

# Reproduction de la sonorité des disques vinyle sur format digital



## Objectif du projet

Ce projet a été réalisé dans le cadre des TPE (Travaux Personnels Encadrés), par Victor Miquel et Oz Barnier. Les disques microsillons, communément appelés disques vinyles, sont aujourd'hui encore vénérés par certains audiophiles, du fait de leur sonorité particulière, décrite comme "plus chaude". On voit aussi maintenant de nombreux groupes de musiques sortir à nouveau leur albums sur disques vinyles.

Le but était de reproduire cette sonorité, en mettant au point un programme simulant toutes les étapes de gravure et de lecture des disques vinyles.

Même si l'objet principal de la production est le programme de simulation, nous considérons qu'il s'agit uniquement d'une adaptation du contenu de ce document, et qu'il ne nécessite donc pas d'explications spécifiques. Vous noterez tout de fois qu'une courte annexe évoque le fonctionnement du C++ et permettra aux curieux d'aller regarder le code source fourni.

# Disques vinyles

## Introduction

{Source : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Disque\\_microsillon](https://fr.wikipedia.org/wiki/Disque_microsillon)}

Le disque vinyle microsillon est un système de stockage du son développé à partir du début des années 1950 (le brevet est déposé par la Columbia record en 1946).

Il remplace alors le disque 78 tour, le plus utilisé jusqu'à lors.

Les disques vinyle continueront d'être un moyen d'enregistrement fréquent de la musique grand public jusqu'à dans le milieu des années 80 où ils seront progressivement remplacés par les CD (acronyme de Compact Disc en anglais).

Les disques vinyle fonctionnent sur le principe de l'enregistrement analogique mécanique. En pratique, il s'agit de graver le long d'une spirale (partant du bord du disque et se terminant en son centre) une courbe analogue à la vibration de l'air correspondant par la musique.

## Principe de fonctionnement

Pour pouvoir restituer le son à la lecture du disque, on le grave d'abord à l'aide d'un burin en saphir ou en diamant chauffé par une résistance (On notera que l'on applique avant de graver la correction RIAA, dont l'utilité sera décrite dans la partie correspondante).

Pour graver, on fait tourner le disque à une vitesse constante (dans le cas du disque microsillon, 33+1/3 tours/minute). Le burin est ensuite déplacé latéralement par un système composé de bobines et d'aimants. On envoie le signal (généralement capté par un micro) dans les bobines, qui font se déplacer les aimants par rapport à elles ce qui a pour effet de déplacer le burin. Au fil de l'enregistrement, le burin est peu à peu entraîné vers l'intérieur du disque par une vis sans fin. La forme du "disque original" gravé est quasiment identique à celle des disques qui seront commercialisés, cependant sa composition est très différente : il s'agit d'un disque d'aluminium recouvert de laque de nitrocellulose.

Ce disque est ensuite recouvert (par galvanoplastie) de divers métaux pour obtenir une matrice (un moule). Cette matrice sera ensuite séparée du disque original, puis montée dans une presse où elle servira à mouler le plastique (un copolymère de chlorure et d'acétate de vinyle, d'où le nom de disque vinyle) pour créer les disques finals.



Un graveur de "disques originaux".

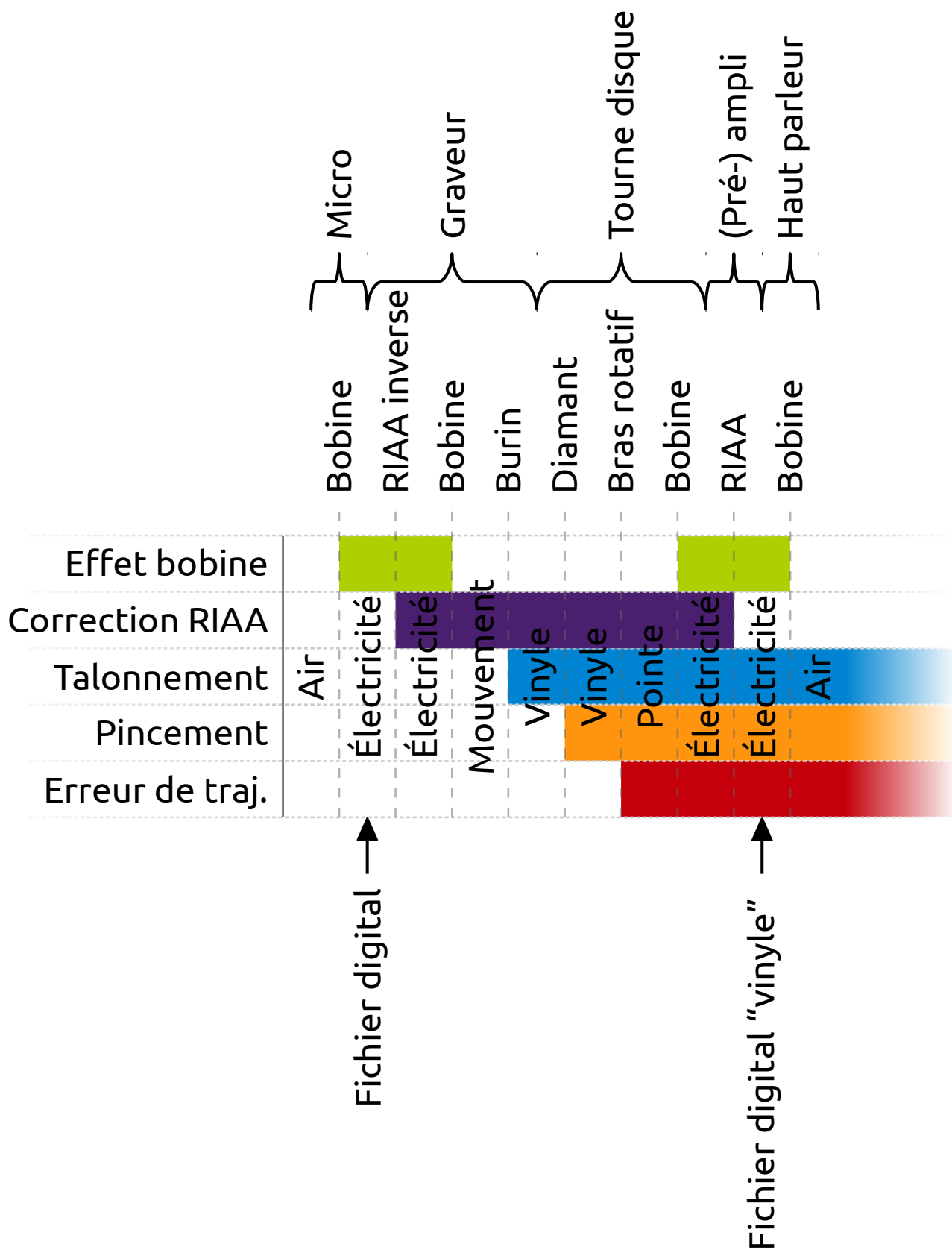
Le disque est ensuite lu sur un tourne-disque. Pour récupérer le signal gravé sur le disque, les tourne-disques sont équipés d'un phonocapteur. Un phonocapteur est composé d'une pointe de lecture qui suit le sillon, et qui est relié à un système, le plus souvent électromagnétique, permet de transformer son mouvement en électricité. (On notera qu'il existe aussi des phonocapteurs bas de gamme piézoélectriques, cependant, ils sont de mauvaise qualité et ne seront donc pas étudiés). Le signal ainsi récupéré passe ensuite dans un pré-ampli, qui applique la correction RIAA inverse de celle appliquée à la lecture, puis on envoie le signal dans un amplificateur puis dans un haut-parleur.

On peut aussi noter que les disques vinyles, produisent quelques imperfections à la lecture, et notamment un bruit de surface, issu du frottement entre la pointe et le sillon, ainsi que des "clacs" produits par le passage de la pointe sur des poussières. (on peut d'ailleurs noter que ces poussières sont attirées par le disque car celui-ci se charge électromagnétiquement lorsque la pointe frotte contre lui).

Ces imperfections étant reconnues comme étant des imperfections, que ce soit par les adeptes du vinyle ou les autres, nous avons choisi de ne pas les reproduire, de manière à tenter de reproduire à la fois la sonorité du vinyle, mais tout en gardant un son propre.

Un résumé de toutes les étapes et modifications est visible page suivante.

# Étapes de transformation du son



# Fichiers WAVE

## Introduction

Le format WAVE (aussi appelé Waveform Audio File Format) a été développé par IBM et Microsoft, il permet de stocker du son. La particularité des fichiers WAVE comparé à d'autres formats comme par exemple le MP3, est qu'il n'est pas compressé, autrement dit, il contient des données brutes qui ne nécessitent aucune procédure pour être exploités.

Le son y est stocké sous la forme d'échantillons, c'est à dire que l'on relève la valeur du signal que l'on veut enregistrer à de courts intervalles. Les fichiers WAVE échantillonnent à une fréquence constante, la plupart du temps 44100 Hz, mais cela peut varier d'un fichier à l'autre.

# Le format WAVE

Le format WAVE est basé sur un format générique, le format RIFF.

Les fichiers au format RIFF sont composés de blocs, appelés chunks.

Chaque bloc se compose, dans l'ordre :

- d'un nom de 4 lettres (=4 octets)
- d'une taille (stocké sur 4 octets)
- de son contenu

Tous les blocs sont contenus dans un bloc particulier, nommé "RIFF", qui comporte en plus des blocs normaux, le type de fichier, en 4 lettres (=4 octets), pour un fichier WAVE, il s'agira des 4 lettres WAVE.

Les fichiers WAVE contiennent au minimum 2 blocs :

- le bloc "fmt" décrivant les caractéristiques du fichier, telle que la fréquence d'échantillonnage.

- le bloc "data", contenant les valeurs de tout les échantillons.

Auxquels s'ajoutent optionnellement d'autres blocs non standards pouvant par exemple décrire le titre du morceau de musique et son artiste.

Voici donc le contenu détaillé d'un fichier WAVE standard :

[Bloc de déclaration d'un fichier au format WAVE]

FileTypeBlocID (4 octets) : Constante «RIFF» (0x52,0x49,0x46,0x46)

FileSize (4 octets) : Taille du fichier moins 8 octets

FileFormatID (4 octets) : Format = «WAVE» (0x57,0x41,0x56,0x45)

[Bloc décrivant le format audio]

FormatBlocID (4 octets) : Identifiant «fmt» (0x66,0x6D, 0x74,0x20)

BlocSize (4 octets) : Nombre d'octets du bloc - 16 (0x10)

AudioFormat (2 octets) : Format du stockage dans le fichier (1: PCM, ...)

NbrCanaux (2 octets) : Nombre de canaux (de 1 à 6, cf. ci-dessous)

Frequence (4 octets) : Fréquence d'échantillonnage (en [hertz](#)) [Valeurs standardisées : 11 025, 22 050, 44 100 et éventuellement 48 000 et 96 000]

BytePerSec (4 octets) : Nombre d'octets à lire par seconde (c.-à-d., Frequence \* BytePerBloc).

BytePerBloc (2 octets) : Nombre d'octets par bloc d'échantillonnage (c.-à-d., tous canaux confondus : NbrCanaux \* BitsPerSample/8).

BitsPerSample (2 octets) : Nombre de bits utilisés pour le codage de chaque échantillon (8, 16, 24)

[Bloc des données]

DataBlocID (4 octets) : Constante «data» (0x64,0x61,0x74,0x61)

DataSize (4 octets) : Nombre d'octets des données

DATAS[] : [Octets de l'échantillon 1 du Canal 1] [Octets de l'échantillon 1 du Canal 2]  
[Octets de l'échantillon 2 du Canal 1] [Octets de l'échantillon 2 du Canal 2]

{Source : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Waveform\\_Audio\\_File\\_Format](https://fr.wikipedia.org/wiki/Waveform_Audio_File_Format)}

# Correction RIAA

## Introduction

La correction RIAA est un standard qui a été établi par la société RIAA (Recording Industry Association of America). Il a pour but d'amplifier les aigus et de diminuer les graves avant la gravure et inversement à la lecture.

En effet, amplifier les aigus permet que ceux-ci ne soit pas noyés dans le bruit de surface. Pour les graves c'est principalement pour une question de densité d'information : les fréquences plus graves ont des amplitudes plus grandes, qui intouchés obligeraient à augmenter la distance entre les sillons.

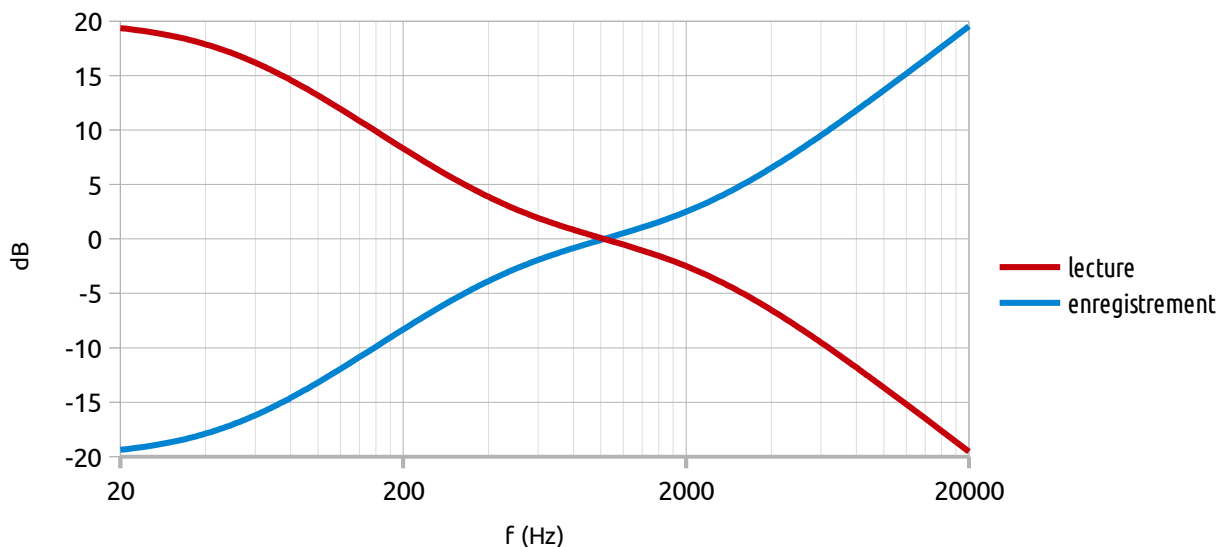
{Source : [https://en.wikipedia.org/wiki/RIAA\\_equalization#The\\_RIAA\\_curve](https://en.wikipedia.org/wiki/RIAA_equalization#The_RIAA_curve)}

Nous allons donc reproduire ces deux filtres. Pour cela nous allons devoir créer un filtre digital. Les filtres RIAA dans les tournes disques et les appareils de gravure sont des filtres analogiques, utilisant des composants électroniques pour altérer le signal. Nous allons donc tout d'abord chercher les paramètres des filtres analogiques originaux puis les convertir en filtres digitaux.

# I – Standard de correction RIAA

## 1) Courbe de l'amplitude de la réponse en fréquence

Sur la page Wikipédia anglaise sur la correction RIAA, on trouve la courbe suivante :



Cependant, on s'est rendu compte qu'il est impossible de réaliser un filtre digital stable dont l'amplitude de la réponse en fréquence tend vers l'infini.

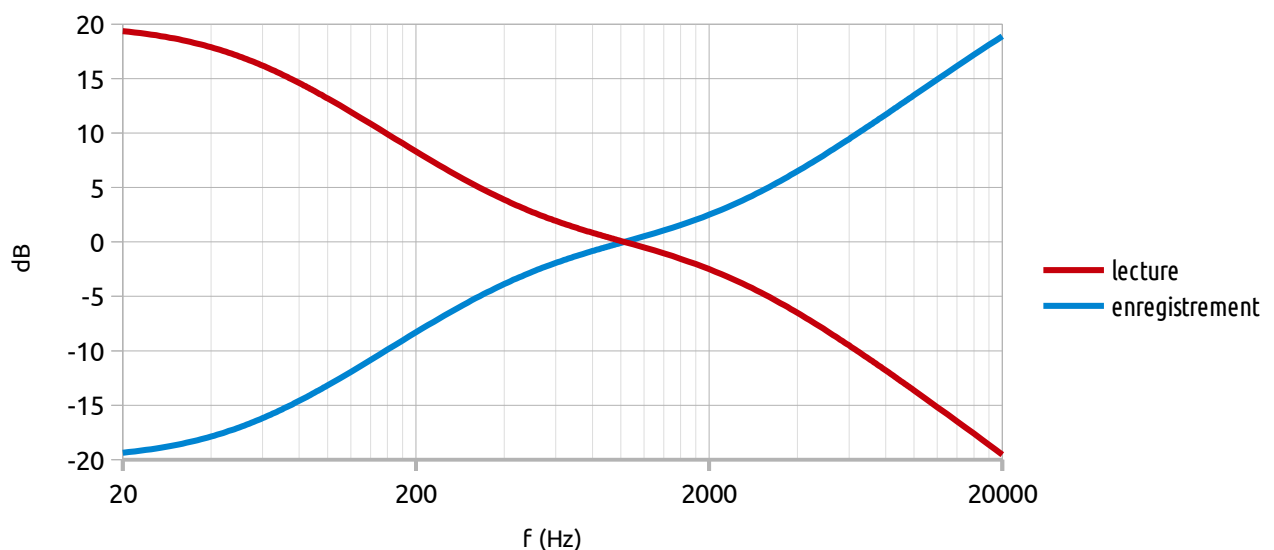
On a aussi remarqué que dans des cas concrets de correcteur RIAA d'enregistrement, la courbe est modifiée en rajoutant une constante de temps supplémentaire : 3,18  $\mu$ m.

On peut citer 2 exemples :

– <http://www.instructables.com/id/RIAA-Equalization-with-analog-electronics/>

– <http://renardson-audio.com/phono-1.html>

On utilisera donc celle-ci dans le programme, voici sa courbe :



On note que dans la partie audible (donc celle représentée, de 20 Hz à 20 kHz), la différence est quasi invisible.



