (примерно одинаковыми) дисперсиями имеет распределение близкое к нормальному. Так как многие случайные величины, встречающиеся в приложениях, формируются под влиянием множества слабо зависимых случайных факторов, их распределения могут считаться (оказаться) приближенно нормальными. Как правило, ошибки измерений, характеризующие “отложенную” измерительную систему, могут хорошо описываться нормальным законом. Отклонения контролируемого показателя от номинального значения для некоторого отложенного технологического процесса также могут приближенно описываться нормальным законом распределения.

С другой стороны, предпосылкой, обуславливающей возможность применения многих классических методов и критериев проверки статистических гипотез, является предположение о принадлежности анализируемых случайных величин нормальному закону. Корректность формирования статистического вывода с использованием соответствующего критерия обеспечивается только при выполнении этого предположения. То есть, соответствующий классический критерий можно применять и полученному выводу можно доверять, если не отклоняется гипотеза о принадлежности анализируемой выборкициальному закону.

В 2002 г. был введен в действие ГОСТ Р ИСО 5479–2002 [103], посвященный проверке отклонения распределения вероятностей от нормального закона. Сразу было видно, что он не помогает практикам в решении соответствующих задач и не отвечает на имеющиеся вопросы. Почему выбран такой краткий перечень критериев? Почему отобраны именно эти критерии? В чём их преимущество? Есть ли

недостатки? Почему ничего не говорится об использовании для проверки нормальности непараметрических критериев согласия? О критериях типа χ^2 ?

Критерии, которые могут быть использованы для проверки гипотезы о принадлежности выборки нормальному закону, достаточно много. Однако не смотря на множество публикаций не хватает объективной информации о действительных свойствах критериев, их достоинствах и недостатках. Можно натолкнуться на авторитетные мнения о целесообразности применения тех или иных критериев, которые не подкрепляются результатами сравнительного анализа и не всегда подтверждаются при проверке.

Специалистов, сталкивающихся в своей практической деятельности с необходимостью статистического анализа результатов экспериментов и, естественно, с проблемой проверки гипотез о принадлежности наблюдений или ошибок измеренийциальному закону, интересует, какие критерии предпочтительнее использовать и почему. Какие критерии обладают большей мощностью? Какие существуют “подводные камни”, отражающиеся на результатах анализа?

После выхода стандарта [103] мы выполнили ряд кропотливых исследований, в которых проанализировали мощность достаточно представительного круга критериев, используемых при проверке нормальности. Анализ мощности относительно различных близких альтернатив позволил отметить недостатки некоторых популярных критериев и указать наиболее предпочтительные критерии нормальности. На базе этих исследований было подготовлено руководство [132], которое, надеюсь, как и руководство по непараметрическим критериям согласия [131], оказалось реальной помочь отечественным специалистам, заинтересованным в корректности проводимого статистического анализа. Позже вышли и другие аналогичные работы [133, 134, 135, 136], нацеленные на совершенствование методов статистического анализа, применяемых на практике.

Жизнь не стоит на месте. Оказалось, что не все критерии

нормальности были охвачены в [132], появились новые критерии. В современных условиях стало очевидным наличие весомых факторов, приводящих к изменению свойств статистических критериев и исключающих возможность применения классических результатов. Например, сам факт округления результатов измерений ограничивает возможность применения критериев проверки статистических гипотез по большим выборкам и может отражаться на результатах статистических выводов при анализе высокоточных измерений при любых объёмах выборок. В настоящем руководстве эта проблема обсуждается. Кроме этого, сделана попытка проранжировать всё множество критериев нормальности по мощности относительно рассмотренных конкурирующих законов.

Я очень признателен своим ученикам и коллегам Лемешко С.Б. и Рогожникову А.П., последовательно много сделавшим для исследования распределений статистик и оценки мощности критериев, ориентированных на проверку гипотез о принадлежности наблюдений нормальному закону, а также Юркову В.А., внесшему существенный вклад в увеличение числа специальных критериев нормальности, реализованных в рамках программной системы [146], позволяющей исследовать и корректно применять эти критерии.

*Б.Ю. Лемешко
июнь 2022*

Введение

Принадлежность наблюдаемых данных нормальному закону является необходимой предпосылкой для корректного применения большинства классических методов математической статистики, используемых в задачах обработки измерений, стандартизации и контроля качества. Поэтому проверка на отклонение от нормального закона является частой процедурой в ходе проведения измерений, контроля и испытаний, имеющей особое значение, так как далеко не всегда ошибки измерений, связанные с приборами, построенными на различных физических принципах, или ошибки наблюдений некоторого контролируемого показателя подчиняются нормальному закону [145]. В таких случаях применение классического аппарата, опирающегося на предположение о нормальности наблюдаемого закона, оказывается некорректным и может приводить к неверным выводам.

В 2002 г. введен в действие в отечественный стандарт ГОСТ Р ИСО 5479–2002 «Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения» [103], который представляет собой аутентичный текст международного стандарта ISO 5479–97. В стандарте рассматриваются графический метод проверки на нормальность с использованием вероятностной бумаги, критерии проверки на симметричность и на значение эксцесса, статистики которых представляют собой функции от оценок моментов закона распределения, критерии Шапиро–Уилка, основанные на регрессионном анализе порядковых статистик, критерий Эпписа–Пулли, статистика которого измеряет некоторое расстояние между выборочной характеристической функцией и характеристической функцией нормального закона.

По существу, стандарт охватывает лишь малую часть из существующего множества критериев, которые были предложены специально или могут быть использованы для проверки отклонения наблюдаемых данных (ошибок измерений) от нормального закона. В стандарте отказываются от использования критериев типа χ^2 и не упоминается применение для проверки нормальности непараметрических критериев согласия.

Содержание стандарта [103] и ограниченность перечня включенных в него критериев не позволяет его пользователям ориентироваться в том, какой из критериев наиболее предпочтителен для применения. Какой из критериев оказывается более мощным и против каких конкурирующих гипотез? При каких объемах выборок конкретный критерий обладает преимуществом или наоборот? Какие недостатки у конкретных критериев?

В отечественной литературе можно найти много примеров, связанных с проверкой отклонений от нормального закона, но исследованию специальных критериев, предназначенных для этих целей, уделено достаточно мало внимания [107, 100]. Напротив, в зарубежных источниках исследованию критериев проверки отклонений от нормальности посвящено значительное число работ. Уделено внимание и анализу мощности критериев при проверке отклонений от нормального закона по отношению к различным альтернативам [77, 72]. Подчеркивается, что критерии согласия при малых объемах выборок проигрывают по мощности специальным критериям проверки на отклонение от нормальности [77] и предпочтение, как правило, отдается критерию Шапиро–Уилка. В то же время не складывается полной картины того, когда и каким критерием целесообразней пользоваться при проверке отклонений распределения от нормального.

Все сказанное не позволяет заинтересованным специалистам точно знать, насколько обоснован выбор критериев в стандарте, каковы их достоинства и недостатки, какова их мощность, как меняются распределения статистик критериев с ростом объемов выборок. Всегда ли, например, критерии Шапиро–Уилка и Эпса–Пулли по мощности оказываются предпочтительнее?

После выхода стандарта [103] в работе [120] был проведен сравнительный анализ ряда статистических критериев, предназначенных для проверки отклонения эмпирических распределений от нормального закона, в ходе которого была проанализирована мощность и выявлены недостатки отдельных критериев, ранее не упоминаемые в литературе. Исследования, проведенные в [120], показали, что популярные критерии Шапиро–Уилка и Эпса–Пулли, рекомендуемые стандартом [103], при малых объемах выборок и малых уровнях значимости α (вероятностях ошибки первого рода) являются смещён-

ными относительно некоторых конкурирующих гипотез (мощность критериев оказывается меньше уровня значимости).

В [124] был продолжен анализ критериев нормальности. Перечень критериев, исследованных в [120], был расширен за счет критериев Фросини [35, 36], Хегази–Грина [45], Шпигельхальтера [79], Гири [37] и Дэвида–Хартли–Пирсона [23]. Эти исследования показали, что серьезными недостатками обладают и некоторые другие критерии.

В [127] мощность множества критериев, применяемых для проверки нормальности относительно ряда конкурирующих законов, сравнивалась при анализе результатов классических экспериментов по измерению констант.

Применение специальных критериев, ориентированных только на проверку гипотезы о принадлежности анализируемых данных нормальному закону, рассматривается в разделе 2.

Классические непараметрические критерии согласия Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга, Купера, Ватсона и критерии Жанга предназначены для проверки простых гипотез о принадлежности выборки полностью известному теоретическому закону распределения вероятностей. В ситуации проверки сложных гипотез, когда оценки параметров теоретического закона оцениваются по этой же выборке, классические результаты, касающиеся этих критериев, оказываются бесполезными, так как распределения статистик при справедливости проверяемой гипотезы становятся зависящими от вида гипотезы. Возможности их использования в таких ситуациях наиболее полно изложены в [131, 149]. Применение критерия Колмогорова для проверки нормальности впервые было рассмотрено в [63], критериев Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга в этих же целях наиболее полно, по-видимому, в [142], Купера и Ватсона – в [128, 129, 59, 60, 130, 61], критериев Жанга – в работе [94]. Применение для проверки нормальности непараметрических критериев согласия рассматривается в разделе 3.

Традиционно для проверки гипотезы о принадлежности анализируемой выборкициальному закону применяются критерии согласия типа χ^2 . Применение (классического) критерия χ^2 Пирсона для проверки нормальности предусматривает оценивание неизвестных параметров закона по группированным данным. Применение данного

критерия с оцениванием параметров по негруппированным данным имеет свои особенности. В последнем случае целесообразным является применение модифицированных критериев, в частности, критерия Никулина–Рао–Робсона [143, 144, 73]. Применение для проверки нормальности критериев согласия типа χ^2 рассматривается в разделе 4.

В разделе 5 множество всех критериев нормальности упорядочивается по мощности относительно рассматриваемых в руководстве конкурирующих гипотез. А далее критерии ранжируются по сумме мест, занятых критериями в этих упорядоченных рядах. На полученные рейтинги можно ориентироваться при выборе наиболее предпочтительных критериев для использования в приложениях.

В разделе 6 рассматривается проверка нормальности погрешностей в классических экспериментах.

В разделе 7 обсуждаются некоторые проблемы, связанные с использованием критериев в “нестандартных” ситуациях и применением современных технологий в задачах анализа данных.

В разделе 8 обсуждаются проблемы, связанные с влиянием ошибок округления на свойства критериев нормальности, а также предлагаются подходы и средства для решения этих проблем в приложениях.

Большинство таблиц процентных точек (квантилей), необходимых при формировании статистического вывода по соответствующему критерию, для удобства вставлены в параграфы с описанием свойств этого критерия, так же, как и таблицы с оценками мощности. В приложение вынесены лишь наиболее громоздкие таблицы.

1. Общие положения

1.1. Общие сведения о проверке статистических гипотез

При проверке гипотез о виде закона распределения различают простые и сложные гипотезы. Простая проверяемая гипотеза имеет вид $H_0: F(x) = F(x, \theta)$, где $F(x, \theta)$ – функция распределения вероятностей, с которой проверяют согласие наблюдаемой выборки X_1, X_2, \dots, X_n объёмом n , а θ – известное значение параметра (скалярного или векторного).

Сложная проверяемая гипотеза имеет вид $H_0: F(x) \in \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$, где Θ – область определения параметра θ .

При проверке гипотезы о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону проверяемая гипотеза имеет вид $H_0:$

$$F(x) \in \{F(x, \mu, \sigma), \mu \in (0, \infty), \sigma(0, \infty)\}, \text{ где } F(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

– функция распределения вероятностей нормального закона.

Для проверки этой гипотезы может использоваться ряд критериев, построенных специально для проверки принадлежности именно нормальному закону, а также применяться совокупность непараметрических критериев согласия и критериев согласия типа χ^2 .

Тот факт, что проверяется сложная гипотеза, особенно существенен для применения непараметрических критериев согласия, так как не могут быть использованы классические результаты для этих критериев, имеющие место при проверке простых гипотез [131]. Свои особенности применения в этом случае имеют и критерии согласия типа χ^2 .

С каждым из критериев, используемых для проверки гипотезы H_0 , связана некоторая статистика S , измеряющая в соответствии с некоторой мерой расстояние между теоретическим законом распределения вероятностей и эмпирическим законом, определяемым выборкой. В силу случайности извлекаемых выборок случайными оказываются и значения статистики S , вычисляемые в соответствии с

этими выборками. При справедливости проверяемой гипотезы H_0 статистика S подчиняется некоторому распределению $G(S|H_0)$.

Схема проверки гипотезы заключается в следующем. Область определения статистики разбивается на два подмножества, одно из которых представляет собой критическую область, и попадание в которую при справедливости H_0 маловероятно. При попадании вычисленного по выборке значения S^* статистики S в критическую область проверяемая гипотеза H_0 отклоняется (отвергается). В противном случае – нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

Заметим, что неотклонение гипотезы H_0 в процессе проверки не означает, что она справедлива. Истинный закон распределения реальных случайных величин остается всегда неизвестным. Результат проверки свидетельствует лишь о том, что этот закон, возможно, не очень сильно отличается, в данном случае, от нормального.

С другой стороны, может быть отклонена и справедливая гипотеза H_0 и эти самым совершена ошибка 1-го рода. При проверке гипотез, как правило, задают вероятность ошибки 1-го рода α (уровень значимости), допуская тем самым возможность отклонения H_0 и возможность такой ошибки.

При построении критериев стремятся к использованию одномерных статистик, что упрощает построение критической области. При этом критерии могут быть правосторонними, левосторонними и двусторонними, что определяет построение критической области.

Все непараметрические критерии согласия и критерии типа χ^2 – правосторонние, и проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики. Среди специальных критериев проверки нормальности большинство правосторонних и двусторонних, но есть и ряд левосторонних критериев.

В случае правостороннего критерия граница критической области (критическое значение) $S_{1-\alpha}$, определяется уравнением

$$\alpha = \int_{S_{1-\alpha}}^{\infty} g(s|H_0)ds = 1 - G(S_{1-\alpha}|H_0), \quad (1.1)$$

где $g(s|H_0)$ – условная плотность распределения статистики при справедливости H_0 . Для используемых на практике критериев асимптотические (предельные) распределения $G(S|H_0)$ соответствующих статистик при условии истинности гипотезы H_0 , как правило, известны. Критическое значение $S_{1-\alpha}$ обычно берут из соответствующей таблицы процентных точек (квантилей распределения $G(S|H_0)$) или вычисляют.

В принятой практике статистического анализа обычно полученное значение статистики S^* сравнивают с критическим значением $S_{1-\alpha}$ при заданном уровне значимости α . Проверяемую гипотезу H_0 отклоняют, если $S^* > S_{1-\alpha}$ (рис. 1.1).

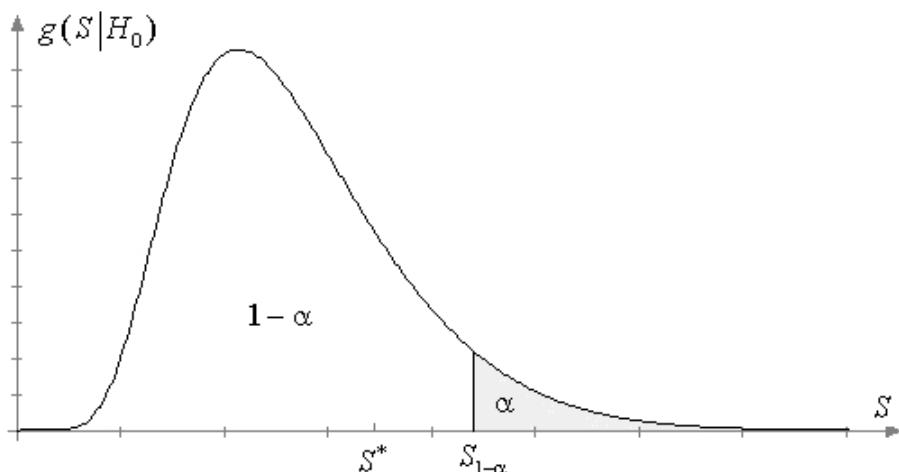


Рис. 1.1. Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и критическое значение для правостороннего критерия

Больше информации о степени согласия можно почертнуть из «достигнутого уровня значимости»: величины вероятности возможного превышения полученного значения статистики при справедливости нулевой гипотезы (p_{value})

$$p_{value} = P\{S > S^*\} = \int_{S^*}^{\infty} g(s|H_0) ds = 1 - G(S^*|H_0). \quad (1.2)$$

Именно эта вероятность позволяет судить о том, насколько хорошо выборка согласуется с теоретическим распределением, так как по существу представляет собой вероятность истинности нулевой гипотезы (рис. 1.2). Гипотезу о согласии не отвергают, если $P\{S > S^*\} > \alpha$.

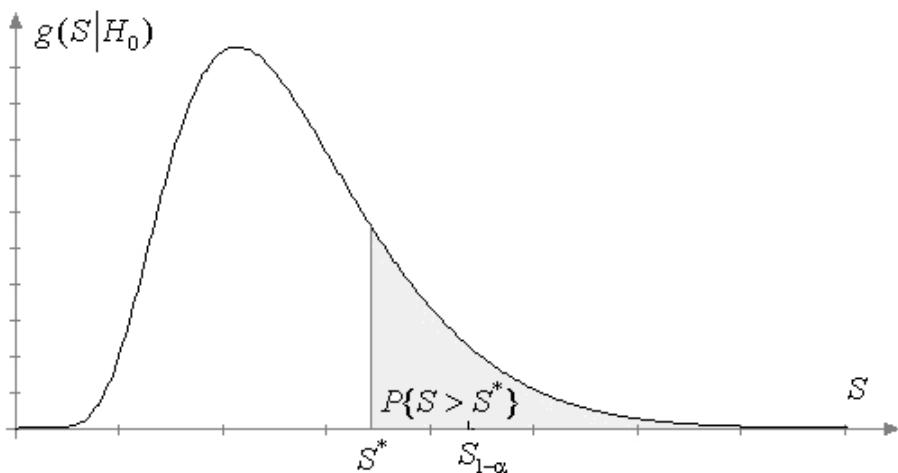


Рис. 1.2. Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и достигнутый уровень значимости

В случае левостороннего критерия граница критической области S_α , определяется уравнением

$$\alpha = \int_{-\infty}^{S_\alpha} g(s|H_0) ds = G(S_\alpha|H_0). \quad (1.3)$$

Проверяемую гипотезу H_0 отклоняют, если $S^* < S_\alpha$ (рис. 1.3). Достигнутый уровень значимости p_{value} в этом случае определяется выражением

$$p_{value} = P\{S < S^*\} = \int_{-\infty}^{S^*} g(s|H_0) ds = G(S^*|H_0). \quad (1.4)$$

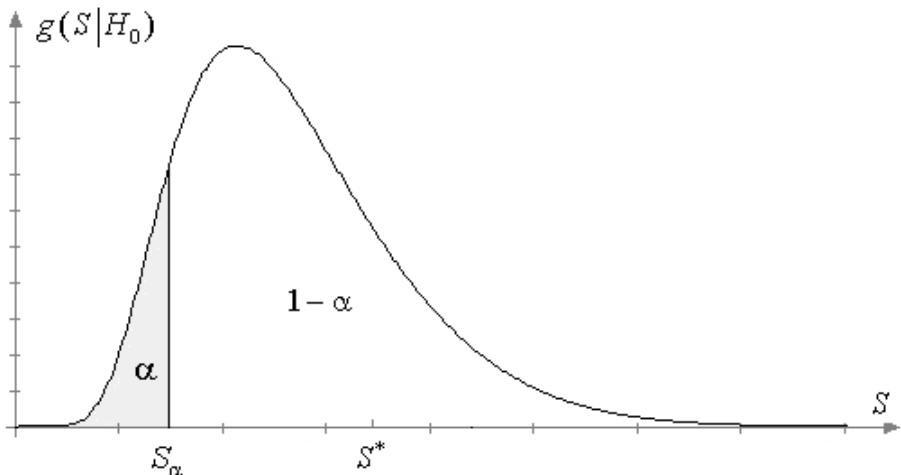


Рис. 1.3. Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и критическое значение для левостороннего критерия

В случае двустороннего критерия критическая область состоит из двух частей. И проверяемая гипотеза H_0 отклоняется, если $S^* < S_{\alpha/2}$ или $S^* > S_{1-\alpha/2}$. А достигнутый уровень значимости (**p-value**) в этом случае определяется соотношением

$$p_{value} = 2 \min \left\{ G(S^*|H_0), 1 - G(S^*|H_0) \right\}. \quad (1.5)$$

Задачи оценивания параметров и проверки гипотез опираются на выборки независимых случайных величин. Случайность самой выборки предопределяет, что возможны и ошибки в результатах статистических выводов. С результатами проверки гипотез связывают ошибки двух видов: ошибка первого рода состоит в том, что отклоняют гипотезу H_0 , когда она верна; ошибка второго рода состоит в том, что принимают (не отклоняют) гипотезу H_0 , в то время как справедлива конкурирующая гипотеза H_1 . Уровень значимости α

задает вероятность ошибки первого рода. Обычно, используя критерии проверки гипотез, не рассматривают конкретную конкурирующую гипотезу. В таком случае при проверке гипотез о виде закона можно считать, что конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : F(x) \neq F(x, \theta_0)$.

Если же гипотеза H_1 задана и имеет, например, вид $H_1 : F(x) = F_1(x, \theta)$, то задание величины α для используемого критерия проверки гипотез определяет и вероятность ошибки второго рода β . Ошибка второго рода заключается в том, что не отклоняется гипотеза H_0 , когда на самом деле справедлива гипотеза H_1 .

Вероятность ошибки второго рода β для правостороннего критерия определяется выражением

$$\beta = \int_{-\infty}^{S_{1-\alpha}} g(s|H_1)ds, \quad (1.6)$$

для левостороннего – выражением

$$\beta = \int_{S_\alpha}^{\infty} g(s|H_1)ds, \quad (1.7)$$

а для двустороннего – соотношением

$$\beta = \int_{S_{\alpha/2}}^{S_{1-\alpha/2}} g(s|H_1)ds. \quad (1.8)$$

Для конкретной альтернативы H_0 и H_1 задание вероятности ошибки 1-го рода определяет и вероятность ошибки 2-го рода. Рис. 1.4 поясняет это для правостороннего критерия. На рис. 1.4 $g(s|H_0)$ отображает плотность распределения статистики S при справедливости гипотезы H_0 , а $g(s|H_1)$ – плотность распределения при справедливости H_1 .

Мощность критерия представляет собой величину $1 - \beta$. Очевидно, что чем выше мощность используемого критерия при заданном значении α , тем лучше он различает гипотезы H_0 и H_1 . Особенно

важно, чтобы используемый критерий хорошо различал близкие конкурирующие гипотезы. Графически требование максимальной мощности критерия означает, что на рис. 1.4 плотности распределений статистики $g(s|H_0)$ и $g(s|H_1)$ должны быть максимально «раздвинуты».

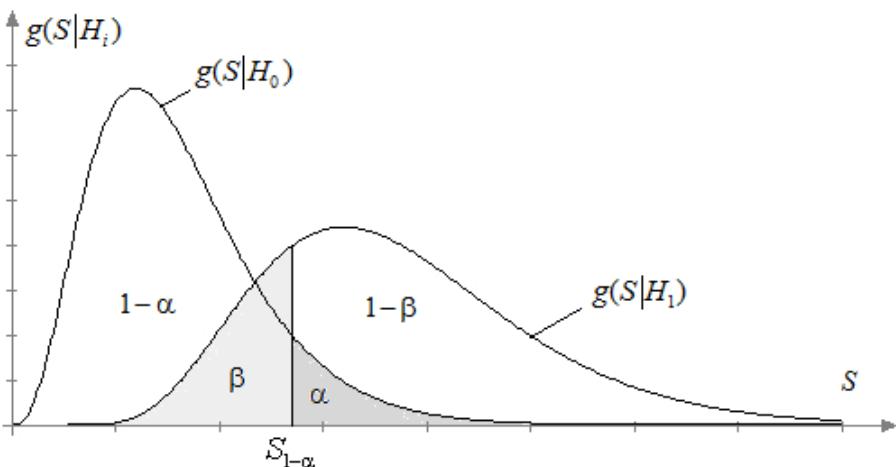


Рис. 1.4. Плотности распределения статистик при справедливости соответственно гипотез H_0 и H_1 в случае правостороннего критерия

Аналогичным образом можно проиллюстрировать вероятности ошибок второго рода и мощности для левостороннего и двустороннего критериев.

Очевидно, что при проверке любой статистической гипотезы желательно использовать наиболее мощный критерий, который для заданной вероятности ошибки первого рода обеспечивает минимальную вероятность ошибки второго рода относительно любой конкурирующей гипотезы H_1 . Ещё лучше использовать равномерно наиболее мощный критерий, который для любого заданного α обеспечивает минимальное значение β . Однако существование такого критерия для проверки конкретной гипотезы H_0 является редчайшим исключением. Нет такого и среди критериев, которые могут использоваться для проверки гипотезы о принадлежности наблюдаемой выборки нормальному закону.

1.2. Конкурирующие гипотезы

В данном руководстве при исследовании распределений статистик проверяемой гипотезе H_0 всегда соответствует принадлежность наблюдаемой выборки нормальному закону распределения

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \theta_0)^2}{2\theta_1^2} \right\}. \quad (1.9)$$

При исследовании зависимости распределений статистик от вида наблюдаемого закона и исследовании мощности критериев рассматривалось целое множество конкурирующих распределений. Но в разделах 2-4 основные свойства критериев демонстрируются только на альтернативах, позволяющих показать как достоинства, так и некоторые ранее неизвестные недостатки отдельных критериев.

В качестве таких конкурирующих гипотез при исследовании мощности критериев рассмотрена принадлежность анализируемой выборки следующим законам: конкурирующая гипотеза H_1 соответствует обобщённомуциальному закону (семейству распределений) с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp \left\{ -\left(\frac{|x - \theta_0|}{\theta_1} \right)^{\theta_2} \right\} \quad (1.10)$$

и параметром формы $\theta_2 = 4$; гипотеза H_2 – распределению Лапласа с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2\theta_1} \exp \left\{ -|x - \theta_0| / \theta_1 \right\}, \quad (1.11)$$

гипотеза H_3 – логистическому распределению с плотностью

$$f(x) = \frac{\pi}{\theta_1 \sqrt{3}} \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}} \right\} \left/ \left[1 + \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}} \right\} \right]^2 \right., \quad (1.12)$$

очень близкому к нормальному. При этом, если это не влияло на результаты исследований, выборки, как правило, моделировались с параметром масштаба $\theta_1 = 1$ и параметром сдвига $\theta_0 = 0$. На рис. 1.5 показаны функции плотности распределений, соответствующих H_1 , H_2 , H_3 , при значениях параметров масштаба, при которых они наиболее близки стандартному нормальному закону.

Такой выбор конкурирующих гипотез (конкурирующих законов) имеет под собой определенные основания. Гипотеза H_2 , соответствующая распределению Лапласа, является наиболее далекой от H_0 . При различии этих двух гипотез проблем обычно не возникает.

Логистическое распределение, соответствующее конкурирующей гипотезе H_3 , это распределение очень близкое к нормальному закону. И эти два закона, как правило, трудно различать с использованием критериев согласия.

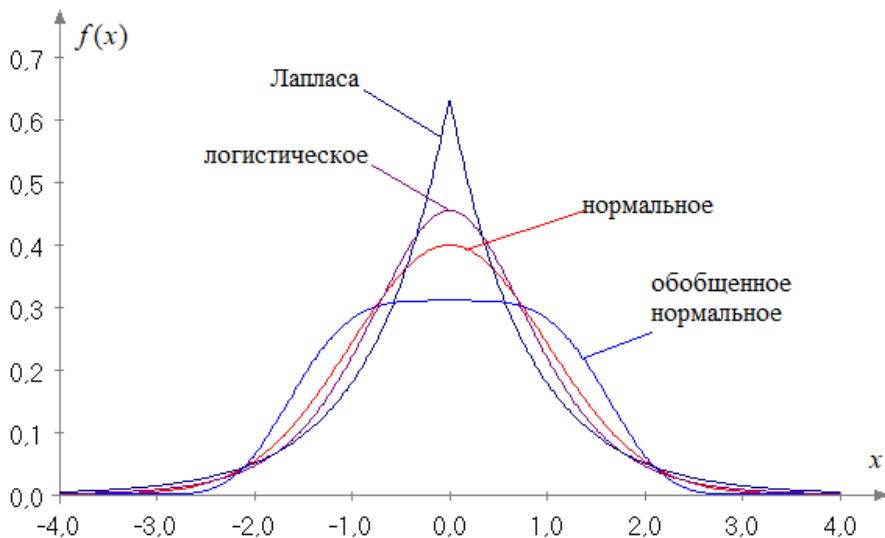


Рис. 1.5. Плотности законов распределения, соответствующие рассматриваемым гипотезам H_0 , H_1 , H_2 , H_3

Конкурирующая гипотеза H_1 , которой соответствует обобщённый нормальный закон с параметром формы $\theta_2 = 4$, представляет собой

“лакмусовую бумагу”, на которой проявились скрытые недостатки отдельных критериев. Ряд критериев, предназначенных для проверки гипотезы о нормальности, при ограниченных объемах выборок n неспособен отличать законы, близкие к такому, от нормального закона. Оказалось, что мощность $1 - \beta$ относительно гипотезы H_1 при малых заданных вероятностях ошибок первого рода α и ограниченных (малых) n для целого ряда критериев представляет собой величину, меньшую α . Образно говоря, “с позиции критерия” это означает, что закон, соответствующий H_1 , является “более нормальным, чем нормальный”. А сам этот факт свидетельствует о смещённости критерия.

Оценки мощности относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 , приводимые при описании критериев, позволяют, сравнивая их, оценить достоинства и недостатки конкретных критериев, и подсказать, применение какого критерия предпочтительней в имеющейся ситуации.

Для того, чтобы оценить возможности критериев по распознаванию асимметричных альтернатив, в дополнение к H_1 , H_2 и H_3 иногда будут рассматриваться конкурирующие гипотезы H_4 , соответствующая распределению минимального значения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1} \exp \left\{ \frac{x - \theta_0}{\theta_1} - \exp \left(\frac{x - \theta_0}{\theta_1} \right) \right\}, \quad (1.13)$$

где $x \in (-\infty, \infty)$, с параметрами $\theta_0 = 0.38$, $\theta_1 = 0.8$, и H_5 , соответствующая распределению максимального значения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1} \exp \left\{ -\frac{x - \theta_0}{\theta_1} - \exp \left(-\frac{x - \theta_0}{\theta_1} \right) \right\}, \quad (1.14)$$

и параметрами $\theta_0 = -0.38$, $\theta_1 = 0.8$.

При таких значениях параметров плотности (1.13) и (1.14) наиболее близки к плотности стандартного нормального закона. Функции

плотности законов, соответствующие H_0 , H_4 и H_5 , представлены на рис. 1.6.

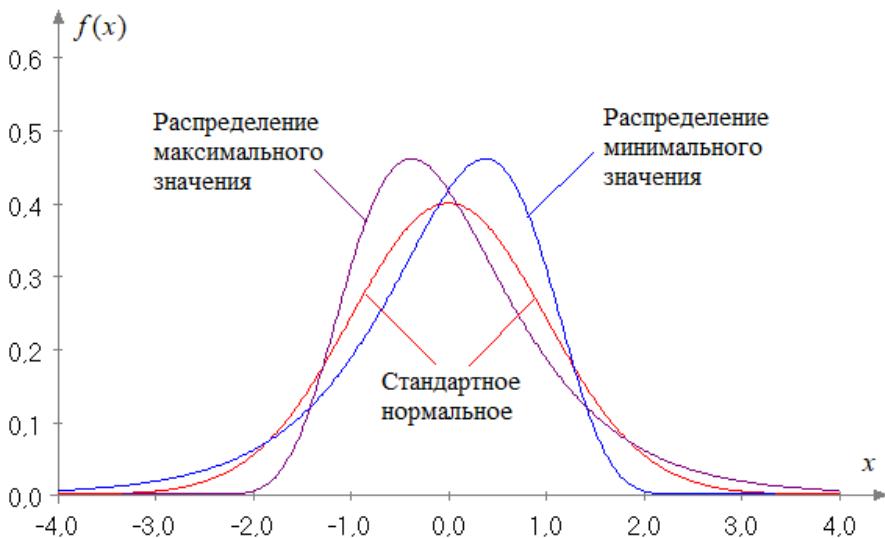


Рис. 1.6. Плотности распределений, соответствующие гипотезам H_0 , H_4 , H_5

Мощность относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 в данном руководстве исследуется для каждого критерия нормальности. Именно на основании этих оценок и устанавливается предпочтительность того или иного критерия.

Мощность относительно асимметричных альтернатив оценивается только в некоторых случаях для уточнения рейтинга. Связано это с тем, что именно симметричные законы труднее отличать от нормального.

2. Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона

2.1. Критерий проверки на симметричность

Данный критерий [21, 7] предназначен для проверки гипотез о симметричности наблюдаемого закона (против наличия асимметрии) при объемах выборки $8 \leq n \leq 5000$. Статистика критерия

$$\sqrt{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3}, \quad (2.1)$$

при вычислении которой оценки используемых центральных моментов (в том числе $\hat{\mu}_2 = E[(X - \bar{\mu})^2] = \sigma^2$) вычисляются по выборке X_1, X_2, \dots, X_n в соответствии с соотношением

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^j, \quad (2.2)$$

где

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Критерий двусторонний: проверяется гипотеза $H_0: \sqrt{\beta_1} = 0$ при конкурирующей гипотезе о наличии асимметрии $\sqrt{\beta_1} > 0$ (положительная асимметрия) или $\sqrt{\beta_1} < 0$ (отрицательная асимметрия).

В стандарте [103] и первоисточниках [21, 7] приводятся только таблицы процентных точек (табл. А.1, приложение А). Ничего не говорится о виде распределения. Распределение статистики (2.1) в случае нормального закона является симметричным и зависит от числа наблюдений (рис. 2.1). В [100] говорится, что распределение статистики (2.1) очень быстро приближается к нормальному с нулевым математическим ожиданием и асимптотической дисперсией $6(n-2)/[(n+1)(n+3)]$.

Критерий, использующий статистику (2.1), является критерием проверки только на симметричность. Его использование полезно при

проверке отклонений от нормального закона, но неотклонение гипотезы о симметричности на основании предположений о нормальности закона не может служить подтверждением нормальности (условие необходимое, но недостаточное), так как распределение статистики (2.1) зависит от вида наблюдаемого закона (рис. 2.2).

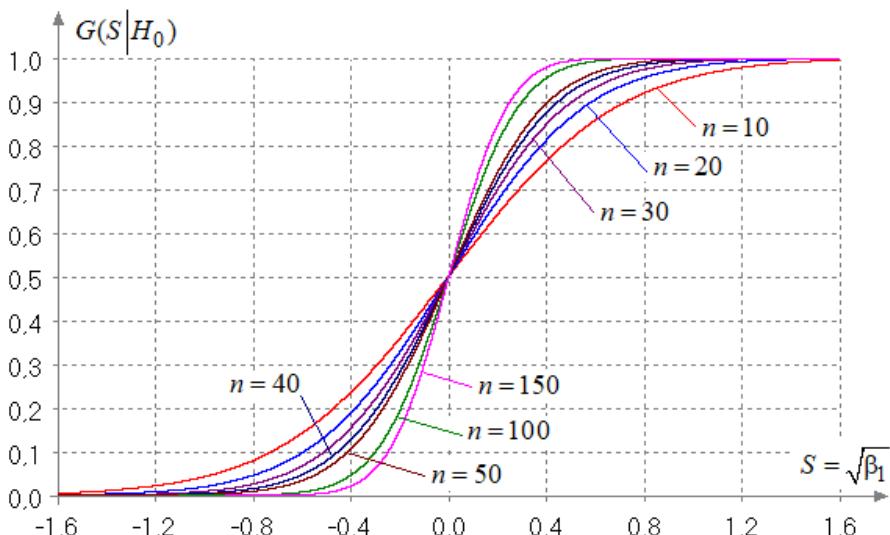


Рис. 2.1. Распределения статистики (2.1) в зависимости от объема выборки при $n = 10, 20, 30, 40, 50, 100, 150$ в случае нормального закона

Нормальное распределение не единственное симметричное распределение. Поэтому проверяемая гипотеза о симметричности может необоснованно и отклоняться, и не отклоняться. Например, в случае принадлежности наблюдаемых выборок распределению семейства (2.2) с параметром формы $\theta_2 = 4$ (при справедливости H_1) и использования процентных точек для статистики (2.1), построенных в предположении нормальности закона, гипотеза о симметричности не будет отклоняться с большим достигаемым уровнем значимости.

Статистику (2.1) в ряде случаев используют совместно со статистикой (2.3) критерия проверки на эксцесс. В стандарте [103] рассматривается критерий с такой двумерной статистикой

(совместный критерий в разделе 2.3), однако критерий несколько неудобен в использовании из-за сложности задания критической области.

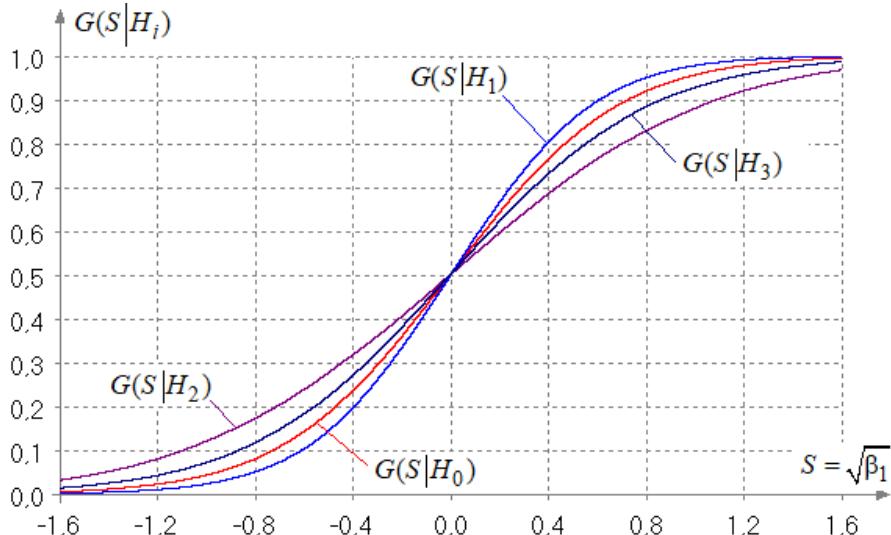


Рис. 2.2. Распределения статистики критерия проверки на симметричность в зависимости от гипотез H_i при объеме выборок $n = 10$

Совместно эти статистики используются также в критерии, изложенном в разделе 2.6, и в критерии Д'Агостино, представленном в разделе 2.8.

2.2. Критерий проверки на эксцесс

В стандарте [103] предусмотрено использование критерия проверки на эксцесс [7, 22] при объемах выборок $8 \leq n \leq 5000$. Статистика критерия проверки на значение эксцесса имеет вид

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4}. \quad (2.3)$$

Критерий двусторонний: проверяется гипотеза вида $H_0: \beta_2 = 3$ при конкурирующих гипотезах $\beta_2 > 3$ (больший эксцесс) или $\beta_2 < 3$ (меньший эксцесс).

В стандарте [103] и первоисточниках [7, 22] приводятся лишь таблицы процентных точек (табл. А.2, приложение А). Распределение статистики зависит от объема рассматриваемых выборок. В [100] говорится, что распределение статистики (2.3) даже при больших объемах выборок n оказывается далеким от нормального. В этом можно убедиться, посмотрев на рис. 2.3, где приведены графики полученных в результате моделирования распределений статистики критерия проверки на эксцесс в зависимости от объема выборки n .

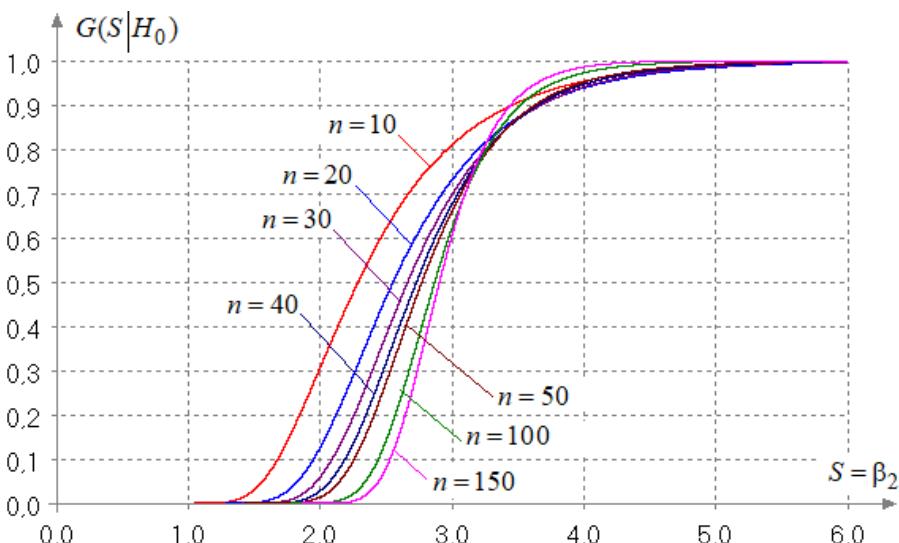


Рис. 2.3. Графики распределений статистики критерия проверки на эксцесс в зависимости от объема выборки при $n = 10, 20, 30, 40, 50, 100, 150$

Распределения статистики (2.3) были исследованы при наблюдаемых законах, соответствующих рассмотренным выше гипотезам H_i . Результаты исследований позволяют судить о мощности критерия проверки на эксцесс относительно различных конкурирующих гипотез.

Естественно, распределения статистики (2.3) зависят от наблюдаемого закона. На рис. 2.4 и 2.5 показано изменение распределения статистики (2.3) в зависимости от наблюдаемого закона при справедливости рассматриваемых конкурирующих гипотез H_i и объемах выборок $n = 10$ и $n = 50$.

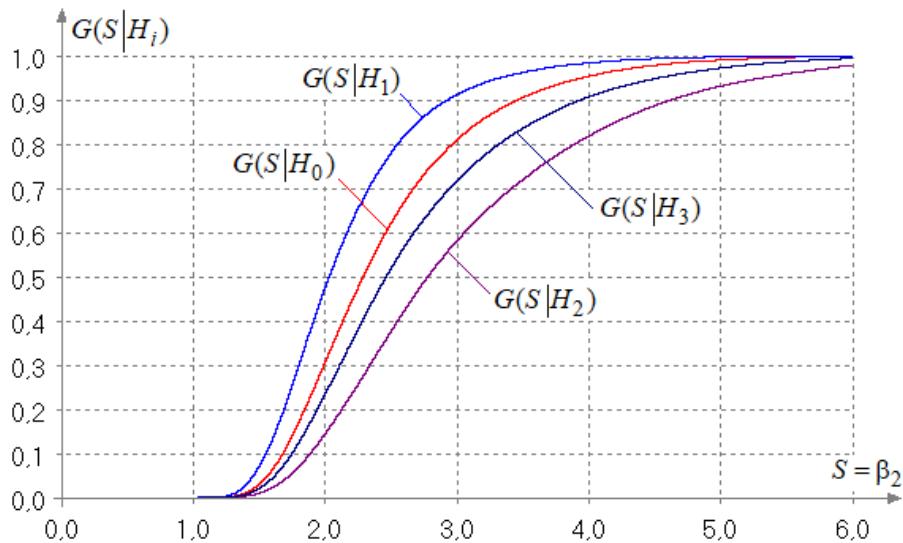


Рис. 2.4. Распределения статистики (2.3) критерия проверки на эксцесс в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i , при $n = 10$

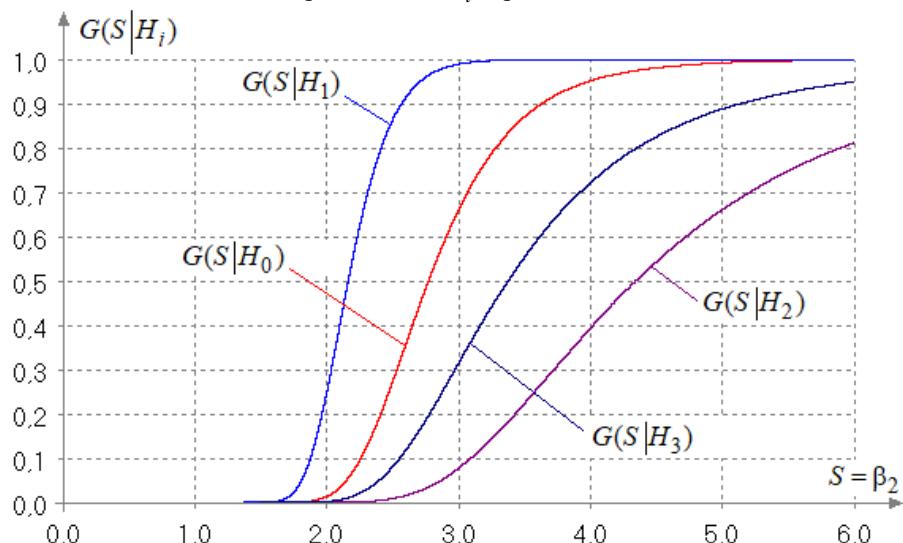


Рис. 2.5. Распределения статистики (2.3) критерия проверки на эксцесс в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i , при $n = 50$

Вместе с критерием симметричности данный критерий позволяет судить о степени отклонения наблюдаемой выборки от нормального закона. Недостатком критерия является сильная зависимость распределения статистики (2.3) от объема выборок.

Совместный критерий проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса [13] в стандарте рассматривается при объемах выборок $20 \leq n \leq 1000$ (там он назван многонаправленным критерием). Проверяемая гипотеза имеет вид $H_0: \sqrt{\beta_1} = 0$ и $\beta_2 = 3$ при конкурирующих гипотезах $\sqrt{\beta_1} \neq 0$ и (или) $\beta_2 \neq 3$. В стандарте приведены кривые, определяющие критическую область при уровне значимости $\alpha = 0.05$ и $\alpha = 0.01$.

При подготовке данного руководства такой совместный критерий не исследовался. Результаты исследования различных вариантов критериев, построенных на основе (совместного) использования статистик (2.1) и (2.3), и не вошедших в стандарт, рассмотрены ниже в разделах 2.6 и 2.8.

2.3. Критерий Шапиро–Уилка (Shapiro–Wilk Test)

Критерий Шапиро–Уилка [76, 77], базируется на анализе линейной комбинации разностей порядковых статистик. В стандарте [103] применение критерия предусмотрено при объемах выборок $8 \leq n \leq 50$. Сложность применения при больших объемах выборок затруднена из-за отсутствия в документе соответствующих коэффициентов. При объемах выборок $51 \leq n \leq 99$ коэффициенты и таблицы процентных точек можно найти в [77]. В стандарте критерий рекомендуют использовать при отсутствии априорной информации о типе возможного отклонения от нормальности в тех случаях, когда в качестве альтернативы можно выбрать гипотезу следующего вида: примерно симметричное распределение с $|\sqrt{\beta_1}| < 1/2$ и $\beta_2 < 3$ или асимметричное распределение (например, $|\sqrt{\beta_1}| > 1/2$). В противном случае рекомендуют критерий Эпса–Пулли. Данная рекомендация неочевидна и требует подтверждения.

При построении статистики для вариационного ряда $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$, полученного по наблюдаемой выборке X_1, X_2, \dots, X_n , вычисляют величину

$$S = \sum_k a_k [X_{(n+1-k)} - X_{(k)}],$$

где индекс k изменяется от 1 до $n/2$ или от 1 до $(n-1)/2$ при четном и нечетном n соответственно. Коэффициенты a_k приведены в стандарте и первоисточниках [76, 78] (табл. А.3, приложение А). Статистика критерия имеет вид

$$W = S^2 / \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \quad (2.4)$$

Критерий левосторонний: гипотеза о нормальности отвергается при малых значениях статистики W . В стандарте и литературе отсутствует информация об аналитическом виде распределения статистики, приводятся лишь процентные точки (табл. А.4, приложение А).

Как и в предыдущих случаях, распределения статистики (2.4) исследовались методами статистического моделирования. На рис. 2.6 показано изменение распределения статистики критерия Шапиро–Уилка в зависимости от объема выборки, принадлежащей нормальному закону.

Распределения статистики (2.4) исследовались при различных наблюдаемых законах. Исследовалась также мощность критерия. В качестве проверяемой гипотезы H_0 рассмотрен нормальный закон распределения с параметром масштаба, равным 1, и параметром сдвига, равным 0. В качестве близких конкурирующих гипотез рассмотрены гипотезы: H_1 – выборка соответствует семейству распределений (1.10) с параметром формы, равным 4, H_2 – распределению Лапласа (1.11) с параметрами (0,1), H_3 – логистическому распределению (1.12) с параметрами (0,1).

Например, на рис. 2.7 приведены полученные условные распределения $G(S|H_i)$ статистики (2.4) при справедливости гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 при объеме выборок $n = 10$.

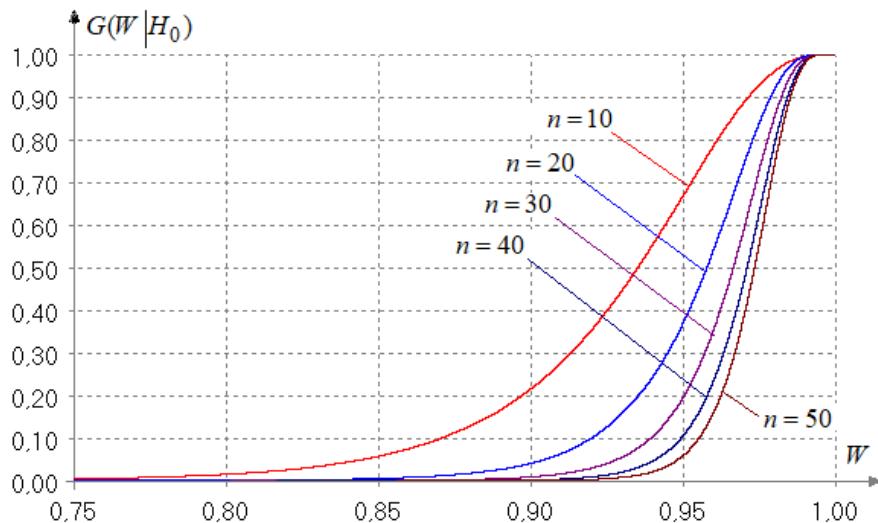


Рис. 2.6. Распределения статистики критерия Шапиро–Уилка в зависимости от объема выборки при $n = 10, 20, 30, 40, 50$

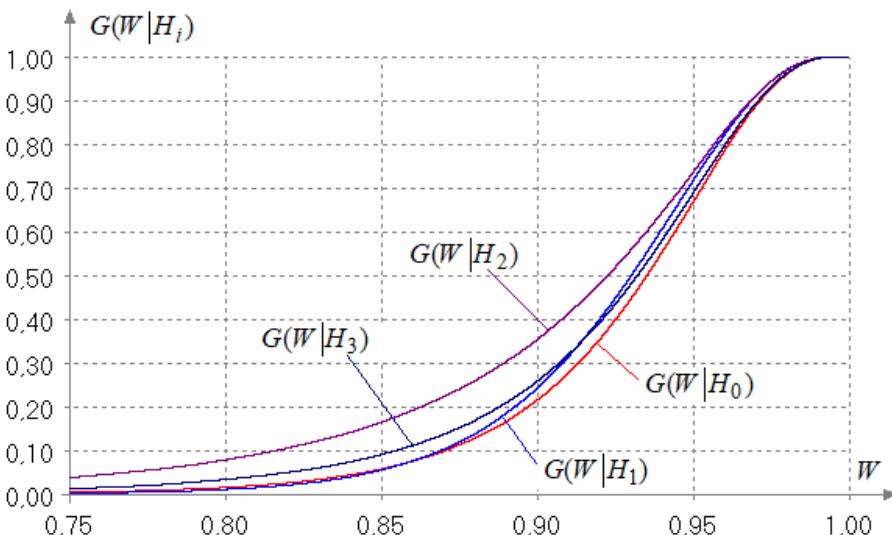


Рис. 2.7. Условные распределения $G(W|H_i)$ статистики (2.4) при справедливости гипотез при объеме выборок $n = 10$

Результаты исследований показали, что при малых объемах выборок (10...20 наблюдений) критерий Шапиро–Уилка *не способен различать гипотезы H_0 и H_1* . Еще в меньшей степени критерий замечает различие между нормальным распределением и распределением семейства (1.10) с параметром формы $\theta_2 = 3$. Более того, по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 критерий оказывается смещённым. Но с ростом числа наблюдений мощность критерия по распознаванию гипотез H_0 и H_1 растет.

На рис. 2.8 для сравнения показаны условные распределения статистики (2.4) при $n = 50$.

Значения мощности критерия Шапиро–Уилка по отношению к конкурирующим гипотезам H_1 , H_2 , H_3 при различных значениях уровня значимости α (вероятности ошибки первого рода) приведены соответственно в табл. 2.1–2.3.

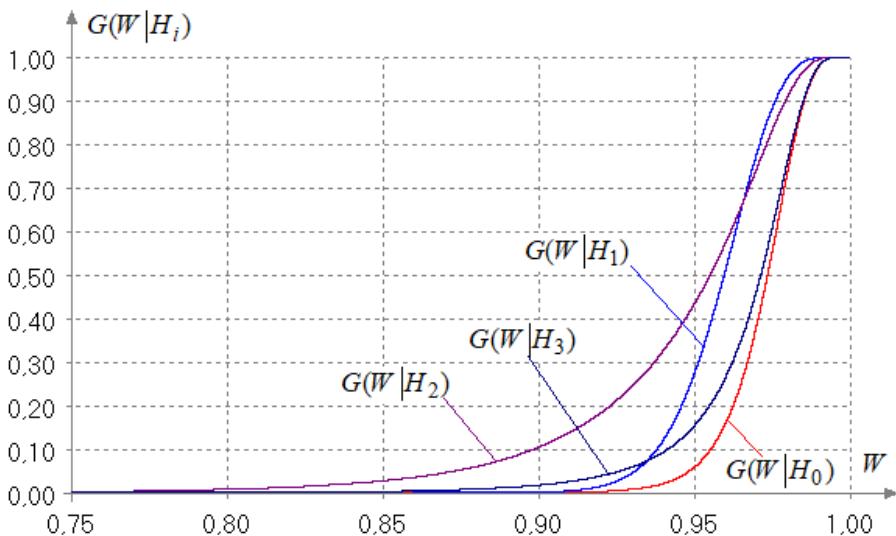


Рис. 2.8. Условные распределения $G(W|H_i)$ статистики (2.4) при справедливости гипотез при объеме выборок $n = 50$

Как показывают в том числе и наши исследования, мощность

критериев, специально построенных для проверки отклонения от нормальности, таких как Шапиро–Уилка и Эппса–Пулли, на объемах выборок $n \leq 50$ выше мощности непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, типа ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова и типа Ω^2 Андерсона–Дарлинга при проверке сложных гипотез [147], которые в такой ситуации мощнее критериев типа χ^2 [148].

Таблица 2.1

**Мощность критерия Шапиро–Уилка относительно гипотезы H_1
(по отношению к распределению семейства (1.10) с параметром $\theta_2 = 4$)**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.165	0.105	0.047	0.020	0.006
20	0.206	0.135	0.060	0.024	0.007
30	0.289	0.201	0.101	0.046	0.014
40	0.395	0.294	0.167	0.087	0.033
50	0.495	0.389	0.242	0.140	0.061

Таблица 2.2

**Мощность критерия Шапиро–Уилка относительно гипотезы H_2
(по отношению к распределению Лапласа)**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.284	0.225	0.154	0.105	0.062
20	0.411	0.348	0.262	0.197	0.135
30	0.486	0.422	0.333	0.262	0.191
40	0.529	0.467	0.378	0.305	0.230
50	0.564	0.502	0.414	0.341	0.264

Таблица 2.3

**Мощность критерия Шапиро–Уилка относительно гипотезы H_3
(по отношению к логистическому закону)**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.192	0.139	0.082	0.048	0.024
20	0.236	0.182	0.117	0.077	0.044
30	0.256	0.201	0.135	0.093	0.057
40	0.257	0.203	0.140	0.098	0.063
50	0.256	0.203	0.141	0.101	0.066

Заметим, что с применением критериев согласия при малых объемах выборок вообще трудно различать близкие законы. Однако, например, непараметрические критерии согласия Колмогорова, типа ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова и типа Ω^2 Андерсона–Дарлинга, Купера и Ватсона не имеют выявленного в работе [120] недостатка, присущего критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Пулли: неспособность отличать от нормального закона распределения семейства (1.10) с более плоскими плотностями распределений ($\beta_2 < 3$).

Рейтинг критерия – 26.

2.4. Критерий Эппса–Пулли (Epps–Pulley Test)

Этот критерий [6, 5, 32, 46] базируется на сравнении эмпирической и теоретической характеристических функций. В стандарте предусмотрено его применение при $8 \leq n \leq 200$. Процентные точки в таком диапазоне даны с пропусками (табл. А.5, приложение А).

Статистика критерия, вычисляемая по наблюдаемой выборке X_1, X_2, \dots, X_n , имеет вид

$$T_{EP} = 1 + \frac{n}{\sqrt{3}} + \\ + \frac{2}{n} \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} \exp \left\{ -\frac{(X_j - X_k)^2}{2\hat{\mu}_2} \right\} - \sqrt{2} \sum_{j=1}^n \exp \left\{ -\frac{(X_j - \bar{X})^2}{4\hat{\mu}_2} \right\}, \quad (2.5)$$

где $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Выборка может быть не

упорядочена, порядок наблюдений произволен, но он должен быть неизменным в течение всех проводимых вычислений. Гипотезу о нормальности отвергают при больших значениях статистики.

Распределения статистики (2.5) исследовались методами статистического моделирования. При нормальном законе распределения случайной величины распределения статистик критерия незначительно меняются с ростом объемов выборок n (в отличие от распределений многих других рассмотренных здесь статистик). С ростом n наблюдается быстрая сходимость распределения статистики к некоторому предельному. На рис. 2.9 показаны распределения $G(T_{EP}|H_0)$ статистики критерия Эппса–Пулли при $n=10$ и при $n=1000$. При $n=50$ распределение $G(T_{EP}|H_0)$ практически совпадает с асимптотическим (при $n=1000$).

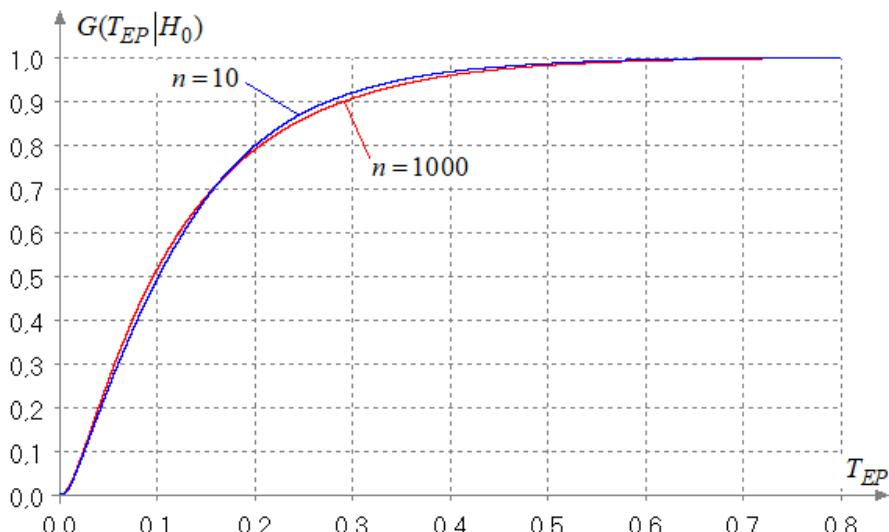


Рис. 2.9. Графики распределений статистики критерия Эппса–Пулли в зависимости от объема выборки при $n = 10, 20, 30, 40, 50, 100, 150$

Процентные точки распределений статистики (2.5) при различных объемах выборок отличаются существенно, но вероятности вида $P\{T_{EP} > T_{EP}^*\}$, вычисленные по распределениям статистики (2.5) при различных n , где T_{EP}^* – значение статистики, полученное по выборке, будут достаточно близкими.

В частности, распределения статистики критерия Эпса–Пулли при различных объемах выборок n достаточно хорошо аппроксимируются бета-распределениями III рода с функцией плотности

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{B(\theta_0, \theta_1)} \frac{t^{\theta_0-1}(1-t)^{\theta_1-1}}{[1 + (\theta_2 - 1)t]^{\theta_0+\theta_1}},$$

где $t = (x - \theta_4)/\theta_3 \in [0, 1]$. Если пренебречь зависимостью статистики (2.5) от объема выборки n , то при $15 < n < 50$ для приближенного вычисления достигаемого уровня значимости $P\{T_{EP} > T_{EP}^*\}$ можно использовать бета-распределение III рода с параметрами $\theta_0 = 1.8645$, $\theta_1 = 2.5155$, $\theta_2 = 5.8256$, $\theta_3 = 0.9216$, $\theta_4 = 0.0008$. Соответствующая функция распределения представляет собой некоторую среднюю для «пучка» распределений, приведенного на рис. 2.9.

При $n \geq 50$ для вычисления достигаемого уровня значимости $P\{T_{EP} > T_{EP}^*\}$ можно использовать предельное распределение, приближением которого является бета-распределение III рода со значениями параметров $\theta_0 = 1.7669$, $\theta_1 = 2.1668$, $\theta_2 = 6.7594$, $\theta_3 = 0.91$, $\theta_4 = 0.0016$.

Исследования распределений статистики критерия Эпса–Пулли при справедливости конкурирующих гипотез H_1 , H_2 , H_3 и оценка мощности критерия по отношению к данным гипотезам показали, что критерий имеет тот же недостаток, что и критерий Шапиро–Уилка: он оказывается смещённым относительно тех же конкурирующих гипотез. Подтверждением этому является картина, показанная на рис. 2.10, где представлены условные функции распределения

$G(S|H_i)$ статистики (2.5) при справедливости гипотез H_0 , H_1 , H_2 , H_3 и объеме выборок $n = 10$.

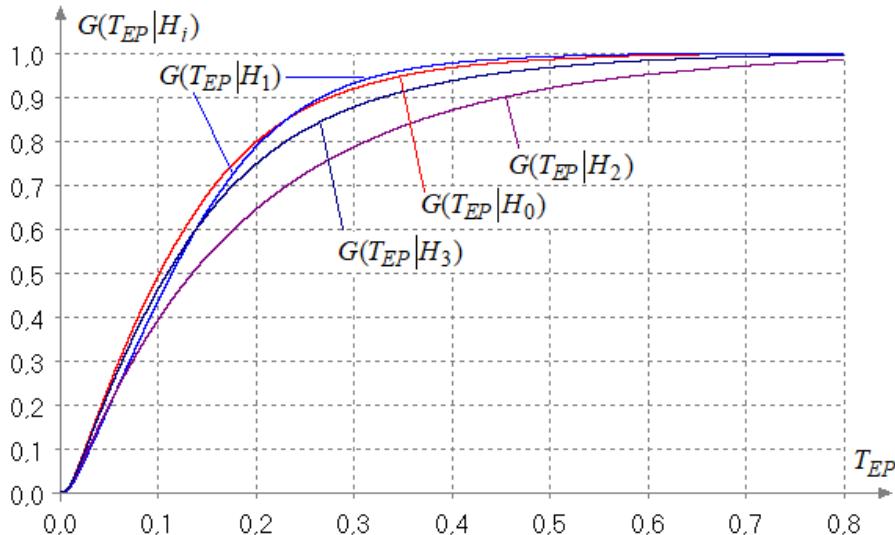


Рис. 2.10. Условные распределения $G(T_{EP}|H_i)$ статистики (2.5) при справедливости гипотез H_i и объеме выборок $n = 10$

При $n = 10$ мощность критерия Эппса–Пулли по отношению к гипотезе H_1 меньше (!) уровня значимости (при $\alpha \leq 0.1$). Это означает, что при верной гипотезе H_1 при проверке нормальности предпочтение всегда будет отдаваться гипотезе H_0 . При $n = 20$ распределения $G_{20}(S|H_0)$ и $G_{20}(S|H_1)$ в области значений функций распределения, больших 0.95, практически неразличимы, а при $n = 50$ критерий уже способен различать гипотезы H_0 и H_1 (рис. 2.11).

Значения мощности критерия Эппса–Пулли по отношению к альтернативам H_1 , H_2 , H_3 , которые можно сравнить с соответствующими значениями для критерия Шапиро–Уилка, приведены в табл. 2.4 – 2.6.

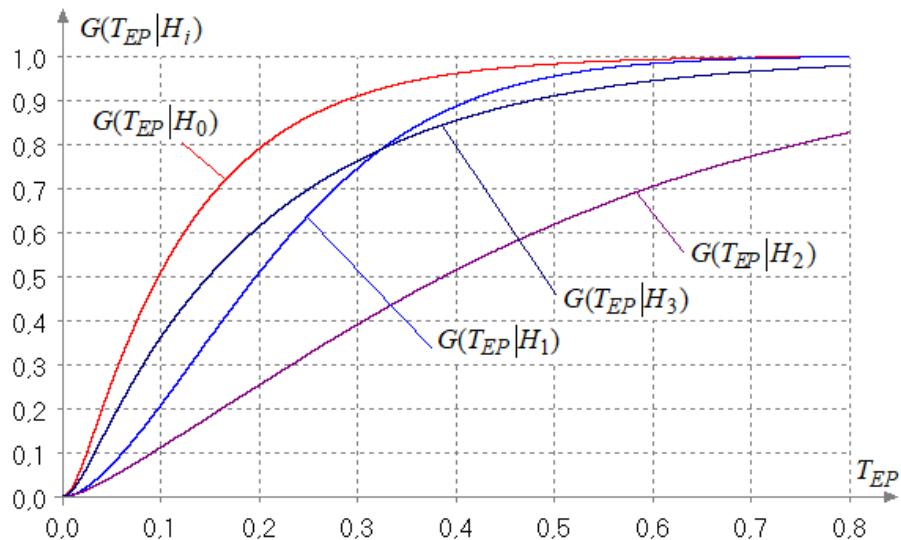


Рис. 2.11. Условные распределения $G(T_{EP} | H_i)$ статистики (2.5) при справедливости гипотез H_i и объеме выборок $n = 50$

Таблица 2.4

Мощность критерия Эпписа–Пулли относительно гипотезы H_1 (по отношению к распределению семейства (1.10) с параметром $\theta_2 = 4$)

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.149	0.090	0.038	0.016	0.005
20	0.198	0.124	0.053	0.021	0.007
30	0.257	0.169	0.076	0.032	0.010
40	0.320	0.221	0.107	0.048	0.015
50	0.383	0.275	0.143	0.068	0.022
100	0.658	0.545	0.366	0.223	0.101
150	0.835	0.752	0.592	0.426	0.244
200	0.928	0.880	0.765	0.622	0.425
300	0.989	0.977	0.940	0.977	0.748

Таблица 2.5

**Мощность критерия Эпписа–Пулли относительно гипотезы H_2
(по отношению к распределению Лапласа)**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.300	0.240	0.164	0.111	0.064
20	0.422	0.355	0.263	0.194	0.127
30	0.525	0.454	0.352	0.271	0.187
40	0.614	0.544	0.438	0.347	0.248
50	0.690	0.623	0.516	0.422	0.315
100	0.906	0.870	0.801	0.724	0.619
150	0.975	0.961	0.931	0.889	0.821
200	0.994	0.990	0.978	0.961	0.927
300	1	0.999	0.998	0.996	0.991

Таблица 2.6

**Мощность критерия Эпписа–Пулли относительно гипотезы H_3
(по отношению к логистическому закону)**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.199	0.145	0.085	0.050	0.025
20	0.236	0.178	0.112	0.070	0.038
30	0.265	0.204	0.131	0.084	0.047
40	0.290	0.227	0.148	0.097	0.055
50	0.317	0.249	0.166	0.110	0.063
100	0.429	0.353	0.250	0.175	0.108
150	0.529	0.449	0.335	0.244	0.157
200	0.616	0.537	0.418	0.316	0.213
300	0.750	0.682	0.566	0.460	0.337

По отношению к конкурирующей гипотезе H_3 (логистическому закону) на объемах выборок $n \leq 50$ критерий Эпсса–Пулли мощнее критерия Шапиро–Уилка при больших уровнях значимости ($\alpha = 0.1$) и уступает критерию Шапиро–Уилка по мощности при малых уровнях значимости ($\alpha = 0.01$).

Рейтинг критерия – 24.

2.5. Модифицированный критерий Шапиро–Уилка

Необходимость проверки отклонения от нормального распределения с использованием нескольких независимых выборок возникает достаточно часто. Это бывает связано с тем, что каждая отдельная выборка оказывается слишком мала для обнаружения значимого отклонения от нормального распределения. В такой ситуации при выборках одинакового объема $n > 8$ стандарт [103] рекомендует применять модифицированный критерий Шапиро–Уилка, который позволяет принять решение по совокупности анализируемых выборок.

При проверке для каждой из h последовательно анализируемых выборок объемом n , отобранных из одной генеральной совокупности, подсчитывается значение W_j ($j = \overline{1, h}$) в соответствии с выражением

$$W_j = S_j^2 \left/ \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right..$$

Значения $S_j = \sum_k a_k [X_{(n+1-k)} - X_{(k)}]$ по соответствующей выборке вычисляются как и в критерии Шапиро–Уилка, где индекс k изменяется от 1 до $n/2$ или от 1 до $(n-1)/2$ при четном и нечетном n соответственно. Коэффициенты a_k приведены в стандарте и первоисточниках [21, 7] (табл. А.3, приложение А).

Для совместного критерия вычисляют значения C_j по формуле

$$C_j = \gamma(n) + \delta(n)v_j,$$

где $v_j = \ln \left\{ \frac{W_j - E(n)}{1 - W_j} \right\}$. Коэффициенты $\gamma(n)$, $\delta(n)$ и $E(n)$ для

преобразования W_j и C_j табулированы [103, 9] и приведены в данном руководстве (табл. А.6, приложение А).

Утверждается, что если основное распределение вероятностей нормальное, то величины C_j приближенно подчиняются нормальному закону, а статистика модифицированного критерия

$$S_M = \sqrt{h} \cdot \bar{C}, \quad (2.6)$$

где $\bar{C} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h C_j$, – стандартномуциальному закону.

Проверяемая гипотеза о принадлежности выборок нормальному закону отклоняется при уровне значимости α , если $S_M < u_\alpha$, где u_α – α -квантиль стандартного нормального распределения (левосторонний критерий). Заметим, что в стандарте [103] в формуле (19) – ошибка!

К сожалению, наши исследования показали, что распределение статистики (2.6) лишь очень приближенно подчиняется стандартному нормальному закону и зависит от n и h . При конкретных комбинациях n и h условное распределение статистики $G_{n,h}(S_M | H_0)$ может существенно отличаться от стандартного нормального закона, что является существенным недостатком критерия. Как правило, функция распределения статистики оказывается сдвинутой влево от стандартного нормального закона. Таким образом, принимая решение на основании процентных точек стандартного нормального закона в соответствии с $S_M < u_\alpha$, мы можем несправедливо отклонить верную гипотезу H_0 , т. е. вероятность ошибки первого рода на самом деле оказывается больше задаваемого α . На рис. 2.12 в качестве примера приведены распределения статистики $G_{n,h}(S_M | H_0)$ при различных комбинациях n и h . Здесь же для сравнения представлена функция распределения стандартного нормального закона.

Исследования показали, что модифицированный критерий Шапиро–Уилка, как и многие другие, при малых $n \cdot h$ (20...30 наблюдений в совокупности) не способен различить гипотезы H_0 и H_1 (отличить нормальный закон от семейства (1.10) с параметром

$\theta_2 = 4$). Кроме того, модифицированный критерий Шапиро–Уилка при малых $n \cdot h < 100$ уступает по мощности критериям Эпсса–Пулли и Шапиро–Уилка, уступает он и непараметрическим критериям согласия. На рис. 2.13 приведены распределения статистики (2.6) при $n \cdot h = 10 \cdot 10$ и справедливости различных гипотез H_i .

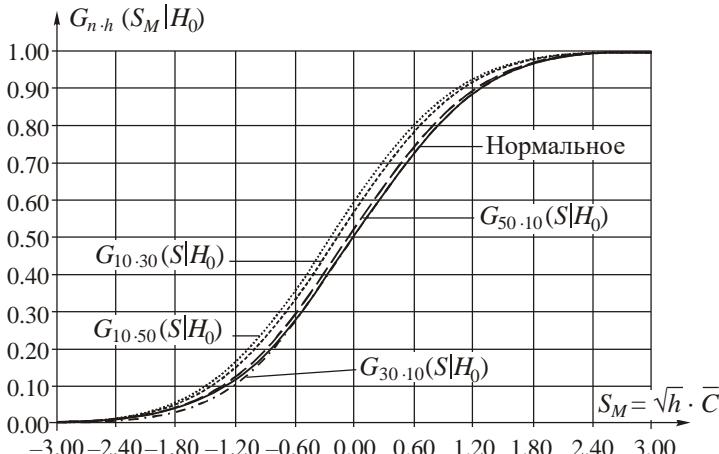


Рис. 2.12. Условные распределения $G_{n,h}(S_M | H_0)$ статистики (2.6) при различных комбинациях n и h

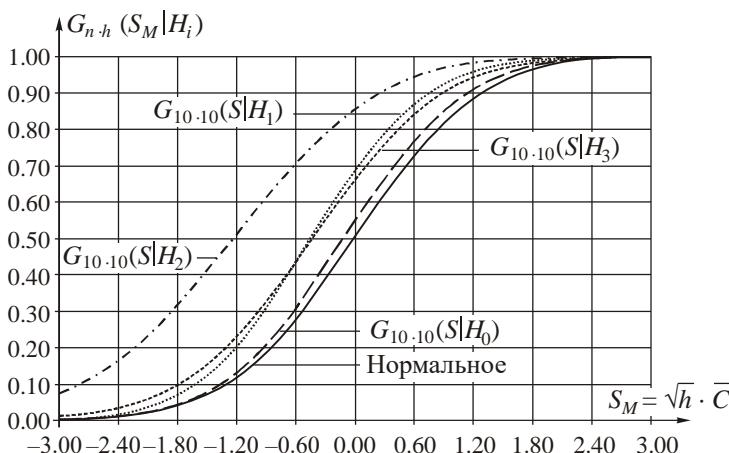


Рис. 2.13. Условные распределения $G_{n,h}(S_M | H_0)$ статистики (2.6) при справедливости гипотез H_i при $n \cdot h = 10 \cdot 10$

Совокупность недостатков критерия *не позволяет рекомендовать его для применения.*

2.6. Критерий Харке–Бера проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса (Jarque–Bera Test)

Далее рассмотрен ряд критериев, не имеющих отношения к стандарту [103], статистики которых измеряют отклонения от нормальности, как правило, с использованием отклонений статистик (2.1) и (2.3) от значений, соответствующих нормальному закону.

В [13] и [29], где приводятся полезные сведения о ряде критериев проверки отклонения от нормального закона, рассмотрена одномерная статистика на базе статистик (2.1) и (2.3)

$$E_p^a = \frac{n(\hat{\beta}_1)^2}{6} + \frac{n(\hat{\beta}_2 - 3)^2}{24} = \frac{n\left(\frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3}\right)^2}{6} + \frac{n\left(\frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4} - 3\right)^2}{24}, \quad (2.7)$$

которая асимптотически подчиняется χ_2^2 -распределению [47]. Критерий правосторонний. В качестве нормирующих коэффициентов в ней взяты первые члены асимптотических дисперсий асимптотически нормальных распределений статистик (2.1) и (2.3) [100]. В [47, 48] говорится об асимптотической оптимальности критерия при проверке нормальности регрессионных остатков. Критерий со статистикой (2.7) очень часто в источниках упоминается под именем авторов работ [47, 48]. Очевидно, что такой критерий должен быть эффективен относительно асимметричных законов с эксцессом, отличающимся от эксцесса нормального закона.

Наши исследования распределений статистики (2.7) при различных объемах выборок показали, что они настолько плохо сходятся к асимптотическому χ_2^2 -распределению, что последним обоснованно можно пользоваться лишь при объемах выборок порядка двух тысяч наблюдений. Рис. 2.14 иллюстрирует сходимость распределения статистики (2.7) к асимптотическому χ_2^2 -распределению в зависимости от объема выборок n в случае нормального закона (при справедливости H_0). На рис. 2.15 показано, как меняются распределения статистики вследствие принадлежности выборок различным законам (при справедливости различных гипотез) в случае $n = 10$.

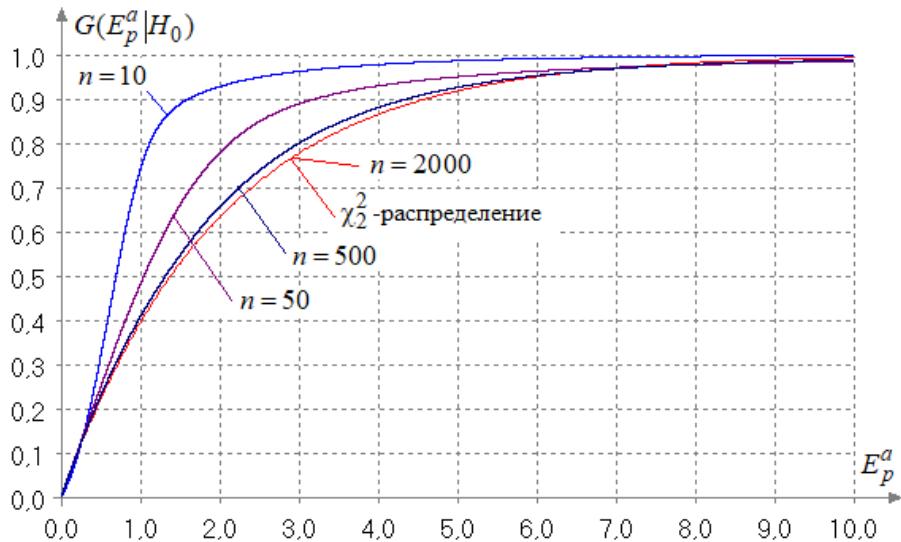


Рис. 2.14. Распределения статистики (2.7) при различных объемах выборок и асимптотическое χ_2^2 -распределение

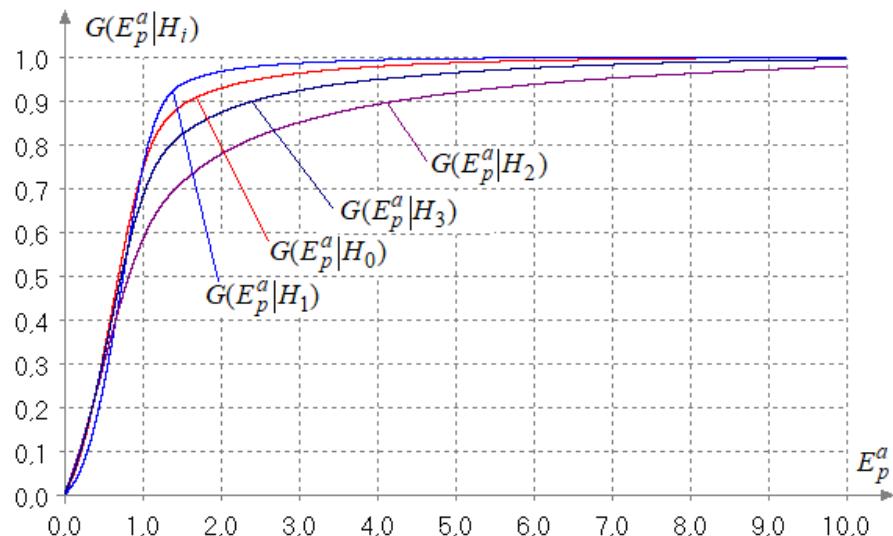


Рис. 2.15. Распределения статистики (2.7) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i , при $n = 10$

Процентные точки для распределений $G(E_p^a | H_0)$ для ряда объёмов выборок n , построенные при использовании статистического моделирования, представлены в таблице 2.7.

