Prof. Dr. Emmanuel Kowalski January 23, 2018

Analysis II
Prüfung
D-INFK

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Bitte legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 180 Minuten.

- Zugelassene Hilfsmittel: Selbstverfasste Zusammenfassung, Wörterbücher. Keine sonstiger Literatur, kein Taschenrechner.

- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen. Sortieren Sie die Blätter.

- Schreiben Sie in Blau oder Schwarz. Schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe. Benutzen Sie keinen Tipp-Ex. Schreiben Sie sauber!
Was nicht eindeutig lesbar ist, wird ignoriert.

- Antworten in Aufgaben 4 bis 9 müssen begründet werden. Wenn Sie Aussagen aus der Zusammenfassung verwenden, machen Sie deutlich, worauf Sie sich beziehen.

- Wenn eine Aufgabe aus mehreren Unteraufgaben besteht, dann dürfen Sie die Aussagen einer Unteraufgabe für ihre Antwort zu den nächsten Unteraufgaben benutzen, auch wenn Sie keine Lösung zu dieser Unteraufgabe haben.

- Maximalpunktzahl: 30 Punkte. Es ist nicht nötig, jede Aufgabe zu lösen, um die Maximalnote zu erhalten.

Tabelle nicht ausfüllen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
MC		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
Total		

Vollständigkeit	
Note	

Multiple choice questions [6 Points]

(1) If f_1 and f_2 are solutions of the differential equation

$$y'' - xy' + y = \cos(x),$$

then so is $f_1 + 2f_2$.

True ☐ False ☐

German version.

Falls f_1 und f_2 Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' - xy' + y = \cos(x),$$

sind, dann ist $f_1 + 2f_2$ auch eine Lösung.

(2) If f is C^2 on $\mathbb{R}^2$ and f is maximal at (x_0, y_0), then $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = 0$.

True ☐ False ☐

German version.

Falls f ist auf $\mathbb{R}^2$ in der Klasse C^2 und f nimmt ein Maximum an der Stelle (x_0, y_0), dann ist $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = 0$.

(3) Let $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$ and $g(u, v, w)$ be differentiable functions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ respectively. Then we have

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

True ☐ False ☐

German version.

Seien $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$ und $g(u, v, w)$ differenzierbare Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, bezüglichweise. Dann gilt

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

(4) If $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is of class C^2, $\nabla f(0,0,0) = 0$, and the Hessian matrix of f at $(0,0,0)$ is

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Then f has at $(0,0,0)$

A local minimum ☐

A local maximum ☐

A saddle point ☐

German version.

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in der Klasse C^2 sodass $\nabla f(0,0,0) = 0$, und die Hesse Matrix von f an der Stelle $(0,0,0)$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

then f has at $(0,0,0)$
Dann hat f an der Stelle $(0,0,0)$

Ein lokales Minimum ☐

Ein lokales Maximum ☐

Ein Sattelpunkt ☐

(5) If $f = (f_1, f_2)$ is a conservative C^1 vector field on $\mathbb{R}^2$, then

$$\partial_x f_1 = \partial_y f_2.$$

True ☐ False ☐

German version.

Falls $f = (f_1, f_2)$ ist auf $\mathbb{R}^2$ ein C^1-konservatives Vektorfeld, dann ist

$$\partial_x f_1 = \partial_y f_2.$$

(6) For a continuous function f in $\mathbb{R}^2$, we have

$$\int_{[0,2]\times[0,3]} f(x,y)dxdy = 6\int_0^1\int_0^1 f(2x,3y)dxdy.$$

True ☐ False ☐

German version.

Für stetig auf $\mathbb{R}^2$ ist

$$\int_{[0,2]\times[0,3]} f(x,y)dxdy = 6\int_0^1\int_0^1 f(2x,3y)dxdy.$$

Exercises

Quick computation 1 [2 Points]

Compute the Hessian of $f(x, y) = \arctan(x^2 + y)$ at $(x, y) = (0, 0)$. No justification is necessary.

German version.

Berechnen Sie die Hesse Matrix von $f(x, y) = \arctan(x^2 + y)$ an $(x, y) = (0, 0)$. Es ist keine Begründung nötig.

Quick computation 2 [2 Points]

For which values of $a \in \mathbb{R}$ is the vector field $f(x,y) = (ay^2 e^{2xy^2}, a^2 xy e^{2xy^2})$ on $\mathbb{R}^2$ conservative? No justification is necessary.

German version.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $f(x,y) = (ay^2 e^{2xy^2}, a^2 xy e^{2xy^2})$ auf $\mathbb{R}^2$ konservativ? Es ist keine Begründung nötig.

Quick computation 3 [2 Points]

Find all *real* solutions of the differential equation

$$u'' - 6u' + 13u = (3x + 2)e^x.$$

No justification is necessary.

German version.

Finden Sie alle *reelle* Lösungen der Differentialgleichung

$$u'' - 6u' + 13u = (3x + 2)e^x.$$

Es ist keine Begründung nötig.