## 2) Formules

La page Wikipédia {Source : [https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89galisation\\_RIAA](https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89galisation_RIAA)} de la correction RIAA donne la formule suivante :

$$dB = 10 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{4 \pi^2 f^2 t_2^2} \right) - 10 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{4 \pi^2 f^2 t_1^2} \right) - 10 \log_{10} (1 + 4 \pi^2 f^2 t_3^2) \quad [I.2.a]$$

Il s'agit de la courbe de lecture, cependant, les valeurs donné pour  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  ne sont pas dans le bon ordre, corrigé ci dessous :

$t_1 = 3180 \mu s$  (constante de temps des graves)

$t_2 = 318 \mu s$  (constante de temps des médiums)

$t_3 = 75 \mu s$  (constante de temps des aigus)

  tant donné que la courbe d'enregistrement correspond à son opposé, on peut donner l'amplitude de sa réponse en fréquence théorique, avec les même constantes de temps :

$$dB = -10 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{4 \pi^2 f^2 t_2^2} \right) + 10 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{4 \pi^2 f^2 t_1^2} \right) + 10 \log_{10} (1 + 4 \pi^2 f^2 t_3^2)$$

On rajoute ensuite la constante de temps supplémentaire :

$$dB = -10 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{4 \pi^2 f^2 t_2^2} \right) + 10 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{4 \pi^2 f^2 t_1^2} \right) + 10 \log_{10} (1 + 4 \pi^2 f^2 t_3^2) - 10 \log_{10} (1 + 4 \pi^2 f^2 t_4^2) \quad [I.2.b]$$

Avec  $t_4 = 3,18 \mu s$

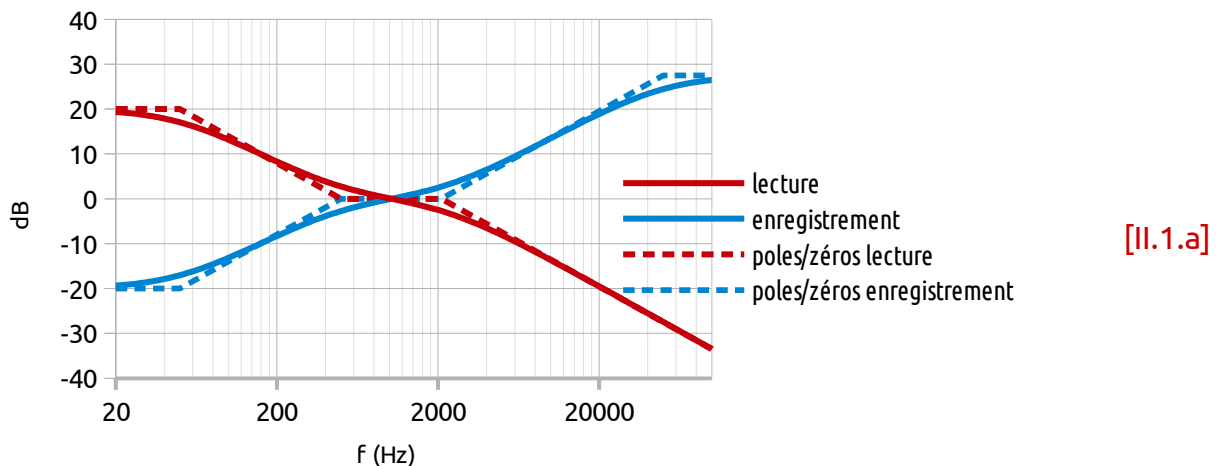
## II – Obtention d’une formule classique de filtre analogique

NB : Cette partie nécessite des connaissances dans les nombres complexes, voir [Math.1](#), ainsi que dans les logarithmes, voir [Math.2](#).

### 1) Usages concernant les filtres analogiques

L’asymptote de l’amplitude de la réponse en fréquence d’un filtre analogique est décrite par ce que l’on appelle des pôles et des zéros. Entre 2 pôles et zéros, la pente de l’asymptote est constante. Lorsque l’on rencontre un pôle, la pente de l’asymptote diminue de 1 et lorsque l’on rencontre un zéro, elle augmente de 1.

La formule donnée par Wikipédia contient explicitement ses pôles et zéros, placé aux fréquences correspondant aux constantes  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  (et  $t_4$ ) :



NB : La conversion des constantes de temps en Hz est la suivante :  $Hz = \frac{1}{2\pi t}$

Cette formule s’explique par le fait que dans la formule on a  $4\pi^2 t^2 = (2\pi t)^2$  pour chaque constante, on peut donc considérer un intervalle de temps comme étant égal à  $2\pi t$ , on remplace donc  $Hz = \frac{1}{t}$  par  $Hz = \frac{1}{2\pi t}$ .

Un filtre analogique s’exprime généralement non pas en fonction de la fréquence  $f$  en Hz, mais en fonction de  $\omega$ , la pulsation du signal en rad/s.

Par définition, on obtient la formule de conversion suivante :  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  [\[II.1.b\]](#)

Pour décrire un filtre analogique, on utilise une fonction de transfert de la forme

$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}}$  Le module de cette fonction correspond à l’amplitude de la réponse en fréquence.

Sous cette forme, un zéro s’exprime  $\frac{j\omega - z}{z}$ , et un pôle s’exprime  $\frac{p}{j\omega - p}$ .

Avec  $z, p \in \mathbb{C}$  et  $j^2 = -1$ .

Un filtre s’exprime par le produit de son gain  $G \in \mathbb{R}$ , de ses pôles et de ses zéros :

$$H(\omega) = \frac{G \cdot p_1 \cdot p_2 \dots (j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots}{z_1 \cdot z_2 \dots (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots} \quad \text{[II.1.c]}$$

## 2) Obtention de la réponse en fréquence en fonction de $\omega$

On sait que  $dB(X) = 20 \log_{10}(X)$  [II.2.a]

De plus, d'après Math.2.d, on a  $10 \log_{10}(X) = 20 \log_{10}(\sqrt{X})$  [II.2.b]

On est donc en capacité d'obtenir l'amplitude de la réponse en fréquence,  $|H(\omega)|$ , pour les deux filtres.

### A] Filtre de lecture

On utilise la réponse en fréquence en dB du filtre de lecture donnée en I.2.a :

$$dB = 10 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 t_2^2} \right) - 10 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 t_1^2} \right) - 10 \log_{10} (1 + 4\pi^2 f^2 t_3^2)$$

On utilise II.1.b :

$$dB = 10 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{4\pi^2 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^2 t_2^2} \right) - 10 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{4\pi^2 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^2 t_1^2} \right) - 10 \log_{10} (1 + 4\pi^2 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^2 t_3^2)$$

$$dB = 10 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{\omega^2 t_2^2} \right) - 10 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{\omega^2 t_1^2} \right) - 10 \log_{10} (1 + \omega^2 t_3^2)$$

On utilise Math.2.c :

$$dB = 10 \log_{10} \left( \frac{1 + \frac{1}{\omega^2 t_2^2}}{\left( 1 + \frac{1}{\omega^2 t_1^2} \right) \cdot (1 + \omega^2 t_3^2)} \right)$$

On utilise II.2.b :

$$dB = 20 \log_{10} \left( \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\omega^2 t_2^2}}{\left( 1 + \frac{1}{\omega^2 t_1^2} \right) \cdot (1 + \omega^2 t_3^2)}} \right)$$

On utilise II.2.a :

$$|H_{lect}(\omega)| = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\omega^2 t_2^2}}{\left( 1 + \frac{1}{\omega^2 t_1^2} \right) \cdot (1 + \omega^2 t_3^2)}}$$

$$|H_{lect}(\omega)| = \sqrt{\frac{\frac{\omega^2 t_2^2 + 1}{\omega^2 t_2^2}}{\left( \frac{\omega^2 t_1^2 + 1}{\omega^2 t_1^2} \right) \cdot (1 + \omega^2 t_3^2)}}$$

$$|H_{lect}(\omega)| = \sqrt{\frac{\omega^2 t_2^2 + 1}{\omega^2 t_2^2} \cdot \frac{\omega^2 t_1^2}{\omega^2 t_1^2 + 1} \cdot \frac{1}{\omega^2 t_3^2 + 1}}$$

$$|H_{lect}(\omega)| = \sqrt{\frac{\omega^2 t_2^2 + 1}{t_2^2} \cdot \frac{t_1^2}{\omega^2 t_1^2 + 1} \cdot \frac{1}{\omega^2 t_3^2 + 1}}$$

$$|H_{lect}(\omega)| = \sqrt{\frac{t_1^2}{t_2^2} \cdot \frac{\omega^2 t_2^2 + 1}{(\omega^2 t_1^2 + 1)(\omega^2 t_3^2 + 1)}}$$

$$|H_{lect}(\omega)| = \sqrt{\frac{t_1^2 t_2^2}{t_2^2 t_1^2 t_3^2} \cdot \frac{\omega^2 + \frac{1}{t_2^2}}{(\omega^2 + \frac{1}{t_1^2})(\omega^2 + \frac{1}{t_3^2})}}$$

$$|H_{lect}(\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1}{t_3}\right)^2 \cdot \frac{\omega^2 + \frac{1}{t_2^2}}{(\omega^2 + \frac{1}{t_1^2})(\omega^2 + \frac{1}{t_3^2})}} \quad [\text{II.2.A.a}]$$

## B] Filtre d'enregistrement

On utilise la réponse en fréquence en dB du filtre d'enregistrement donnée en I.2.b :

$$dB = -10 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{4 \pi^2 f^2 t_2^2} \right) + 10 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{4 \pi^2 f^2 t_1^2} \right) \\ + 10 \log_{10} (1 + 4 \pi^2 f^2 t_3^2) - 10 \log_{10} (1 + 4 \pi^2 f^2 t_4^2)$$

On utilise II.1.b :

$$dB = -10 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{4 \pi^2 \left( \frac{\omega}{2 \pi} \right)^2 t_2^2} \right) + 10 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{4 \pi^2 \left( \frac{\omega}{2 \pi} \right)^2 t_1^2} \right) \\ + 10 \log_{10} (1 + 4 \pi^2 \left( \frac{\omega}{2 \pi} \right)^2 t_3^2) - 10 \log_{10} (1 + 4 \pi^2 \left( \frac{\omega}{2 \pi} \right)^2 t_4^2)$$

$$dB = -10 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{\omega^2 t_2^2} \right) + 10 \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{\omega^2 t_1^2} \right) + 10 \log_{10} (1 + \omega^2 t_3^2) - 10 \log_{10} (1 + \omega^2 t_4^2)$$

On utilise Math.2.b et Math.2.c :

$$dB = 10 \log_{10} \left( \frac{\left( 1 + \frac{1}{\omega^2 t_1^2} \right) \cdot (1 + \omega^2 t_3^2)}{\left( 1 + \frac{1}{\omega^2 t_2^2} \right) \cdot (1 + \omega^2 t_4^2)} \right)$$

On utilise II.2.b :

$$dB = 20 \log_{10} \left( \frac{\left( 1 + \frac{1}{\omega^2 t_1^2} \right) \cdot (1 + \omega^2 t_3^2)}{\left( 1 + \frac{1}{\omega^2 t_2^2} \right) \cdot (1 + \omega^2 t_4^2)} \right)$$

On utilise II.2.a :

$$|H_{enrg}(\omega)| = \sqrt{\frac{\left( 1 + \frac{1}{\omega^2 t_1^2} \right) \cdot (1 + \omega^2 t_3^2)}{\left( 1 + \frac{1}{\omega^2 t_2^2} \right) \cdot (1 + \omega^2 t_4^2)}}$$

$$\begin{aligned}
|H_{enrg}(\omega)| &= \sqrt{\frac{\left(\frac{\omega^2 t_1^2 + 1}{\omega^2 t_1^2}\right) \cdot (1 + \omega^2 t_3^2)}{\left(\frac{\omega^2 t_2^2 + 1}{\omega^2 t_2^2}\right) \cdot (1 + \omega^2 t_4^2)}} \\
|H_{enrg}(\omega)| &= \sqrt{\frac{\omega^2 t_1^2 + 1}{\omega^2 t_1^2} \cdot (1 + \omega^2 t_3^2) \cdot \frac{\omega^2 t_2^2}{\omega^2 t_2^2 + 1} \cdot \frac{1}{\omega^2 t_4^2 + 1}} \\
|H_{enrg}(\omega)| &= \sqrt{\frac{\omega^2 t_2^2 + 1}{t_2^2} \cdot \frac{t_1^2}{\omega^2 t_1^2 + 1} \cdot \frac{1}{\omega^2 t_3^2 + 1}} \\
|H_{enrg}(\omega)| &= \sqrt{\frac{t_2^2}{t_1^2} \cdot \frac{(\omega^2 t_1^2 + 1)(1 + \omega^2 t_3^2)}{(\omega^2 t_2^2 + 1)(\omega^2 t_4^2 + 1)}} \\
|H_{enrg}(\omega)| &= \sqrt{\frac{t_2^2 t_1^2 t_3^2}{t_1^2 t_2^2 t_4^2} \cdot \frac{(\omega^2 + \frac{1}{t_1^2})(\omega + \frac{1}{t_3^2})}{(\omega^2 + \frac{1}{t_2^2})(\omega^2 + \frac{1}{t_4^2})}} \\
|H_{enrg}(\omega)| &= \sqrt{\left(\frac{t_3}{t_4}\right)^2 \cdot \frac{(\omega^2 + \frac{1}{t_1^2})(\omega + \frac{1}{t_3^2})}{(\omega^2 + \frac{1}{t_2^2})(\omega^2 + \frac{1}{t_4^2})}} \quad \text{[II.2.B.a]}
\end{aligned}$$

### 3) Obtention de la fonction de transfert

#### A] Filtre de lecture

Comme montré en II.1.a, le filtre de lecture comporte 2 pôles et 1 zéro.

On peut donc utiliser II.1.b en l'adaptant à ce cas précis :

$$H_{lect}(\omega) = \frac{-G \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot (j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)z_1} = \frac{K(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)} \quad [\text{II.3.A.a}]$$

avec :

$p_1$  et  $p_2$  les deux pôles.

$z_1$  le zéro.

$G \in \mathbb{R}$  le gain. [II.3.A.b]

$$K = -\frac{p_1 p_2}{z_1} \cdot G \quad [\text{II.3.A.c}]$$

Comme le filtre analogique est stable et réalisable, ses pôles et zéros doivent appartenir au demi plan complexe à partie réelle négative.

{Source : <http://www-pagines.fib.upc.es/~pds/Lect06.pdf>, p. 31}

On a donc :

$$\Re(p_1), \Re(p_2), \Re(z_1) \in \mathbb{R}_- \quad [\text{II.3.A.d}]$$

En partant de II.3.A.a, on a :

$$|H_{lect}(\omega)| = \left| \frac{K(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)} \right|$$

On utilise Math.1.b et Math.1.c :

$$|H_{lect}(\omega)| = \frac{|K| \cdot |j\omega - z_1|}{|j\omega - p_1| \cdot |j\omega - p_2|}$$

On utilise Math.1.a :

$$|H_{lect}(\omega)| = \frac{\sqrt{\Re(K)^2 + \Im(K)^2} \cdot \sqrt{(\omega + \Im(z_1))^2 + \Re(z_1)^2}}{\sqrt{(\omega + \Im(p_1))^2 + \Re(p_1)^2} \cdot \sqrt{(\omega + \Im(p_2))^2 + \Re(p_2)^2}}$$
$$|H_{lect}(\omega)| = \sqrt{\frac{(\Re(K)^2 + \Im(K)^2)((\omega + \Im(z_1))^2 + \Re(z_1)^2)}{((\omega + \Im(p_1))^2 + \Re(p_1)^2)((\omega + \Im(p_2))^2 + \Re(p_2)^2)}} \quad [\text{II.3.A.e}]$$

On peut l'identifier à la formule II.2.A.a :

$$|H_{lect}(\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1}{t_3}\right)^2 \cdot \frac{\omega^2 + \frac{1}{t_2^2}}{(\omega^2 + \frac{1}{t_1^2})(\omega^2 + \frac{1}{t_3^2})}}$$

On en déduit que :

$$\Im(p_1) = \Im(p_2) = \Im(z_1) = 0$$

De plus, avec II.3.A.d, on peut en déduire que :

$$p_1, p_2, z_1 \in \mathbb{R}_- \quad [\text{II.3.A.f}]$$

On pose donc :

$$z_1^2 = \frac{1}{t_2^2} \Rightarrow z_1 = -\frac{1}{t_2}$$

$$p_1^2 = \frac{1}{t_1^2} \Rightarrow p_1 = -\frac{1}{t_1}$$

$$p_2^2 = \frac{1}{t_3^2} \Rightarrow p_2 = -\frac{1}{t_3} \quad [\text{II.3.A.g}]$$

Étant donné II.3.A.b, II.3.A.c et II.3.A.d :  $K \in \mathbb{R}$

Donc  $\Im(K) = 0$  et  $\Re(K) = K$

Grâce à II.2.A.a, II.3.A.e et II.3.A.g, on a :

$$K^2 = \left(\frac{1}{t_3}\right)^2 = p_2^2 \quad [\text{II.3.A.h}]$$

Avec II.3.A.c on peut écrire :

$$K^2 = G^2 \left(\frac{p_1 p_2}{z_1}\right)^2$$

D'où :

$$G^2 = \left(\frac{K z_1}{p_1 p_2}\right)^2 = \left(\frac{p_2 z_1}{p_1 p_2}\right)^2 = \left(\frac{z_1}{p_1}\right)^2$$

$$G = \pm \frac{z_1}{p_1}$$

Comme la phase à l'origine de la correction RIAA est nulle, on a  $G \geq 0$ , donc :

$$G = \frac{z_1}{p_1} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{3180 \mu s}{318 \mu s} = 10$$

Donc :

$$G_{dB} = 20 \log_{10}(G) = 20 \log_{10}(10) = 20 \text{ dB}$$

Cela correspond bien aux caractéristiques du filtre.

D'après II.3.A.h,  $G \geq 0$  et  $p_2 \leq 0$  :

$$K = -p_2$$

On peut donc en conclure que :

$$H_{\text{lect}}(\omega) = \frac{-p_2 \cdot (j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)} \quad [\text{II.3.A.i}]$$

$$\text{Avec } z_1 = -\frac{1}{t_2}, \quad p_1 = -\frac{1}{t_1} \quad \text{et} \quad p_2 = -\frac{1}{t_3}$$

## B] Filtre d'enregistrement

Comme montré en II.1.a, le filtre d'enregistrement comporte 2 pôles et 2 zéros.  
On peut donc utiliser II.1.b en l'adaptant à ce cas précis :

$$H_{\text{enrg}}(\omega) = \frac{-G \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot (j\omega - z_1)(j\omega - z_2)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) z_1 \cdot z_2} = \frac{K(j\omega - z_1)(j\omega - z_2)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)} \quad [\text{II.3.B.a}]$$

avec :

$p_1$  le pôle.

$z_1$  et  $z_2$  les deux zéros.