Таблица 2.7

Процентные точки для критерия со статистики E_p^a

n	$p = 1 - \alpha$				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
10	1.280	1.618	2.519	3.750	5.706
20	1.826	2.357	3.805	5.897	9.727
30	2.143	2.750	4.435	6.866	11.357
40	2.354	3.004	4.764	7.299	12.054
50	2.516	3.193	4.987	7.582	12.370
60	2.635	3.324	5.130	7.747	12.531
80	2.808	3.522	5.312	7.860	12.594
100	2.936	3.670	5.425	7.944	12.527
150	3.132	3.897	5.594	7.981	12.218
200	3.264	4.039	5.688	7.932	11.871
300	3.402	4.193	5.758	7.807	11.346
∞	3.794	4.605	5.991	7.378	9.210

Полученные оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 , H_3 приведены в таблицах 2.8 – 2.10. При относительно небольших объемах выборок критерий оказывается существенно смещённым относительно H_1 (см. рис. 2.15). В таблице 2.8 соответствующие ячейки (с мощностью меньше α) выделены серым цветом. Для того, чтобы критерий при заданной вероятности ошибки 1-го рода $\alpha = 0.1$ был способен с такой же вероятностью ошибки 2-го рода β отличать H_0 от H_1 , объемы выборок n должны быть более 200.

В то же время критерий обладает достаточно высокой мощностью относительно гипотез H_2 и H_3 , превышающей мощность многих из рассмотренных в данном руководстве критериев.

Таблица 2.8

Мощность критерия со статистикой E_p^a относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.103	0.053	0.021	0.009	0.003
20	0.093	0.027	0.007	0.002	0.000
30	0.123	0.026	0.003	0.001	0.000
40	0.176	0.042	0.002	0.000	0.000
50	0.238	0.071	0.001	0.000	0.000
100	0.596	0.367	0.043	0.000	0.000
150	0.834	0.678	0.264	0.016	0.000
200	0.942	0.865	0.564	0.141	0.001
300	0.995	0.984	0.916	0.661	0.120

Таблица 2.9

Мощность критерия со статистикой E_p^a относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.330	0.268	0.179	0.118	0.068
20	0.465	0.405	0.303	0.220	0.142
30	0.562	0.506	0.399	0.306	0.210
40	0.639	0.587	0.483	0.384	0.275
50	0.701	0.654	0.556	0.454	0.337
100	0.888	0.861	0.799	0.719	0.601
150	0.960	0.947	0.915	0.866	0.784
200	0.986	0.981	0.966	0.942	0.893
300	0.999	0.998	0.995	0.991	0.978

Таблица 2.10

Мощность критерия со статистикой E_p^a относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.219	0.164	0.097	0.057	0.028
20	0.283	0.227	0.148	0.097	0.054
30	0.331	0.274	0.189	0.129	0.077
40	0.370	0.314	0.225	0.159	0.098
50	0.404	0.349	0.258	0.186	0.119
100	0.540	0.486	0.393	0.306	0.213
150	0.642	0.591	0.501	0.409	0.302
200	0.720	0.674	0.591	0.501	0.388
300	0.833	0.797	0.731	0.653	0.542

Рейтинг критерия – 17.5.

2.7. Модификация Гелы–Гаствирта критерия проверки на симметричность и нулевой коэффициент эксцесса (Gel–Gastwirth Test)

Статистика критерия, предложенного в [41], немногим отличается от статистики в критерии Харке–Бера и имеет вид:

$$R_{JB} = \frac{n}{6} \left(\frac{\hat{\mu}_3}{J_n^3} \right)^2 + \frac{n}{64} \left(\frac{\hat{\mu}_4}{J_n^4} - 3 \right)^2, \quad (2.8)$$

где $J_n = \frac{\sqrt{\pi/2}}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - M|$ – среднее абсолютное отклонение от оценки медианы M [40].

В [41] также говорится об асимптотическом χ^2_2 -распределении статистики. Однако распределение $G(R_{JB}|H_0)$ сходится к χ^2_2 -распределению ещё хуже, чем распределение статистики Харке–Бера: отклонением $G(R_{JB}|H_0)$ от χ^2_2 -распределения не следует пренебречь.

брегать и при $n = 2000$. Поэтому для принятия решения о результатах проверки необходима либо таблица критических значений, либо программная поддержка, позволяющая моделировать $G(R_{JB}|H_0)$ и оценивать достигнутый уровень значимости p_{value} .

Процентные точки для распределений $G(R_{JB}|H_0)$ при некоторых n представлены в таблице 2.11.

Полученные оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 , H_3 приведены в таблицах 2.12 – 2.14.

В качестве минуса можно отметить, что по сравнению с критерием Харке–Бера смещённость данной модификации относительно конкурирующей гипотезы H_1 выражена ещё сильнее. Но зато явно выражено преимущество в мощности относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 . По мощности относительно H_2 и H_3 критерий Гелы–Гаствирта показывает один из лучших результатов среди множества всех критериев нормальности.

Таблица 2.11

Процентные точки для критерия со статистики E_{JB}

n	$p = 1 - \alpha$				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
10	1.876	3.094	6.530	12.422	25.600
20	2.382	3.724	7.229	12.697	24.341
30	2.578	3.892	7.199	12.792	21.966
40	2.692	3.959	7.013	11.500	20.283
50	2.781	4.000	6.911	11.070	18.938
60	2.844	4.005	6.823	10.690	17.992
80	2.945	4.020	6.597	10.124	16.453
100	3.029	4.042	6.474	9.705	15.482
150	3.169	4.084	6.256	9.131	13.891
200	3.257	4.139	6.108	8.707	12.936
300	3.361	4.200	5.941	8.196	11.874
∞	3.794	4.605	5.991	7.378	9.210

Таблица 2.12

Мощность критерия со статистикой E_{JB} относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.079	0.047	0.020	0.009	0.003
20	0.038	0.019	0.006	0.002	0.001
30	0.023	0.010	0.003	0.001	0.000
40	0.019	0.006	0.001	0.000	0.000
50	0.032	0.004	0.001	0.000	0.000
100	0.355	0.083	0.000	0.000	0.000
150	0.687	0.414	0.025	0.000	0.000
200	0.874	0.708	0.224	0.005	0.000
300	0.985	0.955	0.769	0.318	0.006

Таблица 2.13

Мощность критерия со статистикой E_{JB} относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.370	0.295	0.197	0.130	0.074
20	0.545	0.467	0.353	0.264	0.175
30	0.661	0.589	0.474	0.374	0.270
40	0.744	0.682	0.575	0.473	0.357
50	0.805	0.753	0.656	0.559	0.439
100	0.951	0.932	0.888	0.832	0.743
150	0.988	0.983	0.967	0.943	0.899
200	0.997	0.996	0.991	0.982	0.964
300	1.000	1.000	0.999	0.999	0.996

Таблица 2.14

Мощность критерия со статистикой E_{JB} относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.231	0.169	0.099	0.057	0.028
20	0.308	0.239	0.154	0.100	0.057
30	0.365	0.293	0.200	0.135	0.082
40	0.411	0.338	0.240	0.169	0.105
50	0.450	0.378	0.276	0.199	0.129
100	0.593	0.529	0.422	0.330	0.234
150	0.691	0.637	0.536	0.440	0.333
200	0.764	0.718	0.630	0.538	0.427
300	0.864	0.832	0.768	0.692	0.586

Рейтинг критерия – 13.

2.8. Модификация Д'Агостино критерия проверки на симметричность

В работе [22] предложена модификация критерия проверки симметричности. В такой модификации на основании следующих соотношений статистика (2.1) преобразуется в статистику z_1 , приближенно подчиняющуюся стандартному нормальному закону:

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{3(n^2 + 27n - 70)(n+1)(n+3)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)}, \quad \omega^2 = -1 + \{2(b-1)\}^{1/2}, \\
 \delta &= \frac{1}{\left\{\log(\sqrt{\omega^2})\right\}^{1/2}}, \quad y = \sqrt{\hat{\beta}_1} \left\{ \frac{\omega^2 - 1}{2} \frac{(n+1)(n+3)}{6(n-2)} \right\}^{1/2}, \\
 z_1 &= \delta \log \left\{ y + (y^2 + 1)^{1/2} \right\}. \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

Исследования распределений статистики (2.9) при различных объемах выборок показали, что они очень хорошо согласуются со стандартным нормальным законом.

На рис. 2.16, 2.17 показаны условные функции распределения $G(S|H_i)$ статистики (2.9) при справедливости гипотез H_0 , H_1 , H_2 , H_3 при объеме выборок $n = 10$ и $n = 100$. Эти рисунки позволяют судить о том, как меняются распределения $G(S|H_i)$ при сохранении симметричности наблюдаемого закона при изменении эксцесса.

По мощности критерий со статистикой (2.9) идентичен критерию со статистикой (2.1), но применение его предпочтительней, так как при его использовании можно опираться на стандартное нормальное распределение.

Очевидно, что критерий со статистикой z_1 , как и критерий со статистикой (2.1) нельзя рассматривать как самостоятельный критерий нормальности.

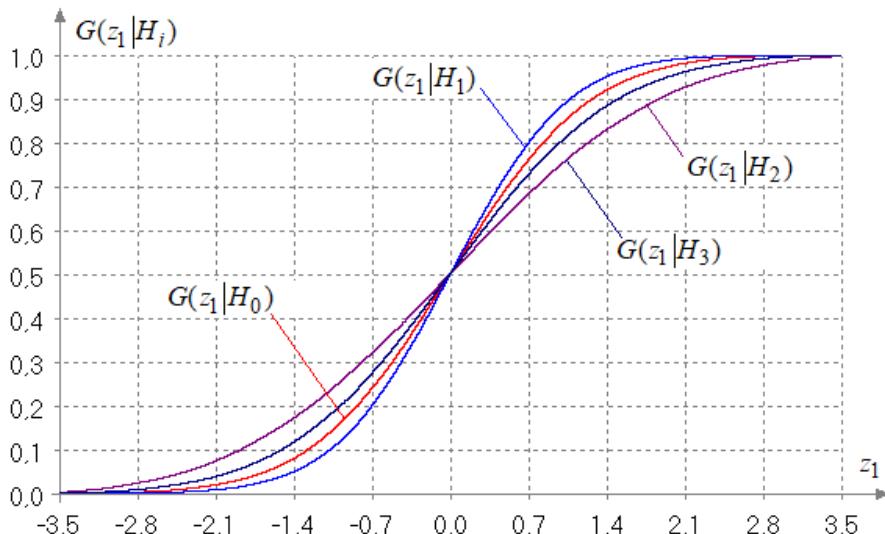


Рис. 2.16. Условные распределения $G(z_1|H_i)$ статистики (2.8) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i , при $n = 10$

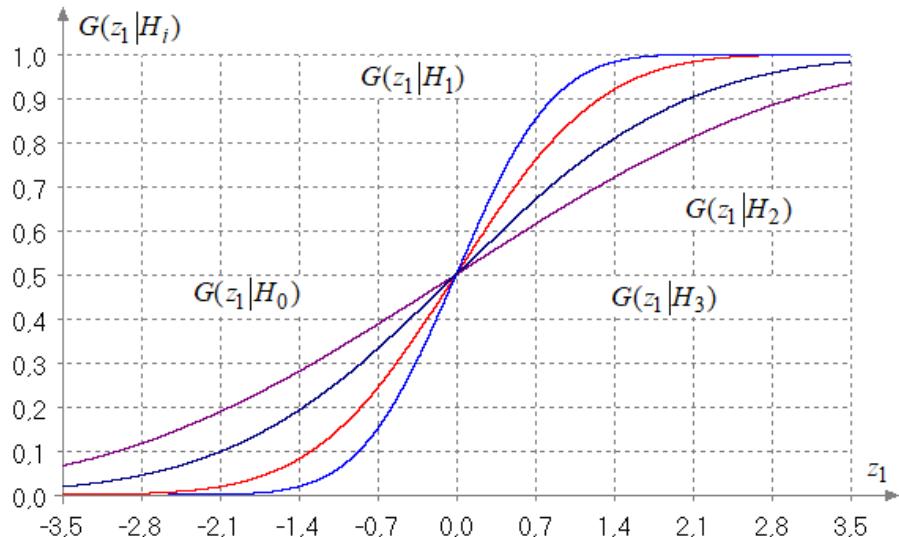


Рис. 2.17. Условные распределения $G(z_1 | H_i)$ статистики (2.8) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i , при $n = 100$

2.9. Модификация Д'Агостино критерия проверки на симметричность и значение эксцесса

В работе [21] предложено преобразование статистик (2.3) и (2.1) к статистике z_2 , приближенно распределенной в соответствии со стандартным нормальным законом, с помощью следующих соотношений:

$$\delta = (n-3)(n+1)(n^2 + 15n - 4),$$

$$a = \frac{(n-2)(n+5)(n+7)(n^2 + 27n - 70)}{6\delta},$$

$$c = \frac{(n-7)(n+5)(n+7)(n^2 + 2n - 5)}{6\delta},$$

$$k = \frac{(n+5)(n+7)(n^3 + 37n^2 + 11n - 313)}{12\delta},$$

$$\alpha = a + \beta_1 c, \quad \chi = (\hat{\beta}_2 - 1 - \hat{\beta}_1) 2k,$$

$$z_2 = \left\{ \left(\frac{\chi}{2\alpha} \right)^{1/3} - 1 + \frac{1}{9\alpha} \right\} (9\alpha)^{1/2}. \quad (2.10)$$

Исследования распределений статистики (2.10) при справедливой гипотезе H_0 и различных объемах выборок показали, что $G_n(z_2 | H_0)$ достаточно хорошо согласуются со стандартным нормальным законом (несколько хуже, чем z_1 , но хорошо).

Критерий двусторонний: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется, если $z_2 < u_{\alpha/2}$ или $z_2 > u_{1-\alpha/2}$.

Достоинством критерия со статистикой (2.10) является возможность использования в качестве асимптотического распределения статистики стандартный нормальный закон. Статистика критерия учитывает отклонения от симметричности и от эксцесса нормального распределения, и критерий можно рассматривать как полноценный критерий нормальности.

Исследование мощности критерия со статистикой (2.10) по отношению к конкурирующим гипотезам H_1 , H_2 , H_3 (и ряду других) показало, что данный критерий не обладает недостатком, свойственным критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Пулли по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 . По оценкам мощности относительно других конкурирующих гипотез при малых объемах выборок он практически не уступает критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Пулли.

На рис. 2.18 и 2.19 представлены условные функции распределения $G_n(S | H_i)$ статистики (2.10) при справедливости гипотез H_0 , H_1 , H_2 , H_3 при объемах выборок $n = 10$ и $n = 100$. Приведенная на них картина позволяет судить о способности критерия распознавать эти гипотезы и о мощности критерия со статистикой (2.10).

Оценки мощности критерия относительно гипотез H_1 , H_2 , H_3 при различных объемах выборок представлены в табл. 2.15–2.17.

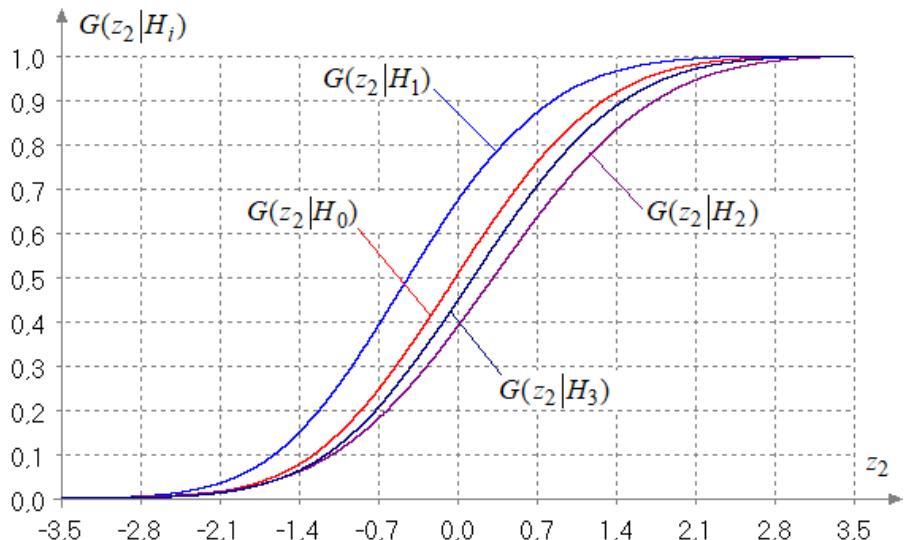


Рис. 2.18. Условные распределения $G(z_2|H_i)$ статистики (2.10) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i , при $n = 10$

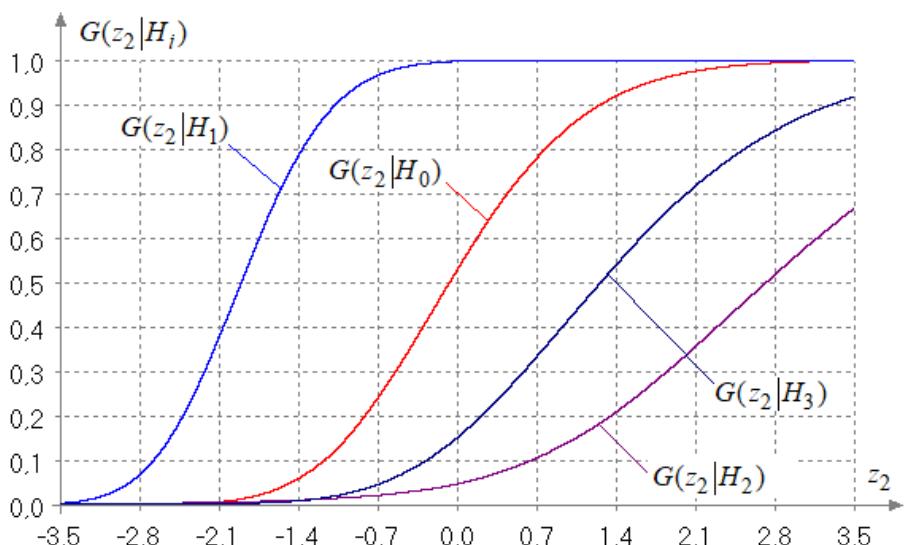


Рис. 2.19. Условные распределения $G(z_2|H_i)$ статистики (2.10) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i , при $n = 100$

Таблица 2.15

**Мощность критерия со статистикой Z_2 относительно гипотезы H_1
(по отношению к распределению семейства (1.10) с параметром $\theta_2 = 4$)**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.175	0.120	0.062	0.32	0.013
20	0.248	0.180	0.103	0.057	0.026
30	0.341	0.260	0.158	0.093	0.045
40	0.433	0.343	0.223	0.140	0.071
50	0.521	0.428	0.292	0.192	0.103
100	0.830	0.763	0.635	0.503	0.349
150	0.952	0.922	0.850	0.758	0.619
200	0.988	0.978	0.948	0.902	0.812
300	0.999	0.999	0.996	0.989	0.970

Таблица 2.16

**Мощность критерия со статистикой Z_2 относительно гипотезы H_2
(по отношению к распределению Лапласа)**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.213	0.156	0.092	0.055	0.027
20	0.326	0.259	0.176	0.118	0.071
30	0.415	0.345	0.250	0.181	0.117
40	0.493	0.421	0.319	0.240	0.164
50	0.560	0.489	0.385	0.299	0.210
100	0.796	0.745	0.654	0.565	0.455
150	0.910	0.881	0.824	0.757	0.661
200	0.961	0.947	0.915	0.873	0.805
300	0.993	0.990	0.982	0.971	0.947

Таблица 2.17

**Мощность критерия со статистикой z_2 относительно гипотезы H_3
(по отношению к логистическому закону)**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.164	0.112	0.058	0.031	0.013
20	0.203	0.145	0.083	0.048	0.023
30	0.238	0.178	0.109	0.067	0.035
40	0.273	0.210	0.134	0.086	0.048
50	0.307	0.241	0.160	0.106	0.061
100	0.459	0.387	0.286	0.212	0.140
150	0.585	0.513	0.407	0.316	0.223
200	0.683	0.617	0.511	0.414	0.308
300	0.820	0.770	0.679	0.588	0.475

При малых n и близких альтернативах критерий не уступает по мощности критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Пулли. В отличие от критериев Шапиро–Уилка и Эппса–Пулли *данный критерий способен успешно отличать от нормального закона распределения семейства (1.10) с более плосковершинными* по сравнению с нормальным законом плотностями.

Рейтинг критерия – 33.

2.10. Совместный критерий проверки на симметричность и нулевой коэффициент экспесса Д'Агостино

В [21] на базе статистик z_1 и z_2 рассмотрена одномерная статистика вида

$$E_p = z_1^2 + z_2^2, \quad (2.11)$$

приближенно распределенная как χ_2^2 -распределение. Критерий правосторонний: проверяемая гипотеза о нормальности отклоняется при больших значениях статистики (2.11).

Исследование распределений данной статистики показало, что в отличие от статистики (2.8) распределение статистики (2.11) очень хорошо согласуется с χ^2_2 -распределением уже при достаточно малых n .

Значения мощности критерия относительно гипотез H_1 , H_2 , H_3 при различных объемах выборок представлены в табл. 2.18–2.20.

По отношению к конкурирующим гипотезам H_2 и H_3 критерий не уступает по мощности критериям Шапиро–Уилка и Эпписа–Пулли. Однако недостаток, свойственный этим критериям, у него выражен даже более ярко: при малых n вследствие смещённости данный критерий не позволяет надежно различать гипотезы H_1 и H_0 (см. рис. 2.20, 2.21 и табл. 2.18).

На рис. 2.20 и по табл. 2.18 особенно заметно, что закон распределения, соответствующий гипотезе H_1 , при объеме выборки $n=10$ этим критерием будет признан «более нормальным», чем нормальный закон.

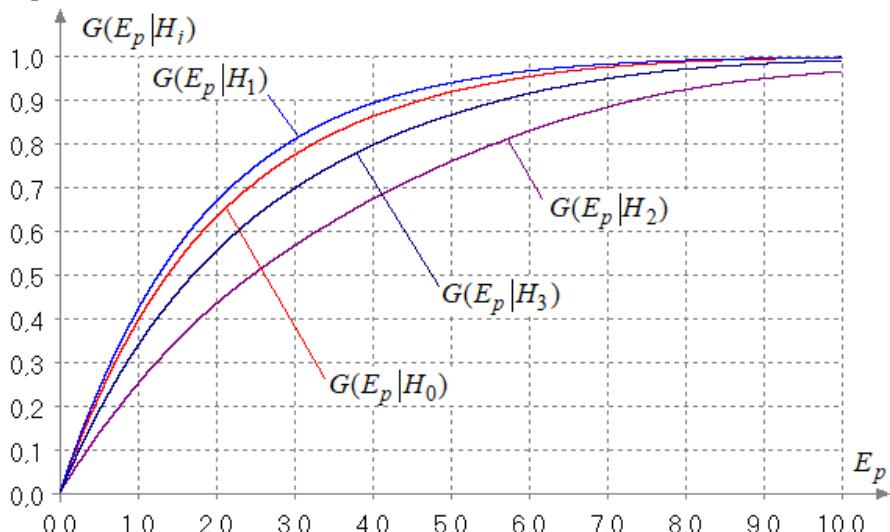


Рис. 2.20. Условные распределения $G(E_p | H_i)$ статистики (2.11) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i , при $n = 10$

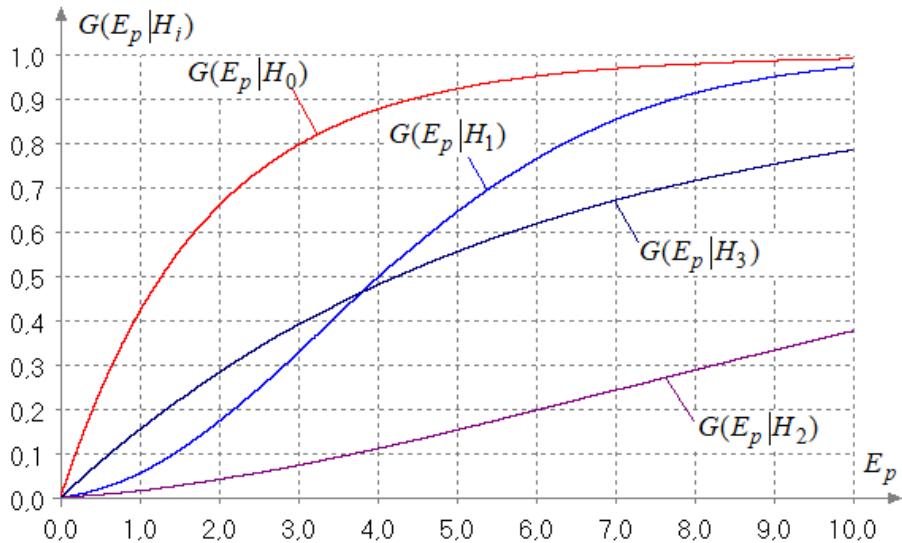


Рис. 2.21. Условные распределения $G(E_p | H_i)$ статистики (2.11) в зависимости от вида наблюдаемого закона, соответствующего различным H_i , при $n = 50$

Таблица 2.18

Оценки мощности критерия относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.119	0.076	0.036	0.018	0.008
20	0.122	0.072	0.028	0.011	0.003
30	0.156	0.093	0.035	0.012	0.003
40	0.203	0.124	0.048	0.016	0.004
50	0.258	0.164	0.067	0.023	0.05
100	0.572	0.436	0.239	0.109	0.028
150	0.809	0.704	0.495	0.294	0.110
200	0.929	0.872	0.723	0.528	0.271
300	0.993	0.984	0.948	0.869	0.686

Таблица 2.19

Оценки мощности критерия относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.342	0.271	0.179	0.114	0.061
20	0.495	0.421	0.315	0.233	0.153
30	0.595	0.523	0.414	0.322	0.227
40	0.673	0.605	0.496	0.400	0.295
50	0.732	0.671	0.568	0.471	0.358
100	0.905	0.871	0.805	0.732	0.627
150	0.968	0.952	0.919	0.875	0.805
200	0.989	0.983	0.968	0.946	0.905
300	0.999	0.998	0.996	0.991	0.982

Таблица 2.20

Оценки мощности критерия относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.218	0.158	0.090	0.050	0.023
20	0.288	0.224	0.145	0.093	0.051
30	0.339	0.272	0.186	0.126	0.075
40	0.381	0.312	0.222	0.156	0.098
50	0.417	0.347	0.254	0.184	0.118
100	0.554	0.485	0.384	0.302	0.216
150	0.656	0.592	0.492	0.405	0.308
200	0.733	0.676	0.583	0.496	0.393
300	0.842	0.800	0.725	0.648	0.550

Рейтинг критерия – 5.

2.11. Критерий Фросини (Frosini Test)

Статистика критерия Фросини [35, 36] имеет вид

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left| \Phi(z_i) - \frac{i-0.5}{n} \right|, \quad (2.12)$$

где элементы выборки x_i , $i = \overline{1, n}$, упорядочены по возрастанию;

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}; \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2;$$

$\Phi(z_i)$ – функция распределения стандартного нормального закона $N(0,1)$.

Применение критерия несколько осложняется тем, что условные распределения $G(B_n | H_0)$ статистики критерия Фросини при справедливости проверяемой гипотезы H_0 зависят от объемов выборок n . Характер этой зависимости иллюстрирует рис. 2.22.

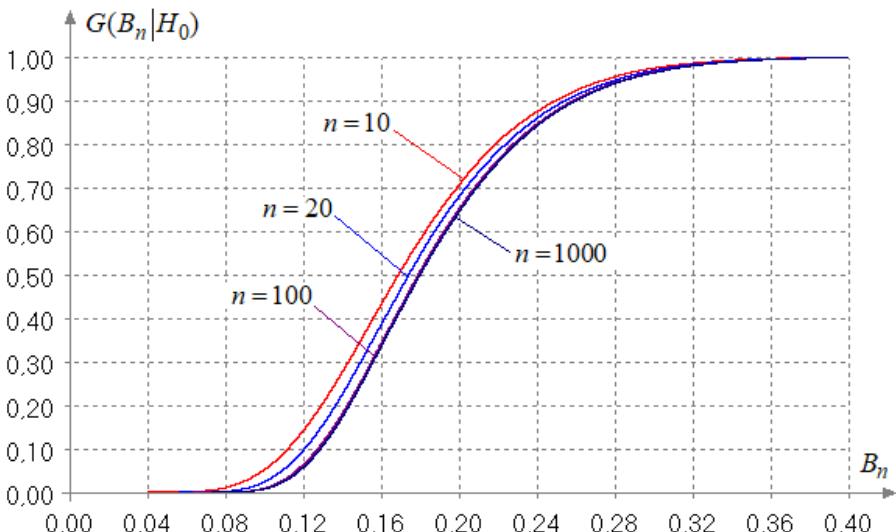


Рис. 2.22. Зависимость распределения $G(B_n | H_0)$ статистики B_n от объема выборки

С ростом n распределения $G(B_n | H_0)$ статистики смещаются вправо, однако достаточно быстро сходятся к некоторому асимптотическому распределению. При объемах выборок $n > 100$ распределения статистики уже существенно не меняются.

Полученная в [36] таблица процентных точек для распределений статистики Фросини наиболее доступна в [108]. Критерий **правосторонний**: гипотеза о принадлежности выборки нормальному закону отклоняется при больших значениях статистики. В табл. 2.21 представлены значения процентных точек для статистики критерия Фросини, полученные в работе [124] и расширяющие таблицы, приводимые в [36, 108], на большие значения объемов выборок n .

Таблица 2.21

Процентные точки для статистик критерия Фросини

n	$p = 1 - \alpha$				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
10	0.233	0.250	0.277	0.302	0.332
20	0.237	0.255	0.283	0.308	0.338
30	0.239	0.257	0.284	0.310	0.342
40	0.239	0.257	0.285	0.310	0.342
50	0.240	0.258	0.285	0.312	0.342
60	0.241	0.258	0.286	0.312	0.343
80	0.241	0.258	0.286	0.312	0.344
100	0.241	0.258	0.286	0.312	0.344
150	0.241	0.259	0.287	0.313	0.345
200	0.241	0.259	0.287	0.313	0.345
300	0.242	0.259	0.288	0.314	0.345
1000	0.242	0.260	0.2875	0.313	0.345

В качестве модели асимптотического закона для распределения статистики Фросини можно использовать бета-распределение III рода с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{B(\theta_0, \theta_1)} \frac{t^{\theta_0-1} (1-t)^{\theta_1-1}}{\left[1 + (\theta_2 - 1)t\right]^{\theta_0+\theta_1}},$$

где $t = (x - \theta_4)/\theta_3 \in [0,1]$, при значениях параметров $\theta_0 = 4.923$, $\theta_1 = 13.2152$, $\theta_2 = 3.0715$, $\theta_3 = 1$, $\theta_4 = 0.076$. Отличием действительного распределения статистики (2.11) от предложенной модели асимптотического закона можно практически пренебречь при $n > 50$.

На рис. 2.23 приведены графики распределения статистики B_n при справедливости различных гипотез (при различных наблюдаемых законах) для объемов выборок $n=10$, которые позволяют судить о мощности критерия относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез. Оценки мощности критерия Фросини относительно конкурирующей гипотезы H_1 приведены в табл. 2.22, а мощности критерия по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 2.23 и 2.24 соответственно.

У критерия Фросини отсутствует недостаток, свойственный при малых n ($n \leq 20$) критериям Шапиро–Уилка и Эппса–Пулли по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 [120].

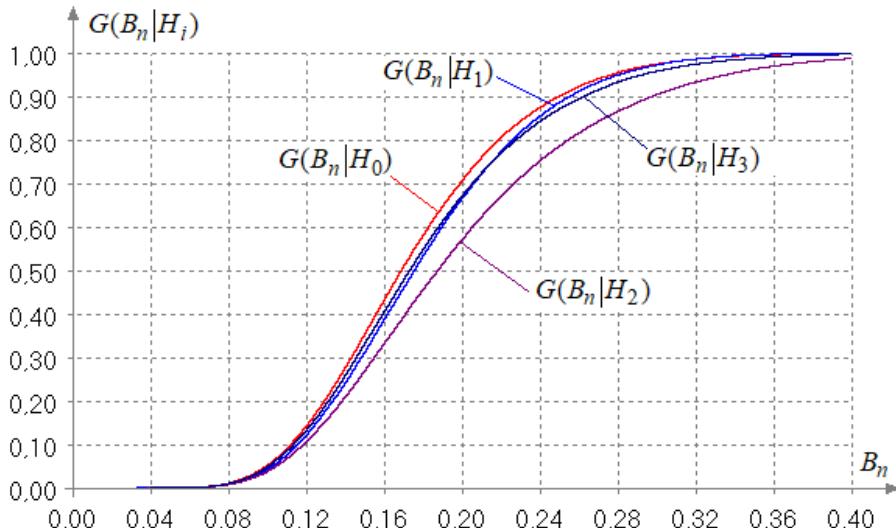


Рис. 2.23. Условные распределения $G(B_n | H_i)$ статистики B_n при объеме выборок $n = 10$

Т а б л и ц а 2.22

**Значения мощности критерия Фросини
относительно гипотезы H_1**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.175	0.116	0.057	0.027	0.010
20	0.222	0.155	0.080	0.040	0.015
30	0.272	0.196	0.108	0.057	0.024
40	0.324	0.240	0.139	0.077	0.033
50	0.374	0.285	0.173	0.100	0.046
100	0.601	0.505	0.360	0.243	0.138
150	0.767	0.687	0.546	0.416	0.270
200	0.874	0.816	0.701	0.576	0.418
300	0.968	0.946	0.892	0.817	0.694

Т а б л и ц а 2.23

**Значения мощности критерия Фросини
относительно гипотезы H_2**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.278	0.216	0.141	0.093	0.053
20	0.406	0.336	0.242	0.175	0.113
30	0.515	0.443	0.340	0.259	0.179
40	0.610	0.539	0.432	0.341	0.247
50	0.689	0.623	0.518	0.424	0.319
100	0.910	0.878	0.816	0.744	0.648
150	0.978	0.967	0.941	0.908	0.850
200	0.995	0.992	0.983	0.970	0.945
300	1.000	1.000	0.999	0.998	0.995

Таблица 2.24

**Значения мощности критерия Фросини
относительно гипотезы H_3**

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.183	0.129	0.073	0.041	0.020
20	0.211	0.154	0.091	0.055	0.028
30	0.235	0.175	0.107	0.066	0.035
40	0.256	0.194	0.121	0.075	0.041
50	0.277	0.212	0.135	0.086	0.048
100	0.374	0.300	0.205	0.139	0.083
150	0.461	0.384	0.276	0.197	0.123
200	0.542	0.463	0.348	0.257	0.168
300	0.675	0.601	0.483	0.381	0.271

В то же время можно заметить, что критерий Фросини обладает не очень высокой мощностью и, в частности, уступает по мощности критериям согласия Андерсона–Дарлинга и типа χ^2 Никулина.

Рейтинг критерия – 30.

2.12. Критерии Хегази–Грина (Hegazy–Green Test)

Хегази и Грин в [45] предложили критерии со статистиками

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |z_i - \eta_i|, \quad (2.13)$$

$$T_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{z_i - \eta_i\}^2, \quad (2.14)$$

где $z_i = \frac{x(i) - \bar{x}}{s}$; $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$; $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$; η_i – математическое ожидание i -й порядковой статистики стандартного нормального закона, которое можно найти из соотношения

$\eta_i = \Phi^{-1}(i/(n+1))$. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших

значениях статистик. Подчеркнем, что в статистике должна использоваться именно несмещённая оценка дисперсии, это не учтено в [108].

Распределения статистик этих критериев очень сильно зависят от объема выборки. Например, зависимость условных распределений $G(T_1|H_0)$ статистики T_1 от n иллюстрирует рис. 2.24.

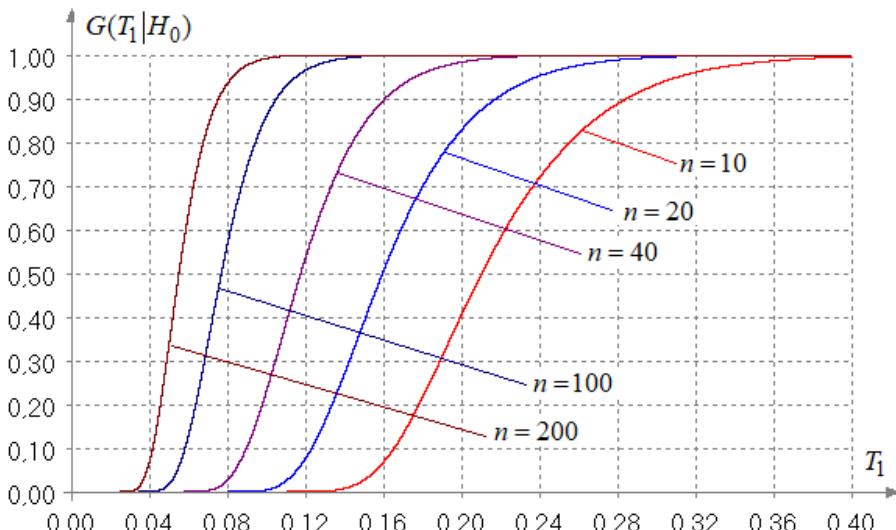


Рис. 2.24. Зависимость распределений статистики T_1 от объема выборки

Таблицы процентных точек для данных критериев при некоторых объемах выборок приводятся в [45, 108].

В табл. 2.25 представлены процентные точки для статистик T_1 и T_2 критерия Хегази–Грина, полученные в работе [124] и расширяющие таблицы, приведенные в [45, 108].

На рис. 2.25 показаны условные функции распределения $G(T_1|H_i)$ статистики T_1 при справедливости гипотез H_0 , H_1 , H_2 , H_3 при объемах выборок $n=10$. Отметим, что при $n=10$ и $n=20$ критерий практически не различает гипотезы H_0 и H_1 (аналогично критериям Шапиро–Уилка и Эпписа–Пулли он оказывается смещённым). Но уже

при $n \geq 30$ для всех задаваемых уровней значимости α критерий способен различать эти конкурирующие гипотезы.

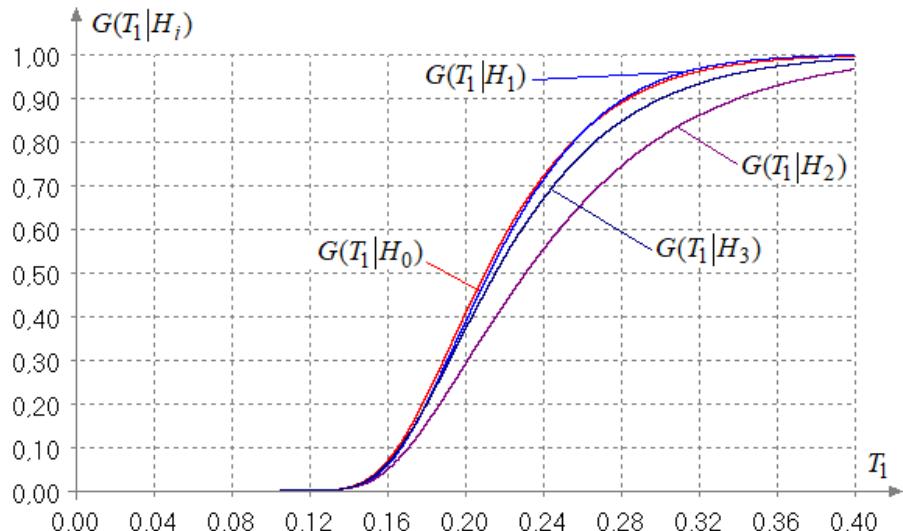


Рис. 2.25. Условные распределения $G_n(T_1 | H_i)$ статистики T_1 при справедливости соответствующих гипотез и объеме выборок $n = 10$

На рис. 2.26 приведены условные функции распределения $G(T_2 | H_i)$ статистики T_2 при справедливости гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 и объемах выборок $n = 10$. Как видим, относительно конкурирующей гипотезы H_1 этот критерий также оказывается смещённым. Распределение $G(T_2 | H_1)$ смещено влево относительно распределения $G(T_2 | H_0)$ и, следовательно, при справедливости H_1 критерий с большей уверенностью признает истинность H_0 .

Полученные оценки мощности критериев Хегази–Грина относительно рассмотренных конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3 приведены в табл. 2.26–2.28.

Оба критерия Хегази–Грина демонстрируют более высокую мощность по сравнению с критериями Шапиро–Уилка и Эппис–Пулли относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 .

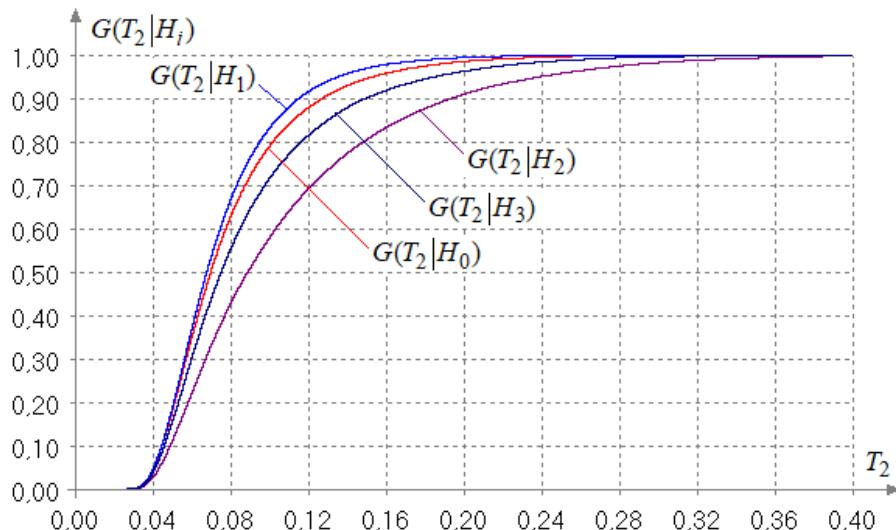


Рис. 2.26. Условные распределения $G_n(T_2 | H_i)$ статистики T_2 при справедливости соответствующих гипотез и объеме выборок $n = 10$

Таблица 2.25

Процентные точки для статистик T_1 и T_2 критерия Хегзи–Грина

n	$1 - \alpha$									
	T_1					T_2				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
10	0.268	0.285	0.312	0.338	0.370	0.112	0.127	0.153	0.180	0.216
20	0.205	0.218	0.239	0.259	0.284	0.072	0.082	0.100	0.118	0.143
30	0.172	0.183	0.201	0.218	0.239	0.054	0.061	0.074	0.088	0.107
40	0.151	0.161	0.177	0.191	0.210	0.043	0.049	0.060	0.070	0.085
50	0.136	0.146	0.160	0.173	0.190	0.036	0.041	0.050	0.059	0.071
60	0.126	0.134	0.147	0.159	0.174	0.031	0.035	0.043	0.050	0.061
80	0.110	0.117	0.128	0.139	0.152	0.024	0.028	0.033	0.039	0.047
100	0.099	0.105	0.115	0.125	0.137	0.020	0.023	0.028	0.032	0.039
150	0.082	0.087	0.095	0.103	0.113	0.014	0.016	0.019	0.023	0.027
200	0.071	0.075	0.083	0.090	0.098	0.011	0.012	0.015	0.017	0.021
300	0.058	0.062	0.068	0.073	0.080	0.008	0.009	0.010	0.012	0.014

Таблица 2.26

Оценки мощности критериев Хегази–Грина относительно гипотезы H_1

n	α									
	T_1					T_2				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.148	0.095	0.043	0.019	0.007	0.110	0.067	0.028	0.012	0.004
20	0.172	0.112	0.052	0.023	0.008	0.085	0.046	0.016	0.006	0.001
30	0.209	0.140	0.068	0.032	0.011	0.084	0.044	0.014	0.004	0.001
40	0.253	0.176	0.090	0.044	0.016	0.095	0.050	0.016	0.005	0.001
50	0.302	0.218	0.118	0.060	0.023	0.113	0.061	0.020	0.006	0.001
60	0.352	0.261	0.148	0.079	0.032	0.137	0.077	0.026	0.008	0.001
80	0.455	0.356	0.221	0.129	0.058	0.198	0.119	0.045	0.015	0.003
100	0.552	0.450	0.302	0.191	0.096	0.271	0.175	0.075	0.028	0.006
150	0.751	0.665	0.517	0.378	0.229	0.484	0.360	0.195	0.094	0.030
200	0.877	0.818	0.700	0.570	0.402	0.680	0.562	0.370	0.219	0.093
300	0.976	0.959	0.912	0.843	0.723	0.913	0.854	0.720	0.561	0.352

Таблица 2.27

Оценки мощности критериев Хегази–Грина относительно гипотезы H_2

n	α									
	T_1					T_2				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.307	0.242	0.161	0.106	0.060	0.347	0.277	0.185	0.123	0.071
20	0.454	0.382	0.282	0.207	0.135	0.517	0.441	0.332	0.247	0.165
30	0.569	0.496	0.390	0.302	0.213	0.632	0.559	0.447	0.350	0.251
40	0.661	0.594	0.486	0.392	0.290	0.718	0.651	0.542	0.443	0.332
50	0.736	0.674	0.572	0.478	0.368	0.782	0.723	0.622	0.525	0.410
60	0.793	0.740	0.646	0.554	0.441	0.832	0.781	0.688	0.596	0.480
80	0.877	0.838	0.764	0.685	0.580	0.900	0.863	0.791	0.712	0.605
100	0.928	0.901	0.846	0.783	0.693	0.941	0.915	0.862	0.799	0.705
150	0.983	0.974	0.953	0.924	0.875	0.985	0.976	0.954	0.923	0.870
200	0.996	0.994	0.987	0.976	0.955	0.996	0.993	0.986	0.973	0.948
300	1.000	1.000	0.999	0.998	0.996	1.000	1.000	0.999	0.997	0.993

Таблица 2.28

Оценки мощности критериев Хегази–Грина относительно гипотезы H_3

n	α									
	T_1					T_2				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.197	0.141	0.081	0.047	0.022	0.219	0.160	0.093	0.055	0.027
20	0.241	0.180	0.111	0.068	0.036	0.291	0.225	0.146	0.095	0.053
30	0.277	0.212	0.136	0.087	0.048	0.346	0.277	0.189	0.128	0.077
40	0.307	0.240	0.158	0.103	0.059	0.393	0.321	0.225	0.158	0.099
50	0.336	0.267	0.179	0.120	0.070	0.433	0.359	0.260	0.187	0.121
60	0.362	0.291	0.198	0.135	0.081	0.469	0.394	0.290	0.213	0.140
80	0.411	0.337	0.238	0.167	0.104	0.530	0.455	0.347	0.262	0.181
100	0.456	0.380	0.275	0.198	0.127	0.581	0.508	0.399	0.310	0.218
150	0.554	0.478	0.366	0.276	0.185	0.685	0.917	0.509	0.423	0.310
200	0.638	0.564	0.451	0.352	0.249	0.760	0.699	0.598	0.504	0.394
300	0.765	0.703	0.597	0.497	0.380	0.861	0.817	0.736	0.653	0.544

Однако по отношению к гипотезам типа H_1 при малых объемах выборок оба критерия также оказываются с м е щ ё н н ы м и , особенно критерий со статистикой T_2 (смещение даже больше, чем у критериев Шапиро–Уилка и Эпса–Пулли).

Рейтинг критерия со статистикой T_1 – 23, с T_2 – 7.5.

2.13. Критерий Гири (Geary Test)

Гири в работах [37, 38, 39] рассмотрел критерий проверки отклонения от нормального закона, основанный на статистике

$$d = \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|, \quad (2.15)$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Критерий является двусторонним, и гипотеза о нормальности не отклоняется, если $d_{\alpha/2} \leq d \leq d_{1-\alpha/2}$.

Зависимость условных распределений $G(d|H_0)$ статистики (2.15) от n иллюстрирует рис. 2.27.

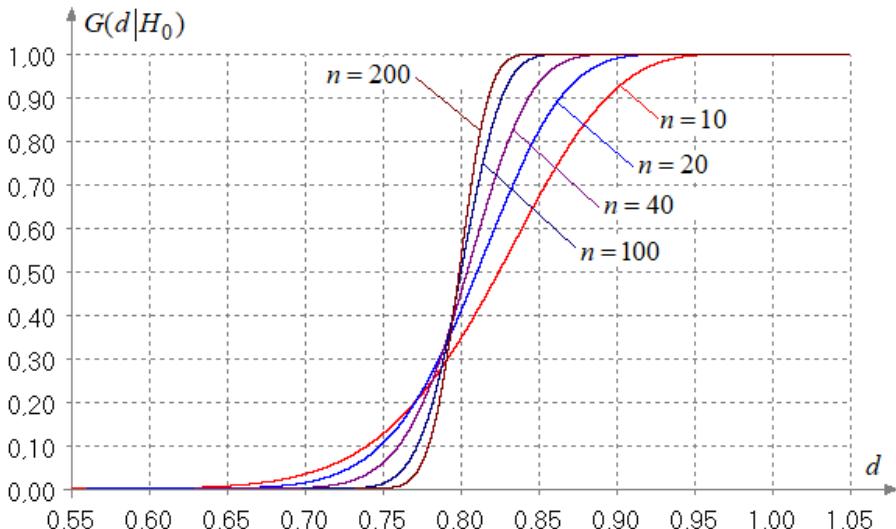


Рис. 2.27. Зависимость распределения $G(d|H_0)$ статистики d критерия Гири от объема выборки

Автор критерия утверждает, что статистика критерия при $n \geq 50$ распределена асимптотически нормально. Выражения для математического ожидания и дисперсии асимптотического закона представлены, например, в [108]. Однако на самом деле распределения статистики асимметричны и плохо аппроксимируются нормальным законом, тем более, с указанными в [108] параметрами.

Таблицы процентных точек для некоторых объемов выборок приводятся в [38]. В табл. 2.29 представлены процентные точки $d_{\alpha/2}$ и $d_{1-\alpha/2}$ статистики критерия Гири, полученные в работе [124]. Эти результаты расширяют область применения критерия.

На рис. 2.28 показаны условные функции распределения $G(d|H_i)$ статистики d при справедливости гипотез H_0 , H_1 , H_2 , H_3 при

объеме выборок $n=10$. Проверяемая гипотеза отклоняется при значениях статистики, меньших $d_{\alpha/2}$ и больших $d_{1-\alpha/2}$.

Таблица 2.29

Процентные точки для статистики d критерия Гири

n	α									
	0.15		0.10		0.05		0.025		0.01	
	$\alpha/2$	$1 - \alpha/2$								
10	0.729	0.902	0.715	0.911	0.691	0.924	0.670	0.935	0.644	0.948
20	0.741	0.870	0.730	0.878	0.713	0.889	0.697	0.899	0.678	0.910
30	0.749	0.857	0.740	0.863	0.726	0.873	0.713	0.881	0.697	0.891
40	0.754	0.848	0.747	0.854	0.735	0.863	0.724	0.871	0.710	0.879
50	0.758	0.843	0.752	0.848	0.741	0.856	0.731	0.863	0.719	0.871
60	0.761	0.839	0.755	0.844	0.746	0.851	0.737	0.858	0.726	0.865
80	0.766	0.833	0.761	0.838	0.752	0.844	0.745	0.850	0.736	0.857
100	0.769	0.829	0.764	0.833	0.757	0.839	0.750	0.845	0.742	0.851
150	0.774	0.824	0.770	0.827	0.764	0.832	0.759	0.836	0.753	0.841
200	0.777	0.820	0.774	0.823	0.769	0.827	0.764	0.831	0.759	0.836
300	0.781	0.816	0.778	0.818	0.774	0.822	0.770	0.825	0.766	0.829

Полученные оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 , H_3 представлены в табл. 2.30–2.32. Откуда следует, что критерий Гири с простой статистикой (2.15) достаточно уверенно демонстрирует высокую мощность по отношению к различным конкурирующим гипотезам.

Проведенный ниже сравнительный анализ множества, состоящего из порядка 50 критериев, применяемых при проверке нормальности, по мощности, проявленной ими относительно рассмотренных в руководстве конкурирующих гипотез, показал, что критерий относится к первой трети наиболее предпочтительных критериев.

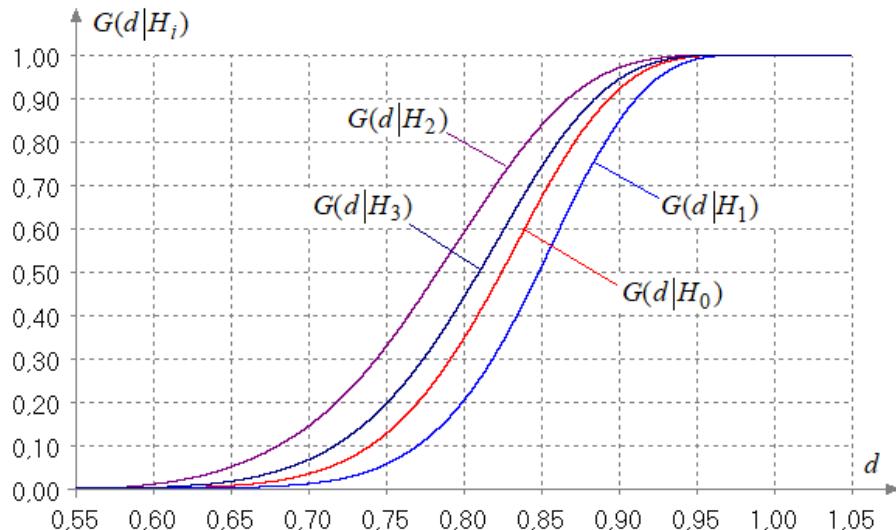


Рис. 2.28. Условные распределения $G_n(d | H_i)$ статистики d критерия Гири при справедливости различных гипотез и объеме выборок $n = 10$

Таблица 2.30

Оценки мощности критерия Гири относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.174	0.120	0.064	0.034	0.014
20	0.247	0.181	0.105	0.061	0.029
30	0.329	0.253	0.158	0.097	0.050
40	0.409	0.326	0.215	0.138	0.075
50	0.480	0.394	0.273	0.182	0.103
60	0.546	0.457	0.328	0.228	0.136
80	0.662	0.577	0.441	0.328	0.211
100	0.750	0.674	0.544	0.424	0.294
150	0.888	0.840	0.742	0.635	0.496
200	0.953	0.927	0.866	0.790	0.669
300	0.992	0.987	0.969	0.941	0.885

Таблица 2.31

Оценки мощности критерия Гири относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.267	0.204	0.130	0.082	0.043
20	0.442	0.371	0.274	0.201	0.132
30	0.583	0.513	0.408	0.321	0.229
40	0.694	0.630	0.528	0.435	0.330
50	0.776	0.722	0.628	0.535	0.425
60	0.838	0.792	0.709	0.625	0.519
80	0.917	0.888	0.829	0.764	0.671
100	0.958	0.940	0.902	0.855	0.784
150	0.993	0.988	0.978	0.963	0.934
200	0.999	0.998	0.996	0.992	0.983
300	1	1	1	1	0.999

Таблица 2.32

Оценки мощности критерия Гири относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.182	0.127	0.069	0.038	0.017
20	0.227	0.169	0.103	0.063	0.033
30	0.267	0.205	0.132	0.086	0.049
40	0.305	0.240	0.161	0.108	0.064
50	0.338	0.272	0.188	0.129	0.079
60	0.372	0.303	0.214	0.151	0.096
80	0.431	0.361	0.266	0.195	0.128
100	0.486	0.415	0.313	0.235	0.160
150	0.602	0.532	0.426	0.337	0.243
200	0.695	0.631	0.527	0.433	0.329
300	0.822	0.773	0.684	0.598	0.486

Основной проблемой, ограничивающей применение критерия Гири на практике, является необходимость опираться на таблицы процентных точек.

Рейтинг критерия – 16.

2.14. Критерий Дэвида–Хартли–Пирсона (David–Hartley–Pearson Test)

В критерии Дэвида–Хартли–Пирсона [23] рассматривается отношение размаха выборки к выборочному стандартному отклонению, и его статистика имеет вид

$$U = \frac{R}{s}, \quad (2.16)$$

где $R = x_{\max} - x_{\min}$ – размах выборки; $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ – несмешённая оценка дисперсии.

Рис. 2.29 иллюстрирует зависимость распределений статистики U от объема выборки при справедливости проверяемой гипотезы.

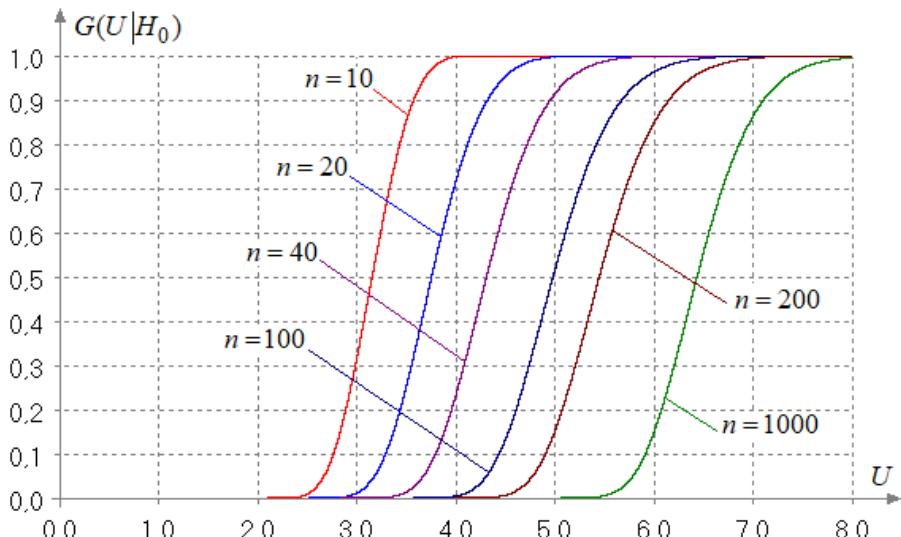


Рис. 2.29. Зависимость распределений $G(U | H_0)$ статистики U от объема выборки

Критерий двусторонний: гипотеза о нормальности распределения отвергается, если $U < U_{\alpha/2}$ или $U > U_{1-\alpha/2}$. В табл. 2.33 приведены процентные точки критерия.

На рис. 2.30 показаны условные распределения $G(U | H_i)$ статистики U при справедливости гипотез H_0 , H_1 , H_2 , H_3 и объемах выборок $n=10$. Откуда видно, что не возникает никаких вопросов по поводу возможной смещённости критерия относительно конкурирующей гипотезы H_1 .

Полученные оценки мощности для рассматриваемых конкурирующих гипотез приведены в табл. 2.34–2.36. Мощность критерия относительно H_1 практически совпадает с мощностью критерия Гири, однако он существенно уступает последнему по отношению к конкурирующим гипотезам H_2 и H_3 .

Таблица 2.33

Процентные точки для статистики U критерия Дэвида–Хартли–Пирсона

n	0.15		0.1		0.05		0.025		0.01	
	$\alpha/2$	$1 - \alpha/2$								
10	2.723	3.624	2.670	3.686	2.593	3.778	2.530	3.854	2.458	3.936
20	3.240	4.392	3.178	4.488	3.087	4.633	3.012	4.763	2.927	4.915
30	3.535	4.787	3.469	4.896	3.374	5.066	3.293	5.217	3.203	5.400
40	3.741	5.046	3.674	5.162	3.574	5.345	3.493	5.507	3.401	5.708
50	3.900	5.236	3.831	5.356	3.729	5.546	3.644	5.720	3.550	5.929
60	4.028	5.384	3.958	5.508	3.856	5.704	3.769	5.886	3.674	6.106
80	4.230	5.607	4.158	5.735	4.054	5.937	3.967	6.124	3.870	6.354
100	4.382	5.774	4.311	5.905	4.206	6.112	4.117	6.302	4.018	6.536
150	4.656	6.059	4.583	6.191	4.477	6.405	4.388	6.600	4.288	6.838
200	4.847	6.255	4.774	6.388	4.668	6.600	4.578	6.799	4.474	7.044
300	5.111	6.512	5.037	6.645	4.931	6.858	4.841	7.056	4.741	7.303

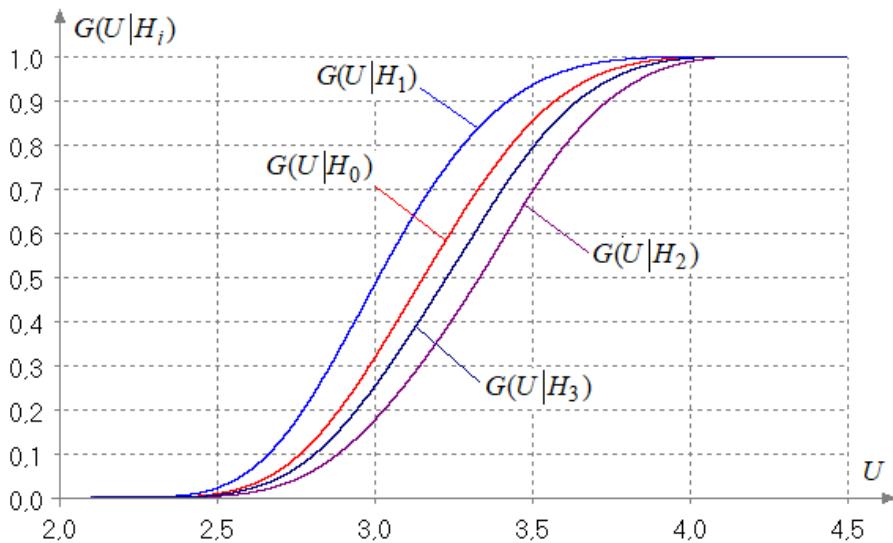


Рис. 2.30. Условные распределения $G(U|H_i)$ статистики U при справедливости различных гипотез и объемах выборок $n = 10$

Таблица 2.34

**Оценки мощности критерия Дэвида–Хартли–Пирсона
относительно конкурирующей гипотезы H_1**

n	α				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.176	0.121	0.064	0.034	0.014
20	0.251	0.185	0.107	0.061	0.028
30	0.338	0.259	0.162	0.098	0.049
40	0.417	0.332	0.217	0.140	0.075
50	0.488	0.400	0.273	0.181	0.101
60	0.552	0.461	0.327	0.224	0.132
80	0.658	0.569	0.428	0.314	0.199
100	0.734	0.655	0.519	0.396	0.264
150	0.856	0.798	0.685	0.569	0.424
200	0.919	0.878	0.793	0.694	0.554
300	0.971	0.952	0.906	0.844	0.744

Таблица 2.35

**Оценки мощности критерия Дэвида–Хартли–Пирсона
относительно конкурирующей гипотезы H_2**

n	α				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.218	0.157	0.091	0.052	0.026
20	0.357	0.289	0.199	0.134	0.078
30	0.444	0.375	0.278	0.205	0.135
40	0.513	0.443	0.342	0.263	0.183
50	0.568	0.499	0.396	0.310	0.224
60	0.615	0.546	0.441	0.352	0.259
80	0.688	0.623	0.518	0.427	0.325
100	0.741	0.680	0.579	0.486	0.380
150	0.832	0.781	0.690	0.601	0.493
200	0.884	0.842	0.764	0.682	0.574
300	0.940	0.913	0.857	0.790	0.695

Таблица 2.36

**Оценки мощности критерия Дэвида–Хартли–Пирсона
относительно конкурирующей гипотезы H_3**

n	α				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
10	0.168	0.114	0.059	0.031	0.013
20	0.220	0.161	0.094	0.054	0.026
30	0.258	0.197	0.124	0.079	0.043
40	0.291	0.228	0.150	0.101	0.059
50	0.319	0.255	0.174	0.119	0.073
60	0.345	0.279	0.194	0.135	0.084
80	0.391	0.322	0.232	0.167	0.108
100	0.429	0.359	0.264	0.195	0.130
150	0.508	0.436	0.334	0.255	0.178
200	0.566	0.494	0.390	0.304	0.217
300	0.656	0.587	0.479	0.387	0.287

В целом на основании анализа мощности относительно различных конкурирующих гипотез можно констатировать, что критерий Дэвида–Хартли–Пирсона по оценкам мощности уступает многим из рассмотренных в [124] критериям.

Рейтинг критерия – 36.

2.15. Критерий Шпигельхальтера (Spiegelhalter Test)

Статистика этого критерия [79] базируется на комбинации статистик критериев Гири [37] и Дэвида, Хартли и Пирсона [23] и имеет вид

$$T' = \left\{ (C_n U)^{-(n-1)} + g^{-(n-1)} \right\}^{\frac{1}{n-1}}, \quad (2.17)$$

где $C_n = \frac{1}{2n}(n!)^{\frac{1}{n-1}}$; U – статистика (2.16) критерия Дэвида–Хартли–Пирсона; $g = \frac{d}{\sqrt{(n-1)/n}}$; d – статистика (2.15) критерия Гири.

Проверяемая гипотеза о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону по критерию Шпигельхальтера отклоняется при больших значениях статистики T' .

Значения процентных точек для статистики T' критерия Шпигельхальтера, полученные в результате моделирования, приведены в табл. 2.37.

Зависимость распределения статистики T' от объема выборки в случае справедливости проверяемой гипотезы иллюстрирует рис. 2.31.

Однако данный критерий **имеет очень существенный недостаток**: критерий со статистикой (2.17) способен отличить от нормального закона далеко не все конкурирующие распределения. В частности, это касается конкурирующей гипотезы H_1 .

Мощность любого корректно построенного критерия должна увеличиваться с ростом n . В принципе, так и происходит с мощностью критерия Шпигельхальтера по отношению к конкурирующим гипотезам H_2 и H_3 .

Таблица 2.37

Процентные точки для статистики T' критерия Шпигельхальтера

n	α				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
10	1.323	1.344	1.380	1.416	1.460
20	1.311	1.331	1.365	1.396	1.435
30	1.301	1.318	1.346	1.373	1.407
40	1.293	1.308	1.332	1.355	1.383
50	1.288	1.302	1.323	1.342	1.366
60	1.285	1.297	1.316	1.334	1.355
80	1.281	1.292	1.308	1.322	1.340
100	1.279	1.288	1.302	1.314	1.329
150	1.275	1.283	1.294	1.304	1.315
200	1.273	1.279	1.289	1.297	1.308
300	1.270	1.275	1.283	1.290	1.298

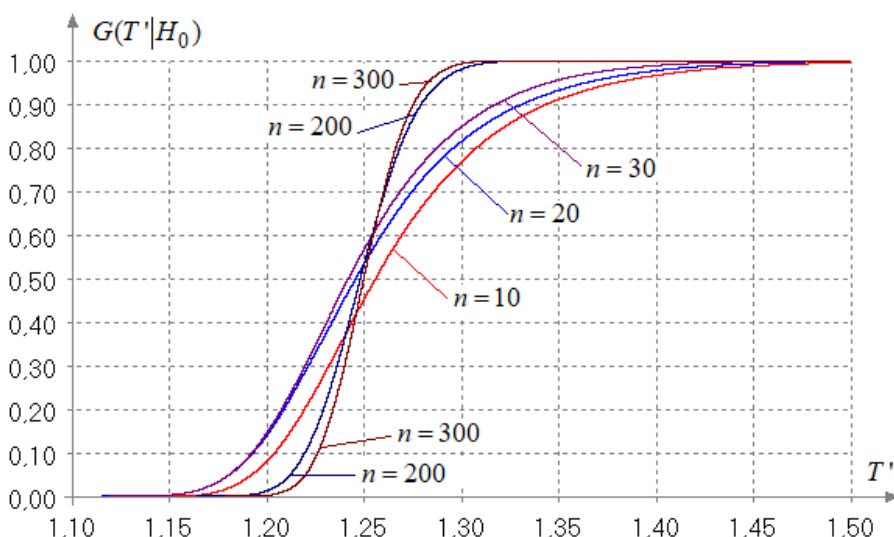


Рис. 2.31. Зависимость распределения статистики T' от объема выборки в случае нормального закона

Совсем другая картина выяснилась при исследовании методами статистического моделирования распределений $G(T'|H_1)$ статистики и мощности критерия относительно гипотезы H_1 .

На рис. 2.32–2.34 показаны условные функции распределения $G(T'|H_i)$ статистики T' при справедливости гипотез H_0 , H_1 , H_2 , H_3 и объемах выборок $n=10, 50, 300$.

Можно видеть, что вследствие “специфичного” поведения условного распределения $G(T'|H_1)$ с ростом объема выборок мощность критерия по отношению к гипотезе H_1 при $n \geq 50$ начинает уменьшаться. А далее с ростом n критерий оказывается смещённым относительно гипотезы H_1 и вовсе не способен различать гипотезы H_0 и H_1 .

Оценки мощности критерия Шпигельхальтера по отношению к гипотезе H_1 приведены в табл. 2.38, а оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 2.39 и 2.40 соответственно.

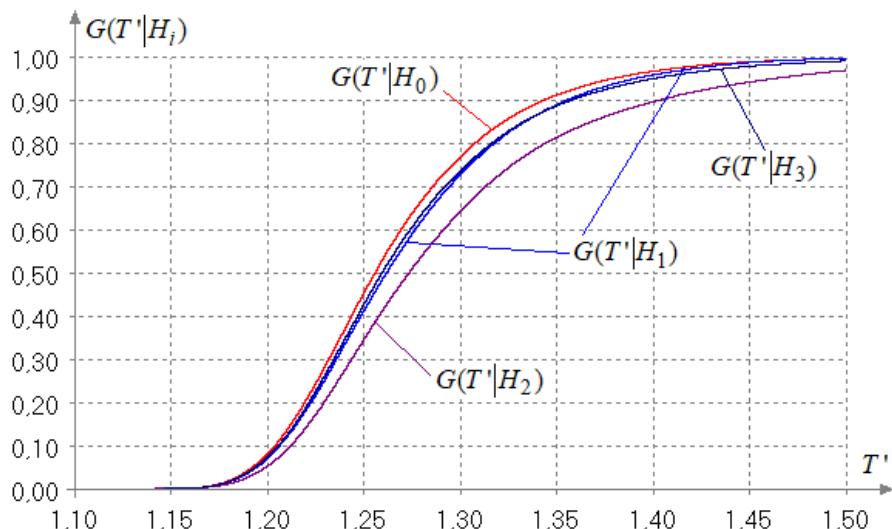


Рис. 2.32. Условные распределения $G(T'|H_i)$ статистики T'
при объеме выборок $n = 10$

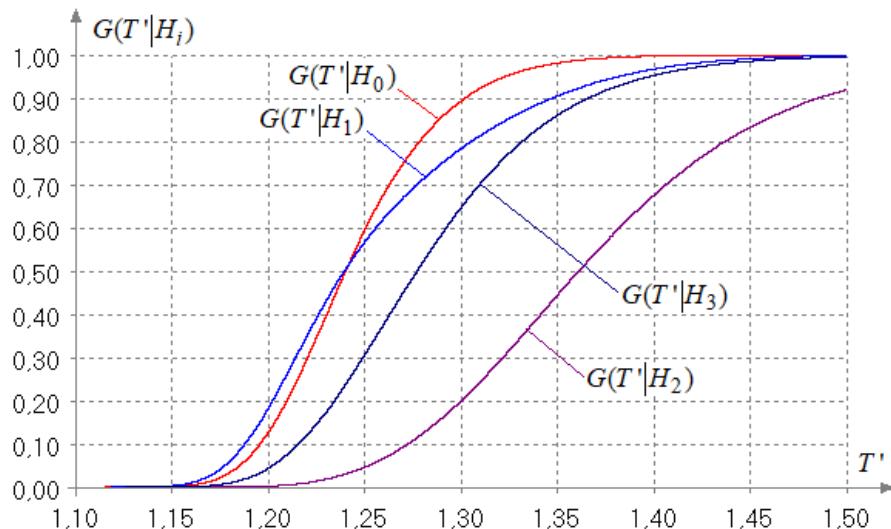


Рис. 2.33. Условные распределения $G(T' | H_i)$ статистики T'
при объеме выборок $n = 50$

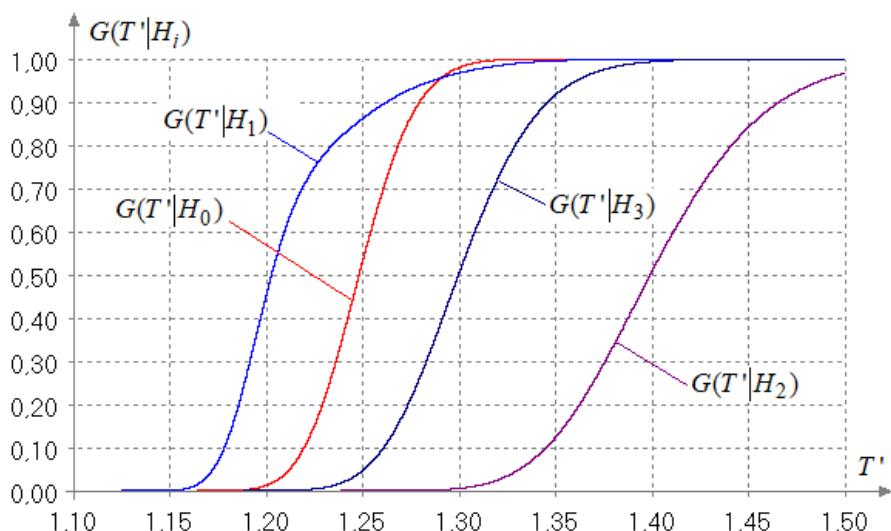


Рис. 2.34. Условные распределения $G(T' | H_i)$ статистики T'
при объеме выборок $n = 200$

Таблица 2.38

Мощность критерия Шпигельхальтера относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.183	0.125	0.064	0.031	0.011
20	0.231	0.172	0.103	0.060	0.028
30	0.256	0.202	0.133	0.086	0.046
40	0.262	0.213	0.149	0.103	0.060
50	0.256	0.211	0.153	0.110	0.068
100	0.182	0.154	0.117	0.089	0.062
150	0.118	0.099	0.075	0.057	0.040
200	0.075	0.063	0.047	0.036	0.025
300	0.030	0.025	0.018	0.013	0.010

Таблица 2.39

Мощность критерия Шпигельхальтера относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.264	0.202	0.131	0.087	0.051
20	0.466	0.388	0.282	0.204	0.134
30	0.639	0.559	0.439	0.339	0.236
40	0.763	0.696	0.581	0.476	0.355
50	0.845	0.790	0.693	0.594	0.468
100	0.980	0.968	0.939	0.900	0.836
150	0.997	0.995	0.988	0.978	0.956
200	1.000	0.999	0.998	0.996	0.990
300	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Таблица 2.40

Мощность критерия Шпигельхальтера относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.179	0.126	0.070	0.040	0.019
20	0.239	0.176	0.106	0.064	0.034
30	0.305	0.233	0.148	0.094	0.051
40	0.369	0.291	0.193	0.127	0.072
50	0.424	0.343	0.237	0.162	0.096
100	0.613	0.530	0.408	0.308	0.211
150	0.725	0.650	0.530	0.425	0.311
200	0.802	0.739	0.630	0.527	0.405
300	0.898	0.855	0.773	0.684	0.571

Как можно видеть, по отношению к конкурирующим гипотезам H_2 и H_3 критерий демонстрирует хорошую мощность, выше чем у критериев Шапиро-Уилка и Эппса-Пулли или ряда других специальных критериев нормальности. Однако ситуация с необычным поведением распределения $G(T'|H_1)$ заставляет быть осторожным, так как даже при больших объёмах выборок применение критерия может привести к неверному выводу.

Поэтому, применяя критерий Шпигельхальтера, желательно для контроля убедиться, что и другие критерии приводят к тому же выводу о результатах проверки гипотезы H_0 .

Рейтинг критерия – 21.

2.16. Критерий Ройстона (Royston Test)

Критерий Шапиро-Уилка [76] основывается на анализе порядковых статистик. В качестве статистики критерия вычисляют величину

$$W = \left(\sum_{j=1}^n a_j X_{(i)} \right)^2 / \left(\sum_{j=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right).$$

В стандарте [103] предусмотрено применение критерия при $8 \leq n \leq 50$ и приведены соответствующие коэффициенты a_i . Применение же критерия при больших n затруднено из-за отсутствия коэффициентов в источниках. И хотя приближенный вариант критерия Шапиро-Уилка для $51 \leq n \leq 100$ приводится, например, в [78], табулирование точных значений a_i для произвольного объема не получило значительного внимания исследователей, в отличие от построения аппроксимаций (см. критерий Ройстона).

В [74] получены приближенные выражения, позволяющие вычислять статистику W при $4 \leq n \leq 2000$ и не требующие сложных вычислений. Распределение такой статистики хорошо согласуется с опубликованными критическими точками, полученными для точных значений коэффициентов a_i .

Обозначим $c_i = (\tilde{\mathbf{m}}^T \tilde{\mathbf{m}})^{-1/2} \tilde{m}_i$, $\tilde{m}_i = \Phi^{-1}\{(i - 3/8)(n + 1/4)\}$, где

$\Phi(\cdot)$ – функция распределения стандартного нормального закона. Учитывая, что $a_i = -a_{n-i+1}$, приближенные коэффициенты \tilde{a}_i определяют, начиная с вычисления \tilde{a}_n и \tilde{a}_{n-1} в соответствии с соотношениями:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n &= c_n + 0.221157x - 0.147981x^2 - 2.071190x^3 + \\ &\quad + 4.434685x^4 - 2.706056x^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{n-1} &= c_{n-1} + 0.042981x - 0.293762x^2 - 1.752461x^3 + \\ &\quad + 5.682633x^4 - 3.582663x^5. \end{aligned}$$

где $x = n^{-1/2}$.

Затем, вычисляя нормализующие коэффициенты для \tilde{m}_i в соответствии с выражением

$$\phi = \begin{cases} \left(\tilde{\mathbf{m}}^T \tilde{\mathbf{m}} - 2\tilde{m}_n^2 \right) / \left(1 - 2\tilde{a}_n^2 \right), & n \leq 5, \\ \left(\tilde{\mathbf{m}}^T \tilde{\mathbf{m}} - 2\tilde{m}_n^2 - 2\tilde{m}_{n-1}^2 \right) / \left(1 - 2\tilde{a}_n^2 - 2\tilde{a}_{n-1}^2 \right), & n > 5, \end{cases}$$

получают остальные

$$\tilde{a}_i = \phi^{-1/2} \tilde{m}_i,$$

для $i = 2, \dots, n-1$ ($n \leq 5$) или $i = 3, \dots, n-2$ ($n > 5$).