Exercise 4 [2 Points]

Fix $R > 0$. Compute the area of the *compact* region delimited by the cardioid, defined by the following parametric equation

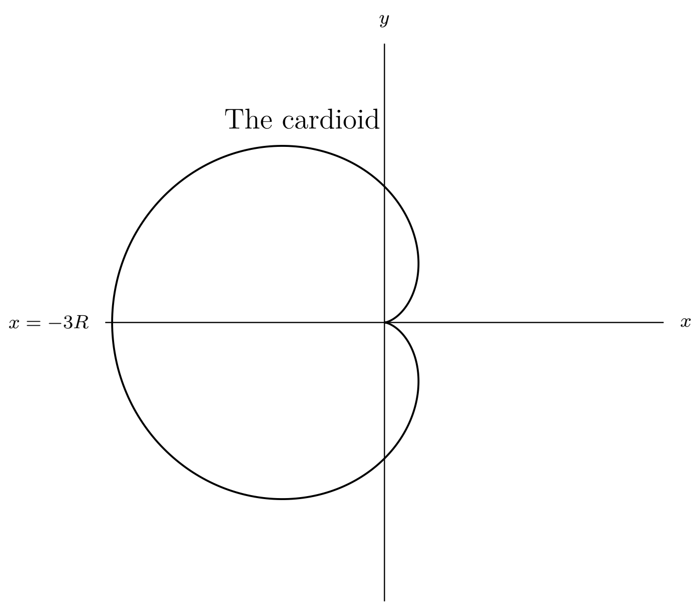
$$\gamma(\theta) = (R\,(2\cos(\theta) - \cos(2\theta))\,, R\,(2\sin(\theta) - \sin(2\theta))) \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

German version.

Sei $R > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der (innere Teil der) Kardioide, die durch die Gleichung

$$\gamma(\theta) = (R\,(2\cos(\theta) - \cos(2\theta))\,, R\,(2\sin(\theta) - \sin(2\theta))) \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

definiert ist.



Exercise 5 [3 Points]

(a) Show that for all $x \in \mathbb{R}$, we have

$$\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x).$$

(b) Compute the integral

$$\int_D (xy + y^3)dxdy$$

where D is the quarter-disc

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

German version.

(a) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$, es gilt

$$\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x).$$

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_D (xy + y^3)dxdy$$

wo D ist

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Exercise 6 [3 Points]

Compute the Taylor polynomial of order 2 of

$$f(x,y,z) = 2\exp(x + y^2 + z^3)$$

at $(x,y,z) = (0,0,0)$, and the Hessian matrix at $(x,y,z) = (0,0,0)$.

German version.

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung 2 von

$$f(x,y,z) = 2\exp(x + y^2 + z^3)$$

an der Stelle $(x,y,z) = (0,0,0)$, und die Hesse Matrix an der Stelle $(x,y,z) = (0,0,0)$.

Exercise 7 [3 Points]

Let $f(x, y) = \exp(\sin(xy))$. Find the values of $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ such that f has a critical point at (x, y).

German version.

Sei $f(x, y) = \exp(\sin(xy))$. Was sind die $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sodass (x, y) ein kritisches Punkt von f ist?

Exercise 8 [2 Points]

Let $f(x, y, z) = x^2 + \cos(y)e^{z^2}$.

(a) Find all critical points of f on $]-1, 1[^3$.

(b) Determine for each critical point whether it is a local maximum, a local minimum or a saddle point.

German version.

Sei $f(x, y, z) = x^2 + \cos(y)e^{z^2}$.

(a) Finden Sie alle kritische Punkte von f auf $]-1, 1[^3$.

(b) Bestimmen Sie für jeden kritischen Punkte, ob es ein lokales Maximum, Minimum oder Sattelpunkt ist.

Exercise 9 [5 Points]

(a) Check that the vector-field $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (6x^5y^2 - 4xy^4 - 7y + 6, 2x^6y - 8x^2y^3 - 7x)$$

is conservative.

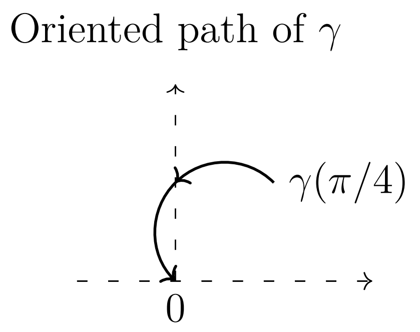
(b) Compute a potential of f.

(c) Compute

$$\int_\gamma f \cdot d\vec{s},$$

where γ is the parametrised curve

$$\begin{cases} \gamma : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2 \\ \theta \mapsto \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta), \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)\right). \end{cases}$$



German version.

(a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

$$f(x,y) = (6x^5y^2 - 4xy^4 - 7y + 6, 2x^6y - 8x^2y^3 - 7x)$$

Konservativ ist.

(b) Berechnen Sie ein Potential für f.

(c) Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma f \cdot d\vec{s},$$

wo γ ist die parametrisierte Kurve

$$\begin{cases} \gamma : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2 \\ \theta \mapsto \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta), \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)\right). \end{cases}$$

Weg γ