$G \in \mathbb{R}$  le gain. [II.3.B.b]

$$K = -\frac{p_1 p_2}{z_1 z_2} \cdot G \quad [\text{II.3.B.c}]$$

Comme le filtre analogique est stable et réalisable, ses pôles et zéros doivent appartenir au demi plan complexe à partie réelle négative, on a donc :

$$\Re(p_1), \Re(p_2), \Re(z_1), \Re(z_2) \in \mathbb{R}_- \quad [\text{II.3.B.d}]$$

En partant de II.3.B.a, on a :

$$|H(\omega)| = \left| \frac{K(j\omega - z_1)(j\omega - z_2)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)} \right|$$

On utilise Math.1.b et Math.1.c :

$$|H_{\text{enrg}}(\omega)| = \frac{|K| \cdot |j\omega - z_1| \cdot |j\omega - z_2|}{|j\omega - p_1| \cdot |j\omega - p_2|}$$

On utilise Math.1.a :

$$|H_{\text{enrg}}(\omega)| = \frac{\sqrt{\Re(K)^2 + \Im(K)^2} \cdot \sqrt{(\omega + \Im(z_1))^2 + \Re(z_1)^2} \cdot \sqrt{(\omega + \Im(z_2))^2 + \Re(z_2)^2}}{\sqrt{(\omega + \Im(p_1))^2 + \Re(p_1)^2} \cdot \sqrt{(\omega + \Im(p_2))^2 + \Re(p_2)^2}}$$

$$|H_{\text{enrg}}(\omega)| = \sqrt{\frac{(\Re(K)^2 + \Im(K)^2)((\omega + \Im(z_1))^2 + \Re(z_1)^2)((\omega + \Im(z_2))^2 + \Re(z_2)^2)}{((\omega + \Im(p_1))^2 + \Re(p_1)^2)((\omega + \Im(p_2))^2 + \Re(p_2)^2)}} \quad [\text{II.3.B.e}]$$

On peut l'identifier à la formule II.2.B.a :

$$|H_{\text{enrg}}(\omega)| = \sqrt{\left(\frac{t_3}{t_4}\right)^2 \cdot \frac{(\omega^2 + \frac{1}{t_1^2})(\omega^2 + \frac{1}{t_3^2})}{(\omega^2 + \frac{1}{t_2^2})(\omega^2 + \frac{1}{t_4^2})}}$$

On en déduit que :

$$\Im(p_1) = \Im(p_2) = \Im(z_1) = \Im(z_2) = 0$$

De plus, avec II.3.B.d, on peut en déduire que :

$$p_1, p_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}_- \quad [\text{II.3.B.f}]$$

On pose donc :

$$z_1^2 = \frac{1}{t_1^2} \Rightarrow z_1 = -\frac{1}{t_1}$$

$$z_2^2 = \frac{1}{t_3^2} \Rightarrow z_2 = -\frac{1}{t_3} \quad [\text{II.3.B.g}]$$

$$p_1^2 = \frac{1}{t_2^2} \Rightarrow p_1 = -\frac{1}{t_2}$$



$$p_2^2 = \frac{1}{t_4^2} \Rightarrow p_2 = -\frac{1}{t_4} \quad [\text{II.3.B.h}]$$

Étant donné II.3.B.b, II.3.B.c et II.3.B.d :  $K \in \mathbb{R}$

Donc  $\Im(K) = 0$  et  $\Re(K) = K$

On peut donc par identification donner :

$$K^2 = \frac{t_3^2}{t_4^2}$$

Avec II.3.B.g et II.3.B.h on a :

$$K^2 = \frac{t_3^2}{t_4^2} = \frac{p_2^2}{z_2^2} \quad [\text{II.3.B.i}]$$

Avec II.3.B.c on peut écrire :

$$K^2 = G^2 \left( \frac{p_1 p_2}{z_1 z_2} \right)^2$$

D'où :

$$G^2 = \left( \frac{K z_1 z_2}{p_1 p_2} \right)^2 = \left( \frac{p_2 z_1 z_2}{z_2 p_1 p_2} \right)^2 = \left( \frac{z_1}{p_1} \right)^2$$

$$G = \pm \frac{z_1}{p_1}$$

Comme la phase à l'origine de la correction RIAA est nulle, alors  $G \geq 0$ , donc :

$$G = \frac{z_1}{p_1} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{318 \mu s}{3180 \mu s} = 0.1$$

Donc :

$$G_{dB} = 20 \log_{10}(G) = 20 \log_{10}(0.1) = -20 \text{ dB}$$

Cela correspond bien aux caractéristiques du filtre.

D'après II.3.B.c, II.3.B.f et  $G \geq 0$ , on a  $K \leq 0$ , donc avec II.3.B.i :  $K = -\frac{p_2}{z_2}$

On peut donc en conclure que :

$$H_{\text{eng}}(\omega) = \frac{-p_2(j\omega - z_1)(j\omega - z_2)}{z_2(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)} \quad [\text{II.3.B.j}]$$

Avec  $z_1 = -\frac{1}{t_1}$ ,  $z_2 = -\frac{1}{t_3}$ ,  $p_1 = -\frac{1}{t_2}$  et  $p_2 = -\frac{1}{t_4}$

## II – Transformation en filtre digital

Il existe plusieurs types de filtres digitaux, donc les principaux sont les RIF (réponse impulsionnelle infinie) et les RII (réponse impulsionnelle finie).

Les deuxièmes sont ceux qui se rapprochent le plus des filtres analogiques : en effet lorsque l'on envoie une impulsion sur un filtre analogique, le signal sera de plus en plus faible mais ne devrait théoriquement ne jamais redevenir nul. Nous allons donc transformer notre formule de filtre analogique en un filtre digital RII.

{Source : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Filtre\\_%C3%A0\\_r%C3%A9ponse\\_impulsionnelle\\_infinie](https://fr.wikipedia.org/wiki/Filtre_%C3%A0_r%C3%A9ponse_impulsionnelle_infinie)}

### 1) Transformation bilinéaire

Pour passer d'un filtre analogique à un filtre RII, il faut passer du domaine analogique fréquentiel  $\omega$  au domaine digital échantillonné  $z$  à une fréquence  $f_s$ , grâce à la transformation bilinéaire. Celle-ci s'exprime avec :

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} \text{ et } H(z) = H(s) \Big|_{s=2f_s \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} \quad [\text{III.1.a}]$$

avec  $z^{-1}$  correspondant à un délai de un échantillon.

{Source : <http://www.pagines.fib.upc.es/~pds/Lect06.pdf>, p. 35}

#### A] Filtre de lecture

Avec II.3.A.i et III.1.a on peut donc écrire :

$$H_{lect}(z) = H_{lect}(s) \Big|_{s=2f_s \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} = \frac{-p_2 \cdot \left( 2f_s \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) - z_1 \right)}{\left( 2f_s \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) - p_1 \right) \left( 2f_s \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) - p_2 \right)}$$

$$H_{lect}(z) = \frac{-p_2 \cdot (2f_s(1-z^{-1}) - z_1(1+z^{-1}))(1+z^{-1})}{(2f_s(1-z^{-1}) - p_1(1+z^{-1}))(2f_s(1-z^{-1}) - p_2(1+z^{-1}))} \quad [\text{III.1.A.a}]$$

$$H_{lect}(z) = \frac{-p_2(2f_s(1-z^{-1}))(1+z^{-1}) + p_2 \cdot z_1(1+z^{-1})(1+z^{-1})}{(2f_s(1-z^{-1}))^2 - 2f_s(1-z^{-1}) \cdot p_2(1+z^{-1}) - p_1(1+z^{-1}) \cdot 2f_s(1-z^{-1}) + p_1(1+z^{-1}) \cdot p_2(1+z^{-1})}$$

$$H_{lect}(z) = \frac{-p_2 \cdot 2f_s(1-z^{-2}) + p_2 \cdot z_1(1+2z^{-1}+z^{-2})}{(4f_s^2(1-2z^{-1}+z^{-2})) - 2f_s(1-z^{-2}) \cdot p_2 - 2f_s(1-z^{-2}) \cdot p_1 + p_1 \cdot p_2(1+2z^{-1}+z^{-2})}$$

$$H_{lect}(z) = \frac{-p_2 \cdot 2f_s + p_2 \cdot 2f_s \cdot z^{-2} + p_2 \cdot z_1 + 2p_2 \cdot z_1 \cdot z^{-1} + p_2 \cdot z_1 \cdot z^{-2}}{(4f_s^2 - 8f_s^2 z^{-1} + 4f_s^2 z^{-2}) - (2f_s - 2f_s z^{-2})(p_2 + p_1) + (p_1 \cdot p_2 + 2p_1 \cdot p_2 z^{-1} + p_1 \cdot p_2 z^{-2})}$$

$$H_{lect}(z) = \frac{-p_2 \cdot 2f_s + p_2 \cdot 2f_s \cdot z^{-2} + p_2 \cdot z_1 + 2p_2 \cdot z_1 \cdot z^{-1} + p_2 \cdot z_1 \cdot z^{-2}}{4f_s^2 - 8f_s^2 z^{-1} + 4f_s^2 z^{-2} + 2(p_2 + p_1)f_s z^{-2} - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 \cdot p_2 + 2p_1 \cdot p_2 z^{-1} + p_1 \cdot p_2 z^{-2}}$$

$$H_{lect}(z) = \frac{p_2 \cdot z_1 - p_2 \cdot 2f_s + 2p_2 \cdot z_1 \cdot z^{-1} + p_2 \cdot 2f_s \cdot z^{-2} + p_2 \cdot z_1 \cdot z^{-2}}{4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 \cdot p_2 - 8f_s^2 z^{-1} + 2p_1 \cdot p_2 z^{-1} + 4f_s^2 z^{-2} + 2(p_2 + p_1)f_s z^{-2} + p_1 \cdot p_2 z^{-2}}$$

$$H_{lect}(z) = \frac{p_2(z_1 - 2f_s) + 2p_2 \cdot z_1 \cdot z^{-1} + p_2(2f_s + z_1)z^{-2}}{(4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2) + (2p_1 p_2 - 8f_s^2)z^{-1} + (4f_s^2 + 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)z^{-2}}$$

$$H_{lect}(z) = \frac{p_2(z_1 - 2f_s) + 2p_2 \cdot z_1 \cdot z^{-1} + p_2(2f_s + z_1)z^{-2}}{(4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2) + (2p_1 p_2 - 8f_s^2)z^{-1} + (4f_s^2 + 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)z^{-2}} \quad [\text{III.1.A.b}]$$

## B] Filtre d'enregistrement

Avec II.3.B.j et III.1.a on peut donc écrire :

$$H_{\text{enrg}}(z) = H_{\text{enrg}}(s) \Big|_{s=2f_s \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} = \frac{-p_2 \cdot \left( 2f_s \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) - z_1 \right) \left( 2f_s \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) - z_2 \right)}{z_2 \cdot \left( 2f_s \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) - p_1 \right) \left( 2f_s \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) - p_2 \right)}$$

On peut remarquer que en haut et en bas, on quelque-chose de la même forme que le dénominateur de III.1.A.a, multiplié par une constante. On peut donc utiliser la forme du dénominateur obtenu dans III.1.A.b pour aller plus vite :

$$H_{\text{lect}}(z) = \frac{-p_2(4f_s^2 - 2(z_2 + z_1)f_s + z_1 z_2) - p_2(2z_1 z_2 - 8f_s^2)z^{-1} - p_2(4f_s^2 + 2(z_2 + z_1)f_s + z_1 z_2)z^{-2}}{z_2(4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2) + z_2(2p_1 p_2 - 8f_s^2)z^{-1} + z_2(4f_s^2 + 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)z^{-2}}$$

[III.1.B.a]

## 2) Obtention du filtre digital

Par définition, la fonction de transfert correspond au rapport de la sortie sur l'entrée :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \text{[III.2.a]}$$

### A] Filtre de lecture

Avec III.1.A.b et III.2.a, on peut écrire :

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{p_2(z_1 - 2f_s) + 2p_2 \cdot z_1 \cdot z^{-1} + p_2(2f_s + z_1)z^{-2}}{(4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2) + (2p_1 p_2 - 8f_s^2)z^{-1} + (4f_s^2 + 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)z^{-2}}$$

$$Y(z) \left[ (4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2) + (2p_1 p_2 - 8f_s^2)z^{-1} + (4f_s^2 + 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)z^{-2} \right] \\ = X(z) \left[ p_2(z_1 - 2f_s) + 2p_2 \cdot z_1 \cdot z^{-1} + p_2(2f_s + z_1)z^{-2} \right]$$

On note  $y[n]$  l'échantillon courant on a donc  $Y(z) = y[n]$ .

Comme  $z^{-k}$  correspond a un délai de  $k$  échantillons en arrière,  $y[n] \times z^{-k} = y[n-k]$ .

On peut donc écrire :

$$(4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2) y[n] + (2p_1 p_2 - 8f_s^2) y[n-1] + (4f_s^2 + 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2) y[n-2] \\ = p_2(z_1 - 2f_s) x[n] + 2p_2 \cdot z_1 \cdot x[n-1] + p_2(2f_s + z_1) x[n-2]$$

$$(4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2) y[n] = -(2p_1 p_2 - 8f_s^2) y[n-1] - (4f_s^2 + 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2) y[n-2] \\ + p_2(z_1 - 2f_s) x[n] + 2p_2 \cdot z_1 \cdot x[n-1] + p_2(2f_s + z_1) x[n-2]$$

On pose  $D_{lect} = (4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)$

On a donc :

$$y[n] = -\frac{2p_1 p_2 - 8f_s^2}{D_{lect}} y[n-1] - \frac{4f_s^2 + 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2}{D_{lect}} y[n-2] \\ + \frac{p_2(z_1 - 2f_s)}{D_{lect}} x[n] + \frac{2p_2 \cdot z_1}{D_{lect}} x[n-1] + \frac{p_2(2f_s + z_1)}{D_{lect}} x[n-2]$$

On peut finalement écrire le filtre de lecture sous la forme digitale :

$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] - b_1 y[n-1] - b_2 y[n-2]$$

avec :

$$a_0 = \frac{p_2(z_1 - 2f_s)}{4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2}$$

$$a_1 = \frac{2p_2 \cdot z_1}{4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2}$$

$$a_2 = \frac{p_2(2f_s + z_1)}{4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2}$$

$$b_1 = \frac{2p_1 p_2 - 8f_s^2}{4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2}$$

$$b_2 = \frac{4f_s^2 + 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2}{4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2}$$

## B] Filtre d'enregistrement

Avec III.1.B.a et III.2.a, on peut écrire :

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-p_2(4f_s^2 - 2(z_2 + z_1)f_s + z_1 z_2) - p_2(2z_1 z_2 - 8f_s^2)z^{-1} - p_2(4f_s^2 + 2(z_2 + z_1)f_s + z_1 z_2)z^{-2}}{z_2(4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2) + z_2(2p_1 p_2 - 8f_s^2)z^{-1} + z_2(4f_s^2 + 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)z^{-2}}$$

$$Y(z) \left[ z_2(4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2) + z_2(2p_1 p_2 - 8f_s^2)z^{-1} + z_2(4f_s^2 + 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)z^{-2} \right] \\ = X(z) \left[ -p_2(4f_s^2 - 2(z_2 + z_1)f_s + z_1 z_2) - p_2(2z_1 z_2 - 8f_s^2)z^{-1} - p_2(4f_s^2 + 2(z_2 + z_1)f_s + z_1 z_2)z^{-2} \right]$$

On note  $y[n]$  l'échantillon courant. On a donc  $Y(z) = y[n]$ .

Comme  $z^{-k}$  correspond à un délai de  $k$  échantillons en arrière,  $y[n] \times z^{-k} = y[n-k]$ .

On peut donc écrire :

$$z_2(4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)y[n] + z_2(2p_1 p_2 - 8f_s^2)y[n-1] \\ + z_2(4f_s^2 + 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)y[n-2] \\ = -p_2(4f_s^2 - 2(z_2 + z_1)f_s + z_1 z_2)x[n] - p_2(2z_1 z_2 - 8f_s^2)x[n-1] \\ - p_2(4f_s^2 + 2(z_2 + z_1)f_s + z_1 z_2)x[n-2] \\ - z_2(4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)y[n] \\ = z_2(2p_1 p_2 - 8f_s^2)y[n-1] + z_2(4f_s^2 + 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)y[n-2] \\ + p_2(4f_s^2 - 2(z_2 + z_1)f_s + z_1 z_2)x[n] + p_2(2z_1 z_2 - 8f_s^2)x[n-1] \\ + p_2(4f_s^2 + 2(z_2 + z_1)f_s + z_1 z_2)x[n-2]$$

On pose  $D_{enrg} = -z_2(4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)$

On a donc :

$$y[n] = -\frac{z_2(2p_1 p_2 - 8f_s^2)}{D_{enrg}}y[n-1] - \frac{z_2(4f_s^2 + 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)}{D_{enrg}}y[n-2] \\ + \frac{4f_s^2 - 2(z_2 + z_1)f_s + z_1 z_2}{D_{enrg}}x[n] + \frac{2z_1 z_2 - 8f_s^2}{D_{enrg}}x[n-1] + \frac{4f_s^2 + 2(z_2 + z_1)f_s + z_1 z_2}{D_{enrg}}x[n-2]$$

On peut finalement écrire le filtre d'enregistrement sous la forme digitale :

$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] - b_1 y[n-1] - b_2 y[n-2]$$

avec :

$$a_0 = \frac{4f_s^2 - 2(z_2 + z_1)f_s + z_1 z_2}{-z_2(4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)}$$

$$a_1 = \frac{2z_1 z_2 - 8f_s^2}{-z_2(4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)}$$

$$a_2 = \frac{4f_s^2 + 2(z_2 + z_1)f_s + z_1 z_2}{-z_2(4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)}$$

$$b_1 = \frac{-z_2(2p_1 p_2 - 8f_s^2)}{-z_2(4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)}$$

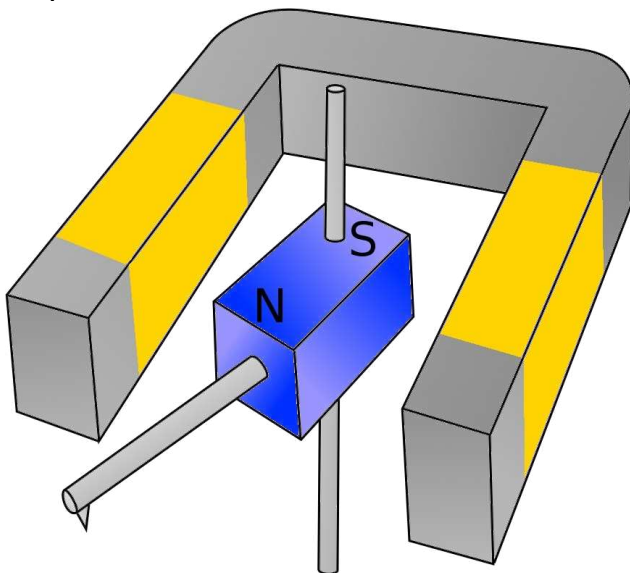
$$b_2 = \frac{-z_2(4f_s^2 + 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)}{-z_2(4f_s^2 - 2(p_2 + p_1)f_s + p_1 p_2)}$$

# Effet des bobines

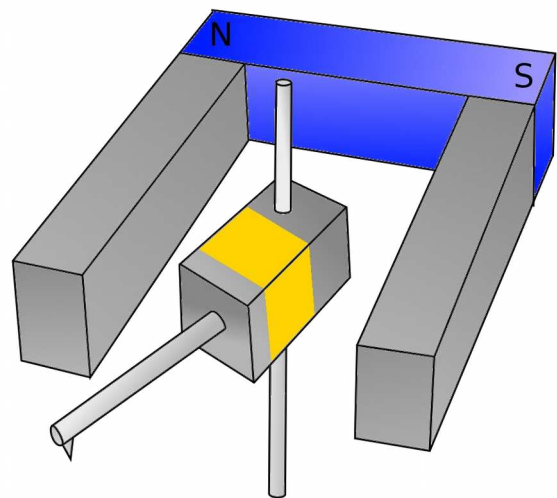
## Introduction

Lors de la lecture, le signal est transmis à la pointe de lecture, sous la forme d'une position. Ils existent principalement 2 types de tête de lecture.

