

Statystyka Stosowana



Kierunek, nazwa wydziału Matematyka Stosowana, Wydział Matematyki		Grupa ćwiczeniowa, termin zajęć T00-64a Wtorek 7:30	
Imię, nazwisko, numer albumu Małgorzata Kowalczyk, 262295 Julia Mazur, 262296		Data oddania 19.06.2022 r.	
Tytuł Testowanie hipotez statystycznych		Prowadzący Dr inż. Aleksandra Grzesiek	

Spis treści

1	Wstęp	2
2	Definicje	2
3	Zadanie 1	3
3.1	Cel zadania	3
3.2	Obliczenia	3
3.3	Wizualizacja danych	5
3.4	Wnioski	7
4	Zadanie 2	7
4.1	Cel zadania	7
4.2	Obliczenia	7
4.3	Wizualizacja danych	9
4.4	Wnioski	11
5	Zadanie 3	11
5.1	Cel zadania	11
5.2	Błąd I rodzaju dla hipotez alternatywnych z zadania 1	11
5.3	Błąd I rodzaju dla hipotez alternatywnych z zadania 2	14
5.4	Błąd II rodzaju	16
5.4.1	Zadanie 1	16
5.4.2	Zadanie 2	16
5.4.3	Wyniki	17
5.5	Moc testu	17
5.6	Wnioski	18

1 Wstęp

Raport dotyczy testowania hipotez statystycznych. Podczas przygotowania pracy korzystano z wykładów dr. hab. inż. Krzysztofa Burneckiego.

2 Definicje

1. **Hipoteza zerowa** jest to hipoteza, która zostaje poddana testom sprawdzającym, czy różnica między analizowanymi parametrami wynosi zero.
2. **Hipoteza alternatywna** jest to hipoteza przeciwstawna do weryfikowanej.
3. **Przedział ufności** informuje o tym, że poszukiwana wartość mieści się w pewnym przedziale z założonym prawdopodobieństwem $1 - \alpha$.
4. **Zbiór krytyczny** to zbiór wartości statystyki testowej prowadzących do odrzucenia hipotezy zerowej H_0 na rzecz hipotezy alternatywnej H_1 , to znaczy, że jeżeli obliczona wartość statystyki testowej znajdzie się w tym obszarze, to należy odrzucić weryfikowaną hipotezę zerową. Obszar ten znajduje się zawsze na krańcach rozkładu. Określany jest jako dopełnienie przedziału ufności.
5. **Poziom ufności** informuje o dolnej granicy prawdopodobieństwa zdarzenia polegającego na tym, że przedział ufności zawiera nieznan parametr. Określany jako $1 - \alpha$. Inaczej nazywany współczynnikiem ufności.
6. **Błąd I rodzaju** jest to prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, gdy jest ona prawdziwa. Prawdopodobieństwo popełnienia tego błędu nazywamy **poziomem istotności** testu i jest oznaczane jako α .
7. **Błąd II rodzaju** jest to prawdopodobieństwo przyjęcia hipotezy zerowej, gdy jest ona fałszywa i odrzucenia prawdziwej hipotezy alternatywnej. Prawdopodobieństwo popełnienia tego błędu wynosi $1 - \text{moc testu}$.
8. **Moc testu** to prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, gdy jest ona fałszywa i przyjęcia prawdziwej hipotezy alternatywnej. Innymi słowy, jest to prawdopodobieństwo niepopelnienia błędu drugiego rodzaju. Im większa jest moc testu, tym mniejsze jest ryzyko przyjęcia fałszywej hipotezy zerowej.
9. **P-wartość** testowania hipotezy jest to najmniejsza wartość poziomu istotności α , przy którym zaobserwowana wartość statystyki testowej prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej. Pozwala ona bezpośrednio ocenić wiarygodność hipotezy. Im p-wartość jest większa, tym istnieje większa szansa, że hipoteza zerowa jest prawdziwa. Mała p-wartość świadczy przeciwko hipotezie zerowej.

3 Zadanie 1

3.1 Cel zadania

Z populacji generalnej o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(\mu, \sigma = 0.2)$ pobrano próbę. Celem zadania było zweryfikowanie hipotezy zerowej $H_0 : \mu = 1.5$ na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ przeciwko trzem hipotezom alternatywnym:

- $H_1 : \mu \neq 1.5$,
- $H_1 : \mu > 1.5$,
- $H_1 : \mu < 1.5$.

W tym celu należało narysować odpowiednie obszary krytyczne i wyznaczyć p-wartości dla każdej z powyższych hipotez, a następnie wyjaśnić co się stanie, gdy poziom ufności będzie zwiększany lub zmniejszany.

3.2 Obliczenia

Jeżeli dane mają rozkład normalny o nieznanej średniej i znanym odchyleniu standardowym to statystyka, służąca do testowania hipotezy zerowej $H_0 : \mu = \mu_0$ przeciwko jednej z trzech hipotez alternatywnych jest postaci:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \quad (1)$$

gdzie:

\bar{X} - średnia arytmetyczna z próby,

μ_0 - wartość hipotezy zerowej,

σ - odchylenie standardowe z próby,

n - liczebność próby.

Zmienna losowa Z przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$.

W rozwiązywanym zadaniu:

$\mu_0 = 1.5$,

$\sigma = 0.2$.

Przy pomocy języka R otrzymano:

$\bar{X} = 1.455466 \approx 1.455$,

$n = 1000$,

$Z = \frac{(1.455466 - 1.5)}{0.2} \cdot \sqrt{1000} \approx -7.0415$.

Następnie skonstruowano odpowiednie obszary krytyczne, dla każdej z trzech hipotez alternatywnych.

1. W przypadku hipotezy alternatywnej $H_1 : \mu \neq \mu_0$ zbudowano dwustronny obszar krytyczny, określony jako:

$$(-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty), \quad (2)$$

gdzie $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ jest kwantylem rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$ standardowego rozkładu normalnego.

Dla podanej $\alpha = 0.05$ otrzymano zbiór krytyczny: $(-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$.

2. W przypadku hipotezy alternatywnej $H_1 : \mu > \mu_0$ zbudowano jednostronny obszar krytyczny, określony jako:

$$[z_{1-\alpha}, \infty), \quad (3)$$

gdzie $z_{1-\alpha}$ jest kwantylem rzędu $1 - \alpha$ standardowego rozkładu normalnego.

Dla podanej $\alpha = 0.05$ otrzymano zbiór krytyczny: $[1.645, \infty)$.

3. W przypadku hipotezy alternatywnej $H_1 : \mu < \mu_0$ zbudowano jednostronny obszar krytyczny, określony jako:

$$(-\infty, -z_{1-\alpha}], \quad (4)$$

gdzie $z_{1-\alpha}$ jest kwantylem rzędu $1 - \alpha$ standardowego rozkładu normalnego.

Dla podanej $\alpha = 0.05$ otrzymano zbiór krytyczny: $(-\infty, -1.645]$.

Kolejnym krokiem było wyznaczenie p-wartości dla każdej z trzech hipotez alternatywnych.

1. Dla hipotezy alternatywnej $H_1 : \mu \neq \mu_0$:

$$\begin{aligned} \text{p-wartość} &= 2 \cdot P_{H_0}(Z \geq |z|) = 2(1 - P_{H_0}(Z < |z|)) = 2 - 2 \cdot F_Z(|z|) = \\ &= 2 - 2 \cdot F_Z(|-7.0415|) = 2 - 2 \cdot F_Z(7.0415) \approx 1.90 \cdot 10^{-12} \end{aligned} \quad (5)$$

Dla $Z = -7.0415$ obliczona p-wartość wynosi $1.90 \cdot 10^{-12}$.

