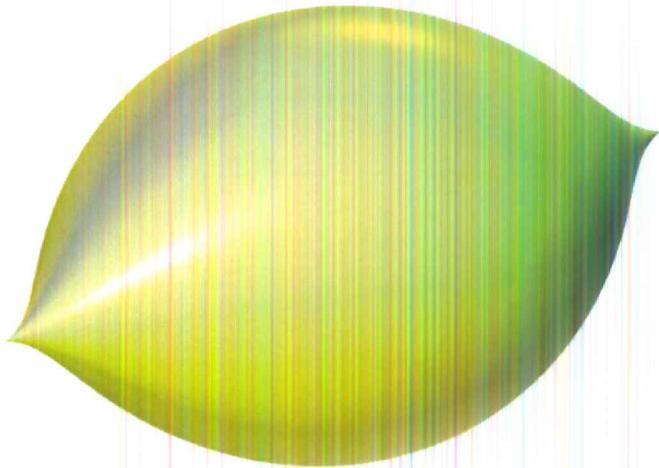


# Analysis II

Eine praxisorientierte Einführung für  
Mathematiker und Physiker

$$x^2 + z^2 + y^3(1 - y)^3 = 0$$



mit über 400 gerechneten Beispielen

Thomas C. T. Michaels

Editor3s

# Analysis II

Eine praxisorientiere Einführung für  
Mathematiker und Physiker mit  
über 400 gerechneten Beispielen

Thomas C. T. Michaels

Immagine in copertina: *Zitrus* creato da Herwig Hauser. Immagine soggetta a copyright:  
Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0.

Copyright © 2013 FELIX VERLAG EDITRICE sas, Milano

I diritti di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento totale o parziale  
con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) sono riservati per tutti i  
Paesi.

Codice ISBN 978-88-88307-23-7

---

# Vorwort

Jedes Buch muss einen Beginn haben und dieses Buch will ich mit einigen einführenden Worten beginnen.

Wie viele andere Studenten der Mathematik und Physik, die sich im ersten Jahr zum ersten Mal mit der Analysis-Vorlesung konfrontiert sehen, hatte ich immer nach einem Buch gesucht, das den Mathematik-Stoff einfach und mit vielen Beispielen erklärt. Das ist natürlich leichter gesagt als getan. Auf der einen Seite findet man so genannte *Ingenieurbücher*, welche praktisch sind, viele Beispiele enthalten aber der Inhalt ist oft zu einfach im Vergleich zum Stoff, der in einer typischen Analysis-Vorlesung für Mathematiker und Physiker vorkommt. In diesen Ingenieurbüchern findet man also viele Beispiele zur Integralrechnung, aber keine Beispiele über Untermannigfaltigkeiten oder Topologie. Auf der anderen Seite behandeln die typischen Lehrbücher für Mathematiker den Stoff auf dem richtigen Niveau, aber diese sind für einen Studenten im ersten Jahr oft zu abstrakt. Also Satz, Beweis, Lemma, Beweis, Satz, Beweis etc. und die (wenigen) Beispiele sind oft neue Theoreme mit Beweisen, die den Studenten nicht helfen, die Konzepte zu verstehen. Aber wo ist der Mittelweg? Beträubt kein geeignetes Buch gefunden zu haben, entschloss ich mich dazu, mir selbst Aufgaben zu stellen. Hier und dort habe ich Aufgaben gesucht und gesammelt und ausführliche Lösungswege für mich geschrieben. So hatte ich schlussendlich auf ein Blatt 60 Beispiele zu Reihen geschrieben, von denen man die Konvergenz bestimmen sollte. Ich habe auch eine Liste von 30 Mengen erstellt, bei denen ich entscheiden sollte, ob sie offen, abgeschlossen, kompakt oder zusammenhängend waren. Dieses Material habe ich dann in den späteren Jahren wieder gebraucht, als ich Hilfsassistent in Analysis im Mathematik-Departement der ETH Zürich war. In meinen Übungsstunden habe ich immer eine Zusammenfassung der Vorlesung gegeben und die wichtigsten Punkte anhand von vielen Beispielen erklärt. Anstatt Tipps zu den einzelnen Aufgaben der Serie zu geben, habe ich mir immer neue, ähnliche Beispiele ausgedacht, wie die in der Serie vorkommenden, und diese vor den Studenten gelöst. So konnte ich Schritt für Schritt alles erklären, was die Studierenden wissen sollten, um die Aufgaben zu lösen: Wie wendet man dieses Theorem in konkreten Situationen an? Wozu dient dieser Satz? usw. Oft ist es genau das, was die Studenten wissen wollen. Dieses Prinzip hat sich bewährt. Am Anfang waren nur 13 Studierende in meiner Übungsstunde da, und ich hatte Grenzwerte wiederholt. Die Übung dauerte nur eine Stunde, aber die Leute fanden es so gut, dass ich am Ende der Stunde einen Applaus bekommen habe. In der nächsten Übungsstunde waren dann 20 Leute in der