Применение критерия существенно упрощается благодаря использованию следующего нормализующего преобразования [74]. Для $4 \leq n \leq 11$ вычисляют вспомогательные величины:

$$w = -\ln(\gamma - \ln(1-W)),$$

$$\gamma = -2.273 + 0.459n,$$

$$\mu = 0.5440 - 0.39978n + 0.025054n^2 - 0.0006714n^3,$$

$$\sigma = \exp(1.3822 - 0.77857n + 0.062767n^2 - 0.0020322n^3).$$

Для $12 \leq n \leq 2000$:

$$w = \ln(1-W),$$

$$\mu = -1.5861 - 0.31082x - 0.083751x^2 + 0.0038915x^3,$$

$$\sigma = \exp(-0.4803 - 0.082676x + 0.0030302x^2),$$

где $x = \ln n$.

Если критерий Шапиро-Уилка левосторонний, то критерий Ройстона является правосторонним. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики

$$W_R = (w - \mu) / \sigma, \quad (2.18)$$

которая при справедливости H_0 приближенно описывается стандартным нормальным законом.

Отличием распределения статистики (2.18) от стандартного нормального закона можно практически пренебречь при объёмах выборок $n > 30$ (см. рис. 2.35).

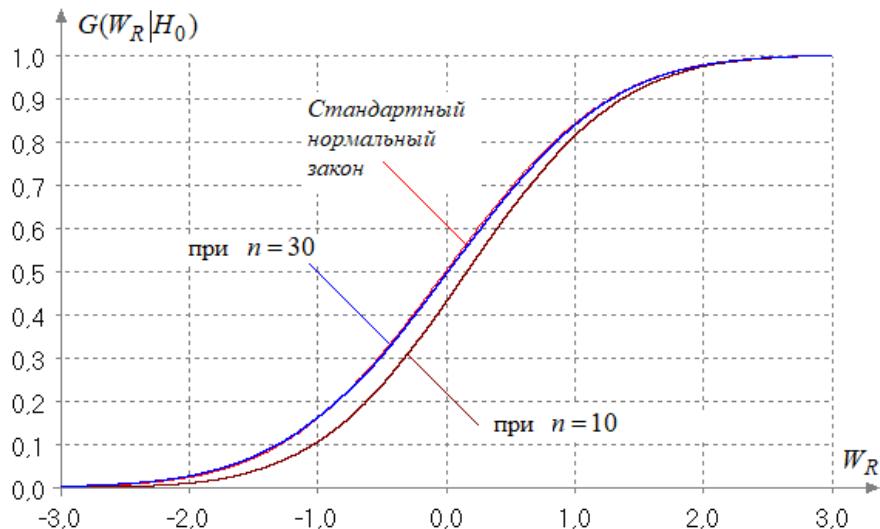


Рис. 2.35. Сходимость распределений $G(W_R | H_0)$ статистики W_R Ройстона к стандартному нормальному закону

Оценки мощности критерия Ройстона по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 2.41, значения мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 2.42 и 2.43 соответственно.

Как можно видеть по табл. 2.41 у критерия Ройстона в меньшей мере, но сохранился недостаток, свойственный критерию Шапиро-Уилка относительно конкурирующих законов близких к закону, соответствующему гипотезе H_1 (см. рис. 2.36).

Относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 критерий Ройстона не уступает по мощности критериям Шапиро-Уилка и Эпспас-Пулли.

В программных системах статистического анализа под именем критерия Шапиро-Уилка, как правило, реализуется модификация Ройстона.

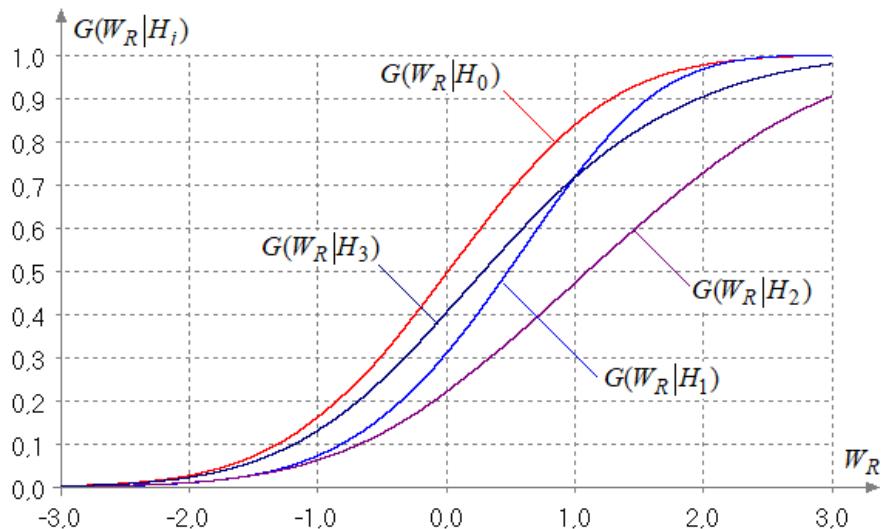


Рис. 2.36. Условные распределения $G(W_R | H_i)$ статистики W_R
Ройстона при объеме выборок $n = 30$

Таблица 2.41

Мощность критерия Ройстона относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.171	0.110	0.050	0.022	0.007
20	0.209	0.136	0.061	0.025	0.007
30	0.262	0.177	0.084	0.037	0.010
40	0.321	0.227	0.115	0.053	0.016
50	0.383	0.280	0.151	0.074	0.025
100	0.660	0.553	0.381	0.241	0.114
150	0.841	0.766	0.615	0.461	0.280
200	0.934	0.892	0.793	0.664	0.478
300	0.992	0.983	0.956	0.908	0.806

Таблица 2.42

Мощность критерия Ройстона относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.276	0.218	0.149	0.103	0.062
20	0.409	0.346	0.261	0.196	0.135
30	0.514	0.449	0.356	0.281	0.203
40	0.602	0.539	0.443	0.360	0.272
50	0.677	0.616	0.521	0.436	0.340
100	0.894	0.860	0.797	0.730	0.636
150	0.969	0.955	0.925	0.888	0.829
200	0.991	0.987	0.975	0.958	0.928
300	0.999	0.999	0.998	0.996	0.990

Таблица 2.43

Мощность критерия Ройстона относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.189	0.137	0.080	0.047	0.024
20	0.236	0.181	0.117	0.076	0.044
30	0.272	0.215	0.146	0.101	0.062
40	0.304	0.244	0.171	0.121	0.078
50	0.334	0.273	0.196	0.142	0.093
100	0.461	0.395	0.306	0.236	0.167
150	0.564	0.498	0.402	0.324	0.242
200	0.650	0.588	0.491	0.407	0.314
300	0.778	0.726	0.640	0.557	0.458

Рейтинг критерия – 10.

2.17. Критерий Васичека (Vasicek Test)

Энтропийный критерий нормальности Васичека [87, 108] базируется на том, что энтропия нормального закона превышает энтропию любого другого распределения с той же дисперсией.

Энтропия распределения вероятностей с плотностью $f(x)$ определяется выражением

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx,$$

а ее оценка по выборочным данным

$$H_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left\{ \frac{n}{2m} \left(x_{(i+m)} - x_{(i-m)} \right) \right\},$$

где $x_{(i)}$ – i -я порядковая статистика (при $i-m < 1$ $x_{(i-m)} = x_{(1)}$; при $i+m > n$ $x_{(i+m)} = x_{(n)}$), m – целое положительное число (размер окна), не превышающее $n/2$.

Статистика критерия Васичека имеет вид

$$K_{mn} = \frac{n}{2ms} \left\{ \prod_{i=1}^n \left(x_{(i+m)} - x_{(i-m)} \right) \right\}^{1/n}, \quad (2.19)$$

$$\text{где } s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2; \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Критерий левосторонний. Если $K_{mn} < K_{mn}(\alpha)$, где $K_{mn}(\alpha)$ – критическое значение статистики, то гипотеза H_0 о принадлежности выборки нормальному закону отклоняется на уровне значимости α . При $n, m \rightarrow \infty$, $m/n \rightarrow \infty$ и справедливости проверяемой гипотезы $K_{mn} \rightarrow \sqrt{2\pi \cdot e} = 4.133$, при этом всегда $0 \leq K_{mn} \leq 4.133$.

В вычислительном плане статистику критерия предпочтительней использовать в следующем эквивалентном виде:

$$K_{mn} = \exp \left\{ \ln \left(\frac{n}{2ms} \right) + \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \ln \left(x_{(i+m)} - x_{(i-m)} \right) \right] \right\}. \quad (2.20)$$

Примечание 1. Из-за накопления погрешности при вычислении статистики в форме (2.19) её значения (с ростом n) даже при справедливости проверяемой гипотезы H_0 могут обнуляться (в отличие от статистики в форме (2.20)). Это приведёт к неоправданному отклонению H_0 .

Примечание 2. При $x_{(i+m)} = x_{(i-m)}$ значение статистики K_{mn} оказывается равным нулю, и проверяемая гипотеза H_0 должна отклоняться при $p_{value} = 0$. Такая ситуация нередко встречается на практике и, как правило, является следствием округления измеряемых непрерывных случайных величин. Это должно быть предусмотрено при программной реализации вычисления статистики (2.20).

На рис. 2.37 показана зависимость условного распределения $G(K_{mn} | H_0)$ статистики критерия Васичека от объёма выборки n при $m=1$.

Рис. 2.38 иллюстрирует зависимость распределения $G(K_{mn} | H_0)$ статистики при фиксированном объёме выборки n от размера окна m .

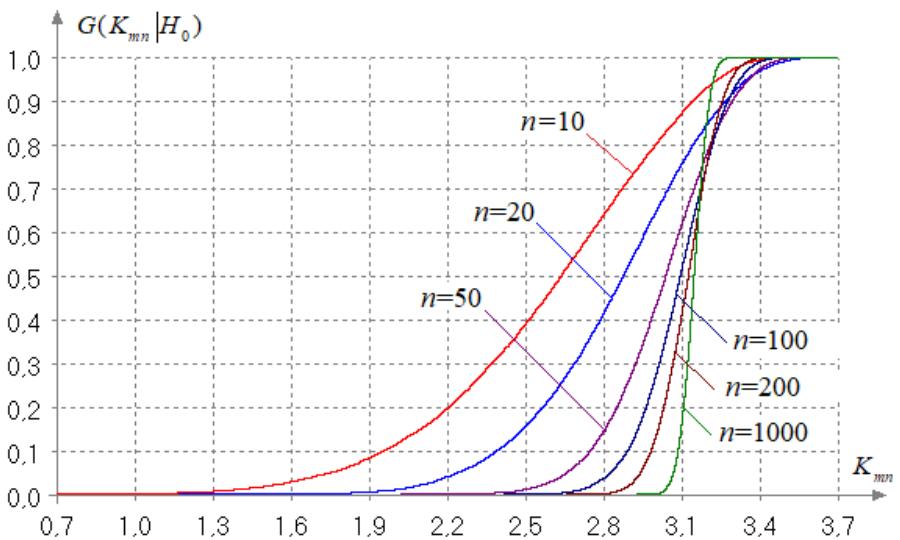


Рис. 2.37. Условные распределения $G(K_{mn} | H_0)$ статистики K_{mn} при размере окна $m = 1$

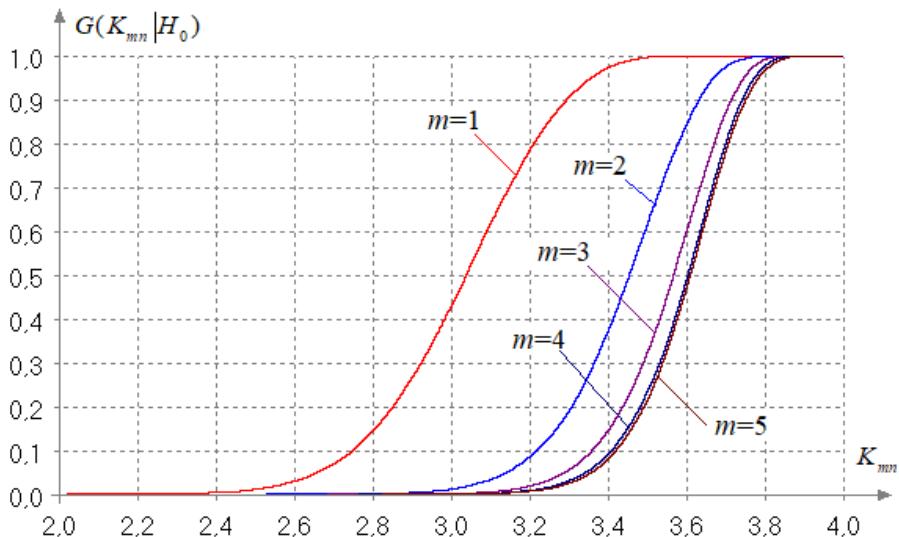


Рис. 2.38. Условные распределения $G(K_{mn} | H_0)$ статистики K_{mn}
в зависимости от размера окна при $n = 50$

Цель данного руководства обеспечить возможность применения различных критериев нормальности, в том числе в отсутствие специального программного обеспечения, позволяющего исследовать распределения статистик и оценивать значения p_{value} (как в [146]).

В отсутствие программного обеспечения может помочь табл. 2.44 процентных точек, где приведены критические значения статистики K_{mn} для различных n и $m=1 \div 5$, построенные по результатам моделирования распределений статистики при количестве имитационных экспериментов $N = 1.66 \times 10^6$. Они согласуются с соответствующими значениями, полученными автором критерия при $N = 10^3$, приведенными в [87].

В целом же, применять критерий Васичека или любой другой из рассмотренных ниже энтропийных критериев целесообразно в составе специального программного обеспечения, дающего возможность с опорой на метод Монте–Карло оценивать p_{value} и не думать о процентных точках.

Таблица 2.44

Процентные точки статистики K_{mn} критерия Васичека

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$m = 1$					
10	2.096	1.958	1.754	1.578	1.377
20	2.490	2.392	2.244	2.114	1.961
30	2.652	2.575	2.455	2.351	2.226
40	2.743	2.676	2.575	2.486	2.380
50	2.801	2.742	2.654	2.575	2.481
60	2.843	2.789	2.708	2.634	2.551
80	2.897	2.851	2.782	2.722	2.650
100	2.931	2.891	2.831	2.777	2.714
150	2.982	2.950	2.902	2.859	2.808
200	3.011	2.983	2.941	2.904	2.861
300	3.042	3.020	2.986	2.956	2.922
$m = 2$					
10	2.423	2.314	2.145	1.995	1.816
20	2.898	2.817	2.689	2.573	2.431
30	3.094	3.028	2.927	2.833	2.719
40	3.200	3.145	3.059	2.981	2.885
50	3.268	3.220	3.145	3.076	2.993
60	3.315	3.270	3.202	3.141	3.067
80	3.375	3.339	3.282	3.230	3.169
100	3.414	3.382	3.332	3.286	3.232
150	3.468	3.442	3.403	3.368	3.325
200	3.497	3.475	3.442	3.412	3.376
300	3.529	3.511	3.485	3.461	3.433

Продолжение таблицы 2.44

Процентные точки статистики K_{mn} критерия Васичека

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$m = 3$					
10	2.406	2.328	2.205	2.091	1.952
20	2.963	2.891	2.776	2.670	2.541
30	3.197	3.139	3.046	2.960	2.853
40	3.324	3.275	3.196	3.124	3.034
50	3.404	3.361	3.293	3.229	3.150
60	3.459	3.419	3.356	3.301	3.233
80	3.529	3.496	3.444	3.398	3.342
100	3.572	3.544	3.499	3.457	3.408
150	3.633	3.610	3.575	3.543	3.505
200	3.664	3.645	3.616	3.589	3.557
300	3.698	3.683	3.659	3.638	3.613
$m = 4$					
10	2.331	2.281	2.196	2.112	2.003
20	2.935	2.869	2.765	2.669	2.551
30	3.211	3.156	3.069	2.988	2.887
40	3.359	3.312	3.239	3.171	3.086
50	3.452	3.411	3.346	3.286	3.211
60	3.514	3.478	3.419	3.365	3.302
80	3.595	3.564	3.516	3.472	3.419
100	3.644	3.618	3.575	3.537	3.490
150	3.711	3.690	3.658	3.629	3.592
200	3.746	3.728	3.701	3.679	3.647
300	3.782	3.768	3.747	3.728	3.705

Окончание таблицы 2.44

Процентные точки статистики K_{mn} критерия Васичека

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$m = 5$					
10	2.226	2.190	2.130	2.070	1.990
20	2.870	2.810	2.717	2.631	2.527
30	3.187	3.135	3.052	2.975	2.879
40	3.357	3.312	3.241	3.176	3.094
50	3.463	3.424	3.361	3.303	3.231
60	3.534	3.499	3.442	3.391	3.329
80	3.626	3.596	3.550	3.507	3.454
100	3.681	3.655	3.615	3.578	3.532
150	3.755	3.735	3.704	3.676	3.641
200	3.793	3.777	3.751	3.727	3.699
300	3.832	3.819	3.799	3.781	3.759

Результаты исследования мощности критерия Васичека в зависимости от n при размерах окна $m=1 \div 5$ по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 2.45 а оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 2.46 и 2.47 соответственно.

Мощность критерия существенно зависит от размера окна m , и эта зависимость имеет различный характер для рассматриваемых конкурирующих гипотез. Очевидно, что оптимальные значения окна m , при котором мощность критерия максимальна, зависят от объёма выборки n и от вида рассматриваемой конкурирующей гипотезы.

Максимальные значения мощности выделены выделены в таблицах жирным шрифтом.

Таблица 2.45

Мощность критерия Васичека относительно гипотезы H_1

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	1	0.203	0.141	0.075	0.039	0.016
	2	0.222	0.154	0.081	0.042	0.018
	3	0.219	0.149	0.076	0.038	0.015
	4	0.208	0.138	0.066	0.032	0.012
	5	0.204	0.135	0.066	0.032	0.012
20	1	0.235	0.166	0.091	0.050	0.022
	2	0.286	0.209	0.119	0.068	0.031
	3	0.321	0.237	0.138	0.078	0.036
	4	0.343	0.254	0.148	0.083	0.038
	5	0.352	0.260	0.150	0.084	0.037
30	1	0.256	0.184	0.103	0.057	0.026
	2	0.323	0.241	0.143	0.084	0.040
	3	0.373	0.284	0.174	0.105	0.051
	4	0.411	0.317	0.198	0.120	0.060
	5	0.439	0.341	0.215	0.131	0.065
40	1	0.273	0.199	0.114	0.064	0.030
	2	0.351	0.267	0.164	0.099	0.048
	3	0.410	0.319	0.203	0.126	0.065
	4	0.456	0.360	0.234	0.149	0.079
	5	0.491	0.392	0.260	0.168	0.090
50	1	0.289	0.212	0.123	0.071	0.033
	2	0.378	0.291	0.182	0.111	0.057
	3	0.443	0.350	0.228	0.145	0.076
	4	0.493	0.397	0.266	0.172	0.094
	5	0.531	0.434	0.295	0.196	0.109
100	1	0.355	0.270	0.165	0.099	0.049
	2	0.479	0.385	0.259	0.169	0.094
	3	0.563	0.468	0.332	0.228	0.135
	4	0.623	0.530	0.389	0.277	0.171
	5	0.668	0.577	0.434	0.318	0.202

Окончание таблицы 2.45

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
150	1	0.408	0.318	0.203	0.126	0.066
	2	0.557	0.463	0.328	0.227	0.134
	3	0.651	0.561	0.421	0.306	0.195
	4	0.714	0.630	0.492	0.372	0.246
	5	0.759	0.680	0.546	0.424	0.290
200	1	0.455	0.362	0.238	0.152	0.083
	2	0.623	0.530	0.391	0.280	0.175
	3	0.720	0.636	0.500	0.381	0.256
	4	0.783	0.708	0.579	0.459	0.324
	5	0.824	0.758	0.637	0.519	0.378
300	1	0.533	0.437	0.303	0.204	0.117
	2	0.724	0.640	0.502	0.381	0.257
	3	0.821	0.754	0.631	0.513	0.374
	4	0.876	0.821	0.717	0.607	0.468
	5	0.908	0.863	0.774	0.673	0.539

Таблица 2.46

Мощность критерия Васичека относительно гипотезы H_2

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	1	0.173	0.118	0.062	0.032	0.014
	2	0.170	0.120	0.067	0.038	0.018
	3	0.168	0.124	0.075	0.045	0.024
	4	0.184	0.140	0.089	0.057	0.031
	5	0.185	0.141	0.091	0.058	0.032
20	1	0.239	0.173	0.100	0.058	0.028
	2	0.248	0.184	0.112	0.068	0.036
	3	0.211	0.155	0.093	0.057	0.031
	4	0.161	0.118	0.071	0.044	0.024
	5	0.126	0.092	0.055	0.035	0.019

Продолжение таблицы 2.46

<i>n</i>	<i>m</i>	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
30	1	0.295	0.224	0.138	0.085	0.045
	2	0.331	0.259	0.170	0.112	0.064
	3	0.311	0.242	0.158	0.104	0.060
	4	0.258	0.197	0.125	0.081	0.046
	5	0.194	0.144	0.088	0.056	0.031
40	1	0.344	0.267	0.173	0.112	0.062
	2	0.403	0.326	0.226	0.157	0.096
	3	0.399	0.323	0.225	0.158	0.097
	4	0.360	0.287	0.198	0.135	0.083
	5	0.298	0.232	0.153	0.103	0.061
50	1	0.387	0.308	0.206	0.137	0.080
	2	0.466	0.387	0.279	0.200	0.128
	3	0.476	0.397	0.292	0.212	0.138
	4	0.448	0.372	0.270	0.194	0.125
	5	0.397	0.324	0.228	0.161	0.102
100	1	0.551	0.467	0.347	0.254	0.166
	2	0.677	0.604	0.490	0.392	0.288
	3	0.720	0.654	0.546	0.448	0.342
	4	0.730	0.665	0.559	0.464	0.359
	5	0.718	0.653	0.548	0.455	0.350
150	1	0.664	0.584	0.462	0.358	0.252
	2	0.800	0.742	0.642	0.547	0.435
	3	0.848	0.800	0.713	0.626	0.520
	4	0.866	0.822	0.742	0.661	0.557
	5	0.868	0.825	0.748	0.668	0.567
200	1	0.746	0.675	0.558	0.451	0.334
	2	0.876	0.832	0.751	0.667	0.559
	3	0.917	0.884	0.822	0.753	0.659
	4	0.933	0.906	0.852	0.792	0.706
	5	0.938	0.913	0.863	0.906	0.725

Окончание таблицы 2.46

n		α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
300	1	0.855	0.802	0.705	0.607	0.486
	2	0.952	0.930	0.882	0.826	0.746
	3	0.975	0.962	0.933	0.896	0.838
	4	0.983	0.974	0.953	0.926	0.881
	5	0.987	0.979	0.962	0.939	0.900

Таблица 2.47

Мощность критерия Васичека относительно гипотезы H_3

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	1	0.148	0.099	0.049	0.024	0.010
	2	0.149	0.100	0.051	0.026	0.011
	3	0.150	0.103	0.055	0.029	0.013
	4	0.156	0.109	0.060	0.033	0.015
	5	0.154	0.108	0.059	0.032	0.015
20	1	0.158	0.106	0.054	0.028	0.011
	2	0.155	0.105	0.054	0.028	0.012
	3	0.143	0.097	0.050	0.026	0.011
	4	0.131	0.088	0.046	0.024	0.011
	5	0.122	0.082	0.043	0.022	0.010
30	1	0.168	0.115	0.060	0.031	0.013
	2	0.168	0.116	0.062	0.033	0.015
	3	0.15	0.106	0.056	0.030	0.013
	4	0.138	0.093	0.049	0.026	0.011
	5	0.121	0.081	0.042	0.022	0.010
40	1	0.177	0.122	0.065	0.034	0.015
	2	0.181	0.126	0.069	0.038	0.017
	3	0.169	0.118	0.064	0.036	0.017
	4	0.150	0.103	0.055	0.030	0.014
	5	0.130	0.088	0.046	0.025	0.011

Окончание таблицы 2.47

<i>n</i>	<i>m</i>	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
50	1	0.185	0.128	0.069	0.037	0.016
	2	0.193	0.137	0.076	0.043	0.020
	3	0.184	0.130	0.072	0.041	0.019
	4	0.165	0.115	0.063	0.035	0.017
	5	0.143	0.098	0.052	0.029	0.013
100	1	0.216	0.154	0.086	0.049	0.023
	2	0.243	0.178	0.106	0.063	0.032
	3	0.246	0.182	0.110	0.066	0.035
	4	0.235	0.173	0.104	0.063	0.033
	5	0.215	0.157	0.093	0.056	0.029
150	1	0.240	0.174	0.100	0.057	0.027
	2	0.281	0.212	0.130	0.081	0.043
	3	0.296	0.226	0.143	0.090	0.050
	4	0.293	0.225	0.143	0.091	0.051
	5	0.279	0.214	0.135	0.086	0.048
200	1	0.259	0.191	0.112	0.065	0.032
	2	0.313	0.240	0.152	0.095	0.052
	3	0.337	0.262	0.171	0.112	0.064
	4	0.343	0.269	0.177	0.118	0.068
	5	0.335	0.263	0.174	0.115	0.067
300	1	0.293	0.219	0.132	0.079	0.040
	2	0.368	0.289	0.189	0.123	0.070
	3	0.409	0.328	0.223	0.152	0.091
	4	0.427	0.345	0.241	0.167	0.103
	5	0.430	0.350	0.246	0.172	0.107

В [43] свойства оценок энтропии и мощность критериев сравнивались при значениях *m*, выбираемых по эвристической формуле

$$m = \left[\sqrt{n} + 0.5 \right].$$

При этом в [43] подчеркивалось, что вопрос выбора оптимального *m* остаётся открытым. На это же соотношение опирались при проведении исследований в [93]. Из представленных в данном параграфе резуль-

татов очевидно, что такой выбор m не является оптимальным и не гарантирует максимальной мощности критерия.

Замечание. Зависимость мощности при данных n , H_0 и конкурирующей гипотезе H_i от выбора m является одновременно плюсом и минусом для энтропийных критериев. С одной стороны, при оптимальном выборе m критерий может получить некоторое преимущество в мощности (относительно конкретной H_i) перед другими критериями. Однако это ещё не означает, что это m будет оптимально относительно другой интересующей нас конкурирующей гипотезы. С другой стороны, при неоптимальном m потери в мощности могут быть существенны.

Заметим, что у критерия Васичека отсутствует недостаток, свойственный многим из рассмотренных выше специальных критериев нормальности – смещённость при малых n и α относительно конкурирующей гипотезы H_1 . Однако аналогичный недостаток (смещённость критерия) обнаружен при некоторых размерах окна m относительно гипотезы H_3 , соответствующей логистическому закону. В табл. 2.39 ячейки, соответствующие такой ситуации, когда мощность $1 - \beta$ меньше заданной вероятности ошибки 1-го рода α , выделены серым цветом.

По сравнению с другими рассмотренными, критерий Васичека демонстрирует неплохую мощность относительно H_1 , среднюю относительно H_2 и ниже среднего относительно H_3 .

Рейтинг критерия – 37.5.

2.18. Критерий Корреа (Correa Test)

Одна из оценок энтропии была предложена в [20]:

$$HC_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left\{ \frac{\sum_{j=i-m}^{i+m} (x_{(j)} - \bar{x}_{(i)}) (j-i)}{n \sum_{j=i-m}^{i+m} (x_{(j)} - \bar{x}_{(i)})^2} \right\},$$

где $x_{(j)}$ – порядковые статистики, построенные по выборке,

$$\bar{x}_{(i)} = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=i-m}^{i+m} x_{(j)}.$$

Статистика критерия нормальности [93] имеет вид:

$$THC_{mn} = \frac{\exp\{HC_{mn}\}}{s}, \quad (2.21)$$

Критерий также **левосторонний**. Распределения статистики $G(THC_{mn}|H_0)$ зависят от n и m . Характер зависимости от n и m аналогичен показанному для распределения статистики критерия Васичека.

В отсутствие специального программного обеспечения, позволяющего как в [146] находить оценки p_{value} методом Монте-Карло, при проверке нормальности по критерию Корреа можно воспользоваться критическими значениями статистик, представленными в табл. 2.48 для некоторых n при $m=1 \div 5$.

Полученные оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 в зависимости от n при размерах окна $m=1 \div 5$ приведены в таблицах 2.49, 2.50, 2.51, соответственно. Максимальные значения мощности и соответствующее m при каждом n в таблицах выделены жирным шрифтом.

Сравнивая оценки мощности критерия Корреа **при оптимальных** значениях m с соответствующими оценками мощности критерия Васичека, можно отметить следующие факты.

- Относительно конкурирующей гипотезы H_1 при $n < 100$ мощность критерия Корреа слегка превышает мощность критерия Васичека. При $n > 100$ небольшое преимущество уже за критерием Васичека.
- По мощности относительно гипотез H_2 и H_3 при всех n небольшое преимущество за критерием Васичека.

Таблица 2.48

Процентные точки для статистики TNC_{mn} критерия Корпера

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$m = 1$					
10	2.421	2.265	2.035	1.835	1.606
20	2.820	2.712	2.549	2.404	2.236
30	2.983	2.897	2.767	2.651	2.514
40	3.074	3.001	2.890	2.793	2.676
50	3.133	3.069	2.972	2.887	2.784
60	3.173	3.116	3.028	2.951	2.860
80	3.229	3.180	3.106	3.040	2.962
100	3.264	3.220	3.155	3.096	3.028
150	3.314	3.280	3.228	3.183	3.128
200	3.343	3.313	3.269	3.3.230	3.183
300	3.375	3.351	3.315	3.283	3.246
$m = 2$					
10	2.866	2.743	2.555	2.387	2.188
20	3.330	3.240	3.097	2.967	2.809
30	3.516	3.444	3.332	3.229	3.103
40	3.618	3.557	3.463	3.377	3.271
50	3.682	3.629	3.547	3.473	3.381
60	3.726	3.678	3.604	3.537	3.457
80	3.783	3.743	3.681	3.626	3.558
100	3.819	3.785	3.731	3.682	3.623
150	3.870	3.842	3.800	3.763	3.717
200	3.897	3.874	3.838	3.806	3.767
300	3.927	3.909	3.880	3.854	3.824

Продолжение таблицы 2.48

Процентные точки для статистики TNC_{mn} критерия Коррея

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$m = 3$					
10	2.856	2.776	2.651	2.536	2.392
20	3.380	3.299	3.170	3.051	2.907
30	3.595	3.530	3.427	3.334	3.215
40	3.711	3.656	3.569	3.489	3.394
50	3.783	3.735	3.659	3.590	3.504
60	3.831	3.788	3.720	3.658	3.583
80	3.893	3.857	3.802	3.751	3.688
100	3.932	3.901	3.852	3.808	3.754
150	3.984	3.960	3.922	3.888	3.846
200	4.012	3.991	3.960	3.931	3.896
300	4.041	4.025	4.000	3.978	3.951
$m = 4$					
10	2.815	2.772	2.698	2.619	2.511
20	3.337	3.260	3.142	3.034	2.905
30	3.587	3.524	3.428	3.338	3.227
40	3.718	3.666	3.583	3.508	3.415
50	3.798	3.753	3.681	3.614	3.533
60	3.853	3.812	3.747	3.688	3.617
80	3.921	3.887	3.834	3.785	3.727
100	3.962	3.933	3.887	3.846	3.796
150	4.018	3.995	3.959	3.928	3.888
200	4.046	4.027	3.997	3.971	3.939
300	4.075	4.060	4.037	4.017	3.992

Окончание таблицы 2.48

Процентные точки для статистики THC_{mn} критерия Коррея

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$m = 5$					
10	2.751	2.728	2.685	2.637	2.570
20	3.265	3.196	3.090	2.996	2.883
30	3.553	3.492	3.398	3.313	3.205
40	3.700	3.649	3.569	3.496	3.405
50	3.790	3.745	3.675	3.610	3.531
60	3.850	3.810	3.747	3.690	3.621
80	3.925	3.892	3.840	3.794	3.737
100	3.970	3.941	3.897	3.857	3.808
150	4.029	4.007	3.973	3.942	3.905
200	4.058	4.040	4.012	3.987	3.955
300	4.088	4.074	4.052	4.033	4.009

Таблица 2.49

Мощность критерия THC_{mn} Коррея относительно гипотезы H_1

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	1	0.205	0.141	0.075	0.039	0.016
	2	0.226	0.156	0.082	0.042	0.017
	3	0.224	0.151	0.075	0.037	0.014
	4	0.211	0.137	0.062	0.029	0.011
	5	0.198	0.127	0.059	0.028	0.010
20	1	0.239	0.170	0.093	0.051	0.023
	2	0.297	0.217	0.126	0.071	0.032
	3	0.335	0.248	0.144	0.082	0.039
	4	0.356	0.263	0.152	0.086	0.039
	5	0.365	0.269	0.156	0.088	0.039

Продолжение таблицы 2.49

<i>n</i>	<i>m</i>	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
30	1	0.261	0.188	0.106	0.059	0.027
	2	0.335	0.252	0.152	0.089	0.043
	3	0.386	0.296	0.184	0.112	0.055
	4	0.425	0.329	0.208	0.127	0.064
	5	0.454	0.354	0.225	0.139	0.068
40	1	0.279	0.204	0.117	0.066	0.031
	2	0.364	0.279	0.172	0.104	0.052
	3	0.423	0.331	0.212	0.132	0.070
	4	0.467	0.373	0.243	0.155	0.083
	5	0.503	0.403	0.268	0.174	0.093
50	1	0.296	0.218	0.127	0.073	0.034
	2	0.392	0.303	0.193	0.119	0.061
	3	0.455	0.362	0.238	0.153	0.081
	4	0.502	0.406	0.274	0.179	0.099
	5	0.539	0.441	0.303	0.201	0.113
100	1	0.365	0.279	0.172	0.103	0.052
	2	0.494	0.402	0.274	0.182	0.103
	3	0.572	0.479	0.344	0.241	0.144
	4	0.626	0.534	0.396	0.285	0.181
	5	0.666	0.577	0.437	0.322	0.208
150	1	0.419	0.329	0.213	0.134	0.071
	2	0.573	0.480	0.346	0.243	0.148
	3	0.658	0.569	0.433	0.319	0.203
	4	0.714	0.630	0.495	0.378	0.252
	5	0.753	0.674	0.543	0.424	0.293
200	1	0.469	0.374	0.250	0.161	0.089
	2	0.639	0.548	0.411	0.299	0.190
	3	0.725	0.643	0.511	0.392	0.267
	4	0.779	0.705	0.579	0.462	0.328
	5	0.815	0.749	0.629	0.515	0.376

Окончание таблицы 2.49

300	1	0.550	0.454	0.318	0.217	0.127
	2	0.740	0.660	0.525	0.405	0.278
	3	0.824	0.759	0.641	0.526	0.388
	4	0.870	0.817	0.714	0.606	0.470
	5	0.898	0.853	0.763	0.664	0.531

Таблица 2.50

Мощность критерия ТНС_{mn} Коррея относительно гипотезы H_2

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	1	0.171	0.116	0.061	0.031	0.014
	2	0.154	0.109	0.061	0.035	0.017
	3	0.145	0.107	0.065	0.040	0.022
	4	0.154	0.119	0.078	0.050	0.027
	5	0.160	0.125	0.082	0.053	0.030
20	1	0.239	0.174	0.100	0.058	0.029
	2	0.229	0.169	0.101	0.061	0.032
	3	0.171	0.123	0.073	0.044	0.024
	4	0.118	0.084	0.050	0.030	0.016
	5	0.090	0.064	0.037	0.023	0.012
30	1	0.298	0.226	0.141	0.087	0.046
	2	0.317	0.248	0.162	0.106	0.061
	3	0.271	0.208	0.133	0.086	0.049
	4	0.200	0.148	0.091	0.057	0.031
	5	0.131	0.094	0.056	0.034	0.019
40	1	0.349	0.271	0.176	0.115	0.065
	2	0.393	0.318	0.220	0.152	0.093
	3	0.364	0.293	0.201	0.138	0.086
	4	0.304	0.238	0.157	0.105	0.063
	5	0.229	0.172	0.108	0.070	0.040

Окончание таблицы 2.50

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
50	1	0.393	0.314	0.211	0.142	0.083
	2	0.460	0.382	0.276	0.198	0.127
	3	0.446	0.370	0.267	0.193	0.123
	4	0.396	0.324	0.228	0.161	0.101
	5	0.329	0.261	0.176	0.120	0.073
100	1	0.563	0.480	0.360	0.265	0.176
	2	0.681	0.609	0.497	0.401	0.297
	3	0.707	0.640	0.534	0.439	0.334
	4	0.700	0.634	0.528	0.436	0.335
	5	0.673	0.606	0.501	0.410	0.311
150	1	0.677	0.599	0.479	0.377	0.269
	2	0.805	0.749	0.652	0.560	0.451
	3	0.840	0.791	0.705	0.620	0.512
	4	0.848	0.801	0.718	0.638	0.533
	5	0.841	0.794	0.713	0.631	0.529
200	1	0.760	0.690	0.578	0.471	0.354
	2	0.882	0.839	0.762	0.682	0.577
	3	0.912	0.879	0.817	0.748	0.656
	4	0.922	0.893	0.837	0.774	0.687
	5	0.923	0.894	0.839	0.780	0.694
300	1	0.867	0.817	0.725	0.630	0.512
	2	0.955	0.934	0.891	0.839	0.763
	3	0.974	0.960	0.931	0.895	0.838
	4	0.980	0.970	0.947	0.918	0.870
	5	0.982	0.973	0.953	0.927	0.884

Таблица 2.51

Мощность критерия ТНС_{mn} Коррея относительно гипотезы H_3

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	1	0.146	0.097	0.048	0.024	0.010
	2	0.144	0.096	0.049	0.025	0.011
	3	0.143	0.097	0.052	0.028	0.013
	4	0.147	0.103	0.057	0.032	0.014
	5	0.148	0.104	0.058	0.032	0.014
20	1	0.157	0.106	0.054	0.027	0.012
	2	0.148	0.101	0.051	0.027	0.012
	3	0.132	0.089	0.045	0.024	0.010
	4	0.119	0.079	0.041	0.021	0.009
	5	0.110	0.073	0.037	0.019	0.008
30	1	0.168	0.114	0.060	0.031	0.013
	2	0.161	0.111	0.058	0.031	0.014
	3	0.141	0.096	0.050	0.027	0.012
	4	0.121	0.081	0.041	0.021	0.009
	5	0.105	0.069	0.035	0.018	0.007
40	1	0.177	0.122	0.065	0.035	0.015
	2	0.174	0.122	0.066	0.037	0.017
	3	0.155	0.107	0.058	0.031	0.014
	4	0.133	0.090	0.047	0.025	0.011
	5	0.112	0.074	0.037	0.019	0.008
50	1	0.185	0.128	0.069	0.038	0.017
	2	0.187	0.132	0.073	0.041	0.019
	3	0.170	0.119	0.065	0.036	0.017
	4	0.145	0.100	0.053	0.029	0.013
	5	0.123	0.083	0.042	0.022	0.010
100	1	0.219	0.157	0.088	0.049	0.023
	2	0.241	0.179	0.106	0.063	0.032
	3	0.234	0.173	0.104	0.063	0.032
	4	0.215	0.157	0.093	0.056	0.029
	5	0.190	0.136	0.078	0.046	0.023

Окончание таблицы 2.51

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
150	1	0.243	0.177	0.103	0.059	0.028
	2	0.281	0.212	0.131	0.081	0.044
	3	0.286	0.218	0.136	0.086	0.047
	4	0.274	0.208	0.130	0.082	0.045
	5	0.253	0.190	0.117	0.074	0.040
200	1	0.264	0.194	0.116	0.067	0.033
	2	0.314	0.242	0.154	0.098	0.054
	3	0.328	0.255	0.166	0.108	0.062
	4	0.324	0.252	0.164	0.108	0.062
	5	0.308	0.239	0.155	0.101	0.058
300	1	0.299	0.224	0.136	0.082	0.042
	2	0.372	0.294	0.194	0.127	0.073
	3	0.401	0.322	0.219	0.149	0.090
	4	0.408	0.330	0.227	0.156	0.096
	5	0.401	0.325	0.225	0.156	0.096

Рейтинг критерия – 40.5.

2.19. Критерий Ван Эса (Van Es Test)

В работе [86] была введена оценка энтропии с коррекцией смещения

$$HEs_{mn} = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} \ln \left(\frac{n+1}{m} (x_{(i+m)} - x_{(i)}) \right) + \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} + \ln(m) - \ln(n+1)$$

и показана её асимптотическая нормальность.

Статистика соответствующего критерия нормальности имеет вид:

$$THEs_{mn} = \frac{\exp\{HEs_{mn}\}}{s}, \quad (2.22)$$

где $s = \sqrt{1/n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ – оценка стандартного отклонения, вычисленная по выборке.

Примечание. При программной реализации в случае обнаружения равенства $x_{(i+m)} = x_{(i)}$ статистике $THEs_{mn}$ присваивается значение ноль, и проверяемая гипотеза H_0 должна отклоняться при $p_{value} = 0$.

Критерий левосторонний. Распределения $G(THEs_{mn} | H_0)$ статистики данного критерия, как и распределения статистики любого другого энтропийного критерия, зависят от объёмов выборок n и от размера окна m .

Критические значения для статистики $THEs_{mn}$, которые могут использоваться при проверке гипотезы о нормальности, представлены в табл. 2.52 для ряда n при $m=1 \div 5$.

Полученные в результате исследований оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 в зависимости от n при размерах окна $m=1 \div 5$ приведены в таблицах 2.53, 2.54, 2.55, соответственно.

Максимальные значения мощности и соответствующего m при каждом n в приводимых таблицах выделены жирным шрифтом.

Можно заметить, что при $n \leq 50$ неоптимальный (занесенный выбор m) может приводить к смещённости критерия относительно конкурирующих гипотез вида H_1 .

Оценки мощности критерия Ван Эса относительно H_1 оказались ниже соответствующих значений мощности критерия Васичека и критерия Корреа.

При оптимальных значениях m , соответствующих максимальным значениям мощности при объёмах выборок n , относительно гипотезы H_2 при $n \leq 300$ критерий Ван Эса демонстрирует мощности выше, чем у критериев Васичека и Корреа. При $n > 300$ оценки мощности уже близки.

В мощности относительно гипотезы H_3 критерий Ван Эса имеет солидное преимущество перед критериями Васичека и Корреа.

Таблица 2.52

Процентные точки для статистики $T\text{HE}_{1n}$ критерия Ван Эса

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$m = 1$					
10	3.129	2.874	2.508	2.205	1.879
20	3.312	3.136	2.875	2.655	2.409
30	3.428	3.283	3.071	2.891	2.685
40	3.507	3.382	3.198	3.040	2.860
50	3.569	3.456	3.291	3.149	2.986
60	3.612	3.509	3.357	3.224	3.077
80	3.679	3.590	3.459	3.345	3.212
100	3.726	3.645	3.526	3.423	3.305
150	3.800	3.734	3.637	3.551	3.455
200	3.846	3.788	3.703	3.628	3.542
300	3.899	3.853	3.783	3.722	3.651
$m = 2$					
10	3.270	3.092	2.821	2.577	2.296
20	3.392	3.276	3.095	2.937	2.747
30	3.493	3.399	3.258	3.132	2.980
40	3.566	3.485	3.363	3.255	3.128
50	3.622	3.551	3.443	3.347	3.234
60	3.663	3.598	3.500	3.412	3.308
80	3.727	3.671	3.587	3.512	3.422
100	3.771	3.721	3.645	3.580	3.499
150	3.842	3.802	3.740	3.687	3.623
200	3.884	3.850	3.797	3.751	3.696
300	3.936	3.907	3.865	3.827	3.782

Продолжение таблицы 2.52

Процентные точки для статистики $T\text{HEs}_{1n}$ критерия Ван Эса

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$m = 3$					
10	3.227	3.068	2.817	2.590	2.324
20	3.337	3.238	3.083	2.941	2.769
30	3.443	3.365	3.244	3.135	3.004
40	3.519	3.454	3.353	3.260	3.150
50	3.580	3.522	3.433	3.351	3.255
60	3.6625	3.572	3.492	3.419	3.331
80	3.694	3.649	3.581	3.518	3.444
100	3.743	3.703	3.642	3.588	3.523
150	3.822	3.789	3.740	3.697	3.645
200	3.869	3.841	3.799	3.762	3.718
300	3.926	3.903	3.869	3.839	3.803
$m = 4$					
10	3.171	3.022	2.789	2.578	2.331
20	3.269	3.176	3.029	2.893	2.729
30	3.379	3.308	3.197	3.094	2.969
40	3.461	3.402	3.310	3.225	3.121
50	3.526	3.474	3.394	3.320	3.231
60	3.576	3.529	3.457	3.391	3.311
80	3.650	3.611	3.550	3.495	3.428
100	3.704	3.670	3.616	3.568	3.510
150	3.791	3.763	3.721	3.682	3.637
200	3.844	3.820	3.784	3.751	3.712
300	3.907	3.888	3.859	3.832	3.801

Окончание таблицы 2.52

Процентные точки для статистики THEs_{1n} критерия Ван Эса

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$m = 5$					
10	3.178	3.046	2.836	2.645	2.418
20	3.206	3.115	2.971	2.837	2.676
30	3.317	3.249	3.142	3.042	2.920
40	3.404	3.348	3.259	3.178	3.079
50	3.472	3.424	3.347	3.279	3.193
60	3.525	3.482	3.415	3.352	3.276
80	3.606	3.570	3.513	3.462	3.399
100	3.664	3.632	3.583	3.538	3.484
150	3.759	3.734	3.695	3.660	3.618
200	3.817	3.796	3.762	3.732	3.697
300	3.896	3.869	3.843	3.819	3.791

Таблица 2.53

Мощность критерия THEs_{1n} Ван Эса относительно гипотезы H_1

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	1	0.165	0.111	0.057	0.029	0.012
	2	0.134	0.087	0.043	0.021	0.008
	3	0.100	0.063	0.029	0.014	0.005
	4	0.087	0.055	0.025	0.012	0.004
	5	0.083	0.052	0.023	0.011	0.004
20	1	0.176	0.121	0.062	0.032	0.013
	2	0.156	0.105	0.053	0.027	0.011
	3	0.117	0.075	0.036	0.017	0.006
	4	0.082	0.050	0.022	0.009	0.003
	5	0.058	0.034	0.014	0.006	0.002

Продолжение таблицы 2.53

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
30	1	0.187	0.129	0.068	0.035	0.015
	2	0.176	0.121	0.064	0.033	0.014
	3	0.143	0.095	0.047	0.024	0.010
	4	0.105	0.067	0.031	0.015	0.006
	5	0.073	0.044	0.019	0.008	0.003
40	1	0.197	0.136	0.072	0.038	0.016
	2	0.196	0.136	0.073	0.039	0.017
	3	0.167	0.113	0.059	0.031	0.013
	4	0.130	0.086	0.042	0.021	0.008
	5	0.095	0.060	0.028	0.013	0.005
50	1	0.207	0.144	0.077	0.041	0.018
	2	0.214	0.150	0.082	0.044	0.020
	3	0.190	0.132	0.071	0.037	0.016
	4	0.155	0.105	0.054	0.028	0.012
	5	0.119	0.078	0.038	0.019	0.007
100	1	0.244	0.173	0.096	0.053	0.024
	2	0.285	0.209	0.122	0.070	0.033
	3	0.285	0.211	0.124	0.072	0.035
	4	0.265	0.195	0.113	0.066	0.031
	5	0.236	0.170	0.096	0.054	0.025
150	1	0.273	0.198	0.113	0.063	0.029
	2	0.341	0.260	0.158	0.096	0.047
	3	0.364	0.280	0.175	0.109	0.056
	4	0.361	0.277	0.175	0.108	0.056
	5	0.342	0.261	0.162	0.099	0.051
200	1	0.300	0.221	0.128	0.073	0.034
	2	0.393	0.305	0.193	0.120	0.062
	3	0.433	0.342	0.224	0.144	0.079
	4	0.445	0.354	0.234	0.152	0.085
	5	0.439	0.349	0.230	0.149	0.084

Окончание таблицы 2.53

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
300	1	0.345	0.260	0.158	0.092	0.045
	2	0.480	0.385	0.259	0.169	0.094
	3	0.547	0.453	0.320	0.219	0.129
	4	0.581	0.487	0.353	0.246	0.151
	5	0.594	0.502	0.367	0.261	0.161

Таблица 2.54

Мощность критерия $T\text{HEs}_{1n}$ Ван Эса относительно гипотезы H_2

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	1	0.211	0.149	0.082	0.044	0.020
	2	0.300	0.230	0.145	0.090	0.048
	3	0.355	0.279	0.181	0.116	0.064
	4	0.373	0.293	0.192	0.124	0.069
	5	0.379	0.299	0.197	0.129	0.073
20	1	0.256	0.188	0.109	0.063	0.031
	2	0.378	0.303	0.205	0.139	0.082
	3	0.462	0.384	0.277	0.199	0.127
	4	0.516	0.437	0.324	0.237	0.155
	5	0.549	0.469	0.352	0.259	0.171
30	1	0.288	0.215	0.130	0.078	0.040
	2	0.428	0.350	0.247	0.174	0.108
	3	0.524	0.446	0.336	0.252	0.171
	4	0.588	0.512	0.400	0.308	0.217
	5	0.630	0.556	0.443	0.347	0.248
40	1	0.314	0.238	0.149	0.091	0.048
	2	0.470	0.390	0.281	0.201	0.130
	3	0.572	0.495	0.383	0.294	0.206
	4	0.640	0.568	0.457	0.363	0.264
	5	0.687	0.618	0.507	0.412	0.309

Окончание таблицы 2.54

<i>n</i>	<i>m</i>	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
50	1	0.340	0.261	0.165	0.103	0.056
	2	0.507	0.425	0.314	0.230	0.151
	3	0.614	0.538	0.424	0.332	0.239
	4	0.684	0.614	0.504	0.410	0.308
	5	0.731	0.667	0.561	0.468	0.361
100	1	0.435	0.347	0.232	0.154	0.088
	2	0.640	0.561	0.442	0.344	0.242
	3	0.751	0.686	0.579	0.483	0.373
	4	0.816	0.762	0.669	0.581	0.472
	5	0.858	0.813	0.732	0.650	0.546
150	1	0.506	0.416	0.293	0.202	0.123
	2	0.731	0.661	0.544	0.442	0.329
	3	0.834	0.781	0.688	0.598	0.487
	4	0.889	0.850	0.776	0.697	0.598
	5	0.921	0.891	0.831	0.766	0.677
200	1	0.568	0.478	0.347	0.245	0.152
	2	0.797	0.734	0.628	0.527	0.407
	3	0.888	0.846	0.769	0.688	0.583
	4	0.932	0.903	0.847	0.783	0.696
	5	0.955	0.935	0.893	0.842	0.770
300	1	0.664	0.579	0.446	0.333	0.221
	2	0.885	0.840	0.755	0.665	0.550
	3	0.949	0.926	0.876	0.817	0.733
	4	0.974	0.961	0.930	0.891	0.832
	5	0.985	0.977	0.958	0.931	0.888

Таблица 2.55

Мощность критерия $T\text{HEs}_{1n}$ Ван Эса относительно гипотезы H_3

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	1	0.164	0.111	0.057	0.029	0.012
	2	0.195	0.138	0.075	0.041	0.018
	3	0.216	0.155	0.087	0.048	0.022
	4	0.223	0.160	0.090	0.050	0.024
	5	0.227	0.164	0.092	0.053	0.025
20	1	0.174	0.119	0.062	0.032	0.014
	2	0.218	0.157	0.089	0.051	0.024
	3	0.254	0.188	0.114	0.068	0.035
	4	0.278	0.209	0.129	0.079	0.041
	5	0.293	0.222	0.137	0.084	0.044
30	1	0.181	0.124	0.066	0.035	0.015
	2	0.230	0.167	0.097	0.057	0.028
	3	0.274	0.206	0.127	0.079	0.042
	4	0.307	0.236	0.151	0.096	0.053
	5	0.329	0.256	0.167	0.108	0.060
40	1	0.185	0.129	0.068	0.036	0.016
	2	0.238	0.174	0.102	0.060	0.030
	3	0.286	0.218	0.137	0.086	0.047
	4	0.325	0.253	0.165	0.107	0.061
	5	0.354	0.280	0.186	0.124	0.073
50	1	0.190	0.132	0.070	0.038	0.016
	2	0.247	0.181	0.107	0.063	0.032
	3	0.297	0.228	0.144	0.091	0.051
	4	0.340	0.267	0.176	0.116	0.068
	5	0.373	0.298	0.202	0.138	0.082
100	1	0.206	0.144	0.078	0.042	0.019
	2	0.273	0.203	0.123	0.075	0.038
	3	0.334	0.258	0.168	0.110	0.062
	4	0.385	0.308	0.211	0.144	0.087
	5	0.429	0.351	0.248	0.175	0.110

Окончание таблицы 2.55

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
150	1	0.216	0.153	0.084	0.046	0.021
	2	0.292	0.220	0.135	0.082	0.042
	3	0.359	0.282	0.185	0.123	0.070
	4	0.417	0.337	0.235	0.162	0.099
	5	0.465	0.386	0.278	0.200	0.129
200	1	0.226	0.161	0.089.	0.049	0.022
	2	0.307	0.234	0.146	0.090	0.047
	3	0.379	0.300	0.199	0.133	0.078
	4	0.442	0.361	0.253	0.177	0.111
	5	0.495	0.415	0.302	0.218	0.143
300	1	0.243	0.175	0.098	0.055	0.025
	2	0.338	0.259	0.164	0.102	0.054
	3	0.418	0.335	0.227	0.153	0.090
	4	0.485	0.402	0.289	0.203	0.130
	5	0.543	0.461	0.344	0.254	0.169

Рейтинг критерия – 31.

2.20. Критерий Эбрахими (Ebrahimi Test)

Авторами работы [31] была построена оценка энтропии,

$$HE_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left\{ \frac{n}{c_i m} (x_{(i+m)} - x_{(i-m)}) \right\},$$

где

$$c_i = \begin{cases} 1 + \frac{i-1}{m}, & 1 \leq i \leq m, \\ 2, & m+1 \leq i \leq n-m, \\ 1 + \frac{n-i}{m}, & n-m+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Методами статистического моделирования в [31] было показано, что эта оценка является точнее оценки энтропии, предложенной Васичеком [87].

Как и в большинстве энтропийных критериев в критерии нормальности используется статистика вида:

$$THE_{mn} = \frac{\exp\{HE_{mn}\}}{s}, \quad (2.23)$$

где $s = \sqrt{1/n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ – оценка стандартного отклонения, вычисленная по выборке.

Примечание. При обнаружении ситуации $x_{(i+m)} = x_{(i-m)}$ статистике THE_{mn} присваивается значение ноль, и проверяемая гипотеза H_0 должна отклоняться при $p_{value} = 0$.

Критерий левосторонний. Критические значения для статистики THE_{mn} представлены в табл. 2.56 для ряда n при $m = 1 \div 5$.

Полученные оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 в зависимости от n при размерах окна $m = 1 \div 5$ приведены в таблицах 2.57, 2.58, 2.59, соответственно. Максимальные значения мощности и соответствующее m при каждом n в таблицах выделены жирным шрифтом.

Смешённости критерия относительно конкурирующей гипотезы H_1 не обнаружено.

Как у всех энтропийных критериев, мощность критерия Эбрахими существенно зависит от выбора m . При $n \geq 20$ максимальная относительно H_1 мощность показана критерием при значениях $m = 5$. Относительно H_2 и H_3 с ростом n оптимальные значения m также увеличиваются: в случае H_2 предпочтительней выбор $m = 5$ при $n \geq 150$, а в случае H_3 – при $n \geq 300$.

Завышенный по сравнению с оптимальным значением выбор m может приводить к смешённости критерия относительно гипотезы H_3 , то есть к его неспособности отличать от нормального закона конкурирующие законы, близкие к логистическому.

Таблица 2.56

Процентные точки для статистики TNE_{mn} критерия Эбрахими

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$m = 1$					
10	2.408	2.250	2.015	1.812	1.582
20	2.669	2.564	2.405	2.266	2.103
30	2.778	2.695	2.571	2.461	2.330
40	2.839	2.770	3.665	2.572	2.462
50	2.880	2.819	2.728	2.648	2.551
60	2.908	2.854	2.771	2.697	2.612
80	2.948	2.901	2.831	2.770	2.697
100	2.973	2.932	2.870	2.815	2.751
150	3.010	2.978	2.929	2.885	2.835
200	3.031	3.004	2.962	2.925	2.881
300	3.056	3.034	3.000	2.970	2.935
$m = 2$					
10	2.951	2.816	2.605	2.415	2.190
20	3.197	3.108	2.966	2.840	2.683
30	3.30	3.233	3.124	3.024	2.903
40	3.361	3.303	3.212	3.129	3.028
50	3.399	3.348	3.270	3.199	3.113
60	3.425	3.379	3.308	3.245	3.169
80	3.459	3.422	3.363	3.311	3.247
100	3.482	3.449	3.398	3.352	3.296
150	3.514	3.488	3.448	3.413	3.370
200	3.532	3.510	3.476	3.446	3.410
300	3.552	3.535	3.508	3.483	3.455

Продолжение таблицы 2.56

Процентные точки для статистики TNE_{mn} критерия Эбрахими

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$m = 3$					
10	3.108	3.000	2.828	2.668	2.471
20	3.368	3.286	3.156	3.036	2.889
30	3.482	3.418	3.318	3.224	3.108
40	3.544	3.491	3.407	3.330	3.235
50	3.583	3.537	3.465	3.399	3.316
60	3.610	3.568	3.503	3.445	3.373
80	3.643	3.609	3.557	3.508	3.450
100	3.665	3.636	3.590	3.548	3.497
150	3.695	3.672	3.637	3.604	3.565
200	3.711	3.692	3.662	3.635	3.603
300	3.730	3.714	3.691	3.670	3.644
$m = 4$					
10	3.200	3.131	3.015	2.900	2.749
20	3.539	3.362	3.240	3.127	3.989
30	3.567	3.507	3.412	3.321	3.209
40	3.636	3.585	3.505	3.432	3.340
50	3.677	3.634	3.565	3.500	3.421
60	3.705	3.666	3.604	3.548	3.479
80	3.740	3.708	3.658	3.612	3.556
100	3.762	3.734	3.691	3.651	3.604
150	3.791	3.770	3.736	3.706	3.669
200	3.806	3.788	3.760	3.736	3.705
300	3.822	3.808	3.787	3.767	3.744

Окончание таблицы 2.56

Процентные точки для статистики TNE_{mn} критерия Эбрахими

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$m = 5$					
10	3.248	3.195	3.108	3.021	2.904
20	3.466	3.394	3.281	3.179	3.054
30	3.614	3.555	3.462	3.375	3.266
40	3.689	3.639	3.562	3.490	3.399
50	3.734	3.692	3.624	3.562	3.484
60	3.764	3.726	3.666	3.610	3.543
80	3.801	3.770	3.721	3.676	3.622
100	3.823	3.796	3.754	3.717	3.670
150	3.851	3.831	3.799	3.770	3.734
200	3.865	3.849	3.822	3.799	3.769
300	3.880	3.867	3.847	3.829	3.806

Таблица 2.57

Мощность критерия TNE_{mn} Эбрахими относительно гипотезы H_1

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	1	0.203	0.141	0.075	0.039	0.016
	2	0.222	0.154	0.081	0.042	0.018
	3	0.219	0.149	0.076	0.038	0.015
	4	0.208	0.137	0.066	0.032	0.012
	5	0.204	0.135	0.066	0.032	0.012
20	1	0.235	0.166	0.091	0.050	0.022
	2	0.286	0.209	0.120	0.068	0.031
	3	0.321	0.237	0.138	0.079	0.036
	4	0.343	0.253	0.148	0.084	0.038
	5	0.352	0.259	0.150	0.085	0.038

Продолжение таблицы 2.57

<i>n</i>	<i>m</i>	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
30	1	0.256	0.184	0.103	0.057	0.026
	2	0.324	0.241	0.144	0.084	0.040
	3	0.373	0.285	0.175	0.105	0.051
	4	0.411	0.317	0.200	0.121	0.060
	5	0.438	0.341	0.216	0.133	0.066
40	1	0.273	0.198	0.113	0.064	0.030
	2	0.351	0.267	0.163	0.097	0.048
	3	0.410	0.319	0.202	0.125	0.064
	4	0.456	0.360	0.234	0.149	0.079
	5	0.491	0.391	0.259	0.168	0.089
50	1	0.289	0.212	0.123	0.071	0.033
	2	0.378	0.291	0.182	0.112	0.057
	3	0.443	0.349	0.228	0.145	0.076
	4	0.492	0.397	0.265	0.172	0.094
	5	0.531	0.434	0.295	0.196	0.109
100	1	0.355	0.270	0.165	0.098	0.049
	2	0.479	0.386	0.260	0.169	0.094
	3	0.562	0.468	0.333	0.229	0.136
	4	0.623	0.531	0.391	0.278	0.173
	5	0.668	0.577	0.436	0.320	0.205
150	1	0.408	0.318	0.204	0.126	0.067
	2	0.557	0.462	0.327	0.227	0.135
	3	0.652	0.561	0.421	0.307	0.195
	4	0.715	0.631	0.492	0.371	0.247
	5	0.759	0.681	0.547	0.423	0.291
200	1	0.455	0.361	0.239	0.152	0.083
	2	0.622	0.530	0.391	0.280	0.176
	3	0.720	0.636	0.500	0.381	0.256
	4	0.783	0.708	0.579	0.459	0.324
	5	0.825	0.758	0.637	0.519	0.378

Окончание таблицы 2.57

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
300	1	0.533	0.437	0.303	0.204	0.117
	2	0.724	0.640	0.502	0.381	0.257
	3	0.822	0.754	0.631	0.514	0.374
	4	0.876	0.821	0.717	0.607	0.468
	5	0.908	0.863	0.774	0.673	0.539

Таблица 2.58

Мощность критерия TNE_{mn} Эбрахими относительно гипотезы H_2

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	1	0.173	0.118	0.062	0.032	0.014
	2	0.170	0.120	0.067	0.038	0.018
	3	0.168	0.124	0.075	0.045	0.024
	4	0.184	0.140	0.089	0.057	0.031
	5	0.185	0.141	0.091	0.059	0.032
20	1	0.239	0.173	0.100	0.058	0.028
	2	0.247	0.184	0.111	0.068	0.036
	3	0.211	0.155	0.093	0.057	0.031
	4	0.161	0.117	0.071	0.044	0.024
	5	0.125	0.092	0.055	0.035	0.020
30	1	0.295	0.223	0.138	0.085	0.045
	2	0.331	0.259	0.170	0.112	0.064
	3	0.309	0.241	0.158	0.104	0.060
	4	0.257	0.196	0.125	0.081	0.046
	5	0.193	0.143	0.089	0.056	0.031
40	1	0.343	0.267	0.173	0.112	0.062
	2	0.402	0.325	0.225	0.156	0.095
	3	0.398	0.323	0.225	0.157	0.098
	4	0.360	0.287	0.196	0.136	0.083
	5	0.298	0.232	0.153	0.103	0.061

Окончание таблицы 2.58

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
50	1	0.387	0.307	0.205	0.137	0.080
	2	0.466	0.385	0.279	0.200	0.128
	3	0.475	0.396	0.291	0.212	0.137
	4	0.448	0.372	0.269	0.193	0.125
	5	0.370	0.302	0.213	0.153	0.100
100	1	0.551	0.468	0.347	0.253	0.166
	2	0.678	0.605	0.491	0.392	0.288
	3	0.721	0.654	0.548	0.450	0.344
	4	0.731	0.666	0.562	0.466	0.361
	5	0.719	0.654	0.549	0.457	0.352
150	1	0.664	0.585	0.463	0.358	0.253
	2	0.801	0.741	0.642	0.547	0.436
	3	0.848	0.800	0.713	0.627	0.520
	4	0.866	0.822	0.742	0.660	0.556
	5	0.868	0.826	0.748	0.668	0.567
200	1	0.746	0.675	0.559	0.451	0.333
	2	0.876	0.832	0.751	0.667	0.561
	3	0.917	0.884	0.822	0.753	0.660
	4	0.933	0.906	0.852	0.791	0.706
	5	0.938	0.913	0.863	0.807	0.725
300	1	0.855	0.802	0.705	0.607	0.486
	2	0.952	0.930	0.882	0.826	0.746
	3	0.975	0.962	0.933	0.897	0.838
	4	0.983	0.974	0.953	0.926	0.881
	5	0.987	0.979	0.962	0.939	0.900

Таблица 2.59

Мощность критерия ТНЕ_{mn} Эбрахими относительно гипотезы H_3

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	1	0.148	0.099	0.049	0.024	0.010
	2	0.149	0.100	0.051	0.026	0.011
	3	0.150	0.103	0.055	0.029	0.013
	4	0.156	0.109	0.060	0.033	0.015
	5	0.154	0.108	0.059	0.032	0.015
20	1	0.158	0.106	0.054	0.028	0.012
	2	0.155	0.105	0.054	0.028	0.012
	3	0.143	0.097	0.050	0.026	0.011
	4	0.131	0.088	0.046	0.024	0.011
	5	0.122	0.082	0.043	0.023	0.010
30	1	0.168	0.114	0.060	0.031	0.013
	2	0.168	0.115	0.062	0.033	0.015
	3	0.155	0.106	0.056	0.030	0.013
	4	0.137	0.093	0.049	0.026	0.011
	5	0.120	0.081	0.042	0.022	0.010
40	1	0.177	0.122	0.064	0.034	0.015
	2	0.181	0.127	0.069	0.038	0.017
	3	0.169	0.118	0.064	0.036	0.017
	4	0.151	0.104	0.056	0.030	0.014
	5	0.130	0.088	0.046	0.025	0.011
50	1	0.184	0.128	0.069	0.037	0.016
	2	0.193	0.136	0.076	0.043	0.020
	3	0.184	0.130	0.072	0.041	0.019
	4	0.165	0.115	0.063	0.035	0.017
	5	0.143	0.098	0.052	0.029	0.013
100	1	0.217	0.155	0.087	0.048	0.023
	2	0.243	0.180	0.107	0.063	0.032
	3	0.247	0.183	0.111	0.067	0.035
	4	0.235	0.174	0.105	0.064	0.034
	5	0.215	0.157	0.094	0.057	0.029

Окончание таблицы 2.59

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
150	1	0.240	0.174	0.101	0.057	0.027
	2	0.282	0.212	0.131	0.080	0.043
	3	0.297	0.226	0.143	0.090	0.050
	4	0.294	0.225	0.143	0.091	0.051
	5	0.280	0.214	0.135	0.085	0.048
200	1	0.259	0.191	0.113	0.065	0.032
	2	0.313	0.240	0.152	0.096	0.053
	3	0.337	0.263	0.172	0.112	0.064
	4	0.343	0.269	0.177	0.118	0.068
	5	0.335	0.263	0.173	0.115	0.067
300	1	0.293	0.219	0.132	0.079	0.040
	2	0.368	0.289	0.189	0.123	0.070
	3	0.409	0.328	0.223	0.152	0.091
	4	0.427	0.345	0.241	0.167	0.103
	5	0.429	0.350	0.246	0.172	0.107

Сделанные выше замечания относятся также и к рассмотренному ранее критерию Васичека. А приводимые в таблицах 2.49–2.51 оценки мощности критерия Эбрахими подтверждают его **эквивалентность критерию Васичека**.

Рейтинг критерия – 37.5.

2.21. Критерии Заманзаде–Аргами (Zamanzade–Arghami Test)

В работе [93] предложена следующая оценка энтропии $H(f)$ с неизвестной непрерывной функцией плотности f :

$$HZ1_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \{b_i\},$$

где

$$b_i = \frac{x_{(i+m)} - x_{(i-m)}}{\sum_{j=k_1(i)}^{k_2(i)-1} \left(\frac{\hat{f}(x_{(j+1)}) + \hat{f}(x_{(j)})}{2} \right) (x_{(j+1)} - x_{(j)})},$$

$$k_1(i) = \begin{cases} 1, & i \leq m, \\ i-m, & i > m, \end{cases} \quad k_2(i) = \begin{cases} i+m, & i \leq n-m, \\ n, & i > n-m, \end{cases}$$

$$\hat{f}(x_i) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x_i - x_j}{h}\right),$$

где в качестве ядерной функции $K(\cdot)$ берётся плотность стандартного нормального закона с параметром размытости $h = 1/06sn^{-1/5}$, где $s = \sqrt{1/n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ – оценка стандартного отклонения, вычисленная по выборке.

Статистика первого из критериев, построенных в [93] на базе предложенной оценки, имеет вид:

$$TZ1_{mn} = \frac{\exp\{HZ1_{mn}\}}{s}. \quad (2.24)$$

При построении оценки $HZ1_{mn}$ для вычисления b_i используется не равное количество точек. Поэтому авторам показалось естественным ввести весовые коэффициенты, пропорциональные количеству точек, используемых при вычислении b_i :

$$HZ2_{mn} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \ln\{b_i\}}{\sum_{i=1}^n w_i},$$

где

$$w_i = \begin{cases} m+i-1, & 1 \leq i \leq m, \\ 2m, & m+1 \leq i \leq n-m, \quad i=1,\dots,n, \\ n-i+m, & n-m+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

являются весами, пропорциональными количеству точек, используемых при вычислении b_i .

Статистика второго критерия, построенного в [92], имеет вид:

$$TZ2_{mn} = \frac{\exp\{HZ2_{mn}\}}{s}. \quad (2.25)$$

Примечание. При программной реализации в случае обнаружения ситуации $x_{(i+m)} = x_{(i-m)}$ статистикам $TZ1_{mn}$ и $TZ2_{mn}$ присваивается значение ноль, и проверяемая гипотеза H_0 должна отклоняться при $p_{value} = 0$.

Как и другие энтропийные критерии, оба рассматриваемых критерия являются **левосторонними**.

Рейтинг критерия со статистикой $TZ1_{mn} - 2$, с $TZ2_{mn} - 7.5$.

Для ряда n и $m=1 \div 5$ критические значения для статистики $TZ1_{mn}$ представлены в табл. 2.60, а для статистики $TZ2_{mn}$ – в табл. 2.61

Полученные оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 в зависимости от n при размерах окна $m=1 \div 5$ для критерия со статистикой $TZ1_{mn}$ приведены в таблицах 2.62, 2.63, 2.64, соответственно.

Аналогично, для критерия со статистикой $TZ2_{mn}$ оценки мощности представлены в таблицах 2.65, 2.66, 2.67.

Максимальные значения мощности и соответствующее m при каждом n в таблицах выделены жирным шрифтом.

Относительно конкурирующих гипотез, близких к H_1 , оба критерия оказываются смешёнными. Для критерия со статистикой $TZ1_{mn}$ смешённость может проявиться при $n \leq 40$, при оптимальном выборе m – при $n < 20$.

Для критерия со статистикой $TZ2_{mn}$ ситуация со смешённостью острее: даже при оптимальном выборе m смешённость проявляется при $n \leq 80$. Смешённость исчезает и появляется возможность различать H_0 и H_1 при объёмах выборок $n > 100$.

Относительно H_1 критерий со статистикой $TZ1_{mn}$ имеет преимущество в мощности по сравнению со статистикой $TZ2_{mn}$.