2. Dla hipotezy alternatywnej $H_1 : \mu > \mu_0$:

$$\text{p-wartość} = P_{H_0}(Z \geq z) = 1 - P_{H_0}(Z < z) = 1 - F_Z(z) = 1 - F_Z(-7.0415) = 1 \quad (6)$$

Dla $Z = -7.0415$ obliczona p-wartość wynosi 1.

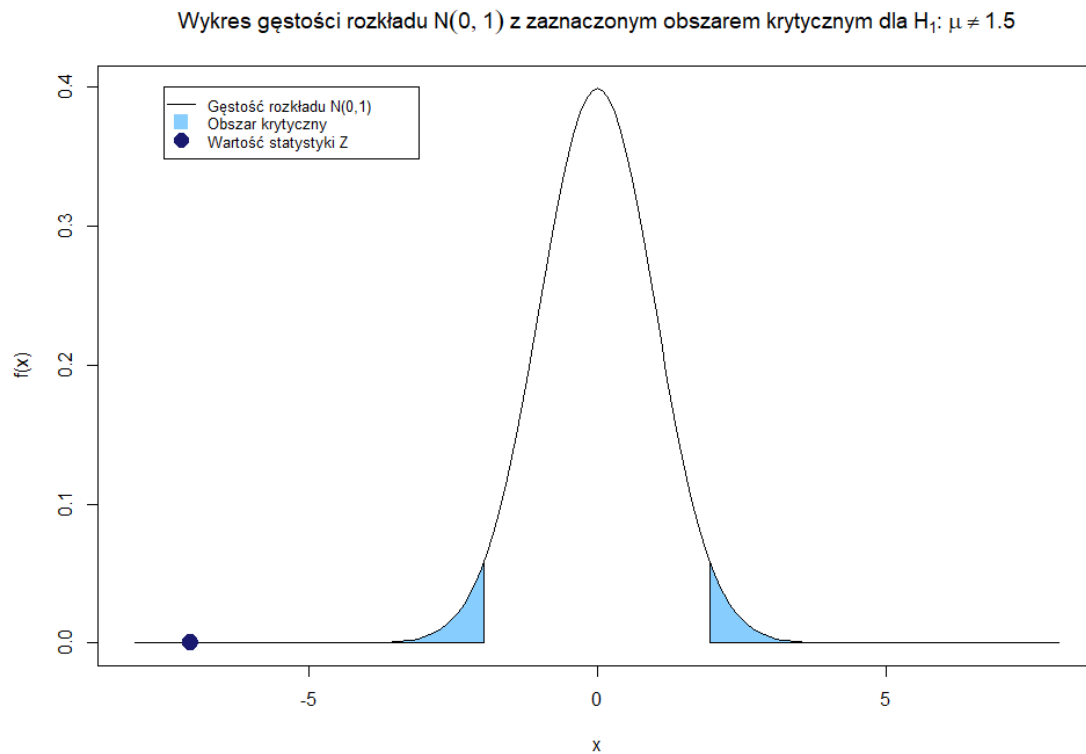
3. Dla hipotezy alternatywnej $H_1 : \mu < \mu_0$:

$$\text{p-wartość} = P_{H_0}(Z \leq z) = F_Z(z) = F_Z(-7.0415) \approx 9.51 \cdot 10^{-13} \quad (7)$$

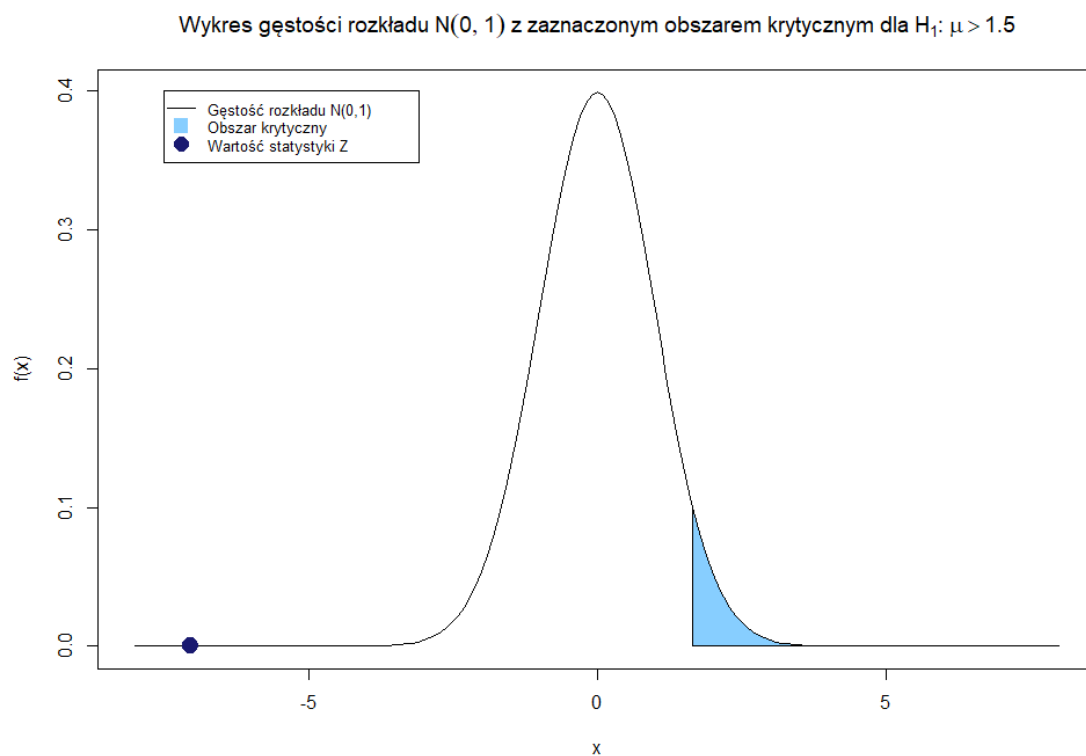
Dla $Z = -7.0415$ obliczona p-wartość wynosi $9.51 \cdot 10^{-13}$.