Voici un schéma de ces deux dispositions, en version mono, pour des questions de simplicité d'illustration :



Capteur "Moving magnet"



Capteur "Moving coil"

Légende : **Aimant**, **Bobine**.

{Source : <http://jeanluc.rigal.free.fr/files/principe-disque-vynil.pdf>, p. 9}

Les systèmes stéréo fonctionnent de manière similaire, cependant, au lieu de lire une valeur horizontale unique, ils lisent deux valeurs dans les directions correspondant aux deux côtés du sillon. Il y a donc toujours un seul élément relié mécaniquement à la pointe de lecture, mais 4 sont répartis autour.

Le même type de système est utilisé lors de la gravure.

# I – Lecture

NB : Cette partie nécessite des connaissances relatives aux dérivés, voir [Math.3](#).

## 1) Propriété des bobines

Lorsqu'un aimant se déplace dans le champ d'action d'une bobine, la tension de sortie est proportionnelle à la vitesse relative de l'aimant.

La vitesse d'un objet est égale à la dérivée de sa position. On peut donc dire que la tension est proportionnelle à la dérivée de la position relative de l'aimant par rapport à la bobine.

{Source : <http://jeanluc.rigal.free.fr/files/principe-disque-vynil.pdf>, p. 10}

## 2) Calcul de la tension

On sait que  $Tension = k \frac{d}{dt}(Position)$ , avec un k constant.

Comme on souhaite réaliser une fonction permettant de passer de la position à la tension, on note x la première et y la deuxième.

On a donc  $y = k \frac{d}{dt}(x)$

D'après [Math.3.a](#), on sait que  $\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{f(x+a) - f(x)}{a}$ , quand a tend vers 0.

Comme on est en domaine échantillonné, il faut prendre le a le plus petit possible, donc le temps entre 2 échantillons, égal à l'inverse de la fréquence échantillonnage.

On a donc, en notant x[n] l'échantillon courant et x[n+1] l'échantillon suivant, y[n] l'échantillon de sortie, et f<sub>s</sub> la fréquence d'échantillonnage.

$$y[n] = k \left( \frac{x[n+1] - x[n]}{\frac{1}{f_s}} \right) = k f_s (x[n+1] - x[n])$$

Comme on va ensuite normaliser l'amplitude avant d'écrire le fichier audio, la constante k f<sub>s</sub> n'as pas d'importance, on peut donc la retirer. On a donc :

$$y[n] = x[n+1] - x[n] \quad [1.2.a]$$

Cependant, avec cette formule, il y aurait un échantillon y de moins par rapport aux x.

On décide donc de fixer y[0]=0 et de décaler les x, pour avoir une nouvelle formule de y :

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

## II – Gravure

### 1) Propriété des bobines

Lorsque l'on applique une tension aux bornes d'une bobine, la vitesse d'un aimant placé dans son champ est proportionnelle à la tension.

La position d'un objet est égale à l'intégrale de sa vitesse. On peut donc dire que la position relative de l'aimant par rapport à la bobine est proportionnelle à l'intégrale de la tension appliquée sur la bobine.

### 2) Calcul de la position

Comme l'intégrale correspond à l'inverse de la dérivation, on peut utiliser la formule I.2.a, en inversant  $x$  et  $y$  :

$$x[n] = y[n+1] - y[n]$$

$$y[n+1] = x[n] + y[n]$$

On pose  $y[0]=0$ , car on ne dispose pas de  $y[-1]$  pour le calculer.

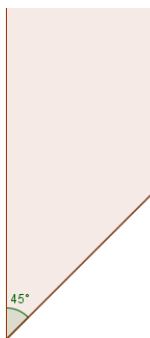


# Burin de gravure

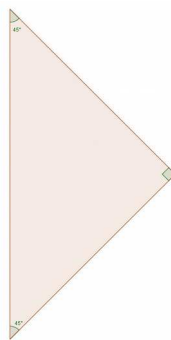
## Introduction

La forme des burins qui grave les disques originaux, est bien particulière, ce sont des saphirs taillé dont la pointe est en forme de pyramide a base triangulaire. La face servant à la découpe est perpendiculaire avec la surface du vinyle.

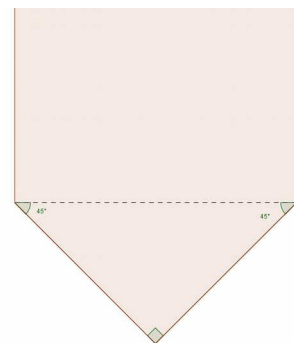
Voici différentes vues du burin :



Vue de coté

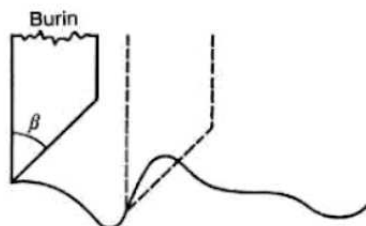


Vue de dessus

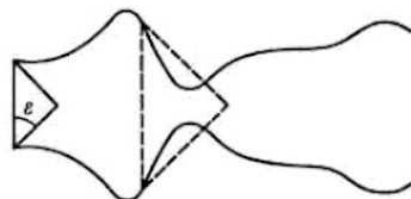


Vue de devant

Le burin ne peut pas se déplacer dans une direction a plus de 45° par rapport au sens du sillon, car il appuierai contre une partie déjà gravé :



Ici, on peut voir que ce sillon vu de coté ne peut pas être gravé avec une telle forme, car a l'emplacement ou est représenté le burin en pointillés, celui-ci buterait contre le sillon déjà gravé.



On observe le même phénomène dans cette vue de dessus, mais dans le sens latéral cette fois.

{Source : <https://books.google.fr/books?id=YjBJ1T2y5-4C&printsec=frontcover>, p. 6}

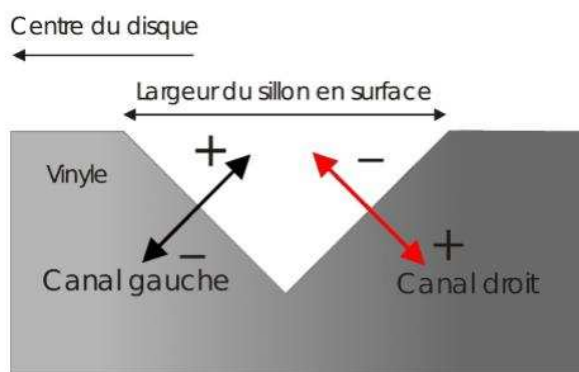
# Format des données dans le sillon

Le signal d'un disque vinyle peut être soit monophonique, soit stéréophonique :

- La monophonie consiste à graver un seul canal sonore dans le sillon.
- Le son stéréophonique consiste lui à graver deux canaux sonores légèrement différents, il est utilisé pour donner une impression de volume/3D au son. En effet, pour localiser le son, nous nous servons principalement du volume avec lequel nous l'entendons dans chaque oreille pour savoir de quel côté il se trouve. Le son stéréo exploite ce fonctionnement de l'oreille humaine pour donner l'impression d'une multitude sources sonores alors qu'il n'y a que deux haut-parleurs. On peut aussi donner une impression de mouvement en faisant passer un son du canal gauche au canal droite ou inversement. Cela permet donc de produire des sonorités plus riches.

Nous nous intéresseront principalement au son stéréo, mais un son mono peut être considéré comme un son stéréo avec deux canaux identiques.

Voici une coupe d'un sillon, ou l'on peut voir les deux bords du sillon, et leur manière de bouger :

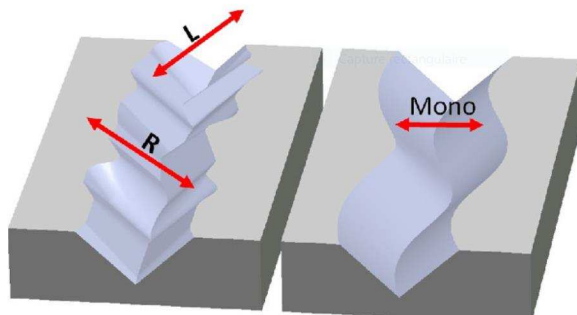


on voit donc que les deux sillons se déplacent dans le même sens. ainsi si le signal est mono, la largeur du sillon sera constante, mais comme dans un son stéréo les bords sont dissociés, la largeur (et donc la hauteur du sillon varie). En plus d'avoir ses deux canaux encodés en diagonale, le sillon possède des propriétés particulières : Le centre du sillon correspond à la moyenne des deux canaux, et la profondeur correspond à la différence des deux canaux.

On peut montrer ce phénomène ainsi : si les deux canaux vont dans le même sens, alors les deux bords bougent de la même valeur, le centre bouge avec eux (ce qui correspond bien à la moyenne), et la profondeur reste la même (la différence entre les deux sillons ne change pas : ils bougent ensemble).

Si les deux canaux vont au contraire dans des directions opposées, alors, le centre, la moyenne restera fixe, puisque les deux modifications s'annulent. Cependant, le sillon deviendra plus ou moins profond car les bords s'éloigneront ou se rapprocheront (donc leur différence variera)

le fait que le centre du sillon soit la moyenne permet aux cellules mono de lire les disques stéréo : en effet les cellules mono lisent horizontalement, elles lisent donc la moyenne.



À gauche : le sillon d'un disque vinyle stéréo, à droite : le sillon d'un disque vinyle monophonique.

Cette illustration montre bien la différence entre un sillon mono avec ses bords parallèles et un sillon stéréo aux bords dissociés.

## Effet mathématique

Comme le burin ne peut dépasser une direction à plus de  $45^\circ$  de l'axe du sillon, entre deux points consécutifs du sillon, le burin ne peut s'être au maximum déplacé latéralement d'une valeur égale à celle dont il a avancé.

Si le fichier audio décrit un déplacement plus rapide, on modifiera alors la valeur pour que l'on reste dans cette limite.

Il nous faut donc calculer le déplacement dans le sens du sillon entre deux échantillons. on note  $\Delta y$  ce déplacement. On sait que le signal est échantillonné à une fréquence  $f_s$ , en

Hertz, donc il y a un écart de  $\frac{1}{f_s}$  en secondes entre deux sillons. Pour obtenir  $\Delta y$  il nous

faut donc multiplier ce temps par la vitesse d'avancement,  $v$  en m/s.

Il nous faut donc calculer  $v$  : on connaît la vitesse de rotation  $v_R$  du disque en tours/s.

On peut aussi calculer la longueur d'un tour à un rayon  $r$  en m donné :  $P = 2\pi r$

On sait donc que l'on avance de  $P$  en une durée  $v_R$ , on peut donc écrire  $v = P \cdot v_R$ .

Si on voit que  $x[i] > x[i-1] + \Delta y$  alors  $x[i]$  est trop éloigné de la valeur précédente, on change donc la valeur de  $x[i]$  en la remplaçant par  $x[i-1] + \Delta y$

Si  $x[i] < x[i-1] - \Delta y$  alors  $x[i]$  est trop éloigné de la valeur précédente, on change donc la valeur de  $x[i]$  en la remplaçant par  $x[i-1] - \Delta y$

# Pincement

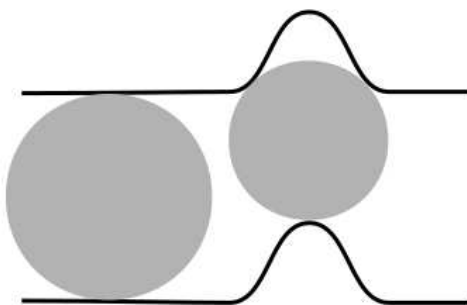
## Introduction

Lors de la lecture d'un disque vinyle, la pointe de lecture n'a pas la même forme que la pointe de gravure. Cela a été fait exprès, pour :

- Réduire le bruit de surface en ayant le moins de points de contact possible avec le disque a la lecture.
- Éviter une usure prématurée du disque en ayant une pointe de lecture ne comportant pas d'arêtes.

Cependant, cela empêche aux pointes de passer dans les plus petits creux du sillon, du fait de leurs taille, ce qui empêche de reproduire parfaitement le son, c'est ce que l'on appelle le pincement.

Voici un schéma d'une situation de pincement :



Ce schéma vu de dessus montre que lors de variations rapides, la pointe, du fait de sa longueur non nulle, se fait "pincer", et est donc obligé de remonter.

NB : on notera que pour mieux représenter le phénomène, on a exagéré la situation : a cause de la pointe de gravure, comme montré dans la partie dédiée on ne peut pas dépasser les  $45^\circ$  par rapport au sens du sillon.

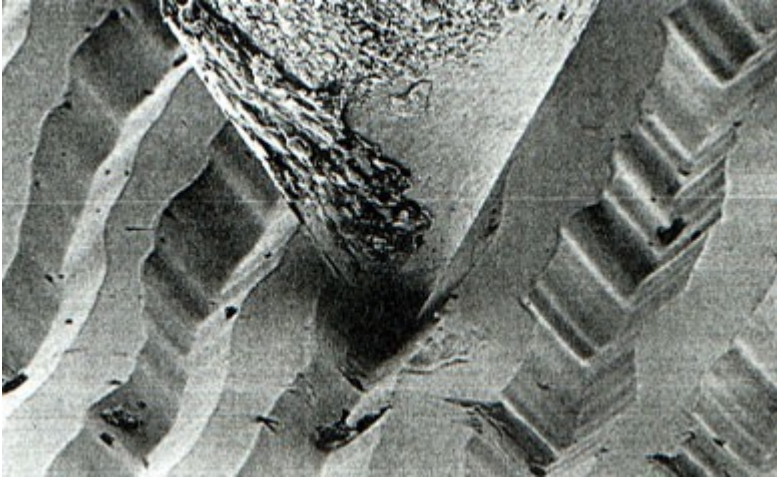
Il nous faut donc calculer la position de la pointe dans le sillon. Pour cela nous allons effectuer des coupes de la pointes aux différentes positions ou nous connaissons la position des bords du sillon. Pour obtenir ces coupes, nous nous appuyerons sur l'équation cartésienne des extrémités (c'est a dire les partie susceptibles d'entrer en contact avec le sillon) de celles-ci.

# I – Équation de la pointe de lecture

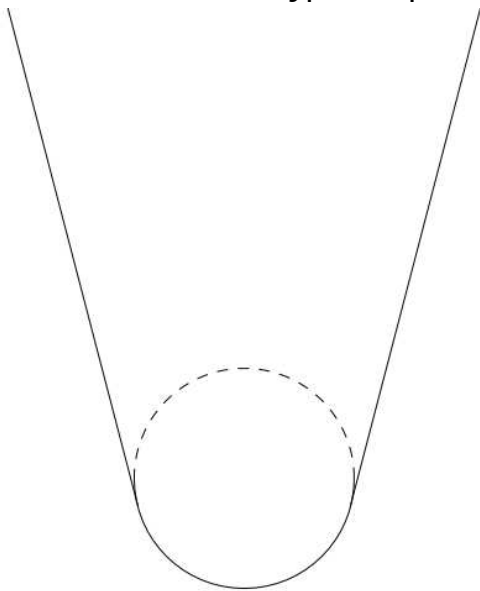
Comme expliqué dans l'introduction, il nous faut d'abord obtenir l'équation cartésienne du bout des pointes de lecture. Une fois celle-ci obtenue, nous exprimerons la position verticale ( $z$ ) de la surface de la pointe en fonction des deux autres dimensions :  $x$  et  $y$ .

## 1) Les différents types de pointes

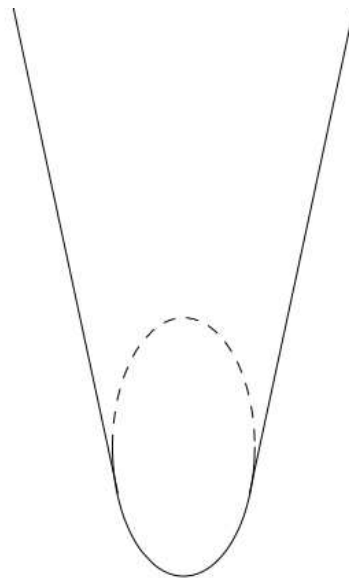
Voici une pointe de lecture reposant dans un sillon :



Il existe plusieurs formes de pointes de lecture. Les deux types les plus utilisés sont les pointes sphériques, et les pointes elliptiques. La particularité des pointes elliptiques est qu'elles ont une longueur inférieure à leur largeur, ce qui limite le pincement. Voici une vue de côté de ces deux types de pointes :

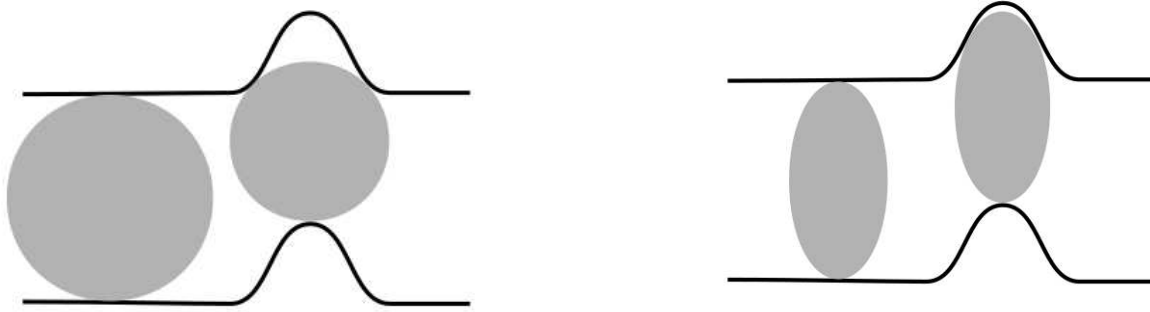


Pointe ronde



Pointe elliptique

Les deux schéma suivants illustrent bien la différence au niveau du pincement :



On peut voir que la pointe elliptique s'adapte beaucoup mieux à la forme du sillon.

