ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. E. Welzl

2. Klausur

Zürich, 11. Dezember 2008

Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass die folgenden zwei Sprachen nicht kontextfrei sind:

(i) $L_1 = \{a^n b^{2n} a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

(ii) $L_2 = \{waw \mid w \in \{a,b\}^*\}$.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

Wir setzen die folgende kontextfreie Grammatik G_{ge} aus der Vorlesung als gegeben voraus sowie die Tatsache, dass $L(G_{ge}) = L_{ge}$ mit $L_{ge} = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$.

$$\begin{aligned} G_{ge} &= (\{S,A,B\},\{a,b\},P,S) \text{ mit} \\ P &= \{S \to \lambda, S \to aB, S \to bA, A \to a, A \to aS, \\ &\qquad B \to b, B \to bS, A \to bAA, B \to aBB\}. \end{aligned}$$

(a) Konstruieren Sie daraus eine kontextfreie Grammatik G_a für die Sprache

$$L_a = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b + 1\}.$$

(b) Beweisen Sie $L(G_a) = L_a$. Sie dürfen hierbei $L(G_{ge}) = L_{ge}$ voraussetzen.

4+6 Punkte

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass $L_{U,\lambda} \notin \mathcal{L}_R$ ist, mit

$$L_{U,\lambda} = \{\mathrm{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM mit } \lambda \in L(M)\}.$$

$L_{U,\lambda}$ enthält also die Kodierungen aller TM, welche das leere Wort akzeptieren. Das Verhalten auf anderen Eingaben spielt keine Rolle.
Sie dürfen für den Beweis nur eine Reduktion von einer der drei Sprachen $L_U, L_{H,\lambda}$ oder L_H verwenden. Andere Beweise werden nicht als Lösung akzeptiert. **10 Punkte**

Aufgabe 4

Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung:
Für jede platzkonstruierbare Funktion s mit $s(n) \geq \log_2 n$ gilt

$$\mathrm{SPACE}(s(n)) \subseteq \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(c^{s(n)}).$$

Hinweis: Bedenken Sie, dass man sich bei der Platzbeschränkung auf 1-Band-TM einschränken kann, dass man also für $L \in \mathrm{SPACE}(s(n))$ voraussetzen kann, dass man eine $s(n)$-platzbeschränkte 1-MTM hat, die L akzeptiert. **10 Punkte**