Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. Özlem Imamoglu 24. Januar 2018

Analysis II
Prüfung
D-INFK

MUSTERLÖSUNG

Diese Musterlösung zeigt *mögliche* Lösungen zu den Aufgaben. Es könnte aber auch andere korrekte Lösungen geben.

Bitte legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 120 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: „Analysis I für D-INFK Zusammenfassung" und „Analysis II for D-INFK Summary", die auf der Webseite verfügbar sind. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen. Sortieren Sie die Blätter.
- Schreiben Sie in Blau oder Schwarz. Schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe. Benutzen Sie keinen Tipp-Ex. Schreiben Sie sauber! Was nicht eindeutig lesbar ist, wird ignoriert.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie Aussagen aus der Zusammenfassung verwenden, machen Sie deutlich, worauf Sie sich beziehen.
- Maximalpunktzahl: 60 Punkte.

Tabelle nicht ausfüllen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
MC		
1		
2		
3		
4		
Total		
Vollständigkeit		
Note		

Multiple Choice Fragen

Entscheiden Sie sich bei den folgenden Aussagen, welche der Antwortsmöglichkeiten die richtige ist. Beachten Sie, dass nur eine Antwort pro Aussage richtig ist.

Determine for each of the following statements, which of the possible answers is correct. Note that only one answer per statement is correct.

(a) Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \sin(y^3)\ dydx.$$

Determine the value of the integral

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \sin(y^3)\ dydx.$$

☐ $\sin(1)$

☑ $\frac{-1}{12}(\cos(1) - 1)$

☐ $\sqrt{2}(\sin(1) - \cos(1))$

Lösung: Die Grenzen sind $0 \leq x \leq 1$ und $x^2 \leq y \leq 1$, was $0 \leq y \leq 1$ und $0 \leq x \leq \sqrt{y}$ entspricht. Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \sin(y^3)\ dydx = \int_0^1 \sin(y^3) \int_0^{\sqrt{y}} x^3\ dxdy &= \int_0^1 \sin(y^3) \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{y}}\ dy \\ &= \frac{-1}{12} \int_0^1 -\sin(y^3) 3y^2\ dy \\ &= \frac{-1}{12} \int_0^1 \frac{d}{dy} \cos(y^3)\ dy \\ &= \frac{-1}{12}(\cos(1) - 1).\end{aligned}$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Die Aussage $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ist gleichbedeutend mit

Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *The statement* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *is equivalent to*

☑ $\forall\ \delta > 0,\ \exists\ \epsilon > 0,$ so dass $\|(x,y)\| < \epsilon \Rightarrow\ |f(x,y)| < \delta$

☐ $\forall\ \delta > 0,\ \exists\ \epsilon > 0,$ so dass $|f(x,y)| < \epsilon \Rightarrow \|(x,y)\| < \delta$

☐ $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$

(c) Die Richtungsableitung der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = ze^{\cos(xy)}$$

an der Stelle $a = (1, \frac{\pi}{2}, 1)$ ist maximal in der Richtung

The directional derivative of the function $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = ze^{\cos(xy)}$$

at the point $a = (1, \frac{\pi}{2}, 1)$ *is largest in the direction*

☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

☑ $\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Man nehme an, dass

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$ und
- $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0)$ ungleich 0 sind und unterschiedliche Vorzeichen haben.

Dann gilt, dass

Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *be a continuous function with continuous partial derivatives of first and second order. Assume that*

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$ *and*
- $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0)$ *and* $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0)$ *are different from* 0 *and have different signs.*

Then

☑ der Punkt $(0,0)$ ein Sattelpunkt ist.

the point $(0,0)$ *is a saddlepoint.*

☐ der Punkt $(0,0)$ ein lokales Maximum ist.

the point $(0,0)$ *is a local maximum.*

☐ der Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum ist.

the point $(0,0)$ *is a local minimum.*

(e) Seien $f, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Sei $a \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt mit

$$h(a) = f(a) = a$$

und

$$df(a) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad dh(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

Let $f, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *be continuously differentiable. Let* $a \in \mathbb{R}^2$ *be a point such that*

$$h(a) = f(a) = a$$

and

$$df(a) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad dh(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Which of the following statements is true?

☑ $d(h \circ f)(a) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

☐ $d(f \circ h)(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

☐ $d(f \circ f)(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

☐ $d(h \circ h)(a) = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1

Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 2xy + 2y \end{pmatrix}.$$

Consider the vectorfield $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 2xy + 2y \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass v konservativ ist.