Par la suite, on ne s'intéressera qu'à l'extrémité de la pointe : la partie qui entre en contact avec le sillon. Dans le cas de la pointe sphérique, on considérera qu'il s'agit d'une sphère, et dans le cas de la pointe elliptique, d'un ellipsoïde.

## 2) Expression de la pointe sous la forme $z=f(x, y)$

On sait que l'équation d'une sphère de rayon 1, centrée sur l'origine est la suivante :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Pour obtenir un ellipsoïde, ou une sphère de rayon différent, il nous faut déformer cette sphère avec des coefficients, correspondant aux rayons de l'ellipsoïde dans les directions respectives. On note  $x_{\max}$ ,  $y_{\max}$  et  $z_{\max}$  ces coefficients, on abouti donc à cette formule :

$$\left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{z}{z_{\max}}\right)^2 = 1$$

On isole  $z$  :

$$\left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_{\max}}\right)^2 - 1 = -\left(\frac{z}{z_{\max}}\right)^2$$

$$1 - \left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_{\max}}\right)^2 = \left(\frac{z}{z_{\max}}\right)^2$$

$$1 - \left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_{\max}}\right)^2 = \frac{z^2}{z_{\max}^2}$$

$$z_{\max}^2 \left(1 - \left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_{\max}}\right)^2\right) = z^2$$

$$\pm \sqrt{z_{\max}^2 \left(1 - \left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_{\max}}\right)^2\right)} = z$$

$$\pm z_{\max} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_{\max}}\right)^2} = z$$

$$z = \pm z_{\max} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_{\max}^2} - \frac{y^2}{y_{\max}^2}}$$

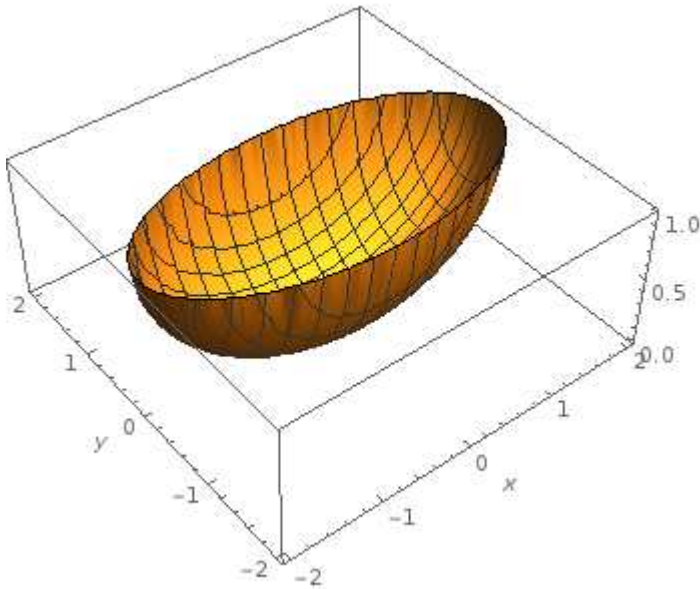
Seule la partie inférieure de la courbe nous intéresse, car c'est la seule capable d'entrer en contact avec le sillon. Comme  $z_{\max} > 0$  et qu'une racine est toujours positive, on sait que tout ce qui se trouve derrière le  $\pm$  est positif, si l'on veut un résultat négatif, on peut donc remplacer le  $\pm$  par un  $-$  :

$$z = -z_{\max} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_{\max}^2} - \frac{y^2}{y_{\max}^2}}$$

On effectue maintenant une translation de manière à ce que l'extrémité de la pointe se trouve en  $(0,0,0)$  : comme on sait que le rayon vertical vaut  $z_{\max}$ , il suffit de rajouter  $z_{\max}$  :

$$z = z_{\max} - z_{\max} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_{\max}^2} - \frac{y^2}{y_{\max}^2}} \quad [1.2.a]$$

Voici une représentation 3D de cette équation, avec  $x_{\max}=1$ ,  $y_{\max}=2$  et  $z_{\max}=1$  :



## II – Expression d'une coupe

NB : dans cette partie, lorsque l'on parle du sillon, on parle en réalité de la moyenne du sillon. Par moyenne du sillon, on entend moyenne du centre du sillon au long du disque. On peut noter que cela correspondrai au centre d'un sillon ne dans lequel on aurait gravé un signal nul.

Nous allons maintenant exprimer l'équation d'une coupe de la pointe.

La manière dont on a exprimé la pointe implique que celle-ci soit centrée en  $(0,0)$ . Le bras est donc représenté par la droite d'équation  $x=0$ , et se termine en  $O(0,0)$ . Le sillon en train d'être lu se passe donc par  $O(0,0)$ . On notera qu'à cette échelle (la pointe fait environ  $20\text{ }\mu\text{m}$ ), le sillon peut être considéré comme étant une droite.

Les coupes que nous allons exprimer seront perpendiculaire au sillon.

On place un point C à l'intersection de la coupe et du sillon.

On place un point  $M(x,y)$  sur la coupe.

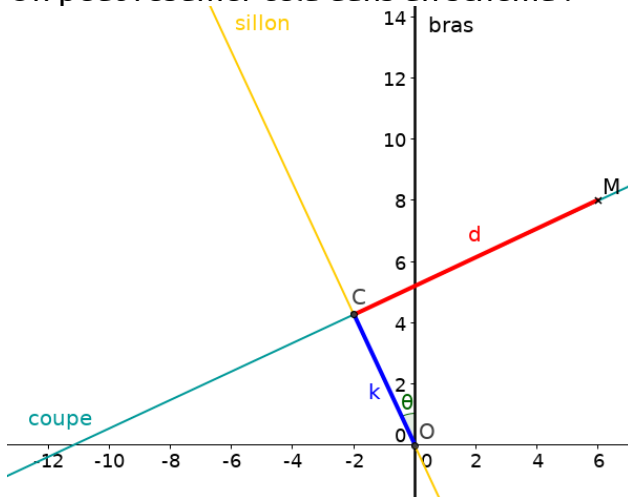
On définit une coupe avec 3 paramètres :

\*  $\theta$ , l'angle entre le sillon et le bras.

\*  $k=\overline{OC}$ , tel que  $\overline{OC}>0$  quand  $y_C>y_O$ .

\*  $d=\overline{CM}$ , tel que  $\overline{CM}>0$  quand  $x>x_C$ .

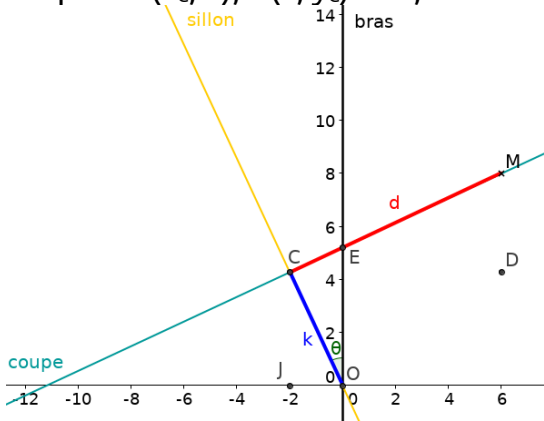
On peut résumer cela dans un schéma :





## 1) Position du centre de la coupe

Nous allons d'abord exprimer les coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $M$  en fonction de  $d$ .  
On pose  $J(x_C, 0)$ ,  $D(x, y_C)$  et  $E$ , l'intersection de la coupe et de l'axe des ordonnées :



Comme  $x_J = x_C$  et  $y_J = y_O$ ,  $OJC$  est rectangle en  $J$ .

On sait que  $x_J = x_C$ , donc  $(CJ)$  est parallèle à l'axe des ordonnées. Donc via les angle alternes-internes, on sait que  $\widehat{OCJ} = \theta$ .

Etant donné que  $OJC$  est rectangle en  $J$ , on peut écrire :

$$x_C = \overline{OJ} = -k \cdot \sin(\theta)$$

$$y_C = \overline{JC} = k \cdot \cos(\theta)$$

## 2) Position du point $M$ par rapport au point $C$

On cherche l'angle  $\widehat{MCD}$  :

On sait que la somme des angles d'un triangle vaut  $180^\circ$ , on a donc :

$$\widehat{EOC} + \widehat{OCE} + \widehat{CEO} = 180^\circ$$

On sait que  $\widehat{EOC} = \theta$  et comme la coupe est perpendiculaire au sillon, on a  $\widehat{OCE} = 90^\circ$ .

$$\text{Donc } \widehat{CEO} = 180^\circ - 90^\circ - \theta = 90^\circ - \theta$$

Comme  $(MD) \parallel (EO)$  et  $(CE) \parallel (CM)$ , on a  $\widehat{CMD} = \widehat{CEO} = 90^\circ - \theta$

On sait que la somme des angles d'un triangle est égale à  $180^\circ$ , donc :

$$\widehat{CMD} + \widehat{MDC} + \widehat{DCM} = 180^\circ$$

Comme  $x_D = x_M$  et  $y_D = y_C$ ,  $CDM$  est rectangle en  $D$ , donc  $\widehat{MDC} = 90^\circ$ .

On sait aussi que  $\widehat{CMD} = 90^\circ - \theta$ .

$$\text{Donc on a } \widehat{MDC} = 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ + \theta = \theta$$

On peut donc écrire :

$$\overline{CD} = d \cdot \cos(\theta)$$

$$\overline{DM} = d \cdot \sin(\theta)$$

## 3) Expression d'une coupe

On peut donc maintenant exprimer les coordonnées de  $M$  :

$$x = x_C + \overline{CD} = d \cdot \cos(\theta) - k \cdot \sin(\theta)$$

$$y = y_C + \overline{DM} = k \cdot \cos(\theta) + d \cdot \sin(\theta)$$

On peut donc reprendre la formule en I.2.a :

$$z = z_{\max} - z_{\max} \cdot \sqrt{1 - \frac{[d \cdot \cos(\theta) - k \cdot \sin(\theta)]^2}{x_{\max}^2} - \frac{[k \cdot \cos(\theta) + d \cdot \sin(\theta)]^2}{y_{\max}^2}} \quad [\text{II.3.a}]$$

### III – Hauteur dans le sillon

NB : Cette partie nécessite des connaissances relatives aux dérivées, voir [Math.3](#).

Pour obtenir la hauteur de la pointe dans le sillon, on va d'abord chercher les points de contact de différentes coupes de la pointe avec le sillon à leur niveau. Comme la coupe est perpendiculaire au sillon, la coupe du sillon se compose d'une pente de -1 puis d'une pente de 1. On sait que la pointe est ovoïdale, les coupes de sa partie inférieure ont donc une pente croissante. Le point de contact se trouve donc à l'endroit où la pente de la coupe de la pointe est égale à 1 et là où elle est égale à -1.

#### 1) Pente de la coupe

Pour obtenir la pente dans une coupe donnée, il nous faut dériver l'expression d'une coupe, en fonction de d.

$$z'(d) = \frac{\delta}{\delta d}(z(d))$$

On reprend [II.3.a](#) :

$$z'(d) = \frac{\delta}{\delta d} \left( z_{\max} - z_{\max} \sqrt{1 - \left( \frac{d \cos(\theta) - k \sin(\theta)}{x_{\max}} \right)^2 - \left( \frac{k \cos(\theta) + d \sin(\theta)}{y_{\max}} \right)^2} \right)$$

On utilise [Math.3.c](#), ce qui nous permet de séparer en une somme de 2 dérivées :

$$z'(d) = \frac{\delta}{\delta d}(z_{\max}) + \frac{\delta}{\delta d} \left( -z_{\max} \sqrt{1 - \frac{(d \cos(\theta) - k \sin(\theta))^2}{x_{\max}^2} - \frac{(k \cos(\theta) + d \sin(\theta))^2}{y_{\max}^2}} \right)$$

Avec [Math.3.b](#) on peut calculer la première dérivée et [Math.3.d](#) nous permet d'extraire le coefficient de la seconde dérivée :

$$z'(d) = 0 - z_{\max} \left( \frac{\delta}{\delta d} \left( \sqrt{1 - \frac{(d \cos(\theta) - k \sin(\theta))^2}{x_{\max}^2} - \frac{(k \cos(\theta) + d \sin(\theta))^2}{y_{\max}^2}} \right) \right)$$

On applique [Math.3.b](#) dans le cas d'une racine carrée, avec de plus [Math.3.g](#) étant donné que le contenu de la racine dépend de d :

$$z'(d) = -z_{\max} \left( \frac{\frac{\delta}{\delta d} \left( 1 - \frac{(d \cos(\theta) - k \sin(\theta))^2}{x_{\max}^2} - \frac{(k \cos(\theta) + d \sin(\theta))^2}{y_{\max}^2} \right)}{2 \sqrt{1 - \frac{(d \cos(\theta) - k \sin(\theta))^2}{x_{\max}^2} - \frac{(k \cos(\theta) + d \sin(\theta))^2}{y_{\max}^2}}} \right)$$

Grace à [Math.3.c](#), on sépare la dérivée en une somme de dérivées. On se sert aussi de [Math.3.e](#) pour les signes négatifs :

$$z'(d) = -z_{\max} \left( \frac{\frac{\delta}{\delta d}(1) - \frac{\delta}{\delta d} \left( \frac{(d \cos(\theta) - k \sin(\theta))^2}{x_{\max}^2} \right) - \frac{\delta}{\delta d} \left( \frac{(k \cos(\theta) + d \sin(\theta))^2}{y_{\max}^2} \right)}{2 \sqrt{1 - \frac{(d \cos(\theta) - k \sin(\theta))^2}{x_{\max}^2} - \frac{(k \cos(\theta) + d \sin(\theta))^2}{y_{\max}^2}}} \right)$$

On utilise Math.3.d, qui comme on divise par des constantes, nous permet de les extraire. On utilise aussi Math.3.b pour calculer la dérivée de 1 :

$$z'(d) = -z_{\max} \left( \frac{0 - \frac{\delta}{\delta d} \left( (d \cos(\theta) - k \sin(\theta))^2 \right) - \frac{\delta}{\delta d} \left( (k \cos(\theta) + d \sin(\theta))^2 \right)}{2 \sqrt{1 - \frac{x_{\max}^2}{x_{\max}^2} - \frac{y_{\max}^2}{y_{\max}^2}}} \right)$$

Par commodité, on note  $C = \cos(\theta)$  et  $S = \sin(\theta)$  :

$$z'(d) = -z_{\max} \left( \frac{0 - \frac{\delta}{\delta d} \left( (d C - k S)^2 \right) - \frac{\delta}{\delta d} \left( (k C + d S)^2 \right)}{2 \sqrt{1 - \frac{x_{\max}^2}{x_{\max}^2} - \frac{y_{\max}^2}{y_{\max}^2}}} \right)$$

On développe :

$$z'(d) = z_{\max} \left( \frac{\frac{\delta}{\delta d} (d^2 C^2 - 2 d k C S + k^2 S^2) + \frac{\delta}{\delta d} (k^2 C^2 + 2 k d C S + d^2 S^2)}{2 \sqrt{1 - \frac{x_{\max}^2}{x_{\max}^2} - \frac{y_{\max}^2}{y_{\max}^2}}} \right)$$

On se sert de Math.3.c pour transformer en une somme :

$$z'(d) = z_{\max} \left( \frac{\frac{\delta}{\delta d} (d^2 C^2) - \frac{\delta}{\delta d} (2 d k C S) + \frac{\delta}{\delta d} (k^2 S^2) + \frac{\delta}{\delta d} (k^2 C^2) + \frac{\delta}{\delta d} (2 k d C S) + \frac{\delta}{\delta d} (d^2 S^2)}{2 \sqrt{1 - \frac{x_{\max}^2}{x_{\max}^2} - \frac{y_{\max}^2}{y_{\max}^2}}} \right)$$

On utilise Math.3.b pour calculer les dérivés des puissances de d ainsi Math.3.h, pour les coefficients qui les précèdent :

$$z'(d) = z_{\max} \left( \frac{\frac{2 C^2 d - 2 k C S + 0}{x_{\max}^2} + \frac{0 + 2 k C S + 2 S^2 d}{y_{\max}^2}}{2 \sqrt{1 - \frac{x_{\max}^2}{x_{\max}^2} - \frac{y_{\max}^2}{y_{\max}^2}}} \right)$$

On réduit :

$$z'(d) = z_{\max} \left( \frac{\frac{2 C^2 d - 2 k C S}{x_{\max}^2} + \frac{2 k C S + 2 S^2 d}{y_{\max}^2}}{2 \sqrt{1 - \frac{x_{\max}^2}{x_{\max}^2} - \frac{y_{\max}^2}{y_{\max}^2}}} \right)$$

On a donc obtenu la pente des coupes de la pointe.

## 2) Points de contact avec le sillon

Nous allons donc maintenant résoudre  $z'(d) = -1$  et  $z'(d) = 1$ .