3.3 Wizualizacja danych

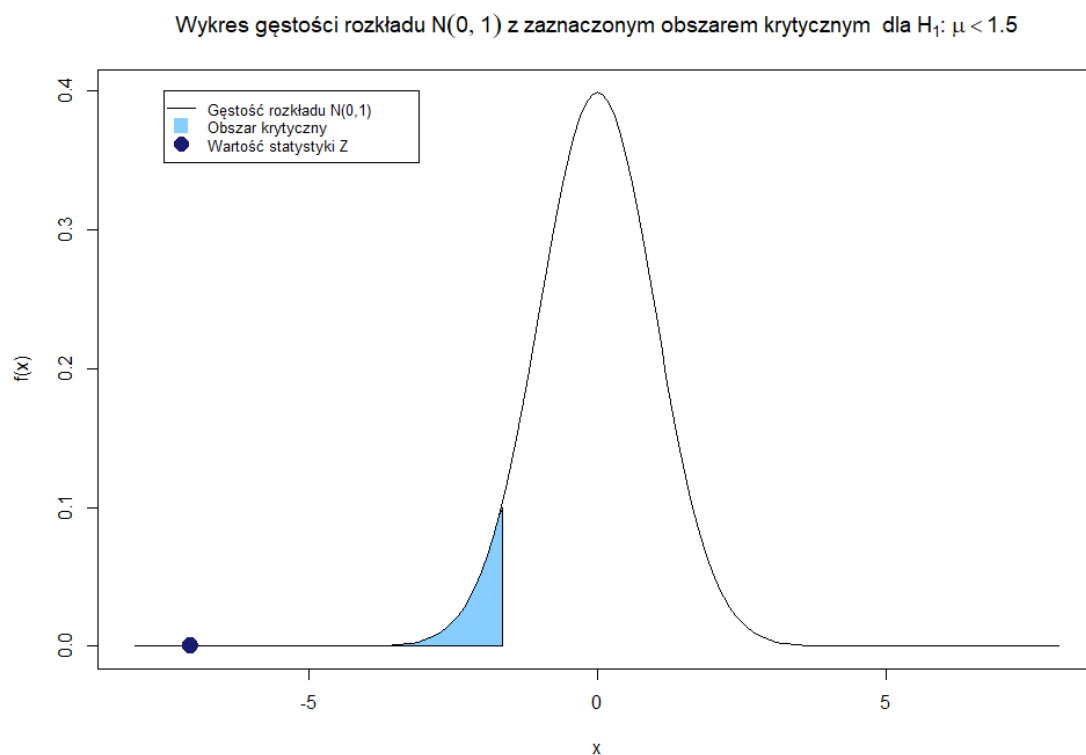
Na wykresie gęstości standardowego rozkładu normalnego zaznaczono kolejne obszary krytyczne wraz z wyliczoną statystyką Z dla trzech badanych hipotez alternatywnych H_1 .



Rysunek 1: Wykres gęstości standardowego rozkładu normalnego wraz z zaznaczonym obszarem krytycznym i wartością statystyki Z dla $H_1: \mu \neq 1.5$



Rysunek 2: Wykres gęstości standardowego rozkładu normalnego wraz z zaznaczonym obszarem krytycznym i wartością statystyki Z dla $H_1: \mu > 1.5$



Rysunek 3: Wykres gęstości standardowego rozkładu normalnego wraz z zaznaczonym obszarem krytycznym i wartością statystyki Z dla $H_1: \mu < 1.5$

3.4 Wnioski

Wyznaczoną na podstawie próby wartość statystyki porównano z wartościami krytycznymi testu. Na podstawie Rysunku 1 i Rysunku 3, które zostały wykonane dla hipotez alternatywnych $H_1 : \mu \neq 1.5$ oraz $H_1 : \mu < 1.5$, stwierdzono, że wartość ta znajduje się w obszarze krytycznym, co oznacza, że hipotezę zerową H_0 należy odrzucić jako nieprawdziwą, na rzecz odpowiednich hipotez alternatywnych. Potwierdzają to p-wartości obliczone w punktach 5 i 7, które są mniejsze od poziomu istotności. Natomiast korzystając z Rysunku 2, widać, że dla $H_1 : \mu > 1.5$ wyznaczona wartość statystyki Z nie wpada do obszaru krytycznego. Co więcej, p-wartość obliczona w równaniu 6 jest większa od poziomu istotności. Zatem nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Zmieniając poziom ufności, zmienia się próg, który określa, czy wynik badania można uznać za statystycznie istotny. Gdy będzie on zwiększany, to znaczy, że zmniejszany będzie poziom istotności. Wpłynie to na rozszerzenie przedziału ufności i spowoduje zmniejszenie prawdopodobieństwa popełnienia błędu I rodzaju, jednakże zwiększy prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju, co w konsekwencji zmniejszy również moc testu. Warto zatem zauważyć, że poziom istotności wpływa na moc testu. Analogicznie, zwiększenie poziomu istotności spowoduje zwięźenie przedziałów ufności, co prowadzi do zwiększenia prawdopodobieństwa popełnienia błędu I rodzaju oraz do zmniejszenia prawdopodobieństwa popełnienia błędu II rodzaju i zwiększenia mocy testu.

4 Zadanie 2

4.1 Cel zadania

Z populacji generalnej o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0.2, \sigma^2)$ pobrano próbę. Celem zadania było przetestowanie hipotezy zerowej $H_0 : \sigma^2 = 1.5$ na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ przeciwko trzem hipotezom alternatywnym:

- $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$,
- $H_1 : \sigma^2 > 1.5$,
- $H_1 : \sigma^2 < 1.5$.

W tym celu należało narysować odpowiednie obszary krytyczne i wyznaczyć p-wartości dla każdej z powyższych hipotez, a następnie wyjaśnić co się stanie, gdy poziom ufności będzie zwiększany lub zmniejszany.

4.2 Obliczenia

Jeżeli dane mają rozkład normalny o znanej średniej i nieznaną wariancję to statystyka, służąca do testowania hipotezy zerowej $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ przeciwko jednej z trzech hipotez alternatywnych jest postaci:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}, \quad (8)$$

gdzie:

S^2 - estymator wariancji z próby,

σ_0^2 - wartość hipotezy zerowej,

n - liczebność próby.

Zmienna losowa χ^2 przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej ma rozkład χ^2 z $n - 1$ stopniami swobody.

W rozwiązywanym zadaniu:

$$\mu = 0.2,$$

$$\sigma_0^2 = 1.5.$$

Przy pomocy języka R otrzymano:

$$S^2 = 1.668121 \approx 1.668,$$

$$\chi^2 = \frac{999 \cdot 1.668121}{1.5} \approx 1110.97,$$

$$n = 1000.$$

Następnie skonstruowano odpowiednie obszary krytyczne, dla każdej z trzech hipotez alternatywnych.

1. W przypadku hipotezy alternatywnej $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ zbudowano dwustronny obszar krytyczny, określony jako:

$$(-\infty, \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2] \cup [\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2, \infty), \quad (9)$$

gdzie $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2$ i $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2$ to odpowiednio kwantyle rzędu $\frac{\alpha}{2}$ i $1 - \frac{\alpha}{2}$ rozkładu χ^2 z $n - 1$ stopniami swobody.

Dla podanej $\alpha = 0.05$ otrzymano zbiór krytyczny: $(-\infty, 913.30] \cup [1088.49, \infty)$.

2. W przypadku hipotezy alternatywnej $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ zbudowano jednostronny obszar krytyczny, określony jako:

$$[\chi_{1-\alpha, n-1}^2, \infty), \quad (10)$$

gdzie $\chi_{1-\alpha}^2$ to kwantyl rzędu $1 - \alpha$ rozkładu χ^2 z $n - 1$ stopniami swobody.

Dla podanej $\alpha = 0.05$ otrzymano zbiór krytyczny: $[1073.64, \infty)$.

3. W przypadku hipotezy alternatywnej $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ zbudowano jednostronny obszar krytyczny, określony jako:

$$(-\infty, \chi_{\alpha, n-1}^2] \quad (11)$$

gdzie χ_{α}^2 to kwantyl rzędu α rozkładu χ^2 z $n - 1$ stopniami swobody.

Dla podanej $\alpha = 0.05$ otrzymano zbiór krytyczny: $(-\infty, 926.63]$.

Kolejnym krokiem było wyznaczenie p-wartości dla każdej z trzech hipotez alternatywnych.