Show that v is conservative.

Lösung 1: Wir schreiben

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Dann haben wir

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}(x,y) = 2y$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial x}(x,y) = 2y.$$

Da $\frac{\partial v_1}{\partial y} \equiv \frac{\partial v_2}{\partial x}$ und $\mathbb{R}^2$ konvex ist folgt wegen Satz 2.2.4 in der Zusammenfassung, dass v konservativ ist.

Lösung 2: Die Gleichung $\nabla f = v$ entspricht

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + 2y.$$

Damit folgt

$$f(x,y) = f(0,y) + \int_0^x t^2 + y^2 dt = f(0,y) + xy^2 + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = f(0,y) + xy^2 + \frac{x^3}{3}$$

und deswegen

$$2xy + 2y \overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) + 2xy \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 2y.$$

Das heisst, $f(0,y) = y^2 + C$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Dies entspricht

$$f(x,y) = xy^2 + \frac{x^3}{3} + y^2 + C.$$

Nun kontrolliert man, dass diese f, $\nabla f = v$ erfüllt. Das heisst, v ist konservativ.

(b) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma v\,ds$, wobei die stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [0,6] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t-1,1) & t \in [0,2] \\ (3-t, 3-t) & t \in [2,4] \\ (-1, t-5) & t \in [4,6] \end{cases}$$

definiert ist.

Compute the path integral $\int_\gamma v\,ds$, where the piece-wise continuously differentiable curve $\gamma : [0,6] \to \mathbb{R}^2$ is given by

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t-1,1) & t \in [0,2] \\ (3-t, 3-t) & t \in [2,4] \\ (-1, t-5) & t \in [4,6] \end{cases}.$$

Lösung 1: Da v konservativ ist hat es ein Potenzial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Da γ geschlossen ist ($\gamma(0) = (-1,1) = \gamma(6)$) haben wir

$$\int_\gamma v\,ds = f(\gamma(6)) - f(\gamma(0)) = f(\gamma(0)) - f(\gamma(0)) = 0.$$

Lösung 2: Wir berechnen den Wert direkt:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma v\,ds &= \int_0^2 v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt + \int_2^4 v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt + \int_4^6 v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt \\
&= \int_0^2 \begin{pmatrix} (t-1)^2+1 \\ 2(t-1)+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_2^4 \begin{pmatrix} 2(3-t)^2 \\ 2(3-t)^2 + 2(3-t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} dt \\
&\quad \int_4^6 \begin{pmatrix} 1+(t-5)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^2 (t-1)^2 + 1\,dt + \int_2^4 -4(3-t)^2 - 2(3-t)\,dt \\
&= \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = e^x \sin(y)$$

definiert. Bestimmen Sie die Taylorpolynome erster und zweiter Ordnung von f um den Punkt $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$. Nähern Sie damit den Wert von f an der Stelle $(0, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4})$ an mittels dem Taylorpolynom zweiter Ordnung.

Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *be defined by*

$$f(x, y) = e^x \sin(y).$$

Determine the first and second degree Taylorpolynomials of f *at the point* $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$. *Approximate the value of* f *at the point* $(0, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4})$ *using the second order Taylorpolynomial.*

Lösung: Wir haben

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin(y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos(y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = e^x \sin(y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = -e^x \sin(y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^x \cos(y)$$

und damit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) = 1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

Das Taylorpolynom erster Ordung um den Punkt (x_0, y_0) ist deswegen durch

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 1 + (x - 0) = 1 + x$$

gegeben, und das Taylorpolynom zweiter Ordnung ist durch

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} H_f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ &= 1 + x + \tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{2}(y - \tfrac{\pi}{2})^2 \end{aligned}$$

gegeben. Unsere Annäherung ist damit

$$f(0, \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{4}) \approx 1 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4})^2 = 1 - \tfrac{1}{32} = \tfrac{31}{32}.$$

Aufgabe 3

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch

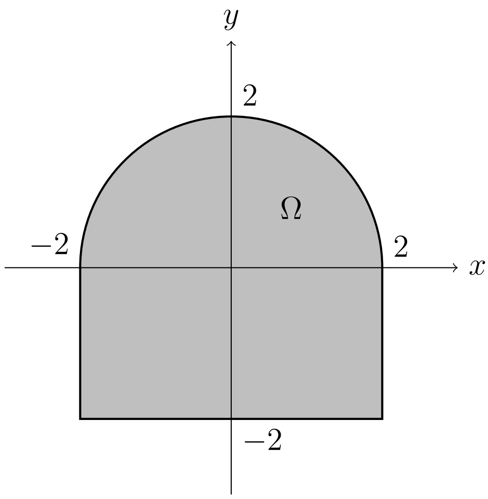
$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy,$$

wobei Ω der in der Abbildung schraffierte Bereich ist. An welchen Punkten nimmt die Funktion f ihr Maximum und ihr Minimum an? Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f.