Таблица 2.60

Процентные точки статистики TZI_{mn} критерия Заманзаде–Аргами

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$m = 1$					
10	3.698	3.612	3.461	3.312	3.129
20	3.802	3.745	3.647	3.550	3.425
30	3.862	3.818	3.744	3.671	3.576
40	3.901	3.863	3.805	3.746	3.669
50	3.928	3.897	3.847	3.797	3.733
60	3.948	3.922	3.878	3.834	3.780
80	3.978	3.956	3.921	3.886	3.844
100	3.998	3.980	3.950	3.921	3.885
150	4.028	4.015	3.994	3.973	3.947
200	4.046	4.036	4.019	4.003	3.982
300	4.067	4.059	4.047	4.036	4.021
$m = 2$					
10	3.723	3.648	3.517	3.388	3.221
20	3.818	3.766	3.676	3.587	3.469
30	3.873	3.832	3.765	3.696	3.606
40	3.905	3.876	3.820	3.764	3.692
50	3.935	3.907	3.859	3.812	3.750
60	3.955	3.930	3.888	3.848	3.795
80	3.983	3.962	3.929	3.896	3.853
100	4.002	3.985	3.956	3.929	3.894
150	4.031	4.019	3.998	3.979	3.953
200	4.048	4.039	4.023	4.007	3.396
300	4.068	4.061	4.050	4.039	4.025

Продолжение таблицы 2.60

Процентные точки статистики TZI_{mn} критерия Заманзаде–Аргами

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$m = 3$					
10	3.754	3.694	3.586	3.477	3.331
20	3.847	3.801	3.723	3.643	3.536
30	3.897	3.861	3.799	3.737	3.654
40	3.930	3.899	3.848	3.796	3.729
50	3.953	3.926	3.882	3.838	3.780
60	3.970	3.947	3.908	3.870	3.820
80	3.995	3.976	3.944	3.913	3.874
100	4.012	3.996	3.969	3.943	3.910
150	4.039	4.027	4.008	3.989	3.964
200	4.055	4.045	4.030	4.015	3.995
300	4.073	4.066	4.055	4.044	4.030
$m = 4$					
10	3.771	3.724	3.636	3.541	3.408
20	3.869	3.830	3.763	3.694	3.601
30	3.920	3.888	3.832	3.776	3.700
40	3.951	3.923	3.875	3.828	3.766
50	3.972	3.947	3.906	3.865	3.811
60	3.987	3.965	3.929	3.894	3.845
80	4.009	3.992	3.961	3.932	3.895
100	4.025	4.009	3.836	3.959	3.926
150	4.048	4.037	4.018	4.000	3.976
200	4.062	4.053	4.038	4.023	4.004
300	4.078	4.071	4.061	4.050	4.037

Окончание таблицы 2.60

Процентные точки статистики $TZ1_{mn}$ критерия Заманзаде–Аргами

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$m = 5$					
10	3.801	3.762	3.683	3.593	3.469
20	3.879	3.844	3.787	3.729	3.648
30	3.938	3.908	3.857	3.806	3.739
40	3.969	3.943	3.899	3.855	3.798
50	3.989	3.966	3.927	3.888	3.837
60	4.003	3.982	3.948	3.915	3.869
80	4.024	4.006	3.977	3.950	3.913
100	4.037	4.022	3.997	3.973	3.942
150	4.058	4.046	4.028	4.010	3.988
200	4.070	4.061	4.046	4.032	4.013
300	4.084	4.077	4.066	4.056	4.043

Таблица 2.61

Процентные точки статистики $TZ2_{mn}$ критерия Заманзаде–Аргами

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$m = 1$					
10	3.553	3.461	3.309	3.034	2.995
20	3.662	3.600	3.498	3.309	3.279
30	3.736	3.690	3.615	3.467	3.442
40	3.788	3.750	3.686	3.566	3.547
50	3.825	3.793	3.740	3.638	3.620
60	3.854	3.826	3.780	3.692	3.678
80	3.895	3.873	3.836	3.768	3.755
100	3.925	3.906	3.875	3.818	3.808
150	3.971	3.957	3.936	3.894	3.888
200	3.998	3.987	3.970	3.937	3.932
300	4.030	4.022	4.010	3.998	3.983

Продолжение таблицы 2.61

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$m = 2$					
10	3.613	3.536	3.401	3.152	3.117
20	3.665	3.606	3.513	3.334	3.305
30	3.725	3.681	3.610	3.467	3.444
40	3.772	3.736	3.675	3.559	3.540
50	3.806	3.776	3.725	3.624	3.609
60	3.835	3.808	3.764	3.678	3.664
80	3.877	3.855	3.819	3.752	3.741
100	3.907	3.888	3.858	3.803	3.794
150	3.955	3.942	3.921	3.880	3.873
200	3.984	3.973	3.957	3.925	3.919
300	4.018	4.011	3.999	3.987	3.972
$m = 3$					
10	3.701	3.638	3.526	3.302	3.265
20	3.599	3.648	3.563	3.399	3.373
30	3.739	3.699	3.632	3.498	3.477
40	3.776	3.742	3.686	3.575	3.557
50	3.806	3.777	3.728	3.633	3.617
60	3.831	3.806	3.763	3.680	3.667
80	3.870	3.849	3.815	3.750	3.740
100	3.899	3.881	3.852	3.798	3.790
150	3.946	3.933	3.913	3.874	3.868
200	3.975	3.965	3.949	3.917	3.913
300	4.011	4.003	3.992	3.980	3.966

Окончание таблицы 2.61

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$m = 4$					
10	3.767	3.721	3.632	3.433	3.399
20	3.746	3.703	3.629	3.481	3.456
30	3.764	3.727	3.666	3.541	3.522
40	3.790	3.758	3.705	3.602	3.586
50	3.814	3.786	3.739	3.651	3.636
60	3.835	3.811	3.770	3.691	3.677
80	3.869	3.849	3.816	3.753	3.744
100	3.896	3.879	3.851	3.799	3.790
150	3.941	3.929	3.909	3.871	3.865
200	3.970	3.960	3.944	3.913	3.908
300	4.005	3.998	3.987	3.976	3.962
$m = 5$					
10	3.818	3.781	3.704	3.518	3.488
20	3.788	3.753	3.691	3.559	3.536
30	3.793	3.760	3.705	3.592	3.573
40	3.808	3.779	3.730	3.633	3.619
50	3.825	3.800	3.756	3.672	3.659
60	3.843	3.820	3.781	3.706	3.694
80	3.872	3.853	3.822	3.760	3.750
100	3.896	3.880	3.853	3.802	3.794
150	3.939	3.927	3.907	3.869	3.864
200	3.966	3.956	3.941	3.910	3.906
300	4.001	3.994	3.983	3.972	3.958

Таблица 2.62

Мощность TZI_{mn} критерия Заманзаде–Аргами относительно H_1

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	1	0.099	0.058	0.023	0.010	0.003
	2	0.114	0.068	0.029	0.013	0.004
	3	0.138	0.084	0.036	0.016	0.005
	4	0.152	0.095	0.041	0.018	0.006
	5	0.157	0.097	0.043	0.019	0.006
20	1	0.098	0.055	0.019	0.006	0.002
	2	0.114	0.065	0.023	0.008	0.002
	3	0.151	0.090	0.035	0.013	0.003
	4	0.208	0.131	0.055	0.022	0.006
	5	0.268	0.178	0.082	0.034	0.010
30	1	0.123	0.072	0.028	0.010	0.003
	2	0.141	0.085	0.035	0.013	0.003
	3	0.183	0.116	0.050	0.020	0.005
	4	0.2442	0.161	0.075	0.033	0.010
	5	0.309	0.217	0.111	0.052	0.017
40	1	0.158	0.098	0.042	0.017	0.005
	2	0.179	0.115	0.051	0.021	0.006
	3	0.224	0.150	0.071	0.032	0.010
	4	0.284	0.198	0.101	0.048	0.017
	5	0.348	0.253	0.140	0.072	0.027
50	1	0.196	0.129	0.059	0.026	0.009
	2	0.220	0.148	0.072	0.033	0.011
	3	0.268	0.168	0.096	0.047	0.017
	4	0.328	0.237	0.130	0.067	0.026
	5	0.390	0.293	0.170	0.093	0.038
100	1	0.426	0.326	0.198	0.115	0.053
	2	0.455	0.355	0.222	0.133	0.064
	3	0.503	0.402	0.263	0.165	0.084
	4	0.555	0.453	0.310	0.201	0.108
	5	0.600	0.501	0.354	0.239	0.135

Окончание таблицы 2.62

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
150	1	0.643	0.543	0.389	0.266	0.151
	2	0.667	0.571	0.420	0.293	0.173
	3	0.705	0.613	0.465	0.336	0.207
	4	0.740	0.654	0.511	0.382	0.244
	5	0.767	0.688	0.551	0.423	0.280
200	1	0.799	0.720	0.581	0.444	0.295
	2	0.817	0.744	0.611	0.477	0.323
	3	0.841	0.776	0.651	0.521	0.365
	4	0.862	0.802	0.686	0.564	0.408
	5	0.877	0.822	0.715	0.598	0.445
300	1	0.950	0.919	0.847	0.756	0.622
	2	0.957	0.929	0.864	0.780	0.653
	3	0.964	0.940	0.883	0.808	0.690
	4	0.969	0.949	0.899	0.831	0.722
	5	0.972	0.953	0.909	0.848	0.745

Таблица 2.63

Мощность TZI_{mn} критерия Заманзаде–Аргами относительно H_2

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	1	0.361	0.289	0.194	0.128	0.073
	2	0.347	0.277	0.184	0.122	0.070
	3	0.309	0.246	0.166	0.110	0.063
	4	0.282	0.225	0.152	0.101	0.058
	5	0.275	0.220	0.147	0.098	0.056
20	1	0.509	0.436	0.330	0.247	0.165
	2	0.510	0.437	0.331	0.247	0.165
	3	0.479	0.409	0.309	0.230	0.153
	4	0.407	0.346	0.261	0.195	0.131
	5	0.308	0.260	0.198	0.150	0.102

Продолжение таблицы 2.63

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
30	1	0.609	0.539	0.432	0.341	0.246
	2	0.611	0.541	0.436	0.345	0.249
	3	0.592	0.525	0.421	0.333	0.240
	4	0.545	0.479	0.381	0.301	0.215
	5	0.461	0.400	0.313	0.245	0.175
40	1	0.689	0.623	0.518	0.425	0.323
	2	0.690	0.625	0.522	0.429	0.326
	3	0.677	0.613	0.512	0.420	0.319
	4	0.643	0.580	0.481	0.393	0.297
	5	0.581	0.518	0.425	0.344	0.257
50	1	0.752	0.693	0.594	0.502	0.395
	2	0.753	0.695	0.597	0.506	0.399
	3	0.744	0.686	0.589	0.500	0.394
	4	0.717	0.659	0.564	0.477	0.374
	5	0.669	0.611	0.517	0.433	0.336
100	1	0.925	0.896	0.841	0.779	0.692
	2	0.926	0.898	0.844	0.783	0.697
	3	0.923	0.895	0.842	0.782	0.697
	4	0.914	0.886	0.832	0.771	0.687
	5	0.898	0.868	0.811	0.750	0.665
150	1	0.979	0.968	0.944	0.914	0.864
	2	0.979	0.969	0.946	0.916	0.868
	3	0.978	0.968	0.946	0.917	0.869
	4	0.976	0.965	0.942	0.913	0.865
	5	0.971	0.959	0.934	0.903	0.854
200	1	0.994	0.991	0.982	0.969	0.946
	2	0.995	0.991	0.983	0.971	0.948
	3	0.994	0.991	0.983	0.971	0.949
	4	0.994	0.990	0.982	0.970	0.947
	5	0.992	0.988	0.979	0.966	0.942

Окончание таблицы 2.63

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
300	1	1.000	0.999	0.998	0.997	0.993
	2	1.000	0.999	0.998	0.997	0.994
	3	1.000	0.999	0.998	0.997	0.994
	4	1.000	0.999	0.998	0.997	0.994
	5	0.999	0.999	0.998	0.997	0.993

Таблица 2.64

Мощность TZI_{mn} критерия Заманзаде–Аргами относительно H_3

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	1	0.224	0.165	0.097	0.056	0.028
	2	0.217	0.159	0.093	0.054	0.026
	3	0.205	0.149	0.087	0.051	0.025
	4	0.195	0.142	0.083	0.049	0.024
	5	0.191	0.140	0.082	0.048	0.024
20	1	0.287	0.223	0.145	0.095	0.054
	2	0.282	0.219	0.141	0.091	0.051
	3	0.262	0.203	0.131	0.084	0.047
	4	0.230	0.176	0.114	0.074	0.042
	5	0.193	0.145	0.094	0.061	0.035
30	1	0.332	0.266	0.181	0.124	0.074
	2	0.327	0.260	0.178	0.121	0.072
	3	0.307	0.244	0.165	0.112	0.067
	4	0.273	0.216	0.145	0.098	0.058
	5	0.230	0.179	0.118	0.079	0.047
40	1	0.370	0.300	0.210	0.148	0.093
	2	0.364	0.295	0.207	0.145	0.091
	3	0.345	0.279	0.194	0.135	0.084
	4	0.311	0.250	0.172	0.119	0.074
	5	0.266	0.210	0.143	0.098	0.060

Окончание таблицы 2.64

<i>n</i>	<i>m</i>	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
50	1	0.401	0.330	0.237	0.171	0.110
	2	0.395	0.326	0.234	0.167	0.108
	3	0.378	0.309	0.220	0.158	0.101
	4	0.345	0.280	0.198	0.140	0.089
	5	0.299	0.241	0.167	0.117	0.073
100	1	0.523	0.451	0.348	0.267	0.188
	2	0.518	0.447	0.344	0.264	0.185
	3	0.503	0.432	0.331	0.254	0.177
	4	0.475	0.405	0.309	0.235	0.163
	5	0.434	0.367	0.276	0.208	0.143
150	1	0.614	0.545	0.441	0.352	0.260
	2	0.610	0.541	0.437	0.349	0.258
	3	0.598	0.528	0.426	0.340	0.250
	4	0.573	0.505	0.404	0.321	0.235
	5	0.538	0.471	0.373	0.294	0.214
200	1	0.686	0.621	0.520	0.425	0.330
	2	0.683	0.618	0.517	0.425	0.326
	3	0.672	0.608	0.507	0.417	0.318
	4	0.652	0.589	0.487	0.400	0.304
	5	0.622	0.558	0.458	0.374	0.281
300	1	0.794	0.741	0.651	0.564	0.462
	2	0.792	0.739	0.649	0.563	0.461
	3	0.786	0.732	0.642	0.556	0.455
	4	0.771	0.717	0.627	0.541	0.441
	5	0.748	0.693	0.602	0.519	0.419

Таблица 2.65

Мощность $TZ2_{mn}$ критерия Заманзаде–Аргами относительно H_1

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	1	0.086	0.052	0.022	0.009	0.003
	2	0.099	0.060	0.026	0.012	0.004
	3	0.121	0.073	0.031	0.013	0.004
	4	0.142	0.087	0.038	0.016	0.005
	5	0.162	0.099	0.044	0.019	0.006
20	1	0.056	0.030	0.010	0.003	0.001
	2	0.060	0.033	0.012	0.004	0.001
	3	0.076	0.042	0.017	0.006	0.002
	4	0.111	0.063	0.025	0.010	0.003
	5	0.177	0.103	0.041	0.016	0.005
30	1	0.061	0.032	0.011	0.004	0.001
	2	0.057	0.031	0.011	0.004	0.001
	3	0.069	0.038	0.013	0.005	0.001
	4	0.094	0.052	0.020	0.008	0.002
	5	0.139	0.081	0.032	0.012	0.004
40	1	0.079	0.044	0.016	0.005	0.001
	2	0.073	0.041	0.014	0.005	0.001
	3	0.080	0.045	0.016	0.005	0.001
	4	0.099	0.056	0.021	0.008	0.002
	5	0.133	0.078	0.030	0.012	0.003
50	1	0.102	0.060	0.023	0.008	0.002
	2	0.092	0.055	0.021	0.007	0.002
	3	0.099	0.059	0.022	0.008	0.002
	4	0.114	0.068	0.027	0.010	0.002
	5	0.142	0.086	0.035	0.013	0.004
100	1	0.275	0.195	0.105	0.054	0.022
	2	0.254	0.176	0.094	0.049	0.021
	3	0.252	0.175	0.094	0.049	0.021
	4	0.260	0.183	0.099	0.052	0.022
	5	0.276	0.196	0.106	0.057	0.024

Окончание таблицы 2.65

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
150	1	0.490	0.390	0.255	0.158	0.082
	2	0.459	0.363	0.234	0.145	0.073
	3	0.455	0.358	0.231	0.143	0.073
	4	0.458	0.361	0.233	0.144	0.075
	5	0.467	0.372	0.239	0.151	0.077
200	1	0.678	0.582	0.435	0.309	0.184
	2	0.651	0.554	0.410	0.287	0.167
	3	0.641	0.547	0.403	0.281	0.166
	4	0.640	0.546	0.402	0.282	0.167
	5	0.645	0.549	0.405	0.284	0.169
300	1	0.903	0.855	0.753	0.637	0.489
	2	0.890	0.839	0.732	0.619	0.464
	3	0.885	0.831	0.725	0.610	0.464
	4	0.883	0.829	0.722	0.609	0.462
	5	0.880	0.826	0.718	0.604	0.459

Таблица 2.66

Мощность $TZ2_{mn}$ критерия Заманзаде–Аргами относительно H_2

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	1	0.374	0.296	0.196	0.129	0.074
	2	0.361	0.286	0.188	0.124	0.070
	3	0.327	0.260	0.172	0.114	0.065
	4	0.294	0.234	0.156	0.103	0.060
	5	0.273	0.217	0.147	0.098	0.056
20	1	0.544	0.465	0.354	0.268	0.181
	2	0.552	0.470	0.358	0.268	0.180
	3	0.537	0.457	0.343	0.255	0.170
	4	0.494	0.418	0.310	0.230	0.152
	5	0.403	0.342	0.256	0.187	0.125

Продолжение таблицы 2.66

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
30	1	0.648	0.577	0.468	0.372	0.269
	2	0.662	0.590	0.481	0.382	0.275
	3	0.664	0.593	0.480	0.380	0.272
	4	0.649	0.576	0.463	0.364	0.257
	5	0.609	0.535	0.423	0.328	0.228
40	1	0.725	0.660	0.552	0.460	0.349
	2	0.741	0.677	0.570	0.475	0.360
	3	0.748	0.684	0.578	0.481	0.336
	4	0.744	0.679	0.573	0.475	0.361
	5	0.724	0.659	0.553	0.455	0.342
50	1	0.783	0.726	0.628	0.533	0.422
	2	0.798	0.743	0.647	0.553	0.439
	3	0.807	0.752	0.657	0.563	0.447
	4	0.807	0.753	0.656	0.561	0.449
	5	0.797	0.743	0.646	0.551	0.440
100	1	0.936	0.910	0.858	0.800	0.715
	2	0.942	0.918	0.870	0.816	0.736
	3	0.947	0.925	0.879.	0.827	0.750
	4	0.949	0.928	0.884	0.833	0.757
	5	0.949	0.929	0.885	0.835	0.761
150	1	0.982	0.972	0.951	0.923	0.877
	2	0.984	0.975	0.956	0.931	0.886
	3	0.986	0.978	0.961	0.937	0.898
	4	0.987	0.980	0.963	0.941	0.904
	5	0.987	0.980	0.964	0.943	0.906
200	1	0.995	0.992	0.985	0.973	0.951
	2	0.996	0.993	0.987	0.976	0.956
	3	0.996	0.994	0.989	0.979	0.961
	4	0.997	0.995	0.989	0.981	0.964
	5	0.997	0.995	0.990	0.982	0.966

Окончание таблицы 2.66

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
300	1	1.000.	0.999	0.998	0.997	0.994
	2	1.000	0.999	0.999	0.997	0.995
	3	1.000	1.000	0.999	0.998	0.995
	4	1.000	1.000	0.999	0.998	0.996
	5	1.000	1.000	0.999	0.998	0.996

Таблица 2.67

Мощность $TZ2_{mn}$ критерия Заманзаде–Аргами относительно H_3

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	1	0.228	0.167	0.097	0.056	0.028
	2	0.225	0.163	0.094	0.055	0.027
	3	0.213	0.154	0.090	0.054	0.026
	4	0.200	0.145	0.085	0.051	0.025
	5	0.190	0.139	0.082	0.049	0.023
20	1	0.305	0.236	0.153	0.100	0.056
	2	0.300	0.232	0.151	0.097	0.053
	3	0.289	0.224	0.144	0.093	0.050
	4	0.271	0.209	0.134	0.085	0.046
	5	0.237	0.183	0.118	0.074	0.042
30	1	0.354	0.286	0.196	0.133	0.078
	2	0.357	0.284	0.195	0.131	0.077
	3	0.348	0.277	0.189	0.125	0.073
	4	0.331	0.261	0.177	0.118	0.068
	5	0.302	0.239	0.160	0.105	0.060
40	1	0.399	0.324	0.227	0.160	0.100
	2	0.402	0.328	0.228	0.160	0.098
	3	0.397	0.322	0.225	0.155	0.096
	4	0.382	0.308	0.213	0.147	0.090
	5	0.357	0.287	0.197	0.135	0.082

Окончание таблицы 2.67

n	m	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
50	1	0.433	0.360	0.258	0.184	0.118
	2	0.438	0.366	0.262	0.188	0.118
	3	0.437	0.361	0.258	0.184	0.116
	4	0.423	0.350	0.247	0.175	0.111
	5	0.400	0.329	0.232	0.163	0.103
100	1	0.557	0.484	0.377	0.292	0.207
	2	0.570	0.495	0.387	0.302	0.217
	3	0.574	0.499	0.391	0.305	0.219
	4	0.569	0.498	0.388	0.301	0.215
	5	0.559	0.486	0.377	0.291	0.207
150	1	0.647	0.577	0.474	0.381	0.285
	2	0.659	0.591	0.485	0.393	0.292
	3	0.667	0.599	0.494	0.401	0.301
	4	0.668	0.599	0.493	0.401	0.302
	5	0.661	0.593	0.486	0.397	0.296
200	1	0.715	0.650	0.549	0.458	0.354
	2	0.729	0.662	0.563	0.470	0.364
	3	0.736	0.673	0.572	0.478	0.374
	4	0.739	0.676	0.575	0.483	0.377
	5	0.736	0.672	0.572	0.479	0.375
300	1	0.816	0.766	0.678	0.591	0.486
	2	0.826	0.777	0.690	0.607	0.496
	3	0.835	0.785	0.701	0.617	0.512
	4	0.838	0.790	0.707	0.624	0.520
	5	0.838	0.790	0.706	0.623	0.519

Относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 при оптимальном выборе m всегда наблюдается значительное преимущество в мощности за критерием со статистикой $TZ2_{mn}$.

Если сравнивать критерии Заманзаде–Аргами с другими энтропийными критериями, то можно отметить следующее. Относительно конкурирующей гипотезы H_1 критерий со статистикой

$TZ1_{mn}$ уступает в мощности критерию Васичека при $n \leq 100$. Но при $n \geq 150$ этот критерий Заманзаде–Аргами имеет преимущество в мощности перед критериями Васичека, Корреа, Ван Эса и Эбрахими.

По отношению к конкурирующим гипотезам H_2 и H_3 наблюдается существенное преимущество в мощности за критериями Заманзаде–Аргами, особенно со статистикой $TZ2_{mn}$.

2.22. Критерий Гаствирта (Gel–Miao–Gastwirth Test)

Статистика критерия базируется на отношении [40]

$$R = \frac{s_n}{J_n},$$

где $s_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ – оценка классического стандартного отклонения, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $J_n = \frac{\sqrt{\pi/2}}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - M|$ – среднее абсолютное отклонение от оценки медианы M .

Статистика $\sqrt{n}(R-1)$ в асимптотике подчиняется нормальному распределению $N(0, \sigma_R^2)$, где $\sigma_R^2 = \frac{\pi-3}{2}$. Следовательно, статистика

$$S_R = \frac{\sqrt{n}(R-1)}{\sigma_R} \quad (2.26)$$

подчиняется стандартному нормальному закону.

В отличие от указанного авторами в [40], критерий является двусторонним: проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется при значениях статистики $z_{\alpha/2} \leq S_R \leq z_{1-\alpha/2}$, где $z_{\alpha/2}$ и $z_{1-\alpha/2}$ – нижний и верхний квантили стандартного нормального закона.

Сходимость распределения статистики S_R к стандартному нормальному закону $N(0,1)$ иллюстрирует рисунок 2.39, где приведены распределения $G(S_R | H_0)$ при $n=10$ и $n=100$. Как можно видеть, заметное отклонение (несколько асимметричного) распределения статистики $G(S_R | H_0)$ от стандартного нормального закона наблю-

дается на хвостах. Поэтому использование в качестве критических значений квантилей стандартного нормального закона может приводить к некоторому увеличению вероятностей ошибок 1-го или 2-го рода.

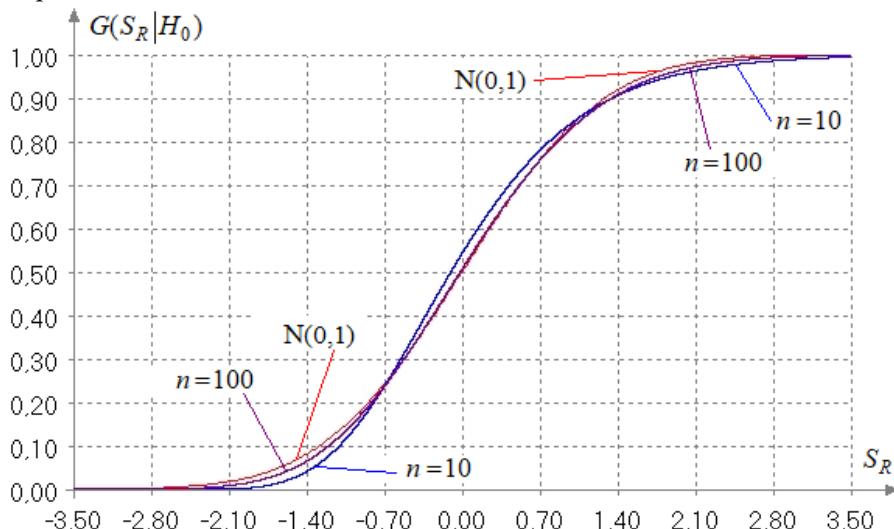


Рис. 2.39. Сходимость распределения $G(S_R | H_0)$ в зависимости от n к стандартному нормальному закону

Полученные на основании статистического моделирования процентные точки для статистики S_R как двустороннего критерия приведены в табл. 2.68. Даже при $n=300$ процентные точки $G(S_R | H_0)$ существенно отличаются от соответствующих критических значений, вычисляемых по стандартномуциальному закону. При использовании критерия в рамках программного обеспечения целесообразно при вычислении достигнутого уровня значимости P_{value} опираться на интерактивное моделирование $G(S_R | H_0)$, как это реализуется в [146].

Оценки мощности критерия Гаствирта по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 2.69, а оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 2.70 и 2.71 соответственно.

Таблица 2.68

Процентные точки для статистики S_R критерия Гаствирта

n	α									
	0.15		0.10		0.05		0.025		0.01	
	$\alpha/2$	$1 - \alpha/2$								
10	-1.210	1.569	-1.343	1.874	-1.532	2.387	-1.683	2.898	-1.840	3.553
20	-1.233	1.588	1.374	1.875	-1.579	2.343	-1.753	2.796	-1.942	3.369
30	-1.262	1.578	-1.411	1.851	1.630	2.294	-1.817	2.714	-2.024	3.257
40	-1.281	1.563	-1.435	1.826	-1.663	2.250	-1.859	2.654	-2.079	3.168
50	-1.296	1.555	-1.456	1.812	-1.693	2.223	-1.894	2.619	-2.124	3.111
60	-1.310	1.549	-1.474	1.801	-1.716	2.208	-1.926	2.585	-2.160	3.056
80	-1.323	1.536	-1.490	1.783	-1.743	2.172	-1.960	2.534	-2.205	2.984
100	-1.336	1.526	-1.507	1.768	-1.765	2.153	-1.986	2.510	2.240	2.947
150	-1.354	1.517	-1.533	1.750	-1.802	2.120	-2.036	2.461	-2.298	2.876
200	-1.369	1.501	-1.549	1.733	-1.820	2.095	-2.058	2.428	-2.333	2.834
300	-1.379	1.491	-1.565	1.717	-1.844	2.072	-2.088	2.390	-2.373	2.788
∞	-1.440	1.440	-1.645	1.645	-1.960	1.960	-2.241	2.241	-2.576	2.576

Таблица 2.69

Мощность критерия Гаствирта относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.168	0.116	0.062	0.033	0.014
20	0.239	0.174	0.100	0.057	0.027
30	0.319	0.244	0.152	0.092	0.047
40	0.398	0.316	0.208	0.133	0.072
50	0.470	0.384	0.264	0.177	0.100
100	0.742	0.667	0.536	0.417	0.287
150	0.885	0.835	0.737	0.629	0.491
200	0.951	0.924	0.863	0.785	0.666
300	0.992	0.986	0.983	0.940	0.883

Таблица 2.70

Мощность критерия Гаствирта относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.281	0.218	0.140	0.090	0.050
20	0.457	0.386	0.287	0.212	0.141
30	0.596	0.526	0.421	0.333	0.240
40	0.705	0.642	0.540	0.447	0.341
50	0.785	0.731	0.639	0.547	0.437
100	0.960	0.943	0.906	0.860	0.790
150	0.993	0.989	0.979	0.964	0.937
200	0.999	0.998	0.996	0.992	0.983
300	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999

Таблица 2.71

Мощность критерия Гаствирта относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.185	0.130	0.071	0.040	0.018
20	0.229	0.170	0.104	0.064	0.035
30	0.269	0.207	0.133	0.087	0.050
40	0.306	0.242	0.162	0.109	0.065
50	0.340	0.273	0.189	0.131	0.080
100	0.488	0.417	0.315	0.236	0.161
150	0.602	0.533	0.427	0.338	0.244
200	0.696	0.632	0.528	0.433	0.329
300	0.822	0.773	0.685	0.598	0.486

В совокупности, как можно судить по оценкам мощности, показанной относительно H_1 , H_2 и H_3 , критерий Гаствирта показывает очень неплохие результаты и среди множества других критериев по эффективности занимает позиции выше среднего.

Рейтинг критерия – 14.

2.23. Критерии Локка–Сперриера (Locke–Spurrier Tests)

Критерии проверки нормальности Локка–Сперриера были предложены в работах [65, 66], и они ориентированы для применения против асимметричных альтернатив. Статистики критериев задаются выражениями:

$$T_{1n} = \frac{U_{1n}}{s}, \quad T_{2n} = \frac{U_{2n}}{s},$$

где $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ – несмешённая оценка дисперсии, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$,

$$\begin{aligned} U_{1n} &= \frac{1}{C_n^3} \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} (x_{(k)} - 2x_{(j)} + x_{(i)}) = \frac{1}{C_n^3} \sum_{i=1}^n \omega_i x_{(i)}; \\ U_{2n} &= \frac{1}{C_n^3} \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \left\{ (x_{(k)} - x_{(j)})^2 - (x_{(j)} - x_{(i)})^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{C_n^3} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n V_{ij} (x_{(j)} - x_{(i)})^2. \end{aligned}$$

Здесь

$$\omega_i = C_{i-1}^2 - 2(n-1)(i-1) + C_{n-1}^2; \quad V_{ij} = i + j - n - 1;$$

$x_{(i)}$ – i -я порядковая статистика.

Математические ожидания и дисперсии статистик равны:

$$E[T_{1n}] = 0; \quad E[T_{2n}] = 0;$$

$$D[T_{1n}] = \frac{1}{C_n^3} \{1.03804 + 0.69714(n-3) + 0.0890805(n-3)(n-4)\};$$

$$D[T_{2n}] = \frac{1}{C_n^3} \{7.03804 + 5.32251(n-3) + 0.74412(n-3)(n-4)\}.$$

При $n \geq 10$ распределение $G(\tilde{T}_{1n} | H_0)$ нормализованной статистики

$$\tilde{T}_{1n} = \frac{T_{1n} - E[T_{1n}]}{\sqrt{D[T_{1n}]}} \tag{2.27}$$

достаточно хорошо описывается стандартным нормальным законом.

Распределение $G(\tilde{T}_{2n} | H_0)$ нормализованной статистики

$$\tilde{T}_{2n} = \frac{\tilde{T}_{2n} - E[\tilde{T}_{2n}]}{\sqrt{D[\tilde{T}_{2n}]}} \quad (2.28)$$

описывается стандартным нормальным законом хуже: нормальной аппроксимацией можно уверенно пользоваться при $n \geq 40$.

Критерии двусторонние: гипотеза H_0 не отклоняется при значениях статистик $\tilde{T}_{1n,\alpha/2} \leq \tilde{T}_{1n} \leq \tilde{T}_{1n,1-\alpha/2}$ и $\tilde{T}_{2n,\alpha/2} \leq \tilde{T}_{2n} \leq \tilde{T}_{2n,1-\alpha/2}$. Процентные точки статистик (2.27) и (2.28) приведены в таблицах 2.72 и 2.73. При $n \geq 10$ и $n \geq 40$, соответственно, могут использоваться нижний $z_{\alpha/2}$ и верхний $z_{1-\alpha/2}$ квантили стандартного нормального закона.

Оценки мощности критерия Локка–Сперриера со статистикой \tilde{T}_{1n} по отношению к конкурирующим гипотезам H_1, H_2 и H_3 приведены в таблицах 2.74, 2.75, 2.76, соответственно. Оценки мощности критерия со статистикой \tilde{T}_{2n} – в таблицах 2.77, 2.78, 2.79.

Таблица 2.72

Процентные точки для статистики \tilde{T}_{1n} критерия Локка–Сперриера

n	α									
	0.15		0.10		0.05		0.025		0.01	
	$\alpha/2$	$1 - \alpha/2$								
10	-1.461	1.461	-1.648	1.648	-1.919	1.918	-2.144	2.141	-2.390	2.383
20	-1.453	1.453	-1.649	1.649	-1.941	1.940	-2.193	2.193	-2.478	2.481
30	-1.451	1.450	-1.650	1.650	-1.950	1.948	-2.212	2.208	-2.510	2.512
40	-1.450	1.446	-1.652	1.645	-1.956	1.949	-2.224	2.212	-2.526	2.523
50	-1.450	1.444	-1.651	1.647	-1.954	1.950	-2.226	2.216	-2.542	2.531
60	-1.446	1.442	-1.647	1.646	-1.957	1.956	-2.223	2.226	-2.544	2.544
80	-1.443	1.440	-1.645	1.642	-1.957	1.954	-2.231	2.230	-2.555	2.553
100	-1.441	1.440	-1.645	1.643	-1.958	1.956	-2.237	2.233	-2.556	2.555
150	-1.441	1.440	-1.645	1.646	-1.960	1.957	-2.237	2.235	-2.570	2.560
200	-1.441	1.440	-1.649	1.644	-1.959	1.954	-2.243	2.232	-2.574	2.560
∞	-1.440	1.440	-1.645	1.645	-1.960	1.960	-2.241	2.241	-2.576	2.576

Таблица 2.73

Процентные точки для статистики \tilde{T}_{2n} критерия Локка–Сперриера

n	α									
	0.15		0.10		0.05		0.025		0.01	
	$\alpha/2$	$1 - \alpha/2$								
10	-1.360	1.360	-1.563	1.564	-1.881	1.884	-2.176	2.174	-2.534	2.531
20	-1.360	1.360	-1.563	1.564	-1.881	1.884	-2.176	2.174	-2.534	2.531
30	-1.388	1.388	-1.590	1.593	-1.906	1.911	-2.194	2.196	-2.553	2.556
40	-1.401	1.396	-1.605	1.601	-1.924	1.922	-2.212	2.209	-2.556	2.548
50	-1.410	1.405	-1.616	1.611	-1.932	1.925	-2.212	2.210	-2.563	2.552
60	-1.413	1.409	-1.617	1.615	-1.934	1.935	-2.222	2.219	-2.568	2.562
80	-1.417	1.414	-1.622	1.621	-1.939	1.937	-2.227	2.227	-2.566	2.569
100	-1.420	1.419	-1.627	1.625	-1.943	1.941	-2.233	2.227	-2.570	2.560
150	-1.428	1.426	-1.633	1.632	-1.950	1.947	-2.234	2.231	-2.574	2.565
200	-1.432	1.429	-1.638	1.632	-1.953	1.948	-2.239	2.229	-2.577	2.564
∞	-1.440	1.440	-1.645	1.645	-1.960	1.960	-2.241	2.241	-2.576	2.576

Таблица 2.74

Мощность \tilde{T}_{1n} критерия Локка–Сперриера относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.124	0.079	0.037	0.017	0.006
20	0.120	0.076	0.035	0.016	0.006
30	0.119	0.074	0.034	0.015	0.006
40	0.118	0.075	0.034	0.015	0.005
50	0.118	0.074	0.034	0.015	0.005
100	0.119	0.075	0.034	0.015	0.005
150	0.119	0.074	0.034	0.015	0.005
200	0.121	0.075	0.034	0.015	0.005
300	0.121	0.077	0.032	0.015	0.005

Таблица 2.75

Мощность \tilde{T}_{1n} критерия Локка–Сперриера относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.275	0.211	0.133	0.083	0.044
20	0.304	0.239	0.159	0.105	0.060
30	0.313	0.248	0.167	0.113	0.067
40	0.317	0.252	0.171	0.116	0.070
50	0.320	0.255	0.175	0.120	0.072
100	0.325	0.260	0.178	0.123	0.076
150	0.326	0.261	0.180	0.125	0.078
200	0.331	0.266	0.187	0.129	0.079
300	0.331	0.265	0.177	0.127	0.078

Таблица 2.76

Мощность \tilde{T}_{1n} критерия Локка–Сперриера относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.198	0.140	0.078	0.043	0.020
20	0.216	0.157	0.091	0.052	0.025
30	0.223	0.163	0.096	0.056	0.027
40	0.226	0.166	0.098	0.058	0.029
50	0.228	0.168	0.101	0.060	0.030
100	0.233	0.172	0.103	0.062	0.032
150	0.234	0.174	0.105	0.063	0.033
200	0.241	0.179	0.108	0.064	0.033
300	0.236	0.175	0.102	0.065	0.032

Таблица 2.77

Мощность \tilde{T}_{2n} критерия Локка–Сперриера относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.005	0.001	0	0	0
20	0.003	0.001	0	0	0
30	0.002	0	0	0	0
40	0.002	0	0	0	0
50	0.002	0	0	0	0
100	0.002	0	0	0	0
150	0.002	0	0	0	0
200	0.002	0	0	0	0
300	0.001	0	0	0	0

Таблица 2.78

Мощность \tilde{T}_{2n} критерия Локка–Сперриера относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.424	0.364	0.284	0.225	0.168
20	0.497	0.439	0.358	0.295	0.231
30	0.529	0.473	0.393	0.331	0.264
40	0.547	0.492	0.413	0.350	0.285
50	0.559	0.504	0.427	0.365	0.299
100	0.586	0.533	0.458	0.395	0.331
150	0.596	0.545	0.470	0.409	0.343
200	0.603	0.551	0.479	0.419	0.355
300	0.610	0.560	0.487	0.429	0.359

Таблица 2.79

Мощность \tilde{T}_{2n} критерия Локка–Сперриера относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.208	0.155	0.097	0.062	0.036
20	0.244	0.188	0.122	0.082	0.050
30	0.263	0.205	0.136	0.093	0.057
40	0.274	0.215	0.144	0.098	0.062
50	0.283	0.222	0.151	0.104	0.065
100	0.303	0.241	0.165	0.114	0.072
150	0.311	0.248	0.171	0.119	0.076
200	0.321	0.258	0.177	0.124	0.078
300	0.320	0.259	0.178	0.125	0.078

Все рассматриваемые в данном руководстве критерии сравниваются по мощности, проявленной относительно курирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 , которым соответствуют симметричные законы. Поэтому неудивительно, что критерии Локка–Сперриера, заточенные на асимметричные альтернативы, демонстрируют мощности не выше средних значений относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 и практически не способны отличать от нормального обобщённый нормальный закон с параметром формы, равным 4, соответствующий гипотезе H_1 .

Относительно асимметричных альтернатив реакция критериев со статистиками \tilde{T}_{1n} и \tilde{T}_{2n} другая. Сравним поведение распределений статистик \tilde{T}_{1n} и \tilde{T}_{2n} при справедливости конкурирующих гипотез на примере симметричными и асимметричными законами распределения. Для этого в дополнение к H_1, H_2 и H_3 рассмотрим конкурирующие гипотезы H_4 , соответствующую распределению минимального значения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1} \exp \left\{ \frac{x - \theta_0}{\theta_1} - \exp \left(\frac{x - \theta_0}{\theta_1} \right) \right\},$$

где $x \in (-\infty, \infty)$, с параметрами $\theta_0 = 0.38$, $\theta_1 = 0.8$, и H_5 , соответствующую распределению максимального значения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1} \exp \left\{ -\frac{x-\theta_0}{\theta_1} - \exp \left(-\frac{x-\theta_0}{\theta_1} \right) \right\}$$

и параметрами $\theta_0 = -0.38$, $\theta_1 = 0.8$. Функции плотности законов, соответствующих H_0 , H_4 и H_5 представлены на рис. 2.40.

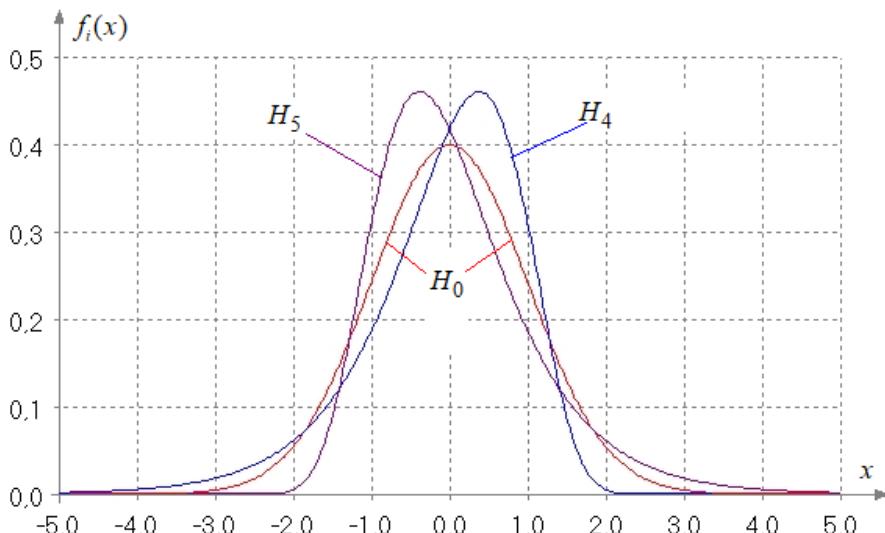


Рис. 2.40. Плотности распределений, соответствующие гипотезам H_0 , H_4 , H_5

На рис. 2.41 показаны распределения $G(\tilde{T}_{1n}|H_i)$ статистики \tilde{T}_{1n} при справедливости различных конкурирующих гипотез и $n=100$. При конкурирующих гипотезах, соответствующих симметричным законам, распределения $G(\tilde{T}_{1n}|H_i)$ симметричны и пересекаются в одной точке. Относительно H_1 критерий оказывается смещённым при любых n (см. табл. 2.74). Распределения статистик $G(\tilde{T}_{1n}|H_4)$ и

$G(\tilde{T}_{1n} | H_5)$ сдвигаются относительно $G(\tilde{T}_{1n} | H_0)$. При этом критерий демонстрирует высокую мощность относительно H_4 и H_5 .

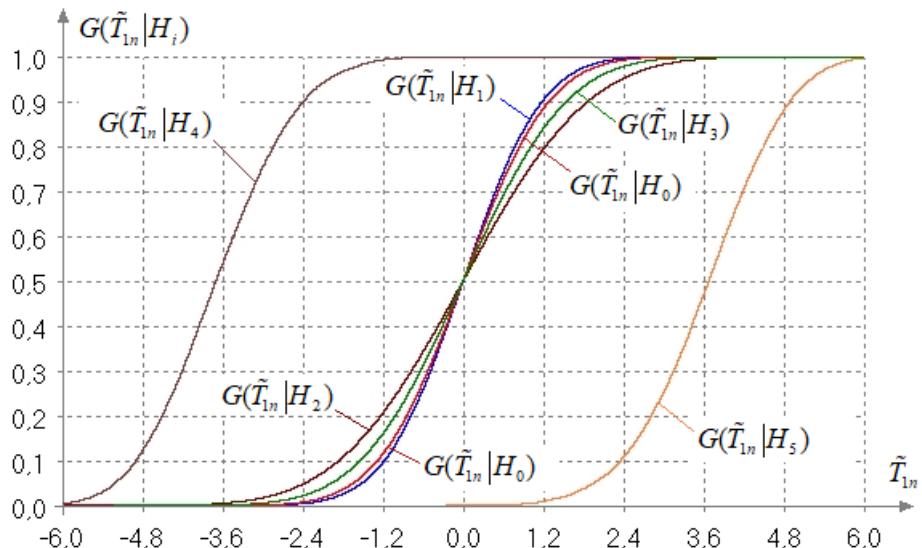


Рис. 2.41. Распределения статистики \tilde{T}_{1n} при справедливости различных конкурирующих гипотез H_i при $n=100$

Аналогичная картина с распределениями $G(\tilde{T}_{2n} | H_i)$ статистики \tilde{T}_{2n} при $n=100$ показана на рис. 2.42. Критерий со статистикой \tilde{T}_{1n} (по сравнению с \tilde{T}_{2n}) демонстрирует более высокую мощность относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 , но и более сильную смещённость относительно H_1 . Мощность критерия относительно асимметричных альтернатив H_4 и H_5 того же порядка, что и для критерия со статистикой \tilde{T}_{1n} .

Результаты исследований в целом показывают, что относительно симметричных альтернатив, представителями которых являются конкурирующие гипотезы H_1 , H_2 и H_3 , критерии Локка–Сперриера малоэффективны. Но эти же критерии обладают высокой мощностью

относительно конкурирующих гипотез, соответствующих асимметричным законам.

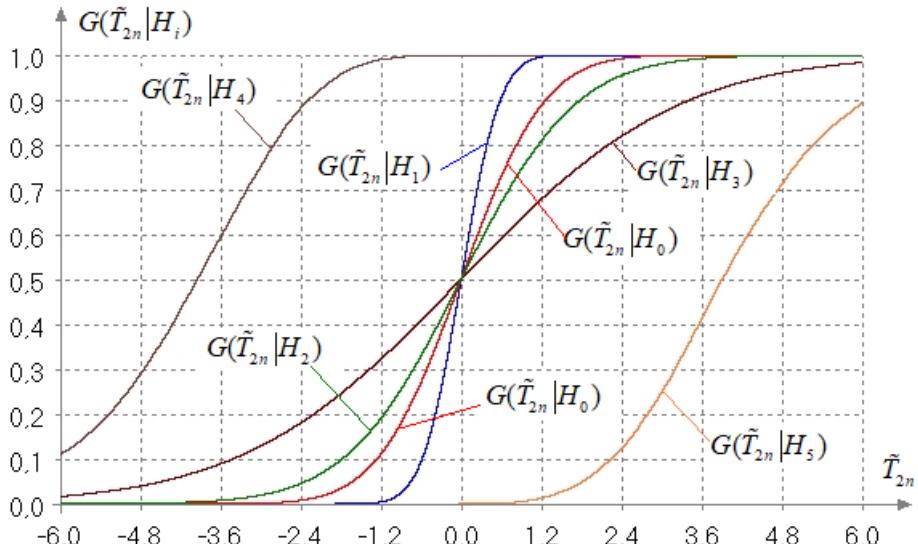


Рис. 2.42. Распределения статистики \tilde{T}_{2n} при справедливости различных конкурирующих гипотез H_i при $n = 100$

Рейтинг критерия со статистикой $\tilde{T}_{1n} = 45$, с $\tilde{T}_{2n} = 39$.

2.24. Критерий Мартинеса–Иглевича (Martinez–Iglewitz Test)

Критерий предложен в работе [67] для применения против симметричных альтернатив, к которым как раз относятся рассматриваемые в данном руководстве конкурирующие гипотезы H_1 , H_2 и H_3 .

В качестве статистики критерия рассматривается отношение двух оценок дисперсии

$$I = \frac{s_m^2}{\tilde{s}^2}, \quad (2.29)$$

где s_m^2 находится по выражению для оценки несмешённой дисперсии с заменой арифметического среднего оценкой медианы \tilde{x} , вычисленной по выборке

$$s_m^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x})^2.$$

В качестве второй оценки \tilde{s}^2 рассматривается робастная, устойчивая к выбросам оценка, определяемая соотношением [67]

$$\tilde{s}^2 = \frac{n \sum_{|z_i| < 1} (x_i - \tilde{x})^2 (1 - z_i^2)^4}{\left\{ \sum_{|z_i| < 1} (x_i - \tilde{x})^2 (1 - 5z_i^2) \right\}^2},$$

где

$$z_i = \begin{cases} \frac{x_i - \tilde{x}}{9 \text{med}(|x_i - \tilde{x}|)}, & \text{при } |z_i| < 1; \\ 0, & \text{при } |z_i| \geq 1; \end{cases}$$

\tilde{x} – выборочная медиана, $\text{med}(\)$ – медиана ряда в скобках.

Заметим, что авторы критерия рассматривали его как правосторонний. В [67] представлены верхние процентные точки для статистики уровня 90% и 95% для ряда значений n , а также регрессионные зависимости, аппроксимирующие эти критические значения в зависимости от n . Эти критические значения (с некоторыми уточнениями) представлены в таблице 2.80.

На самом деле критерий **двусторонний**, так как при некоторых симметричных законах, например, при законе, соответствующим конкурирующей гипотезе H_1 , распределение статистики $G(I|H_1)$ отклоняется от $G(I|H_0)$ влево, а не вправо (см. рис. 2.43).

Как для двустороннего критерия процентные точки распределения $G(I|H_0)$ приведены в табл. 2.81.

Таблица 2.80

**Правосторонние процентные точки для статистики I критерия
Мартинеса–Иглевича**

n	α				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
10	1.277	1.444	1.949	2.930	5.112
20	1.144	1.209	1.351	1.535	1.865
30	1.101	1.145	1.231	1.332	1.489
40	1.080	1.113	1.176	1.246	1.351
50	1.066	1.094	1.144	1.199	1.277
60	1.056	1.080	1.123	1.169	1.232
80	1.044	1.063	1.096	1.130	1.176
100	1.036	1.052	1.079	1.107	1.144
150	1.024	1.036	1.056	1.075	1.102
200	1.017	1.027	1.043	1.059	1.079
300	1.010	1.017	1.029	1.041	1.055

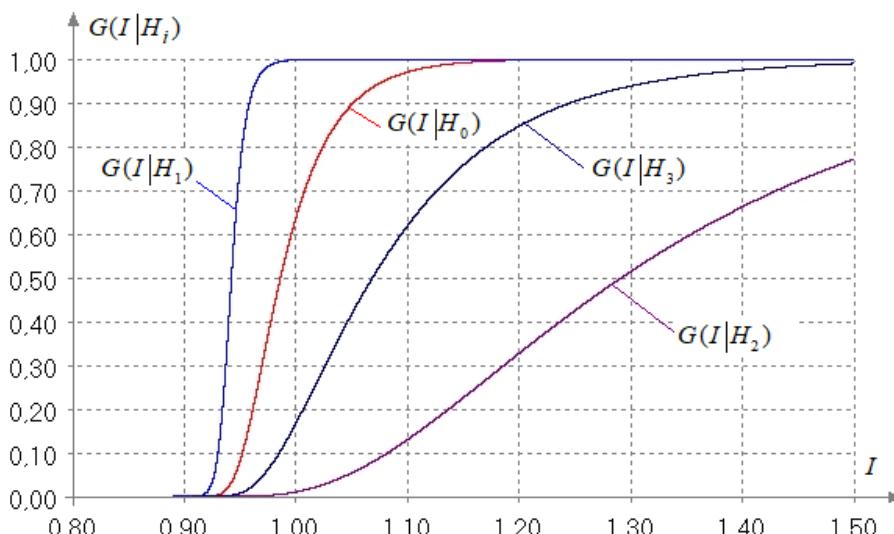


Рис. 2.43. Распределения статистики I при справедливости различных конкурирующих гипотез H_i при $n = 100$

Таблица 2.81

Процентные точки для статистики I критерия Мартинеса–Иглевича

n	0.15		0.1		0.05		0.025		0.01	
	$\alpha/2$	$1 - \alpha/2$								
10	1.002	1.613	0.994	1.949	0.979	2.930	0.962	4.383	0.937	7.786
20	0.962	1.263	0.956	1.351	0.945	1.535	0.937	1.776	0.922	2.188
30	0.953	1.179	0.948	1.231	0.940	1.332	0.933	1.448	0.923	1.630
40	0.949	1.138	0.945	1.176	0.938	1.246	0.932	1.325	0.924	1.440
50	0.948	1.114	0.944	1.144	0.938	1.199	0.933	1.258	0.926	1.341
60	0.948	1.098	0.944	1.123	0.938	1.167	0.933	1.216	0.927	1.284
80	0.948	1.076	0.944	1.096	0.939	1.130	0.934	1.165	0.929	1.213
100	0.949	1.063	0.945	1.079	0.940	1.107	0.936	1.135	0.931	1.173
150	0.952	1.044	0.948	1.056	0.944	1.075	0.940	1.096	0.935	1.121
200	0.954	1.034	0.951	1.043	0.946	1.059	0.943	1.074	0.939	1.094
300	0.957	1.022	0.955	1.029	0.950	1.041	0.947	1.052	0.943	1.066

Оценки мощности критерия Мартинеса–Иглевича со статистикой I по отношению к конкурирующим гипотезам H_1, H_2 и H_3 приведены в таблицах 2.82, 2.83, 2.84, соответственно.

Таблица 2.82

Мощность I критерия Мартинеса–Иглевича относительно H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.129	0.084	0.041	0.020	0.008
20	0.146	0.092	0.042	0.019	0.007
30	0.201	0.130	0.060	0.027	0.010
40	0.277	0.185	0.088	0.041	0.014
50	0.362	0.252	0.129	0.062	0.022
100	0.737	0.626	0.430	0.265	0.125
150	0.914	0.857	0.722	0.557	0.346
200	0.976	0.954	0.888	0.781	0.597
300	0.998	0.996	0.988	0.966	0.906

Таблица 2.83

Мощность I критерия Мартинеса–Иглевича относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.296	0.227	0.140	0.084	0.038
20	0.453	0.381	0.282	0.205	0.133
30	0.570	0.501	0.400	0.316	0.226
40	0.664	0.601	0.504	0.415	0.317
50	0.738	0.683	0.590	0.506	0.405
100	0.929	0.905	0.857	0.804	0.727
150	0.982	0.973	0.954	0.929	0.889
200	0.995	0.993	0.986	0.977	0.959
300	1.000	1.000	0.999	0.998	0.995

Таблица 2.84

Мощность I критерия Мартинеса–Иглевича относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.193	0.135	0.072	0.038	0.015
20	0.246	0.184	0.112	0.067	0.034
30	0.290	0.225	0.147	0.096	0.054
40	0.332	0.265	0.181	0.122	0.073
50	0.368	0.301	0.213	0.150	0.094
100	0.531	0.461	0.359	0.279	0.196
150	0.653	0.588	0.486	0.395	0.298
200	0.744	0.687	0.591	0.502	0.398
300	0.864	0.825	0.751	0.674	0.573

Можно обратить внимание на то, что при малых n критерий оказывается смещённым относительно гипотезы H_1 .

Отталкиваясь от оценок мощности, показанной критерием относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 , можно полагать,

что критерий Мартинеса–Иглевича среди множества других специальных критериев занимает средние позиции.

Рейтинг критерия – 25.

2.25. Критерий Филлибена (Filliben Test)

В работе [33] предложен критерий, в качестве статистики которого рассматривается коэффициент корреляции r между порядковыми статистиками $x_{(i)}$, построенными по выборке, и медианами порядковых статистик стандартного нормального закона (M_i). Соответствующая статистика имеет вид [33]:

$$r = \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \bar{x})(M_i - \bar{M}) / \sqrt{\left[\sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \bar{x})^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n (M_i - \bar{M})^2 \right]},$$

где $M_i = \Phi^{-1}(m_i)$ (Φ – функция Лапласа); m_i – медиана i -й порядковой статистики из равномерного распределения на интервале $[0, 1]$. Так как $\bar{M} = 0$ и $M_i = M_{n-i+1}$, то

$$r = \sum_{i=1}^n M_i x_{(i)} / \sqrt{\left[\sum_{i=1}^n M_i^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \bar{x})^2 \right]}.$$

Более экономична в вычислительном плане статистика [108]:

$$r = \frac{\sum_{i=[n/2]+1}^n M_i (x_{(i)} - x_{(n-i+1)})}{\sqrt{\left[2 \sum_{i=[n/2]+1}^n M_i^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \bar{x})^2 \right]}}. \quad (2.30)$$

Для вычисления m_i автором [33] рекомендуется воспользоваться следующими соотношениями.

$$m_i = \begin{cases} i = m_n, & i = 1, \\ (i - 0.3175) / (n + 0.365), & i = 2, \dots, n-1, \\ 0.5^{1/n}, & i = n. \end{cases}$$

Критерий левосторонний: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при малых значениях r . Зависимость распределения $G(r|H_0)$

статистики критерия Филибена от объёмов выборок иллюстрирует рис. 2.44.

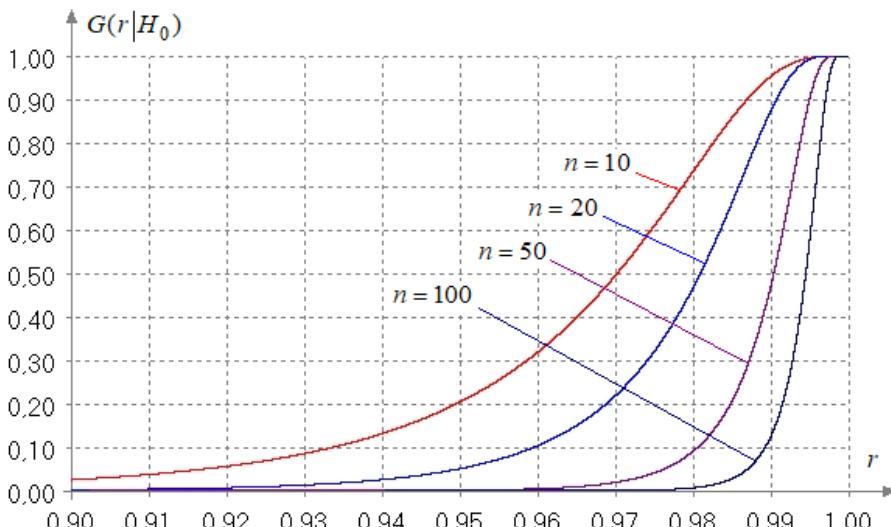


Рис. 2.44. Зависимость распределения $G(r|H_0)$ от n

Для распределения $G(r|H_0)$ в [33] приводится таблица процентных точек для объёмов выборок $n = 3 \div 100$. В данном случае необходимые критические значения для ряда n представлены в табл. 2.85.

Оценки мощности критерия Филибена со статистикой r относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 приведены в таблицах 2.86, 2.87, 2.88, соответственно.

Как видно по таблицам с оценками мощности, критерий Филибена относительно H_1 при небольших объёмах выборок является смещённым (для $\alpha = 0,01$ смещённость присутствует при $n \leq 80$). При этом (с ростом n) его мощность относительно гипотезы H_1 , по сравнению с другими критериями, оказывается ниже среднего. В то же время относительно конкурирующих гипотез типа H_2 и H_3 критерий обладает мощностью выше среднего.

Таблица 2.85

Процентные точки для статистики r критерия Филлибена

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.943	0.934	0.917	0.900	0.877
20	0.965	0.960	0.950	0.940	0.926
30	0.974	0.971	0.964	0.956	0.947
40	0.980	0.977	0.971	0.966	0.958
50	0.983	0.981	0.976	0.972	0.966
60	0.985	0.983	0.980	0.976	0.971
80	0.989	0.987	0.984	0.981	0.977
100	0.991	0.989	0.987	0.985	0.981
150	0.993	0.992	0.991	0.989	0.987
200	0.995	0.994	0.993	0.992	0.990
300	0.996	0.996	0.995	0.994	0.993

Таблица 2.86

Мощность r критерия Филлибена относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.121	0.074	0.031	0.013	0.004
20	0.114	0.064	0.023	0.008	0.002
30	0.129	0.074	0.026	0.008	0.002
40	0.158	0.093	0.034	0.011	0.002
50	0.194	0.119	0.046	0.016	0.003
100	0.427	0.311	0.164	0.078	0.024
150	0.658	0.543	0.357	0.210	0.090
200	0.822	0.736	0.567	0.397	0.216
300	0.966	0.937	0.861	0.749	0.565

Таблица 2.87

Мощность г критерия Филлибена относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.335	0.268	0.180	0.121	0.070
20	0.495	0.422	0.318	0.238	0.159
30	0.606	0.536	0.428	0.336	0.242
40	0.692	0.627	0.520	0.425	0.318
50	0.759	0.699	0.589	0.505	0.394
100	0.930	0.902	0.846	0.782	0.687
150	0.981	0.971	0.947	0.914	0.859
200	0.995	0.992	0.983	0.969	0.943
300	0.999	0.998	0.996	0.993	0.986

Таблица 2.88

Мощность г критерия Филлибена относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.214	0.156	0.092	0.054	0.026
20	0.280	0.217	0.141	0.092	0.052
30	0.330	0.264	0.180	0.123	0.075
40	0.373	0.304	0.214	0.151	0.095
50	0.410	0.340	0.246	0.178	0.115
100	0.551	0.479	0.375	0.292	0.206
150	0.653	0.585	0.480	0.390	0.291
200	0.730	0.669	0.570	0.477	0.372
300	0.838	0.792	0.709	0.625	0.519

Рейтинг критерия – 11.

2.26. Критерий Шапиро–Франциа (Shapiro–Francia Test)

Критерий Шапиро–Уилка [76] характеризуется достаточно высокой мощностью относительно рассматриваемых в руководстве конкурирующих гипотез, но использование его при $n > 50$ затруднительно из-за отсутствия необходимых коэффициентов α_k .

Поэтому в [78] была предложена модификация критерия Шапиро–Уилка со статистикой:

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^n b_i x_{(i)} \right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \bar{x})^2}, \quad (2.31)$$

где

$$b_i = m_{i,n} / \sqrt{\sum_{j=1}^n m_{j,n}^2}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и $m_{i,n}$ – представляют собой математические ожидания i -х порядковых статистик для стандартного нормального закона по выборке объёмом n .

Используемые в статистике значения $m_{i,n}$ получены и представлены в [44] для $n \leq 400$.

Критерий левосторонний: проверяемая гипотеза H_0 о нормальности отклоняется при малых значениях статистики.

Исследования показали, что статистические свойства (в том числе, распределения статистик при справедливости проверяемой и конкурирующих гипотез) модификация критерия Шапиро–Франциа полностью эквивалентна модификации критерия Вайсберга–Бингема. Поэтому можно пользоваться таблицей критических значений и оценками мощности, приведенными для критерия Вайсберга–Бингема. Последним критерием оказывается предпочтительней пользоваться в связи с тем, что не возникает никаких ограничений с возможными объёмами выборок. Именно поэтому в [146] применение критерия Шапиро–Франциа реализовано при $n \leq 50$.

Рейтинг критерия – 7.5.

2.27. Критерий Вайсберга–Бингема (Weisberg–Bingham Test)

В [92] была модифицирована уже статистика Шапиро–Франциа, что произошло за счёт использования приближенных оценок для математических ожиданий i -х порядковых статистик для стандартного нормального закона.

Модификация статистики имеет тот же вид:

$$\tilde{W} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \tilde{b}_i x_{(i)} \right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \bar{x})^2}, \quad (2.32)$$

где

$$\tilde{b}_i = \tilde{m}_{i,n} / \sqrt{\sum_{j=1}^n \tilde{m}_{j,n}^2}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и вместо математических ожиданий порядковых статистик стандартного нормального закона $m_{i,n}$ используется их аппроксимация

$$\tilde{m}_{i,n} = \Phi^{-1} \left(\frac{i - 3/8}{n + 1/4} \right),$$

предложенная [10].

В [92] методами статистического моделирования было показано, что распределения $G(\tilde{W}|H_0)$ при конкретных n очень близки к соответствующим распределениям $G(W|H_0)$, а при $n > 30$ отличие практически отсутствует. Высокую степень совпадения этих распределений показали и наши исследования. Естественно, эквивалентными оказались и свойства соответствующих критериев.

Критерий левосторонний. проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при малых значениях \tilde{W} . Распределения $G(\tilde{W}|H_0)$ статистики зависят от n . Эта зависимость демонстрируется на рис. 2.45. Критические значения статистики представлены в табл. 2.89.

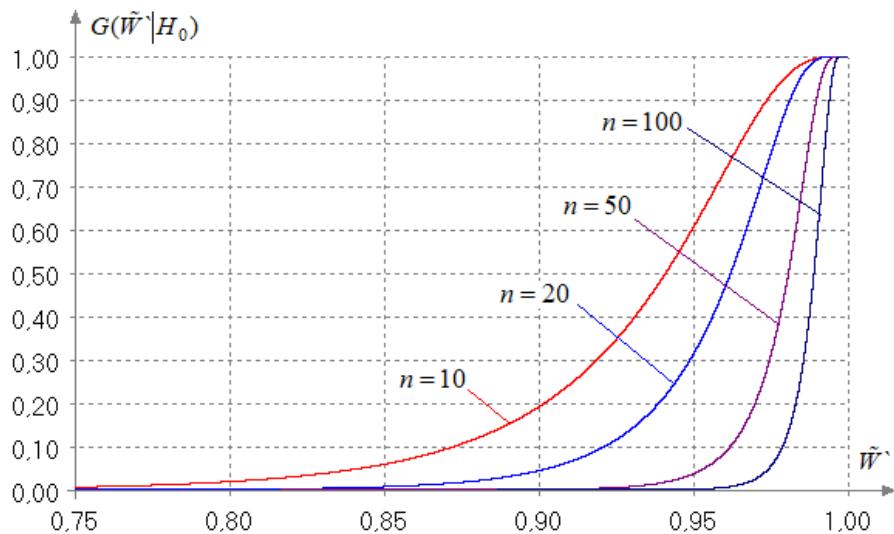
Рис. 2.45. Зависимость распределения $G(\tilde{W}^* | H_0)$ от n

Таблица 2.89

Процентные точки статистики \tilde{W}^* критерия Вайсберга–Бингема

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.890	0.873	0.843	0.812	0.772
20	0.932	0.921	0.903	0.885	0.859
30	0.950	0.942	0.929	0.916	0.898
40	0.960	0.954	0.944	0.934	0.919
50	0.967	0.962	0.954	0.945	0.933
60	0.971	0.967	0.960	0.953	0.943
80	0.978	0.974	0.969	0.963	0.956
100	0.981	0.979	0.975	0.970	0.964
150	0.987	0.985	0.982	0.979	0.975
200	0.990	0.989	0.986	0.984	0.981
300	0.993	0.992	0.991	0.989	0.987

Оценки мощности критерия с модифицированной статистикой Вайсберга–Бингема относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 представлены в таблицах 2.90, 2.91, 2.92, соответственно.

Таблица 2.90

Мощность \tilde{W} критерия Вайсберга–Бингема относительно H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.126	0.077	0.032	0.013	0.004
20	0.124	0.072	0.027	0.009	0.002
30	0.145	0.085	0.031	0.011	0.002
40	0.179	0.109	0.042	0.014	0.003
50	0.220	0.139	0.057	0.021	0.005
100	0.467	0.350	0.195	0.097	0.032
150	0.696	0.586	0.402	0.247	0.113
200	0.848	0.771	0.612	0.444	0.255
300	0.973	0.950	0.885	0.786	0.614

Таблица 2.91

Мощность \tilde{W} критерия Вайсберга–Бингема относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.330	0.263	0.178	0.119	0.069
20	0.487	0.415	0.313	0.234	0.157
30	0.597	0.528	0.421	0.331	0.238
40	0.683	0.618	0.513	0.419	0.314
50	0.750	0.691	0.591	0.498	0.388
100	0.926	0.898	0.841	0.777	0.682
150	0.980	0.969	0.944	0.911	0.856
200	0.995	0.991	0.982	0.968	0.941
300	1.000	0.999	0.998	0.997	0.992

Таблица 2.92

Мощность \tilde{W}^* критерия Вайсберга–Бингема относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.211	0.155	0.091	0.053	0.026
20	0.275	0.213	0.139	0.090	0.051
30	0.324	0.259	0.177	0.121	0.073
40	0.366	0.298	0.210	0.148	0.093
50	0.402	0.333	0.241	0.174	0.113
100	0.541	0.470	0.368	0.286	0.202
150	0.642	0.575	0.472	0.382	0.286
200	0.720	0.660	0.561	0.469	0.365
300	0.831	0.784	0.701	0.617	0.511

Следует подчеркнуть более значительную смещённость этой модификации критерия по сравнению с исходным критерием Шапиро–Уилка (и меньшую мощность при $n=40 \div 50$) по отношению к гипотезе H_1 .

В то же время относительно H_2 и H_3 мощность модификации (при $n=40 \div 50$) заметно выше мощности критерия Шапиро–Уилка.

Рейтинг критерия – 7.5.

2.28. Критерий Жанга (Zhang Test)

Идея построения предложенного в [98] критерия нормальности заключается в вычислении двух таких линейных комбинаций порядковых статистик, построенных по выборке, что они представляют собой две несмещённые оценки среднего квадратичного отклонения σ .

В качестве статистики критерия рассматривается отношение этих линейных комбинаций:

$$Q = \ln \left(\frac{q_1}{q_2} \right). \quad (2.33)$$

Оценки q_1 и q_2 вычисляются в соответствии с выражениями

$$q_1 = \sum_{i=1}^n a_i x_{(i)},$$

$$q_2 = \sum_{i=1}^n b_i x_{(i)},$$

где коэффициенты линейных комбинаций a_i и b_i находятся следующим образом:

$$a_i = \frac{1}{(u_i - u_1)(n-1)}, \quad i = 2, \dots, n;$$

$$a_1 = \sum_{i=2}^2 a_i;$$

$$b_i = -b_{n-i+1} = \frac{1}{(u_i - u_{i+4})(n-4)}, \quad i = 1, \dots, 4;$$

$$b_i = \left(\frac{1}{u_i - u_{i+4}} - \frac{1}{u_{i-4} - u_i} \right) / (n-4), \quad i = 5, \dots, n-4;$$

где

$$u_i = \Phi^{-1} \left(\frac{i - 3/8}{n + 1/4} \right).$$

При справедливости проверяемой гипотезы H_0 о нормальности значение Q должно быть равно нулю. При конкурирующей гипотезе ожидаемое значение Q должно отклоняться от нуля. Критерий **двусторонний**. Распределение $G(Q|H_0)$ зависит от объёмов выборки n и приблизительно нормально со средним значением 0.

Критические значения статистики представлены в табл. 2.93.

Оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 представлены в таблицах 2.94, 2.95, 2.96,

Таблица 2.93

Процентные точки для статистики **Q** критерия Жанга

<i>n</i>	0.15		0.1		0.05		0.025		0.01	
	$\alpha/2$	$1 - \alpha/2$								
10	-0.520	0.467	-0.575	0.541	-0.655	0.653	-0.721	0.751	-0.794	0.863
20	-0.425	0.388	-0.472	0.452	-0.542	0.549	-0.601	0.633	-0.669	0.732
30	-0.376	0.349	-0.418	0.407	-0.481	0.495	-0.535	0.574	-0.596	0.663
40	-0.345	0.326	-0.385	0.379	-0.443	0.462	-0.493	0.534	-0.550	0.620
50	-0.324	0.309	-0.361	0.361	-0.416	0.439	-0.463	0.508	-0.518	0.590
60	-0.308	0.297	-0.343	0.346	-0.395	0.421	-0.440	0.489	-0.491	0.568
80	-0.284	0.278	-0.317	0.324	-0.365	0.395	-0.407	0.459	-0.455	0.535
100	-0.268	0.265	-0.299	0.309	-0.345	0.377	-0.384	0.439	-0.429	0.512
150	-0.242	0.244	-0.270	0.285	-0.311	0.348	-0.346	0.405	-0.388	0.473
200	-0.226	0.231	-0.252	0.270	-0.291	0.331	-0.323	0.386	-0.362	0.450
300	-0.205	0.214	-0.229	0.251	-0.264	0.308	-0.295	0.359	-0.330	0.421

Таблица 2.94

Мощность **Q** критерия Жанга относительно H_1

<i>n</i>	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.139	0.092	0.045	0.022	0.009
20	0.154	0.104	0.052	0.026	0.010
30	0.184	0.126	0.065	0.034	0.014
40	0.217	0.152	0.082	0.043	0.018
50	0.250	0.179	0.099	0.053	0.022
100	0.407	0.315	0.196	0.117	0.057
150	0.530	0.435	0.295	0.194	0.103
200	0.625	0.531	0.387	0.271	0.159
300	0.754	0.676	0.538	0.411	0.273

Таблица 2.95

Мощность Q критерия Жанга относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.254	0.194	0.123	0.078	0.043
20	0.320	0.257	0.180	0.127	0.082
30	0.362	0.298	0.216	0.158	0.107
40	0.394	0.329	0.244	0.184	0.127
50	0.421	0.355	0.268	0.204	0.144
100	0.528	0.461	0.365	0.288	0.212
150	0.603	0.537	0.437	0.355	0.267
200	0.660	0.595	0.494	0.406	0.311
300	0.744	0.683	0.582	0.490	0.385

Таблица 2.96

Мощность Q критерия Жанга относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.188	0.133	0.074	0.041	0.019
20	0.221	0.164	0.099	0.061	0.033
30	0.243	0.184	0.116	0.074	0.043
40	0.259	0.200	0.130	0.086	0.051
50	0.273	0.212	0.141	0.095	0.058
100	0.326	0.262	0.183	0.130	0.083
150	0.367	0.302	0.217	0.158	0.104
200	0.401	0.333	0.244	0.179	0.121
300	0.458	0.387	0.291	0.219	0.150

На основании полученных результатов можно констатировать, что относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 критерий в совокупности обладает мощностью ниже среднего. Смещённость относительно H_1 отмечена только при $n=10$.

В то же время в [98] отмечено, что критерий со статистикой Q обладает более высокой мощностью относительно альтернатив с положительной асимметрией, чем относительно альтернатив с отрицательной асимметрией. Например, мощность относительно гипотезы H_4 , соответствующей распределению минимального значения, существенно меньше мощности относительно гипотезы H_5 , соответствующей распределению максимального значения. А эти два гипотезы зеркальны относительно H_0 .

Поэтому в [98] предложен ещё один вариант статистики критерия, который должен обладать большей мощностью относительно альтернатив с отрицательной асимметрией.

Умножив все элементы $x_{(i)}$ вариационного ряда на -1 и переставив их в порядке возрастания, получим ряд с порядковыми статистиками $x_{(i)}^* = -x_{(n-i+1)}$, и можем вычислить статистику

$$Q^* = \ln \left(\frac{q_1^*}{q_2^*} \right), \quad (2.34)$$

$$\text{где } q_1^* = \sum_{i=1}^n a_i x_{(i)}^*, \quad q_2^* = \sum_{i=1}^n b_i x_{(i)}^*.$$

Распределения $G(Q|H_0)$ и $G(Q^*|H_0)$ совпадают. Совпадают мощности критериев относительно симметричных альтернатив H_1, H_2 и H_3 . А мощность критерия со статистикой Q относительно H_4 совпадает с мощностью критерия со статистикой Q^* относительно H_5 и наоборот.

Рейтинг критерия – 48.

2.29. Критерий Лина–Мудхолкара (Lin–Mudholkar Test)

Критерий определяется следующим образом [64, 108]. По выборке x_1, x_2, \dots, x_n объёмом n формируется n подвыборок, образуемых из полной исключением каждый раз одного наблюдения. Если по полной выборке $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, то для подвыборок

получаем

$$\bar{x}_i = (n\bar{x} - x_i) / (n-1), \quad s_i^2 = \frac{1}{n-1} \left[(n-1)s^2 - \frac{n}{n-1}(x_i - \bar{x})^2 \right].$$

Так как распределение оценок s_i^2 отлично от нормального, а в критерии предполагается анализировать корреляционные связи пар (\bar{x}_i, s_i^2) , то вместо оценок дисперсии используют нормализующее их преобразование Вильсона–Хилферти

$$y_i = \left\{ \frac{1}{n} \left[\sum_{j \neq i} x_j^2 - \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j \neq i} x_j \right)^2 \right] \right\}^{1/3}, \quad i = 1, \dots, n.$$

В результате рассматривается оценка коэффициента корреляции между величинами (\bar{x}_i, y_i)

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})(y_i - \bar{y})}{\left[\sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \right]^{1/2}}.$$

В качестве статистики критерия рассматривается нормализующее преобразование:

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}.$$

А так как дисперсия $\sigma^2(z)$ достаточно точно аппроксимируется выражением [64]

$$\sigma^2(z) = \frac{3}{n} - \frac{7.324}{n^2} + \frac{53.005}{n^3},$$

то статистика

$$\tilde{z} = \frac{1}{2\sigma(z)} \ln \frac{1+r}{1-r}. \quad (2.35)$$

при справедливости H_0 должна хорошо описываться стандартным нормальным законом. Действительно, отклонением распределения $G(\tilde{z}|H_0)$ от стандартного нормального закона можно пренебречь уже при $n \geq 30$.

Оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 представлены в таблицах 2.97, 2.98, 2.99.

Таблица 2.97

Мощность \tilde{z} критерия Лина–Мудхолкара относительно H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.119	0.076	0.035	0.016	0.006
20	0.104	0.064	0.029	0.013	0.005
30	0.098	0.060	0.026	0.012	0.004
40	0.095	0.058	0.024	0.011	0.004
50	0.092	0.056	0.024	0.010	0.004
100	0.088	0.052	0.021	0.009	0.003
150	0.086	0.050	0.020	0.008	0.003
200	0.085	0.049	0.019	0.008	0.002
300	0.082	0.047	0.019	0.007	0.002

Таблица 2.98

Мощность \tilde{z} критерия Лина–Мудхолкара относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.298	0.234	0.156	0.103	0.059
20	0.349	0.286	0.205	0.147	0.096
30	0.372	0.309	0.226	0.167	0.113
40	0.386	0.322	0.239	0.179	0.123
50	0.395	0.332	0.248	0.188	0.131
100	0.419	0.355	0.271	0.208	0.148
150	0.430	0.367	0.283	0.220	0.160
200	0.438	0.375	0.290	0.227	0.164
300	0.444	0.383	0.298	0.235	0.172

Таблица 2.99

Мощность $\tilde{\chi}$ критерия Лина–Мудхолкара относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.206	0.149	0.085	0.049	0.024
20	0.240	0.180	0.111	0.068	0.036
30	0.258	0.197	0.125	0.080	0.044
40	0.270	0.207	0.133	0.087	0.049
50	0.278	0.216	0.141	0.093	0.053
100	0.301	0.237	0.159	0.107	0.064
150	0.312	0.248	0.168	0.116	0.071
200	0.319	0.254	0.174	0.120	0.074
300	0.325	0.260	0.181	0.126	0.078

Как можно видеть по оценкам относительно H_1 , критерий смещённый и не способен отличить от H_0 подобные конкурирующие гипотезы.

Относительно гипотез H_2 и H_3 , которым также соответствуют симметричные законы, критерий проявляет мощность ниже среднего по сравнению с большинством критериев. Но относительно асимметричных альтернатив критерий оказывается достаточно эффективным.

Рейтинг критерия – 43.

2.30. Критерий Чена–Шапиро (Chen–Shapiro Test)

В работе [16] предложен критерий со статистикой следующего вида

$$QH = \frac{1}{s(n-1)} \sum_{i=1}^n \frac{x_{(i+1)} - x_{(i)}}{\tilde{m}_{i+1} - \tilde{m}_i}, \quad (2.36)$$

где $x_{(i)}$ – порядковые статистики, построенные по выборке x_1, x_2, \dots, x_n объёмом n , $\tilde{m}_i = \Phi^{-1}\left(\frac{i-3/8}{n+1/4}\right)$ – аппроксимации математических

ожиданий порядковых статистик стандартного нормального закона,

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Критерий со статистикой QH – **левосторонний**.

При выборе статистики в эквивалентной форме

$$QH^* = \sqrt{n}(1 - QH) \quad (2.37)$$

критерий становится **правосторонним** с, возможно, более предпочтительным для применения диапазоном значений статистики при справедливости H_0 . Распределения $G(QH|H_0)$ и $G(QH^*|H_0)$ зависят от n (см. рис. 2.46). Критические значения статистики QH^* для ряда значений n представлены в таблице 2.100.

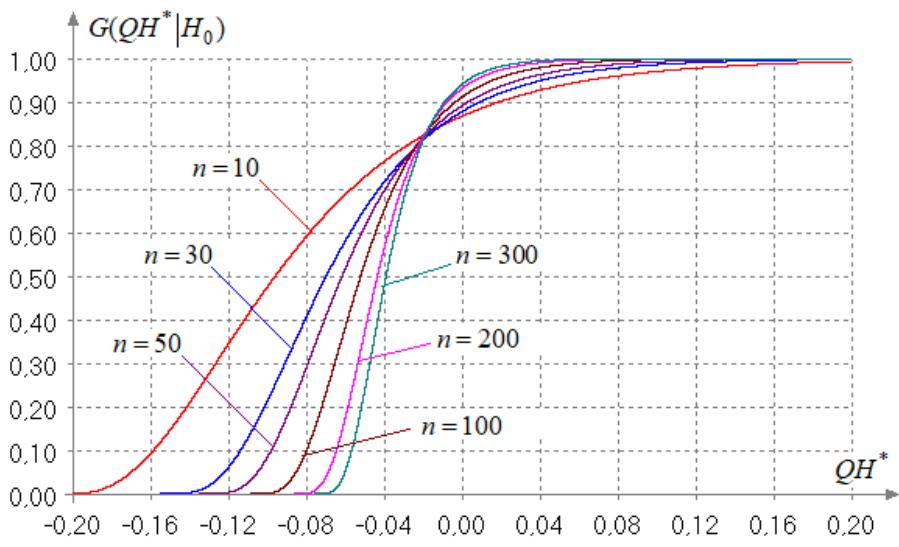


Рис. 2.46. Зависимость распределения $G(QH^*|H_0)$ от n

Полученные оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 приведены в таблицах 2.101, 2.102, 2.103. Эти оценки для критериев со статистиками QH и QH^* совпадают.

Таблица 2.100

Процентные точки статистики QH^* критерия Чена–Шапиро $\times 10^2$

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	-0.836	1.915	6.530	11.251	17.712
20	-0.763	1.409	5.128	8.946	14.081
30	-0.943	0.926	4.130	7.365	11.816
40	-1.114	0.578	3.418	6.321	10.222
50	-1.225	0.308	2.916	5.536	9.101
60	-1.315	0.116	2.532	4.966	8.317
80	-1.428	-0.165	1.970	4.111	7.005
100	-1.480	-0.333	1.593	3.538	6.161
150	-1.566	-0.598	1.029	2.628	4.758
200	-1.599	-0.751	0.671	2.105	3.995
300	-1.588	-0.886	0.294	1.477	3.022

Таблица 2.101

Мощность критерия Чена–Шапиро относительно H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.166	0.106	0.047	0.020	0.006
20	0.221	0.147	0.068	0.029	0.008
30	0.289	0.202	0.101	0.046	0.014
40	0.361	0.262	0.142	0.070	0.024
50	0.432	0.327	0.189	0.100	0.038
100	0.722	0.624	0.459	0.312	0.166
150	0.884	0.823	0.696	0.555	0.374
200	0.957	0.927	0.852	0.748	0.583
300	0.995	0.991	0.974	0.943	0.872

Таблица 2.102

Мощность критерия Чена–Шапиро относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.282	0.224	0.153	0.105	0.063
20	0.394	0.332	0.251	0.189	0.131
30	0.486	0.423	0.334	0.264	0.192
40	0.567	0.504	0.412	0.335	0.254
50	0.638	0.576	0.484	0.404	0.315
100	0.865	0.827	0.758	0.688	0.595
150	0.956	0.939	0.903	0.861	0.797
200	0.987	0.980	0.965	0.945	0.909
300	0.999	0.998	0.996	0.993	0.987

Таблица 2.103

Мощность критерия Чена–Шапиро относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.192	0.139	0.082	0.048	0.024
20	0.230	0.176	0.113	0.074	0.043
30	0.258	0.204	0.138	0.095	0.059
40	0.284	0.227	0.159	0.112	0.073
50	0.308	0.251	0.179	0.130	0.086
100	0.415	0.352	0.269	0.207	0.147
150	0.508	0.444	0.554	0.283	0.211
200	0.591	0.529	0.435	0.356	0.273
300	0.724	0.669	0.580	0.497	0.404

Можно отметить незначительную смещённость критериев со статистиками QH и QH^* при $n=10$ и малых α . В целом же относительно всех рассматриваемых в руководстве конкурирующих гипотез критерий показывает значения мощности выше среднего.

Рейтинг критерия – 12.

2.31. Критерий Бонетта–Сейер (Bonett–Seier Test)

В статистике критерия, рассмотренного в [11], связаны две различные меры, характеризующие эксцесс, благодаря чему критерий должен обладать высокой мощностью в широком диапазоне симметричных альтернатив [11]. Статистика критерия имеет вид

$$Z_{\omega} = \frac{\sqrt{n+2}(\hat{\omega}-3)}{3.54}, \quad (2.38)$$

где $\hat{\omega}=13.29(\ln s - \ln \hat{\tau})$, $\hat{\tau}=\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$, $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Критерий двусторонний. Распределение статистики $G(Z_{\omega} | H_0)$ сходится к стандартному нормальному закону, но, как показали исследования, достаточно медленно (см. рис. 2.47). Поэтому в таблице 2.104 для ряда объёмов выборок представлены процентные точки распределения $G(Z_{\omega} | H_0)$.