1. Dla hipotezy alternatywnej $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$:

$$\begin{aligned} \text{p-wartość} &= 2 \cdot P_{H_0}(\chi^2 \geq |\chi|) = 2 \cdot (1 - P_{H_0}(\chi^2 < |\chi|)) = \\ &= 2 - 2_{H_0}(\chi^2 < |\chi|) = 2 - 2_{\chi^2}(|\chi|) = 2 - 2_{\chi^2}(1110.97) \approx 0.0150 \end{aligned} \quad (12)$$

Dla $\chi^2 = 1110.97$ obliczona p-wartość wynosi 0.0150.

2. Dla hipotezy alternatywnej $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$:

$$\begin{aligned} \text{p-wartość} &= P_{H_0}(\chi^2 \geq \chi) = 1 - P_{H_0}(\chi^2 < \chi) = \\ &= 1 - F_{\chi^2}(\chi) = 1 - F_{\chi^2}(1110.97) \approx 0.0075 \end{aligned} \quad (13)$$

Dla $\chi^2 = 1110.97$ obliczona p-wartość wynosi 0.0075.

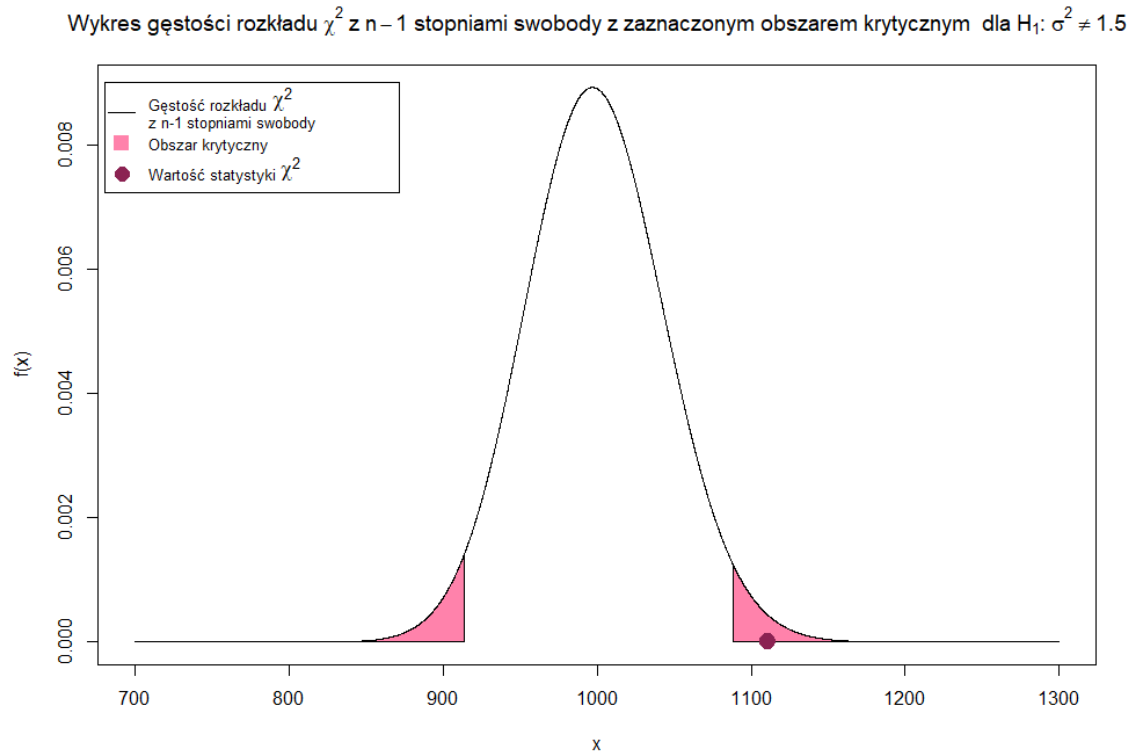
3. Dla hipotezy alternatywnej $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$:

$$\text{p-wartość} = P_{H_0}(\chi^2 \leq \chi) = F_{\chi^2}(\chi) = F_{\chi^2}(1110.97) \approx 0.9925 \quad (14)$$

Dla $\chi^2 = 1110.97$ obliczona p-wartość wynosi 0.9925.

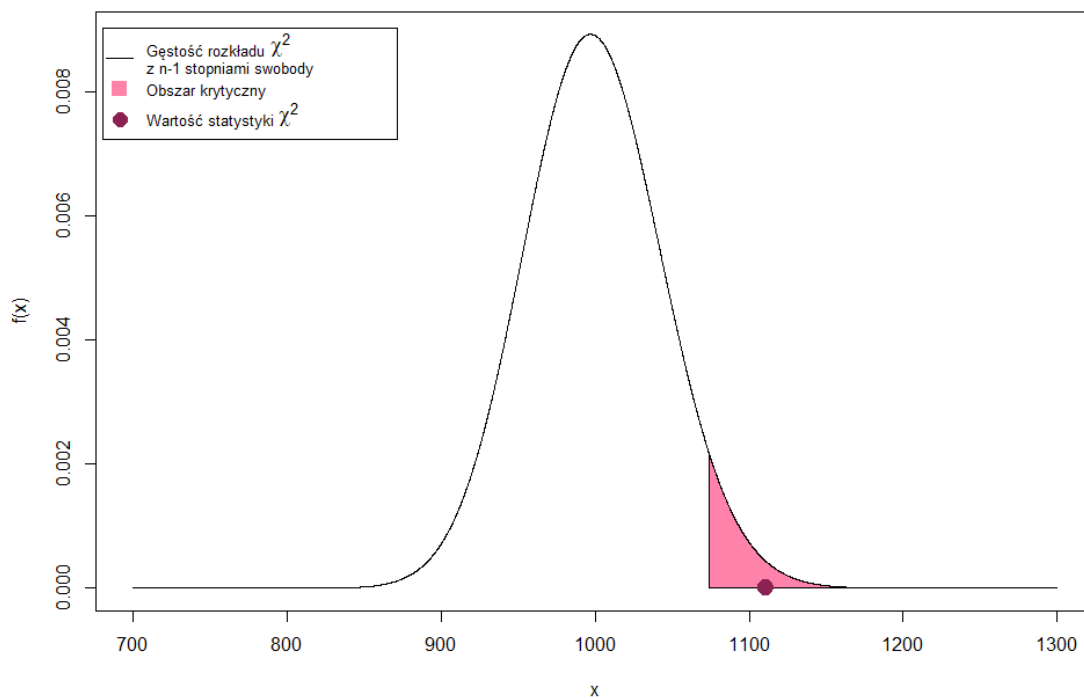
4.3 Wizualizacja danych

Na wykresie gęstości rozkładu χ^2 z $n - 1$ stopniami swobody zaznaczono kolejne obszary krytyczne wraz z wyliczoną statystyką χ^2 dla trzech badanych hipotez alternatywnych H_1 .