---

Übungsgruppe, dann 40, dann 50 usw. Später sind noch mehr Leute gekommen... am Ende des Semesters waren es 150. Das war ein riesiger Erfolg für mich, den ich mir nie erwartet hätte. In meinem letzten Jahr an der ETH bin ich, zusammen mit Beatrix Mühlmann, auf die Idee gekommen, das ganze Material allen zukünftigen Studenten in der Form eines Buches zur Verfügung zu stellen. Am Ende sind, mit der Hilfe von Beatrix, zwei Bücher entstanden: Analysis I und Analysis II.

*Was kann man sich also von den Büchern erwarten?* In dieser Reihe von zwei Büchern befinden sich insgesamt mehr als 1200 Beispiele, alle ausführlich gelöst. Alle Schritte werden durchgerechnet und es gibt kein "trivial" oder "man sieht leicht". Dieses Buch eignet sich perfekt, um zu verstehen, was konkret hinter den abstrakten Definitionen und Sätzen der Analysis II steckt und ist damit das ideale Begleitbuch für jeden Studenten. Ich denke, dass ein formal orientierter Schreibstil häufig die Studenten abschreckt. Im Buch habe ich also die klassische Struktur von Definition, Satz und Beweis aufgegeben und diese mit einer neuen Struktur ersetzt: Die fundamentale Theorie, also wichtige Definitionen und Sätze, werden kurz und einfach zusammengefasst und diese Theorie ist anhand von ausführlich gerechneten Musterbeispielen erklärt. Ich denke, dass Analysis so viele Anwendungen hat und so viele Tricks kennt, dass der einzige Weg, den Stoff effektiv zu lernen, viele Beispiele sind. Das Buch kommt dieser Aufgabe bestens nach. Ein Buch kann aber nicht alle Bedürfnisse gleichzeitig erfüllen: Es wird somit nicht auf Exaktheit und Beweisvollständigkeit verzichtet. Ich habe überall dort, wo es mir inhaltlich richtig erschien, Beweise in Form von Beispielen vollständig präsentiert, aber für technische Beweise, welche nur lange Schreibarbeit erfordern, aber keinen grossen Beitrag zum Verständnis beitragen, verweise ich auf die entsprechende Literatur. Die Bücher behandeln ungefähr den Teil der Analysis, den ein Student in der Mathematik und Physik im ersten Jahr beherrschen sollte. Mit diesen Büchern wird der Student langsam (Beispiel nach Beispiel) von den ganz elementaren Konzepten bis zu einer Stufe gebracht, wo er auch mit komplizierten Aufgaben der mehrdimensionalen Differenzial- und Integralrechnung zurecht kommt.