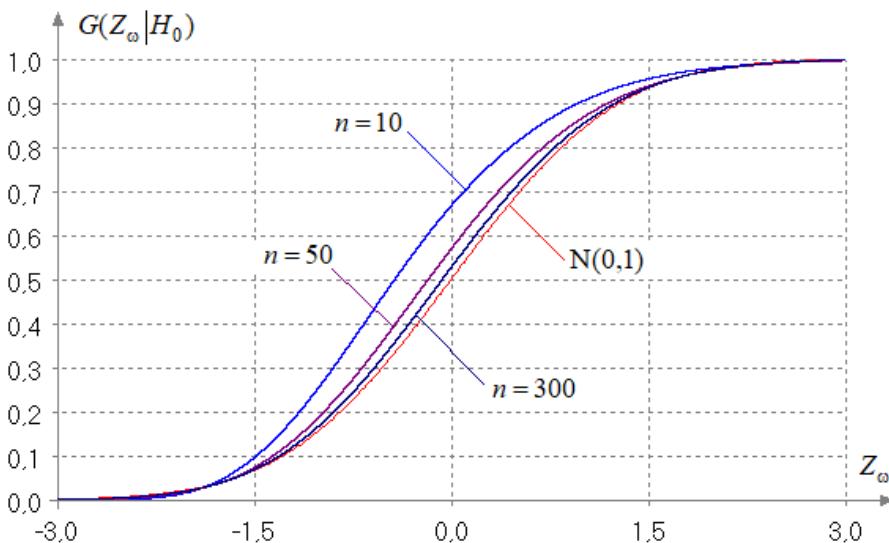


Рис. 2.47. Сходимость распределения $G(Z_{\omega} | H_0)$ к $N(0,1)$

Оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 представлены в таблицах 2.105, 2.106, 2.107.

Таблица 2.104

Процентные точки для статистики Z_{ω} критерия Бонетта–Сейер

n	0.15		0.1		0.05		0.025		0.01	
	$\alpha/2$	$1 - \alpha/2$								
10	-1.592	1.166	-1.725	1.434	-1.914	1.868	-2.068	2.276	-2.112	2.401
20	-1.532	1.309	-1.686	1.571	-1.911	1.991	-2.096	2.383	-2.152	2.505
30	-1.511	1.349	-1.671	1.604	-1.909	2.007	-2.113	2.386	-2.172	2.507
40	-1.495	1.362	-1.661	1.612	-1.908	2.004	-2.124	2.371	-2.184	2.486
50	-1.489	1.377	-1.659	1.618	-1.912	2.005	-2.132	2.370	-2.195	2.478
60	-1.483	1.384	-1.656	1.625	-1.915	2.006	-2.141	2.360	-2.397	2.790
80	-1.478	1.394	-1.655	1.628	-1.919	2.002	-2.152	2.345	-2.418	2.764
100	-1.470	1.400	-1.650	1.632	-1.920	2.001	-2.155	2.334	-2.224	2.435
150	-1.462	1.411	-1.648	1.638	-1.928	1.994	-2.172	2.318	-2.243	2.418
200	-1.461	1.410	-1.647	1.635	-1.929	1.985	-2.174	2.303	-2.249	2.403
300	-1.453	1.418	-1.643	1.638	-1.931	1.985	-2.183	2.290	-2.480	2.672
∞	-1.440	1.440	-1.645	1.635	-1.960	1.960	-2.241	2.241	-2.576	2.576

Таблица 2.105

Мощность критерия Бонетта–Сейер относительно H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.174	0.120	0.064	0.034	0.014
20	0.247	0.181	0.105	0.061	0.029
30	0.329	0.253	0.158	0.097	0.050
40	0.409	0.326	0.215	0.138	0.075
50	0.480	0.394	0.273	0.182	0.103
100	0.750	0.674	0.544	0.424	0.294
150	0.888	0.840	0.742	0.635	0.496
200	0.953	0.927	0.866	0.790	0.669
300	0.992	0.986	0.968	0.941	0.885

Таблица 2.106

Мощность критерия Бонетта–Сейер относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.267	0.204	0.130	0.082	0.043
20	0.442	0.371	0.273	0.201	0.132
30	0.583	0.513	0.408	0.321	0.229
40	0.694	0.630	0.528	0.435	0.330
50	0.776	0.722	0.628	0.535	0.425
100	0.958	0.940	0.902	0.855	0.784
150	0.993	0.988	0.978	0.963	0.934
200	0.999	0.998	0.996	0.992	0.983
300	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999

Таблица 2.107

Мощность критерия Бонетта–Сейер относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.182	0.127	0.069	0.038	0.017
20	0.227	0.170	0.103	0.063	0.033
30	0.267	0.205	0.132	0.086	0.049
40	0.305	0.240	0.161	0.108	0.064
50	0.338	0.272	0.188	0.129	0.079
100	0.486	0.415	0.313	0.235	0.160
150	0.602	0.532	0.426	0.337	0.243
200	0.695	0.631	0.527	0.433	0.329
300	0.821	0.771	0.683	0.595	0.485

Если судить по оценкам мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 , то можно заметить, что этот достаточно простой критерий следует отнести к наиболее эффективным специальным критериям нормальности.

Рейтинг критерия – 17.5.

2.32. Критерий Али-Чорго-Ревеса (Aly–Csorgo–Revesz Test)

Совокупность похожих критериев рассмотрена в работах [1, 2]. Статистика для критерия нормальности имеет вид [2]:

$$M_n = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{x_{(i)} - \bar{x}}{s} - \Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) \right\}^2 \varphi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right), \quad (2.39)$$

где $x_{(i)}$ – порядковые статистики, построенные по выборке x_1, x_2, \dots, x_n объёмом n , $\Phi(\cdot)$ – функция распределения стандартного нормального закона, $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Критерий правосторонний. Процентные точки распределения $G(M_n | H_0)$ для некоторых объёмов выборок представлены в таблице 2.108.

Наше исследование зависимости распределения $G(M_n | H_0)$ статистики M_n от объёмов выборок n , проведенное методами статистического моделирования, показало, что оно достаточно быстро сходится к некоторому асимптотическому распределению. В качестве этого асимптотического распределения предлагается использовать модель бета-распределения III рода с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 B(\theta_0, \theta_1)} \frac{\left(\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0-1} \left(1 - \frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1-1}}{\left[1 + (\theta_2 - 1) \frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0+\theta_1}}$$

и значениями параметров $\theta_0 = 4.6198$, $\theta_1 = 3.9986$, $\theta_2 = 8.4016$, $\theta_3 = 1.2044$, $\theta_4 = 0.0398$, которая была построена по результатам статистического моделирования распределения $G(M_n | H_0)$ при $n = 3000$.

Оценки мощности критерия относительно гипотез H_1, H_2 и H_3 , представлены в таблицах 2.109, 2.110, 2.111.

Таблица 2.108

Процентные точки статистики M_n критерия Али-Чорго-Ревеса

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.298	0.333	0.391	0.450	0.525
20	0.319	0.358	0.423	0.488	0.573
30	0.323	0.362	0.429	0.496	0.583
40	0.323	0.362	0.430	0.497	0.586
50	0.322	0.362	0.430	0.498	0.588
60	0.322	0.362	0.431	0.499	0.590
80	0.320	0.361	0.429	0.498	0.589
100	0.319	0.360	0.428	0.498	0.589
150	0.318	0.358	0.428	0.497	0.589
200	0.316	0.357	0.427	0.497	0.591
300	0.316	0.356	0.426	0.495	0.588
∞	0.312	0.353	0.422	0.490	0.579

Таблица 2.109

Мощность критерия Али-Чорго-Ревеса относительно H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.162	0.106	0.051	0.023	0.008
20	0.207	0.141	0.072	0.035	0.013
30	0.259	0.185	0.101	0.053	0.022
40	0.315	0.233	0.134	0.074	0.032
50	0.370	0.281	0.170	0.098	0.045
100	0.615	0.519	0.373	0.254	0.145
150	0.787	0.710	0.570	0.438	0.289
200	0.893	0.840	0.731	0.609	0.448
300	0.977	0.960	0.915	0.848	0.734

Таблица 2.110

Мощность критерия Али-Чорго-Ревеса относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.297	0.233	0.155	0.103	0.060
20	0.432	0.361	0.266	0.195	0.129
30	0.541	0.469	0.365	0.282	0.198
40	0.632	0.563	0.457	0.365	0.268
50	0.708	0.643	0.540	0.446	0.340
100	0.915	0.884	0.823	0.754	0.657
150	0.978	0.967	0.942	0.909	0.852
200	0.995	0.992	0.983	0.970	0.943
300	1.000	1.000	0.999	0.998	0.994

Таблица 2.111

Мощность критерия Али-Чорго-Ревеса относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.193	0.138	0.079	0.045	0.022
20	0.231	0.172	0.105	0.065	0.035
30	0.259	0.197	0.125	0.079	0.044
40	0.284	0.219	0.142	0.091	0.052
50	0.307	0.240	0.157	0.104	0.060
100	0.410	0.334	0.234	0.162	0.099
150	0.499	0.421	0.309	0.224	0.143
200	0.580	0.502	0.383	0.287	0.190
300	0.710	0.638	0.521	0.416	0.301

Смешённости критерия относительно H_1 не наблюдается. Уровень мощности критерия относительно всех рассмотренных конкурирующих гипотез выше среднего.

Рейтинг критерия – 27.5.

2.33. Критерии Бонтемпса–Меддахи (Bontemps–Meddahi Test)

В работе [12] предложено семейство критериев нормальности со статистиками, задаваемыми в форме

$$BM_{3-p} = \sum_{k=3}^p \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n H_k(z_i) \right)^2, \quad (2.40)$$

где $z_i = (x_i - \bar{x}) / s$, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, а $H_k(\cdot)$ –

полином Эрмита порядка k . В основном упоминается [85] применение критериев со статистиками вида BM_{3-4} и BM_{3-6} при p равном 4 и 6.

Последовательность полиномов Эрмита определяется рекурсивной формулой

$$\forall k > 1, \quad H_k(x) = \frac{1}{\sqrt{k}} \left\{ xH_{k-1}(x) - \sqrt{k-1}H_{k-2}(x) \right\},$$

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x.$$

В частности, для $k = 2 \div 4$ имеем полиномы вида

$$H_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - 1), \quad H_3(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}(x^3 - 3x), \quad H_4(x) = \frac{1}{\sqrt{24}}(x^4 - 6x^2 + 3).$$

При вычислении статистик BM_{3-p} требуемые значения $H_k(z_i)$ для $k \geq 2$ в целях снижения числа операций и уменьшения погрешностей целесообразно находить по рекурсивной формуле.

В [12] показано, что при справедливости гипотезы H_0 и принадлежности выборок x_1, x_2, \dots, x_n нормальным законам статистики BM_{3-p} в асимптотике подчиняются χ_{p-2}^2 -распределениям. Однако на самом деле сходимость распределений $G(BM_{3-p} | H_0)$ к χ_{p-2}^2 -распределениям очень медленная. Например, при проверке гипотез с использованием критерия со статистикой BM_{3-4} на соответствующее χ_2^2 -распределение можно опираться лишь при объёмах выборок порядка 1000 (см. рис. 2.48). В случае критерия со статистикой BM_{3-6} ситуация ещё хуже: асимптотическое χ_4^2 -распределение можно

обосновано использовать при $n > 10000$ (см. рис. 2.49).

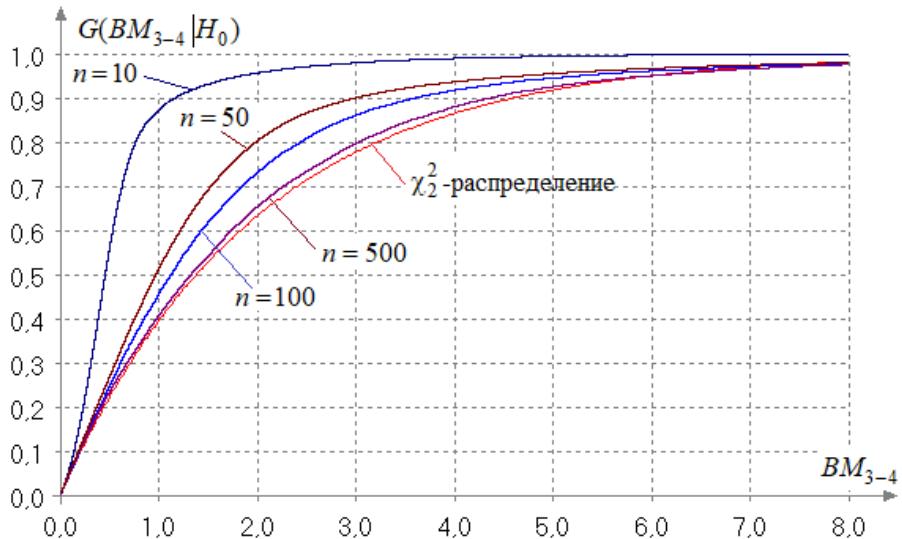


Рис. 2.48. Сходимость $G(BM_{3-4} | H_0)$ к χ^2_2 -распределению с ростом n

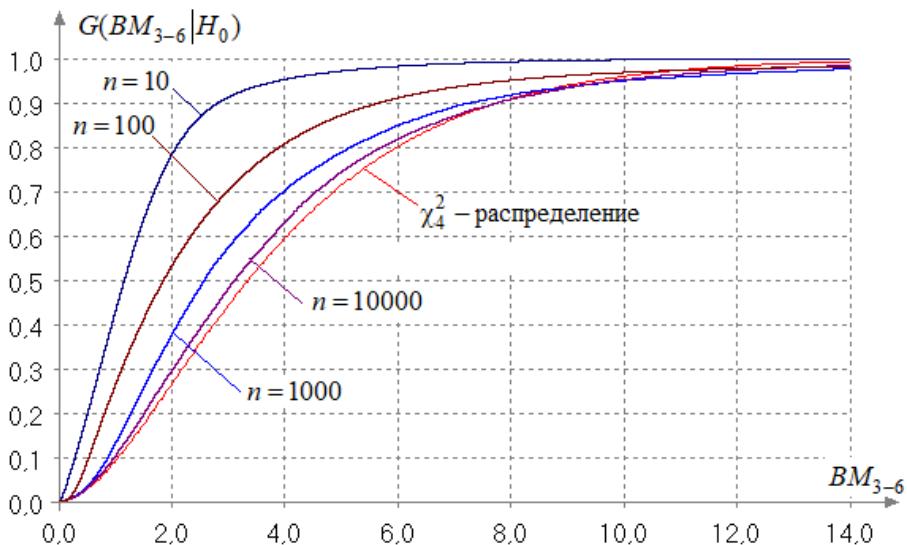


Рис. 2.49. Сходимость $G(BM_{3-6} | H_0)$ к χ^2_4 -распределению с ростом n

Поэтому приходится пользоваться таблицами критических значений или находить достигнутый уровень значимости P_{value} , используя метод Монте-Карло. Процентные точки распределений $G(BM_{3-4}|H_0)$ для некоторых объёмов выборок представлены в таблице 2.112, для распределений $G(BM_{3-6}|H_0)$ – в таблице 2.113.

Таблица 2.112

Процентные точки статистики BM_{3-4} критерия Бонтемпса–Меддахи

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.903	1.175	1.831	2.708	4.083
20	1.539	2.007	3.231	4.988	8.181
30	1.912	2.468	3.976	6.135	10.102
40	2.161	2.767	4.386	6.703	11.035
50	2.350	2.988	4.668	7.081	11.518
60	2.488	3.144	4.852	7.315	11.811
80	2.690	3.376	5.095	7.529	12.052
100	2.836	3.548	5.244	7.674	12.090
150	3.061	3.806	5.470	7.800	11.933
200	3.207	3.971	5.592	7.795	11.665
300	3.363	4.145	5.692	7.717	11.214
∞	3.794	4.605	5.991	7.378	9.210

Оценки мощности критерия BM_{3-4} относительно гипотез H_1, H_2 и H_3 , представлены в таблицах 2.114, 2.115, 2.116, а со статистикой BM_{3-6} – в таблицах 2.117, 2.118, 2.119.

Оба критерия относительно H_1 характеризуются существенной смещённостью, а мощности относительно конкурирующих гипотез достаточно близки. При этом с ростом объемов выборок преимущество в мощности сначала за критерием со статистикой BM_{3-4} , а потом – за критерием со статистикой BM_{3-6} .

Таблица 2.113

Процентные точки статистики $BM_{3,6}$ критерия Бонтемпса–Меддахи

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	2.367	2.826	3.907	5.284	7.338
20	3.238	3.889	5.255	7.092	10.157
30	3.642	4.407	5.982	8.161	12.354
40	3.897	4.733	6.472	8.948	14.222
50	4.088	4.988	6.858	9.544	15.760
60	4.226	5.178	7.177	10.091	17.081
80	4.437	5.458	7.619	10.873	19.069
100	4.607	5.682	7.957	11.466	20.708
150	4.883	6.048	8.526	12.450	23.092
200	5.074	6.288	8.898	13.059	24.070
300	5.319	6.577	9.295	13.626	24.902
∞	6.745	7.779	9.488	11.143	13.277

Таблица 2.114

Мощность $BM_{3,4}$ критерия Бонтемпса–Меддахи относительно H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.095	0.053	0.021	0.009	0.003
20	0.084	0.026	0.007	0.002	0.000
30	0.114	0.024	0.003	0.001	0.000
40	0.167	0.038	0.002	0.000	0.000
50	0.230	0.066	0.001	0.000	0.000
100	0.591	0.361	0.041	0.000	0.000
150	0.832	0.675	0.259	0.015	0.000
200	0.941	0.834	0.560	0.139	0.001
300	0.996	0.988	0.922	0.646	0.083

Таблица 2.115

Мощность BM_{3-4} критерия Бонтемпса–Меддахи относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.334	0.268	0.179	0.118	0.068
20	0.465	0.404	0.302	0.219	0.142
30	0.562	0.505	0.398	0.305	0.210
40	0.639	0.586	0.481	0.383	0.275
50	0.701	0.653	0.554	0.454	0.337
100	0.888	0.860	0.798	0.718	0.601
150	0.960	0.947	0.915	0.867	0.783
200	0.986	0.981	0.966	0.942	0.892
300	0.999	0.998	0.995	0.990	0.976

Таблица 2.116

Мощность BM_{3-4} критерия Бонтемпса–Меддахи относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.222	0.164	0.097	0.057	0.028
20	0.284	0.226	0.148	0.096	0.054
30	0.331	0.274	0.189	0.129	0.077
40	0.370	0.314	0.225	0.159	0.098
50	0.405	0.349	0.258	0.186	0.119
100	0.540	0.486	0.393	0.305	0.212
150	0.641	0.591	0.501	0.409	0.302
200	0.720	0.674	0.590	0.501	0.388
300	0.840	0.805	0.734	0.650	0.530

Таблица 2.117

Мощность BM₃₋₆ критерия Бонтемпса–Меддахи относительно H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.127	0.066	0.024	0.010	0.003
20	0.165	0.082	0.016	0.003	0.001
30	0.223	0.119	0.023	0.002	0.000
40	0.286	0.166	0.038	0.002	0.000
50	0.350	0.216	0.058	0.004	0.000
100	0.641	0.488	0.218	0.033	0.000
150	0.829	0.715	0.434	0.114	0.000
200	0.928	0.860	0.637	0.253	0.001
300	0.990	0.975	0.895	0.609	0.031

Таблица 2.118

Мощность BM₃₋₆ критерия Бонтемпса–Меддахи относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.322	0.266	0.182	0.121	0.069
20	0.463	0.408	0.321	0.241	0.159
30	0.577	0.522	0.431	0.339	0.231
40	0.667	0.615	0.522	0.422	0.289
50	0.739	0.689	0.599	0.494	0.340
100	0.925	0.898	0.837	0.742	0.541
150	0.979	0.968	0.938	0.877.	0.697
200	0.995	0.991	0.978	0.946	0.817
300	1.000	0.999	0.998	0.992	0.946

Таблица 2.119

Мощность BM_{3-6} критерия Бонтемпса–Меддахи относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.212	0.160	0.096	0.056	0.028
20	0.267	0.215	0.147	0.097	0.056
30	0.316	0.261	0.189	0.132	0.080
40	0.360	0.304	0.226	0.162	0.099
50	0.399	0.342	0.260	0.190	0.116
100	0.553	0.491	0.392	0.297	0.183
150	0.661	0.600	0.496	0.383	0.239
200	0.741	0.684	0.580	0.458	0.294
300	0.850	0.806	0.713	0.590	0.396

Рейтинг критерия со статистикой $BM_{3-4} = 19$, с $BM_{3-6} = 4$.

2.34. Критерии Десгань–Мишо (Desgagne–Micheaux Tests)

Первый из критериев, предложенный в [26], предназначен для обнаружения отклонений от нормальности на хвостах распределения.

Статистика критерия определяется выражением

$$R_n = n \mathbf{r}_n(\bar{x}, s)^T \left(\mathbf{J}_0 - \frac{1}{2} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0^T \right)^{-1} \mathbf{r}_n(\bar{x}, s), \quad (2.41)$$

где

$$\mathbf{r}_n(\bar{x}, s) \approx \mathbf{r}_n(\mu, \sigma) - \frac{1}{2}(1 - T_n) \mathbf{v}_0,$$

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2, \quad y_i = (x_i - \mu)/\sigma,$$

$$\mathbf{r}_n(\mu, \sigma) = \begin{bmatrix} 0.18240929 - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \ln|y_i| \\ 0.53482230 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + |y_i|) \\ 0.20981558 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(\ln(e + |y_i|)) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 0.86481850 \\ 0.38512925 \\ 0.15594892 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_0 - \frac{1}{2} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0^T = \begin{bmatrix} 00502754623 & -00336793487 & -00134179540 \\ -00336793487 & 00266463308 & 00105350321 \\ -00134179540 & 00105350321 & 00416669944 \end{bmatrix},$$

$$\left(\mathbf{J}_0 - \frac{1}{2} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0^T \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1259.04213 & -32040.6957 & 85065.7774 \\ -32040.6957 & 918649.901 & -2425883.34 \\ 85065.7774 & -2425883.34 & 6407749.82 \end{bmatrix}.$$

При вычислении статистики R_n вместо неизвестных μ и σ используются их оценки $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ и $s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$.

Критерий правосторонний. Асимптотическим распределением статистики R_n при справедливости H_0 является χ_3^2 -распределение [26]. Однако исследования распределений $G(R_n | H_0)$ методами статистического моделирования показывают их крайне медленную сходимость к χ_3^2 -распределению: совсем пренебречь отклонением $G(R_n | H_0)$ от χ_3^2 -распределения можно лишь при $n > 2000$, а при $n = 500$ различие ощутимо. Именно поэтому в таблице 2.120 приведены полученные процентные точки для распределений $G(R_n | H_0)$ при некоторых объемах выборок.

Оценки мощности критерия со статистикой R_n относительно гипотез H_1, H_2 и H_3 , представлены в таблицах 2.121, 2.122, 2.123.

Таблица 2.120

Процентные точки статистики R_n критерия Десгань–Мишо

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	3.947	4.722	6.060	7.412	9.247
20	4.238	5.076	6.549	8.128	10.498
30	4.415	5.303	6.894	8.644	11.438
40	4.517	5.428	7.812	8.958	12.004
50	4.603	5.534	7.225	9.153	12.360
60	4.667	5.616	7.337	9.287	12.610
80	4.768	5.723	7.485	9.482	12.830
100	4.832	5.800	7.577	9.590	12.967
150	4.934	5.904	7.680	9.674	13.003
200	4.999	5.985	7.755	9.723	12.924
300	5.079	6.051	7.791	9.690	12.664
∞	5.317	6.251	7.815	9.348	11.345

Таблица 2.121

Мощность R_n критерия Десгань–Мишо относительно H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.179	0.121	0.059	0.028	0.010
20	0.217	0.149	0.075	0.035	0.011
30	0.263	0.186	0.096	0.045	0.013
40	0.316	0.230	0.124	0.059	0.016
50	0.370	0.275	0.155	0.076	0.021
100	0.627	0.520	0.350	0.210	0.079
150	0.816	0.730	0.566	0.399	0.195
200	0.922	0.867	0.743	0.589	0.358
300	0.990	0.978	0.938	0.863	0.697

Таблица 2.122

Мощность R_n критерия Десгань–Мишо относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.235	0.177	0.109	0.067	0.034
20	0.409	0.344	0.258	0.194	0.132
30	0.541	0.476	0.380	0.302	0.217
40	0.645	0.583	0.485	0.398	0.296
50	0.727	0.670	0.576	0.485	0.370
100	0.930	0.905	0.853	0.790	0.684
150	0.984	0.976	0.957	0.929	0.870
200	0.997	0.994	0.989	0.979	0.954
300	1.000	1.000	0.999	0.999	0.996

Таблица 2.123

Мощность R_n критерия Десгань–Мишо относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.169	0.117	0.063	0.033	0.014
20	0.222	0.167	0.106	0.069	0.041
30	0.269	0.212	0.145	0.102	0.066
40	0.310	0.251	0.179	0.130	0.087
50	0.346	0.287	0.210	0.157	0.107
100	0.493	0.430	0.340	0.270	0.195
150	0.605	0.543	0.451	0.372	0.280
200	0.691	0.634	0.544	0.463	0.362
300	0.816	0.772	0.695	0.619	0.516

Второй и третий критерии предложены в [27] и ориентированы на обнаружение отклонений, связанных с асимметрией и эксцессом.

Статистика **второго** критерия задаётся соотношением

$$X_{APD} = \frac{nB_2^2}{(3 - 8/\pi)(1 - 1.9/n)} + \\ + \frac{n \left[\left(K_2 - B_2^2 \right)^{1/3} - \left((2 - \ln 2 - \gamma)/2 \right)^{1/3} (1 - 1.026/n) \right]^2}{72^{-1} \left((2 - \ln 2 - \gamma)/2 \right)^{-4/3} (3\pi^2 - 28) \left(1 - 2.25/n^{0.8} \right)}, \quad (2.42)$$

где $B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2 \operatorname{sign}(Z_i), \quad K_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2 \ln(Z_i),$

$$Z_i = (x_i - \bar{x}) / s, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

$\gamma = 0.577215665\dots$ – константа Эйлера.

Критерий правосторонний. Асимптотическим распределением статистики X_{APD} при справедливости гипотезы H_0 является χ_2^2 -распределение. При $n \geq 10$ отклонением $G(X_{APD} | H_0)$ от χ_2^2 -распределения можно пренебречь.

Оценки мощности критерия со статистикой X_{APD} относительно гипотез H_1, H_2 и H_3 приведены в таблицах 2.124, 2.125, 2.126.

Таблица 2.124

Мощность X_{APD} критерия Десгань–Мишио относительно H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.147	0.100	0.052	0.029	0.014
20	0.187	0.129	0.067	0.035	0.015
30	0.251	0.179	0.099	0.053	0.022
40	0.323	0.240	0.140	0.078	0.034
50	0.394	0.304	0.187	0.110	0.051
100	0.700	0.608	0.460	0.332	0.200
150	0.873	0.815	0.697	0.572	0.415
200	0.952	0.922	0.852	0.760	0.620
300	0.995	0.989	0.973	0.945	0.885

Таблица 2.125

Мощность X_{APD} критерия Десгань–Мишио относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.324	0.252	0.161	0.100	0.051
20	0.484	0.412	0.310	0.232	0.157
30	0.600	0.530	0.327	0.341	0.250
40	0.690	0.627	0.527	0.439	0.339
50	0.760	0.705	0.613	0.525	0.422
100	0.939	0.916	0.870	0.818	0.741
150	0.986	0.979	0.962	0.939	0.902
200	0.997	0.995	0.990	0.982	0.967
300	1.000	1.000	0.999	0.999	0.997

Таблица 2.126

Мощность X_{APD} критерия Десгань–Мишио относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.206	0.147	0.081	0.044	0.019
20	0.267	0.204	0.131	0.085	0.048
30	0.312	0.248	0.169	0.116	0.072
40	0.351	0.285	0.202	0.144	0.093
50	0.385	0.318	0.232	0.170	0.113
100	0.527	0.457	0.361	0.285	0.208
150	0.635	0.570	0.471	0.387	0.298
200	0.720	0.661	0.568	0.482	0.385
300	0.839	0.795	0.718	0.641	0.545

Статистика третьего критерия [27] задаётся соотношением

$$X_{EPD} = \frac{n^{1/2} \left[\frac{(2K_2)^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} + \frac{(2 - \ln 2 - \gamma)^{-0.06} - 1}{0.06} + \frac{1.32}{n^{0.95}} \right]}{\left[(2 - \ln 2 - \gamma)^{-2.12} (3\pi^2 - 28) / 2 - 3.78 / n^{0.733} \right]^{1/2}}, \quad (2.43)$$

где $K_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2 \ln(Z_i)$, $Z_i = (x_i - \bar{x}) / s$, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$,

γ – константа Эйлера.

Критерий со статистикой X_{EPD} является **двусторонним**. Асимптотическим распределением для $G(X_{EPD}|H_0)$ является стандартный нормальный закон. Уже при $n=10$ отклонением $G(X_{EPD}|H_0)$ от $N(0,1)$ можно пренебречь.

Оценки мощности критерия со статистикой X_{EPD} относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 приведены в таблицах 2.127, 2.128, 2.129.

Все три критерия Десгань–Миши обладают достаточно высокой мощностью, отсутствует смещение относительно конкурирующей гипотезы H_1 при любых объёмах выборок.

Таблица 2.127

Мощность X_{EPD} критерия Десгань–Миши относительно H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.177	0.123	0.066	0.035	0.015
20	0.264	0.194	0.114	0.066	0.031
30	0.361	0.281	0.178	0.110	0.057
40	0.456	0.368	0.247	0.162	0.089
50	0.540	0.451	0.319	0.219	0.128
100	0.827	0.762	0.640	0.518	0.374
150	0.943	0.911	0.838	0.750	0.619
200	0.983	0.970	0.937	0.887	0.795
300	0.999	0.997	0.992	0.982	0.956

Таблица 2.128

Мощность X_{EPD} критерия Десгань–Миши относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.276	0.213	0.137	0.088	0.049
20	0.443	0.371	0.273	0.200	0.130
30	0.577	0.505	0.399	0.311	0.219
40	0.682	0.616	0.511	0.416	0.031
50	0.762	0.705	0.606	0.512	0.401
100	0.949	0.928	0.883	0.829	0.748
150	0.990	0.985	0.970	0.949	0.912
200	0.998	0.997	0.993	0.987	0.974
300	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998

Таблица 2.129

Мощность X_{EPD} критерия Десгань–Миши относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.188	0.133	0.074	0.041	0.019
20	0.240	0.180	0.113	0.071	0.039
30	0.285	0.223	0.147	0.099	0.058
40	0.328	0.263	0.181	0.125	0.078
50	0.366	0.299	0.214	0.153	0.098
100	0.531	0.461	0.359	0.279	0.198
150	0.654	0.589	0.486	0.396	0.299
200	0.746	0.689	0.593	0.502	0.398
300	0.867	0.827	0.753	0.675	0.573

Рейтинг критерия со статистикой $R_n = 29$, с $X_{APD} = 1$, с $X_{EPD} = 3$.

2.35. Критерии Оя (Oja Tests)

В [70] для использования в критериях нормальности автором были предложены две статистики, имеющие следующий вид

$$T_1 = \frac{1}{C_n^3} \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \frac{x_{(k)} - x_{(j)}}{x_{(k)} - x_{(i)}},$$

$$T_2 = \frac{1}{C_n^4} \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} \frac{x_{(k)} - x_{(j)}}{x_{(l)} - x_{(i)}},$$

и которые должны быть эффективны относительно альтернатив с асимметрией и эксцессом, отличающимися от нормального закона.

Так как при справедливости H_0 $E[T_1] = 0.5$, $E[T_2] = 0.298746$, а оценки дисперсий в [70] представлены следующей таблицей 2.130, то нормализованные статистики принимают следующую форму

$$\tilde{T}_1 = \frac{T_1 - 0.5}{\sqrt{D[T_1]}},$$

$$\tilde{T}_2 = \frac{T_2 - 0.298746}{\sqrt{D[T_1]}},$$

и должны хорошо описываться стандартным нормальным законом, а статистика T_{12}

$$\tilde{T}_{12} = (\tilde{T}_1)^2 + (\tilde{T}_2)^2 \quad (2.44)$$

должна описываться χ_2^2 -распределением.

В качестве критерия нормальности можно рассматривать критерий со статистикой \tilde{T}_{12} .

Примечание 1. Если при вычислении T_1 обнаруживается ситуация $x_{(k)} = x_{(i)}$, или при вычислении T_2 – ситуация $x_{(l)} = x_{(i)}$, то статистика \tilde{T}_{12} не вычисляется, $p_{value} = 0$ и проверяемая гипотеза H_0 отклоняется.

Таблица 2.130

Оценки дисперсий $D[T_1]$ и $D[T_2]$ при нормальности

n	$D[T_1]$	$D[T_2]$	n	$D[T_1]$	$D[T_2]$
5	0.01512	0.01549	10	0.00358	0.00196
6	0.01045	0.00800	15	0.00218	0.00098
7	0.00740	0.00473	20	0.00144	0.00058
8	0.00575	0.00350	30	0.00089	0.00032
9	0.00457	0.00248	∞	$0.0214/n$	$0.0026/n$

При объёмах выборок $n \leq 30$ и соответствующих значениях дисперсий $D[T_1]$ и $D[T_2]$, взятых из таблицы 2.130, распределения статистик \tilde{T}_1 и \tilde{T}_2 хорошо согласуются со стандартным нормальным законом, а распределение статистики \tilde{T}_{12} – с χ^2_2 -распределением.

Но при $n > 30$ приближения для дисперсий $D[T_1]$ и $D[T_2]$, приведенные в таблице 2.130, дают значения, заниженные по сравнению с истинными значениями дисперсий, а распределения статистик \tilde{T}_1 и \tilde{T}_2 уже описываются нормальными законами со значениями $\sigma > 1$. И распределение статистики \tilde{T}_{12} уже не согласуется с χ^2_2 -распределением. На рис. 2.50 показана зависимость распределения $G(\tilde{T}_{12}|H_0)$ статистики \tilde{T}_{12} от n и характер сходимости этого распределения к χ^2_2 -распределению. Очевидно, что при условии построения более точных регрессионных зависимостей $D[T_1]$ и $D[T_2]$ от n (чем в таблице 2.130) можно было бы для вычисления P_{value} всегда использовать асимптотическое χ^2_2 -распределение. В данном же случае это возможно лишь при $n \leq 30$.

Чтобы реализовать возможность принятия решения о результатах проверки гипотезы о нормальности, в таблице 2.131 приведены полученные в результате статистического моделирования критические значения статистики \tilde{T}_{12} для некоторых n .

Оценки мощности критерия со статистикой \tilde{T}_{12} относительно H_1 , H_2 и H_3 , представлены в таблицах 2.132, 2.133 и 2.134.

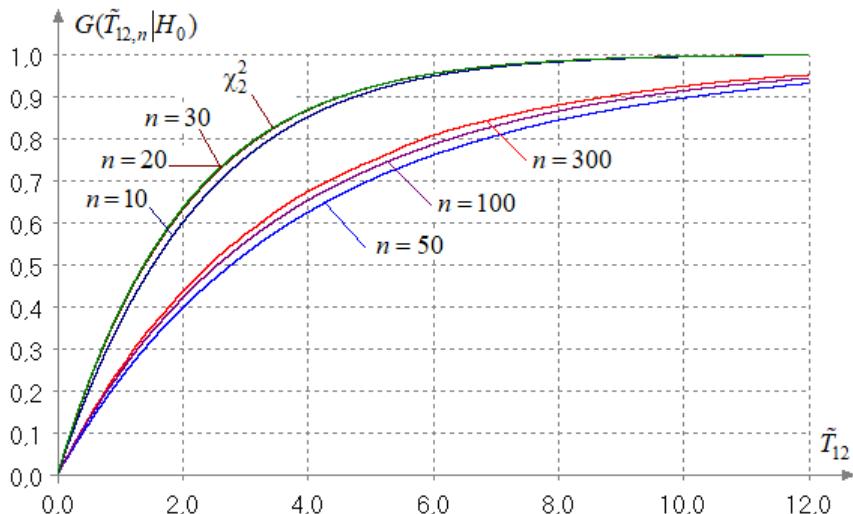


Рис. 2.50. Сходимость $G(\tilde{T}_{12} | H_0)$ к χ^2_2 -распределению с ростом n

Таблица 2.131

Процентные точки статистики \tilde{T}_{12} критерия Оя

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	3.993	4.782	6.097	7.412	9.202
20	3.767	4.552	5.866	7.176	8.697
30	3.749	4.543	5.875	7.200	8.953
40	8.619	10.706	14.409	18.302	23.593
50	8.235	10.224	13.736	17.419	22.419
60	7.990	9.928	13.284	16.815	21.782
80	7.718	9.558	12.913	16.356	21.089
100	7.560	9.376	12.668	15.945	20.432
150	7.361	9.132	12.268	15.566	19.906
200	7.233	8.933	11.904	14.998	19.661
300	7.088	8.839	11.986	14.981	19.485

Таблица 2.132

Мощность \tilde{T}_{12} критерия Оя относительно H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.158	0.102	0.047	0.020	0.006
20	0.221	0.152	0.078	0.037	0.013
30	0.293	0.213	0.120	0.065	0.027
40	0.420	0.335	0.219	0.137	0.069
50	0.493	0.406	0.282	0.188	0.102
100	0.756	0.685	0.561	0.446	0.313
150	0.890	0.848	0.761	0.662	0.530
200	0.956	0.935	0.882	0.817	0.702
300	0.993	0.987	0.971	0.948	0.899

Таблица 2.133

Мощность \tilde{T}_{12} критерия Оя относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.281	0.216	0.138	0.087	0.046
20	0.415	0.341	0.241	0.170	0.105
30	0.532	0.455	0.347	0.260	0.175
40	0.669	0.603	0.498	0.402	0.296
50	0.751	0.694	0.594	0.499	0.387
100	0.942	0.920	0.873	0.818	0.737
150	0.988	0.981	0.966	0.943	0.906
200	0.998	0.997	0.993	0.986	0.970
300	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998

Таблица 2.134

Мощность \tilde{T}_{12} критерия Оя относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.187	0.132	0.073	0.040	0.018
20	0.215	0.155	0.090	0.052	0.025
30	0.238	0.175	0.105	0.063	0.032
40	0.268	0.204	0.129	0.081	0.043
50	0.294	0.228	0.147	0.095	0.053
100	0.410	0.337	0.237	0.167	0.103
150	0.506	0.431	0.322	0.237	0.156
200	0.595	0.523	0.416	0.322	0.213
300	0.727	0.662	0.547	0.455	0.335

В продолжение работы [70] в [71] автором были рассмотрены ещё две статистики:

$$T_3 = \frac{1}{C_n^3} \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \ln \left(\frac{x_{(k)} - x_{(j)}}{x_{(j)} - x_{(i)}} \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} \ln(x_{(j)} - x_{(i)}),$$

где $a_{ij} = (i + j - n - 1)n!/[3!(n - 3)!]$, и

$$T_4 = \frac{1}{C_n^4} \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} \ln \left\{ \frac{(x_{(k)} - x_{(j)})^2}{(x_{(l)} - x_{(k)})(x_{(j)} - x_{(i)})} \right\} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} \ln(x_{(j)} - x_{(i)}),$$

$$\text{где } b_{ij} = \frac{1}{C_n^4} \left\{ 2(n - j)(i - 1) - C_{n-j}^2 - C_{i-1}^2 \right\}.$$

При справедливости H_0 математические ожидания статистик равны

$$E[T_3] = 0, \quad E[T_4] \approx -0.4523,$$

а дисперсии определяются приближенными выражениями

$$D[T_3] = \frac{1}{C_n^3} \left\{ 0.07478 C_3^1 C_{n-3}^2 + 0.03963 C_3^2 C_{n-3}^1 + 2.8979 \right\},$$

$$D[T_4] = \frac{1}{C_n^4} \left\{ 0.1311 C_4^1 C_{n-4}^3 + 0.0145 C_4^2 C_{n-4}^2 + 1.3355 C_4^3 C_{n-4}^1 + 8.8552 \right\}.$$

В [71] показано, что нормализованные статистики

$$\tilde{T}_3 = \frac{T_3}{\sqrt{D[T_3]}},$$

$$\tilde{T}_4 = \frac{T_4 + 0.4523}{\sqrt{D[T_4]}}$$

должны описываться стандартным нормальным законом. В качестве статистики критерия нормальности можно использовать статистику вида

$$\tilde{T}_{34} = (\tilde{T}_3)^2 + (\tilde{T}_4)^2, \quad (2.45)$$

подчиняющуюся в асимптотике χ_2^2 -распределению.

Примечание 1. Если при вычислении T_3 или T_4 обнаруживается ситуация $x_{(j)} = x_{(i)}$, то статистика \tilde{T}_{34} не вычисляется, $p_{value} = 0$ и проверяемая гипотеза H_0 отклоняется.

Исследование распределений статистик \tilde{T}_3 и \tilde{T}_4 методами статистического моделирования показало, что выражение для $D[T_3]$ даёт заниженные по сравнению с истинными значения дисперсий статистики T_3 , а выражение для $D[T_4]$ – завышенные значения дисперсий статистики T_4 . Вследствие приближенности оценок дисперсий распределения нормализованных статистик \tilde{T}_3 и \tilde{T}_4 отклоняются от стандартного нормального закона, а распределение статистики \tilde{T}_{34} – от χ_2^2 -распределения.

На рис. 2.51 показана зависимость распределения $G(\tilde{T}_{34} | H_0)$

статистики \tilde{T}_{34} от n , откуда видно, что сходимость к χ_2^2 -распределению отсутствует. По-видимому, можно построить более точные, чем приведенные автором, регрессионные зависимости для $D[T_3]$ и $D[T_4]$ как функции от n . И тогда можно будет для вычисления P_{value} использовать асимптотическое χ_2^2 -распределение. Но в данном случае это исключается. В этой связи в таблице 2.135 приведены полученные в результате статистического моделирования критические значения статистики \tilde{T}_{34} для некоторых n .

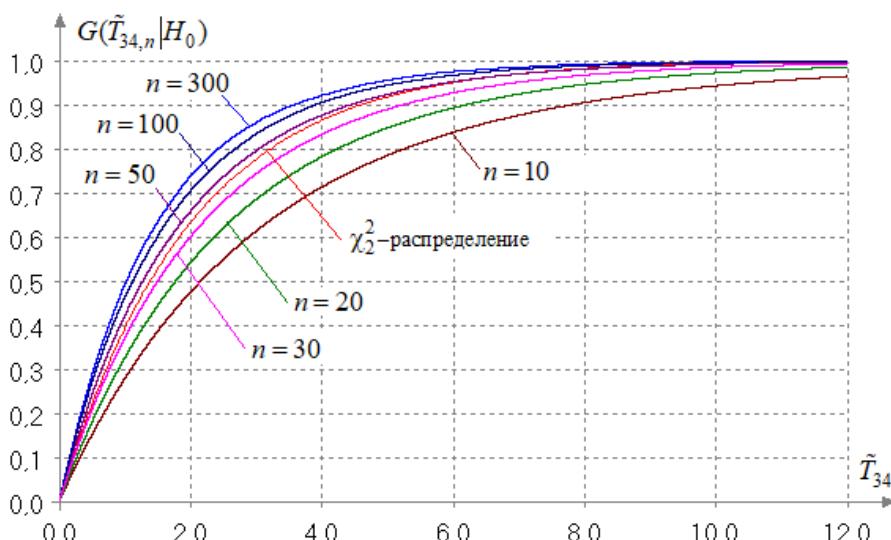


Рис. 2.51. Зависимость $G(\tilde{T}_{34} | H_0)$ от n и χ_2^2 -распределение

Полученные оценки мощности критерия со статистикой \tilde{T}_{34} относительно H_1, H_2 и H_3 представлены в таблицах 2.136, 2.137 и 2.138.

Сравнивая мощности критериев со статистиками \tilde{T}_{12} и \tilde{T}_{34} , видим, что ощутимое преимущество всегда за критерием со статистикой \tilde{T}_{12} . Исключение составляет лишь случай при $n=10$, связанный с мощностью относительно конкурирующей гипотезы H_1 .

Таблица 2.135

Процентные точки статистики \tilde{T}_{34} критерия Оя

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	6.300	7.817	10.575	13.543	17.750
20	5.047	6.204	8.250	10.387	13.355
30	4.260	5.242	6.960	8.746	11.216
40	3.856	4.737	6.301	7.908	10.156
50	3.618	4.442	5.911	7.417	9.525
60	3.465	4.277	5.674	7.128	9.141
80	3.263	4.033	5.413	6.761	8.733
100	3.182	3.911	5.223	6.570	8.411
150	3.064	3.749	5.018	6.329	8.068
200	3.008	3.697	4.940	6.248	7.963
300	2.880	3.585	4.801	6.004	7.733

Таблица 2.136

Мощность \tilde{T}_{34} критерия Оя относительно H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.162	0.110	0.056	0.028	0.012
20	0.208	0.145	0.077	0.040	0.017
30	0.257	0.182	0.099	0.052	0.022
40	0.305	0.222	0.123	0.067	0.028
50	0.354	0.262	0.149	0.082	0.035
100	0.570	0.463	0.304	0.187	0.091
150	0.738	0.643	0.474	0.323	0.179
200	0.851	0.776	0.625	0.466	0.296
300	0.959	0.927	0.844	0.733	0.558

Таблица 2.137

Мощность \tilde{T}_{34} критерия Оя относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.249	0.179	0.099	0.053	0.023
20	0.360	0.278	0.174	0.105	0.052
30	0.454	0.365	0.243	0.156	0.082
40	0.537	0.444	0.309	0.207	0.115
50	0.609	0.518	0.376	0.264	0.152
100	0.850	0.789	0.666	0.537	0.379
150	0.948	0.919	0.846	0.751	0.609
200	0.985	0.971	0.936	0.881	0.784
300	0.999	0.998	0.993	0.983	0.953

Таблица 2.138

Мощность \tilde{T}_{34} критерия Оя относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.176	0.120	0.061	0.031	0.013
20	0.197	0.137	0.073	0.039	0.016
30	0.214	0.150	0.082	0.044	0.019
40	0.227	0.162	0.088	0.048	0.021
50	0.241	0.172	0.095	0.052	0.022
100	0.301	0.221	0.126	0.069	0.031
150	0.354	0.269	0.159	0.090	0.042
200	0.413	0.317	0.190	0.112	0.054
300	0.522	0.416	0.270	0.171	0.084

Рейтинг критерия со статистикой $\tilde{T}_{12} = 22$, с $\tilde{T}_{34} = 40.5$.

2.36. Модификация критерии Оя

Критерий Оя со статистикой (2.44) показал заметное преимущество в мощности перед критерием со статистикой (2.45), а недостатками обоих критериев оказалась невозможность использования в качестве распределений статистик $G(\tilde{T}_{12}|H_0)$ и $G(\tilde{T}_{34}|H_0)$ асимптотического χ^2 -распределения. В случае статистики \tilde{T}_{12} причина этого заключается в больших погрешностях оценок дисперсий $D[T_1]$ и $D[T_2]$, вычисляемых в соответствии с соотношениями $0.0214/n$ и $0.0026/n$.

Для устранения этого недостатка на основании результатов статистического моделирования распределений $G(T_1|H_0)$ и $G(T_2|H_0)$ статистик T_1 и T_2 для ряда объёмов выборок n были вычислены оценки $D[T_1]$ и $D[T_2]$. Далее для ряда оценок $D[T_1]$ и ряда оценок $D[T_2]$ были построены регрессионные зависимости как функции от n , позволяющие более точно, по сравнению с приводимыми в [70], оценивать $D[T_1]$ и $D[T_2]$.

Для статистики T_1 зависимость $D[T_1]$ от n при $n \geq 10$ имеет вид

$$D[T_1] \approx \begin{cases} 0.108785n^{-1.44648}, & n \leq 20, \\ 0.037578n^{-1.10380}, & n > 20, \end{cases}$$

а для статистики T_2 –

$$D[T_2] \approx \begin{cases} 0.1224n^{-1.797535}, & n \leq 20, \\ 0.019202n^{-1.1941}, & n > 20. \end{cases}$$

Все остальные соотношения при вычислении статистики \tilde{T}_{12} те же, что и в (2.44).

В данном случае распределения $G(\tilde{T}_{12}|H_0)$ статистики полученной модификации достаточно хорошо согласуются с χ^2 -распределением, а оценки мощности те же, что для критерия со статистикой \tilde{T}_{12} Оя.

2.37. Критерий Чена (Chen Test)

В работах [17, 18] предложен критерий, статистика которого при проверке нормальности имеет следующий вид

$$G_C = \frac{(n+1) \sum_{i=1}^n \left\{ \Phi\left(\frac{x_{(i)} - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_{(i-1)} - \bar{x}}{s}\right) - \frac{1}{n+1} \right\}^2}{n}, \quad (2.46)$$

где $x_{(i)}$ – порядковые статистики, $x_{(0)} = -\infty$, $x_{(n+1)} = \infty$, $\Phi(\cdot)$ – функция распределения стандартного нормального закона, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$,

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Критерий правосторонний: проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистик. Зависимость распределений $G(G_C | H_0)$ от объёмов выборок n показана на рис. 2.52.

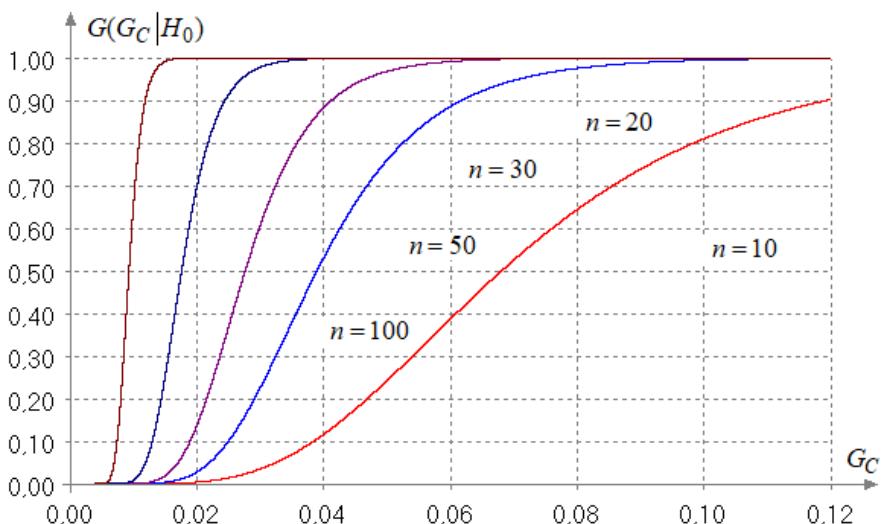


Рис. 2.52. Зависимость распределений $G(G_C | H_0)$ статистики Чена от n

В таблице 2.139 приведены полученные процентные точки для распределений $G(G_C | H_0)$ статистики при некоторых объемах выборок.

Таблица 2.139

Процентные точки статистики G_C критерия Чена

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.1072	0.1194	0.1398	0.1602	0.1865
20	0.0564	0.0618	0.0708	0.0800	0.0923
30	0.0381	0.0413	0.0466	0.0520	0.0592
40	0.0287	0.0308	0.0344	0.0379	0.0427
50	0.0229	0.0245	0.0271	0.0296	0.0331
60	0.0191	0.0203	0.0223	0.0242	0.0269
80	0.0142	0.0150	0.0163	0.0176	0.0193
100	0.0113	0.0119	0.0128	0.0137	0.0149
150	0.00746	0.00777	0.00827	0.00874	0.00936
200	0.00554	0.00575	0.00607	0.00637	0.00676
300	0.00365	0.00376	0.00393	0.00409	0.00429

Оценки мощности критерия со статистикой G_C относительно H_1 , H_2 и H_3 представлены в таблицах 2.140, 2.141 и 2.142.

У критерия отсутствует такой яркий недостаток, как смещённость относительно конкурирующей гипотезы H_1 .

И в то же время следует отметить, что критерий обладает весьма невысокой мощностью относительно всех рассмотренных конкурирующих гипотез, мощность которого очень медленно возрастает с ростом объемов выборок.

В составленном рейтинге критериев он занимает предпоследнее место.

Таблица 2.140

Мощность G_C критерия Чена относительно H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.177	0.123	0.067	0.036	0.016
20	0.184	0.129	0.071	0.039	0.018
30	0.188	0.132	0.073	0.040	0.019
40	0.192	0.136	0.075	0.042	0.020
50	0.197	0.139	0.077	0.043	0.020
100	0.229	0.164	0.092	0.051	0.024
150	0.266	0.194	0.112	0.064	0.030
200	0.307	0.228	0.135	0.079	0.038
300	0.391	0.303	0.191	0.118	0.061

Таблица 2.141

Мощность G_C критерия Чена относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.217	0.155	0.086	0.047	0.021
20	0.272	0.201	0.120	0.071	0.035
30	0.313	0.236	0.146	0.089	0.046
40	0.345	0.266	0.168	0.105	0.056
50	0.374	0.292	0.188	0.120	0.065
100	0.481	0.392	0.271	0.183	0.107
150	0.559	0.468	0.338	0.239	0.146
200	0.622	0.532	0.397	0.288	0.183
300	0.717	0.636	0.501	0.383	0.260

Таблица 2.142

Мощность G_C критерия Чена относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.160	0.107	0.054	0.027	0.011
20	0.169	0.114	0.059	0.030	0.012
30	0.177	0.121	0.062	0.032	0.013
40	0.183	0.126	0.066	0.034	0.014
50	0.190	0.130	0.069	0.036	0.015
100	0.210	0.147	0.080	0.043	0.019
150	0.224	0.159	0.087	0.048	0.021
200	0.235	0.167	0.093	0.051	0.024
300	0.253	0.183	0.103	0.058	0.027

Рейтинг критерия – 49.

2.38. Критерий Брис–Хьюберт–Стройфа (Brys–Hubert–Struyf Test)

Этот критерий [14] опирается на робастные меры асимметрии и “тяжести хвостов”. Следуя [15], приведём необходимые сведения, используемые при вычислении статистики предложенного критерия нормальности.

Пусть $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ – вариационный ряд, полученный по выборке, и \tilde{m}_n – оценка медианы

$$\tilde{m}_n = \begin{cases} (x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}) / 2, & \text{при } n \text{ четном,} \\ x_{(n+1)/2}, & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Далее рассматриваются множества:

$$X^+ = \left\{ x_{(i)} \mid x_{(i)} \geq \tilde{m}_n \right\},$$

$$X^- = \left\{ x_{(i)} \mid x_{(i)} \leq \tilde{m}_n \right\},$$

с количеством элементов p и q , соответственно, и для $x_{(i)}^+ \in X^+$ и $x_{(j)}^- \in X^-$ вводится ядерная функция вида

$$h(x_{(i)}^+, x_{(j)}^-) = \begin{cases} \frac{(x_{(i)}^+ - \tilde{m}_n) - (\tilde{m}_n - x_{(j)}^-)}{x_{(i)}^+ - x_{(j)}^-}, & \text{при } x_{(i)}^+ > x_{(j)}^-, \\ \text{sign}(p-1-i-j), & \text{при } x_{(i)}^+ = \tilde{m}_n = x_{(j)}^-. \end{cases}$$

Для множества всех pq вычисленных значений ядерной функции

$$\left\{ h(x_{(i)}^+, x_{(j)}^-) \mid x_{(i)}^+ \in X^+, x_{(j)}^- \in X^- \right\}$$

находится медиана, обозначим её как MC . Вышеописанные вычисления можно рассматривать как процедуру вычисления MC по всем наблюдениям, то есть $MC = MC(x \in X)$, где $X = X^+ \cup X^-$.

Можно рассмотреть соответствующие меры для левого $LMC = -MC(x < \tilde{m}_n)$ и правого $RMC = MC(x > \tilde{m}_n)$ хвостов распределения, вычисляемые по тому же алгоритму, что и $MC(x \in X)$.

Статистика критерия нормальности имеет вид [14]:

$$T_{MC-LR} = n(\mathbf{w} - \boldsymbol{\omega})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{w} - \boldsymbol{\omega}), \quad (2.47)$$

где $\mathbf{w} = [MC \ LMC \ RMC]^T$, $\boldsymbol{\omega} = [0 \ 0.199 \ 0.199]^T$,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.323 & -0.323 \\ 0.323 & 2.62 & -0.0123 \\ -0.323 & -0.0123 & 2.62 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.85416669 & -0.1048117 & 0.1048117 \\ -0.1048117 & 0.39454887 & -0.01106917 \\ 0.1048117 & -0.01106917 & 0.39454887 \end{bmatrix}.$$

Критерий правосторонний: проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики. Асимптотическим распределением статистики T_{MC-LR} является χ_3^2 -распределение. Однако при относительно малых объемах выборок n распределения статистики

$G(T_{MC-LR}|H_0)$ существенно отличаются от χ^2_3 -распределения. Лишь при объёмах выборок порядка 300 распределения $G(T_{MC-LR}|H_0)$ практически не отличаются χ^2_3 -распределения (см. рис. 2.53).

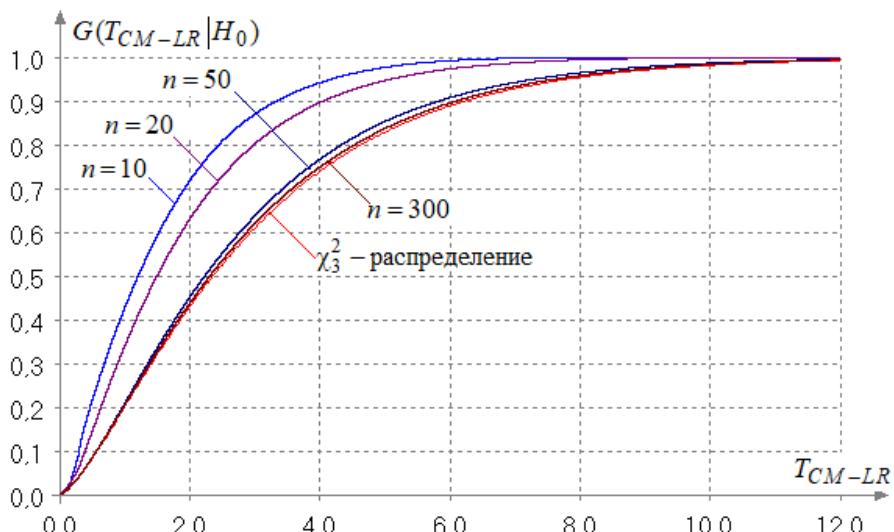


Рис. 2.53. Сходимость распределений $G(T_{CM-LR}|H_0)$ к χ^2_3 -распределению в зависимости от n

Процентные точки распределений $G(T_{MC-LR}|H_0)$ статистики при некоторых объемах выборок приведены таблице 2.143.

Оценки мощности критерия относительно H_1 , H_2 и H_3 представлены в таблицах 2.144, 2.145 и 2.146. У критерия отсутствует смещённость относительно конкурирующей гипотезы H_1 . Однако мощность критерия относительно гипотез H_1 и H_2 , по сравнению со многими другими критериями, оказывается достаточно невысокой, а гипотезу H_3 (логистический закон) критерий практически не отличает от H_0 . По существу, критерий демонстрирует наиболее низкие результаты по сравнению со всеми другими критериями нормальности.

Рейтинг критерия – 50.

Таблица 2.143

Процентные точки статистики критерия Брис–Хьюберт–Стройфа

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	2.824	3.342	4.185	4.941	5.830
20	3.439	4.062	5.103	6.120	7.394
30	4.700	5.515	6.897	8.254	9.987
40	4.333	5.094	6.385	7.659	9.319
50	4.961	5.837	7.315	8.759	10.651
60	4.643	5.457	6.837	8.194	9.987
80	4.817	5.661	7.075	8.492	10.352
100	4.907	5.759	7.198	8.630	10.503
150	5.219	6.128	7.675	9.179	11.161
200	5.108	6.004	7.519	9.006	10.984
300	5.196	6.104	7.635	9.147	11.129
∞	5.317	6.251	7.815	9.348	11.345

Таблица 2.144

Мощность критерия Брис–Хьюберт–Стройфа относительно H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.185	0.128	0.067	0.035	0.014
20	0.200	0.140	0.076	0.040	0.017
30	0.204	0.145	0.080	0.043	0.018
40	0.220	0.158	0.088	0.049	0.022
50	0.225	0.162	0.092	0.052	0.024
100	0.279	0.210	0.127	0.076	0.038
150	0.321	0.248	0.156	0.098	0.051
200	0.375	0.296	0.194	0.125	0.068
300	0.463	0.379	0.265	0.181	0.106

Таблица 2.145

Мощность критерия Брис–Хьюберт–Стройфа относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.154	0.102	0.050	0.025	0.010
20	0.172	0.113	0.056	0.027	0.011
30	0.181	0.119	0.056	0.026	0.010
40	0.205	0.138	0.068	0.033	0.012
50	0.219	0.147	0.071	0.034	0.013
100	0.310	0.229	0.131	0.071	0.030
150	0.384	0.297	0.184	0.110	0.052
200	0.466	0.375	0.251	0.161	0.084
300	0.593	0.506	0.373	0.265	0.161

Таблица 2.146

Мощность критерия Брис–Хьюберт–Стройфа относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.146	0.096	0.047	0.024	0.009
20	0.148	0.098	0.048	0.024	0.009
30	0.149	0.097	0.047	0.023	0.009
40	0.151	0.100	0.048	0.024	0.009
50	0.153	0.100	0.048	0.023	0.009
100	0.162	0.108	0.053	0.026	0.010
150	0.171	0.115	0.057	0.028	0.011
200	0.181	0.123	0.062	0.031	0.012
300	0.199	0.138	0.072	0.037	0.015

В целом, низкую мощность критерия относительно всех рассматриваемых конкурирующих гипотез можно объяснить использованием в статистике критерия “робастных” мер для оценки асимметрии и тяжести хвостов: вместе с устойчивостью мы получили и нечувствительность к различным отклонениям от H_0 .

3. Непараметрические критерии согласия при проверке нормальности

3.1. Критерий Колмогорова

При проверке гипотезы H_0 о принадлежности выборки нормальному закону критерий Колмогорова [49] опирается на статистику

$$D_n = \sup_{|x|<\infty} |F_n(x) - F(x, \hat{\theta})|,$$

где $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения; $F(x, \hat{\theta})$ – функция распределения нормального закона; $\hat{\theta}$ – оценка вектора параметров закона $\theta^T = (\mu, \sigma)$, найденная по этой же выборке; n – объем выборки.

При проверке гипотез с применением критерия Колмогорова рекомендуется использовать статистику с поправкой Больщева [99, 101] в форме [100]

$$S_K = \sqrt{n}D_n + \frac{1}{6\sqrt{n}} = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}}, \quad (3.1)$$

где $D_n = \max(D_n^+, D_n^-)$, $D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_{(i)}, \hat{\theta}) \right\}$,

$D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ F(x_{(i)}, \hat{\theta}) - \frac{i-1}{n} \right\}$, $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ – здесь и далее, элементы вариационного ряда, построенного по исходной выборке X_1, X_2, \dots, X_n .

Зависимостью распределения статистики (3.1) от объема выборки можно практически пренебречь при $n > 25$ и использовать в качестве распределения статистики, например, при вычислении достигнутого уровня значимости p_{value} её предельное распределение. Следует отметить, что в зарубежных публикациях упоминаний о применении поправки Больщева практически не встречается, и в критерии Колмогорова, как правило, используют статистику вида $\sqrt{n}D_n$,

вследствие чего вынуждены учитывать зависимость распределения данной статистики от объема выборки.

Проверяемую гипотезу H_0 отклоняют при больших значениях статистики. Если же для вычисленного по выборке значения статистики S_K^* выполняется неравенство

$$p_{value} = P\{S > S_K^*\} > \alpha,$$

то нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

Распределение статистики (3.1) при справедливости H_0 зависит от того, какой из параметров нормального закона оценивался ($\hat{\mu}$ или $\hat{\sigma}$) или ($\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$), и существенно зависит от того, каким методом находились эти оценки [55, 52, 125, 149]. В любом случае эти распределения отличаются от распределения Колмогорова с функцией распределения

$$K(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 s^2},$$

которому подчиняется статистика (3.1) при проверке простой гипотезы (в случае известных параметров μ и σ) [49]. Сказанное выше справедливо для всех рассматриваемых ниже непараметрических критериев согласия.

Процентные точки и модели предельного распределения статистики (3.1) при справедливости H_0 и использовании для вычисления оценок $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ параметров нормального закона методом максимального правдоподобия представлены в таблицах 3.1 и 3.2 соответственно [55, 52, 125, 149]. Напомним, что для параметров нормального закона оценки максимального правдоподобия (ОМП) совпадают с оценками по методу моментов.

В таблице 3.2 (и в последующих) через $B_{III}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ обозначено бета-распределение III рода с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 B(\theta_0, \theta_1)} \frac{\left(\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0-1} \left(1 - \frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1-1}}{\left[1 + (\theta_2-1)\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0+\theta_1}}, \quad (3.2)$$

через $\gamma(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ – гамма-распределение с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1^{\theta_0} \Gamma(\theta_0)} (x - \theta_2)^{\theta_0 - 1} e^{-(x - \theta_2)/\theta_1}. \quad (3.3)$$

Таблица 3.1

**Процентные точки распределения статистики
Колмогорова при использовании метода
максимального правдоподобия**

Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
	0.9	0.95	0.99
σ	1.190	1.327	1.600
μ	0.888	0.963	1.114
μ и σ	0.835	0.909	1.057

Таблица 3.2

**Аппроксимация предельных распределений статистики Колмогорова
при использовании метода максимального правдоподобия**

При оценивании σ	При оценивании μ	При оценивании μ и σ
$B_{III}(4.8849; 5.2341; 3.6279; 2.3872; 0.303)$	$B_{III}(5.2604; 7.4327; 2.1872; 1.4774; 0.30)$	$\gamma(6.4721; 0.0580; 0.2620)$

Оценки мощности критерия Колмогорова по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 3.3, значения мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 3.4 и 3.5 соответственно.

Среди непараметрических критериев согласия критерий Колмогорова относится к наименее мощным критериям. При проверке нормальности он, как правило, уступает большинству специальных критериев, ориентированных только на проверку гипотез о принадлежности анализируемых выборок нормальному закону.

Таблица 3.3

Мощность критерия Колмогорова относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.164	0.108	0.053	0.026	0.011
20	0.193	0.131	0.066	0.032	0.013
30	0.226	0.155	0.080	0.040	0.016
40	0.259	0.181	0.096	0.050	0.020
50	0.292	0.208	0.113	0.060	0.025
100	0.455	0.350	0.213	0.124	0.058
150	0.600	0.490	0.329	0.210	0.107
200	0.720	0.618	0.449	0.306	0.170
300	0.878	0.808	0.663	0.514	0.336

Таблица 3.4

Мощность критерия Колмогорова относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.269	0.206	0.130	0.083	0.045
20	0.376	0.302	0.205	0.139	0.082
30	0.468	0.388	0.278	0.196	0.121
40	0.549	0.468	0.349	0.254	0.164
50	0.621	0.540	0.415	0.312	0.209
100	0.853	0.797	0.692	0.582	0.449
150	0.948	0.920	0.857	0.780	0.662
200	0.983	0.972	0.941	0.895	0.811
300	0.999	0.997	0.991	0.981	0.956

Таблица 3.5

Мощность критерия Колмогорова относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.180	0.126	0.069	0.038	0.017
20	0.200	0.143	0.080	0.045	0.021
30	0.217	0.156	0.089	0.051	0.024
40	0.232	0.169	0.098	0.056	0.027
50	0.247	0.181	0.106	0.062	0.030
100	0.316	0.240	0.148	0.090	0.046
150	0.382	0.297	0.191	0.120	0.063
200	0.443	0.354	0.235	0.151	0.082
300	0.556	0.462	0.324	0.223	0.130

3.2. Критерий Купера

В критерии Купера [50] в качестве меры расстояния между эмпирическим и теоретическим законом рассматривается величина

$$V_n = \sup_{-\infty < x < \infty} \{F_n(x) - F(x, \hat{\theta})\} - \inf_{-\infty < x < \infty} \{F_n(x) - F(x, \hat{\theta})\},$$

которая вычисляется в соответствии с выражением

$$V_n = D_n^+ + D_n^-,$$

где D_n^+ , D_n^- определены выше в разделе 3.1.

Если параметры теоретического закона $F(x, \theta)$ известны, то предельным распределением $G(\sqrt{n}V_n | H_0)$ статистики $\sqrt{n}V_n$ при справедливости проверяемой гипотезы H_0 является [50, 80]:

$$G(s | H_0) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} 2(4m^2 s^2 - 1)e^{-2m^2 s^2}.$$

Для снижения зависимости распределения статистики от n в [81] предложена модификации статистики

$$V = V_n \left(\sqrt{n} + 0.155 + \frac{0.24}{\sqrt{n}} \right). \quad (3.4)$$

Зависимостью распределения статистики (3.4) от объема выборки можно пренебречь при $n \geq 20$.

В [59, 128] предложено применять в критерии Купера статистику в следующей модификации

$$V_n^{mod} = \sqrt{n}V_n + \frac{1}{3\sqrt{n}}, \quad (3.5)$$

где идея использования поправки вытекает из выражения для статистики критерия согласия Смирнова [100, с. 81]. Зависимостью распределения статистики (3.5) от объема выборки можно практически пренебречь при $n \geq 30$.

Для случая проверки нормальности, когда ОМП параметров $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ вычисляются по анализируемой выборке, процентные точки и модели предельного распределения статистики (3.5), соответствующего справедливости H_0 , представлены соответственно в таблицах 3.6 и 3.7 [60, 129, 130, 61]. Эти же таблицы можно использовать и для статистики (3.4).

Таблица 3.6

**Процентные точки распределения статистики Купера
при использовании метода максимального
правдоподобия**

Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
	0.9	0.95	0.99
σ	1.494	1.611	1.847
μ	1.540	1.662	1.908
μ и σ	1.402	1.505	1.709

Таблица 3.7

**Аппроксимация предельных распределений статистики Купера при
использовании метода максимального правдоподобия**

При оценивании σ	При оценивании μ	При оценивании μ и σ
$B_{III}(6.3057; 8.1797; 2.3279; 2.4413; 0.5370)$	$B_{III}(5.5932; 7.6149; 2.1484; 2.3961; 0.5630)$	$B_{III}(7.4917; 8.0016; 2.4595; 2.1431; 0.4937)$

Оценки мощности критерия Купера по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 3.8, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 3.9 и 3.10 соответственно.

Таблица 3.8

Мощность критерия Купера относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.185	0.125	0.064	0.032	0.013
20	0.228	0.161	0.087	0.046	0.020
30	0.237	0.199	0.114	0.063	0.028
40	0.319	0.239	0.143	0.083	0.040
50	0.365	0.279	0.172	0.104	0.052
100	0.569	0.474	0.335	0.229	0.133
150	0.724	0.639	0.499	0.375	0.244
200	0.834	0.766	0.640	0.514	0.367
300	0.946	0.914	0.839	0.749	0.614

Таблица 3.9

Мощность критерия Купера относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.253	0.191	0.121	0.077	0.044
20	0.377	0.306	0.215	0.152	0.95
30	0.390	0.325	0.238	0.174	0.116
40	0.579	0.506	0.398	0.309	0.219
50	0.659	0.589	0.480	0.387	0.286
100	0.891	0.853	0.779	0.700	0.596
150	0.968	0.953	0.919	0.876	0.807
200	0.992	0.987	0.973	0.954	0.918
300	1	0.999	0.998	0.995	0.989

Таблица 3.10

Мощность критерия Купера относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.171	0.119	0.064	0.035	0.016
20	0.194	0.139	0.079	0.045	0.022
30	0.214	0.156	0.091	0.054	0.028
40	0.236	0.174	0.105	0.064	0.033
50	0.256	0.192	0.118	0.073	0.039
100	0.346	0.273	0.181	0.119	0.069
150	0.429	0.350	0.246	0.170	0.104
200	0.505	0.423	0.309	0.221	0.140
300	0.633	0.554	0.433	0.333	0.228

3.3. Критерий Крамера–Мизеса–Смирнова

Статистика критерия ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова имеет вид

$$S_{\omega} = n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left\{ F(x_{(i)}, \hat{\theta}) - \frac{2i-1}{2n} \right\}^2. \quad (3.6)$$

При простой проверяемой гипотезе, когда параметры теоретического закона $F(x, \theta)$ известны, при справедливости H_0 статистика (3.6) в пределе подчиняется закону с функцией распределения $a1(s)$, имеющей вид [100]

$$a1(s) = \frac{1}{\sqrt{2s}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1/2)\sqrt{4j+1}}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)} \exp\left\{-\frac{(4j+1)^2}{16s}\right\} \times \\ \times \left\{ I_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{(4j+1)^2}{16s}\right] - I_{\frac{1}{4}}\left[\frac{(4j+1)^2}{16s}\right] \right\},$$

где $I_{-\frac{1}{4}}(\cdot), I_{\frac{1}{4}}(\cdot)$ – модифицированные функции Бесселя вида

$$I_v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{v+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)}, |z| < \infty, |\arg z| < \pi.$$

Процентные точки и модели предельного распределения статистики (3.6) при справедливости H_0 о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону в случае использования ОМП параметров $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$, определяемых по этой же выборке представлены соответственно в таблицах 3.11 и 3.12 [55, 52, 125, 149]. В таблице 3.12 через $S_b(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ обозначено распределение Sb-Джонсона с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_1\theta_2}{\sqrt{2\pi}(x-\theta_3)(\theta_2+\theta_3-x)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0 - \theta_1 \ln \frac{x-\theta_3}{\theta_2+\theta_3-x}\right]^2\right\}.$$

Таблица 3.11

Процентные точки распределения статистики Крамера–Мизеса–Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия

Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
	0.9	0.95	0.99
σ	0.327	0.442	0.725
μ	0.134	0.165	0.238
μ и σ	0.103	0.126	0.178

Таблица 3.12

Аппроксимация предельных распределений статистики Крамера–Мизеса–Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия

При оценивании σ	При оценивании μ	При оценивании μ и σ
$S_b(3.153; 0.9448; 2.5477; 0.0160)$	$B_{III}(4.433; 3.6365; 13.920; 0.6632; 0.0084)$	$B_{III}(4.1153; 4.1748; 11.035; 0.5116; 0.009)$

Оценки мощности критерия Крамера–Мизеса–Смирнова по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 3.13,

оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 3.14 и 3.15 соответственно.

Таблица 3.13

Мощность критерия Крамера–Мизеса–Смирнова относительно H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.173	0.115	0.056	0.026	0.010
20	0.216	0.149	0.076	0.038	0.014
30	0.262	0.187	0.101	0.052	0.021
40	0.310	0.227	0.129	0.070	0.030
50	0.358	0.269	0.159	0.090	0.040
100	0.577	0.477	0.331	0.218	0.118
150	0.743	0.656	0.508	0.374	0.232
200	0.855	0.790	0.663	0.531	0.369
300	0.961	0.934	0.868	0.780	0.641

Таблица 3.14

Мощность критерия Крамера–Мизеса–Смирнова относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.279	0.217	0.142	0.093	0.054
20	0.407	0.336	0.242	0.174	0.12
30	0.516	0.444	0.339	0.256	0.175
40	0.609	0.537	0.429	0.338	0.243
50	0.688	0.621	0.514	0.418	0.313
100	0.909	0.875	0.810	0.736	0.634
150	0.976	0.965	0.937	0.901	0.839
200	0.995	0.991	0.982	0.967	0.939
300	1	1	0.999	0.997	0.994

Таблица 3.15

Мощность критерия Крамера–Мизеса–Смирнова относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.183	0.129	0.073	0.041	0.019
20	0.209	0.152	0.089	0.053	0.027
30	0.231	0.172	0.104	0.063	0.033
40	0.254	0.191	0.118	0.073	0.039
50	0.274	0.209	0.132	0.083	0.045
100	0.369	0.294	0.198	0.132	0.076
150	0.452	0.373	0.264	0.184	0.112
200	0.531	0.449	0.330	0.240	0.153
300	0.663	0.585	0.461	0.357	0.246

3.4. Критерий Ватсона

Статистика критерия Ватсона [90, 91] используется в следующей удобной для расчетов форме

$$U_n^2 = \sum_{i=1}^n \left(F(x_{(i)}, \hat{\theta}) - \frac{i - \frac{1}{2}}{n} \right)^2 - n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(x_{(i)}, \hat{\theta}) - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12n}. \quad (3.7)$$

При простой проверяемой гипотезе и известных параметрах теоретического закона $F(x, \theta)$ в случае справедливости H_0 статистика (3.7) в пределе подчиняется закону с функцией распределения [90, 91] вида

$$G(s|H_0) = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} e^{-2m^2\pi^2 s}.$$

Следует подчеркнуть, что зависимость распределения статистики (3.7) от объема выборки выражена слабо. Однако в [8] для случая проверки простых гипотез процентные точки приведены для распределения модифицированной статистики в форме

$$U_n^{2*} = (U_n^2 - 0.1/n + 0.1/n^2)(1 + 0.8/n).$$

В случае проверки нормальности с вычислением ОМП параметров μ и σ по анализируемой выборке можно воспользоваться процентными точками и моделями предельных распределений статистики (3.7), соответствующих справедливости H_0 , представленными соответственно в таблицах 3.16 и 3.17 [60, 129, 61, 130].

Таблица 3.16

**Процентные точки распределения статистики Ватсона
при использовании метода максимального
правдоподобия**

Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
	0.9	0.95	0.99
σ	0.122	0.151	0.221
μ	0.127	0.157	0.228
μ и σ	0.096	0.116	0.164

Таблица 3.17

**Аппроксимация предельных распределений статистики Ватсона при
использовании метода максимального правдоподобия**

При оценивании σ	При оценивании μ	При оценивании μ и σ
$B_{III}(8.8122; 3.7536; 29.8074; 0.7171; 0.0019)$	$B_{III}(3.6769; 4.4438; 9.8994; 0.6805; 0.0082)$	$B_{III}(3.5230; 4.4077; 9.2281; 0.4785; 0.0104)$

Оценки мощности критерия Ватсона по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 3.18, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 3.19 и 3.20 соответственно.

Среди непараметрических критериев согласия критерий Ватсона по мощности делит 2-ю – 3-ю позицию с критерием Крамера-Мизеса-Смирнова.

Таблица 3.18

Мощность критерия Ватсона относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.183	0.123	0.062	0.030	0.011
20	0.230	0.161	0.085	0.045	0.018
30	0.280	0.204	0.115	0.062	0.027
40	0.331	0.248	0.147	0.084	0.039
50	0.382	0.293	0.181	0.107	0.052
100	0.607	0.512	0.369	0.254	0.148
150	0.770	0.690	0.553	0.423	0.282
200	0.875	0.818	0.705	0.583	0.429
300	0.969	0.947	0.893	0.819	0.699

Таблица 3.19

Мощность критерия Ватсона относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.267	0.206	0.133	0.087	0.050
20	0.398	0.328	0.235	0.170	0.110
30	0.513	0.441	0.338	0.257	0.178
40	0.610	0.540	0.434	0.346	0.252
50	0.691	0.626	0.523	0.430	0.327
100	0.914	0.883	0.822	0.755	0.681
150	0.979	0.968	0.944	0.913	0.860
200	0.995	0.992	0.984	0.973	0.950
300	1	1	0.999	0.998	0.995

Таблица 3.20

Мощность критерия Ватсона относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.177	0.124	0.068	0.038	0.018
20	0.201	0.145	0.084	0.049	0.025
30	0.223	0.165	0.099	0.060	0.031
40	0.246	0.185	0.114	0.071	0.038
50	0.268	0.204	0.128	0.081	0.044
100	0.367	0.294	0.200	0.135	0.080
150	0.456	0.379	0.272	0.193	0.121
200	0.538	0.458	0.344	0.253	0.166
300	0.673	0.599	0.481	0.380	0.270

3.5. Критерий Андерсона–Дарлинга

В критерии согласия Ω^2 Андерсона–Дарлинга [3, 4] используется статистика

$$S_{\Omega} = -n - 2 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2i-1}{2n} \ln F(x_{(i)}, \hat{\theta}) + \left(1 - \frac{2i-1}{2n}\right) \ln(1 - F(x_{(i)}, \hat{\theta})) \right\}. \quad (3.8)$$

При справедливости простой проверяемой гипотезы H_0 , когда параметры теоретического закона $F(x, \theta)$ известны, статистика (3.8) в пределе подчиняется закону с функцией распределения $a2(s)$, имеющей вид [100]

$$\begin{aligned} a2(s) = & \frac{\sqrt{2\pi}}{s} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(j+1/2)(4j+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)} \exp\left\{-\frac{(4j+1)^2 \pi^2}{8s}\right\} \times \\ & \times \int_0^{\infty} \exp\left\{\frac{s}{8(y^2+1)} - \frac{(4j+1)^2 \pi^2 y^2}{8s}\right\} dy. \end{aligned}$$

Процентные точки и модели предельных распределений статистики (3.6) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону в случае вычисления ОМП параметров $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ по этой же выборке представлены в таблицах 3.21 и 3.22 [55, 52, 125, 149].