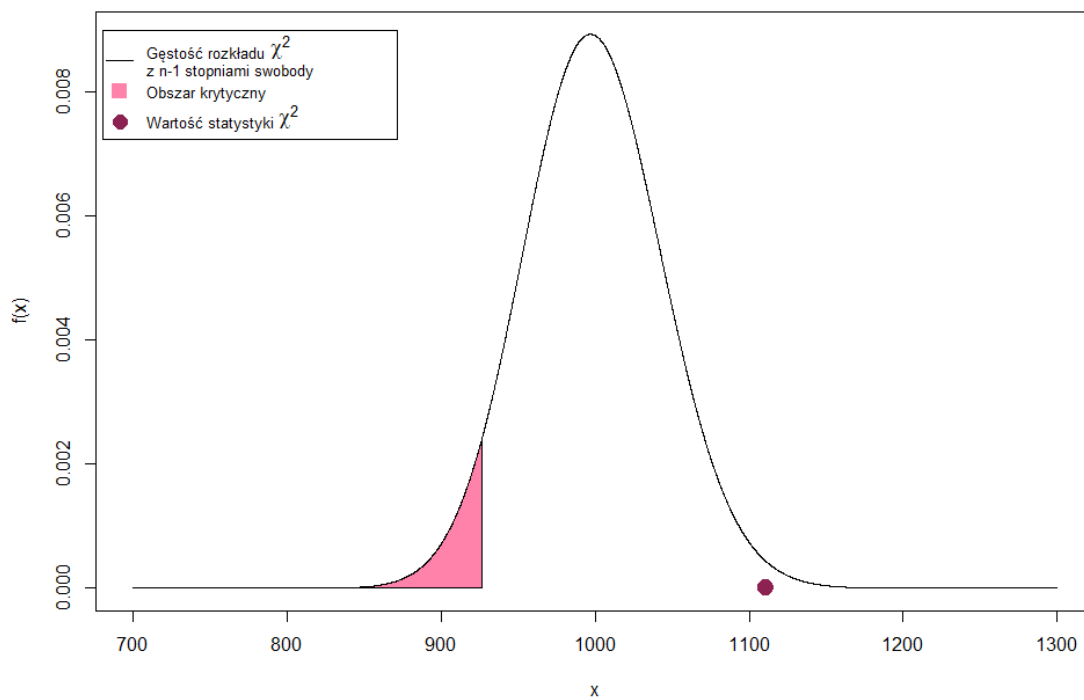
Rysunek 4: Wykres gęstości rozkładu χ^2 z $n - 1$ stopniami swobody wraz z zaznaczonym obszarem krytycznym i wartością statystyki χ^2 dla $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$

Wykres gęstości rozkładu χ^2 z $n - 1$ stopniami swobody z zaznaczonym obszarem krytycznym dla $H_1: \sigma^2 > 1.5$



Rysunek 5: Wykres gęstości rozkładu χ^2 z $n - 1$ stopniami swobody wraz z zaznaczonym obszarem krytycznym i wartością statystyki χ^2 dla $H_1: \sigma^2 > 1.5$

Wykres gęstości rozkładu χ^2 z $n - 1$ stopniami swobody z zaznaczonym obszarem krytycznym dla $H_1: \sigma^2 < 1.5$



Rysunek 6: Wykres gęstości rozkładu χ^2 z $n - 1$ stopniami swobody wraz z zaznaczonym obszarem krytycznym i wartością statystyki χ^2 dla $H_1: \sigma^2 < 1.5$

4.4 Wnioski

Wyznaczoną na podstawie próby wartość statystyki porównano z wartościami krytycznymi testu. Na podstawie Rysunku 4 i Rysunku 5, które zostały wykonane dla hipotez alternatywnych $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$ oraz $H_1 : \sigma^2 > 1.5$, stwierdzono, że wartość ta znajduje się w obszarze krytycznym, co oznacza, że hipotezę zerową H_0 należy odrzucić jako nieprawdziwą, na rzecz odpowiednich hipotez alternatywnych. Potwierdzają to p-wartości, obliczone w punktach 12 i 13, które są mniejsze od poziomu istotności. Natomiast korzystając z Rysunku 6, widać, że dla $H_1 : \sigma^2 < 1.5$ wyznaczona wartość statystyki χ^2 nie wpada do obszaru krytycznego. Co więcej, p-wartość obliczona w równaniu 14 jest większa od poziomu istotności. Zatem nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Zmieniając poziom ufności, zmienia się próg, który określa, czy wynik badania można uznać za statystycznie istotny. Gdy będzie on zwiększany, to znaczy, że zmniejszany będzie poziom istotności. Wpłynie to na rozszerzenie przedziału ufności i spowoduje zmniejszenie prawdopodobieństwa popełnienia błędu I rodzaju, jednakże zwiększy prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju, co w konsekwencji zmniejszy również moc testu. Warto zatem zauważyć, że poziom istotności wpływa na moc testu. Analogicznie, zwiększenie poziomu istotności spowoduje zwięźenie przedziałów ufności, co prowadzi do zwiększenia prawdopodobieństwa popełnienia błędu I rodzaju oraz do zmniejszenia prawdopodobieństwa popełnienia błędu II rodzaju i zwiększenia mocy testu.

5 Zadanie 3

5.1 Cel zadania

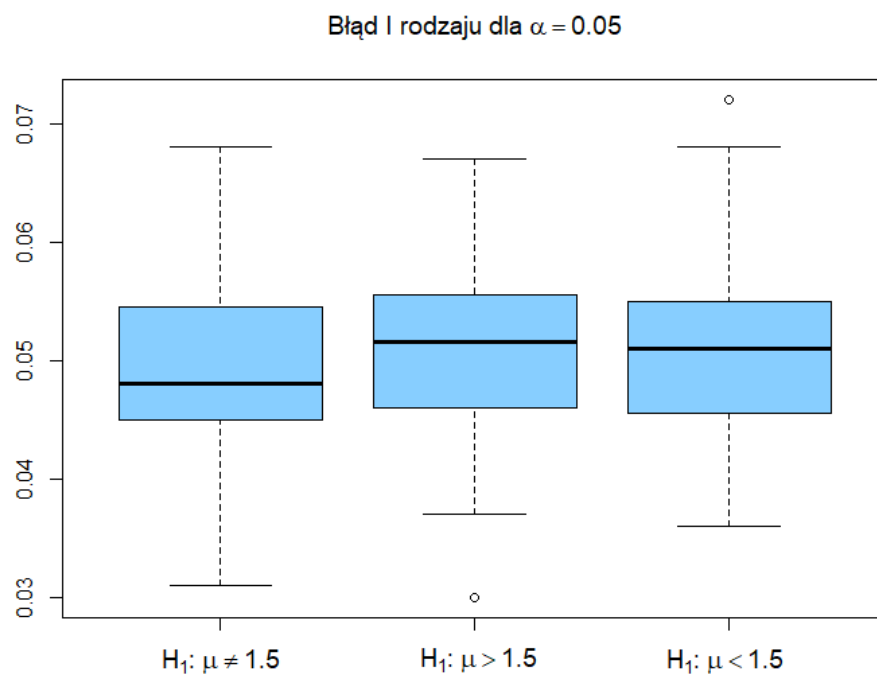
Korzystając z zadania 1 i zadania 2 należało wyznaczyć symulacyjnie prawdopodobieństwa popełnienia błędów I i II rodzaju oraz sprawdzić moce testów.