A]  $z'(d) = 1$

$$1 = z_{\max} \left( \frac{\frac{2C^2d - 2kCS}{x_{\max}^2} + \frac{2kCS + 2S^2d}{y_{\max}^2}}{2\sqrt{1 - \frac{(dC - kS)^2}{x_{\max}^2} - \frac{(kC + dS)^2}{y_{\max}^2}}} \right)$$

$$1 = \frac{z_{\max} \left( \frac{2C^2d - 2kCS}{x_{\max}^2} + \frac{2kCS + 2S^2d}{y_{\max}^2} \right)}{2\sqrt{1 - \frac{(dC - kS)^2}{x_{\max}^2} - \frac{(kC + dS)^2}{y_{\max}^2}}}$$

$$1^2 = \left( \frac{z_{\max} \left( \frac{2C^2d - 2kCS}{x_{\max}^2} + \frac{2kCS + 2S^2d}{y_{\max}^2} \right)}{2\sqrt{1 - \frac{(dC - kS)^2}{x_{\max}^2} - \frac{(kC + dS)^2}{y_{\max}^2}}} \right)^2$$

NB : Les solutions de cette nouvelle équation ne seront pas toutes valables, car :  
 $a=b \Rightarrow a^2=b^2$  et non  $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$  Ce problème sera réglé plus tard.

$$1 = \frac{\left( z_{\max} \left( \frac{2C^2d - 2kCS}{x_{\max}^2} + \frac{2kCS + 2S^2d}{y_{\max}^2} \right) \right)^2}{\left( 2\sqrt{1 - \frac{(dC - kS)^2}{x_{\max}^2} - \frac{(kC + dS)^2}{y_{\max}^2}} \right)^2} \quad [\text{III.2.A.a}]$$

Comme la racine carrée n'est définie que pour les nombres positifs, on a :

$$1 = \frac{z_{\max}^2 \left( \frac{2C^2d - 2kCS}{x_{\max}^2} + \frac{2kCS + 2S^2d}{y_{\max}^2} \right)^2}{4 \left( 1 - \frac{(dC - kS)^2}{x_{\max}^2} - \frac{(kC + dS)^2}{y_{\max}^2} \right)} \quad \text{pour } 1 - \frac{(dC - kS)^2}{x_{\max}^2} - \frac{(kC + dS)^2}{y_{\max}^2} \geq 0$$

$$4 \left( 1 - \frac{(dC - kS)^2}{x_{\max}^2} - \frac{(kC + dS)^2}{y_{\max}^2} \right) = z_{\max}^2 \left( \frac{2C^2d - 2kCS}{x_{\max}^2} + \frac{2kCS + 2S^2d}{y_{\max}^2} \right)^2$$

On développe :

$$4 \left( 1 - \frac{(d^2C^2 - 2dkCS + k^2S^2)}{x_{\max}^2} - \frac{(k^2C^2 + 2dkCS + d^2S^2)}{y_{\max}^2} \right)$$

$$= z_{\max}^2 \left[ \left( \frac{2C^2d - 2kCS}{x_{\max}^2} \right)^2 + \left( \frac{2kCS + 2S^2d}{y_{\max}^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{2C^2d - 2kCS}{x_{\max}^2} \right) \left( \frac{2kCS + 2S^2d}{y_{\max}^2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& 4 - \frac{4(d^2 C^2 - 2dkCS + k^2 S^2)}{x_{\max}^2} - \frac{4(k^2 C^2 + 2dkCS + d^2 S^2)}{y_{\max}^2} \\
&= z_{\max}^2 \left( \frac{(2C^2 d - 2kCS)^2}{x_{\max}^4} + \frac{(2kCS + 2S^2 d)^2}{y_{\max}^4} + \frac{8(C^2 d - kCS)(kCS + S^2 d)}{x_{\max}^2 \cdot y_{\max}^2} \right) \\
& 4 - \frac{4d^2 C^2 - 8dkCS + 4k^2 S^2}{x_{\max}^2} - \frac{4k^2 C^2 + 8dkCS + 4d^2 S^2}{y_{\max}^2} \\
&= \frac{z_{\max}^2 (2C^2 d - 2kCS)^2}{x_{\max}^4} + \frac{z_{\max}^2 (2kCS + 2S^2 d)^2}{y_{\max}^4} + \frac{8z_{\max}^2 (C^2 d - kCS)(kCS + S^2 d)}{x_{\max}^2 \cdot y_{\max}^2} \\
& 4 - \frac{4d^2 C^2}{x_{\max}^2} + \frac{8dkCS}{x_{\max}^2} - \frac{4k^2 S^2}{x_{\max}^2} - \frac{4k^2 C^2}{y_{\max}^2} - \frac{8dkCS}{y_{\max}^2} - \frac{4d^2 S^2}{y_{\max}^2} \\
&= \frac{z_{\max}^2 [(2C^2 d)^2 - 2(2C^2 d)(2kCS) + (2kCS)^2]}{x_{\max}^4} \\
&+ \frac{z_{\max}^2 [(2kCS)^2 + 2(2kCS)(2S^2 d) + (2S^2 d)^2]}{y_{\max}^4} \\
&+ \frac{8z_{\max}^2 [(C^2 d)(kCS) + (C^2 d)(S^2 d) - (kCS)(kCS) - (kCS)(S^2 d)]}{x_{\max}^2 \cdot y_{\max}^2} \\
& 4 - \frac{4C^2}{x_{\max}^2} d^2 + \frac{8kCS}{x_{\max}^2} d - \frac{4k^2 S^2}{x_{\max}^2} - \frac{4k^2 C^2}{y_{\max}^2} - \frac{8kCS}{y_{\max}^2} d - \frac{4S^2}{y_{\max}^2} d^2 \\
&= \frac{4z_{\max}^2 d^2 C^4 - 8z_{\max}^2 dkC^3 S + 4z_{\max}^2 k^2 C^2 S^2}{x_{\max}^4} \\
&+ \frac{4z_{\max}^2 k^2 C^2 S^2 + 8z_{\max}^2 dkCS^3 + 4z_{\max}^2 d^2 S^4}{y_{\max}^4} \\
&+ \frac{8z_{\max}^2 dkC^3 S + 8z_{\max}^2 d^2 C^2 S^2 - 8z_{\max}^2 k^2 C^2 S^2 - 8z_{\max}^2 dkCS^3}{x_{\max}^2 \cdot y_{\max}^2} \\
& 4 - \frac{4C^2}{x_{\max}^2} d^2 + \frac{8kCS}{x_{\max}^2} d - \frac{4k^2 S^2}{x_{\max}^2} - \frac{4k^2 C^2}{y_{\max}^2} - \frac{8kCS}{y_{\max}^2} d - \frac{4S^2}{y_{\max}^2} d^2 \\
&= \frac{4z_{\max}^2 C^4}{x_{\max}^4} d^2 - \frac{8z_{\max}^2 kC^3 S}{x_{\max}^4} d + \frac{4z_{\max}^2 k^2 C^2 S^2}{x_{\max}^4} + \frac{4z_{\max}^2 S^4}{y_{\max}^4} d^2 + \frac{8z_{\max}^2 kCS^3}{y_{\max}^4} d + \frac{4z_{\max}^2 k^2 C^2 S^2}{y_{\max}^4} \\
&+ \frac{8z_{\max}^2 C^2 S^2}{x_{\max}^2 \cdot y_{\max}^2} d^2 + \frac{8z_{\max}^2 kC^3 S - 8z_{\max}^2 kCS^3}{x_{\max}^2 \cdot y_{\max}^2} d - \frac{8z_{\max}^2 k^2 C^2 S^2}{x_{\max}^2 \cdot y_{\max}^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4C^2}{x_{\max}^2}d^2 - \frac{4S^2}{y_{\max}^2}d^2 + \frac{8kCS}{x_{\max}^2}d - \frac{8kCS}{y_{\max}^2}d - \frac{4k^2S^2}{x_{\max}^2} - \frac{4k^2C^2}{y_{\max}^2} + 4 \\
& = \frac{4z_{\max}^2C^4}{x_{\max}^4}d^2 + \frac{4z_{\max}^2S^4}{y_{\max}^4}d^2 + \frac{8z_{\max}^2C^2S^2}{x_{\max}^2 \cdot y_{\max}^2}d^2 \\
& - \frac{8z_{\max}^2kC^3S}{x_{\max}^4}d + \frac{8z_{\max}^2kCS^3}{y_{\max}^4}d + \frac{8z_{\max}^2kC^3S - 8z_{\max}^2kCS^3}{x_{\max}^2 \cdot y_{\max}^2}d \\
& + \frac{4z_{\max}^2k^2C^2S^2}{x_{\max}^4} + \frac{4z_{\max}^2k^2C^2S^2}{y_{\max}^4} - \frac{8z_{\max}^2k^2C^2S^2}{x_{\max}^2 \cdot y_{\max}^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4\left(\frac{C^2}{x_{\max}^2} + \frac{S^2}{y_{\max}^2}\right)d^2 + 8kCS\left(\frac{1}{x_{\max}^2} - \frac{1}{y_{\max}^2}\right)d - 4k^2\left(\frac{S^2}{x_{\max}^2} + \frac{C^2}{y_{\max}^2}\right) + 4 \\
& = 4z_{\max}^2\left(\frac{C^2}{x_{\max}^2} + \frac{S^2}{y_{\max}^2}\right)^2d^2 \\
& + 8z_{\max}^2kCS\left(\frac{S^2}{y_{\max}^4} - \frac{C^2}{x_{\max}^4} + \frac{C^2 - S^2}{x_{\max}^2 \cdot y_{\max}^2}\right)d \\
& + 4z_{\max}^2k^2C^2S^2\left(\frac{1}{x_{\max}^2} - \frac{1}{y_{\max}^2}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 & = \left[ 4z_{\max}^2\left(\frac{C^2}{x_{\max}^2} + \frac{S^2}{y_{\max}^2}\right)^2 + 4\left(\frac{C^2}{x_{\max}^2} + \frac{S^2}{y_{\max}^2}\right) \right] d^2 \\
& + \left[ 8z_{\max}^2kCS\left(\frac{S^2}{y_{\max}^4} - \frac{C^2}{x_{\max}^4} + \frac{C^2 - S^2}{x_{\max}^2 \cdot y_{\max}^2}\right) - 8kCS\left(\frac{1}{x_{\max}^2} - \frac{1}{y_{\max}^2}\right) \right] d \quad \text{[III.2.A.b]} \\
& + 4z_{\max}^2k^2C^2S^2\left(\frac{1}{x_{\max}^2} - \frac{1}{y_{\max}^2}\right)^2 + 4k^2\left(\frac{S^2}{x_{\max}^2} + \frac{C^2}{y_{\max}^2}\right) - 4
\end{aligned}$$

$$B] z'(d)=-1$$

$$-1 = z_{\max} \left( \frac{\frac{2C^2d - 2kCS}{x_{\max}^2} + \frac{2kCS + 2S^2d}{y_{\max}^2}}{2\sqrt{1 - \frac{(dC - kS)^2}{x_{\max}^2} - \frac{(kC + dS)^2}{y_{\max}^2}}} \right)$$

$$(-1)^2 = \left( \frac{z_{\max} \left( \frac{2C^2d - 2kCS}{x_{\max}^2} + \frac{2kCS + 2S^2d}{y_{\max}^2} \right)}{2\sqrt{1 - \frac{(dC - kS)^2}{x_{\max}^2} - \frac{(kC + dS)^2}{y_{\max}^2}}} \right)^2$$

On obtient donc la même équation qu'en III.2.A.a.

Or :  $a^2=b^2 \Leftrightarrow a=b \vee -a=b$  donc toutes les solutions de l'équation en III.2.A.b sont valables.

## C] Resolution

On reprend III.2.A.b :

On pose :

$$* a = 4 z_{\max}^2 \left( \frac{C^2}{x_{\max}^2} + \frac{S^2}{y_{\max}^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{C^2}{x_{\max}^2} + \frac{S^2}{y_{\max}^2} \right)$$

$$* b = 8 z_{\max}^2 k C S \left( \frac{S^2}{y_{\max}^4} - \frac{C^2}{x_{\max}^4} + \frac{C^2 - S^2}{x_{\max}^2 \cdot y_{\max}^2} \right) - 8 k C S \left( \frac{1}{x_{\max}^2} - \frac{1}{y_{\max}^2} \right)$$

$$* c = 4 z_{\max}^2 k^2 C^2 S^2 \left( \frac{1}{x_{\max}^2} - \frac{1}{y_{\max}^2} \right)^2 + 4 k^2 \left( \frac{S^2}{x_{\max}^2} + \frac{C^2}{y_{\max}^2} \right) - 4$$

On a donc  $a x^2 + b x + c = 0$

On calcule les racines :

$$\Delta = b^2 - 4 a c$$

$$d_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 a} \text{ et } d_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 a}$$

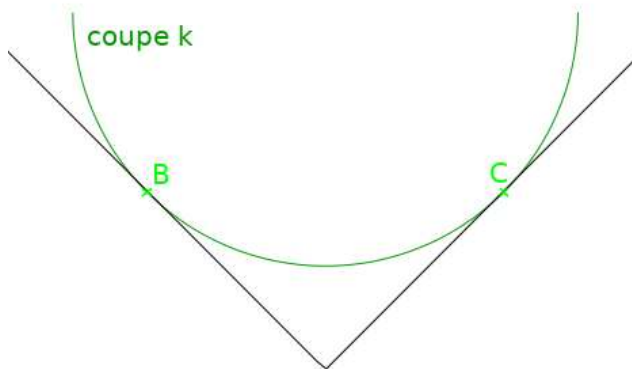
On sait que la pente de la coupe est croissante, la pente de -1 est donc rencontrée avant celle de 1.

On veut que  $d_1$  corresponde a la pente de -1 et  $d_2$  a la pente de 1. Donc si  $d_1 > d_2$  on les intervertit.

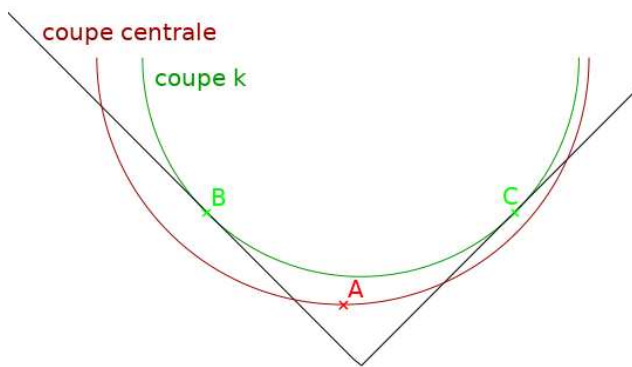


### 3) Hauteur dans le sillon

On peut schématiser une coupe k ainsi :



Avec en horizontal  $d$ , et en vertical  $z$ .  
Le point B se trouve en  $(d_1, z(d_1))$  et le point C en  $(d_2, z(d_2))$ .



On ajoute au schéma la coupe centrale, comprenant le point  $A(0,0)$ , le bout de la pointe. On souhaite calculer la distance horizontale en  $d$  qui sépare A des deux coté du sillon au niveau de la coupe k.

On pose  $B'(0, y_B)$

On peut calculer  $AB'$  : cela vaut  $|y_B|$  car A est à l'origine du repère. de plus comme tous les points d'une coupe sont positifs ou nuls on peut écrire  $AB' = y_B$ .

On pose  $B''(x_B + AB', y_B - AB')$ .

Si l'on part d'un point d'une droite de coefficient directeur -1, et que l'on se décale autant vers la droite que vers le bas, on reste sur la droite. Donc  $B''$  est sur le coté gauche du sillon.

On peut simplifier l'expression de  $B''$  car on connaît  $AB'$  :  $B''(x_B + y_B, 0)$ .

Donc  $AB''$  est la distance algébrique qui sépare horizontalement le coté gauche du sillon du point A.

$$AB'' = x_B + y_B = d_1 + z(d_1)$$

On souhaiterait plutôt avoir la distance algébrique entre le sillon et l'extrémité de la pointe, soit  $B''A = -d_1 - z(d_1)$

On note  $l_k$  cette distance algébrique.

On procède de même pour l'autre coté :

On pose  $C'(0, y_C)$

On peut calculer  $AC'$  : cela vaut  $|y_C|$  car A est à l'origine du repère. de plus comme tout les points d'une coupe sont positifs ou nuls on peut écrire  $AC' = y_C$ .

On pose  $C''(x_C - AC', y_C - AC')$ .

Si l'on part d'un point d'une droite de coefficient directeur 1, et que l'on se décale autant vers la gauche que vers le bas, on reste sur la droite. Donc  $C''$  est sur le coté droit du sillon.

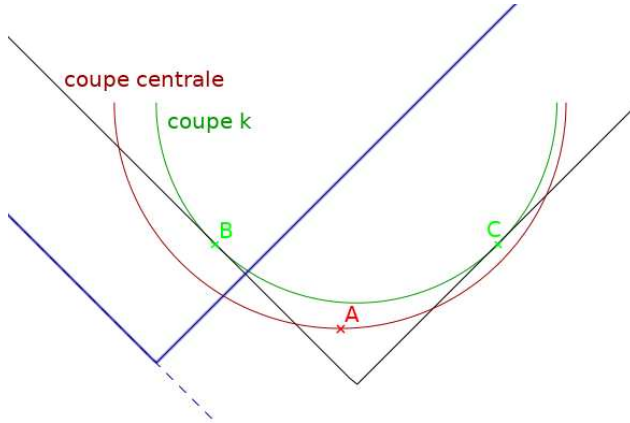
On peut simplifier l'expression de  $C''$  :  $C''(x_C - y_C, 0)$ .

Donc  $\overline{AC''}$  est la distance algébrique qui sépare horizontalement le coté droit du sillon du point A.

$$\overline{AC''} = x_C - y_C = d_2 - z(d_2)$$

On souhaiterait plutôt avoir la distance algébrique entre le sillon et l'extrémité de la pointe, soit  $\overline{C''A} = z(d_2) - d_2$

On note  $r_k$  cette distance algébrique.



On ajoute le sillon de la coupe centrale au schéma. On le définit comme ayant un bord gauche à une distance algébrique horizontale de  $\Delta l_k$  par rapport au bord gauche du sillon de la coupe k et un bord droit à une distance algébrique horizontale de  $\Delta r_k$  par rapport au bord droit du sillon de la coupe k.

La distance algébrique horizontale entre le point A et le bord gauche du sillon de la coupe centrale vaut donc  $L_k = l_k - \Delta l_k$ .

Et celle avec le bord droit du sillon de la coupe centrale vaut donc  $R_k = r_k - \Delta r_k$ .

On sait donc que si la pointe ne repose sur le sillon que dans une coupe k donnée, alors le bout de la pointe se trouve au minimum à une distance algébrique horizontale  $L_k$  du bord gauche du sillon à son niveau (car sinon, la pointe se trouverait à l'intérieur du disque au niveau de la section k) de même elle se trouve à une distance algébrique horizontale  $R_k$  du bord droit du sillon à son niveau (car sinon, la pointe se trouverait à l'intérieur du disque au niveau de la section k)

La position réelle de la pointe par rapport au sillon au niveau du centre de la pointe peut donc être trouvée en prenant la plus grande de tout les  $L_k$  que l'on peut calculer et la valeur la plus petite de tout les  $R_k$  que l'on peut calculer.

Pour avoir la valeur lue, il nous suffit d'ajouter à ces deux valeurs la position du bord gauche et du bord droit au niveau du bout de la pointe.