Таблица 3.21

**Процентные точки распределения статистики
Андерсона–Дарлинга при использовании метода
максимального правдоподобия**

Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
	0.9	0.95	0.99
σ	1.743	2.309	3.704
μ	0.892	1.087	1.552
μ и σ	0.630	0.750	1.032

Таблица 3.22

**Аппроксимация предельных распределений статистики Андерсона–
Дарлинга при использовании метода максимального правдоподобия**

При оценивании σ	При оценивании μ	При оценивании μ и σ
$B_{\text{III}}(3.4638; 2.330; 35.7115; 12.603; 0.105)$	$B_{\text{III}}(4.1081; 5.0598; 16.9721; 7.9065; 0.09)$	$B_{\text{III}}(4.7262; 4.6575; 9.4958; 2.717; 0.0775)$

Оценки мощности критерия Андерсона–Дарлинга по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 3.23, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 3.24 и 3.25 соответственно.

Непараметрический критерий Андерсона–Дарлинга представляет собой один из наиболее мощных критериев согласия. В этом можно убедиться, сравнив оценки его мощности относительно гипотез H_1 , H_2 и H_3 с оценками других непараметрических критериев согласия и с оценками мощности специальных критериев нормальности.

Таблица 3.23

Мощность критерия Андерсона–Дарлинга относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.171	0.113	0.055	0.025	0.009
20	0.216	0.148	0.076	0.038	0.014
30	0.268	0.192	0.104	0.055	0.022
40	0.322	0.238	0.138	0.076	0.033
50	0.377	0.287	0.174	0.100	0.045
100	0.623	0.526	0.378	0.258	0.146
150	0.795	0.719	0.579	0.445	0.294
200	0.899	0.848	0.742	0.621	0.458
300	0.980	0.964	0.922	0.859	0.750

Таблица 3.24

Мощность критерия Андерсона–Дарлинга относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.285	0.223	0.148	0.098	0.057
20	0.417	0.347	0.253	0.184	0.120
30	0.527	0.455	0.351	0.268	0.186
40	0.619	0.549	0.442	0.351	0.256
50	0.696	0.630	0.526	0.432	0.326
100	0.911	0.879	0.816	0.745	0.647
150	0.977	0.966	0.939	0.905	0.846
200	0.995	0.991	0.982	0.969	0.942
300	1	1	0.999	0.997	0.994

Таблица 3.25

Мощность критерия Андерсона–Дарлинга относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.188	0.133	0.076	0.043	0.021
20	0.221	0.163	0.098	0.060	0.031
30	0.248	0.187	0.116	0.073	0.039
40	0.274	0.210	0.134	0.085	0.047
50	0.297	0.230	0.150	0.097	0.055
100	0.402	0.327	0.228	0.157	0.095
150	0.493	0.415	0.304	0.220	0.140
200	0.577	0.498	0.380	0.285	0.189
300	0.710	0.639	0.523	0.418	0.304

3.6. Критерии Жанга

В [94] и в последующих работах [95, 96, 97] были предложены непараметрические критерии согласия, статистики которых имеют вид:

$$Z_A = -\sum_{i=1}^n \left[\frac{\ln \{F(x_{(i)}, \hat{\theta})\}}{n-i+\frac{1}{2}} + \frac{\ln \{1-F(x_{(i)}, \hat{\theta})\}}{i-\frac{1}{2}} \right], \quad (3.9)$$

$$Z_C = \sum_{i=1}^n \left[\ln \left\{ \frac{\left[F(x_{(i)}, \hat{\theta}) \right]^{-1} - 1}{(n-\frac{1}{2}) / (i-\frac{3}{4}) - 1} \right\} \right]^2 \quad (3.10)$$

$$Z_K = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) \ln \left\{ \frac{i - \frac{1}{2}}{nF(x_{(i)}, \hat{\theta})} \right\} + \left(n - i + \frac{1}{2} \right) \ln \left\{ \frac{n - i + \frac{1}{2}}{n \{1 - F(x_{(i)}, \hat{\theta})\}} \right\} \right). \quad (3.11)$$

Применение критериев со статистиками (3.9) – (3.11) осложняет сильная зависимость распределений статистик от объема выборки n . Естественно, зависимость от n сохраняется и в случае проверки сложных гипотез, когда по анализируемой выборке оцениваются параметры закона.

Процентные точки статистик (3.9) – (3.11) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону в случае вычисления оценок параметров

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ и } \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2}$$

по этой же выборке представлены в таблицах 3.26 – 3.28, которые заимствованы в [94].

Оценки мощности критерия Жанга со статистикой Z_A по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 3.29, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 3.30 и 3.31 соответственно. Соответствующие оценки мощности критерия Жанга со статистикой Z_C представлены в таблицах 3.32–3.34, для критерия со статистикой Z_K – в таблицах 3.35–3.37.

Справедливость утверждений автора критериев о их более высокой мощности по сравнению с критериями Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга была подтверждена исследованиями [109, 59, 128, 61, 130], которые показали, что в общем случае критерии со статистиками Z_C и Z_A имеют преимущество в мощности перед всеми остальными непараметрическими критериями согласия.

Однако при проверке нормальности критерии со статистиками Z_C и Z_A обладают тем же самым недостатком, что и некоторые специальные критерии, в частности, критерии Шапиро и Эпспса-Палли. Критерий со статистикой Z_A при $n=10, 20$ не способен отличать, закон соответствующий гипотезе H_1 от нормального (см. табл. 3.29). В меньшей степени, но тем же недостатком обладает критерий со статистикой Z_C (см. табл. 3.32 при малых уровнях значимости α).

Таблица 3.26

Процентные точки распределения статистики Z_A Жанга при проверке нормальности

n	0.80	0.90	0.95	0.99	0.999
5	3.346	3.409	3.472	3.619	3.757
6	3.366	3.428	3.492	3.643	3.823
7	3.676	3.437	3.499	3.650	3.847
8	3.383	3.441	3.502	3.648	3.854
9	3.386	3.442	3.499	3.641	3.844
10	3.388	3.441	3.497	3.632	3.826
12	3.388	3.438	3.488	3.612	3.798
14	3.387	3.432	3.478	3.594	3.764
16	3.384	3.426	3.469	3.574	3.729
18	3.381	3.420	3.460	3.557	3.703
20	3.378	3.415	3.452	3.543	3.678
25	3.371	3.403	3.435	3.513	3.625
30	3.365	3.393	3.422	3.490	3.591
40	3.355	3.378	3.402	3.456	3.538
50	3.348	3.367	3.387	3.434	3.503
70	3.337	3.353	3.368	3.405	3.457
100	3.328	3.339	3.351	3.379	3.419
150	3.318	3.327	3.336	3.356	3.386
200	3.313	3.320	3.327	3.343	3.367
300	3.307	3.312	3.317	3.329	3.347
500	3.302	3.305	3.308	3.316	3.327
1000	3.297	3.298	3.300	3.305	3.311

Таблица 3.27

Процентные точки распределения статистики Z_C Жанга при проверке нормальности

n	0.80	0.90	0.95	0.99	0.999
5	3.002	3.639	4.213	5.460	6.757
6	3.433	4.158	4.849	6.382	8.280
7	3.797	4.610	5.385	7.196	9.635
8	4.123	5.007	5.864	7.908	10.954
9	4.404	5.350	6.267	8.545	12.102
10	4.659	5.663	6.650	9.138	13.115
<hr/>					
12	5.105	6.209	7.304	10.156	15.147
14	5.486	6.669	7.862	11.103	16.969
16	5.808	7.065	8.352	11.838	18.474
18	6.099	7.422	8.767	12.493	19.899
20	6.362	7.752	9.157	13.150	21.149
<hr/>					
25	6.918	8.438	9.984	14.432	23.753
30	7.375	8.998	10.662	15.580	26.091
40	8.109	9.888	11.733	17.223	29.333
50	8.683	10.594	12.583	18.480	31.707
70	9.540	11.640	13.835	20.399	35.532
<hr/>					
100	10.452	12.758	15.171	22.242	39.126
150	11.488	14.027	16.628	24.405	42.354
200	12.244	14.934	17.714	25.839	44.611
300	13.276	16.179	19.139	27.523	46.663
500	14.567	17.717	20.927	29.760	49.888
1000	16.322	19.796	23.301	32.811	53.458

Таблица 3.28

Процентные точки распределения статистики Z_K Жанга при проверке нормальности

n	0.80	0.90	0.95	0.99	0.999
5	0.383	0.512	0.630	0.899	1.175
6	0.456	0.596	0.731	1.034	1.413
7	0.515	0.666	0.814	1.149	1.584
8	0.567	0.726	0.882	1.240	1.724
9	0.612	0.777	0.940	1.313	1.838
10	0.652	0.824	0.992	1.379	1.924
<hr/>					
12	0.723	0.906	1.083	1.493	2.063
14	0.783	0.975	1.162	1.583	2.191
16	0.834	1.035	1.229	1.661	2.258
18	0.878	1.087	1.286	1.732	2.365
20	0.920	1.135	1.339	1.795	2.406
<hr/>					
25	1.006	1.238	1.458	1.944	2.601
30	1.076	1.319	1.553	2.072	2.757
40	1.188	1.453	1.708	2.269	3.039
50	1.273	1.555	1.826	2.440	3.291
70	1.399	1.708	2.005	2.685	3.660
<hr/>					
100	1.535	1.874	2.202	2.969	4.087
150	1.690	2.061	2.429	3.289	4.529
200	1.799	2.195	2.591	3.507	4.785
300	1.950	2.380	2.803	3.793	5.228
500	2.137	2.606	3.068	4.160	5.756
1000	2.385	2.904	3.422	4.620	6.300

Таблица 3.29

Мощность критерия Z_A Жанга относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.127	0.078	0.033	0.014	0.005
20	0.148	0.090	0.036	0.014	0.004
30	0.199	0.128	0.056	0.023	0.006
40	0.263	0.180	0.087	0.039	0.012
50	0.333	0.239	0.127	0.063	0.022
100	0.650	0.548	0.389	0.259	0.139
150	0.844	0.775	0.641	0.503	0.335
200	0.939	0.901	0.815	0.706	0.545
300	0.992	0.985	0.962	0.923	0.841

Таблица 3.30

Мощность критерия Z_A Жанга относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.321	0.254	0.170	0.113	0.065
20	0.440	0.368	0.269	0.196	0.128
30	0.523	0.449	0.342	0.258	0.176
40	0.592	0.518	0.406	0.314	0.221
50	0.650	0.578	0.465	0.368	0.266
100	0.845	0.793	0.698	0.600	0.479
150	0.938	0.908	0.847	0.772	0.662
200	0.977	0.963	0.929	0.882	0.800
300	0.997	0.995	0.987	0.974	0.944

Таблица 3.31

Мощность критерия Z_A Жанга относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.210	0.153	0.090	0.052	0.025
20	0.259	0.198	0.126	0.080	0.045
30	0.291	0.228	0.149	0.098	0.057
40	0.318	0.252	0.169	0.113	0.070
50	0.340	0.272	0.185	0.126	0.075
100	0.434	0.358	0.256	0.180	0.112
150	0.514	0.435	0.321	0.233	0.148
200	0.588	0.507	0.387	0.289	0.189
300	0.706	0.633	0.512	0.403	0.282

Таблица 3.32

Мощность критерия Z_C Жанга относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.163	0.101	0.041	0.017	0.004
20	0.211	0.130	0.049	0.014	0.002
30	0.277	0.179	0.071	0.020	0.002
40	0.348	0.238	0.104	0.033	0.003
50	0.421	0.300	0.142	0.049	0.005
100	0.715	0.599	0.390	0.201	0.045
150	0.879	0.806	0.635	0.420	0.150
200	0.955	0.917	0.808	0.634	0.322
300	0.995	0.988	0.961	0.895	0.688

Таблица 3.33

Мощность критерия Z_C Жанга относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.281	0.226	0.158	0.110	0.066
20	0.385	0.331	0.257	0.199	0.137
30	0.467	0.413	0.335	0.269	0.195
40	0.539	0.485	0.405	0.333	0.249
50	0.601	0.548	0.467	0.392	0.299
100	0.815	0.773	0.703	0.628	0.524
150	0.921	0.896	0.848	0.790	0.697
200	0.969	0.956	0.928	0.890	0.820
300	0.995	0.992	0.985	0.974	0.947

Таблица 3.34

Мощность критерия Z_C Жанга относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.195	0.142	0.086	0.052	0.026
20	0.236	0.186	0.126	0.086	0.051
30	0.267	0.217	0.155	0.112	0.071
40	0.296	0.245	0.182	0.135	0.089
50	0.321	0.270	0.205	0.156	0.105
100	0.427	0.374	0.302	0.243	0.176
150	0.513	0.460	0.384	0.317	0.238
200	0.589	0.537	0.457	0.386	0.298
300	0.711	0.662	0.584	0.510	0.411

Таблица 3.35

Мощность критерия Z_K Жанга относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.176	0.118	0.058	0.028	0.010
20	0.192	0.130	0.066	0.032	0.012
30	0.212	0.144	0.072	0.035	0.013
40	0.240	0.164	0.083	0.041	0.015
50	0.268	0.186	0.096	0.047	0.017
100	0.444	0.334	0.191	0.103	0.042
150	0.618	0.500	0.324	0.193	0.088
200	0.757	0.651	0.465	0.305	0.157
300	0.917	0.856	0.717	0.554	0.349

Таблица 3.36

Мощность критерия Z_K Жанга относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.259	0.198	0.126	0.082	0.046
20	0.398	0.326	0.232	0.164	0.103
30	0.498	0.424	0.319	0.238	0.159
40	0.579	0.504	0.392	0.302	0.210
50	0.644	0.569	0.455	0.357	0.254
100	0.844	0.788	0.685	0.579	0.449
150	0.934	0.901	0.827	0.737	0.607
200	0.974	0.955	0.909	0.844	0.733
300	0.995	0.992	0.978	0.953	0.895

Таблица 3.37

Мощность критерия Z_K Жанга относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.176	0.123	0.068	0.038	0.018
20	0.221	0.162	0.097	0.058	0.029
30	0.258	0.195	0.123	0.078	0.043
40	0.289	0.225	0.146	0.097	0.055
50	0.316	0.249	0.167	0.111	0.066
100	0.424	0.349	0.248	0.176	0.112
150	0.509	0.430	0.317	0.231	0.151
200	0.580	0.499	0.379	0.284	0.191
300	0.692	0.614	0.492	0.386	0.271

Смещенностю критериев Жанга со статистиками Z_C и Z_A по отношению к конкурирующим гипотезам, близким к H_1 , никем ранее не отмечалась. Этот недостаток заставляет относиться к критериям более осторожно, дублируя выводы с опорой на другие критерии.

3.7. О применении непараметрических критериев согласия

С учетом анализа мощности при проверке нормальности относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 , H_3 непараметрические критерии согласия можно расположить по предпочтению следующим образом:

Андерсона-Дарлинга \succ Ватсона \succ Крамера-Мизеса-Смирнова \succ
 \succ Купера \succ Z_A Жанга \succ Z_C Жанга \succ Z_K Жанга \succ Колмогорова.

Критерии Жанга имеют преимущество в мощности относительно близкой конкурирующей гипотезы H_3 . Однако относительно H_1 картина оказывается противоположной. Более того, при проверке нормальности критерии Жанга со статистиками Z_A и Z_C смещены

относительно H_1 . Особенno существенен этот недостаток у критерия со статистикой Z_A .

В табл. 3.38 для возможности сопоставления со специальными критериями нормальности приведены оценки мощности непараметрических критериев согласия относительно H_1 , H_2 и H_3 при $n=50$ и $\alpha=0.1$, указываются недостатки и положительные моменты, характеризующие свойства критериев при проверке нормальности.

Таблица 3.38

Краткие сведения о свойствах и рекомендации по применению для проверки нормальности непараметрических критериев согласия

№	Критерий	Мощность относительно гипотез			Примечание
		H_1	H_2	H_3	
1	Андерсона–Дарлинга	0.287	0.630	0.230	Как правило, отличается наиболее высокой мощностью среди непараметрических критериев согласия.
2	Ватсона	0.293	0.626	0.204	Практически не уступает по мощности критерию Андерсона–Дарлинга.
3	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.269	0.621	0.209	Третий по предпочтительности непараметрический критерий согласия.
4	Купера	0.279	0.589	0.192	Как правило, всегда мощнее критерия Колмогорова, но уступает критериям Андерсона–Дарлинга, Ватсона, Крамера–Мизеса–Смирнова.
5	Колмогорова	0.208	0.540	0.181	Относительно всех конкурирующих гипотез по мощности, как правило, уступает остальным.
6	Z_A Жанга	0.239	0.578	0.272	Зависимость распределения статистики от n . Используются таблицы процентных точек. Достаточно высокая мощность относительно гипотез H_2 и H_3 .

Окончание таблицы 3.38

№	Критерий	Мощность относительно гипотез			Примечание
		H_1	H_2	H_3	
6					При малых n отмечается существенная смещённость критерия относительно гипотезы H_1 . Рекомендуется применять совместно с другими критериями, которым не свойственны проблемы с распознаванием гипотезы вида H_1 .
7	Z_C Жанга	0.300	0.548	0.270	Зависимость распределения статистики от n . Используются таблицы процентных точек. Высокая мощность относительно гипотез H_2 и H_3 . При малых n и α отмечается смещённость критерия относительно гипотезы H_1 . Как и другие критерии Жанга, рекомендуется применять совместно с другими критериями.
8	Z_K Жанга	0.186	0.569	0.249	Зависимость распределения статистики от n . Используются таблицы процентных точек. Достаточно высокая мощность относительно H_2 и H_3 . Это, как правило, наименее мощный из критериев Жанга. Но у него нет смещённости относительно гипотезы H_1 .

Следует отметить, что критерии Андерсона–Дарлинга, Ватсона и Крамера–Мизеса–Смирнова в некоторых случаях не так уж сильно уступают в мощности специальным критериям нормальности.

4. Критерии согласия типа хи-квадрат при проверке нормальности

4.1. Критерий согласия χ^2 Пирсона

Процедура проверки гипотез с использованием критериев типа χ^2 предусматривает группирование исходной выборки X_1, X_2, \dots, X_n объемом n . Область определения случайной величины разбивают на k непересекающихся интервалов граничными точками

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k,$$

где x_0 – нижняя грань области определения случайной величины; x_k – верхняя грань. В соответствии с заданным разбиением подсчитывают количество наблюдений n_i , попавших в i -й интервал, и вероятности

попадания в интервал $P_i(\theta) = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \theta)dx$, соответствующие теорети-

ческому закону с функцией плотности $f(x, \theta)$. При этом $n = \sum_{i=1}^k n_i$,

$\sum_{i=1}^k P_i(\theta) = 1$. В основе статистик, используемых в критериях согласия

типа χ^2 , лежит измерение отклонений n_i / n от $P_i(\theta)$.

Статистику критерия согласия χ^2 Пирсона вычисляют по формуле

$$X_n^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(n_i / n - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}. \quad (4.1)$$

При справедливости простой проверяемой гипотезы H_0 (когда известны все параметры теоретического закона) при $n \rightarrow \infty$ эта статистика подчиняется χ_r^2 -распределению с $r = k - 1$ степенями свободы. Плотность χ_r^2 -распределения описывается соотношением

$$g(s) = \frac{1}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} s^{r/2-1} e^{-s/2}.$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется, если достигаемый уровень значимости превышает заданный уровень значимости α , то есть выполняется неравенство

$$P\left\{X_n^2 > X_n^{2*}\right\} = \frac{1}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} \int_{X_n^{2*}}^{\infty} s^{r/2-1} e^{-s/2} ds > \alpha, \quad (4.2)$$

где X_n^{2*} – вычисленное в соответствии с формулой (4.1) значение статистики.

В случае проверки сложной гипотезы и справедливости H_0 при условии, что оценки параметров находятся в результате минимизации статистики X_n^2 по этой же самой выборке, статистика X_n^2 асимптотически подчиняется χ_r^2 -распределению с числом степеней свободы $r = k - m - 1$, где m – число оцененных параметров. Статистика X_n^2 имеет это же распределение, если в качестве метода оценивания выбирают метод максимального правдоподобия и оценки вычисляют **по группированным** данным в результате максимизации по θ функции правдоподобия

$$L(\theta) = \gamma \prod_{i=1}^k P_i^{n_i}(\theta), \quad (4.3)$$

где γ – некоторая константа и $P_i(\theta) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \theta) dx$ – вероятность

падения наблюдения в i -й интервал значений, зависящая от θ . Последнее справедливо для любых методов оценивания параметров по группированным данным, приводящим к асимптотически эффективным оценкам.

При проверке согласия с нормальным законом и оценивании вектора параметров $\hat{\theta}^T = (\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ по группированной выборке

минимизацией статистики X_n^2 или максимизацией функции правдоподобия (4.3) вероятности попадания в интервал вычисляются в соответствии с соотношением

$$P_i(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-t^2/2} dx,$$

где $t_i = (x_i - \hat{\mu}) / \hat{\sigma}$. Проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется, если достигнутый уровень значимости $P\{X_n^2 > X_n^{2*}\}$, вычисляемый по соответствующему χ_r^2 -распределению, превышает заданный уровень значимости α или если значение статистики X_n^{2*} меньше критического $\chi_{r,\alpha}^2$, определяемого из уравнения

$$\frac{1}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} \int_{\chi_{r,\alpha}^2}^{\infty} s^{r/2-1} e^{-s/2} ds = \alpha. \quad (4.4)$$

При вычислении оценок максимального правдоподобия (ОМП) по **негруппированным** данным эта же статистика распределена как сумма независимых слагаемых $\chi_{k-m-1}^2 + \sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_j^2$, где ξ_1, \dots, ξ_m – стандартные нормальные случайные величины, независимые одна от другой и от χ_{k-m-1}^2 , а $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – некоторые числа между 0 и 1 [19, 150, 143], представляющие собой корни уравнения

$$|(1-\lambda)\mathbf{J}(\theta) - \mathbf{J}_\Gamma(\theta)| = 0.$$

В данном уравнении $\mathbf{J}(\theta)$ – информационная матрица Фишера по негруппированным наблюдениям, элементы которой определяются соотношением

$$J(\theta_l, \theta_j) = \int \left(\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta_l} \frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta_j} \right) f(x, \theta) dx, \quad (4.5)$$

а $\mathbf{J}_\Gamma(\theta)$ – информационная матрица по группированным наблюдениям

$$\mathbf{J}_\Gamma(\theta) = \sum_{i=1}^k \frac{\nabla P_i(\theta) \nabla^T P_i(\theta)}{P_i(\theta)}. \quad (4.6)$$

Другими словами, распределение статистики (4.1) при использовании ОМП по негруппированным данным неизвестно и зависит, в том числе, от способа группирования. Эта неизвестная функция распределения статистики при k интервалах лежит между χ_{k-1}^2 - и χ_{k-m-1}^2 -распределениями.

При проверке нормальности с оцениванием по выборке ОМП параметров μ и σ по негруппированным данным можно воспользоваться таблицами асимптотически оптимального группирования А.7, А.8, приведенными в приложении А. При асимптотически оптимальном группировании минимизируются потери в информации Фишера о параметрах закона, связанные с группированием [105, 25, 149, 106, 148]. При использовании асимптотически оптимального группирования критерий χ^2 Пирсона обладает максимальной мощностью относительно очень близких конкурирующих гипотез [104, 112, 113, 149].

Для ситуации использования в критерии χ^2 Пирсона таблиц асимптотически оптимального группирования полученные процентные точки представлены в таблице 4.1, а построенные модели предельных распределений статистики (4.1) – в таблице 4.2, где через $B_{\text{III}}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ обозначено бета-распределение III рода (3.2).

В таблице А.7 граничные точки интервалов t_i , $i = \overline{1, (k-1)}$, приведены в виде, инвариантном относительно параметров μ и σ нормального закона. При вычислении статистики (4.1) границы x_i , разделяющие интервалы при данном k , находятся по значениям t_i , взятым из соответствующей строки таблицы, по соотношениям

$$x_i = \hat{\sigma}t_i + \hat{\mu},$$

где $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ – ОМП параметров, найденные по данной выборке. Затем подсчитывается число наблюдений n_i , попавших в каждый интервал. Вероятности попадания в интервал при вычислении значения статистики (4.1) берутся из соответствующей строки таблицы А.8.

Для принятия решения о результатах проверки гипотезы H_0 значение статистики X_n^{2*} сравнивается с соответствующим критическим $\tilde{\chi}_{k,\alpha}^2$, взятым из таблицы 4.1, или достигнутый уровень значимости $P\{X_n^2 > X_n^{2*}\}$ может быть найден по модели предельного закона, приведенной в соответствующей строке таблицы 4.2.

При проверке нормальности с вычислением по негруппированной выборке ОМП только параметра сдвига μ используется таблица асимптотически оптимальных граничных точек А.9 и таблица с соответствующими вероятностями попадания в интервалы А.10. Процентные точки представлены в таблице 4.3, а построенные модели предельных распределений статистики (4.1) – в таблице 4.4.

При проверке нормальности с вычислением по негруппированной выборке ОМП только параметра σ используются соответственно таблицы А.11 и А.12, процентные точки – из таблицы 4.5, а модели предельных распределений статистики (4.1) – из таблицы 4.6.

Таблица 4.1

**Процентные точки $\tilde{\chi}_{k,\alpha}^2$ для статистики критерия Пирсона
при оценивании параметров μ и σ**

k	$p = 1 - \alpha$				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
4	2.74	3.37	4.48	5.66	7.26
5	4.18	5.00	6.39	7.77	9.59
6	5.61	6.54	8.09	9.61	11.62
7	6.95	7.98	9.67	11.31	13.43
8	8.28	9.40	11.21	12.95	15.22
9	9.56	10.76	12.69	14.53	16.87
10	10.84	12.11	14.16	16.12	18.58
11	12.08	13.42	15.55	17.59	20.19
12	13.34	14.74	16.98	19.10	21.77
13	14.56	16.01	18.34	20.53	23.30
14	15.78	17.29	19.68	21.96	24.81
15	16.98	18.54	21.04	23.40	26.37

Таблица 4.2

Модели предельных распределений статистики критерия Пирсона при оценивании параметров μ и σ

k	Модель предельного распределения
4	$B_{III}(1.2463, 3.8690, 4.6352, 19.20, 0.005)$
5	$B_{III}(1.7377, 3.8338, 5.5721, 26.00, 0.005)$
6	$B_{III}(2.1007, 4.1518, 4.1369, 26.00, 0.005)$
7	$B_{III}(2.5019, 4.6186, 3.4966, 28.00, 0.005)$
8	$B_{III}(2.9487, 5.8348, 3.1706, 34.50, 0.005)$
9	$B_{III}(3.5145, 6.3582, 3.2450, 39.00, 0.005)$
10	$B_{III}(3.9756, 6.7972, 3.0692, 41.50, 0.005)$
11	$B_{III}(4.4971, 6.9597, 3.0145, 43.00, 0.005)$
12	$B_{III}(5.1055, 7.0049, 3.1130, 45.00, 0.005)$
13	$B_{III}(5.7809, 7.0217, 3.2658, 47.00, 0.005)$
14	$B_{III}(6.6673, 6.9116, 3.5932, 49.00, 0.005)$
15	$B_{III}(7.0919, 7.2961, 3.4314, 51.50, 0.005)$

Таблица 4.3

Процентные точки $\tilde{\chi}_{k,\alpha}^2$ для статистики критерия Пирсона при оценивании параметра μ

k	$p = 1 - \alpha$				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
3	2.28	2.91	4.05	5.24	6.88
4	3.91	4.73	6.13	7.50	9.34
5	5.40	6.33	7.88	9.41	11.43
6	6.80	7.84	9.55	11.21	13.35
7	8.16	9.28	11.10	12.88	15.12
8	9.48	10.67	12.63	14.50	16.88
9	10.76	12.03	14.07	16.03	18.51
10	12.03	13.38	15.54	17.57	20.12

Т а б л и ц а 4.4

Модели предельных распределений статистики критерия Пирсона при оценивании параметра μ

k	Модель предельного распределения
3	$B_{III}(0.9303, 2.6786, 6.3910, 17.50, 0.0)$
4	$B_{III}(1.3312, 2.8943, 4.1987, 17.50, 0.0)$
5	$B_{III}(1.7299, 4.6404, 3.2091, 26.40, 0.0)$
6	$B_{III}(2.1573, 6.9195, 2.7378, 37.00, 0.0)$
7	$B_{III}(2.6458, 7.3216, 2.6338, 39.25, 0.0)$
8	$B_{III}(3.2779, 7.0733, 2.9445, 41.50, 0.0)$
9	$B_{III}(3.8346, 7.1893, 2.9863, 43.50, 0.0)$
10	$B_{III}(4.3061, 7.5295, 2.8037, 44.70, 0.0)$

Т а б л и ц а 4.5

Процентные точки $\tilde{\chi}_{k,\alpha}^2$ для статистики критерия Пирсона при оценивании параметра σ

k	$p = 1 - \alpha$				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
3	2.58	3.19	4.28	5.47	7.04
4	4.10	4.91	6.29	7.68	9.51
5	5.51	6.44	8.00	9.53	11.50
6	6.89	7.92	9.62	11.26	13.39
7	8.21	9.33	11.14	12.91	15.16
8	9.52	10.70	12.66	14.53	16.94
9	10.79	12.06	14.10	16.06	18.59
10	12.05	13.38	15.54	17.60	20.23

Выбор числа интервалов. В таблицах приложения А.7–А.12 приведены значения относительной асимптотической информации Фишера, представляющие собой отношение

$$A = \det J_\Gamma / \det J,$$

или отношение диагональных элементов соответствующих матриц.

При асимптотически оптимальном группировании относительно скалярного параметра и 10 или 11 интервалах в группированной выборке сохраняется около 98 % информации, при оптимальном группировании относительно вектора параметров и 15 интервалах – около 95 %. Дальнейшее увеличение числа интервалов существенного значения не имеет.

Таблица 4.6

Модели предельных распределений статистики критерия Пирсона при оценивании параметра σ

k	Модель предельного распределения
3	$B_{III}(1.0072, 3.6984, 4.6169, 20.00, 0.0)$
4	$B_{III}(1.5066, 3.5866, 4.6469, 23.00, 0.0)$
5	$B_{III}(1.9163, 4.4054, 3.7559, 27.00, 0.0)$
6	$B_{III}(2.2806, 6.9877, 2.8052, 37.00, 0.0)$
7	$B_{III}(2.7512, 7.3733, 2.6850, 39.25, 0.0)$
8	$B_{III}(3.3668, 7.1166, 2.9765, 41.50, 0.0)$
9	$B_{III}(3.9482, 7.1903, 3.0554, 43.50, 0.0)$
10	$B_{III}(4.6476, 7.3571, 3.1020, 44.70, 0.0)$

Конкретное число интервалов при асимптотически оптимальном группировании следует выбирать исходя из следующих соображений. При оптимальном группировании вероятности попадания в интервалы

в общем случае не равны. Обычно минимальны вероятности попадания в крайние интервалы. Поэтому k желательно выбирать из условия $nP_i(\theta) \geq 5 \dots 10$ для любого интервала при оптимальном группировании. По крайней мере, при выборе k следует придерживаться рекомендации $\min_i \{nP_i(\theta)\} > 1$. При выполнении этого условия дискретное распределение статистики (4.1) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 несущественно отличается от соответствующего асимптотического предельного распределения. При нарушении этого условия отличие истинного распределения статистики от предельного будет приводить к увеличению вероятности ошибок 1-го рода по сравнению с заданным уровнем значимости α .

Следует учитывать, что при малых объемах выборок $n = 10 \div 20$ дискретные распределения статистик существенно отличаются от асимптотических.

Условие $\min_i \{nP_i(\theta)\} > 1$ при выборе k ограничивает число интервалов сверху. Число интервалов группирования влияет на мощность критерия χ^2 Пирсона [114, 117, 118]. Совсем необязательно, что мощность критерия против интересующего нас конкурирующего закона (конкурирующей гипотезы) будет максимальной при верхней границе числа интервалов. В определенной степени при выборе k можно ориентироваться на оценки мощности критерия относительно рассматриваемых в руководстве конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 (в зависимости от k при различных n), представленные в таблицах 4.7–4.9.

Оценки мощности критерия χ^2 Пирсона по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 4.7, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 4.8 и 4.9 соответственно. При заданных n полужирным шрифтом выделены максимальные мощности при оптимальном выборе k .

Таблица 4.7

Мощность критерия χ^2 Пирсона относительно гипотезы H_1

n	k	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	4	0.235	0.146	0.043	0.032	0.002
20	4	0.211	0.146	0.068	0.048	0.018
	5	0.262	0.177	0.100	0.058	0.021
30	4	0.192	0.146	0.076	0.042	0.019
	5	0.312	0.216	0.136	0.079	0.043
40	4	0.200	0.133	0.074	0.041	0.022
	5	0.336	0.267	0.168	0.111	0.061
	6	0.304	0.218	0.126	0.077	0.035
	7	0.270	0.186	0.096	0.054	0.024
50	4	0.201	0.131	0.074	0.044	0.018
	5	0.401	0.311	0.204	0.129	0.068
	6	0.352	0.269	0.159	0.095	0.047
	7	0.310	0.220	0.130	0.071	0.032
100	4	0.208	0.150	0.083	0.045	0.020
	5	0.558	0.479	0.352	0.254	0.158
	6	0.555	0.461	0.328	0.227	0.130
	7	0.550	0.449	0.306	0.200	0.102
	8	0.482	0.380	0.247	0.155	0.081
	9	0.447	0.354	0.228	0.145	0.079
	10	0.427	0.333	0.218	0.138	0.070
150	6	0.698	0.617	0.490	0.376	0.253
	7	0.722	0.634	0.486	0.353	0.217
	8	0.673	0.573	0.415	0.287	0.165
	9	0.628	0.524	0.376	0.262	0.158
	10	0.600	0.504	0.365	0.256	0.155
200	9	0.783	0.695	0.548	0.417	0.279
	10	0.750	0.662	0.520	0.393	0.254
	11	0.722	0.638	0.501	0.376	0.243
300	11	0.907	0.858	0.756	0.646	0.492
	12	0.887	0.832	0.724	0.813	0.464
	13	0.885	0.828	0.719	0.595	0.440

Таблица 4.8

Мощность критерия χ^2 Пирсона относительно гипотезы H_2

n	k	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	4	0.267	0.206	0.074	0.058	0.01
20	4	0.264	0.177	0.104	0.067	0.037
	5	0.247	0.189	0.116	0.061	0.024
30	4	0.237	0.179	0.107	0.060	0.031
	5	0.312	0.261	0.153	0.103	0.044
40	4	0.254	0.189	0.114	0.067	0.037
	5	0.399	0.314	0.207	0.132	0.079
	6	0.359	0.282	0.192	0.121	0.063
	7	0.443	0.358	0.250	0.167	0.101
50	4	0.289	0.198	0.124	0.074	0.039
	5	0.491	0.381	0.259	0.168	0.095
	6	0.398	0.315	0.211	0.140	0.080
	7	0.500	0.423	0.312	0.225	0.138
100	4	0.328	0.252	0.158	0.099	0.052
	5	0.740	0.666	0.534	0.416	0.295
	6	0.592	0.507	0.374	0.268	0.164
	7	0.759	0.692	0.581	0.482	0.359
	8	0.692	0.618	0.499	0.392	0.273
	9	0.770	0.708	0.596	0.494	0.379
	10	0.741	0.672	0.563	0.458	0.332
150	6	0.736	0.659	0.0532	0.415	0.286
	7	0.896	0.855	0.774	0.687	0.571
	8	0.832	0.775	0.675	0.573	0.444
	9	0.899	0.860	0.785	0.705	0.596
	10	0.873	0.827	0.743	0.653	0.538
200	9	0.962	0.943	0.903	0.854	0.778
	10	0.944	0.918	0.865	0.801	0.702
	11	0.964	0.946	0.908	0.880	0.786
300	11	0.996	0.993	0.985	0.973	0.949
	12	0.994	0.989	0.978	0.962	0.930
	13	0.996	0.993	0.985	0.974	0.950

Таблица 4.9

Мощность критерия χ^2 Пирсона относительно гипотезы H_3

n	k	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	4	0.221	0.150	0.046	0.034	0.003
20	4	0.194	0.125	0.059	0.038	0.016
	5	0.159	0.112	0.058	0.027	0.010
30	4	0.160	0.117	0.058	0.028	0.012
	5	0.169	0.125	0.062	0.034	0.012
40	4	0.169	0.113	0.059	0.029	0.014
	5	0.188	0.128	0.067	0.035	0.016
	6	0.189	0.134	0.075	0.039	0.016
	7	0.204	0.143	0.082	0.045	0.020
50	4	0.188	0.113	0.060	0.030	0.012
	5	0.208	0.143	0.073	0.038	0.016
	6	0.196	0.137	0.076	0.042	0.018
	7	0.214	0.155	0.088	0.050	0.023
100	4	0.192	0.134	0.069	0.036	0.014
	5	0.264	0.193	0.108	0.061	0.029
	6	0.244	0.176	0.100	0.056	0.024
	7	0.269	0.201	0.123	0.074	0.037
	8	0.276	0.209	0.126	0.075	0.037
	9	0.289	0.220	0.135	0.084	0.044
	10	0.303	0.231	0.146	0.090	0.047
150	6	0.296	0.220	0.133	0.078	0.038
	7	0.326	0.248	0.157	0.097	0.051
	8	0.329	0.252	0.160	0.100	0.052
	9	0.346	0.267	0.173	0.110	0.062
	10	0.359	0.284	0.191	0.124	0.072
200	9	0.407	0.328	0.225	0.152	0.090
	10	0.419	0.338	0.237	0.161	0.093
	11	0.432	0.355	0.250	0.175	0.105
300	11	0.543	0.462	0.346	0.256	0.165
	12	0.548	0.469	0.351	0.263	0.175
	13	0.566	0.486	0.373	0.280	0.190

4.2. Критерий согласия Нikuлина–Рao–Робсона

В работах [143, 144, 73] предложено видоизменение стандартной статистики X_n^2 , при котором предельное распределение есть обычное χ_{k-1}^2 -распределение (число степеней свободы не зависит от числа оцениваемых параметров). Неизвестные параметры распределения $F(x, \theta)$ в этом случае следует оценивать по негруппированным данным методом максимального правдоподобия. При этом вектор $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_k)^T$ предполагают заданным, и граничные точки интервалов определяют по соотношениям $x_i(\theta) = F^{-1}(P_1 + \dots + P_i)$, $i = \overline{1, (k-1)}$. Предложенная статистика имеет вид [144]

$$Y_n^2(\theta) = X_n^2 + n^{-1} a^T(\theta) \Lambda(\theta) a(\theta), \quad (4.7)$$

где X_n^2 вычисляется по формуле (4.1).

Для законов распределения, определяемых только параметрами сдвига и масштаба,

$$\Lambda(\theta) = [\mathbf{J}(\theta) - \mathbf{J}_\Gamma(\theta)]^{-1}. \quad (4.8)$$

В случае нормального закона с вектором параметров $\theta^T = (\mu, \sigma)$ информационная матрица Фишера имеет вид

$$\mathbf{J}(\theta) = \begin{bmatrix} 1/\sigma^2 & 0 \\ 0 & 2/\sigma^2 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

элементы информационной матрицы по группированным данным $\mathbf{J}_\Gamma(\theta)$ определяются выражениями

$$J_\Gamma(\mu, \mu) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sigma^2 P_i(\theta)} (f(t_{i-1}) - f(t_i))^2,$$

$$J_\Gamma(\sigma, \sigma) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sigma^2 P_i(\theta)} (t_{i-1}f(t_{i-1}) - t_i f(t_i))^2,$$

$$J_{\Gamma}(\mu, \sigma) = J_{\Gamma}(\sigma, \mu) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sigma^2 P_i(\theta)} (f(t_{i-1}) - f(t_i)) (t_{i-1} f(t_{i-1}) - t_i f(t_i)),$$

где $t_i = (x_i - \mu) / \sigma$, $t_0 = -\infty$, $t_k = \infty$, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ – плотность стандартного нормального закона. Элементы вектора $a^T(\theta) = [a(\mu), a(\sigma)]$ находятся из соотношений

$$a(\mu) = \sum_{i=1}^k \frac{n_i (f(t_{i-1}) - f(t_i))}{\sigma P_i(\theta)},$$

$$a(\sigma) = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{\sigma P_i(\theta)} (t_{i-1} f(t_{i-1}) - t_i f(t_i)).$$

Как и в случае критерия Пирсона **при проверке нормальности** с оцениванием по выборке ОМП параметров μ и σ по негруппированным данным можно воспользоваться таблицами асимптотически оптимального группирования А.7, А.8 приложения А.

При вычислении статистики (4.7) границы x_i , разделяющие интервалы при данном k , находятся по значениям t_i , взятым из соответствующей строки таблицы, в соответствии с соотношением

$$x_i = \hat{\sigma} t_i + \hat{\mu},$$

где $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ – ОМП параметров, найденные по данной выборке. Затем подсчитывается число наблюдений n_i , попавших в каждый интервал. Вероятности $P_i(\theta)$ попадания в интервал при вычислении значения статистики (4.7) берутся из соответствующей строки таблицы А.8. При вычислении элементов вектора $a(\theta)$ и матрицы $\Lambda(\theta)$ используются табличные значения t_i и P_i и полученные оценки $\hat{\sigma}$.

Для принятия решения о результатах проверки гипотезы H_0 значение статистики Y_n^{2*} сравнивается с соответствующим критическим $\chi_{k-1,\alpha}^2$ или достигнутый уровень значимости

$P\left\{Y_n^2 > Y_n^{2*}\right\}$ находится по соответствующему χ_{k-1}^2 -распределению.

При проверке нормальности с вычислением по негруппированной выборке только ОМП параметра сдвига μ используется таблица асимптотически оптимальных граничных точек А.9 и таблица с соответствующими вероятностями попадания в интервалы А.10. В этом случае при вычислении статистики (4.7) в векторе $a(\theta)$ и в матрице $\Lambda(\theta)$ остаются только элементы, связанные с μ .

При проверке нормальности с вычислением по негруппированной выборке только ОМП параметра σ используются соответственно таблицы А.11 и А.12, а при вычислении статистики (4.7) в векторе $a(\theta)$ и в матрице $\Lambda(\theta)$ остаются только элементы, связанные с σ .

Оценки мощности критерия Никулина-Рао-Робсона по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в табл. 4.10, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 4.11 и 4.12 соответственно. Чтобы показать зависимость мощности от числа интервалов k , оценки для конкретных n приведены для различного числа интервалов, заканчивая максимально возможным, задаваемым ограничением $\min_i\{nP_i(\theta)\} > 1$. Полужирным шрифтом выделены максимальные оценки, соответствующие оптимальному выбору k .

Критерий Никулина-Рао-Робсона, как правило, оказывается мощнее критерия Пирсона (см., например, мощности относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3). При этом оптимальное число интервалов оказывается максимально возможным. Однако так бывает не всегда. По мощности относительно “каверзной” гипотезы H_1 критерий Никулина-Рао-Робсона уступает критерию Пирсона, а оптимальное число интервалов в этом случае заметно меньше максимально возможного (при асимптотически оптимальном группировании).

Таблица 4.10

Мощность критерия Никулина–Рао–Робсона относительно гипотезы H_1

n	k	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	4	0.348	0.1	0.029	0.009	0.006
20	4	0.138	0.107	0.050	0.024	0.007
	5	0.234	0.143	0.074	0.041	0.016
30	4	0.185	0.133	0.077	0.036	0.017
	5	0.256	0.197	0.102	0.053	0.023
	6	0.213	0.143	0.070	0.036	0.017
40	4	0.197	0.133	0.069	0.040	0.019
	5	0.293	0.221	0.123	0.079	0.035
	6	0.253	0.180	0.097	0.049	0.020
	7	0.227	0.149	0.080	0.042	0.018
50	4	0.205	0.135	0.069	0.040	0.017
	5	0.326	0.240	0.148	0.083	0.040
	6	0.296	0.220	0.120	0.069	0.030
	7	0.250	0.184	0.098	0.051	0.021
100	4	0.207	0.148	0.085	0.045	0.022
	5	0.485	0.395	0.271	0.179	0.102
	6	0.475	0.381	0.250	0.160	0.084
	7	0.469	0.367	0.231	0.137	0.068
	8	0.411	0.314	0.192	0.117	0.059
	9	0.392	0.300	0.188	0.115	0.059
	10	0.375	0.288	0.179	0.105	0.051
150	6	0.619	0.530	0.397	0.284	0.179
	7	0.641	0.539	0.383	0.261	0.148
	8	0.592	0.485	0.329	0.216	0.120
	9	0.555	0.451	0.309	0.206	0.120
	10	0.541	0.442	0.310	0.208	0.116
200	9	0.713	0.616	0.464	0.339	0.214
	10	0.688	0.594	0.449	0.325	0.209
	11	0.672	0.579	0.435	0.314	0.194
300	11	0.872	0.810	0.695	0.573	0.420
	12	0.851	0.786	0.665	0.541	0.402
	13	0.850	0.786	0.662	0.533	0.376

Таблица 4.11

Мощность критерия Никулина–Рао–Робсона относительно гипотезы H_2

n	k	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	4	0.368	0.103	0.055	0.031	0.007
20	4	0.209	0.173	0.101	0.065	0.025
	5	0.250	0.210	0.126	0.065	0.039
30	4	0.257	0.188	0.119	0.084	0.043
	5	0.345	0.262	0.181	0.123	0.078
	6	0.349	0.265	0.185	0.127	0.078
40	4	0.264	0.214	0.145	0.095	0.054
	5	0.416	0.329	0.263	0.176	0.114
	6	0.401	0.320	0.231	0.159	0.101
	7	0.474	0.403	0.297	0.218	0.149
50	4	0.305	0.242	0.156	0.101	0.057
	5	0.494	0.409	0.314	0.219	0.151
	6	0.443	0.372	0.268	0.197	0.128
	7	0.548	0.473	0.365	0.281	0.190
100	4	0.380	0.311	0.213	0.156	0.095
	5	0.756	0.691	0.587	0.492	0.392
	6	0.739	0.562	0.449	0.356	0.257
	7	0.791	0.736	0.646	0.558	0.457
	8	0.739	0.676	0.575	0.485	0.379
	9	0.807	0.755	0.667	0.583	0.482
	10	0.784	0.728	0.637	0.548	0.444
150	6	0.771	0.710	0.607	0.511	0.402
	7	0.913	0.881	0.820	0.756	0.667
	8	0.864	0.820	0.743	0.663	0.562
	9	0.919	0.889	0.834	0.774	0.691
	10	0.901	0.866	0.804	0.735	0.643
200	9	0.971	0.956	0.928	0.895	0.841
	10	0.958	0.939	0.902	0.855	0.791
	11	0.973	0.961	0.933	0.900	0.849
300	11	0.997	0.995	0.990	0.983	0.968
	12	0.996	0.993	0.986	0.975	0.956
	13	0.997	0.995	0.990	0.983	0.968

Таблица 4.12

Мощность критерия Никулина–Рао–Робсона относительно гипотезы H_3

n	k	α				
		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	4	0.321	0.083	0.034	0.014	0.005
20	4	0.151	0.120	0.055	0.029	0.009
	5	0.166	0.120	0.065	0.030	0.014
30	4	0.169	0.118	0.060	0.035	0.015
	5	0.193	0.137	0.075	0.042	0.023
	6	0.198	0.138	0.080	0.047	0.024
40	4	0.171	0.126	0.072	0.039	0.017
	5	0.208	0.147	0.092	0.053	0.027
	6	0.218	0.156	0.095	0.054	0.028
	7	0.232	0.173	0.104	0.063	0.034
50	4	0.192	0.138	0.072	0.036	0.017
	5	0.227	0.166	0.100	0.056	0.031
	6	0.230	0.172	0.102	0.063	0.033
	7	0.251	0.188	0.117	0.074	0.040
100	4	0.240	0.143	0.090	0.056	0.016
	5	0.307	0.233	0.152	0.100	0.059
	6	0.296	0.226	0.144	0.093	0.054
	7	0.327	0.260	0.176	0.120	0.074
	8	0.333	0.262	0.177	0.124	0.076
	9	0.347	0.279	0.193	0.134	0.086
	10	0.360	0.290	0.202	0.141	0.091
150	6	0.355	0.284	0.192	0.129	0.078
	7	0.394	0.321	0.225	0.160	0.102
	8	0.395	0.322	0.228	0.163	0.107
	9	0.413	0.341	0.245	0.179	0.121
	10	0.432	0.358	0.263	0.195	0.131
200	9	0.488	0.412	0.311	0.235	0.163
	10	0.498	0.425	0.322	0.244	0.173
	11	0.509	0.436	0.337	0.259	0.183
300	11	0.624	0.553	0.447	0.359	0.267
	12	0.626	0.556	0.450	0.362	0.277
	13	0.641	0.572	0.469	0.381	0.288

4.3. О применении критериев согласия типа χ^2

При проверке гипотез о принадлежности анализируемых данных нормальному закону (с оцениванием по выборке параметров нормального закона) критерии типа χ^2 уступают в мощности непараметрическим критериям согласия.

Критерий согласия χ^2 Пирсона обладает преимуществом в мощности перед непараметрическими критериями в случае проверки простых гипотез [122], когда по выборке параметры нормального закона не оцениваются. Это при условии, что используется асимптотически оптимальное группирование.

Как можно заметить по таблицам с оценками мощности, мощность критериев типа χ^2 существенно зависит от выбранного числа интервалов.

Отметим также, что в общем случае применения критериев согласия типа χ^2 , в том числе при проверке нормальности, мощность соответствующего критерия относительно заданной конкурирующей гипотезы можно максимизировать за счет выбора оптимального числа интервалов и оптимальных границ интервалов [112, 113, 114].

При проверке нормальности по критериям, описанным в данном разделе, существует возможность выбора только числа интервалов с ограничением этого числа сверху, но способ разбиения на интервалы зафиксирован.

В табл. 4.13 для возможности сопоставления с другими критериями приведены максимальные значения оценок мощности (при оптимальном числе интервалов k) критериев согласия χ^2 Пирсона и Никулина-Рао-Робсона относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 при $n=50$ и $\alpha=0.1$. В последней графе указано количество интервалов, при котором получены максимальные оценки мощности.

Хотя при проверке нормальности критерии согласия типа χ^2 уступают в мощности непараметрическим критериям согласия и большинству специальных критериев, не следует отказываться от их применения. Хотя в целом они уступают по мощности, у критериев,

описанных в разделах 4.1 и 4.2, не отмечается недостатков, имеющихся, например, у таких критериев нормальности, как Шапиро–Уилка, Хегази–Грина или Шпигельхальтера, или у непараметрических критериев Жанга со статистиками Z_A и Z_C .

Таблица 4.13

Краткие сведения о свойствах и рекомендации по применению для проверки нормальности критериев типа χ^2

№	Критерий	Мощность относительно гипотез			Примечание
		H_1	H_2	H_3	
1	X_n^2 Пирсона	0.311	0.423	0.155	$k = 5$ относительно H_1 , $k = 7$ относительно H_2 , $k = 7$ относительно H_3 .
2	X_n^2 Никулина–Рао–Робсона	0.240	0.473	0.188	$k = 5$ относительно H_1 , $k = 7$ относительно H_2 , $k = 7$ относительно H_3 .

5. Ранжирование критериев нормальности по мощности

Имея в наличии целый арсенал критериев, специалисту в конкретной области желательно знать, применение каких критериев является предпочтительным. Желательно, чтобы при заданной вероятности α ошибки 1-го рода критерий обеспечивал минимальную вероятность β ошибки 2-го рода. Другими словами, желательно, чтобы критерий обладал максимальной мощностью $1 - \beta$ относительно рассматриваемых (близких) конкурирующих законов.

Пытаясь ответить на этот вопрос, в работах [120, 124] мы проводили сравнительный анализ некоторых групп критериев проверки нормальности, результаты которого были учтены в [132].

В последние годы предложение новых критериев, в том числе, критериев нормальности, как правило, сопровождается исследованием свойств критерия с использованием методов статистического моделирования и анализом мощности критерия относительно некоторого набора альтернатив. Зачастую проводится сравнение с оценками мощности ряда других критериев относительно тех же самых альтернатив. При этом из текста далеко не всегда следует обоснование выбора конкурирующих гипотез, а результаты не позволяют сделать далеко идущих выводов о лучших критериях. Обычно подтверждаются лишь положительные качества рекомендуемого нового критерия. В то же время в работах обзорного характера рассматривается всё более широкий перечень критериев проверки нормальности [85].

В процессе подготовки данного варианта руководства методами статистического моделирования исследовались свойства рассматриваемого множества критериев и в обязательном порядке оценивалась мощность критериев относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 , H_3 , соответствующих симметричным законам. Симметричные законы, соответствующие гипотезам H_1 и H_3 выбраны в связи с тем, что их достаточно трудно отличать от нормального закона.

На основании оценок мощности, показанной критериями относительно H_1 , H_2 и H_3 , уже можно отдавать предпочтение тем или иным критериям, отказываясь от тех, которые не зарекомендовали себя

способностью, например, отличать от H_0 гипотезы типа H_1 и H_3 .

В таблице 5.1 все критерии проверки нормальности, рассмотренные в разделах 2–4, упорядочены по убыванию мощности относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 , H_3 (по величине мощности $1-\beta$, проявленной критериями при $n=50$ и заданном уровне значимости $\alpha=0.1$). Серым цветом в ячейках таблицы, как и ранее, отмечены критерии, для которых в процессе исследования мощности относительно соответствующей гипотезы была выявлена смещённость критерия, то есть при некоторых, как правило, небольших n было обнаружено, что $1-\beta < \alpha$.

Уже то, как зарекомендовал себя соответствующий критерий по мощности относительно соответствующей гипотезы, является определённой характеристикой. Очевидно, что предпочтительней применять критерии, оказавшиеся в верхних частях соответствующих столбцов.

К сожалению, если критерий способен хорошо отличать H_1 от H_0 , это не значит, что он также легко отличает от H_0 гипотезу H_3 или более далёкую гипотезу H_2 . Например энтропийные критерии Васичека, Корреа и Эбрахими показывают высокую мощность относительно H_1 и имеют низкие оценки мощности относительно H_2 и H_3 . А энтропийный критерии Заманзаде–Аргами со статистикой TZ_2 наоборот: низкую мощность относительно H_1 и высокую относительно H_2 и H_3 .

Тем не менее, ориентируясь на таблицу 5.1, можно выделить и наиболее предпочтительные критерии, и наименее предпочтительные критерии, включив в последние критерии, сосредоточенные в нижней части таблицы 5.1. Например, не очень эффективны критерии Чена, Локка–Сперриера T_{1n} , Брис–Хьюберт–Стройфа,

В таблице 5.2 добавлена колонка с полученными оценками мощности критериев относительно гипотезы H_4 , соответствующей асимметричному распределению минимального значения (при $n=50$ и $\alpha=0.1$). Теперь для более однозначных выводов по множеству симметричных и асимметричных альтернатив можно поступить следующим образом.

Таблица 5.1

Упорядоченность критериев нормальности по мощности относительно гипотез $H_1 - H_3$ ($n = 50$, $\alpha = 0.1$)

№	H_1	1- β	H_2	1- β	H_3	1- β
1	Десгань–Мишло X_{EPD}	0.451	Шпигельхальтера	0.790	Гелы–Гаствирта	0.378
2	Корреа	0.441	Гелы–Гаствирта	0.753	Заманзаде–Аргами TZ_2	0.366
3	Васичека	0.434	Заманзаде–Аргами TZ_2	0.752	Хегази–Грина T_2	0.359
4	Эбрахими	0.434	Гаствирта	0.731	Харке–Бера	0.349
5	Д'Агостино Z_2	0.428	Хегази–Грина T_2	0.723	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_4}	0.349
6	Оя \tilde{T}_{12}	0.406	Гири	0.722	Д'Агостино E_p	0.347
7	Дэвида–Хартли–Пирсона	0.400	Бонетта–Сейер	0.722	Шпигельхальтера	0.343
8	Гири	0.394	Десгань–Мишло X_{APD}	0.705	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_6}	0.342
9	Бонетта–Сейер	0.394	Десгань–Мишло X_{EPD}	0.705	Филлибена	0.340
10	Шапиро–Уилка	0.389	Филлибена	0.699	Шапиро–Франция	0.333
11	Гаствирта	0.384	Заманзаде–Аргами TZ_1	0.695	Вайсберга–Бингема	0.333
12	Чена–Шапиро	0.327	Оя \tilde{T}_{12}	0.694	Заманзаде–Аргами TZ_1	0.330
13	Хи-квадрат Пирсона	0.311	Шапиро–Франция	0.691	Десгань–Мишло X_{APD}	0.318
14	Десгань–Мишло X_{APD}	0.304	Вайсберга–Бингема	0.691	Мартинеса–Иглевича	0.301

Продолжение таблицы 5.1

№	H_1	1-β	H_2	1-β	H_3	1-β
15	Жанга Z_C	0.300	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_6}	0.689	Десгань–Мишио X_{EPD}	0.299
16	Заманзаде–Аргами TZ_1	0.293	Мартинеса–Иглевича	0.683	Ван Эса	0.298
17	Ватсона	0.293	Хегази–Грина T_1	0.674	Десгань–Мишио Rn	0.287
18	Андерсона–Дарлинга	0.287	Д'Агостино E_p	0.671	Ройстона	0.273
19	Фросини	0.285	Десгань–Мишио Rn	0.670	Гаствирта	0.273
20	Али–Чорго–Ревеса	0.281	Ван Эса	0.667	Гири	0.272
21	Ройстона	0.280	Харке–Бера	0.654	Бонетта–Сейер	0.272
22	Купера	0.279	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_4}	0.653	Жанга Z_A	0.272
23	Эппса–Пулли	0.275	Али–Чорго–Ревеса	0.643	Жанга Z_C	0.270
24	Десгань–Мишио R_n	0.275	Андерсона–Дарлинга	0.630	Хегази–Грина T_1	0.267
25	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.269	Ватсона	0.626	Дэвида–Хартли–Пирсона	0.255
26	Оя \tilde{T}_{34}	0.262	Эппса–Пулли	0.623	Чена–Шапиро	0.251
27	Мартинеса–Иглевича	0.252	Фросини	0.623	Эппса–Пулли	0.249
28	Никулина–Рао–Робсона	0.240	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.621	Жанга Z_K	0.249

Продолжение таблицы 5.1

№	H_1	1- β	H_2	1- β	H_3	1- β
29	Жанга Z_A	0.239	Ройстона	0.616	Д'Агостино Z_2	0.241
30	Хегази–Грина T_1	0.218	Купера	0.589	Али–Чорго–Ревеса	0.240
31	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_6}	0.216	Жанга Z_A	0.578	Андерсона–Дарлинга	0.230
32	Шпигельхальтера	0.211	Чена–Шапиро	0.576	Оя \tilde{T}_{12}	0.228
33	Колмогорова	0.208	Жанга Z_K	0.569	Локка–Сперриера T_{2n}	0.222
34	Жанга Z_K	0.186	Жанга Z_C	0.548	Лина–Мудхолкара	0.216
35	Жанга	0.179	Колмогорова	0.540	Фросини	0.212
36	Д'Агостино E_p	0.164	Оя \tilde{T}_{34}	0.518	Жанга	0.212
37	Ван Эса	0.150	Локка–Сперриера T_{2n}	0.504	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.209
38	Шапиро–Франция	0.139	Шапиро–Уилка	0.502	Батсона	0.204
39	Вайсберга–Бингема	0.139	Дэвида–Хартли–Пирсона	0.499	Шапиро–Уилка	0.203
40	Чена	0.139	Д'Агостино Z_2	0.489	Купера	0.192
41	Филибена	0.119	Никулина–Рао–Робсона	0.473	Никулина–Рао–Робсона	0.188
42	Заманзаде–Аргами TZ_2	0.086	Хи-квадрат Пирсона	0.423	Колмогорова	0.181

Окончание таблицы 5.1

№	H_1	1-β	H_2	1-β	H_3	1-β
43	Локка–Сперриера T_{1n}	0.074	Васичека	0.397	Оя \tilde{T}_{34}	0.172
44	Брис–Хьюберт–Стройфа	0.162	Эбрахими	0.396	Локка–Сперриера T_{1n}	0.168
45	Харке–Бера	0.071	Корреа	0.382	Хи-квадрат Пирсона	0.155
46	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_4}	0.066	Жанга	0.355	Васичека	0.137
47	Хегази–Грина T_2	0.061	Лина–Мудхолкара	0.332	Эбрахими	0.136
48	Лина–Мудхолкара	0.056	Чена	0.292	Корреа	0.132
49	Гелы–Гаствирта	0.004	Локка–Сперриера T_{1n}	0.255	Чена	0.130
50	Локка–Сперриера T_{2n}	0.000	Брис–Хьюберт–Стройфа	0.147	Брис–Хьюберт–Стройфа	0.100

Таблица 5.2

Ранжирование критериев нормальности

№	Критерий	Мощность относительно H_i				Место относительно H_i				Σ мест	R
		H_1	H_2	H_3	H_4	H_1	H_2	H_3	H_4		
1	Десгань–Мишио X_{APD}	0.304	0.705	0.318	0.744	14	7.5	13	16.5	51	1
2	Заманзаде–Аргами TZ_1	0.293	0.695	0.330	0.717	16.5	11	12	20	59.5	2
3	Десгань–Мишио X_{EPD}	0.451	0.705	0.299	0.356	1	7.5	15	43	66.5	3
4	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_6}	0.216	0.689	0.342	0.744	31	15	8	16.5	70.5	4
5	Д'Агостино E_p	0.164	0.671	0.347	0.756	36	18	6	12.5	72.5	5
6	Шапиро–Франция	0.139	0.691	0.333	0.760	39.5	13.5	10.5	9.5	73	7.5
7	Вайсберга–Бингема	0.139	0.691	0.333	0.760	39.5	13.5	10.5	9.5	73	7.5
8	Хегази–Грина T_2	0.061	0.723	0.359	0.735	47	5	3	18	73	7.5
9	Заманзаде–Аргами TZ_2	0.086	0.752	0.366	0.696	43	3	2	25	73	7.5
10	Ройстона	0.280	0.616	0.273	0.776	21	29	18.5	5.5	74	10
11	Филлибена	0.119	0.699	0.340	0.754	42	10	9	14	75	11
12	Чена–Шапиро	0.327	0.576	0.251	0.776	12	32	26	5.5	75.5	12
13	Гелы–Гаствирта	0.004	0.753	0.378	0.699	49	2	1	24	76	13
14	Гаствирта	0.384	0.731	0.273	0.354	11	4	18.5	44	77.5	14

Продолжение таблицы 5.2

№	Критерий	Мощность относительно H_i				Место относительно H_i				Σ мест	R
		H_1	H_2	H_3	H_4	H_1	H_2	H_3	H_4		
15	Жанга Z_C	0.300	0.548	0.270	0.772	15	34	23	7	79	15
16	Гири	0.394	0.722	0.272	0.271	8.5	6.5	21	46	82	16
17	Харке–Бера	0.071	0.654	0.349	0.756	45	21	4.5	12.5	83	17.5
18	Бонетта–Сейер	0.394	0.722	0.272	0.271	8.5	6.5	21	47	83	17.5
19	Бонтемпса–Меддахи BM_{3_4}	0.066	0.653	0.349	0.757	46	22	4.5	11	83.5	19
20	Жанга Z_A	0.239	0.578	0.272	0.787	29	31	21	3	84	20
21	Шпигельхальтера	0.211	0.790	0.343	0.320	32	1	7	45	85	21
22	Оя \tilde{T}_{12}	0.406	0.694	0.228	0.455	6	12	32	38.5	88.5	22
23	Хегази–Грина T_1	0.218	0.674	0.267	0.724	30	17	24	19	90	23
24	Эппса–Пулли	0.275	0.623	0.249	0.751	23.5	26.5	27.5	15	92.5	24
25	Мартинеса–Иглевича	0.252	0.683	0.301	0.503	27	16	14	36	93	25
26	Шапиро–Уилка	0.389	0.502	0.203	0.765	10	38	39	8	95	26
27	Али–Чорго–Ревеса	0.281	0.643	0.240	0.702	20	23	30	22.5	95.5	27.5
28	Андерсона–Дарлинга	0.287	0.630	0.230	0.702	18	24	31	22.5	95.5	27.5
29	Десгань–Мишио R_n	0.275	0.670	0.287	0.398	23.5	19	17	42	101.5	29
30	Фросини	0.285	0.623	0.212	0.665	19	26.5	35	27	107.5	30

Окончание таблицы 5.2

№	Критерий	Мощность относительно H_i				Место относительно H_i				Σ мест	R
		H_1	H_2	H_3	H_4	H_1	H_2	H_3	H_4		
31	Ван Эса	0.150	0.667	0.298	0.551	38	20	16	34	108	31
32	Ватсона	0.293	0.626	0.204	0.583	16.5	25	38	32	111.5	32
33	Д'Агостино Z_2	0.428	0.489	0.241	0.402	5	40	29	41	115	33
34	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.269	0.621	0.209	0.652	25	28	37	28	118	34
35	Жанга Z_K	0.186	0.569	0.249	0.679	34	33	27.5	26	120.5	35
36	Дэвида–Хартли–Пирсона	0.400	0.499	0.255	0.172	7	39	25	50	121	36
37	Васичека	0.434	0.397	0.137	0.611	3.5	43.5	46.5	29.5	123	37.5
38	Эбрахими	0.434	0.396	0.136	0.611	3.5	43.5	46.5	29.5	123	37.5
39	Локка–Сперриера T_{2n}	0.000	0.504	0.222	0.786	50	37	33	4	124	39
40	Оя \tilde{T}_{34}	0.262	0.518	0.172	0.715	26	36	43	21	126	40.5
41	Корреа	0.441	0.382	0.132	0.586	2	45	48	31	126	40.5
42	Купера	0.279	0.589	0.192	0.526	22	30	40	35	127	42
43	Лина–Мудхолкара	0.056	0.332	0.216	0.827	48	47	34	1	130	43
44	Хи–квадрат Пирсона	0.311	0.423	0.155	0.455	13	42	45	38.5	138.5	44
45	Локка–Сперриера T_{1n}	0.074	0.255	0.168	0.808	44	49	44	2	139	45
46	Колмогорова	0.208	0.540	0.181	0.564	33	35	42	33	143	46
47	Никулина–Рао–Робсона	0.240	0.473	0.188	0.431	28	41	41	40	150	47
48	Жанга	0.179	0.355	0.212	0.476	35	46	36	37	154	48
49	Чена	0.139	0.292	0.130	0.262	41	48	49	48	186	49.5
50	Брис–Хьюберт–Стройфа	0.162	0.147	0.100	0.247	37	50	50	49	186	49.5

В убывающем ряду оценок мощности относительно рассматриваемой гипотезы H_i находится ранг этого критерия. В качестве основы для рейтинга можно взять сумму рангов соответствующего критерия: сумму мест “занятых” критерием по величине мощности относительно H_i , $i = \overline{1, 4}$. При упорядочивании критериев по возрастанию суммы, порядковые номера (ранги) этих сумм указывают рейтинг R соответствующего критерия.

При одинаковой сумме мест будут одинаковыми и рейтинги.

На результаты анализа и предложенное в таблице 5.2 ранжирование (оценки рейтинга) можно ориентироваться в приложениях, отдавая предпочтение применению того или иного критерия для проверки гипотезы о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону.

Вместе с тем из анализа результатов исследований можно сделать не вполне утешительные выводы.

Очевидно, что ряд специальных критериев нормальности имеет явное преимущество в мощности по сравнению с используемыми в этих же целях непараметрическими и параметрическими критериями согласия.

Среди специальных критериев есть фавориты, применение которых в приложениях наиболее целесообразно. По-видимому, с осторожностью к таким критериям можно отнести те, рейтинги которых в таблице 5.2 не опускаются ниже 20.

К сожалению, достаточно обширна группа критериев, неспособных при малых n и малых α отличать от H_0 конкурирующие гипотезы типа H_1 .

Если внимательно посмотреть на результаты в таблице 5.2, то можно обратить внимание на то, что нет критерия, который входил бы в группу лидеров по величине мощности относительно каждой из рассмотренных 4-х конкурирующих гипотез, а минимальная сумма мест (Σ) равна 51. Как правило, если критерий обладает высокой мощностью относительно 2-х – 3-х типов конкурирующих гипотез, то очень плохо с мощностью относительно гипотезы 4-го типа (H_1 или H_4). В качестве примера, достаточно глянуть на ситуацию с критериями Десгань–Мишо со статистикой X_{EPD} , Хегази–Грина со

статистикой T_2 , Заманзаде–Аргами со статистикой TZ_2 .

Всё это говорит о том, что несмотря на наличие множества критериев, идеального (равномерно наиболее мощного) критерия проверки отклонения от нормального закона нет. В такой ситуации рекомендуется применять такую совокупность критериев, чтобы обеспечить распознавание любой конкурирующей гипотезы.

Замечание. Описанные в предшествующих разделах результаты, касающиеся свойств критериев проверки гипотез, имеют место в условиях отсутствия влияния ошибок округления измерений на распределения статистик критериев. Именно в рамках этих свойств имеет место предложенный в данном разделе рейтинг критериев. В последнее время нами отмечалась заметная роль ошибок округления в изменении свойств статистических критериев [137, 138, 139, 140, 62]. Ошибки округления измерений могут существенно менять распределения статистик критериев нормальности и могут отражаться на других свойствах критериев. Это означает, что в таких условиях могут измениться и рейтинги критериев.

6. Анализ погрешностей измерений в классических экспериментах

6.1. О роли проверки нормальности

Для реально наблюдаемых случайных величин любая параметрическая модель, в том числе нормальный закон, может служить лишь приближением, с некоторой точностью описывающей эту случайную величину. Если проверяемая гипотеза о принадлежности выборки наблюдений случайной величины нормальному закону не отклоняется, это не говорит ещё о том, что истинным законом для этой случайной величины является нормальный. Это свидетельствует лишь о том, что расстояние между эмпирическим распределением и нормальным законом, измеренное в соответствии с используемым критерием, не настолько велико, чтобы служить основанием для отклонения гипотезы. И, по-видимому, говорит о том, что нормальный закон является неплохим приближением для неизвестного истинного.

Неотклонение проверяемой гипотезы H_0 о принадлежности нормальному закону открывает возможность на дальнейших этапах статистического анализа использовать множество классических методов и критериев проверки статистических гипотез, корректность применения которых обусловлена принадлежностью наблюдений (или ошибок измерений)циальному закону.

Поэтому при статистическом анализе результатов измерений первым из проверяемых предположений обычно является проверка гипотезы о принадлежности ошибок нормальному закону. Если гипотеза о нормальности не отвергается, то дальнейший анализ становится проще, так как в его рамках открывается возможность использования множества классических критериев, применение которых корректно только при выполнении предположения о нормальности.

При проведении экспериментальных исследований нельзя исключать возможного наличия факторов, которые могут приводить к систематическим ошибкам, к смещённости оценок параметров, к коррелированности результатов измерений, к появлению тренда в той или иной форме. Далеко не всегда (практически никогда) реальные измерения (ошибки измерений) представляют собой выборки

независимых одинаково распределенных нормальных величин. Поэтому и гипотеза о принадлежности нормальному закону ошибок измерений правомерно может отклоняться.

Сама по себе такая ситуация (отклонение гипотезы о нормальности) не является чем-то из ряда выходящим, однако приводит к появлению вопросов, связанных с обеспечением точности измерений и обеспечением корректности дальнейших статистических выводов, так как исключается возможность применения арсенала классических методов, опирающихся на предположение о нормальном законе.

Результаты классических экспериментов, связанных с измерениями физических констант, привлекают интерес не только в силу их исторической ценности, но и как примеры высокого уровня организации и проведения соответствующих измерений. Принято считать, что ошибки измерений в этих экспериментах подчиняютсяциальному закону. Чтобы убедиться в этом, к проверке гипотез о принадлежности ошибок измерений в таких экспериментах нормальному закону возвращались неоднократно, причем, с использованием различных критериев. В некоторых случаях, анализируя классические результаты, авторы работ сравнивают используемые критерии по мощности [89] относительно определенных конкурирующих гипотез. Приводимые оценки мощности позволяют судить о степени уверенности в том, что ошибки в данных экспериментах действительно подчиняются нормальному закону.

В то же время у специалистов в области математической статистики до сих пор нет однозначного мнения относительно преимуществ какого-либо критерия или группы критериев из множества, применяемых для проверки гипотез о принадлежности выборок случайных величинциальному закону. Особую остроту ответ на этот вопрос приобретает при достаточно ограниченных объемах выборок, которые характерны не только для классических экспериментов.

В последние времена интерес к критериям, используемым для проверки нормальности, заметно повысился [28, 30]. Возрос интерес к непараметрическим критериям согласия, применяемым для этих целей [75, 68]. Появились работы, посвященные сравнительному анализу и исследованию мощности модифицированных критериев типа χ^2 , используемых для проверки нормальности [88]. При этом в проводимых исследованиях возрастает роль методов статистического

моделирования.

Сталкиваясь с разрозненными примерами анализа классических результатов, не возникает полноты картины и уверенности в том, что нормальный закон в этих экспериментах наилучшим образом описывает ошибки измерений, и что для проверки гипотез о принадлежности ошибок измерений нормальному закону используются наиболее мощные критерии.

В разделе 2 приведены результаты работ [120, 124], в которых были подробно исследованы свойства и мощность ряда критериев, предназначенных только для проверки нормальности. Эти исследования позволили, с одной стороны, проранжировать исследуемые критерии по мощности относительно рассмотренных конкурирующих законов, а, с другой стороны, выявили существенные недостатки некоторых критериев. Сравнительный анализ мощности критериев согласия, в том числе при проверке нормальности, осуществлялся в работах [51, 53, 54, 121, 122, 123].

Специалист в конкретной области, анализирующий результаты измерений, может не обладать достаточной квалификацией во всём множестве методов статистического анализа, но ему желательно знать, какие критерии и в каком случае наиболее предпочтительны. Поэтому цель проводимого в данном разделе анализа заключается в том, чтобы продемонстрировать использование различных критериев при проверке нормальности ошибок измерений, проведенных при выполнении некоторых классических экспериментов.

6.2. Анализируемые эксперименты

В работе [82] отобран ряд экспериментов, удовлетворяющих довольно строгим требованиям. В данном случае рассматривается четыре эксперимента, измерения в которых проводились высококвалифицированными учеными. Измерялись хорошо известные в настоящий момент величины, а обработка характеризовалась скрупулезным устранением погрешностей, поддающихся учету. Измерения в выборках фиксировались полностью и без пропусков (и без цензурирования).

Генри Кавендиш провел эксперимент по определению средней плотности Земли. Результаты 29 его измерений приведены в таблице 6.1.

Роберт Милликен провел эксперимент с заряженными каплями

масла для измерения заряда электрона, и его результаты ($n = 58$) представлены в таблице 6.2.

Таблица 6.3 включает 100 наблюдений Альберта Майкельсона в опыте по измерению скорости света. Измерялось время прохождения света (туда и обратно) между быстро вращающимся и отстоящим от первого неподвижно закрепленным зеркалом. Расстояние между зеркалами составило приблизительно 605 метров (1986.23 фута).

Т а б л и ц а 6.1

Измерения средней плотности Земли, полученные Генри Кавендишем, (г/см³).

5.50	5.55	5.57	5.34	5.42	5.30
5.61	5.36	5.53	5.79	5.47	5.75
4.88	5.29	5.62	5.10	5.63	5.68
5.07	5.58	5.29	5.27	5.34	5.85
5.26	5.65	5.44	5.39	5.46	

Т а б л и ц а 6.2

Измерения заряда электрона, полученные Робертом Милликеном, (Фр = 1/2 997 924 580 Кл)

4.781	4.764	4.777	4.809	4.761	4.769
4.795	4.776	4.765	4.790	4.792	4.806
4.769	4.771	4.785	4.779	4.758	4.779
4.792	4.789	4.805	4.788	4.764	4.785
4.779	4.772	4.768	4.772	4.810	4.790
4.775	4.789	4.801	4.791	4.799	4.777
4.772	4.764	4.785	4.788	4.799	4.749
4.791	4.774	4.783	4.783	4.797	4.781
4.782	4.778	4.808	4.740	4.790	
4.767	4.791	4.771	4.775	4.747	

Саймон Ньюкомб тремя годами позже провел более обширный эксперимент и уточнил результаты Альберта Майкельсона. Расстояние между зеркалами составило 3721.21 м. В таблице 6.4 приведены 66 полученных значений.

Результаты измерений Кавендиша, Майкельсона и Ньюкомба приводятся по работе [82], а Милликена – по статье [69].

Таблица 6.3

Измерения Майкельсона (+299000 км/ч)

850	1000	960	830	880	880	890	910	890	870
740	980	940	790	880	910	810	920	840	870
900	930	960	810	880	850	810	890	780	810
1070	650	940	880	860	870	820	860	810	740
930	760	880	880	720	840	800	880	760	810
850	810	800	830	720	840	770	720	810	940
950	1000	850	800	620	850	760	840	790	950
980	1000	880	790	860	840	740	850	810	800
980	960	900	760	970	840	750	850	820	810
880	960	840	800	950	840	760	780	850	870

Таблица 6.4

Измерения Саймона Ньюкомба ($\times 10^{-3} + 24.8$, в миллионных долях секунды)

28	29	24	37	36	26	29
26	22	20	25	23	32	27
33	24	36	28	27	32	28
24	21	32	26	27	24	29
34	25	36	30	28	39	16
-44	30	28	32	27	28	23
27	23	25	36	31	24	
16	29	21	26	27	25	
40	31	28	30	26	32	
-2	19	29	22	33	25	

Следует обратить внимание на то, что в каждом из рассматриваемых рядов измерений присутствуют повторяющиеся значения. Это является следствием ограниченной точности средств измерения и естественного округления результатов. В подобных ситуациях применение некоторых критериев оказывается под вопросом. В частности, для критериев, использующих различные оценки энтропии (для критерии Васичека [87], Корреа [20], Ва Эса [86], Эбрахими [31], Заманзаде–Аргами [93]), сам факт наличия в выборках (непрерывных случайных величин) одинаковых значений служит основанием для отклонения проверяемой гипотезы. С такой же проблемой сталкиваются при применении модификаций критериев Оя [70, 71].