Let $f : \Omega \to \mathbb{R}$ be defined by

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy,$$

where Ω is the set indicated in the figure. At which points does f attain its maximum and minimum? Determine the maximum and minimum of f.



Lösung: Zunächst bestimmen wir die kritischen Punkte von f:

$$0 \overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y \quad \text{und} \quad 0 \overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y - x,$$

was $(x, y) = (0, 0)$ entspricht. Damit ist $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt von f und wir haben

$$f(0, 0) = 0.$$

Wir bemerken auch, dass

$$f(-2, -2) = 4, \quad f(2, -2) = 12, \quad f(2, 0) = 4, \quad f(-2, 0) = 4.$$

Eine Parametrisierung $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ des Halbkreises ist durch

$$\gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$$

gegeben. Da $f(\gamma(t)) = 4(1 - \cos(t)\sin(t))$ haben wir

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 4(\sin^2(t) - \cos^2(t)) = 4(1 - 2\cos^2(t)).$$

Daraus folgt, dass

$$0 = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Rightarrow \cos(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Wenn $\cos(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt $\sin^2(t) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, und da uns nur die positive Lösung interessiert, haben wir $\sin(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Nun berechnen wir, dass

$$f(-\tfrac{2}{\sqrt{2}}, \tfrac{2}{\sqrt{2}}) = 6 \quad \text{und} \quad f(\tfrac{2}{\sqrt{2}}, \tfrac{2}{\sqrt{2}}) = 2.$$

Die linke Seite von Ω ist durch $x = -2$ gegeben. Wir haben $f(-2, y) = 4 + y^2 + 2y$ und damit

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \frac{d}{dy} f(-2, y) = 2y + 2 \Rightarrow y = -1 \\ &f(-2, -1) = 3 \end{aligned}$$

Die untere Seite von Ω ist durch $y = -2$ gegeben. Da $f(x, -2) = x^2 + 4 + 2x$ haben wir

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \frac{d}{dx} f(x, -2) = 2x + 2 \Rightarrow x = -1 \\ &f(-1, -2) = 3. \end{aligned}$$

Die rechte Seite von Ω ist durch $x = 2$ gegeben. Da $f(2, y) = 4 + y^2 - 2y$ haben wir

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{dy} f(2, y) = 2y - 2 \Rightarrow y = 1,$$

aber $(2, 1) \notin \Omega$ und somit haben wir alle kritischen Punkte gefunden. Nun folgt (mit Theorem 1.5.4 aus der Zusammenfassung), dass das Maximum von f gleich 12 ist und, dass das Minimum von f gleich 0 ist und sie werden nur an den Stellen

$$(x_{max}, y_{max}) = (2, -2) \quad \text{bzw.} \quad (x_{min}, y_{min}) = (0, 0)$$

angenommen.

Aufgabe 4

Sei $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3y^3x + yx^3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma v\, ds$, wobei γ der im Gegenuhrzeigersinn parametrisierte Rand vom Bereich

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y \text{ und } x^2 + y^2 \le 4\}$$

ist.

Let $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be the vectorfield defined by

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3y^3x + yx^3 \end{pmatrix}.$$

Compute the path integral $\int_\gamma v\, ds$, where γ is the boundary of the domain

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y \textit{ und } x^2 + y^2 \le 4\},$$

parametrized in the counterclockwise direction.

Lösung: Wir wenden den Satz von Green an und wechseln in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma v\ ds &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}(3y^3x + yx^3)\ dxdy = 3\int_\Omega y^3 + yx^2\ dxdy \\
&= 3\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^2 r^4(\sin^3(\varphi) + \sin(\varphi)\cos^2(\varphi))\ drd\varphi \\
&= 3\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^2 r^4 \sin(\varphi)\ drd\varphi = 3\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(\varphi) d\varphi \int_0^2 r^4\ dr \\
&= 3 \cdot [-\cos(\varphi)]_{\pi/4}^{\pi/2} \cdot [r^5/5]_0^2 = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{32}{5} = \frac{48\sqrt{2}}{5}.
\end{aligned}$$