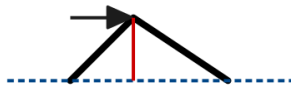
On notera cependant que cette "valeur lue" est décalée d'un facteur constant : en effet, on a calculé nos distances par rapport à l'extrémité de la pointe, et non par rapport au points de contact lorsque le sillon est rectiligne. Cela n'a malgré tout pas d'importance : le signal sera recentré par la suite.

NB : On notera que pour que ce système de coupe donne des résultats convenables, il faut échantillonner à très haute fréquence, comme par exemple à 176400 Hz. On peut cependant se servir d'un fichier normal et sur-échantillonner via un logiciel comme par exemple Audacity.

# Erreur de trajectoire

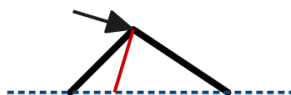
## Introduction

Lors de la lecture d'un disque vinyle, le bras n'est pas toujours parallèle au sillon. Cela occasionne une légère modification du signal. En effet selon qu'un point du sillon se trouve d'un côté ou de l'autre de la moyenne du sillon, il sera vu en avance ou en retard, comme illustré sur ce schéma :



Le trait en pointillé bleu représente la moyenne du sillon.  
Le trait noir représente le parcours de la pointe de lecture.  
La flèche représente la pointe de lecture.

La longueur rouge correspond à la valeur lue par la pointe.  
L'intersection entre le trait rouge correspond à la position où se serait trouvé au même instant si le sillon avait une amplitude nulle. Cela correspond donc à la où l'on croit que la pointe se trouve au niveau de son avancement dans le sillon.



Sur la deuxième image, on voit donc que pour la même forme de sillon, elle lit une valeur plus grande, et la lit en avance (car si elle était parallèle à la moyenne du sillon, elle se serait trouvée au dessus de l'intersection des traits bleus et rouges).

Cependant, on notera que l'angle entre le bras et le sillon est relativement faible (avec un maximum de  $4^\circ$ ), ce qui implique un faible effet.

On va tout d'abord calculer l'angle entre la tête de lecture et le sillon.

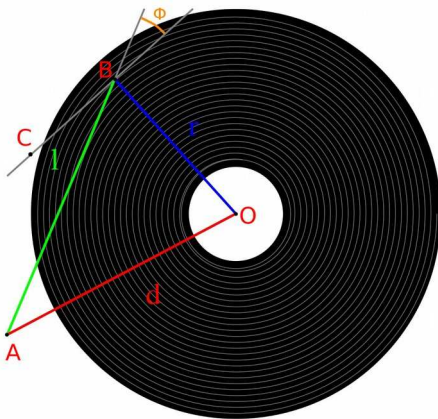
Puis on calculera l'effet de l'erreur de trajectoire, cependant, comme on va le voir, cette erreur occasionne aussi un décalage temporel non constant. Cela a pour effet de faire fluctuer l'écart temporel entre deux échantillons. Nous devons donc procéder à un ré-échantillonnage avant de passer à l'étape suivante.

# I – Erreur

## 1) Angle de lecture en fonction du rayon

NB : Cette sous-partie est une simple réécriture, d'une partie du document ci dessous, dont on a développé les parties implicites :

{Source et méthode : <http://jeanluc.rigal.free.fr/files/principe-disque-vinyl.pdf>}



{même source}

Le schéma ci contre montre un tourne disque, avec :

- En noir, le disque
- En vert, l, la longueur du bras (on remarquera qu'un bras de tourne disque n'est cependant pas rectiligne, ce que nous prendrons en compte plus tard)
- En rouge, d, la distance entre le pivot du bras et le centre du disque.
- En bleu, le rayon du sillon en train d'être lu.

On notera aussi que :

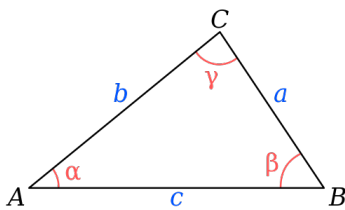
- Le pivot du bras se trouve en A.
- La tête de lecture se trouve en B
- Le point C se trouve sur la droite tangente au sillon au niveau du point en train d'être lu.
- Le centre du disque se trouve en O.

La méthode proposée par ce document consiste a utiliser le théorème d'Al-Kashi, qui permet de faire correspondre les angles et les distances dans un triangle quelconque.

Le document nous dit aboutir a la formule suivante :  $\sin(\Phi) = \frac{r}{2l} + \frac{l^2 - d^2}{2lr}$ .

Nous allons montrer que cela est vrai.

On va utiliser le théorème d'Al-Kashi, aussi appelé loi des cosinus :



Dans un triangle avec les notations ci-contre, le théorème d'Al-Kashi nous donne  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$

{Source : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi\\_des\\_cosinus#%C3%89nonc%C3%A9](https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_des_cosinus#%C3%89nonc%C3%A9)}

On applique donc le théorème dans notre figure :

$$d^2 = r^2 + l^2 - 2rl \cos(\widehat{ABO})$$

$$d^2 - r^2 - l^2 = -2rl \cos(\widehat{ABO})$$

$$\frac{r^2 + l^2 - d^2}{2rl} = \cos(\widehat{ABO})$$

$$\widehat{ABO} = \arccos\left(\frac{r^2 + l^2 - d^2}{2rl}\right)$$

On sait que  $\widehat{CBA} + \widehat{ABO} = \widehat{CBO} = 90^\circ$ , on a donc :

$$\widehat{CBA} + \widehat{ABO} = 90^\circ$$

$$\widehat{CBA} = 90^\circ - \widehat{ABO}$$

Comme  $\widehat{CBA}$  et  $\Phi$  sont opposés, on a  $\Phi = \widehat{CBA}$ , donc :

$$\Phi = 90^\circ - \arccos\left(\frac{r^2 + l^2 - d^2}{2rl}\right)$$

On sait que  $90^\circ - \arccos(x) = \arcsin(x)$ , on peut donc finalement écrire :

$$\Phi = \arcsin\left(\frac{r^2 + l^2 - d^2}{2rl}\right)$$

Ce qui peut se simplifier en la formule proposée par le document.

On a donc l'angle  $\Phi$ , angle entre le bras si il était rectiligne et le sillon.

Comme le bras n'est pas rectiligne, la tête de lecture n'est pas parallèle a celui ci.

L'angle entre la tête de lecture et le sillon est donc égal a l'angle entre le bras considéré de façon rectiligne et le sillon, angle auquel on retire  $\alpha$ , l'angle entre le bras considéré comme rectiligne et la tête de lecture. On note  $\theta$  l'angle entre la tête de lecture et le sillon. On a donc :

$$\theta = \Phi - \alpha$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{r^2 + l^2 - d^2}{2rl}\right) - \alpha$$

## 2) Modification de la position spatio-temporelle lue

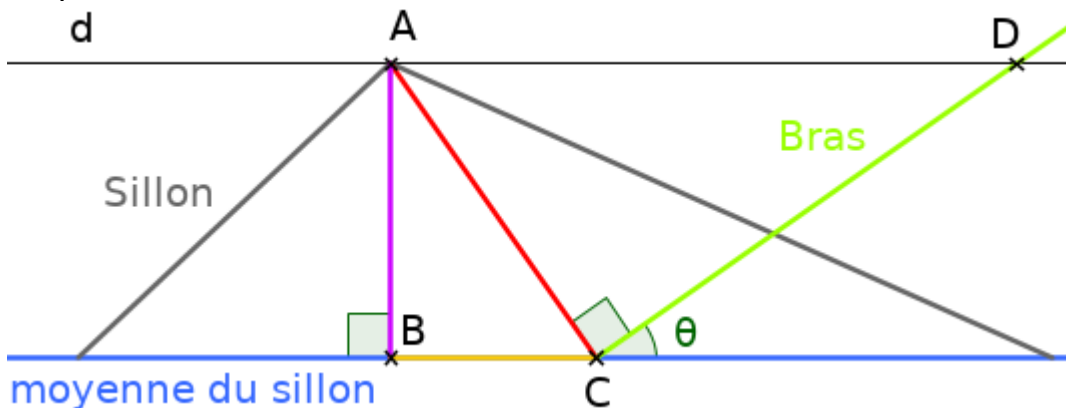
NB : dans cette partie, toutes les distances sont signées, cependant, pour des question de lisibilité, aucune d'elles ne porte le symbole "distance algébrique".

Pour calculer l'erreur produite par l'erreur de trajectoire, nous allons calculer les valeurs lues par la tête de lecture en partant de la position gravé dans le sillon.

La pointe de lecture est libre de se déplacer seulement perpendiculairement au bras. La valeur "lue" par la tête de lecture correspond à la distance entre son centre et celui de la pointe de lecture.

On remarquera que cet effet ne modifie pas la valeur verticale lue, et n'impacte que la valeur horizontale. L'effet sur les cellules stéréo est donc le même que sur les cellules mono, il faudra cependant d'abord convertir les valeurs des 2 canaux en une valeur verticale et une autre latérale.

On peut schématiser la situation comme ci-dessous :



On notera que :

- L'angle  $\theta$  correspond à l'angle entre la moyenne du sillon et le bras.
- Le centre de la pointe de lecture se trouve en A.
- Le "sillon" représenté correspond en réalité au trajet de la pointe de lecture.
- La distance en violet est la distance entre le point en train d'être lu et la moyenne du sillon, donc la valeur qui devrait normalement être lue.
- La distance en rouge est la valeur latérale lue par la tête de lecture.
- Le point C correspond à l'emplacement du centre de la tête de lecture.
- La distance jaune représente l'écart temporel entre ce qui est gravé sur le disque et ce qui est lu : en effet, le point A aurait normalement dû être lu lorsque la tête de lecture se serait trouvé en B.

Nous allons calculer les distances rouge et jaune, puis convertir cette dernière en temps.

On calcule d'abord l'angle  $\widehat{BAC}$  :

On se sert pour cela de la droite  $d$ , parallèle à la moyenne du sillon, et du point D, intersection entre la droite du bras et la droite  $d$ .

Comme  $d$  est parallèle à la moyenne du sillon, on peut utiliser le théorème des angles alternes-internes et écrire :  $\widehat{ADC} = \theta$ .

Comme la somme des angles d'un rectangle vaut  $180^\circ$ , on peut écrire :

$$\widehat{ADC} + \widehat{DCA} + \widehat{CAD} = 180^\circ$$

$$\theta + 90^\circ + \widehat{CAD} = 180^\circ$$

$$\widehat{CAD} = 180^\circ - \theta - 90^\circ$$

$$\widehat{CAD} = 90^\circ - \theta$$

On sait que  $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD}$ . Comme d est parallèle a la moyenne du sillon, et comme celle-ci est perpendiculaire a  $[AB]$ , alors on sait que  $d \perp [AB]$  donc  $\widehat{BAD} = 90^\circ$ , on peut donc écrire :

$$\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD}$$

$$90^\circ = \widehat{BAC} + 90^\circ - \theta$$

$$\widehat{BAC} = 90^\circ - 90^\circ + \theta$$

$$\widehat{BAC} = \theta$$

On va donc maintenant calculer AC :

Comme ABC est rectangle en B, on a :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{1}{AC} = \frac{\cos(\theta)}{AB}$$

$$AC = \frac{AB}{\cos(\theta)}$$

Nous allons maintenant calculer BC :

De même que pour calculer AC, on utilise les formules de trigonométrie :

$$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AC}$$

$$BC = AC \cdot \sin(\theta)$$

$$BC = \frac{AB}{\cos(\theta)} \cdot \sin(\theta)$$

Comme  $\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$ , on peut écrire :

$$BC = AB \cdot \tan(\theta)$$

Il ne reste donc plus qu'à convertir cette distance en temps, avec v la vitesse de déplacement de la pointe, relativement au sillon :

$$\Delta t = \frac{BC}{v}$$

## II – Ré-échantillonnage

Suite a l'application de la modification, les échantillons ne sont plus espacés régulièrement. On va donc procéder à un ré-échantillonnage pour obtenir a nouveau un signal échantillonné à la fréquence initiale (usuellement 44,1 kHz).

Pour replacer un échantillon correctement, on se sert des deux échantillons voisins.

On note A, B, et C des échantillons consécutifs placés irrégulièrement dans le temps, on veut obtenir l'échantillon correspondant au B, mais replacé dans la fréquence d'échantillonnage initiale. L'abscisse de ces points correspond a leur position dans le temps, et leur ordonnée a leur valeur.

On se place dans un référentiel tel que l'axe des ordonnées corresponde a l'endroit ou l'on veut placer le nouvel échantillon, I.

Comme l'erreur maximale d'angle ( $\approx 4^\circ$ ) est inférieure a la pente maximale pouvant être gravée sur le disque ( $45^\circ$ ), on sait que les échantillons A et C se trouvent respectivement de part et d'autre de l'axe des ordonnés.

Pour calculer l'abscisse des points A, B et C dans ce repère, il suffit de prendre leur position une fois ré-échantillonnés, et d'y rajouter leurs  $\Delta t$  respectifs. Ainsi si l'on échantillonne a une fréquence  $f_s$ , les échantillons sont placés tout les  $\frac{1}{f_s}$  on a donc :

$$* x_A = -\frac{1}{f_s} + \Delta t_A$$

$$* x_B = \Delta t_B$$

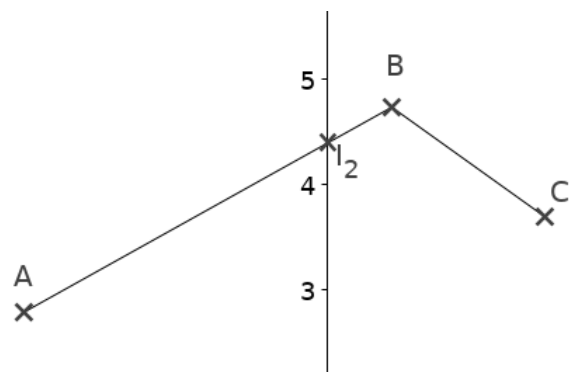
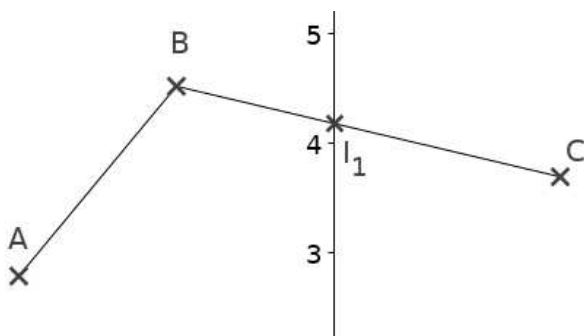
$$* x_C = \frac{1}{f_s} + \Delta t_C$$

Leur ordonné est égale aux valeurs de AC calculées dans la partie précédente.

On utilisera aussi la même méthode pour ré-échantillonner les hauteurs, donc dans ce second temps, les ordonnés seront égales a la profondeur.

On trace les segments reliant les 3 points dans l'ordre, le point d'intersection entre les segments et l'axe des ordonnés correspond a la valeur de l'échantillon remplacé.

Il existe 2 possibilités : ou bien B se trouve a gauche de l'axe des ordonnés, ou bien il se trouve a droite :





Si  $x_B < 0$  il nous faut donc calculer l'ordonnée à l'origine de la droite passant par B et C, sinon, celle de la droite passant par B et A.

On va d'abord exprimer l'ordonnée à l'origine d'une droite d'expression  $y = ax + b$  :

$$y = ax + b$$

$$b = y - ax$$

$$b = y - ax$$

Il nous faut donc calculer le coefficient directeur. On connaît la formule pour trouver le coefficient directeur à partir de 2 points :

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

On peut donc remplacer a par cette formule dans l'expression de b :

$$b = y_B - \frac{y_B - y_N}{x_B - x_N} x_B$$

Si  $x_B < 0$ , alors on remplace N par C, sinon, on remplace N par B.

# Résultats

## Introduction

Nous allons maintenant pouvoir lancer le programme sur des fichiers audio. Le programme est à chaque fois adapté pour "graver" le morceau au bon endroit. Pour cela, on modifie la valeur du rayon maximum du disque.

Pour chaque fichier, on affiche le spectre de la version sur-échantillonnée à 176400 Hz, mais les fichiers correspondants ont été ré-échantillonnés à 44100 Hz, pour des questions de taille de fichiers.

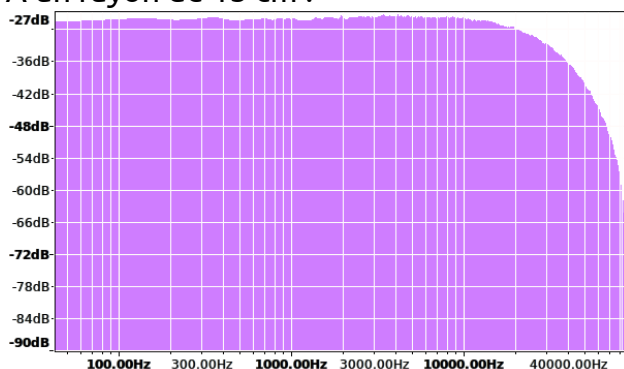
## Simulation sur du bruit blanc

Le bruit blanc est un bruit aléatoire composé de toutes les fréquences possibles, toutes à la même amplitude.

Voici le spectre d'un bruit blanc, tel que simulé par le programme :

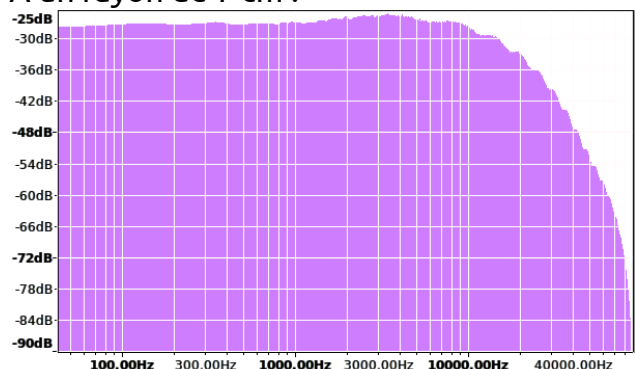
NB : Les valeurs en dB ne sont pas réellement significatives : en effet avant d'être écrites dans le fichier .wav, toutes les valeurs sont normalisées. Il arrive donc qu'il y ait des différences de gain entre 2 fichiers.

A un rayon de 15 cm :



Ici, on voit que dans les fréquences audibles (20 Hz – 20kHz), il n'y a pratiquement aucune différence.