5.2 Błąd I rodzaju dla hipotez alternatywnych z zadania 1

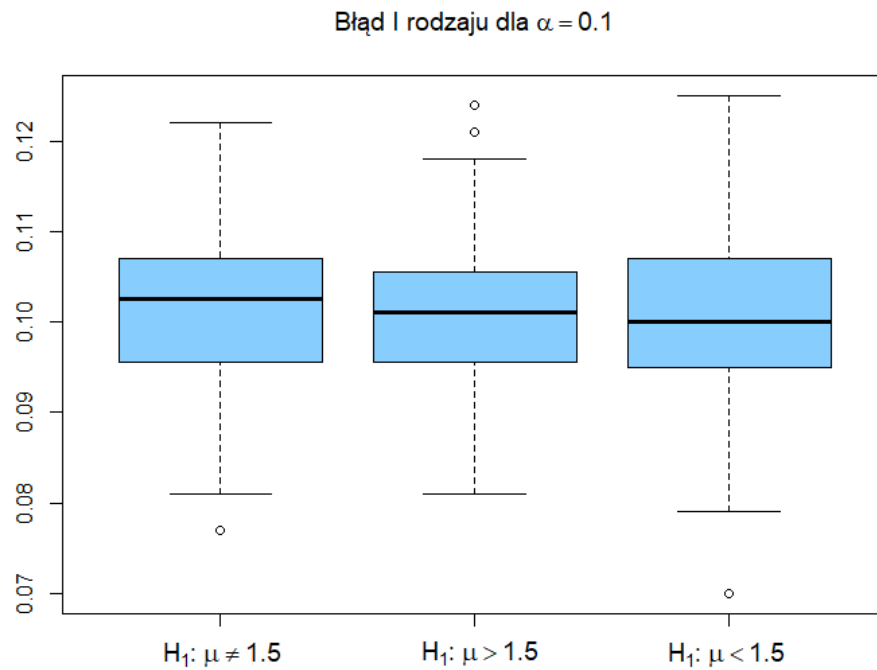
Przeprowadzono symulacje dla różnych wartości poziomu istotności: $\alpha \in \{0.01, 0.05, 0.1\}$, według następującego schematu:

1. Ustalono α , gdzie $\alpha \in \{0.01, 0.05, 0.1\}$.
2. Wygenerowano prostą próbę losową $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu = 1.5, \sigma = 0.2)$, o liczności $n = 1000$.
3. Wyznaczono wartość statystyki testowej $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $\mu_0 = 1.5$.
4. Dla każdej z hipotezy alternatywnej H_1 wyznaczono kolejne obszary krytyczne.
5. Sprawdzone, czy statystyka Z jest w obszarze krytycznym.
6. Powtórzono kroki 2–5 $N = 1000$ razy i zliczono ile razy statystyka testowa, jest w obszarze krytycznym.
7. Wartość ile razy Z znajduje się w obszarze krytycznym, podzielona przez N , to przybliżona wartość błędu I rodzaju.
8. Powtórzono kroki 1 – 7 $M = 100$ razy i wygenerowano wykres pudełkowy dla każdej wartości α .

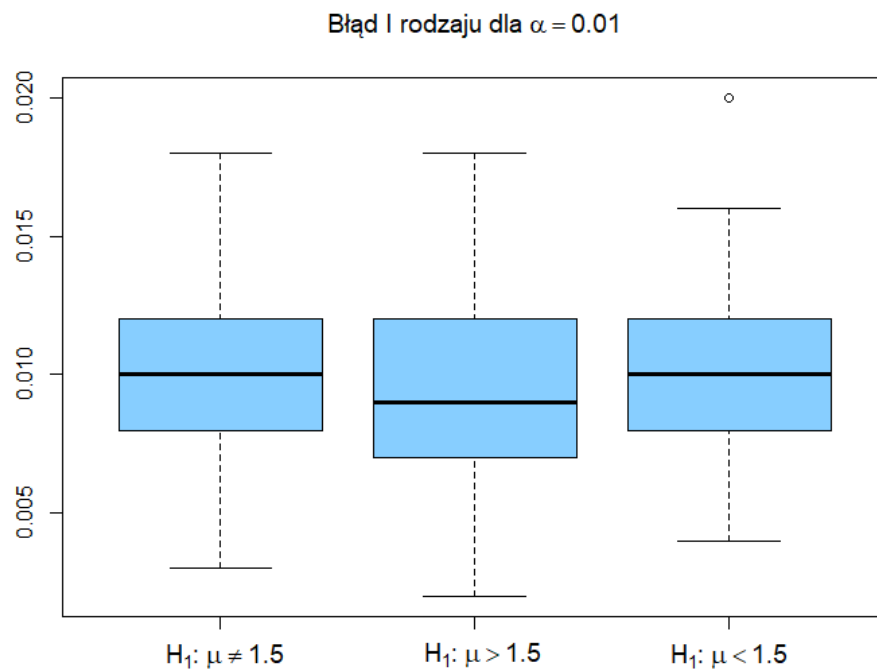
Na każdym z wykresów przedstawiono wyniki dla wszystkich trzech hipotez alternatywnych.



Rysunek 7: Wykres pudełkowy błędu I rodzaju dla hipotez alternatywnych z zadania 1 dla $\alpha = 0.05$



Rysunek 8: Wykres pudełkowy błędu I rodzaju dla hipotez alternatywnych z zadania 1 dla $\alpha = 0.1$



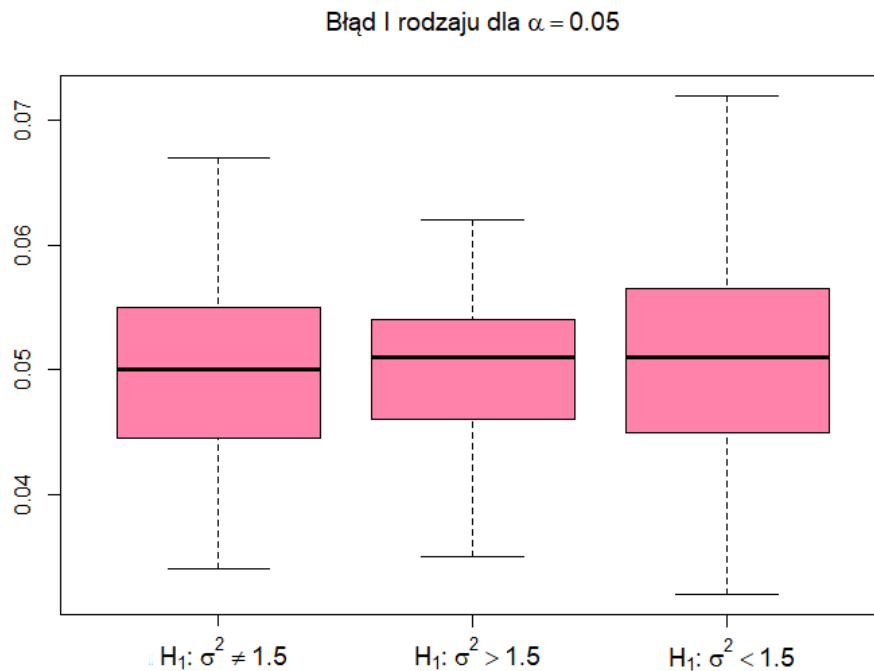
Rysunek 9: Wykres pudełkowy błędu I rodzaju dla hipotez alternatywnych z zadania 1 dla $\alpha = 0.01$