6.3. Применяемые критерии нормальности

Для проверки принадлежности ошибок измерений в классических экспериментах нормальному закону использовалась часть наиболее предпочтительных критериев, рассмотренных в предшествующих разделах руководства и проранжированных в таблице 5.2.

В частности, применялись следующие критерии нормальности: Десгань–Миши со статистиками X_{APD} и X_{EPD} [27]; Заманзаде–Аргами со статистиками TZ_1 и TZ_2 [93]; Бонтемпса–Меддахи со статистикой BM_{3_6} [12]; Д'Агостино со статистиками E_p [21] и z_2 [30, 120]; Вайсберга–Бингема [92]; Филлибена [33]; Чена–Шапиро [16]; Гелы–Гаствирта [41]; Гаствирта [40]; Харке–Бера [47, 48]; Бонетта–Сейер [11]; Шапиро–Уилка [76, 77]; Ройстона [74]; Эппса–Пулли [32]; Фросини [35, 36]; Хегази–Грина [45] со статистиками T_1 и T_2 ; Гири [37, 38, 39]; Дэвида–Хартли–Пирсона [23]; Мартинеса–Иглевича [67]; Шпигельхальтера [79].

Для проверки нормальности ошибок измерений использовались также непараметрические критерии согласия [131]: Колмогорова; Крамера–Мизеса–Смирнова; Андерсона–Дарлинга; Купера; Ватсона; Жанга со статистиками Z_A , Z_C , Z_k .

При проверке нормальности непараметрические критерии используются в ситуации проверки сложных гипотез. Ещё раз подчеркнём, что при проверке сложных гипотез распределения статистик данных критериев зависят от ряда факторов: от вида наблюдаемого закона $F(x, \theta)$, соответствующего справедливой проверяемой гипотезе H_0 ; от типа оцениваемого параметра и числа оцениваемых параметров; в некоторых случаях от конкретного значения параметра (например, в случае семейств гамма-, бета-распределений и т.п.); от метода оценивания параметров [149, 125, 126].

Применение непараметрических критериев согласия для проверки гипотез о принадлежности выборок нормальному закону рассмотрено в разделе 3.

Оценивание параметров распределений проводилось методом максимального правдоподобия, так как в случае этого метода оценивания непараметрические критерии, как правило, обладают большей мощностью.

Для анализа результатов измерений рассматриваемых экспериментов использовались также критерий согласия χ^2 Пирсона и модифицированный критерий типа χ^2 Никулина (Никулина–Ра–Робсона) [143, 144, 73, 42].

Напомним, что статистика X_n^2 критерия Пирсона при проверке сложной гипотезы подчиняется χ^2_r -распределению с $r = k - m - 1$ степенями свободы, где k – число интервалов, если оценки m параметров закона находятся в результате минимизации этой статистики или методом максимального правдоподобия по сгруппированным наблюдениям.

Если параметры оцениваются по негруппированной выборке, то известно [19], что при справедливости проверяемой гипотезы и использовании оценок максимального правдоподобия (ОМП) статистика распределена как сумма независимых слагаемых

$$\chi_{k-m-1}^2 + \sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_j^2, \text{ где } \xi_1, \dots, \xi_m \text{ – стандартные нормальные случайные}$$

величины, независимые одна от другой и от χ_{k-m-1}^2 . Однако точный закон распределения статистики неизвестен, и реально найти его можно только при помощи статистического моделирования [148]. В разделе 4 приведены модели предельных распределений статистик этого критерия при проверке нормальности для различного числа интервалов при асимптотически оптимальном группировании. Заметим, что мощность критерия Пирсона зависит от способа группирования и выбранного числа интервалов [149].

Статистика Y_n^2 критерия Никулина–Рао–Робсона при проверке сложной гипотезы подчиняется χ_{k-1}^2 -распределению с $k - 1$ степенями свободы. Подразумевается, что используются ОМП по негруппированной выборке. Мощность критерия Никулина–Рао–Робсона также зависит от способа группирования и выбранного числа интервалов [149].

6.4. Проверка гипотезы о принадлежности анализируемых выборок нормальному закону

В таблицах 6.5 и 6.6 для каждого из анализируемых наборов данных представлены результаты проверки гипотезы о принадлежности выборок нормальному закону по всем применяемым критериям. В таблицах приведены значения статистик S^* соответствующих критериев и достигнутый уровень значимости P_{value} . Проверяемая гипотеза H_0 по соответствующему критерию не отклоняется, если достигнутый уровень значимости P_{value} больше заданного α . Достигнутые уровни значимости P_{value} вычислялись в соответствии с выражением (1.2) для правосторонних критериев, выражением (1.4) – для левосторонних и выражением (1.5) – для двусторонних.

Для данных Ньюкомба результаты проверки гипотезы приведены после исключения 2-х наблюдений (-44 и -2), которые отнесены к аномальным измерениям (выбросам).

Добавим, что вычисление статистик критериев и оценка P_{value} осуществлялись в рамках системы ISW [146].

Таблица 6.5

Результаты проверки гипотезы о принадлежности нормальным законам наблюдений Кавендиша и Милликена

Критерий	Кавендиш		Милликен	
	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}
Десгань–Мишио X_{APD}	1.0465	0.588	0.6516	0.719
Заманзаде–Аргами TZ_1 , $m = 5$	4.1586	0.909	4.0759	0.502
Десгань–Мишио X_{EPD}	0.3915	0.689	0.3354	0.734
Бонтемпса–Меддахи BM_{3_6}	1.0683	0.636	0.8286	0.761
Д'Агостино E_p	1.5517	0.431	0.9950	0.579
Вайсберга–Бингема	0.9768	0.664	0.9857	0.640
Хегази–Грина T_2	0.0305	0.562	0.0169	0.586
Заманзаде–Аргами TZ_2 , $m = 3$	3.8709	0.539	3.9086	0.485
Ройстона	-0.7924	0.808	-0.3686	0.644

Продолжение таблицы 6.5

Критерий	Кавендиш		Милликен		
	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}	
Филибена	0.988	0.639	0.9928	0.631	
Чена–Шапиро	1.0194	0.818	1.0097	0.675	
Гелы–Гаствирта	0.9441	0.456	0.7024	0.636	
Гаствирта	-0.02628	0.502	0.02198	0.481	
Гири	0.8008	0.874	0.7977	0.864	
Харке–Бера	0.9598	0.490	0.6991	0.657	
Бонетта–Сейер	-0.07605	0.874	0.00827	0.864	
Мартинеса–Иглевича	1.0424	0.289	1.0059	0.375	
Шпигельхальтера	1.2272	0.633	1.2427	0.955	
Хегази–Грина T_1	0.1072	0.871	0.0772	0.880	
Эппса–Пулли	0.0519	0.734	0.0296	0.872	
Шапиро–Уилка	0.9785	0.821	---	---	
Фросини	0.1224	0.905	0.1156	0.948	
Д’Агостино z_2	0.5505	0.582	0.4088	0.683	
Дэвида–Хартли–Пирсона	4.3902	0.473	4.5776	0.979	
χ^2_n Пирсона (ОМП по негруппированным данным)	$k=4$	0.3816	0.750	0.1782	0.927
	$k=5$	0.8403	0.799	1.3395	0.619
	$k=6$	1.9787	0.897	1.6741	0.718
	$k=7$	1.7509	0.998	6.6350	0.163
χ^2_n Пирсона (ОМП по группированным данным)	$k=4$	0.1156	0.734	1.4201	0.233
	$k=5$	0.1887	0.920	1.4246	0.491
	$k=6$	0.6699	0.880	0.5701	0.903
	$k=7$	0.6768	0.954	2.3917	0.664
Y^2_n Никулина	$k=4$	1.0883	0.780	0.9730	0.808
	$k=5$	1.2032	0.878	1.5811	0.812
	$k=6$	5.5553	0.352	1.9131	0.861
	$k=7$	2.2440	0.896	6.8988	0.330

Окончание таблицы 6.5

Критерий	Кавендиш		Милликен	
	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}
Колмогорова	0.5151	0.798	0.4922	0.845
Андерсона–Дарлинга	0.2027	0.886	0.2064	0.870
Крамера–Мизеса–Смирнова	0.0253	0.922	0.0238	0.933
Купера	0.8096	0.941	0.9584	0.736
Ватсона	0.0194	0.947	0.0215	0.935
Z_A Жанга	3.3160	0.633	3.3187	0.491
Z_C Жанга	3.3838	0.753	5.6077	0.572
Z_K Жанга	0.5498	0.714	0.6747	0.734

Таблица 6.6

Результаты проверки гипотезы о принадлежности нормальным законам наблюдений Майкельсона и Ньюкомба

Критерий	Майкельсон		Ньюкомб	
	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}
Десгань–Мишио X_{APD}	1.0317	0.594	1.284	0.522
Заманзаде–Аргами TZ_1 , $m = 5$	4.1057	0.650	4.0850	0.544
Десгань–Мишио X_{EPD}	0.8882	0.375	0.7983	0.422
Бонтемпса–Меддахи BM_{3_6}	1.1329	0.695	1.2780	0.622
Д’Агостино E_p	1.2965	0.523	0.7230	0.672
Вайсберга–Бингема	0.9858	0.305	0.9853	0.556
Хегази–Грина T_2	0.0170	0.236	0.0178	0.476
Заманзаде–Аргами TZ_2 , $m = 5$	3.9447	0.446	3.9000	0.354
Ройстона	-0.0344	0.514	-0.2747	0.608
Филибена	0.9927	0.286	0.9925	0.540
Чена–Шапиро	1.0057	0.566	1.0090	0.672
Гелы–Гаствирта	0.6641	0.672	0.4749	0.750

Продолжение таблицы 6.6

Критерий	Майкельсон		Ньюкомб		
	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}	
Гаствирта	1.0630	0.151	0.90077	0.187	
Гири	0.7790	0.320	0.7745	0.309	
Харке–Бера	0.2949	0.854	0.2474	0.877	
Бонетта–Сейер	0.9108	0.319	0.9089	0.309	
Мартинеса–Иглевича	1.0125	0.268	1.0171	0.294	
Шпигельхальтера	1.2773	0.325	1.2810	0.168	
Хегази–Грина T_1	0.0922	0.226	0.0977	0.450	
Эппса–Пулли	0.0742	0.607	0.1074	0.461	
Шапиро–Уилка	---	---	---	---	
Фросини	0.2194	0.239	0.1906	0.408	
Д'Агостино z_2	1.1359	0.256	0.6603	0.509	
Дэвида–Хартли–Пирсона	5.6954	0.190	4.7212	0.902	
X_n^2 Пирсона (ОМП по негруппированным данным)	$k=4$	1.2307	0.436	1.0262	0.488
	$k=5$	2.4182	0.370	0.0708	0.990
	$k=6$	5.4280	0.165	0.8710	0.902
	$k=7$	5.9124	0.225	2.4062	0.719
X_n^2 Пирсона (ОМП по группированным данным)	$k=4$	0.6060	0.436	3.6822	0.055
	$k=5$	3.1733	0.205	0.8555	0.652
	$k=6$	2.1559	0.541	3.9529	0.267
	$k=7$	2.3475	0.672	5.0096	0.286
Y_n^2 Никулина	$k=4$	3.6631	0.300	2.5530	0.466
	$k=5$	10.9737	0.027	0.2345	0.994
	$k=6$	8.3858	0.136	1.9755	0.853
	$k=7$	14.4108	0.025	4.8375	0.565
Колмогорова	0.8443	0.092	0.7379	0.225	
Андерсона–Дарлинга	0.4578	0.267	0.3783	0.411	
Крамера–Мизеса–Смирнова	0.0762	0.231	0.0623	0.356	

Окончание таблицы 6.6

Критерий	Майкельсон		Ньюкомб	
	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}
Купера	1.3863	0.110	1.2261	0.273
Ватсона	0.0753	0.201	0.0592	0.341
Z_A Жанга	3.3126	0.459	3.3050	0.751
Z_C Жанга	5.2182	0.739	4.4670	0.752
Z_K Жанга	1.3562	0.292	1.3329	0.223

В стандарте [103] и в настоящем руководстве для вычисления статистики критерия Шапиро–Уилка таблицы коэффициентов представлены для объемов выборок не более 50, поэтому в данном случае значения S^* и P_{value} приведены только для результатов Кавендиша ($n=29$). При вычислении статистик критериев типа χ^2 использовалось асимптотически оптимальное группирование [148] при числе интервалов $k = \overline{4,7}$. При проверке сложных гипотез с использованием критериев согласия параметры нормального закона оценивались методом максимального правдоподобия.

Представленные в таблицах 6.5 и 6.6 значения достигаемых уровней значимости показывают, что нет оснований для отклонения гипотезы о нормальности ни по одному из критериев.

6.5. О вычислении достигнутых уровней значимости

Вычисление достигнутых уровней значимости в соответствии с соотношениями (1.2) для правостороннего критерия, (1.4) для левостороннего и (1.5) для двустороннего не вызывает труда при известном распределении статистики критерия. Если информация о распределении статистики соответствующего критерия отсутствует и представлена лишь таблицей процентных точек, либо объемы выборок относительно невелики и таковы, что распределение статистики существенно отличается от предельного (асимптотического), то корректное вычисление достигнутого уровня значимости P_{value} представляет собой некоторую проблему.

Например, в случае непараметрических критериев согласия Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга и других при таких ограниченных, как в данном случае, объемах выборок следует учитывать, что распределения статистик будут несколько отличаться от предельных распределений, модели которых представлены в данном руководстве и в [125, 126, 55, 131] для ситуации проверки сложных гипотез.

При малых объемах выборок распределения статистики X_n^2 критерия Пирсона при проверке нормальности с оцениванием параметров по негруппированным данным методом максимального правдоподобия (с использованием таблиц асимптотически оптимального группирования) будут также несколько отличаться от моделей, представленных в разделе 4.1.

Предельным распределением статистики Y_n^2 критерия Никулина–Рао–Робсона является χ_{k-1}^2 -распределение (критерий обладает свойством «свободы от распределения»). Однако при малых, как в данном случае, объемах выборок наблюдается отличие распределения статистики от предельного.

Для критериев нормальности Шапиро–Уилка, Эппса–Пулли, Фросини, Хегази–Грина, Гири, Дэвида–Хартли–Пирсона и Шпигельхальтера характерна сильная зависимость распределений статистик от объема выборки. В то же время в литературных источниках отсутствуют сведения о законах распределения статистик и приводятся лишь таблицы процентных точек. Критерий Шапиро–Уилка – левосторонний, правосторонними критериями являются критерий Шапиро–Уилка для больших выборок (критерий Ройстона) [74], критерии Эппса–Пулли, Фросини, оба критерия Хегази–Грина, критерий Шпигельхальтера. Двусторонними критериями являются критерии Гири и Дэвида–Хартли–Пирсона. Распределение статистики критерия Ройстона [74] в области больших значений статистик, на основании которых принимается решение о том, отклонять или нет проверяемую гипотезу, хорошо аппроксимируется стандартным нормальным законом в широком диапазоне объемов выборок. Однако в целом зависимость распределения статистики критерия от объема выборки при малых n является заметной.

В связи с вышеуказанными замечаниями при определении достигнутых уровней значимости во всех случаях, когда распределение

статистики применяемого критерия либо неизвестно, либо при данном объеме выборки могло отличаться от асимптотического или предельного, использовались распределения статистик критериев, полученные в результате статистического моделирования. При этом число испытаний составило величину $N = 1\,660\,000$, что позволяет определить достигаемый уровень значимости с точностью $\epsilon < 10^{-3}$ при доверительной вероятности $\gamma = 0.99$.

6.6. Конкурирующие законы, пригодные для описания результатов анализируемых экспериментов

Естественно желание проверить, какие модели законов, кроме нормального, позволяют достаточно хорошо описывать результаты анализируемых экспериментов.

Для каждого набора данных с использованием критериев согласия Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга и типа χ^2 Никулина из 38 законов распределения вероятностей, реализованных в программной системе ISW [146], были отобраны законы, относительно которых гипотеза о принадлежности к ним соответствующих выборок не отклонялась, и критерии показали наибольший средний достигаемый уровень значимости. При проверке сложных гипотез параметры законов оценивались методом максимального правдоподобия.

Для наблюдений Кавендиша с объемом выборки $n = 29$ наилучшими моделями оказались: нормальный закон с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

и параметрами $\mu = 5.4479$ и $\sigma = 0.2171$; распре-

деление Лапласа $f(x) = \frac{1}{2\theta_1} e^{-|x-\theta_0|/\theta_1}$ с параметрами сдвига $\theta_0 = 5.46$

и масштаба $\theta_1 = 0.1737$; логарифмически нормальный закон

$$f(x) = \frac{1}{x\theta_1\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x - \theta_0)^2/2\theta_1^2}$$

при $\theta_0 = 1.6944$ и $\theta_1 = 0.0403$; логисти-

ческий $f(x) = \frac{1}{\theta_1} \exp\left\{-\frac{(x-\theta_0)}{\theta_1}\right\} \left/ \left[1 + \exp\left\{-\frac{(x-\theta_0)}{\theta_1}\right\}\right]^2\right.$ при

$\theta_0 = 5.456$, $\theta_1 = 0.1233$. Полученные в результате проверки сложных гипотез о согласии с соответствующими моделями законов значения статистик S^* и достигнутых уровней значимости P_{value} применяемых критериев согласия представлены в таблице 6.7.

Т а б л и ц а 6.7

Проверка согласия с отобранными моделями для данных Кавендиша

Критерий	Нормальный		Лапласа		Лог-нормальный		Логистический	
	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}
Y_n^2 Никулина	1.203	0.878	2.791	0.593	1.203	0.878	3.037	0.552
Колмогорова	0.515	0.789	0.560	0.700	0.538	0.730	0.386	0.974
Андерсона–Дарлинга	0.203	0.879	0.310	0.687	0.244	0.769	0.182	0.908
Крамера–Мизеса–Смирнова	0.025	0.913	0.050	0.556	0.030	0.837	0.024	0.882

Для данных Милликена с объемом выборки $n=58$ среди отобранных моделей оказались нормальный закон с оценками параметров ($\mu = 4.7808$, $\sigma = 0.0152$), распределение Лапласа с оценками параметров ($\theta_0 = 4.7813$, $\theta_1 = 0.0125$) и обобщенный нормальный закон (1.10)

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp\left\{-\left(\frac{|x-\theta_0|}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right\}$$

(или двустороннее экспоненциальное – ДЭ) с параметрами $\theta_0 = 4.7808$, $\theta_1 = 0.0214$, $\theta_2 = 1.9903$. Результаты проверки гипотез по соответствующим критериям приведены в таблице 6.8.

Для наблюдений Майкельсона с объемом выборки $n=100$ наилучшими моделями оказались нормальный закон ($\mu = 852.3992$, $\sigma = 78.6145$), логистический ($\theta_0 = 851.4711$, $\theta_1 = 44.3633$) и логариф-

математически нормальный ($\theta_0 = 6.7437$, $\theta_1 = 0.0935$) (см. таблицу 6.9).

Таблица 6.8

Проверка согласия с отобранными моделями для данных Милликена

Критерий	Нормальный		Лапласа		ДЭ	
	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}
Y_n^2 Никулина	1.581	0.812	4.450	0.349	3.406	0.307
Колмогорова	0.492	0.845	0.690	0.361	0.494	0.806
Андерсона–Дарлинга	0.206	0.870	0.392	0.508	0.205	0.828
Крамера–Мизеса–Смирнова	0.024	0.933	0.062	0.408	0.024	0.911

Таблица 6.9

Проверка согласия с отобранными моделями для данных Майкельсона

Критерий	Нормальный		Логистический		Лог-нормальный	
	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}
Y_n^2 Никулина	10.973	0.027	7.673	0.104	3.619	0.460
Колмогорова	0.844	0.092	0.697	0.169	0.710	0.277
Андерсона–Дарлинга	0.458	0.267	0.434	0.215	0.446	0.285
Крамера–Мизеса–Смирнова	0.076	0.231	0.065	0.193	0.068	0.300

В данном случае по достигнутым уровням значимости можно говорить о предпочтительности модели логарифмически нормального закона.

Наилучшей моделью для полной выборки результатов Ньюкомба оказалось распределение Коши $f(x) = \frac{\theta_1}{\pi[\theta_1^2 + (x - \theta_0)^2]}$ с ОМП

параметров (27.2844, 2.4937). Неробастность ОМП и влияние выбросов (-44 и -2) приводят к построению модели нормального закона с параметрами (26.2121, 10.6366), который не согласуется с эмпирическим распределением (см. рис. 6.1 и таблицу 6.10). Следует отметить, что Ньюкомб отнёс к аномальным наблюдениям значение –

44 и не учитывал его при подведении итогов.

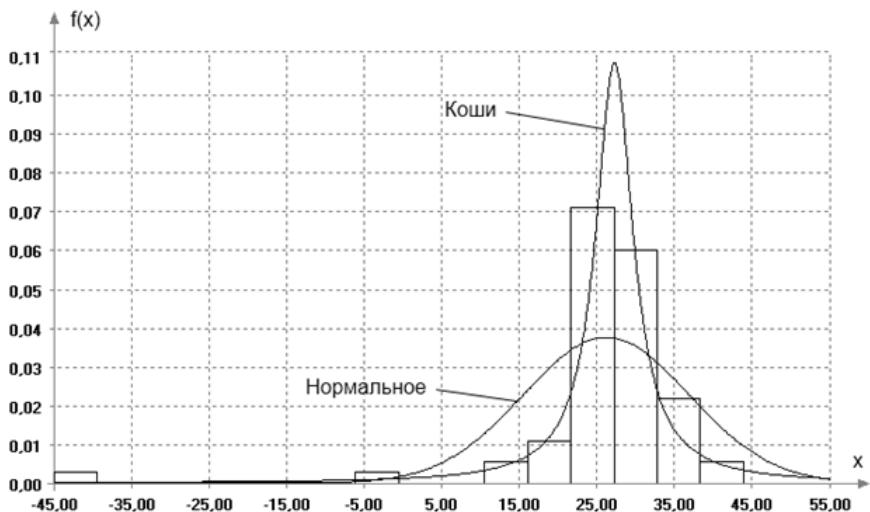


Рис. 6.1. Гистограмма для выборки Ньюкомба и плотности распределений нормального и Коши с соответствующими ОМП параметрами ($\mu = 26.2121$, $\sigma = 10.6636$ и $\theta_0 = 27.2844$, $\theta_1 = 2.9437$).

Таблица 6.10

Проверка согласия с отобранными моделями для данных Ньюкомба

Критерий	Нормальный		Коши	
	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}
Y_n^2 Никулина	71.436	0.000	6.376	0.173
Колмогорова	1.890	0.000	0.535	0.653
Андерсона–Дарлинга	5.819	0.000	0.550	0.312
Крамера–Мизеса–Смирнова	1.003	0.000	0.058	0.410

Применение робастных оценок по группированным данным [110, 111] или оценок с цензурированием выпадающих значений и последующее использование параметрического метода отбраковки приводит к исключению в качестве аномальных обоих значений (-44 и

–2). В частности, если провести левостороннее цензурирование I-го типа с точкой цензурирования $C=15$ и оценить параметры нормального распределения по такой выборке, то полученные ОМП параметров будут равны $\hat{\mu}=27.3043$ и $\hat{\sigma}=5.5785$. Для закона с такими параметрами значения –44 и –2 будут отнесены к выбросам.

Проверить адекватность модели, полученной по цензурированной выборке, можно с использованием рандомизации цензурированных наблюдений и преобразования Смирнова [42]. В данном случае в исходной выборке цензурированные наблюдения (значения –44 и –2) заменяются следующим образом. На интервале $[0, \Phi(C; \hat{\mu}, \hat{\sigma})]$, где $\Phi(C; \hat{\mu}, \hat{\sigma})$ – функция распределения нормального закона в точке C , по равномерному закону будут сгенерированы псевдослучайные величины η_i , $i = \overline{1, 2}$, которые преобразуются в соответствии с выражением $x_i = \Phi^{-1}(\eta_i, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$ и добавляются к остальным 64 элементам выборки. Далее при проверке согласия полученной таким образом выборки с нормальным законом используются модели распределений статистик, применяемые при проверке соответствующих сложных гипотез [149, 125, 126, 55, 131]. Достигнутые уровни значимости по критериям χ^2 Пирсона, Колмогорова, Андерсона–Дарлинга и Крамера–Мизеса–Смирнова в данном случае оказались равными, соответственно, 0.302, 0.367, 0.287, 0.277. Таким образом, для отклонения гипотезы о нормальности оснований нет.

Для редуцированной выборки (без выбросов) лучшими моделями оказались нормальный закон с параметрами ($\mu = 27.75$, $\sigma = 5.0436$), распределение Лапласа ($\theta_0 = 27.75$, $\theta_1 = 3.0963$) и логарифмически нормальное распределение ($\theta_0 = 3.3061$, $\theta_1 = 0.1876$) (см. таблицу 6.11).

Конкурирующие модели законов для данных Кавендиша можно упорядочить по близости к нормальному закону следующим образом: наиболее далеким законом является распределение Лапласа; ближе – логистический закон; наиболее близкий – логарифмически нормальный (см. рис. 6.2).

То же самое можно сказать относительно других экспериментов, когда эти законы оказываются среди моделей, пригодных для описания результатов измерений.

Таблица 6.11

Проверка согласия с моделями для данных Ньюкомба (без выбросов)

Критерий	Нормальный		Лапласа		Лог-нормальный	
	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}
Y_n^2 Нikuлина	0.23 4	0.994	2.59 3	0.628	7.041	0.134
Колмогорова	0.73 8	0.225	0.71 9	0.299	0.625	0.482
Андерсона–Дарлинга	0.37 8	0.411	0.42 4	0.447	0.398	0.370
Крамера–Мизеса–Смирнова	0.06 2	0.356	0.07 3	0.304	0.056	0.425

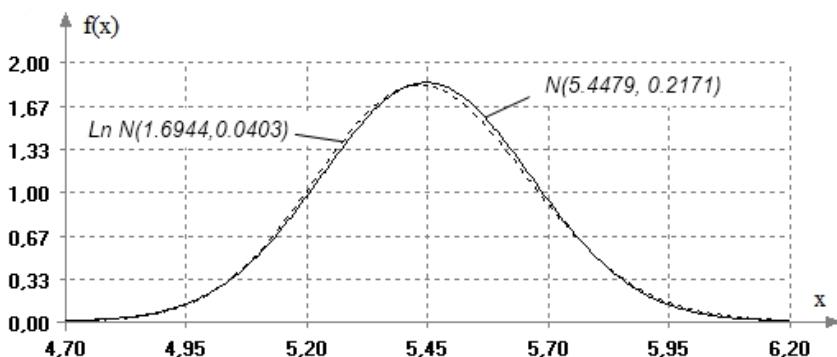


Рис. 6.2. Плотности распределений нормального и логарифмически нормального законов, соответствующие гипотезам H_0^{29} и H_2^{29} .

6.7. Выводы по результатам анализа

Подводя итоги анализа, можно констатировать, что нет оснований для отклонения гипотезы о нормальности ошибок измерений в рассмотренных классических экспериментах.

В то же время, очевидно, что для описания ошибок измерений в данных экспериментах можно подобрать и другие параметрические модели законов, не менее хорошо согласующиеся с результатами измерений.

Например, при использовании для описания распределений семейства (1.10), частным случаем которого является нормальный закон, всегда можно построить модель, которая в определенном смысле (в зависимости от меры близости и метода оценивания) оказывается ближе к эмпирическому распределению, чем нормальный закон.

В частности, для описания данных Кавендиша получаем распределение вида (1.10) с ОМП параметров $\theta_0 = 5.4486$, $\theta_1 = 0.3024$, $\theta_2 = 1.9440$, для данных Милликена – $\theta_0 = 4.7808$, $\theta_1 = 0.0214$, $\theta_2 = 1.9903$, для данных Майкельсона – $\theta_0 = 851.315$, $\theta_1 = 100.047$, $\theta_2 = 1.6801$, для данных Ньюкомба – $\theta_0 = 27.652$, $\theta_1 = 6.2432$, $\theta_2 = 1.6160$. Результаты проверки согласия с этими законами с использованием непараметрических критериев согласия приведены в таблице 6.12. Их можно сравнить с результатами проверки нормальности по этим критериям (со значениями статистик и достигнутыми уровнями значимости), приводимыми в таблицах 6.5 и 6.6.

Таблица 6.12

Проверка согласия анализируемых данных с законами семейства (1.10)

Критерий	Кавендиш		Милликен		Майкельсон		Ньюкомб	
	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}	S^*	P_{value}
Колмого-рова	0.501	0.765	0.494	0.806	0.682	0.191	0.648	0.268
Андерсона –Дарлинга	0.198	0.845	0.205	0.828	0.417	0.205	0.301	0.458
Крамера–Мизеса–Смирнова	0.025	0.882	0.024	0.911	0.063	0.189	0.045	0.400

И тем ни менее, ответ о наиболее предпочтительной модели, опирающийся на результаты проверки с использованием критериев согласия, необязательно будет в пользу модели семейства (1.10).

7. Развитие технологий проверки статистических гипотез

7.1. Изменение роли компьютерных технологий при статистическом анализе данных

Современный этап развития статистических методов характеризуется всё более интенсивным использованием компьютерных технологий анализа данных и методов статистического (имитационного) моделирования при исследовании статистических закономерностей. Компьютерные технологии существенно дополняют аналитические методы при совершенствовании математического аппарата прикладной статистики, помогают находить приближенные решения в тех случаях, когда этого не удается сделать аналитическими методами. На основании имитационного моделирования можно делать не только асимптотические выводы, но и прослеживать изменения закономерностей с ростом объёмов выборок, моделировать и строить модели распределений любой исследуемой статистики в конкретной ситуации [149]. Основная масса исследований, позволивших подготовить данное руководство, также опиралась на использование имитационного моделирования и компьютерных технологий. С применением методов статистического моделирования были расширены существовавшие ранее таблицы процентных точек, представленные в руководстве.

Самой первой работой, в которой компьютерное моделирование оставило заметный вклад в развитие статистических критериев, является работа [63], где Лиллифорс построил таблицу процентных точек для критерия, использующего статистику Колмогорова при проверке нормальности. С тех пор многие таблицы процентных точек (квантилей распределений) для различных критериев проверки статистических гипотез обязаны своему появлению методам статистического моделирования.

В настоящее время в связи с резким увеличением возможностей вычислительной техники и информационных технологий в программных системах статистического анализа существенно возрастает роль компьютерных технологий анализа данных и исследования статистических закономерностей. Например, когда

распределение статистики непараметрического критерия согласия, используемого для проверки некоторой сложной гипотезы, к моменту начала проверки неизвестно (так как не были определены оценки параметров, от которых зависит это распределение), появляется возможность исследования распределения статистики в реальном времени проверки гипотезы (в интерактивном режиме) [56, 57, 130, 131, 58]. В интерактивном режиме можно исследовать распределения статистик различных параметрических и непараметрических критериев, используемых в условиях нарушения стандартных предположений, и осуществлять корректные выводы в этих нестандартных условиях.

Точно так же в интерактивном режиме можно исследовать неизвестное распределение статистики критерия нормальности, зависящее от объема выборки, при том значении n , которое соответствует анализируемой выборке, и оценить по найденному в результате моделирования (эмпирическому) распределению статистики достигнутый уровень значимости.

7.2. Интерактивный подход к вычислению p -value

Принятие решения о результатах проверки гипотезы H_0 на основании достигнутого уровня значимости p_{value} всегда более обосновано (см. раздел 1.1), чем в результате сравнения полученного значения статистики с заданным критическим значением. В последнем случае остаётся не ясным, насколько далеко на самом деле истинное распределение, которому принадлежит анализируемая выборка (и которое в действительности всегда остается неизвестным), от нормального закона.

К сожалению, распределения ряда специальных критериев проверки нормальности существенно зависят от объемов выборок, в связи с чем при формировании решения о результатах проверки гипотезы H_0 (отклонять – не отклонять) опираются на таблицы процентных точек. Такая же проблема с применением непараметрических критериев согласия Жанга со статистиками Z_A , Z_C и Z_K .

С другой стороны, реальные объемы выборок, которые приходится анализировать, как правило, достаточно ограничены. А при малых n действительные распределения статистик критериев могут

существенно отличаться от предельных или приближенных асимптотических распределений этих же статистик. Поэтому использование последних вместо действительных распределений статистик при малых n приводит к ошибкам при вычислении достигнутого уровня значимости.

Какой может быть выход? Или каковы перспективы повышения качества статистических выводов?

При исследовании результатов классических экспериментов в разделе 6 для объективности анализа достигнутый уровень значимости вычислялся на основании моделирования распределений статистик применяемых критериев при объемах выборок n , соответствующих объемам выборок анализируемых экспериментов. При таком подходе необходимое для проверки гипотезы эмпирическое распределение $G_N(S_n | H_0)$ статистики соответствующего критерия строится в результате статистического моделирования с точностью, зависящей от числа экспериментов N в методе Монте–Карло [119]. Затем по эмпирическому распределению $G_N(S_n | H_0)$, например, для правостороннего критерия определяется оценка достигнутого уровня значимости $p_{value} = P\{S_n \geq S^*\}$, где S^* – вычисленное по анализируемой выборке значение статистики.

Такое статистическое моделирование может проводиться в интерактивном режиме в ходе осуществляемого статистического анализа [56, 57, 130, 131, 58], а затем его результаты использоваться при формировании вывода по итогам проверки гипотезы.

Реализация такого интерактивного режима требует наличия развитого программного обеспечения, позволяющего (как в [146]) в целях ускорения распараллеливать процессы моделирования и привлекать доступные вычислительные ресурсы. В условиях распараллеливания время построения распределения $G_N(S_n | H_0)$ статистики критерия оказывается не очень заметным на фоне полного решения задачи статистического анализа.

В качестве примера в таблице 7.1 демонстрируется точность определения достигнутых уровней значимости для специальных критериев нормальности в зависимости от величины выборки N моделируемых в интерактивном режиме эмпирических распределений статистик при проверке гипотезы о нормальности результатов

Кавендиша (см. табл. 6.1).

Можно обратить внимание на различие в значениях достигнутого уровня значимости для двустороннего критерия Д'Агостино со статистикой z_2 в таблице 7.1 ($P_{value} = 0.537$) и в таблице 6.5 ($P_{value} = 0.582$). В таблице 6.5 это значение получено по асимптотическому распределению данной статистики (стандартному нормальному закону). Как видим, отличие действительного распределения этой статистики при $n = 29$ от стандартного нормального закона существенно сказывается на оценке определяемого P_{value} .

Таблица 7.1

Достигнутые уровни значимости, полученные для специальных критериев нормальности по данным Кавендиша при различных N

Критерий	Значение статистики	$N = 10^3$	$N = 10^4$	$N = 10^5$	$N = 10^6$
Д'Агостино z_2	0.5505	0.576	0.534	0.537	0.537
Д'Агостино z_1 и z_2	1.5517	0.448	0.430	0.429	0.431
Шпигельхальтера	1.2272	0.644	0.624	0.632	0.633
Шапиро–Уилка	0.9785	0.819	0.814	0.819	0.820
Ройстона	-0.7924	0.806	0.799	0.805	0.807
Хегази–Грина T_2	0.03051	0.561	0.555	0.559	0.562
Хегази–Грина T_1	0.10722	0.873	0.870	0.871	0.871
Гири	0.80084	0.904	0.858	0.870	0.874
Фросини	0.12237	0.909	0.903	0.905	0.905
Эппса–Палли	0.05192	0.738	0.726	0.732	0.734
Дэвида–Хартли–Пирсона	4.3902	0.508	0.469	0.473	0.473

В [146] интерактивный режим исследования распределений статистик реализован для следующих непараметрических критериев согласия: Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга, Купера, Ватсона, Жанга (3-х критериев).

При этом могут использоваться различные методы оценивания параметров. В таблице 7.2 показано, как в зависимости от объема N моделируемых выборок статистик сходятся к истинным значениям оценки достигнутых уровней значимости для непараметрических

критериев согласия при проверке гипотезы о нормальности тех же результатов Кавендиша.

Использование интерактивного режима и реализация возможности вычисления достигнутых уровней значимости при использовании критериев, для которых неизвестны распределения статистик (асимптотических, предельных или при конкретных n) существенно повышают информативность результатов проверки статистических гипотез и качество (корректность) статистических выводов.

Таблица 7.2

Достигнутые уровни значимости, полученные для непараметрических критериев согласия при проверке нормальности по данным Кавендиша при различных N

Критерий	Значение статистики	$N = 10^3$	$N = 10^4$	$N = 10^5$	$N = 10^6$
Колмогорова	0.5151	0.802	0.795	0.796	0.798
Андерсона–Дарлинга	0.2027	0.882	0.883	0.885	0.886
Крамера–Мизеса–Смирнова	0.0253	0.916	0.920	0.921	0.922
Купера	0.8096	0.936	0.939	0.940	0.941
Ватсона	0.0194	0.949	0.949	0.947	0.947
Z_A Жанга	3.3160	0.642	0.627	0.631	0.633
Z_C Жанга	3.3838	0.746	0.742	0.750	0.753
Z_K Жанга	0.5498	0.701	0.706	0.712	0.714

В программной системе статистического анализа [146] такая возможность реализована для всего множества критериев проверки отклонения распределения от нормального закона, рассмотренного в данном руководстве.

8. Применение критериев нормальности в условиях влияния ошибок округления

8.1. Влияние ошибок округления на распределения статистик критериев нормальности

Классические результаты, касающиеся асимптотических свойств рассмотренных критериев, или результаты, представленные в данном руководстве и характеризующие реальные свойства этих критериев, опираются на предположение, что анализируемые данные представляют собой выборки независимых одинаково распределённых непрерывных случайных величин. Именно при выполнении данного условия гарантируется корректность выводов по применяемым критериям нормальности. В выборках непрерывной случайной величины исключено появление повторяющихся значений.

Как правило, в такой ситуации отклонением реального распределения $G(S_n | H_0)$ статистики от асимптотического $G(S | H_0)$ можно пренебречь при достаточно небольших n . Например, отклонением распределения статистики Колмогорова с поправкой Большева от $K(s)$ можно пренебречь при $n > 30$, отклонением распределения статистики Крамера–Мизеса–Смирнова от $a1(s)$ и распределения статистики Андерсона–Дарлинга от $a2(s)$ – при $n \geq 25$.

На практике всё несколько сложнее. Любые результаты измерений фиксируются с некоторой погрешностью округления.

То, что наличие ошибок округления Δ может как-то отражаться на результатах статистических выводов, было очевидно давно. Например, о возможности проблем с применением критериев нормальности, являющихся следствием округления, отмечалось ещё в работе [72]. В работах [83, 84] на примере критериев проверки гипотез о равенстве математического ожидания и дисперсии номинальным значениям, а также критериев Стьюдента об однородности средних и Фишера об однородности дисперсий двух выборок было показано влияние ошибок округления на реальный уровень значимости, а также отмечено, что с их увеличением снижается мощность критериев. Авторами работы [24] при анализе множества выборок с повторяющимися наблюдениями было показано, что в такой ситуации критические значения распределений статистик непараметрических критериев согласия при

проверке сложных гипотез относительно обобщенного распределения Парето отличаются от ранее полученных.

Давно отмечалось, что при использовании различных критериев согласия для анализа больших выборок, проверяемая гипотеза о принадлежности наблюдений закону с функцией распределения $F(x, \theta)$, как правило, отклоняется (даже в случае справедливости гипотезы H_0). В [137] показано, что основная причина такого явления заключается в наличии округления наблюдаемых данных, вследствие чего с ростом n реальные распределения статистик критериев отклоняются от асимптотических в сторону больших значений статистик. То есть, асимптотическими результатами можно пользоваться только при $n \leq n_{\max}$, где n_{\max} которое зависит от Δ и σ закона. Получается, что, применяя для проверки нормальности упомянутые критерии согласия Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга, мы можем опираться на модели распределений статистик этих критериев, представленные в разделе, лишь при $25 < n \leq n_{\max}$, когда $\Delta \ll \sigma$.

Но, что будет, если ошибки округления Δ соизмеримы со среднеквадратичным отклонением ошибок измерений σ ($\Delta \approx \sigma$)? А такие ситуации на практике очень часто имеют место, в том числе при анализе высокоточных измерений.

Исследованиям распределений статистик различных статистических критериев в условиях соизмеримости Δ и σ посвящены наши работы [62, 138, 139, 140], где показано, что под влиянием ошибок округления распределения статистик могут изменяться очень существенно, и этим фактом ни в коем случае нельзя пренебрегать. Это касается и множества критериев, применяемых при проверке нормальности.

При соизмеримости Δ и σ , когда значения Δ и σ величины одного порядка, в выборках появляется значительное количество повторяющихся значений. Для энтропийных критериев нормальности, примерами которых являются критерии Васичека, Эбрахими, Корреа, Van Эса и Заманзаде–Аргами, факт наличия в вариационном ряду одинаковых порядковых статистик уже служит сигналом для отклонения проверяемой гипотезы H_0 . Это же приходится учитывать при использовании критериев Оя. То есть в подобных ситуациях применение этой группы критериев исключается.

Результаты, полученные в [140], касающиеся поведения критериев согласия Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга, Купера и Ватсона и имеющие отношение к проверке нормальности, кратко можно охарактеризовать следующим образом:

- наличие ошибок округления приводит к появлению зависимости $G(S|H_0)$ от n ;
- факт наличия округлений в анализируемых данных исключает возможность использования асимптотических распределения статистик в условиях больших выборок;
- в условиях соизмеримости Δ и σ распределения $G(S_n|H_0)$ статистик могут значительно отличаться от асимптотических и при относительно небольших объемах выборок;
- вследствие наличия округлений потеря свойства “свободы от распределения” может происходить и в условиях проверки простых гипотез;
- на распределения статистик критериев согласия Жанга, которые зависят от n и в отсутствие ошибок округления, все вышеперечисленные факторы, связанные с Δ , воздействуют аналогичным образом.

В качестве демонстрационного примера на рис. 8.1 в условиях соизмеримости Δ и σ иллюстрируется влияние Δ на распределение $G(S_K|H_0)$ статистики критерия Колмогорова в следующей ситуации: проверяется гипотеза H_0 о принадлежности выборок нормальному закону распределения при $n=50$ с вычислением оценок максимального правдоподобия (ОМП) параметров μ и σ закона. Приведенные на рисунке зависимости построены на основании результатов статистического моделирования распределений статистик в условиях округления данных с использованием возможностей системы [146].

Аналогично, на рис. 8.2 показано, как меняются распределения статистики Колмогорова в зависимости от объема выборки n при справедливости гипотезы H_0 о нормальности при фиксированной ошибке округления $\Delta=0.1\sigma$ и использовании ОМП. Мы можем видеть, что и при росте Δ , и при росте n распределения $G(S_K|H_0)$ всё дальше отклоняются от асимптотического распределения статистики, имеющего место в отсутствие ошибок округления, модель

которого приведена в таблице 3.2.

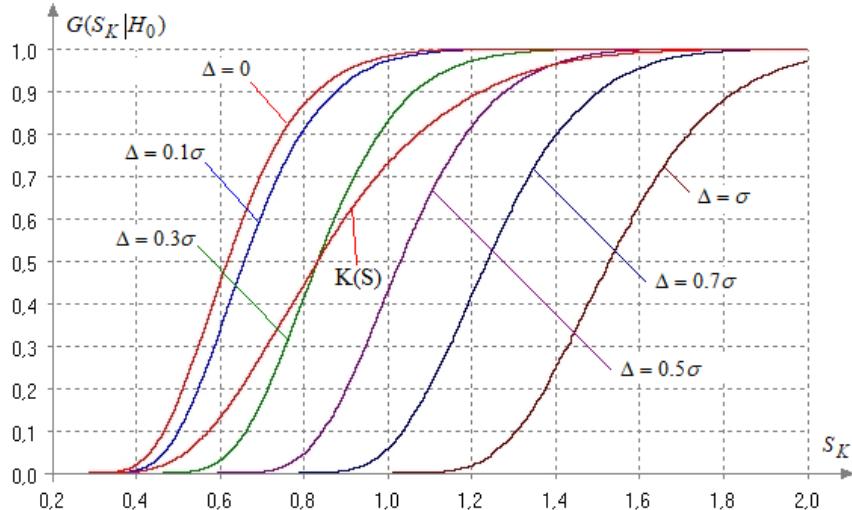


Рис. 8.1. Зависимость распределения статистики критерия Колмогорова от Δ при справедливости сложной гипотезы H_0 о принадлежности выборки нормальному закону (в случае ОМП) при $n = 50$

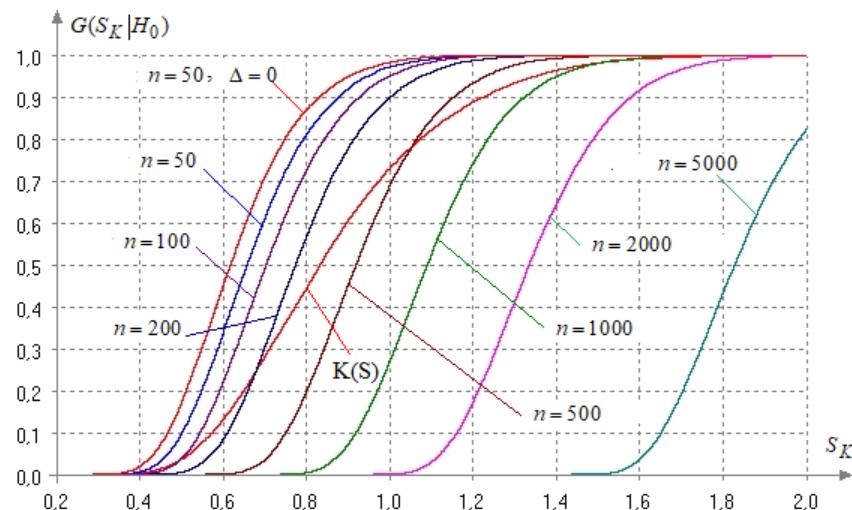


Рис. 8.2. Зависимость распределения статистики критерия Колмогорова от n при справедливости сложной гипотезы H_0 о принадлежности выборкициальному закону (в случае ОМП) при $\Delta = 0.1\sigma$

Таким же образом в подобных условиях от своих асимптотических распределений отклоняются распределения статистик критериев Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга, Купера и Ватсона, а распределения статистик 3-х критериев Жанга – от распределений, имеющих место в отсутствие округлений при конкретных n .

В соответствии с оценками рейтинга, представленными в таблице 5.2, критерий Десгань–Миши со статистикой X_{APD} (2.42) оказался наиболее предпочтительным (на первой позиции рейтинга) критерием нормальности. Асимптотическим распределением статистики этого критерия является χ^2_2 -распределение. На рис. 8.3 показана зависимость распределения его статистики от Δ при объеме выборок $n = 50$. Распределение статистики при $\Delta = 0$ на рисунке совпадает с χ^2_2 -распределением.

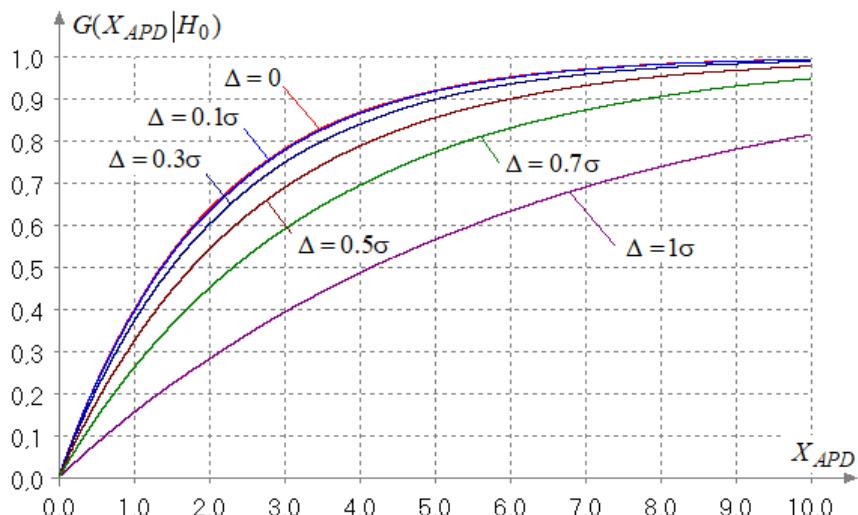


Рис. 8.3. Зависимость от Δ распределения статистики X_{APD} критерия нормальности Десгань–Миши при справедливости H_0 и $n = 50$

Можно обратить внимание на то, что с ростом Δ распределения $G(X_{APD} | H_0)$ в меньшей степени отклоняются от асимптотического распределения, чем распределения непараметрических критериев согласия. Кроме того, при фиксированной величине Δ в существенно

меньшей степени проявляется зависимость $G(X_{APD}|H_0)$ от n .

Распределения статистики E_p (2.11) критерия Д'Агостино, занимающего 5-ю позицию в рейтинге, практически не реагируют на рост Δ и совсем не отклоняются от асимптотического χ^2 -распределения, что, вообще говоря, является редким исключением. А с ростом Δ лишь несколько снижается мощность критерия.

Напротив, распределения статистики W_R (2.18) критерия Ройстона (10-я позиция в рейтинге) очень чувствительны к наличию ошибок округления и с ростом Δ быстро отклоняются от асимптотического стандартного нормального закона (рис. 8.4).

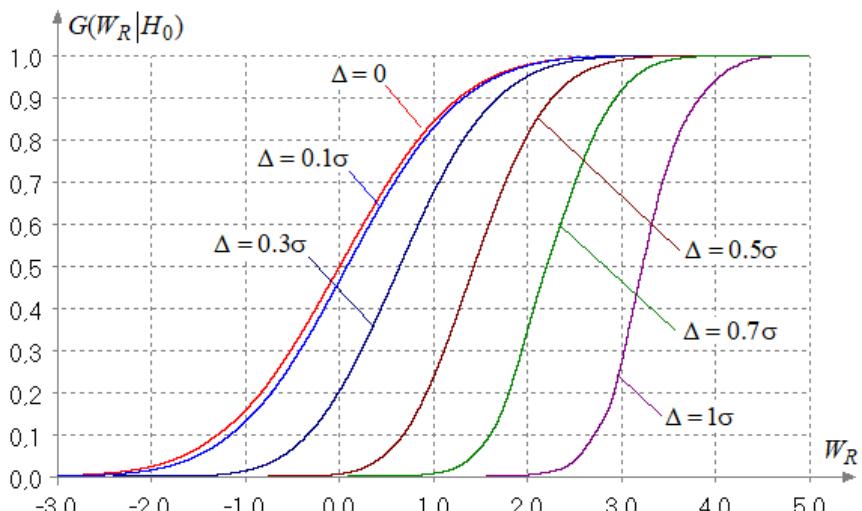


Рис. 8.4. Зависимость от Δ распределения статистики W_R критерия нормальности Ройстона при справедливости H_0 и $n=50$

Рис. 8.5 демонстрирует изменения распределения статистики Ройстона в зависимости от объёма выборки n при фиксированной ошибке округления $\Delta=0.1\sigma$. То есть, и при росте Δ , и при росте n распределения $G(W_R|H_0)$ статистики всё дальше отклоняются от асимптотического стандартного нормального закона.

Распределения статистик большинства специальных критериев нормальности зависят от объёмов выборок n . Естественно, при

соизмеримости Δ и σ эти распределения зависят от величины Δ .

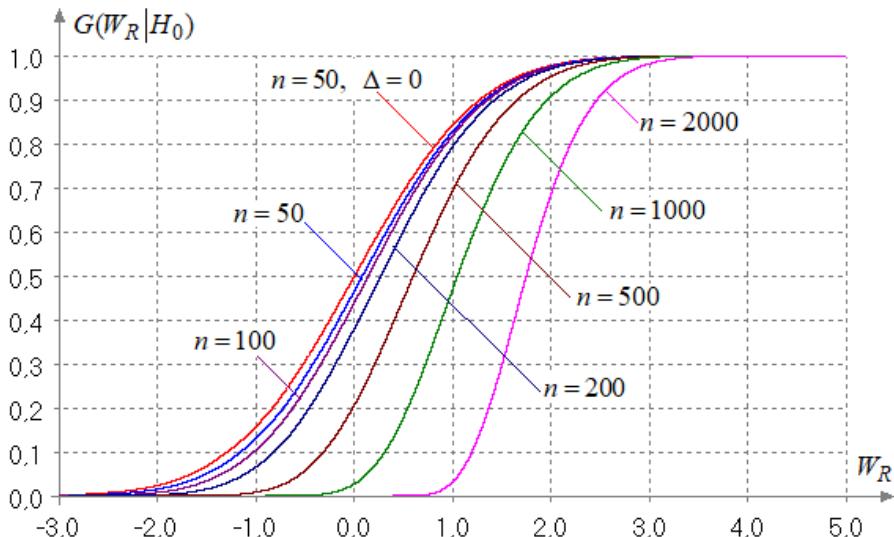


Рис. 8.5. Зависимость распределения статистики W_R критерия нормальности Ройстона от n при справедливости H_0 и $\Delta = 0.1\sigma$

На рис. 8.6 показано, как меняются распределения статистики (2.32) левостороннего критерия Вайсберга–Биргема при $n = 50$ и изменении Δ на интервале от 0 до σ . По мощности этот критерий эквивалентен критерию Шапиро–Франциа (2.31) и вместе с последним и ещё двумя критериями занимает позиции 6–9 в таблице 5.2, в которой проранжированы критерии нормальности. Можно заметить, что у распределения статистики $G(\tilde{W}|H_0)$ с ростом Δ существенно меняются характеристики рассеяния. Очевидно, что в случае применения критерия Вайсберга–Биргема или любого другого критерия нормальности в подобной ситуации, не может идти и речи об использовании приводимых в руководстве таблиц критических значений.

Естественно, что на распределения статистик критериев типа χ^2 ошибки округления Δ оказывают определённое влияние. На рис. 8.7 показаны дискретные распределения $G(X_n^2 | H_0)$ статистики (4.1)

критерия Пирсона при различных Δ , объёме выборок $n=50$ и при $k=5$ равновероятных интервалах группирования. При $\Delta \leq 0.3\sigma$ распределения статистики совпадают с распределением, имеющим место в случае отсутствия округлений, а затем видим существенные отклонения.

Ошибки округления оказывают такое же значительное влияние на распределения $G(Y_n^2|H_0)$ статистики (4.7) критерия Никулина. На характере влияния отражается также выбираемый способ разбиения на интервалы группирования.

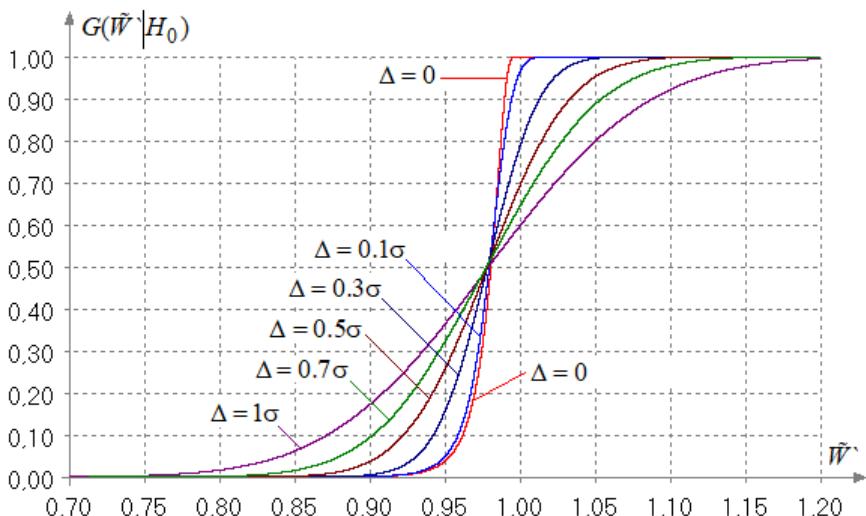


Рис. 8.6. Зависимость от Δ распределения статистики \tilde{W} критерия нормальности Вайсберга–Биргема при справедливости H_0 и $n=50$

В случае правосторонних и левосторонних критериев пренебрежение фактом изменения распределений статистик вследствие влияния ошибок округления, как правило, приводит к занижению оценки p_{value} и росту вероятности ошибки 1-го рода. В случае двусторонних критериев поведение распределений $G(S_n|H_0)$ статистик под влиянием Δ менее предсказуемо: использование классических результатов, не учитывающих влияния Δ , может

приводить как к занижению, так и к завышению оценок p_{value} .

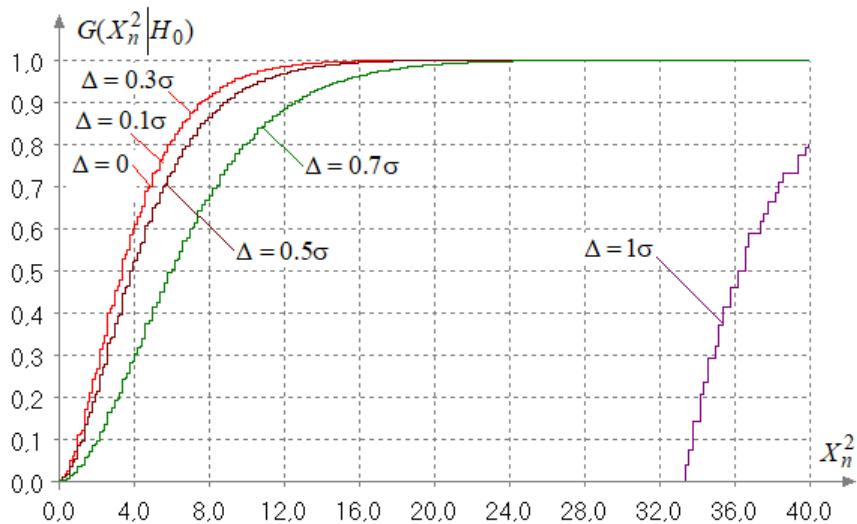


Рис. 8.7. Зависимость от Δ распределения статистики X_n^2 критерия Пирсона при справедливости гипотезы H_0 о нормальности при $n = 50$

В качестве примера продемонстрируем изменение распределений $G(d|H_0)$ статистики (2.15) двустороннего критерия Гири в зависимости от Δ при объёме выборок $n = 50$ (см. рис. 8.8). То, что получаемые по реальным распределениям статистик, учитывающим влияние Δ , значения p_{value} могут быть как выше, так и ниже их оценок, вычисляемых на основании классических результатов, можно увидеть в таблицах 8.2–8.4, представленных в следующем параграфе.

Все приведенные выше примеры говорят об одном: при соизмеримости Δ и σ нельзя пренебрегать фактом изменения распределений статистик критериев, так как в противном случае, как правило, возрастает вероятность ошибки 1-го рода α (отклонения справедливой гипотезы H_0), или реже – возрастает вероятность ошибки 2-го рода β . И в то же время приведенные результаты исследований подсказывают единственный выход, возможный в такой ситуации и обеспечивающий корректность выводов: применяя любой критерий нормальности, следует опираться на программное

обеспечение, позволяющее моделировать распределения $G(S_n | H_0)$ статистик критериев нормальности в реальных условиях приложения (при соответствующих Δ и σ). Именно так это реализовано, например, в системе [146], с использованием которой проводились настоящие исследования.

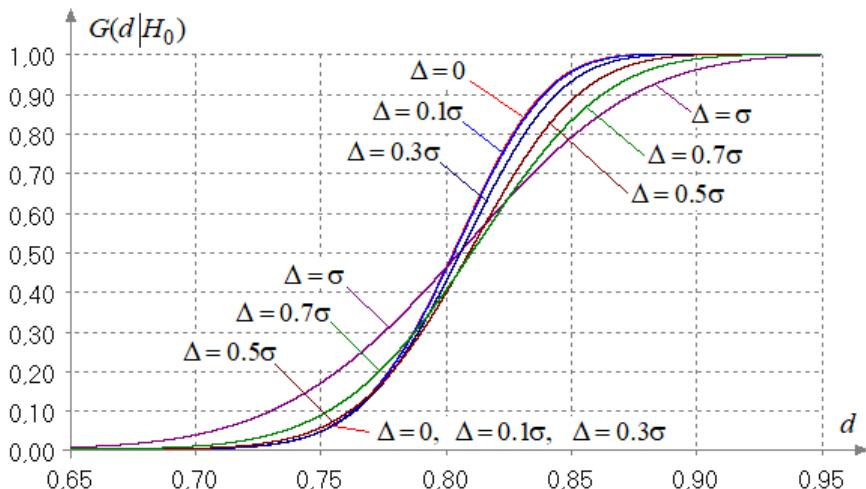


Рис. 8.8. Зависимость от Δ распределения статистики d критерия Гири при справедливости гипотезы H_0 о нормальности при $n = 50$

В следующем разделе покажем, как отражается на результатах проверки принадлежности нормальному закону хорошо известных рядов измерений наличие в них ошибок округления.

8.2. Применение критериев нормальности в условиях округления измерений

В работе [34] результаты измерений характеристик ирисов были использованы для решения задачи таксономии. В нашем случае рассмотрим, насколько хорошо ошибки этих измерений описываются нормальными законами распределения. Заимствованные в [34] результаты измерений в сантиметрах представлены в таблице 8.1.

В таблице для каждого из 3-х видов ириса (*Iris setosa*, *Iris versicolor*, *Iris virginica*) представлены измерения 4-х характеристик для 50

представителей каждого вида: S_1 – Sepal length – длина чашелистика, S_w – Sepal width – ширина чашелистика, P_1 – Petal length – длина лепестка, P_w – Petal width – ширина лепестка. Погрешность округления $\Delta=0.1$ одна и та же для всех измерений.

Таблица 8.1

Результаты измерений характеристик ирисов

№	Iris setosa				Iris versicolor				Iris virginica			
	S_1	S_w	P_1	P_w	S_1	S_w	P_1	P_w	S_1	S_w	P_1	P_w
1	5.1	3.5	1.4	0.2	7.0	3.2	4.7	1.4	6.3	2.2	6.0	2.5
2	4.9	3.0	1.4	0.2	6.4	3.2	4.5	1.5	5.8	2.5	5.1	1.9
3	4.7	3.2	1.3	0.2	6.9	3.1	4.9	1.5	7.1	2.5	5.9	2.1
4	4.6	3.1	1.5	0.2	5.5	2.3	4.0	1.3	6.3	2.5	5.6	1.8
5	5.0	3.6	1.4	0.2	6.5	2.8	4.6	1.5	6.5	2.5	5.8	2.2
6	5.4	3.9	1.7	0.4	5.7	2.8	4.5	1.3	7.6	2.6	6.6	2.1
7	4.6	3.4	1.4	0.3	6.3	3.3	4.7	1.6	4.9	2.6	4.5	1.7
8	5.0	3.4	1.5	0.2	4.9	2.4	3.3	1.0	7.3	2.7	6.3	1.8
9	4.4	2.9	1.4	0.2	6.6	2.9	4.6	1.3	6.7	2.7	5.8	1.8
10	4.9	3.1	1.5	0.1	5.2	2.7	3.9	1.4	7.2	2.7	6.1	2.5
11	5.4	3.7	1.5	0.2	5.0	2.0	3.5	1.0	6.5	2.7	5.1	2.0
12	4.8	3.4	1.6	0.2	5.9	3.0	4.2	1.5	6.4	2.8	5.3	1.9
13	4.8	3.0	1.4	0.1	6.0	2.2	4.0	1.0	6.8	2.8	5.5	2.1
14	4.3	3.0	1.1	0.1	6.1	2.9	4.7	1.4	5.7	2.8	5.0	2.0
15	5.8	4.0	1.2	0.2	5.6	2.9	3.6	1.3	5.8	2.8	5.1	2.4
16	5.7	4.4	1.5	0.4	6.7	3.1	4.4	1.4	6.4	2.8	5.3	2.3
17	5.4	3.9	1.3	0.4	5.6	3.0	4.5	1.5	6.5	2.8	5.5	1.8
18	5.1	3.5	1.4	0.3	5.8	2.7	4.1	1.0	7.7	2.8	6.7	2.2
19	5.7	3.8	1.7	0.3	6.2	2.2	4.5	1.5	7.7	2.8	6.9	2.3
20	5.1	3.8	1.5	0.3	5.6	2.5	3.9	1.1	6.0	2.9	5.0	1.5
21	5.4	3.4	1.7	0.2	5.9	3.2	4.8	1.8	6.9	2.9	5.7	2.3
22	5.1	3.7	1.5	0.4	6.1	2.8	4.0	1.3	5.6	3.0	4.9	2.0
23	4.6	3.6	1.0	0.2	6.3	2.5	4.9	1.5	7.7	3.0	6.7	2.0
24	5.1	3.3	1.7	0.5	6.1	2.8	4.7	1.2	6.3	3.0	4.9	1.8
25	4.8	3.4	1.9	0.2	6.4	2.9	4.3	1.3	6.7	3.0	5.7	2.1
26	5.0	3.0	1.6	0.2	6.6	3.0	4.4	1.4	7.2	3.0	6.0	1.8
27	5.0	3.4	1.6	0.4	6.8	2.8	4.8	1.4	6.2	3.0	4.8	1.8
28	5.2	3.5	1.5	0.2	6.7	3.0	5.0	1.7	6.1	3.0	4.9	1.8
29	5.2	3.4	1.4	0.2	6.0	2.9	4.5	1.5	6.4	3.0	5.6	2.1
30	4.7	3.2	1.6	0.2	5.7	2.6	3.5	1.0	7.2	3.0	5.8	1.6

Окончание таблицы 8.1

Результаты измерений характеристик ирисов

№	Iris setosa				Iris versicolor				Iris virginica			
	S_1	S_w	P_1	P_w	S_1	S_w	P_1	P_w	S_1	S_w	P_1	P_w
31	4.8	3.1	1.6	0.2	5.5	2.4	3.8	1.1	7.4	3.0	6.1	1.9
32	5.4	3.4	1.5	0.4	5.5	2.4	3.7	1.0	7.9	3.0	6.4	2.0
33	5.2	4.1	1.5	0.1	5.8	2.7	3.9	1.2	6.4	3.0	5.6	2.2
34	5.5	4.2	1.4	0.2	6.0	2.7	5.1	1.6	6.3	3.1	5.1	1.5
35	4.9	3.1	1.5	0.2	5.4	3.0	4.5	1.5	6.1	3.1	5.6	1.4
36	5.0	3.2	1.2	0.2	6.0	3.4	4.5	1.6	7.7	3.1	6.1	2.3
37	5.5	3.5	1.3	0.2	6.7	3.1	4.7	1.5	6.3	3.1	5.6	2.4
38	4.9	3.6	1.4	0.1	6.3	2.3	4.4	1.3	6.4	3.2	5.5	1.8
39	4.4	3.0	1.3	0.2	5.6	3.0	4.1	1.3	6.0	3.2	4.8	1.8
40	5.1	3.4	1.5	0.2	5.5	2.5	4.0	1.3	6.9	3.2	5.4	2.1
41	5.0	3.5	1.3	0.3	5.5	2.6	4.4	1.2	6.7	3.2	5.6	2.4
42	4.5	2.3	1.3	0.3	6.1	3.0	4.6	1.4	6.9	3.2	5.1	2.3
43	4.4	3.2	1.3	0.2	5.8	2.6	4.0	1.2	5.8	3.3	5.1	1.9
44	5.0	3.5	1.6	0.6	5.0	2.3	3.3	1.0	6.8	3.3	5.9	2.3
45	5.1	3.8	1.9	0.4	5.6	2.7	4.2	1.3	6.7	3.3	5.7	2.5
46	4.8	3.0	1.4	0.3	5.7	3.0	4.2	1.2	6.7	3.4	5.2	2.3
47	5.1	3.8	1.6	0.2	5.7	2.9	4.2	1.3	6.3	3.4	5.0	1.9
48	4.6	3.2	1.4	0.2	6.2	2.9	4.3	1.3	6.5	3.6	5.2	2.0
49	5.3	3.7	1.5	0.2	5.1	2.5	3.0	1.1	6.2	3.8	5.4	2.3
50	5.0	3.3	1.4	0.2	5.7	2.8	4.1	1.3	5.9	3.8	5.1	1.8

Вследствие округления результатов измерений в столбцах таблицы 8.1 наблюдаются повторяющиеся значения. Посмотрим, как это отражается на результатах проверки гипотезы о принадлежности измерений характеристик ирисов нормальному закону.

Результаты проверки принадлежности всех 12-и выборок нормальным законам по 8-и рассматриваемым критериям согласия (Колмогорова (K), Крамера–Мизеса–Смирнова (CMS), Андерсона–Дарлинга (AD), Купера (Ku), Ватсона (W), Жанга (Z_A , Z_C и Z_K)) и 6-и специальным критериям (Бонтемпса–Меддахи со статистикой BM_{3-6} (BM), Десгань–Миши со статистикой X_{APD} (DM), Филибена (Fb), Гири (Gr), Ройстона (Rn), Вайсберга–Биргема (WB)) для каждого из 3-х видов ириса представлены в таблицах 8.2–8.4.

Таблица 8.2

Проверка гипотез о принадлежности нормальному закону характеристик для Iris setosa

Test	Sepal length			Sepal width			Petal length			Petal width		
	$\mu = 5.006, \sigma = 0.3489$		$\mu = 3.428, \sigma = 0.3753$		$\mu = 1.462, \sigma = 0.1719$		$\mu = 0.246, \sigma = 0.1043$					
	S	P _{value}		S	P _{value}		S	P _{value}		S	P _{value}	
		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$
K	0.828	0.106	0.479	0.758	0.192	0.614	1.102	0.006	0.521	2.501	0.000	0.000
CMS	0.071	0.269	0.659	0.074	0.248	0.558	0.187	0.009	0.429	0.982	0.000	0.0001
AD	0.414	0.339	0.731	0.484	0.231	0.496	0.999	0.013	0.522	4.747	0.000	0.0001
Ku	1.511	0.047	0.388	1.420	0.086	0.485	2.110	0.000	0.343	4.148	0.000	0.0004
W	0.070	0.229	0.627	0.072	0.217	0.540	0.188	0.004	0.402	0.940	0.000	0.0001
Z _A	3.312	0.636	0.828	3.356	0.148	0.220	3.365	0.107	0.520	3.706	0.000	0.001
Z _C	5.643	0.518	0.689	6.690	0.376	0.515	8.390	0.216	0.756	41.661	0.0002	0.002
Z _K	1.175	0.262	0.630	1.168	0.078	0.249	0.206	0.019	0.610	12.067	0.000	0.000
BM	0.374	0.924	0.928	2.799	0.282	0.288	3.525	0.196	0.221	16.154	0.010	0.020
DM	0.243	0.884	0.893	2.108	0.345	0.370	3.410	0.169	0.299	17.185	0.000	0.022
Fb	0.991	0.543	0.833	0.981	0.110	0.191	0.974	0.033	0.365	0.891	0.000	0.001
Gr	0.776	0.371	0.351	0.766	0.227	0.218	0.765	0.219	0.156	0.791	0.692	0.120
Rn	0.102	0.462	0.735	0.608	0.273	0.461	1.600	0.055	0.611	4.782	0.000	0.0005
WB	0.982	0.537	0.547	0.964	0.119	0.283	0.949	0.035	0.278	0.795	0.000	0.011

Таблица 8.3

Проверка гипотез о принадлежности нормальному закону характеристик для Iris versicolor

Критерий Test	Sepal length			Sepal width			Petal length			Petal width		
	$\mu = 5.936, \sigma = 0.5110$		$\mu = 2.770, \sigma = 0.3106$		$\mu = 4.260, \sigma = 0.4652$		$\mu = 1.3260, \sigma = 0.1958$					
	S	<i>P</i> _{value}		S	<i>P</i> _{value}		S	<i>P</i> _{value}		S	<i>P</i> _{value}	
		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$
K	0.716	0.265	0.557	0.888	0.061	0.415	0.860	0.079	0.259	1.065	0.010	0.453
CMS	0.059	0.395	0.602	0.105	0.094	0.345	0.091	0.147	0.262	0.154	0.023	0.467
AD	0.374	0.421	0.613	0.573	0.139	0.450	0.562	0.149	0.254	0.975	0.015	0.319
Ku	1.282	0.199	0.519	1.403	0.097	0.678	1.252	0.232	0.623	1.886	0.001	0.432
W	0.057	0.362	0.576	0.098	0.093	0.373	0.076	0.191	0.359	0.153	0.014	0.451
Z _A	3.313	0.624	0.717	3.320	0.500	0.742	3.354	0.155	0.201	3.387	0.050	0.214
Z _C	6.214	0.441	0.515	5.900	0.483	0.691	8.593	0.203	0.256	12.31	0.055	0.226
Z _K	0.849	0.520	0.742	1.348	0.176	0.568	1.285	0.204	0.399	2.563	0.008	0.283
BM	1.168	0.639	0.644	2.464	0.333	0.343	4.062	0.151	0.154	0.913	0.721	0.744
DM	0.682	0.708	0.716	2.379	0.302	0.340	3.771	0.150	0.164	0.119	0.942	0.955
Fb	0.992	0.640	0.781	0.988	0.351	0.679	0.984	0.168	0.239	0.976	0.052	0.342
Gr	0.825	0.444	0.482	0.820	0.548	0.658	0.815	0.674	0.726	0.803	0.986	0.786
Rn	0.089	0.468	0.594	0.418	0.340	0.658	1.014	0.156	0.229	1.922	0.027	0.243
WB	0.984	0.620	0.597	0.976	0.346	0.471	0.968	0.166	0.306	0.953	0.047	0.283

Таблица 8.4

Проверка гипотез о принадлежности нормальному закону характеристик для Iris virginica

Критерий Test	Sepal length			Sepal width			Petal length			Petal width		
	$\mu = 6.5880, \sigma = 0.6295$		$\mu = 2.9740, \sigma = 0.3193$		$\mu = 5.552, \sigma = 0.5463$		$\mu = 2.0260, \sigma = 0.2719$					
	S	Pvalue		S	Pvalue		S	Pvalue		S	Pvalue	
		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$		$\Delta = 0$	$\Delta = 0.1$
K	0.841	0.095	0.202	0.925	0.042	0.314	0.843	0.092	0.238	0.895	0.057	0.504
CMS	0.089	0.155	0.210	0.106	0.093	0.313	0.087	0.165	0.250	0.121	0.059	0.308
AD	0.557	0.153	0.204	0.611	0.112	0.355	0.619	0.108	0.159	0.760	0.048	0.245
Ku	1.331	0.151	0.336	1.744	0.008	0.170	1.322	0.159	0.411	1.746	0.008	0.259
W	0.085	0.140	0.198	0.102	0.081	0.308	0.074	0.201	0.322	0.121	0.044	0.273
Z_A	3.332	0.334	0.377	3.342	0.238	0.389	3.356	0.146	0.175	3.356	0.146	0.296
Z_C	6.711	0.373	0.420	7.263	0.314	0.486	9.466	0.148	0.178	9.737	0.133	0.275
Z_K	1.306	0.194	0.296	1.496	0.124	0.439	1.554	0.107	0.201	2.076	0.028	0.230
BM	1.605	0.514	0.517	2.839	0.276	0.285	3.994	0.156	0.157	1.475	0.550	0.560
DM	0.824	0.660	0.667	2.762	0.249	0.283	3.038	0.216	0.228	1.233	0.536	0.579
Fb	0.985	0.220	0.267	0.982	0.116	0.244	0.983	0.137	0.176	0.983	0.147	0.396
Gr	0.798	0.871	0.854	0.759	0.152	0.146	0.805	0.938	0.970	0.839	0.200	0.317
Rn	0.649	0.259	0.316	0.912	0.181	0.389	1.238	0.108	0.144	1.360	0.088	0.268
WB	0.971	0.221	0.324	0.964	0.122	0.309	0.965	0.131	0.240	0.966	0.136	0.350

Для каждой выборки в таблицах приводятся ОМП параметров μ и σ нормального закона и вычисленные значения S статистик применяемых критериев. Значения достигнутого уровня значимости P_{value} в предположении об отсутствии ошибок округления (при $\Delta=0$) для критериев Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга, Купера, Ватсона, Десгань–Миши и Ройстона могут быть рассчитаны по известным асимптотическим распределениям статистик. Но распределения $G(S_n|H_0)$ статистик остальных критериев зависят от n . Для чистоты эксперимента оценки P_{value} в отсутствие ошибок округления (при $\Delta=0$) находились по распределениям статистик $G(S_n|H_0)$, моделируемым при $n=50$.

Оценки P_{value} в условиях влияния ошибок округления (при $\Delta=0.1$ и при соответствующей ОМП для σ) вычислялись по реальным распределениям $G(S_n|H_0)$ статистик критериев, моделируемым в интерактивном режиме. Такая возможность реализована в [146].

Как можно видеть, оценки P_{value} , вычисленные по реальным распределениям $G(S_n|H_0)$ статистик, имеющим место в условиях наличия ошибок округления ($\Delta=0.1$), кардинально отличаются от значений P_{value} , вычисленных по распределениям статистик этих же критериев в условиях отсутствия ошибок округления ($\Delta=0$). И если пренебречь влиянием ошибок округления на распределения статистик критериев, то во многих случаях гипотеза о нормальности будет несправедливо отклоняться.

В данном случае надо обратить внимание на то, что каждой проверке по каждому применяемому критерию при ($\Delta=0.1$ и $n=50$) соответствует своё распределение статистики $G(S_n|H_0)$, зависящее от σ нормального закона. То есть, для анализа 12 выборок по каждому из 14 критериев мы должны использовать 12 различных распределений $G(S_{50}|H_0)$ статистики применяемого критерия, по которому и вычисляется P_{value} .

Следует сделать ещё одно важное замечание. Среди специальных критериев нормальности есть правосторонние, левосторонние и двусторонние критерии. Вследствие влияния ошибок округления

распределения статистик правосторонних критериев сдвигаются вправо, а левосторонних – влево. При этом реальный достигнутый уровень значимости p_{value} , учитывающий влияние Δ , всегда оказывается не меньше того, что мы имеем при его вычислении без учёта такого влияния. В случае двусторонних критериев вследствие влияния Δ область определения статистик критериев также меняется: при этом она может изменяться по масштабу и сдвигаться влево или вправо. Поэтому реальный p_{value} , учитывающий влияние Δ и вычисляемый в соответствии с (1.5), может возрастать, а может и уменьшаться. Чтобы подчеркнуть этот факт, в строках таблиц 8.2-8.4 для двустороннего критерия Гири ситуации с уменьшением p_{value} из-за влияния Δ выделены цветом.

В отсутствие влияния округлений распределения $G(S_n | H_0)$ статистик критериев Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга, Купера, Ватсона, Десгань–Мишо и Ройстона быстро сходятся к асимптотическим $G(S | H_0)$ распределениям этих статистик: отклонением $G(S_n | H_0)$ от $G(S | H_0)$ можно пренебречь, как правило, при $n \geq 25 \div 30$. При наличии влияния ошибок округления (как в данном случае) распределения $G(S_n | H_0)$ могут не сходиться к асимптотическим $G(S | H_0)$, а с ростом n всё дальше отклоняются от них.

Проведенные ранее исследования показали, что и при проверке простых гипотез о принадлежности выборок нормальному закону (в условиях влияния Δ) распределения статистик $G(S_n | H_0)$ непараметрических критериев согласия (Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга, Купера, Ватсона) становятся зависящими от n , от Δ и от значения параметра масштаба σ , а с ростом n всё больше отклоняются от асимптотических $G(S | H_0)$.