A un rayon de 7 cm :

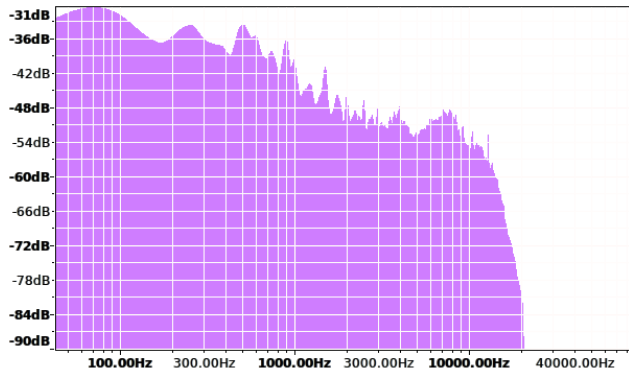


Lorsque l'on se trouve plus à l'intérieur du disque, on remarque qu'une baisse d'amplitude commence à 10 kHz et qu'elle est largement audible à 20 kHz : de l'ordre de -6 dB.

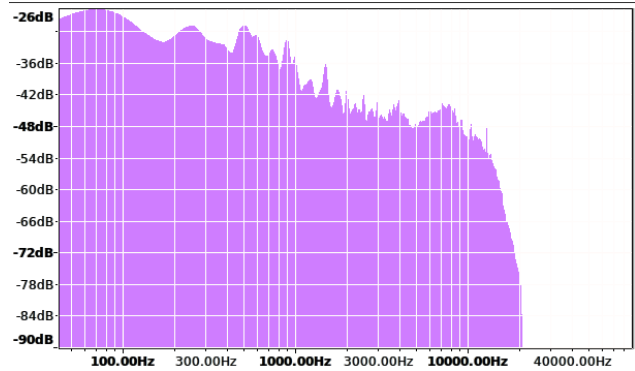
# Comparaison fichier digital original et simulation

A droite, on a le spectre des fichiers digitaux classiques, a gauche celui des version simulées :

– Envoie moi, Jean-Jaques Goldman, rayon=15 cm :



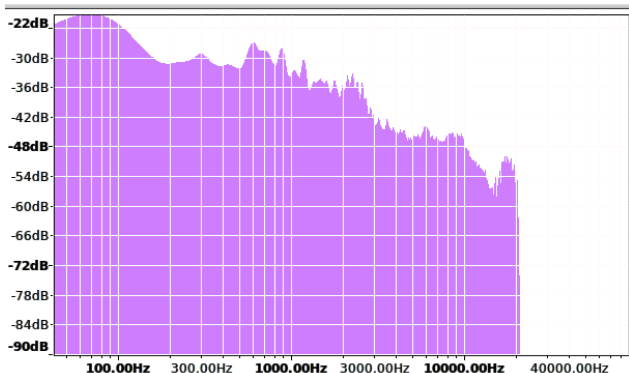
envmoi.wav



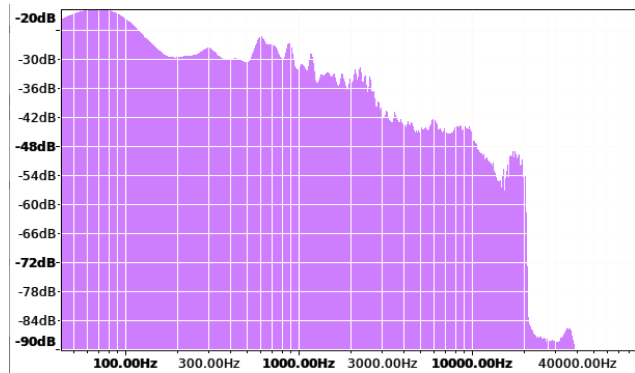
envmoi-simu.wav

Sur ce morceau, situé a l'extérieur du disque, on remarque qu'aucune différence n'apparaît après la simulation.

– Plus fort, Jean-Jaques Goldman, rayon=10 cm :



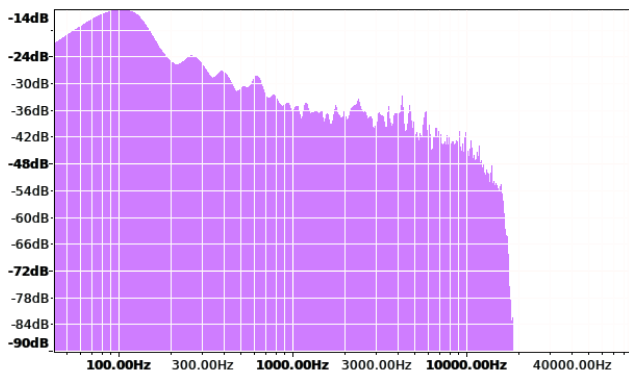
plus.wav



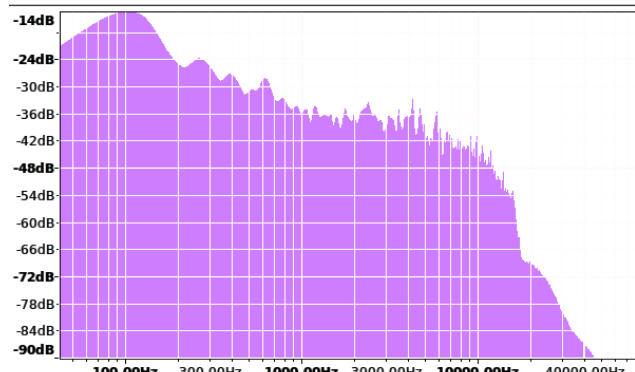
plus-simu.wav

Il existe pas de différence audible au niveau du spectre, on voit surtout un petit pic dans les aigus inaudibles.

– introduction de *Eye of the tiger*, Survivor, rayon=7cm :



eyec.wav



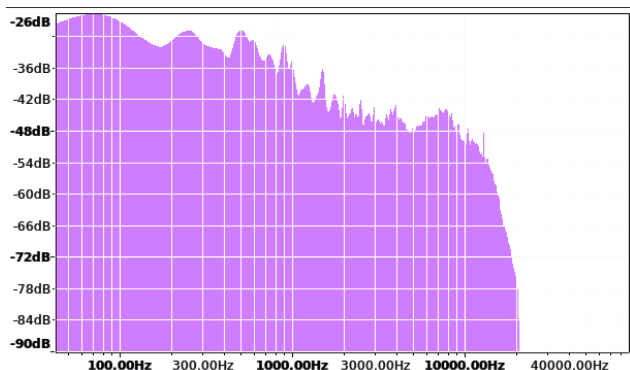
eyec-simu.wav

Toujours des changement dans les aigus inaudibles, rien ne semble être modifié dans la partie audible.

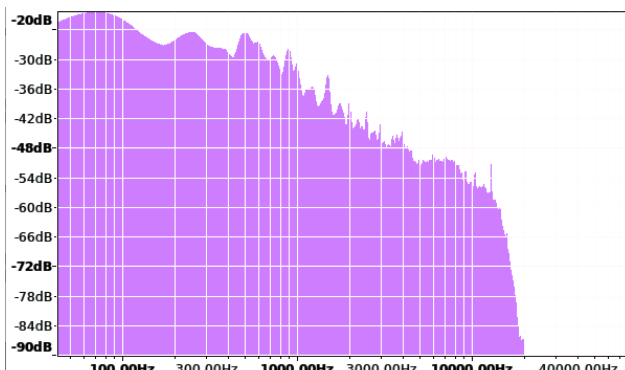
# Comparaisons avec des enregistrement de vinyles

Les seuls titres dont nous avons à la fois des version CD et des version vinyle, sont des titres de Jean-Jaques Goldman, ce sont donc eux qui seront utilisés pour comparer :

– *Envole moi*, Jean-Jaques Goldman, rayon=15 cm :



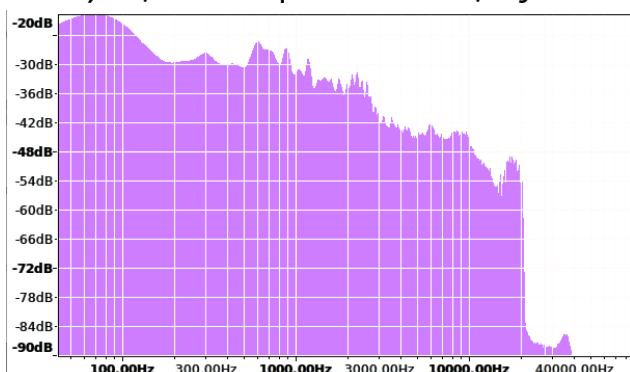
evmoi-simu.wav



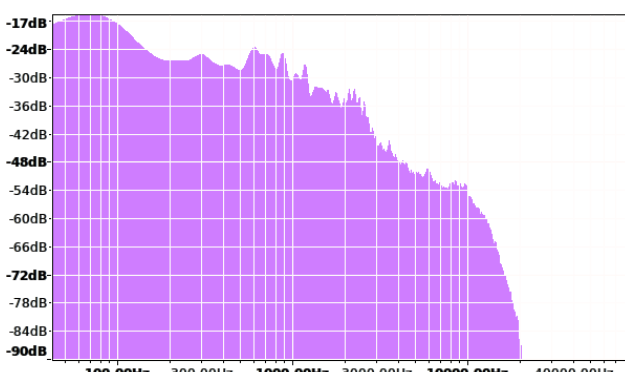
evmoi-enrg.wav

On voit nettement la différence entre la simulation et la version enregistré du vinyle.

– *Plus fort*, Jean-Jaques Goldman, rayon=10 cm :



plus-simu.wav



plus-enrg.wav

De même, la différence est flagrante.

# Conclusion

D'après nos tests, les fichiers simulés sont pratiquement identiques aux fichiers desquels ils sont tirés, mais différents pourtant énormément de la sonorité des vinyles des mêmes morceaux. On peut donc aboutir à trois hypothèses :

- Soit notre simulateur comporte une erreur
- Soit nous avons oublié un élément clé.
- Soit le fichier digital n'était au départ pas égalisé de la même manière que celui qui a été gravé sur les disques vinyles.

Si l'on prend la troisième hypothèse, on peut se demander pourquoi la version digitale a été ré-égalisée pour avoir plus d'aigus. En réfléchissant à cette question, nous avons émis une hypothèse : Il se pourrait que pour vendre plus facilement les CD, leurs fabricants aient délibérément décidé d'en augmenter les aigus, de manière à en vendre plus sous prétexte qu'ils aient de meilleurs aigus que les vinyles. Cela serait aussi conforté par le fait que les audiophiles fans de vinyles disent préférer le son du vinyle car le trouvant plus "chaud", c'est à dire, avec moins d'aigus. Ces personnes n'aimaient donc pas la nouvelle égalisation, qui au fond pourrait être seulement commerciale, et ont donc préféré garder l'ancien son. Cette attirance pour le vinyle provient peut-être du désir de posséder ou d'offrir un objet matériel.

Si on prend la deuxième, on peut envisager que lors de la reproduction de masse les petites informations des aigus soit en parti perdues, mais il faudrait étudier cette piste pour savoir si elle est possible.

Si on prend la première hypothèse, nous avons revérifié nos équations à de nombreuses reprises, il est toujours possible qu'il reste des erreurs, mais il n'a pas été possible d'en mettre en évidence jusqu'à ce jour.

# Annexes

## Annexe mathématique

### 1) Nombres complexes

{Source : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre\\_complexe](https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_complexe)}

Les nombres complexes sont constitués d'une partie réelle, et d'une partie imaginaire.

Un nombre imaginaire "pur" correspond à une proportion de  $j$ , avec  $j^2 = -1$ .

Un nombre complexe s'écrit donc :  $c = a + jb$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Par définition :

\* On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes.

\*  $\Re(c) = a$ , la partie réelle d'un nombre complexe.

\*  $\Im(c) = b$ , la partie imaginaire d'un nombre complexe.

\* Le module d'un nombre complexe est égale à la norme du vecteur  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

\* on a donc  $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$  [Math.1.a]

On peut aussi démontrer que :

\*  $|c_1 \cdot c_2| = |c_1| \cdot |c_2|$  [Math.1.b]

\*  $\left| \frac{c_1}{c_2} \right| = \frac{|c_1|}{|c_2|}$  [Math.1.c]

## 2) Logarithmes

{Source : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Logarithme#Logarithme\\_binaire](https://fr.wikipedia.org/wiki/Logarithme#Logarithme_binaire)}

On pose  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

Par définition :  $a^b = c \Leftrightarrow \log_a(c) = b$  [Math.2.a]

Les logarithmes ont aussi les propriétés suivantes :

\*  $\log_a(c_1) + \log_a(c_2) = \log_a(c_1 \cdot c_2)$  [Math.2.b]

\*  $\log_a(c_1) - \log_a(c_2) = \log_a\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$  [Math.2.c]

\*  $n \cdot \log_a(d^e) = n e \cdot \log_a(d)$  [Math.2.d]

## 3) Dérivation

{Source : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Dérivée>}

La dérivation consiste à obtenir la pente d'une fonction.

Elle se note  $\frac{\partial}{\partial x}$  avec  $x$  la variable en fonction de laquelle on dérive.

De manière générale, la dérivée en  $x$  d'une fonction  $f$  est définie de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x)) = \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+a) - f(x)}{a} \right) \quad [\text{Math.3.a}]$$

La dérivée la plus connue est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^n) = n \cdot x^{n-1} \quad [\text{Math.3.b}]$$

A partir de cette formule on peut déterminer que :

\*  $\frac{\partial}{\partial x}(c) = 0$  : La pente d'une constante est nulle

\*  $\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$  : La pente d'une fonction linéaire est constante.

\*  $\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x$  : La pente d'une fonction carré est linéaire.

\*  $\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Formules utiles à la combinaison de dérivées :

\*  $\frac{\partial}{\partial x}(f(x) + g(x)) = \frac{\partial}{\partial x}(f(x)) + \frac{\partial}{\partial x}(g(x))$  [Math.3.c]

\*  $\frac{\partial}{\partial x}(f(x) \cdot g(x)) = g(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(f(x)) + f(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(g(x))$  [Math.3.d]

On notera en particulier que si  $f(x) = c$  avec  $c$  une constante, alors on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x}(c \cdot g(x)) = c \cdot \frac{\partial}{\partial x}(g(x)), \text{ car la dérivée d'une constante est nulle.}$$

\*  $\frac{\partial}{\partial x}(-f(x)) = -\frac{\partial}{\partial x}(f(x))$  [Math.3.e]

\*  $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{-\frac{\partial}{\partial x}(f(x))}{f(x)^2}$  [Math.3.f]

\*  $\frac{\partial}{\partial x}(f(g(x))) = \frac{\partial}{\partial x}(g(x)) \cdot f'(g(x))$  [Math.3.g], avec  $\frac{\partial}{\partial x}(f(x)) = f'(x)$

# Programmation en C++

Le C++ est un langage de programmation compilé, c'est à dire que contrairement à d'autres langages interprétés comme par exemple le Python, il nécessite d'être transformé en exécutable avant d'être lancé.

Le C++ étant un langage complexe, il serait impossible de le détailler entièrement, de plus de nombreuses notions seront ici écarté pour permettre qu'un lecteur n'ayant pas de réelle expérience dans la programmation puisse le comprendre. Il suppose cependant que l'on ai quelques bases, comme par exemple la notion de variable, de boucle et de condition.

Nous allons tout d'abord présenter quelques particularités du C++, puis nous présenterons un tableau d'équivalence entre C++ et pseudo-code.

## Fichiers

Les fichiers de code C++ sont séparés en 2 types : les fichier .cpp et les fichiers .hpp  
Les .hpp, aussi appelés headers servent à déclarer l'existence des objets, et ont vocation à être "inclus" dans les fichiers .cpp qui définissent les objets.

Pour inclure un fichier .hpp pour en utiliser ou en définir le contenu, il faut écrire :

```
#include "fichier.hpp"
```

Il est aussi possible d'inclure des fichiers fournis avec le langage, il faut utiliser une syntaxe légèrement différente :

```
#include <nom>
```

## Constantes

Il est possible de déclarer des constantes (par constante, on entend valeur fixée dans le code, ne pouvant évoluer lors de l'exécution du programme) de la manière suivante :

```
#define nom valeur
```

## Types de variables

Voici les différents types que peut contenir une variable (une variable ne peut cependant pas changer de type)

- **int** : nombre entier signé (positif ou négatif) (integer)  
De nombreuse variante d'int existent par exemple :
  - **int8\_t** : nombre entier, signé, codé sur 8 bits, soit un octet, permettant donc des valeurs allant de -128 à 127.
  - **uint16\_t** : nombre entier, non signé (donc positif), codé sur 16 bits, permettant donc des valeurs de 0 à 65535.
  - **unsigned int** : nombre entier, non signé.
- **float** : nombre à virgule (floating point)
- **double** : nombre à virgule à double précision
- **bool** : booléen, contenant la valeur vrai ou faux
- **char** : caractère
- Une classe ou structure ou conteneur (voir plus bas)



## Équivalences avec du pseudo-code

C++	Pseudo-code
<code>int num;</code>	Soit num un nombre entier
<code>num=4;</code>	Assigner a num la valeur 4
<code>vector&lt;double&gt; liste;</code>	Soit liste une liste de nombres
<code>cin &gt;&gt; a;</code>	Entrer a
<code>cout &lt;&lt; a;</code>	Afficher a
<pre>if (cond1) {     // .. } else if (cond2) {     // .. } else {     // .. }</pre>	<pre>Si cond1 Alors .. Sinon si cond2 .. Sinon .. Fin si</pre>
<pre>for (int a=4; a&lt;13; a++) {     // .. }</pre>	<pre>Pour a allant de 4 à 12 .. Fin pour</pre>
<pre>while (cond) {     // .. }</pre>	<pre>Tant que cond .. Fin tant que</pre>

Pour obtenir des informations sur des sujets non abordés ici, il peut être intéressant de consulter <http://www.cplusplus.com/>.

# Remerciements

Un grand merci aux développeurs de :

- Libre office (Pour le traitement de texte et les schémas)
- Géogebra (Pour les schémas)
- Wolfram Alpha (Pour le dessin 3D)
- Audacity (Pour l'édition et la visualisation de fichiers audio)

Qui mettent leurs outils a notre disposition gratuitement.

Un autre grand merci aux rédacteurs de toutes les sources que nous avons utilisés :

- <http://jeanluc.rigal.free.fr/files/principe-disque-vynil.pdf>
- <https://fr.wikipedia.org/>
- <https://books.google.fr/books?id=YjBJ1T2y5-4C&printsec=frontcover>
- <http://www-pagines.fib.upc.es/~pds/Lect06.pdf>
- <http://www.instructables.com/id/RIAA-Equalization-with-analog-electronics/>
- <http://renardson-audio.com/phono-1.html>