5.3 Błąd I rodzaju dla hipotez alternatywnych z zadania 2

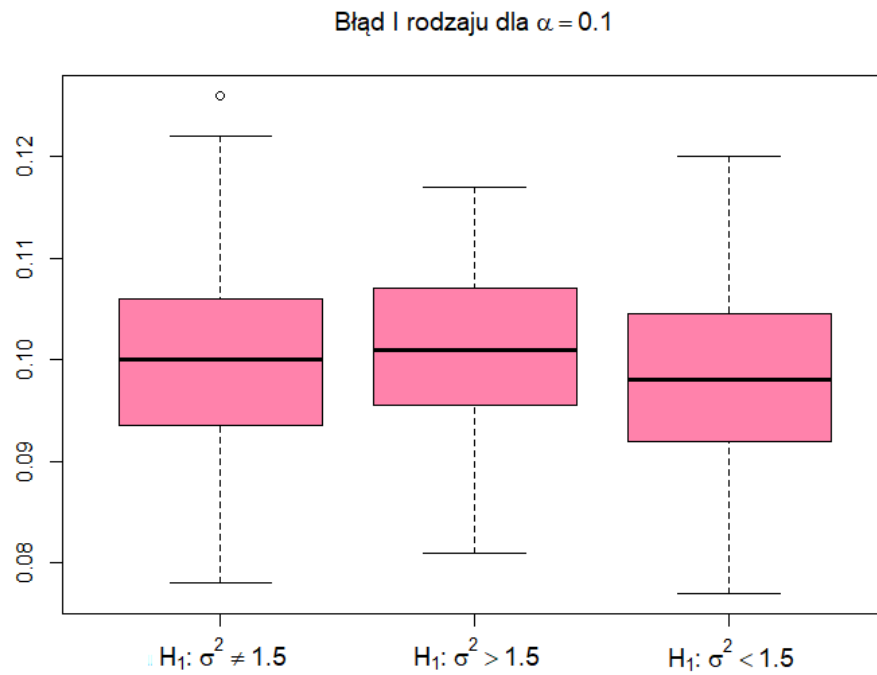
Przeprowadzono symulacje dla różnych wartości poziomu istotności: $\alpha \in \{0.01, 0.05, 0.1\}$, według następującego schematu:

1. Ustalono α , gdzie $\alpha \in \{0.01, 0.05, 0.1\}$.
2. Wygenerowano prostą próbę losową $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu = 0.2, \sigma = \sqrt{1.5})$, o liczności $n = 1000$.
3. Wyznaczono wartość statystyki testowej $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{(\sigma_0^2)}$, $\sigma_0^2 = 1.5$.
4. Dla każdej z hipotezy alternatywnej H_1 wyznaczono kolejne obszary krytyczne.
5. Sprawdzono, czy statystyka χ^2 jest w obszarze krytycznym.
6. Powtórzono kroki 2–5 $N = 1000$ razy i zliczono ile razy statystyka testowa, jest w obszarze krytycznym.
7. Wartość ile razy χ^2 znajduje się w obszarze krytycznym, podzielona przez N , to przybliżona wartość błędu I rodzaju.
8. Powtórzono kroki 1 – 7 $M = 100$ razy i wygenerowano wykres pudełkowy dla każdej wartości α .

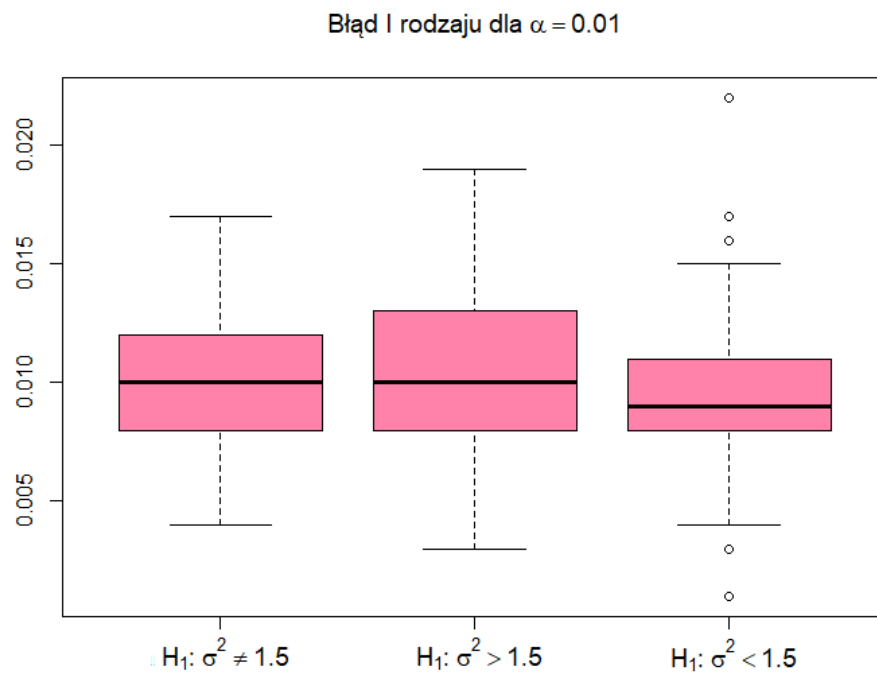
Na każdym z wykresów przedstawiono wyniki dla wszystkich trzech hipotez alternatywnych.



Rysunek 10: Wykres pudełkowy błędu I rodzaju dla hipotez alternatywnych z zadania 2 dla $\alpha = 0.05$



Rysunek 11: Wykres pudełkowy błędu I rodzaju dla hipotez alternatywnych z zadania 2 dla $\alpha = 0.1$



Rysunek 12: Wykres pudełkowy błędu I rodzaju dla hipotez alternatywnych z zadania 2 dla $\alpha = 0.01$

5.4 Błąd II rodzaju

5.4.1 Zadanie 1

Aby wyznaczyć błąd II rodzaju postępowano według następującego schematu:

1. Ustalono poziom istotności $\alpha = 0.05$ $\mu \in \{1.47, 1.48, 1.49, 1.51, 1.52, 1.53\}$, $\sigma = 0.2$ oraz $n = 1000$. Wartość μ przyjęto zgodnie z hipotezą alternatywną H_1 , ale bliską wartości z hipotezy zerowej H_0 .
2. Wygenerowano prostą próbę losową $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma)$.
3. Wyznaczono wartość statystyki testowej $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $\mu_0 = 1.5$.
4. Dla każdej z hipotezy alternatywnej H_1 wyznaczono kolejne obszary krytyczne.
5. Sprawdzono, czy statystyka Z jest poza obszarem krytycznym.
6. Powtórzono kroki 2 – 5 $N = 1000$ razy i zliczono ile razy statystyka testowa, jest poza obszarem krytycznym.
7. Wartość ile razy Z znajduje się poza obszarem krytycznym, podzielona przez N , to przybliżona wartość błędu II rodzaju.

5.4.2 Zadanie 2

Aby wyznaczyć błąd II rodzaju postępowano według następującego schematu:

1. Ustalono poziom istotności $\alpha = 0.05$ $\mu = 0.2$, $\sigma^2 \in \{1.47, 1.48, 1.49, 1.51, 1.52, 1.53\}$ oraz $n = 1000$. Wartość σ^2 przyjęto zgodnie z hipotezą alternatywną H_1 , ale bliską wartości z hipotezy zerowej H_0 .
2. Wygenerowano prostą próbę losową $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma)$.
3. Wyznaczono wartość statystyki testowej $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{(\sigma_0^2)}$, $\sigma_0^2 = 1.5$.
4. Dla każdej z hipotezy alternatywnej H_1 wyznaczono kolejne obszary krytyczne.
5. Sprawdzono, czy statystyka χ^2 jest poza obszarem krytycznym.
6. Powtórzono kroki 2 – 5 $N = 1000$ razy i zliczono ile razy statystyka testowa, jest poza obszarem krytycznym.
7. Wartość ile razy χ^2 znajduje się poza obszarem krytycznym, podzielona przez N , to przybliżona wartość błędu II rodzaju.