В общем случае проверки сложной гипотезы о принадлежности выборки некоторому закону $F(x, \theta)$ к факторам, влияющим на распределения статистик $G(S | H_0)$ при сложной гипотезе [131], добавляется зависимость от n , Δ и от значений оценок параметров формы и масштаба закона $F(x, \theta)$.

8.3. Реализация применения критериев в условиях влияния ошибок округления

Таким образом, применяя различные критерии для проверки гипотезы о принадлежности выборок нормальному закону, следует учитывать возможное влияние ошибок округления на распределения статистик критериев.

Ошибки округления есть всегда. В ситуации, когда $\Delta \ll \sigma$ и n меньше некоторого n_{\max} , зависящего от n и σ , влиянием Δ на распределения статистик можно пренебречь. Но при $n > n_{\max}$ реальные распределения статистик отклоняются от асимптотических, использование которых при проверке увеличивает вероятности ошибок 1-го рода – отклонения верной гипотезы H_0 . С учетом замечания в предшествующем параграфе, в случае двусторонних критериев в такой ситуации увеличивается или вероятность ошибок 1-го рода, или вероятность ошибок 2-го рода.

В условиях соизмеримости Δ и σ отклонение реальных распределений статистик от асимптотических (или от имеющих место в отсутствие округлений при зависимости распределений статистик от n) может проявляться при относительно малых объемах выборок. Это подтверждает рассмотренный пример с характеристиками ирисов. А с ростом n эта проблема только усугубляется.

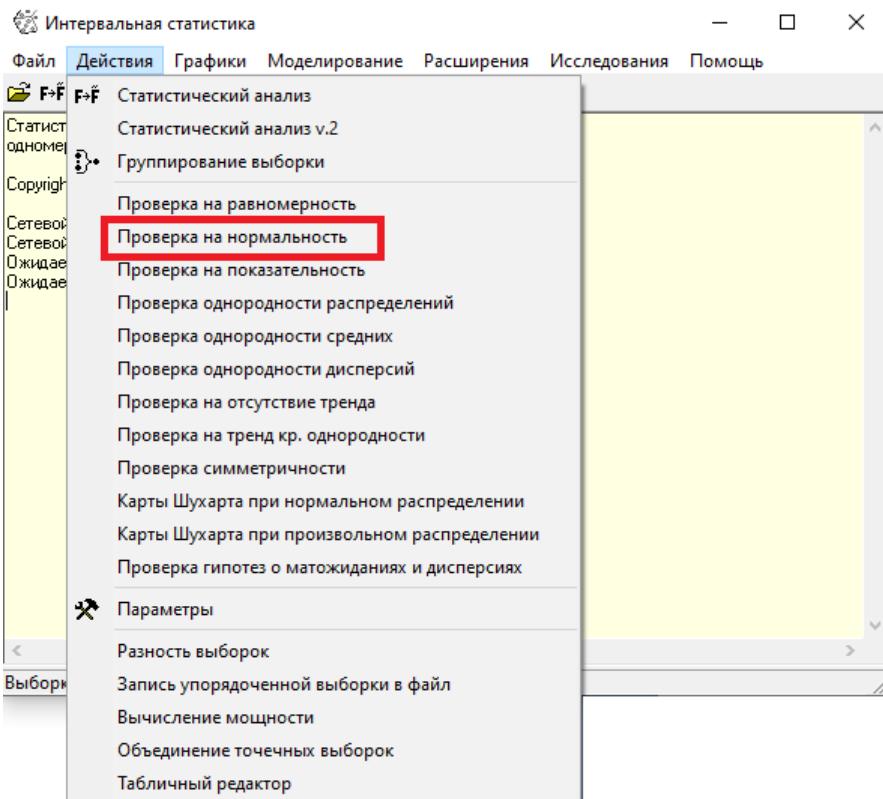
С выборками такого рода сталкиваются не только в биологии, зоологии, медицине и т.п., где в связи со спецификой измеряемых величин ошибка округления Δ всегда достаточно велики.

С такого же рода выборками сталкиваются при высокоточных измерениях в технических приложениях, когда измерения осуществляются на пределе точности измерительных систем. Общим и в том, и в другом случае является проведение измерений на пределе точности.

Не следует считать, что ошибки округления могут изменять свойства только критериев согласия. Как видим, ошибки округления влияют на распределения статистик специальных критериев, ориентированных только на проверку нормальности и которых насчитывается более 3-х десятков. Под влиянием ошибок округления изменяются свойства критериев равномерности, экспоненциальности и других десятков и сотен критериев, предназначенных для проверки различных гипотез.

Решать обозначенную проблему применения критериев проверки различных гипотез в условиях влияния ошибок округления можно единственным способом, разрабатывая программное обеспечение, позволяющее методами статистического моделирования исследовать распределения статистик критериев (или находить оценки P_{value}) в конкретных условиях приложения и при конкретном значении Δ . Таким примером является система [146], в рамках которой проведены настоящие исследования.

Применение специальных критериев нормальности при анализе измерений характеристик ирисов, учитывающее влияние ошибок округления Δ , в системе [146] можно описать следующим образом.



Rис. 8.9. Выбор группы критериев нормальности в главном окне ISW

После выбора в главном окне ISW раздела “Действия” в открыв-

шемсяся меню (см. рис. 8.9) выбираем “Проверка на нормальность”, в результате чего открывается вкладка “Проверка нормальности” (см. рис. 8.10). На этой вкладке загружаем анализируемые выборки, в данном случае файл “Iris Setosa Petal length.dat”.

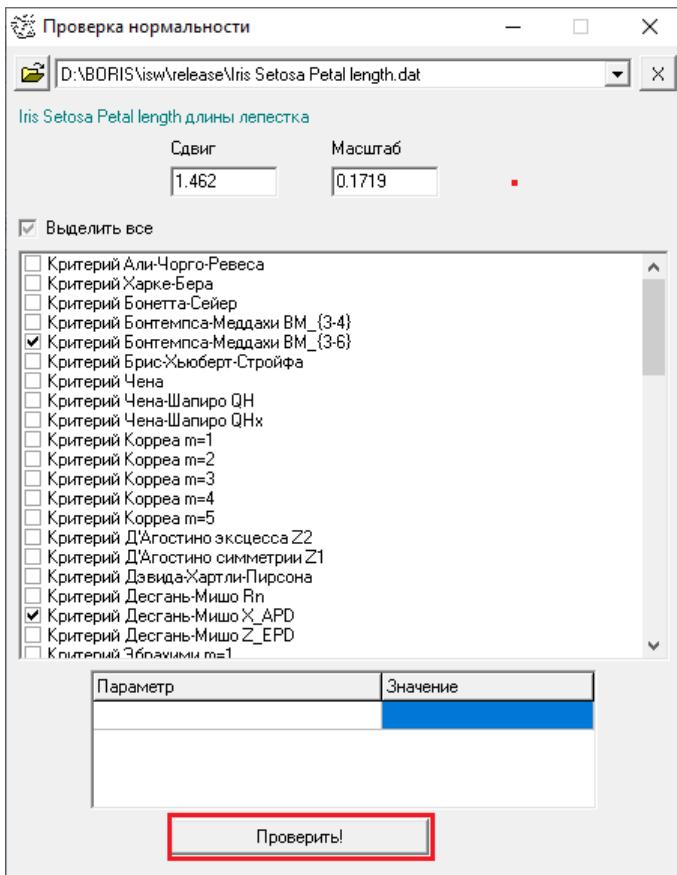
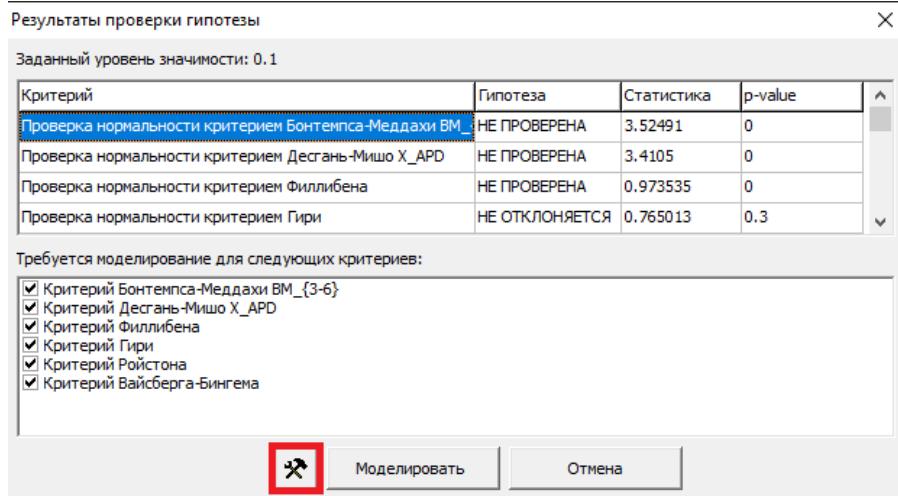
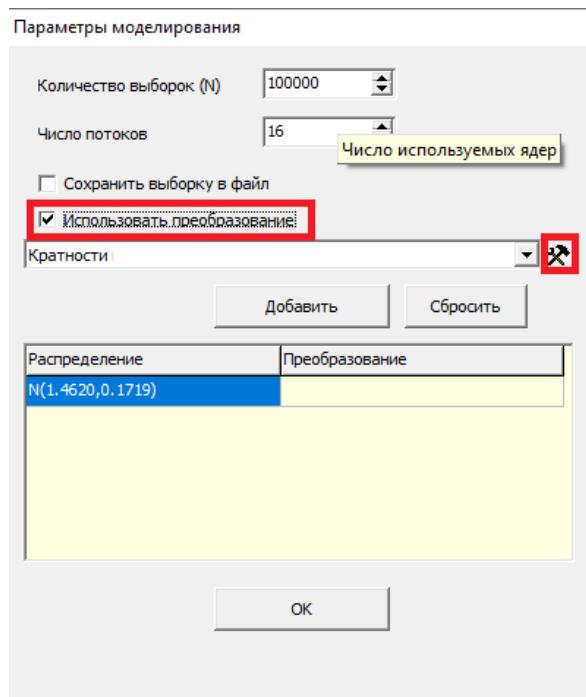


Рис. 8.10. Окно проверки нормальности

Далее вписываем в окна ОМП параметров (см. табл. 8.2) μ (сдвиг) и σ (масштаб), необходимые только для учета влияния Δ . Выбираем группу применяемых критериев и жмем кнопку “Проверить!”. В появившемся окне (рис. 8.11) жмем на кнопку для задания параметров моделирования.



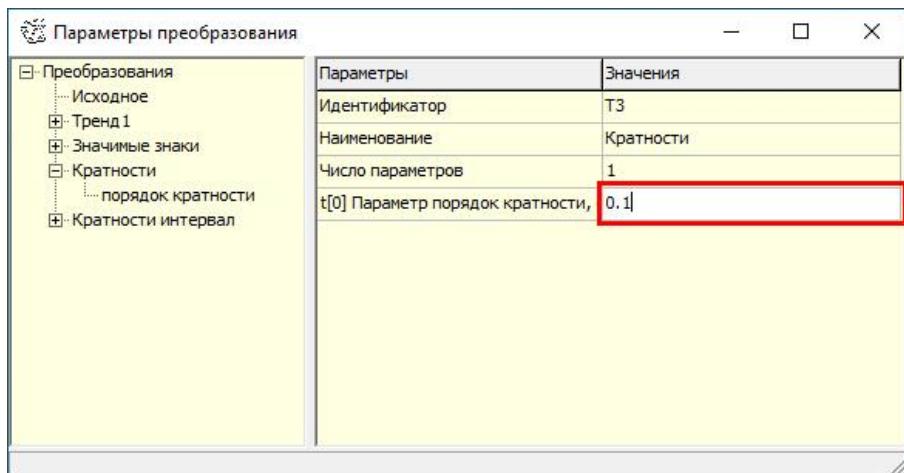
8.11. Окно результатов проверки нормальности



8.12. Окно для выбора параметров моделирования

В окне “Параметры моделирования” можно задать требуемое количество имитационных экспериментов N при моделировании распределений статистик применяемых критериев, а также указать число используемых при распараллеливании ядер процессора. Если выборки, моделируемые по указанному нормальному закону, подвергаются преобразованию, а в данном случае значения округляются, то ставим галочку и жмем кнопку, как показано на рис. 8.12.

В открывшемся окне (рис. 8.13) можно выбрать параметры преобразования, которому будут подвергаться выборки. В нашем случае выбираем параметр “порядок кратности” 0.1. Следовательно, элементы выборок, моделируемых поциальному закону с параметрами μ и σ , будут округляться с погрешностью округления $\Delta = 0.1$.

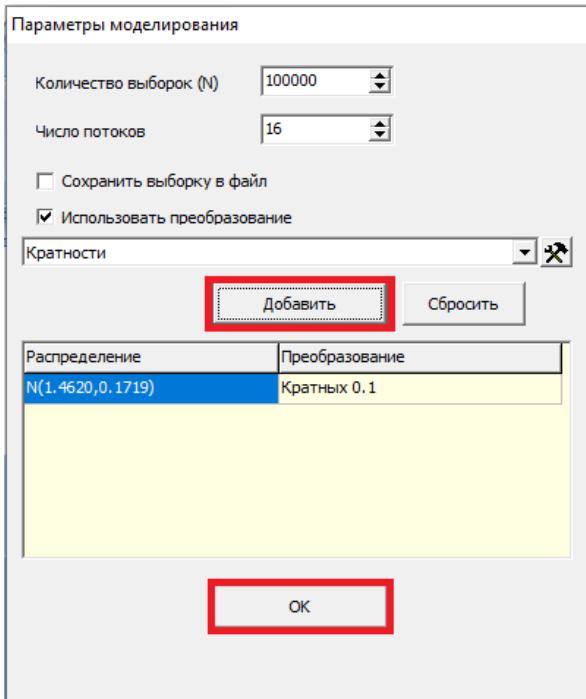


8.13. Окно для выбора параметров преобразования

Закрыв окно преобразования, возвращаемся в окно “Параметры моделирования”, жмём кнопку “Добавить”, а затем “OK” (см. рис. 8.14).

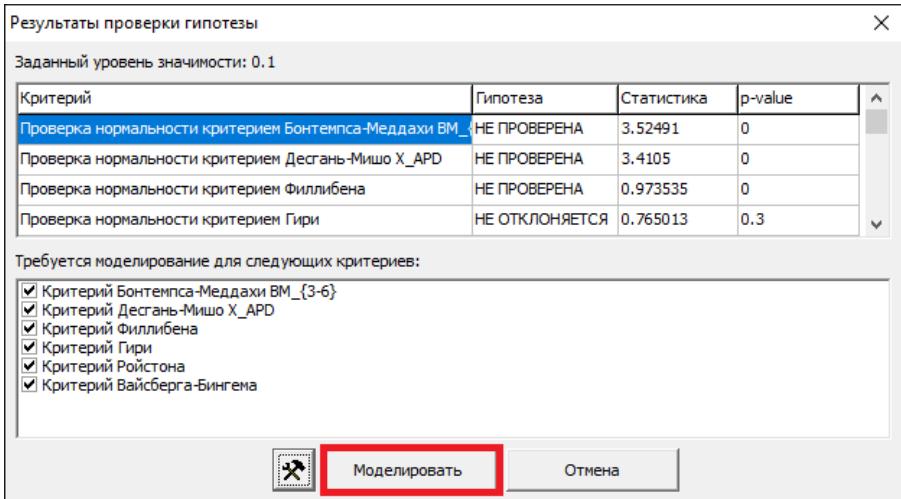
Теперь, вернувшись в окно “Результаты проверки гипотез”, жмём на кнопку “Моделировать” (см. рис. 8.15). После завершения процесса моделирования получаем результаты, где для каждого выбранного критерия, отмеченного “галочкой” в окне на рис. 8.15, приводится значение его статистики и достигнутый уровень значимости P_{value}

(см. рис. 8.16), вычисленный в соответствии с распределением статистики, полученным по результатам интерактивного моделирования.

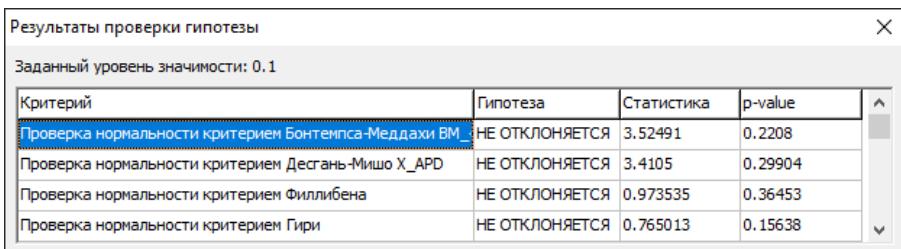


8.14. Окно для выбора параметров моделирования

Такой порядок действий предусмотрен для ситуации возможного влияния на результаты проверки имеющихся ошибок округления. Если опасения о таком влиянии отсутствуют, то процесс проверки оказывается проще. Это не значит, что можно обойтись без компьютерных технологий при использовании множества специальных критериев нормальности, так как распределения статистик большей части таких критериев зависят от объемов выборок. Поэтому и в таких случаях требование корректности и обоснованности вывода о результатах проверки гипотезы заставляет использовать интерактивное моделирование распределений статистик применяемых критериев, чтобы указать достигнутый уровень значимости p_{value} .



8.15. Окно результатов проверки нормальности после задания преобразования



8.16. Окно результатов проверки нормальности после завершения проверки

При использовании специальных критериев нормальности в условиях отсутствия влияния ошибок округления в описанной последовательности действий исключаются все моменты, связанные с введением преобразования (округления в моделируемых выборках). То есть, после задания числа имитационных экспериментов N и числа используемых ядер процессора (см. рис. 8.12) сразу переходят к процессу моделирования (см. рис. 8.15).

Аналогичные возможности реализованы в [146] для применения в нестандартных условиях критериев типа χ^2 и множества непараметрических критериев согласия.

9. Заключение

Не смотря на определённое ранжирование рассмотренного множества критериев нормальности, настоящее руководство не дает однозначного ответа на вопрос о наиболее предпочтительном критерии. Конечно, на основании результатов исследований, характеризующих свойства и оценки мощности критериев, можно рекомендовать применение одних критериев и воздержаться от применения других. Из содержания руководства следует, что для большей объективности статистических выводов предпочтительней воспользоваться некоторым рядом критериев, обладающих определёнными достоинствами. Использование нескольких критериев, опирающихся на различные меры отклонения эмпирического распределения от теоретического, повышает качество статистических выводов.

Представленные в руководстве описания критериев с указанием их преимуществ и недостатков, расширенные таблицы процентных точек и модели распределений статистик критериев, оценки мощности критериев относительно некоторых конкурирующих гипотез позволяют специалистам, решающим задачи статистического анализа в конкретной прикладной области, осознанно подходить к выбору критериев, не останавливаясь на использовании какого-то одного.

Приведенные оценки мощности критериев для различных объёмов выборок n позволяют не только сравнивать критерии, но и дают возможность (при задании конкурирующей гипотезы) оценивать вероятности ошибок 2-го рода β , соответствующие заданным вероятностям ошибок 1-го рода α . Они же позволяют спрогнозировать требуемые объемы выборок для того, чтобы с вероятностями ошибок α и β не больше заданных различать, например, гипотезы H_0 и H_1 .

Использование в процессе проверки гипотезы процентных точек уже не соответствует современному уровню требований к качеству статистических выводов. В связи с этим возрастает роль методов статистического моделирования и компьютерных технологий, позволяющих в интерактивном режиме исследовать распределения статистик и оценивать достигнутый уровень значимости P_{value} .

Поднятая в руководстве проблема влияния ошибок округления на свойства статистических критериев является одной из основных причин некорректности выводов в различных приложениях статистических методов.

Библиографический список

1. *Aly E.E.* Quadratic nuisance parameter-free goodness-of-fit tests in the presence of location and scale parameters [Text] / E. E. Aly, M. Csorgo // Canadian Journal of Statistics. – 1985. – Vol. 13. – P. 53–70.
2. *Aly E.E.* On some goodness-of-fit tests for the normal, logistic and extreme-value distributions [Text] / E.E. Aly, M.A. Shayib // Communications in Statistics - Theory and Methods. – 1992. – Vol. 21. No. 5. – P. 1297–1308.
3. *Anderson T.W.* Asymptotic theory of certain “Goodness of fit” criteria based on stochastic processes [Text] / T.W. Anderson, D.A. Darling // AMS. – 1952. – Vol. 23. – P. 193–212.
4. *Anderson T.W.* A test of goodness of fit [Text] / T.W. Anderson, D.A. Darling // J. Amer. Statist. Assoc. – 1954. – Vol. 29. – P. 765–769.
5. *Baringhaus L.* A consistent test for multivariate normality based on the empirical characteristic function [Text] / L. Baringhaus, N. Henze // Metrika. – 1988. – No. 35. – P. 339–348.
6. *Baringhaus L.* Recent and classical tests for normality – A comparative study [Text] / L. Baringhaus, R. Danschke, N. Henze // Comm. Statistic. – 1989. – No. 18(1). – P. 363–379.
7. Biometrika tables for Statisticians [Text] / ed. by E.S. Pearson, H.O. Hartley. – 3rd ed. – Cambridge : University Press, 1966. – Vol. 1. – 264 p.
8. Biometrika tables for Statisticians [Text] / ed.: E.S. Pearson, H.O. Hartley. – Cambridge : University Press, 1972. – Vol. 2. – 385 p.
9. Biometrika tables for Statisticians [Text] / ed.: E.S. Pearson, H.O. Hartley. – Cambridge : University Press, 1976. – Vol. 2. – 286 p.
10. *Blom G.* Statistical estimates and transformed beta-variables : Doctoral thesis [Text] / G. Blom. – Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1958.
11. *Bonett D.G.* A test of normality with high uniform power [Text] / D.G. Bonett, E. Seier // Computational statistics & Data analysis. – 2002. – Vol. 40. – No. 3. – P. 435–445.
12. *Bontemps C.* Testing Normality: A GMM Approach [Text] / C. Bontemps, N. Meddahi // Journal of Econometrics. – 2005. – Vol. 124. – No. 1. – P. 149–186.
13. *Bowmann K.O.* ‘Omnibus’ test contours for departures from normality based on $|\sqrt{b_1}|$, b_2 [Text] / K.O. Bowmann, L.R. Shenton // Biometrika. – 1975. – Vol. 62. – P. 243–250.

14. *Brys G.* Goodness-of-fit Tests Based on a Robust Measure of Skewness [Text] / G. Brys, M. Hubert, A. Struyf // Computational Statistics. – 2008. – Vol. 23. – No. 3. – P. 429–442.
15. *Brys G.* A robust measure of skewness [Text] / G. Brys, M. Hubert, A. Struyf // Journal of Computational and Graphical Statistics. – 2004. – Vol. 13. – No. 4. – P. 996–1017.
16. *Chen L.* An alternative test for normality based on normalized spacings [Text] / L. Chen, S.S. Shapiro // Journal of Statistical and Simulation. – 2012. – Vol. 53. – P. 269–288.
17. *Chen Z.* An alternative test for uniformity [Text] / Z. Chen, C. Ye // International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering. – 2009. – Vol. 16. – No. 4. – P. 343–356.
18. *Chen Z.* Goodness-of-Fit Test Based on Arbitrarily Selected Order Statistics [Text] / Z. Chen // Mathematics and Statistics. – 2014. – Vol. 2. – No. 2. – P. 72–77.
19. *Chernoff H.* The use of maximum likelihood estimates in χ^2 test for goodness of fit [Text] / H. Chernoff, E.L. Lehmann // Ann. Math. Stat. – 1954. – Vol. 25. – P. 579–586.
20. *Correia J.C.* A new estimator of entropy [Text] / J.C. Correia // Communication in Statistics – Theory and Methods. – 1995. – Vol. 24. – No. 10. – P. 2439–2449.
21. *D'Agostino R.B.* Transformation to normality of the null distribution of g_1 / R.B. D'Agostino // Biometrika. – 1970. – Vol. 57. – P. 679–681.
22. *D'Agostino R.B.* Simulation probability points of b_2 for small samples [Text] / R.B. D'Agostino, G.L. Tietjen // Biometrika. – 1971. – Vol. 58. – P. 669–672.
23. *David H.A.* The distribution of the ratio? In a single normal sample, of range to standard deviation [Text] / H.A. David, H.O. Hartley, E.S. Pearson // Biometrika. – 1964. – Vol. 512. – No. 3–4. – P. 484–487.
24. *Deidda R.* Sensitivity of goodness-of-fit statistics to rainfall data rounding off [Text] / R. Deidda, M. Puliga // Physics and Chemistry of the Earth. – 2006. – Vol. 31. – P. 1240–1251.
25. Design of experiments and statistical analysis for grouped observations [Text]: monograph / V.I. Denisov, K.-H. Eger, B.Yu. Lemeshko, E.B. Tsoy. – Novosibirsk : NSTU Publishing house, 2004. – 464 p.
26. *Desgagne A.* Test of Normality Against Generalized Exponential Power Alternatives [Text] / A. Desgagne, P.L. de Micheaux, A. Leblanc // Communications in Statistics – Theory and Methods. – 2013. – Vol. 42. – No. 1. – P. 164–190.
27. *Desgagne A.* A Powerful and Interpretable Alternative to the Jarque–Bera Test of Normality Based on 2nd-power Skewness and Kurtosis, Using the Rao's Score Test on the APD Family [Text] / A. Desgagne, P.L. de Micheaux // Journal of Applied Statistics. – 2018. – Vol. 45. – No. 13. – P. 2307–2327.
28. *Dong L.B.* An Empirical Likelihood Ratio Test for Normality [Text] / L.B. Dong, D.E.A. Giles // Communications in Statistics – Simulation and Computation, 2007. – Vol. 36. – No. 1. – P. 197–215.
29. *Doornik J.A.* An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality [Electronic resource] / J.A. Doornik, H. Hansen // Discussion Paper. – Oxford: Nuffield College, 1994. – No. W4&91. – URL: <http://www.nuff.ox.ac.uk/users/Doornik/papers/normal2.pdf>. – Загл. с экрана.

30. *Doornik J.A.* An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality / J.A. Doornik, H. Hansen // Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 2008. – Vol.70, – P.927–939.
31. *Ebrahimi N.* Two measures of sample entropy [Text] / N. Ebrahimi, K. Pflughoeft, E.S. Soofi // Statistics & Probability Letters. – 1994. – Vol. 20. – No. 3. – P. 225–234.
32. *Epps T. W.* A test for normality based on the empirical characteristic function [Text] / T.W. Epps, L.B. Pulley // Biometrika. – 1983. – Vol. 70. – P. 723–726.
33. *Filliben J.J.* The Probability Plot Correlation Coefficient Test for Normality [Text] / J.J. Filliben // Technometrics. – 1975. Vol. 17. – No. 1. – P.111–117.
34. *Fisher R.A.* The Use of Multiple Measurements in Taxonomic Problems [Text] / R.A. Fisher // Annals of Eugenics. – 1936. – Vol. 7. – P. 179–188.
35. *Frosini B.V.* A survey of a class of goodness-of-fit statistics [Text] / B.V. Frosini // Metron. – 1978. – Vol. 36. – No. 1–2. – P. 3–49.
36. *Frosini B.V.* On the distribution and power of goodness-of-fit statistic with parametric and nonparametric applications, “Goodness-of-fit” [Text] / B.V. Frosini, F.E. Grubbs ; ed. by P. Revesz, K. Sarkadi, P.K. Sen. – Amsterdam – Oxford – New York : North Holland Publ. Comp, 1987. – P. 133–154.
37. *Geary R.C.* The ratio of the mean deviation to the standard deviation as a test of normality [Text] / R.C. Geary // Biometrika. – 1935. – Vol. 27. – P. 310–322.
38. *Geary R.C.* Moments of the ratio of the mean deviation to the standard deviation for normal samples / R.C. Geary // Biometrika. – 1936. – Vol. 28. – P. 295–307.
39. *Geary R.C.* Testing for Normality [Text] / R.C. Geary // Biometrika. – 1937. – Vol. 34. – P. 209–242.
40. *Gel Y.R.* Robust directed tests of normality against heavy-tailed alternatives [Text] / Y.R. Gel, W. Miao, J.L. Gastwirth // Computational Statistics & Data Analysis. – 2007. – Vol. 51. – No. 5. – P. 2734–2746.
41. *Gel Y.R.* A robust modification of the Jarque–Bera test of normality [Text] / Y.R. Gel, J.L. Gastwirth // Economics Letters. – 2008. – Vol. 99. – No. 1. – P. 30–32.
42. *Greenwood P.E.* A guide to chi-squared testing [Text] / P.E. Greenwood, M.S. Nikulin. – New York : John Wiley & Sons, 1996. – 280 p.
43. *Grzegorzewski P.* Entropy-based goodness-of-fit test for exponentiality [Text] / P. Grzegorzewski, R. Wieczorkowski // Communication in Statistics – Theory and Methods. – 1999. – Vol. 28. – P. 1183–1202.
44. *Harter H.L.* Expected values of normal order statistics [Text] / H.L. Harter // Biometrika. – 1961. – Vol. 48. – No. 1–2. – P. 151–165.
45. *Hegazy Y.A.S.* Some new goodness-of-fit tests using order statistics [Text] / Y.A.S. Hegazy, J.R. Green // Applied Statistics. – 1975. – Vol. 24. – No. 3. – P. 299–308.
46. *Henze N.* An approximation to the limit distribution of the Epps-Pulley test statistic for normality [Text] / N. Henze // Metrika. – 1990. – Vol. 37. – P. 7–18.
47. *Jarque C.M.* Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals [Text] / C.M. Jarque, A.K. Bera // Economics Letters. – 1980. – Vol. 6. No. 3. – P. 255–259.
48. *Jarque C.M.* Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals: Monte Carlo evidence [Text] / C.M. Jarque, A.K. Bera // Economics Letters. – 1981. – Vol. 7. № 4. – P. 313–318.

49. *Kolmogoroff A. N.* Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione [Text] / A.N. Kolmogoroff // G. Ist. Ital. attuar. – 1933. – Vol. 4. – No. 1. – P. 83–91.
50. *Kuiper N.H.* Tests concerning random points on a circle [Text] / N.H. Kuiper // Proc. Konikl. Nederl. Akad. Van Wetenschappen. Series A. – 1960. – Vol. 63. – P.38-47.
51. *Lemeshko B.Yu.* The power of goodness of fit tests for close alternatives [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, S.N. Postovalov // Measurement Techniques, 2007. – Vol. 50. No. 2. – P. 132–141.
52. *Lemeshko B.Yu.* Distribution models for nonparametric tests for fit in verifying complicated hypotheses and maximum-likelihood estimators. P. 1 [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2009. – Vol. 52., No. 6. – P. 555–565.
53. *Lemeshko B.Yu.* Analysis of the Power of Goodness-of-Fit Tests for Near Competing Hypotheses. I. The Verification of Simple Hypotheses [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, S.N. Postovalov // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2009. – Vol. 3. – No. 4. – P. 462–475.
54. *Lemeshko B.Yu.* Comparative analysis of the power of goodness-of-fit tests for near competing hypotheses. II. Verification of complex hypotheses [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, S.N. Postovalov // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2010. – Vol. 4. – No. 1. – P. 79–93.
55. *Lemeshko B.Yu.* Statistic Distribution Models for Some Nonparametric Goodness-of-Fit Tests in Testing Composite Hypotheses [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, S.N. Postovalov // Communications in Statistics – Theory and Methods. – 2010. – Vol. 39. – No. 3. – P. 460–471.
56. *Lemeshko B.Yu.* Real-Time Studying of Statistic Distributions of Non-Parametric Goodness-of-Fit Tests when Testing Complex Hypotheses [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, A.P. Rogozhnikov // Proceedings of the International Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference”. – Novosibirsk, Russia, 20-22 September, 2011. – P. 19–27.
57. *Lemeshko B.Yu.* Application of nonparametric goodness-of-fit tests for composite hypotheses in case of unknown distributions of statistics [Text] / A.A. Gorbunova, B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, A.P. Rogozhnikov // Proceedings of the International Workshop “Applied methods of statistical analysis. Applications in survival analysis, reliability and quality control”. – Novosibirsk, 25–27 September 2013. – P. 8–24.
58. *Lemeshko B.Yu.* Interactive investigation of statistical regularities in testing composite hypotheses of goodness of fit [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, A.P. Rogozhnikov // Statistical Models and Methods for Reliability and Survival Analysis: monograph. Chap. 5. – Wiley-ISTE, 2013. – P. 61–76.
59. *Lemeshko B.Yu.* Application and Power of the Nonparametric Kuiper, Watson, and Zhang Tests of Goodness-of-Fit [Text] / B.Yu. Lemeshko, A.A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2013. – Vol. 56, – No. 5. – P.465–475.
60. *Lemeshko B.Yu.* Application of nonparametric Kuiper and Watson tests of goodness-of-fit for composite hypotheses [Text] / B.Yu. Lemeshko, A.A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2013. – Vol. 56. – No. 9. – P.965–973.
61. *Lemeshko B.Yu.* Solving problems of using some nonparametric goodness-of-fit tests [Text] / B.Yu. Lemeshko, A.A. Gorbunova, S.B. Lemeshko, A.P. Rogozhnikov

- // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2014. – Vol. 50. – No. 1. – P.21–35.
62. Lemeshko B.Y. About the effect of rounding on the properties of tests for testing statistical hypotheses [Text] / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1715. – No. 012063.
 63. Lilliefors H.W. On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown [Text] / H.W. Lilliefors // J. Am. Statist. Assoc. – 1967. – Vol. 62. – P. 399–402.
 64. Lin Ch.-Ch. A simple test for normality against asymmetric alternatives [Text] / Ch.-Ch. Lin, G.S. Mudholkar // Biometrika. – 1980. – Vol. 67. – No. 2. – P. 455–461.
 65. Locke C., Spurrier J. D. The use of U-statistics for testing normality against nonsymmetrical alternative // Biometrika. – 1976. – Vol. 63, No. 1. – P. 143–147.
 66. Locke C. The use of U-statistics for testing normality against alternatives with both tails heavy or both tails light [Text] / C. Locke, J.D. Spurrier // Biometrika. – 1977. – Vol. 64. – No. 3. – P. 638–640.
 67. Martinez J. A test for departure from normality based on a biweight estimator of scales [Text] / J. Martinez, B. Iglewitz // Biometrika. – 1981. – Vol. 68. – No. 1. – P. 331–333.
 68. Martynov G. Weighted Cramer-von Mises Test with Estimated Parameters [Text] / G. Martynov // Communications in Statistics – Theory and Methods, 2011. – Vol. 40. – No. 19–20. – P. 3569–3586.
 69. Millikan R.A. On the elementary electrical charge and the Avogadro constant [Text] / R.A. Millikan // The Physical Review. Series II. – 1913. – P.109–143.
 70. Oja H. Two location and scale-free goodness-of-fit tests [Text] / H. Oja // Biometrika. – 1981. – Vol. 68. – No. 3. – P. 637–640.
 71. Oja H. New tests for normality [Text] / H. Oja // Biometrika. – 1983. – Vol. 70. – No. 1. – P. 297–299.
 72. Pearson E.S. Test for departure from normality: Comparison of powers [Text] / E.S. Pearson, R.B. D'Agostino, K.O. Bowmann // Biometrika. – 1977. – Vol. 64. – P. 231–246.
 73. Rao K.C. A chi-squared statistic for goodness-of-fit tests within the exponential family [Text] / K.C. Rao, D.S. Robson // Commun. Statist. – 1974. – Vol. 3. – P. 1139–1153.
 74. Royston J. P. Approximating the Shapiro-Wilk W-test for non-normality [Text] / J.P. Royston // Statistics and Computing. – 1992. – Vol. 2. – No. 3. – P. 117–119.
 75. Scott W.F. Tables for the Lilliefors and Modified Cramer-von Mises tests of normality [Text] / W.F. Scott, B. Stewart // Communications in Statistics – Theory and Methods. – 2011. – Vol.40. – No. 4. – P.726–730.
 76. Shapiro S.S. An analysis of variance test for normality (complete samples) [Text] / S.S. Shapiro, M.B. Wilk // Biometrika. – 1965. – Vol. 52. – P. 591–611.
 77. Shapiro S.S. Goodness-of fit tests [Text] / S.S. Shapiro, M.B. Wilk, C.J. Chen // Journal of the American statistical Association. – 1968. – Vol. 63. – P. 1343–1372.
 78. Shapiro S.S. An approximate analysis of variance test for normality [Text] / S.S. Shapiro, R.S. Francia // Journal of the American statistical Association. – 1972. – Vol. 67. – No. 337. – P. 215–216.
 79. Spiegelhalter D.J. A test for normality against symmetric alternatives [Text] / D.J. Spiegelhalter //Biometrika. – 1977. – Vol. 64. – No. 2. – P. 415–418.

80. *Stephens M.A.* Use of Kolmogorov–Smirnov, Cramer – von Mises and related statistics – without extensive table [Text] / M.A. Stephens // J. R. Stat. Soc. – 1970. – Vol. 32. – P. 115–122.
81. *Stephens M.A.* EDF statistics for goodness of fit and some comparisons [Text] / M.A. Stephens // Journal of the American statistical Association. – 1974. – Vol. 69. – No. 347. – P. 730–737.
82. *Stigler S.M.* Do robust estimators work with real data? [Text] / S.M. Stigler // The Annals of Statistics. – 1977. – Vol.5. – No. 6. – P.1055–1098.
83. *Tricker A.R.* The effect of rounding on the significance level of certain normal test statistics [Text] / A.R. Tricker // Journal of Applied Statistics. – 1990. – Vol. 17. – No. 1. – P. 31–38.
84. *Tricker A.R.* The effect of rounding on the power level of certain normal test statistics [Text] / A.R. Tricker // Journal of Applied Statistics. – 1990. – Vol. 17. – No. 2. – P. 219–228.
85. *Uyanto S.S.* An Extensive Comparisons of 50 Univariate Goodness-of-fit Tests for Normality [Text] / S.S. Uyanto // Austrian Journal of Statistics. – 2022. – Vol. 51. – P. 45–97.
86. *Van Es B.* Estimating functionals related to a density by class of statistics based on spacings [Text] / B.Van Es // Scandinavian Journal of Statistics. – 1992. – Vol. 19. – P. 61–72.
87. *Vasicek Oldrich.* A Test for Normality Based on Sample Entropy [Text] / O. Vasicek // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). – 1976. – Vol. 38. – No. 1. – P. 54–59.
88. *Voinov V.* A comparative study of some modified chi-squared tests / V. Voinov, N. Pya, R. Alloyarova // Communications in Statistics – Simulation and Computation. – 2009. – Vol. 38. – No. 3. – P.355–367.
89. *Voinov V.* A statistical reanalysis of the classical Rutherford’s experiment [Text] / V. Voinov, E. Voinov // Communications in Statistics – Simulation and Computation. – 2010. – Vol.39. – No. 1. – P.157–171.
90. *Watson G.S.* Goodness-of-fit tests on a circle. I [Text] / G.S. Watson // Biometrika. – 1961. – Vol. 48. – No. 1-2. – P.109–114.
91. *Watson G.S.* Goodness-of-fit tests on a circle. II [Text] / G.S. Watson // Biometrika. – 1962. – Vol. 49. – No. 1-2. – P.57- 63.
92. *Weisberg S.* An approximate analysis of variance test for non-normality suitable for machine calculation [Text] / S. Weisberg, C. Bingham // Technometrics. – 1975. – Vol. 17. – No. 1. – P. 133-134.
93. *Zamanzade E.* Testing normality based on new entropy estimators [Text] / E. Zamanzade, N.R. Arghami // Journal of Statistical Computation and Simulation. – 2012. – Vol. 82. No. 11. – P. 1701-1713.
94. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests [Text]: PhD Thesis / J. Zhang. – Toronto: York University, 2001.
95. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit tests based on the likelihood ratio [Text] / J. Zhang // Journal of the Royal Statistical Society: Series B. – 2002. – Vol. 64. – No. 2. – P. 281–294.

96. *Zhang J.* Likelihood-ratio tests for normality [Text] / J. Zhang, Yu. Wub // Computational Statistics & Data Analysis. – 2005. – Vol. 49. – No. 3. – P.709–721.
97. *Zhang J.* Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio [Text] / J. Zhang // Technometrics. – 2006. – Vol. 48. – No. 1. – P.95–103.
98. *Zhang P.* Omnibus test of normality using the Q statistic [Text] / P. Zhang // Journal of Applied Statistics. – 1999. – Vol. 26. – No. 4. – P. 519–528.
99. *Большев Л.Н.* Асимптотические пирсоновские преобразования [Текст] / Л.Н. Большев // Теория вероятностей и ее применение. – 1963. – Т. 8. – № 2. – С. 129–155.
100. *Большев Л.Н.* Таблицы математической статистики [Текст] / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М.: Наука, 1983. – 416 с.
101. *Большев Л.Н.* Теория вероятностей и математическая статистика : избр. тр. [Текст] / Л.Н. Большев; под ред. Ю.В. Прохорова. – М.: Наука, 1987. – 286 с.
102. *Бушакова А.Д.* Исследование влияния вариантов асимптотической оптимальности группирования на мощность критериев типа χ^2 [Текст] / А.Д. Бушакова, Б.Ю. Лемешко // Материалы Российской НТК: Информатика и проблемы телекоммуникаций. Т. 1. – Новосибирск 2009. – С.34–37.
103. ГОСТ Р ИСО 5479–2002. Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения [Текст]. – М. : Изд-во стандартов, 2002. – 30 с.
104. *Денисов В.И.* Оптимальное группирование при обработке экспериментальных данных [Текст] / В.И. Денисов, Б.Ю. Лемешко // Измерительные информационные системы. – Новосибирск, 1979. – С. 5–14.
105. *Денисов В.И.* Оптимальное группирование, оценка параметров и планирование регрессионных экспериментов [Текст]: в 2 ч. / В.И. Денисов, Б.Ю. Лемешко, Е.Б. Цой; Новосиб. гос. техн. ун-т. – Новосибирск, 1993. – 346 с.
106. *Денисов В.И.* Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим [Текст]: метод. реком. Ч. I. Критерии типа χ^2 / В.И. Денисов, Б.Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. – 126 с.
107. *Золотухина Л.В.* Эмпирическое исследование мощности критерия Саркади и его модификация [Текст] / Л.В. Золотухина, Е.В. Винник // Завод. лаб. – 1985. – Т. 51. № 1. – С. 51–55.
108. *Кобзарь А.И.* Прикладная математическая статистика: для инженеров и научных работников [Текст] / А.И. Кобзарь. – М.: Физматлит, 2006. – 816 с.
109. *Козлова А.В.* Исследование распределений статистик и мощности непараметрических критериев согласия, предложенных Jin Zhang [Текст] / А.В. Козлова, Б.Ю. Лемешко // Материалы Российской НТК: Информатика и проблемы телекоммуникаций. Т. 1. – Новосибирск, – 2007. – С.136–139.
110. *Лемешко Б.Ю.* Группирование наблюдений как способ получения робастных оценок [Текст] / Б.Ю. Лемешко // Надежность и контроль качества. – 1997. – № 5. – С.26–35.
111. *Лемешко Б.Ю.* Робастные методы оценивания и отбраковка аномальных измерений [Текст] / Б.Ю. Лемешко // Заводская лаборатория. – 1997. – Т.63. – № 5. – С. 43–49.

112. Лемешко Б.Ю. Асимптотически оптимальное группирование наблюдений – это обеспечение максимальной мощности критериев [Текст] / Б.Ю. Лемешко // Надежность и контроль качества. – 1997. – № 8. – С. 3–14.
113. Лемешко Б.Ю. Асимптотически оптимальное группирование наблюдений в критериях согласия [Текст] / Б.Ю. Лемешко // Заводская лаборатория. – 1998. – Т. 64. – № 1. – С. 56–64.
114. Лемешко Б.Ю. Максимизация мощности критериев типа χ^2 [Текст] / Б.Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова // Докл. СО АН высш. шк. – Новосибирск, 2000. – № 2. – С. 53–61.
115. Лемешко Б.Ю. О зависимости распределений статистик непараметрических критериев и их мощности от метода оценивания параметров [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2001. – Т. 67. – № 7. – С. 62–71.
116. Лемешко Б.Ю. Применение непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез [Текст] / Б. Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов // Автометрия. – 2001. – № 2. – С. 88–102.
117. Лемешко Б.Ю. Обеспечение наибольшей мощности применяемых критериев типа χ^2 [Текст] / М.Г. Березовский, Б.Ю. Лемешко, Е.В. Чимитова // Вестник СибГАУ. Вып.3. – Красноярск: СибГАУ, 2002. – С.78–85.
118. Лемешко Б.Ю. О выборе числа интервалов в критериях согласия типа χ^2 [Текст] / Б.Ю. Лемешко, Е.В. Чимитова // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2003. – Т. 69. – № 1. – С. 61–67.
119. Лемешко Б.Ю. Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей [Текст]: учебное пособие. / Б.Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 119 с.
120. Лемешко Б.Ю. Сравнительный анализ критериев проверки отклонения распределения от нормального закона [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Метрология. – 2005. – № 2. – С. 3–24.
121. Лемешко Б.Ю. Мощность критериев согласия при близких альтернативах [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов // Измерительная техника. – 2007. – № 2. – С.22–27.
122. Лемешко Б.Ю. Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах. I. Проверка простых гипотез [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – Т. 11. – № 2 (34). – С.96–111.
123. Лемешко Б.Ю. Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких альтернативах. II. Проверка сложных гипотез [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – Т. 11. – № 4 (36). – С.78–93.
124. Лемешко Б.Ю. Исследование особенностей и мощности некоторых критериев нормальности [Текст] / Б.Ю. Лемешко, А.П. Рогожников // Метрология. – 2009. – № 4. – С. 3–24.
125. Лемешко Б.Ю. Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. I [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2009. – № 6. – С. 3–11.

126. Лемешко Б.Ю. Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. II [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2009. – № 8. – С.17–26.
127. Лемешко Б.Ю. О нормальности погрешностей измерений в классических экспериментах и мощности критериев, применяемых для проверки отклонения от нормального закона [Текст] / Б.Ю. Лемешко, А.П. Рогожников // Метрология. – 2012. – № 5. – С. 3–26.
128. Лемешко Б.Ю. О применении и мощности непараметрических критериев согласия Купера, Ватсона и Жанга [Текст] / Б.Ю. Лемешко, А.А. Горбунова // Измерительная техника. – 2013. – № 5. – С.3–9.
129. Лемешко Б.Ю. Применение непараметрических критериев согласия Купера и Ватсона при проверке сложных гипотез [Текст] / Б.Ю. Лемешко, А.А. Горбунова // Измерительная техника. – 2013. – № 9. – С.14–21.
130. Лемешко Б.Ю. О решении проблем применения некоторых непараметрических критериев согласия [Текст] / Б.Ю. Лемешко, А.А. Горбунова, С.Б. Лемешко, А.П. Рогожников // Автометрия. – 2014. – Т. 50. – № 1. – С.26–43.
131. Лемешко Б.Ю. Непараметрические критерии согласия: Руководство по применению [Текст] / Б.Ю. Лемешко. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 163 с.
132. Лемешко Б.Ю. Критерий проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению [Текст]: монография. – М.: ИНФРА-М, 2015. – 160 с.
133. Лемешко Б.Ю. Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона. Руководство по применению [Текст]: монография / Б.Ю. Лемешко. П.Ю. Блинов. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. –183 с.
134. Лемешко Б.Ю. Критерии проверки отклонения от экспоненциального закона. Руководство по применению [Текст]: монография / Б.Ю. Лемешко, П.Ю. Блинов. – М.: ИНФРА-М, 2021. – 352 с.
135. Лемешко Б.Ю. Критерии проверки гипотез о случайности и отсутствии тренда. Руководство по применению [Текст]: монография / Б.Ю. Лемешко, И.В. Веретельникова. – М.: ИНФРА-М, 2021. – 221 с.
136. Лемешко Б.Ю. Критерии проверки гипотез об однородности. Руководство по применению [Текст]: монография / Б.Ю. Лемешко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2021. – 248 с.
137. Лемешко Б.Ю. К вопросу статистического анализа больших данных [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, М.А. Семёнова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2018. – № 44. – С. 40–49.
138. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Влияние округления на свойства критериев проверки статистических гипотез [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Автометрия. – 2020. – Т. 56. – № 3. – С. 35–45.
139. Лемешко Б.Ю. О влиянии ошибок округления на распределения статистик критериев согласия [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2020. – № 53. – С. 47–60.

140. Лемешко Б.Ю. Проблемы применения непараметрических критериев согласия в задачах обработки результатов измерений [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Системы анализа и обработки данных. – 2021. – № 2 (82). – С. 47–66.
141. Лемешко Б.Ю. Непараметрические критерии согласия при проверке нормальности в условиях округления измерений [Текст] / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Системы анализа и обработки данных. – 2022. – № 2 (86). – С. 21–38.
142. Мартынов Г.В. Критерий омега-квадрат [Текст] / Г.В. Мартынов. – М.: Наука, 1978. – 80 с.
143. Никулин М.С. Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба [Текст] / М.С. Никулин // Теория вероятностей и ее применение. – 1973. – Т. XVIII. – № 3. – С. 583–591.
144. Никулин М.С. О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений [Текст] / М.С. Никулин // Теория вероятностей и ее применение. – 1973. – Т. XVIII. – № 3. – С. 675–676.
145. Новицкий П.В. Оценка погрешностей результатов измерений [Текст] / П.В. Новицкий, И.А. Зограф. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 303 с.
146. Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин "Интервальная статистика 5.4" [Электронный ресурс] / Б.Ю. Лемешко, С.Б.Лемешко, П.Ю. Блинов, И.В. Веретельникова, А.Ю. Новикова // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2018666213, 13.12.2018. Заявка № 2018663206 от 22.11.2018. URL: http://www.ami.nstu.ru/~headrd/ISW_exe.zip (дата обращения 24.04.2022).
147. Р 50.1.037–2002. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. II. Непараметрические критерии [Текст]. – М.: Изд-во стандартов, 2002. – 64 с.
148. Р 50.1.033–2001. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. I. Критерии типа хи-квадрат [Текст]. – М.: Изд-во стандартов, 2002. – 87 с.
149. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход [Текст]: монография / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов, Е.В. Чимитова. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. – 888 с.
150. Чубисов Д.М. Некоторые критерии типа хи-квадрат для непрерывных распределений [Текст] / Д. М. Чубисов // Теория вероятностей и ее применение. – 1971. – Т. XVI. – № 1. – С. 3–20.

Приложение А.
Таблицы для критериев проверки нормальности

Таблица А.1

Процентные точки для статистики критерия проверки симметричности

n	$p = 1 - \alpha$		n	$p = 1 - \alpha$	
	0.95	0.99		0.95	0.99
8	0.99	1.42	400	0.2	0.28
9	0.97	1.41	450	0.19	0.27
10	0.95	1.39	500	0.18	0.26
12	0.91	1.34	550	0.17	0.24
15	0.85	1.26	600	0.16	0.23
20	0.77	1.15	650	0.16	0.22
25	0.71	1.06	700	0.15	0.22
30	0.66	0.98	750	0.15	0.21
35	0.62	0.92	800	0.14	0.2
40	0.59	0.87	850	0.14	0.2
45	0.56	0.82	900	0.13	0.19
50	0.53	0.79	950	0.13	0.18
60	0.49	0.72	1000	0.13	0.18
70	0.46	0.67	1200	0.12	0.16
80	0.43	0.63	1400	0.11	0.15
90	0.41	0.6	1600	0.10	0.14
100	0.39	0.57	1800	0.10	0.13
125	0.35	0.51	2000	0.09	0.13
150	0.32	0.46	2500	0.08	0.11
175	0.30	0.43	3000	0.07	0.10
200	0.28	0.4	3500	0.07	0.10
250	0.25	0.36	4000	0.06	0.09
300	0.23	0.33	4500	0.06	0.08
350	0.21	0.3	5000	0.06	0.08

Таблица А.2

Процентные точки для статистики критерия проверки на эксцесс

<i>n</i>	<i>p</i>				<i>n</i>	<i>p</i>			
	0.01	0.05	0.95	0.99		0.01	0.05	0.95	0.99
8	1.31	1.46	3.7	4.53	500	2.57	2.67	3.37	3.6
9	1.35	1.53	3.86	4.82	550	2.58	2.69	3.38	3.57
10	1.39	1.56	3.95	5	600	2.6	2.71	3.34	3.54
12	1.46	1.64	4.05	5.2	650	2.61	2.71	3.33	3.52
15	1.55	1.72	4.13	5.3	700	2.62	2.72	3.31	350
20	1.65	1.82	4.17	5.36	750	2.64	2.73	3.30	3.48
25	1.72	1.91	4.18	5.3	800	2.65	2.74	3.29	3.46
30	1.79	1.98	4.11	5.21	850	2.66	2.74	3.28	3.45
35	1.84	2.03	4.1	5.13	900	2.66	2.75	3.28	3.43
40	1.89	2.07	4.05	5.04	950	2.67	2.76	3.27	3.42
45	1.93	2.11	4.00	4.94	1000	2.68	2.76	3.26	3.41
50	1.95	2.15	3.99	4.88	1200	2.71	2.78	3.24	3.37
75	2.08	2.27	3.87	4.59	1400	2.72	2.8	3.22	3.34
100	2.18	2.35	3.77	4.39	1600	2.74	2.81	3.21	3.32
125	2.24	2.40	3.71	4.24	1800	2.76	2.82	3.20	3.3
150	2.29	2.45	3.65	4.13	2000	2.77	2.83	3.18	3.28
200	2.37	2.51	3.57	3.98	2500	2.79	2.85	3.16	3.25
250	2.42	2.55	3.52	3.87	3000	2.81	2.86	3.15	3.22
300	2.46	2.59	3.47	3.79	3500	2.82	2.87	3.14	3.21
350	2.50	2.62	3.44	3.72	4000	2.83	2.88	3.13	3.19
400	2.25	2.64	3.41	3.67	4500	2.84	2.88	3.12	3.18
450	2.55	2.66	3.39	3.63	5000	2.85	2.89	3.12	3.17

Таблица А.3

Коэффициенты a_k для вычисления статистики критерия Шапиро–Уилка

n	k														n
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
8	0.6052	0.3164	0.1743	0.0561											8
9	0.5888	0.3244	0.1976	0.0947											9
10	0.5739	0.3291	0.2141	0.1224	0.0399										10
11	0.5601	0.3315	0.2260	0.1429	0.0695										11
12	0.5475	0.3325	0.2347	0.1586	0.0922	0.0303									12
13	0.5359	0.3325	0.2412	0.1707	0.1099	0.0539									13
14	0.5251	0.3318	0.2430	0.1802	0.1240	0.0727	0.024								14
15	0.5150	0.3306	0.2495	0.1878	0.1353	0.0980	0.0433								15
16	0.5056	0.3290	0.2521	0.1939	0.1447	0.1005	0.0593	0.0196							16
17	0.4968	0.3273	0.2540	0.1988	0.1524	0.1109	0.0725	0.0359							17
18	0.4886	0.3253	0.2553	0.2027	0.1587	0.1197	0.0837	0.0496	0.0163						18
19	0.4808	0.3232	0.2561	0.2059	0.1641	0.1271	0.0932	0.0612	0.0303						19
20	0.4734	0.3211	0.2565	0.2085	0.1686	0.1334	0.1013	0.0711	0.0422	0.014					20
21	0.4643	0.3185	0.2578	0.2119	0.1736	0.1399	0.1092	0.0804	0.053	0.0263					21
22	0.4590	0.3156	0.2571	0.2131	0.1764	0.1443	0.1150	0.0878	0.0618	0.0368	0.0120				22
23	0.4542	0.3126	0.2563	0.2139	0.1787	0.1480	0.1201	0.0941	0.0696	0.0459	0.0228				23
24	0.4493	0.3098	0.2554	0.2145	0.1807	0.1512	0.1245	0.0997	0.0764	0.0539	0.0321	0.0107			24
25	0.4450	0.3069	0.2543	0.2148	0.1822	0.1539	0.1283	0.1046	0.0823	0.0610	0.0403	0.0200			25
26	0.4407	0.3043	0.2533	0.2151	0.1836	0.1563	0.1316	0.1089	0.0876	0.0672	0.0476	0.0284	0.0094		26
27	0.4366	0.3018	0.2522	0.2152	0.1848	0.1584	0.1346	0.1128	0.0923	0.0728	0.0540	0.0358	0.0178		27
28	0.4328	0.2992	0.2510	0.2151	0.1857	0.1601	0.1372	0.1162	0.0965	0.0778	0.0598	0.0424	0.0253	0.0084	28
29	0.4291	0.2968	0.2499	0.2150	0.1864	0.1616	0.1395	0.1192	0.1002	0.0822	0.0650	0.0483	0.0320	0.0159	29
30	0.4254	0.2944	0.2487	0.2148	0.1870	0.1630	0.1415	0.1219	0.1036	0.0862	0.0697	0.0537	0.0381	0.0227	30
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	n

Продолжение таблицы А.3

342

<i>n</i>	<i>k</i>														<i>n</i>
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
31	0.4220	0.2921	0.2475	0.2145	0.1874	0.1641	0.1433	0.1243	0.1066	0.0899	0.0739	0.0585	0.0435	0.0289	31
32	0.4188	0.2898	0.2463	0.2141	0.1878	0.1651	0.1449	0.1265	0.1093	0.0931	0.0777	0.0629	0.0485	0.0344	32
33	0.4156	0.2876	0.2451	0.2137	0.1880	0.1660	0.1463	0.1284	0.1118	0.0961	0.0812	0.0669	0.0530	0.0395	33
34	0.4127	0.2854	0.2439	0.2132	0.1882	0.1667	0.1475	0.1301	0.1140	0.0988	0.0844	0.0706	0.0572	0.0441	34
35	0.4098	0.2834	0.2427	0.2127	0.1883	0.1673	0.1487	0.1317	0.1160	0.1013	0.0873	0.0739	0.0610	0.0484	35
36	0.4068	0.2813	0.2415	0.2121	0.1883	0.1678	0.1496	0.1331	0.1179	0.1036	0.0900	0.0770	0.0645	0.0523	36
37	0.4040	0.2794	0.2403	0.2116	0.1883	0.1683	0.1505	0.1344	0.1196	0.1056	0.0924	0.0798	0.0677	0.0559	37
38	0.4015	0.2774	0.2391	0.211	0.1881	0.1686	0.1513	0.1356	0.1211	0.1075	0.0947	0.0824	0.0706	0.0592	38
39	0.3989	0.2755	0.2380	0.2104	0.1880	0.1689	0.1520	0.1366	0.1225	0.1092	0.0967	0.0848	0.0733	0.0622	39
40	0.3964	0.2737	0.2368	0.2098	0.1878	0.1691	0.1526	0.1376	0.1237	0.1108	0.0986	0.0870	0.0759	0.0651	40
41	0.3949	0.2719	0.2357	0.2091	0.1876	0.1693	0.1531	0.1384	0.1249	0.1123	0.1004	0.0891	0.0782	0.0677	41
42	0.3917	0.2701	0.2345	0.2085	0.1874	0.1694	0.1535	0.1392	0.1259	0.1136	0.1020	0.0909	0.0804	0.0701	42
43	0.3894	0.2684	0.2334	0.2078	0.1871	0.1695	0.1539	0.1398	0.1269	0.1149	0.1035	0.0927	0.0824	0.0724	43
44	0.3872	0.2667	0.2323	0.2072	0.1868	0.1695	0.1542	0.1405	0.1278	0.1160	0.1049	0.0943	0.0842	0.0745	44
45	0.3850	0.2651	0.2313	0.2065	0.1868	0.1695	0.1545	0.1410	0.1286	0.1170	0.1062	0.0959	0.0860	0.0765	45
46	0.3830	0.2635	0.2302	0.2058	0.1862	0.1695	0.1548	0.1415	0.1293	0.1180	0.1073	0.0972	0.0876	0.0783	46
47	0.3808	0.2620	0.2291	0.2052	0.1869	0.1695	0.1550	0.1420	0.1300	0.1189	0.1085	0.0986	0.0892	0.0801	47
48	0.3789	0.2604	0.2281	0.2045	0.1855	0.1693	0.1551	0.1423	0.1306	0.1197	0.1095	0.0998	0.0906	0.0817	48
49	0.3770	0.2589	0.2271	0.2038	0.1851	0.1692	0.1553	0.1427	0.1312	0.1205	0.1105	0.1010	0.0919	0.0832	49
50	0.3751	0.2574	0.2260	0.2032	0.1847	0.1691	0.1554	0.1430	0.1317	0.1212	0.1113	0.1020	0.0932	0.0846	50
<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	<i>n</i>

Окончание таблицы А.3

n	k										n
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
30	0.0076										30
31	0.0144										31
32	0.0206	0.0068									32
33	0.0262	0.0131									33
34	0.0314	0.0187	0.0062								34
35	0.0361	0.0239	0.0119								35
36	0.0404	0.0287	0.0172	0.0057							36
37	0.0444	0.0331	0.0220	0.011							37
38	0.0481	0.0372	0.0264	0.0158	0.0053						38
39	0.0515	0.0409	0.0305	0.0203	0.0101						39
40	0.0546	0.0444	0.0343	0.0244	0.0146	0.0049					40
41	0.0575	0.0476	0.0379	0.0283	0.0188	0.0094					41
42	0.0602	0.0506	0.0411	0.0318	0.0227	0.0136	0.0045				42
43	0.0628	0.0534	0.0442	0.0352	0.0263	0.0175	0.0087				43
44	0.0651	0.0560	0.0471	0.0383	0.0296	0.0211	0.0126	0.0042			44
45	0.0673	0.0584	0.0497	0.0412	0.0328	0.0245	0.0163	0.0081			45
46	0.0694	0.0607	0.0522	0.0439	0.0357	0.0277	0.0197	0.0118	0.0039		46
47	0.0713	0.0628	0.0546	0.0465	0.0385	0.0307	0.0229	0.0153	0.0076		47
48	0.0731	0.0648	0.0568	0.0489	0.0411	0.0335	0.0259	0.0185	0.0111	0.0037	48
49	0.0748	0.0667	0.0588	0.0511	0.0436	0.0361	0.0288	0.0215	0.0143	0.0071	49
50	0.0764	0.0685	0.0608	0.0532	0.0459	0.0386	0.0314	0.0244	0.0174	0.0104	0.0035
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Таблица А.4

Процентные точки для статистики критерия Шапиро–Уилка

<i>n</i>	<i>p</i>		<i>n</i>	<i>p</i>	
	0.01	0.05		0.01	0.05
8	0.749	0.818	30	0.9	0.927
9	0.764	0.829	31	0.902	0.929
10	0.781	0.842	32	0.904	0.93
11	0.792	0.85	33	0.906	0.931
12	0.805	0.859	34	0.908	0.933
13	0.814	0.866	35	0.91	0.934
14	0.825	0.874	36	0.912	0.935
15	0.835	0.881	37	0.914	0.936
16	0.844	0.887	38	0.916	0.938
17	0.851	0.892	39	0.917	0.939
18	0.858	0.897	40	0.919	0.94
19	0.863	0.901	41	0.93	0.941
20	0.868	0.905	42	0.922	0.942
21	0.873	0.908	43	0.923	0.943
22	0.878	0.911	44	0.924	0.944
23	0.881	0.914	45	0.926	0.945
24	0.884	0.916	46	0.927	0.945
25	0.888	0.918	47	0.928	0.946
26	0.891	0.92	48	0.929	0.947
27	0.894	0.92	49	0.929	0.947
28	0.896	0.924	50	0.93	0.947
29	0.898	0.926			

Таблица А.5

Процентные точки для статистики критерия Эпписа–Палли

n	$p = 1 - \alpha$				
	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
8	0.229	0.271	0.347	0.427	0.528
9	0.232	0.275	0.352	0.431	0.537
10	0.233	0.277	0.354	0.435	0.544
15	0.238	0.284	0.364	0.448	0.559
20	0.240	0.287	0.368	0.452	0.565
25	0.240	0.287	0.370	0.454	0.570
30	0.241	0.289	0.372	0.457	0.572
40	0.241	0.289	0.373	0.458	0.576
50	0.241	0.290	0.374	0.460	0.577
60	0.241	0.290	0.376	0.463	0.580
80	0.241	0.290	0.376	0.463	0.580
100	0.241	0.291	0.376	0.463	0.580
200	0.241	0.291	0.377	0.466	0.585
1000	0.2416	0.2916	0.3778	0.4655	0.5844

Таблица А.6

Коэффициенты для вычисления статистики модифицированного критерия Шапиро–Уилка

n	$\gamma(n)$	$\delta(n)$	$\varepsilon(n)$	n	$\gamma(n)$	$\delta(n)$	$\varepsilon(n)$
8	-2.696	1.333	0.4186	30	-6.150	1.949	0.1872
9	-2.968	1.400	0.3900	31	-6.248	1.965	0.1840
10	-3.262	1.471	0.3660	32	-6.324	1.976	0.1811
11	-3.485	1.515	0.3451	33	-6.402	1.988	0.1781
12	-3.731	1.571	0.3270	34	-6.480	2.000	0.1755
13	-3.936	1.613	0.3111	35	-6.559	2.012	0.1727
14	-4.155	1.655	0.2969	36	-6.640	2.024	0.1702
15	-4.373	1.695	0.2842	37	-6.721	2.037	0.1677
16	-4.567	1.724	0.2727	38	-6.803	2.049	0.1656
17	-4.713	1.739	0.2622	39	-6.887	2.062	0.1633
18	-4.885	1.770	0.2528	40	-6.961	2.075	0.1612
19	-5.018	1.786	0.2440	41	-7.035	2.088	0.1591
20	-5.153	1.802	0.2359	42	-7.111	2.101	0.1572
21	-5.291	1.818	0.2264	43	-7.188	2.114	0.1552
22	-5.413	1.835	0.2207	44	-7.266	2.128	0.1534
23	-5.508	1.848	0.2157	45	-7.345	2.141	0.1516
24	-5.605	1.862	0.2106	46	-7.414	2.155	0.1499
25	-5.704	1.876	0.2063	47	-7.484	2.169	0.1482
26	-5.803	1.890	0.2020	48	-7.555	2.183	0.1466
27	-5.905	1.905	0.1980	49	-7.615	2.198	0.1451
28	-5.988	1.919	0.1943	50	-7.677	2.212	0.1436
29	-6.074	1.934	0.1907				

Таблица А.7

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа χ^2 (при оценивании μ и σ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации A

k	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	A
3	-1.1106	1.1106	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.4065
4	-1.3834	0.0	1.3834	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.5527
5	-1.6961	-0.6894	0.6894	1.6961	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.6826
6	-1.8817	-0.9970	0.0	0.9970	1.8817	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.7557
7	-2.0600	-1.2647	-0.4918	0.4918	1.2647	2.0600	-	-	-	-	-	-	-	-	0.8103
8	-2.1954	-1.4552	-0.7863	0.0	0.7863	1.4552	2.1954	-	-	-	-	-	-	-	0.8474
9	-2.3188	-1.6218	-1.0223	-0.3828	0.3828	1.0223	1.6218	2.3188	-	-	-	-	-	-	0.8753
10	-2.4225	-1.7578	-1.2046	-0.6497	0.0	0.6497	1.2046	1.7578	2.4225	-	-	-	-	-	0.8960
11	-2.5167	-1.8784	-1.3602	-0.8621	-0.3143	0.3143	0.8621	1.3602	1.8784	2.5167	-	-	-	-	0.9121
12	-2.5993	-1.9028	-1.4914	-1.0331	-0.5334	0.0	0.5334	1.0331	1.4914	1.9028	2.5993	-	-	-	0.9247
13	-2.6746	-2.0762	-1.6068	-1.1784	-0.7465	-0.2669	0.2669	0.7465	1.1784	1.6068	2.0762	2.6746	-	-	0.9348
14	-2.7436	-2.1609	-1.7092	-1.3042	-0.9065	-0.4818	0.0	0.4818	0.9065	1.3042	1.7092	2.1609	2.7436	-	0.9430
15	-2.8069	-2.2378	-1.8011	-1.4150	-1.0435	-0.6590	-0.2325	0.2325	0.6590	1.0435	1.4150	1.8011	2.2378	2.8069	0.9498

Таблица А.8

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа χ^2 (при оценивании μ и σ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации A

k	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	A
3	0.1334	0.7332	0.1334	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.4065
4	0.0833	0.4167	0.4167	0.0833	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.5527
5	0.0449	0.2004	0.5094	0.2004	0.0449	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.6826
6	0.0299	0.1295	0.3406	0.3406	0.1295	0.0299	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.7557
7	0.0197	0.0833	0.2084	0.3772	0.2084	0.0833	0.0197	—	—	—	—	—	—	—	—	0.8103
8	0.0141	0.0587	0.1431	0.2841	0.2841	0.1431	0.0587	0.0141	—	—	—	—	—	—	—	0.8474
9	0.0102	0.0422	0.1009	0.1976	0.2982	0.1976	0.1009	0.0422	0.0102	—	—	—	—	—	—	0.8753
10	0.0077	0.0317	0.0748	0.1438	0.2420	0.2420	0.1438	0.0748	0.0317	0.0077	—	—	—	—	—	0.8960
11	0.0059	0.0243	0.0567	0.1074	0.1823	0.2468	0.1823	0.1074	0.0567	0.0243	0.0059	—	—	—	—	0.9121
12	0.0047	0.0190	0.0442	0.0829	0.1392	0.2100	0.2100	0.1392	0.0829	0.0442	0.0190	0.0047	—	—	—	0.9247
13	0.0037	0.0152	0.0352	0.0652	0.1085	0.1670	0.2104	0.1670	0.1085	0.0652	0.0352	0.0152	0.0037	—	—	0.9348
14	0.0030	0.0124	0.0283	0.0524	0.0862	0.1327	0.1850	0.1850	0.1327	0.0862	0.0524	0.0283	0.0124	0.0030	—	0.9430
15	0.0025	0.0101	0.0232	0.0427	0.0698	0.1066	0.1532	0.1838	0.1532	0.1066	0.0698	0.0427	0.0232	0.0101	0.0025	0.9498

Таблица А.9

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа χ^2 (при оценивании μ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации A

k	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	A
2	0.0	–	–	–	–	–	–	–	–	0.6336
3	–0.6120	0.6120	–	–	–	–	–	–	–	0.8098
4	–0.9816	0.0	0.9816	–	–	–	–	–	–	0.8825
5	–1.2444	–0.3823	0.3823	1.2444	–	–	–	–	–	0.9201
6	–1.4468	–0.6589	0.0	0.6589	1.4468	–	–	–	–	0.9420
7	–1.6108	–0.8744	–0.2803	0.2803	0.8744	1.6108	–	–	–	0.9560
8	–1.7479	–1.0499	–0.5005	0.0	0.5005	1.0499	1.7479	–	–	0.9655
9	–1.8655	–1.1976	–0.6812	–0.2218	0.2218	0.6812	1.1976	1.8655	–	0.9721
10	–1.9682	–1.3246	–0.8338	–0.4047	0.0	0.4047	0.8338	1.3246	1.9682	0.9771

Таблица А.10

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа χ^2 (при оценивании μ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации A

k	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	A
2	0.5000	0.5000	–	–	–	–	–	–	–	–	0.6336
3	0.2703	0.4594	0.2703	–	–	–	–	–	–	–	0.8098
4	0.1631	0.3369	0.3369	0.1631	–	–	–	–	–	–	0.8825
5	0.1067	0.2444	0.2978	0.2444	0.1067	–	–	–	–	–	0.9201
6	0.0740	0.1810	0.2450	0.2450	0.1810	0.0740	–	–	–	–	0.9320
7	0.0536	0.1373	0.1987	0.2208	0.1987	0.1373	0.0536	–	–	–	0.9560
8	0.0403	0.1066	0.1615	0.1916	0.1916	0.1615	0.1066	0.0403	–	–	0.9655
9	0.0310	0.0845	0.1323	0.1644	0.1756	0.1644	0.1323	0.0845	0.0310	–	0.9721
10	0.0245	0.0662	0.1095	0.1406	0.1572	0.1572	0.1406	0.1095	0.0662	0.0245	0.9771

Таблица А.11

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке сложных гипотез по критериям типа χ^2 (при оценивании σ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации A

k	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	A
2	-1.5750	—	—	—	—	—	—	—	—	0.3042
	1.5750	—	—	—	—	—	—	—	—	0.3042
3	-1.4821	1.4821	—	—	—	—	—	—	—	0.6522
4	-2.0249	-1.1865	1.4520	—	—	—	—	—	—	0.7358
	-1.4520	1.1855	2.0249	—	—	—	—	—	—	0.7358
5	-1.9956	-1.1401	1.1401	1.9958	—	—	—	—	—	0.8244
6	-2.3269	-1.6190	-0.9837	1.1190	1.9821	—	—	—	—	0.8588
	-1.9821	-1.1190	0.9837	1.6190	2.3269	—	—	—	—	0.8588
7	-2.3130	-1.6002	-0.9558	0.9558	1.6002	2.3130	—	—	—	0.8943
8	-2.5488	-1.9105	-1.3848	-0.8548	0.9400	1.5897	2.3053	—	—	0.9117
	-2.3053	-1.5897	-0.9400	0.8548	1.3848	1.9105	2.5488	—	—	0.9117
9	-2.5408	-1.9003	-1.3715	-0.8355	0.8355	1.3715	1.9003	2.5408	—	0.9294
10	-2.7223	-2.1286	-1.6602	-1.2260	-0.7634	0.8233	1.3632	1.8939	2.5358	0.9394
	-2.5358	-1.8939	-1.3632	-0.8233	0.7634	1.2260	1.6602	2.1286	2.7223	0.9394

Таблица А.12

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке сложных гипотез по критериям типа χ^2 (при оценивании σ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации A

k	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	A
2	0.0576	0.9424	—	—	—	—	—	—	—	—	0.3042
	0.9424	0.0576	—	—	—	—	—	—	—	—	0.3042
3	0.0692	0.8616	0.0692	—	—	—	—	—	—	—	0.6522
4	0.0214	0.0965	0.8089	0.0732	—	—	—	—	—	—	0.7358
	0.0732	0.8089	0.0965	0.0214	—	—	—	—	—	—	0.7358
5	0.0230	0.1041	0.7458	0.1041	0.0230	—	—	—	—	—	0.8244
6	0.0100	0.0427	0.1099	0.7058	0.1079	0.0237	—	—	—	—	0.8588
	0.0237	0.1079	0.7058	0.1099	0.0427	0.0100	—	—	—	—	0.8588
7	0.0104	0.0444	0.1148	0.6608	0.1148	0.0444	0.0104	—	—	—	0.8943
8	0.0054	0.0226	0.0550	0.1133	0.6300	0.1177	0.0454	0.0106	—	—	0.9117
	0.0106	0.0454	0.1177	0.6300	0.1133	0.0550	0.0226	0.0054	—	—	0.9117
9	0.0055	0.0232	0.0564	0.1166	0.5966	0.1166	0.0564	0.0232	0.0055	—	0.9294
10	0.0032	0.0134	0.0318	0.0617	0.1125	0.5722	0.1188	0.0573	0.0235	0.0056	0.9394
	0.0056	0.0235	0.0573	0.1188	0.5722	0.1126	0.0617	0.0318	0.0314	0.0032	0.9394

По вопросам приобретения книг обращайтесь:
Отдел продаж «ИНФРА-М» (оптовая продажа):

127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1

Тел. (495) 280-33-86 (доб. 218, 222)

E-mail: bookware@infra-m.ru

Отдел «Книга—почтой»:

тел. (495) 280-33-86 (доб. 222)

ФЗ
№ 436-ФЗ

Издание не подлежит маркировке
в соответствии с п. 1 ч. 2 ст. 1

Научное издание

Лемешко Борис Юрьевич

**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОТКЛОНЕНИЯ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА.
РУКОВОДСТВО ПО ПРИМЕНЕНИЮ**

МОНОГРАФИЯ

ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»

127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1

Тел.: (495) 280-15-96, 280-33-86. Факс: (495) 280-36-29

E-mail: books@infra-m.ru <http://www.infra-m.ru>

Подписано в печать 15.07.2022.

Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Petersburg.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 22,06.

Тираж 500 экз. Заказ № 14330.

TK 479650-1896110-150722

Отпечатано в типографии ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»

127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1

Тел.: (495) 280-15-96, 280-33-86. Факс: (495) 280-36-29

УВАЖАЕМЫЕ КОЛЛЕГИ И ПАРТНЕРЫ!
ВАС ПРИВЕТСТВУЕТ
ГРУППА КОМПАНИЙ «ИНФРА-М»

Мы представляем крупнейший холдинг в мире академической книги, объединяющий 8 российских и зарубежных издательств; специализирующийся на издании и распространении научной и учебной литературы.

«**ИНФРА-М**» издает учебники, учебные пособия для высшего и среднего профессионального образования, научные монографии, справочники и энциклопедии. На сегодняшний день в нашем ассортименте более **7000 изданий** по экономическому, юридическому, инженерно-техническому, гуманитарному, естественно-научному направлениям; по сельскому хозяйству, строительству и архитектуре, здравоохранению, сервису и туризму. Ежегодно в группе компаний выходит свыше **1000 новинок**. Кроме того, «**ИНФРА-М**» выпускает 30 научных журналов, 16 из них включены перечень ВАК.

Наша **Электронно-библиотечная система (ЭБС) Znaniium.com**, предлагает вам более **40 000 эксклюзивных изданий** в основной коллекции — электронных учебников, учебных пособий, монографий, справочников, научных журналов, диссертаций и научных статей. Вместе с ресурсами открытого доступа в ЭБС содержится более **3 млн произведений**. Кроме того, мы предлагаем услугу создания ЭБС вуза, в том числе для размещения ВКР на платформе Znaniium.com.

По вопросам комплектования

Тел.: (495) 280-15-96 (доб. 519, 225, 226, 267)

E-mail: books@infra-m.ru

По вопросам подключения к ЭБС

Тел.: (495) 280-15-96 (доб. 228, 239, 293, 455, 510, 518, 560)

Техническая поддержка:

ebs_support@infra-m.ru

По вопросам издания учебной и научной литературы

Главный редактор: Прудников Владимир Михайлович

Тел.: (495) 280-15-96 (доб. 291)

E-mail: prudnik@infra-m.ru

По вопросам издания на коммерческой основе

Руководитель издательских проектов:

Чистякова Анастасия Игоревна

Тел.: (495) 280-15-96 (доб. 393)

E-mail: cai@infra-m.ru



группа
компаний
ИНФРА-М



Юридическое
издательство
«НОРМА»



Издательство
«МАГИСТР»



Издательский
дом
«Вузовский
учебник»



Издательский
дом «ФОРУМ-М»



Издательство
«ФОРУМ-С»



Издательский
центр «РИОР»



Издательский
дом
«Альфа-М»



**ЛЕМЕШКО
Борис Юрьевич**

Доктор технических наук, профессор, профессор кафедры теоретической и прикладной информатики Новосибирского государственного технического университета, специалист в области прикладной математической статистики. Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации, почетный работник науки и техники Российской Федерации.

Сфера научных интересов: методы статистического анализа данных и поиска статистических закономерностей, развивающиеся компьютерные технологии, методы статистического моделирования.

Автор более 400 научных и научно-методических публикаций.

ISBN: 978-5-16-017901-8

A standard linear barcode representing the ISBN 9785160179018. Below the barcode, the numbers "9 785160 179018" are printed.