ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl

1. Zwischenklausur

Zürich, 4. November 2014

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten (in graphischer Darstellung), der die Sprache

$$L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid (|w|_a + 2|w|_b - 4|w|_c) \bmod 4 = 0\}$$

akzeptiert und geben Sie die Zustandsklasse $\mathrm{Kl}(q)$ für jeden Zustand q Ihres Automaten an.

(b) Konstruieren Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten mit höchstens 7 Zuständen (in graphischer Darstellung) für die Sprache

$$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ beginnt mit } abb \text{ oder } |w|_a \text{ ist durch 3 teilbar}\}$$

und erläutern Sie kurz informell die Idee Ihrer Konstruktion.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{www \mid w \in \{0, 1\}^*\}$,

(b) $L_2 = \{0^{n \cdot \lceil \log_2 n \rceil} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Hierfür dürfen Sie sich jeweils eine der folgenden drei Beweismethoden aussuchen, jedoch *nicht* dieselbe für beide Aufgabenteile.

(i) Mit Hilfe eines angenommenen endlichen Automaten (Verwendung von Lemma 3.3 aus dem Buch oder direkt über den Automaten),

(ii) mit Hilfe des Pumping-Lemmas oder

(iii) mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität.

Bitte beachten Sie, dass bei Lösungen, die dieselbe Methode für beide Teilaufgaben verwenden, nur Teilaufgabe (a) bewertet wird. **5+5 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 3

(a) Definieren Sie die Sprache L_{empty} und beschreiben Sie die Arbeit einer deterministischen Turingmaschine A mit $L(A) = (L_{\text{empty}})^{\complement}$.

(b) Zeigen Sie $L_{\text{U}} \leq_{\text{EE}} (L_{\text{empty}})^{\complement}$, indem Sie eine EE-Reduktion angeben und ihre Korrektheit beweisen.

5+5 Punkte

Aufgabe 4

(a) Sei $w_n = 1^{2^{2n}}$ ein Wort über dem Alphabet $\{0,1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für die Kolmogorov-Komplexität von w_n an, gemessen in der Länge von w_n.

(b) Wir betrachten das folgende Komprimierungsverfahren: Jedes Wort $w \in \{0,1\}^*$ mit

$$w = 0^{j_1} 1^{j_2} 0^{j_3} 1^{j_4} \ldots 0^{j_{2k-1}} 1^{j_{2k}}$$

für irgendwelche $k, j_1, j_2, \ldots, j_{2k} \in \mathbb{N}$ wird zunächst dargestellt als

$$\text{Count}(w) = \text{Bin}(j_1)\#\text{Bin}(j_2)\# \ldots \#\text{Bin}(j_{2k-1})\#\text{Bin}(j_{2k})\,.$$

Dann wird darauf der Homomorphismus h mit $h(0) = 00$, $h(1) = 11$ und $h(\#) = 01$ angewendet, um die Komprimierung $\text{Compress}(w) = h(\text{Count}(w)) \in \{0,1\}^*$ zu erhalten.

Sei $l \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für mindestens die Hälfte aller Wörter w aus $\{0,1\}^l$ gilt, dass $|\text{Compress}(w)| \geq l - 2$.

5+5 Punkte