Sprawdzone zostały również wartości błędu II rodzaju, dla innej liczebności próby, gdzie $n = 10^5$. Wykonano także wersję dla $\sigma^2 \in \{1.35, 1.4, 1.45, 1.55, 1.6, 1.65\}$.

5.4.3 Wyniki

1. Dla zadania 1 uzyskane zostały wyniki:

	$\mu = 1.47$	$\mu = 1.48$	$\mu = 1.49$	$\mu = 1.51$	$\mu = 1.52$	$\mu = 1.53$
$H_1 : \mu \neq 1.5$	0.001	0.099	0.645	0.649	0.111	0.002
$H_1 : \mu > 1.5$	-	-	-	0.522	0.075	0.001
$H_1 : \mu < 1.5$	0.001	0.069	0.52	-	-	-

Tabela 1: Tabela wyników błędu II rodzaju dla hipotez z zadania 1

2. Dla zadania 2 uzyskane zostały wyniki:

	$\sigma^2 = 1.47$	$\sigma^2 = 1.48$	$\sigma^2 = 1.49$	$\sigma^2 = 1.51$	$\sigma^2 = 1.52$	$\sigma^2 = 1.53$
$H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$	0.926	0.944	0.95	0.947	0.945	0.939
$H_1 : \sigma^2 > 1.5$	-	-	-	0.921	0.903	0.877
$H_1 : \sigma^2 < 1.5$	0.887	0.905	0.954	-	-	-

Tabela 2: Tabela wyników błędu II rodzaju dla hipotez z zadania 2 dla $n = 1000$

	$\sigma^2 = 1.47$	$\sigma^2 = 1.48$	$\sigma^2 = 1.49$	$\sigma^2 = 1.51$	$\sigma^2 = 1.52$	$\sigma^2 = 1.53$
$H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$	0.005	0.135	0.687	0.676	0.167	0.004
$H_1 : \sigma^2 > 1.5$	-	-	-	0.527	0.083	0.001
$H_1 : \sigma^2 < 1.5$	0.003	0.085	0.569	-	-	-

Tabela 3: Tabela wyników błędu II rodzaju dla hipotez z zadania 2 dla $n = 10^5$

	$\sigma^2 = 1.35$	$\sigma^2 = 1.4$	$\sigma^2 = 1.45$	$\sigma^2 = 1.55$	$\sigma^2 = 1.6$	$\sigma^2 = 1.65$
$H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$	0.339	0.659	0.881	0.888	0.667	0.438
$H_1 : \sigma^2 > 1.5$	-	-	-	0.797	0.585	0.279
$H_1 : \sigma^2 < 1.5$	0.245	0.554	0.806	-	-	-

Tabela 4: Tabela wyników błędu II rodzaju dla hipotez z zadania 2 - rozszerzony zakres σ^2

5.5 Moc testu

Moce testu wyznaczono, korzystając ze wzoru:

$$\text{Moc testu} = 1 - \text{błąd II rodzaju.} \quad (15)$$

1. Dla zadania 1 otrzymano następujące moce testu:

	$\mu = 1.47$	$\mu = 1.48$	$\mu = 1.49$	$\mu = 1.51$	$\mu = 1.52$	$\mu = 1.53$
$H_1 : \mu \neq 1.5$	0.999	0.901	0.355	0.351	0.889	0.998
$H_1 : \mu > 1.5$	-	-	-	0.478	0.925	0.999
$H_1 : \mu < 1.5$	0.999	0.931	0.48	-	-	-

Tabela 5: Tabela wartości mocy testu dla hipotez z zadania 1

2. Dla zadania 2 otrzymano następujące moce testu:

	$\sigma^2 = 1.47$	$\sigma^2 = 1.48$	$\sigma^2 = 1.49$	$\sigma^2 = 1.51$	$\sigma^2 = 1.52$	$\sigma^2 = 1.53$
$H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$	0.074	0.056	0.05	0.053	0.055	0.061
$H_1 : \sigma^2 > 1.5$	-	-	-	0.079	0.097	0.123
$H_1 : \sigma^2 < 1.5$	0.113	0.095	0.046	-	-	-

Tabela 6: Tabela wartości mocy testu dla hipotez z zadania 2 dla $n = 1000$

3. Dla zadania 2 ze zwiększoną liczebnością próby otrzymano następujące moce testu:

	$\sigma^2 = 1.47$	$\sigma^2 = 1.48$	$\sigma^2 = 1.49$	$\sigma^2 = 1.51$	$\sigma^2 = 1.52$	$\sigma^2 = 1.53$
$H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$	0.995	0.865	0.313	0.324	0.833	0.996
$H_1 : \sigma^2 > 1.5$	-	-	-	0.473	0.917	0.999
$H_1 : \sigma^2 < 1.5$	0.97	0.915	0.431	-	-	-

Tabela 7: Tabela wartości mocy testu dla hipotez z zadania 2 dla $n = 10^5$

4. Dla zadania 2 dla odleglejszych wartości σ^2 otrzymano następujące moce testu:

	$\sigma^2 = 1.35$	$\sigma^2 = 1.4$	$\sigma^2 = 1.45$	$\sigma^2 = 1.55$	$\sigma^2 = 1.6$	$\sigma^2 = 1.65$
$H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$	0.661	0.341	0.119	0.112	0.333	0.562
$H_1 : \sigma^2 > 1.5$	-	-	-	0.203	0.415	0.721
$H_1 : \sigma^2 < 1.5$	0.755	0.446	0.194	-	-	-

Tabela 8: Tabela wartości mocy testu dla hipotez z zadania 2 - rozszerzony zakres σ^2

5.6 Wnioski

Można zauważyć, że zarówno dla zadania 1, jak i zadania 2 mediana wartości błędu I rodzaju pokrywa się w przybliżeniu z wartością poziomu istotności α , co jest zgodne z definicją badanego zagadnienia (opisanego w dziale 2. w punkcie 6.). Zatem można stwierdzić, że symulacyjne wyznaczenie błędu I rodzaju, czyli prawdopodobieństwa odrzucenia hipotezy zerowej, gdy ta jest prawdziwa, zostało przeprowadzone poprawnie.

W przypadku błędu II rodzaju prawdopodobieństwo popełnienia go, czyli prawdopodobieństwo przyjęcia fałszywej hipotezy zerowej i odrzucenia prawdziwej hipotezy alternatywnej, maleje wraz z oddalaniem się sprawdzanej wartości od hipotezy zerowej (odpowiednio μ od μ_0 i σ^2 od σ_0^2). W symulacji do zadania 2 rozpatrzono również zachowanie tego prawdopodobieństwa dla σ^2 przyjmowanych z różnicą 0.05. Zachowuje ono te same tendencje, jednak różnica wyników dla kolejnych wartości jest bardziej dostrzegalna. Sprawdzono również wartości błędu II rodzaju oraz moc testu dla większej liczebności próby. Porównując między sobą Tabelę 6 z Tabelą 7, widać, że zwiększenie liczebności próby wpływa na zwiększenie mocy testu. Co więcej, jako że obliczana jest ona ze wzoru $1 - \text{błąd II rodzaju}$, jej wartości powinny rosnąć wraz z oddalaniem się od wartości hipotezy zerowej i takie wyniki również otrzymano.