Ich will das Buch jetzt nicht weiter beschreiben: Sie haben es ja vor sich. Also viel Vergnügen beim Lesen und hoffentlich nehmen diese Bücher allen Lesern den Schrecken, den sie vor Analysis haben.

Cambridge und Zürich, im Jahr 2013

Thomas Michaels

# Inhaltsverzeichnis

<b>I Differenzialrechnung im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>9</b>
<b>1 Funktionen von mehreren Variablen und partielle Ableitungen</b>	<b>11</b>
1.1 Funktionen von mehreren Variablen . . . . .	11
1.2 Partielle Ableitungen . . . . .	15
1.3 Der Satz von Schwarz . . . . .	19
1.4 Vektorwertige Funktionen . . . . .	24
<b>2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>27</b>
2.1 Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	27
2.2 Differenzierbarkeit . . . . .	31
2.2.1 Partielle Differenzierbarkeit und totale Differenzierbarkeit . . . . .	31
2.2.2 Funktionen von der Klasse $C^k$ . . . . .	33
2.2.3 Zusammenhang der Begriffe . . . . .	34
2.2.4 Beispiele . . . . .	35
<b>3 Ableitungsregeln</b>	<b>49</b>
3.1 Die Kettenregel . . . . .	49
3.2 Der Umkehrsatz . . . . .	53
<b>4 Taylorentwicklung für Funktionen mehrerer Variablen</b>	<b>67</b>
4.1 Funktionen zweier Variablen . . . . .	67
4.2 Funktionen mehrerer Variablen . . . . .	69
<b>5 Kurven</b>	<b>73</b>
5.1 Differenzierbare Kurven . . . . .	73
5.2 Reguläre Kurven . . . . .	77
5.3 Der Tangentialvektor an einer Kurve . . . . .	79
5.4 Die Länge einer Kurve . . . . .	80
5.5 Einfach zusammenhängende Mengen . . . . .	84
5.5.1 Homotopien . . . . .	84
5.5.2 Einfach zusammenhängende Mengen . . . . .	86

<b>6 Kritische und reguläre Punkte</b>	<b>89</b>
6.1 Der Fall $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	89
6.2 Der allgemeine Fall $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . . . . .	92
<b>7 Extremwertaufgaben in mehreren Dimensionen</b>	<b>97</b>
7.1 Extremwertaufgaben in $\mathbb{R}^n$ ohne Nebenbedingungen . . . . .	97
7.1.1 Exkursus: positiv und negativ definite Matrizen . . . . .	99
7.1.2 Beispiele . . . . .	102
7.2 Extrema mit Nebenbedingungen . . . . .	109
7.2.1 Einschub: ein Existenzsatz für Extrema . . . . .	110
7.2.2 Beispiele . . . . .	111
7.3 Allgemeine Betrachtung von Extrema in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	122
<b>8 Der Satz über implizite Funktionen</b>	<b>127</b>
8.1 Einleitung . . . . .	127
8.2 Der Satz . . . . .	128
8.3 Beispiele . . . . .	130
<b>9 Untermannigfaltigkeiten von <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>139</b>
9.1 Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ . . . . .	139
9.1.1 Lie-Gruppen . . . . .	145
9.2 Der Tangentialraum . . . . .	150
9.2.1 Lie-Algebren . . . . .	152
9.3 Der Normalraum . . . . .	154
<b>10 Parameterintegrale</b>	<b>157</b>
10.1 Parameterintegrale mit konstanten Grenzen . . . . .	158
10.2 Parameterintegrale mit variablen Grenzen . . . . .	162
10.3 Uneigentliche Parameterintegrale . . . . .	166
<b>II Integralrechnung im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>175</b>
<b>11 Integration auf Quadern und der Satz von Fubini</b>	<b>177</b>
11.1 Integration auf Quadern in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	177
11.2 Integration auf Quadern in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	183
<b>12 Integration auf Normalbereichen</b>	<b>189</b>
12.1 Normalbereiche in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	189
12.2 Normalbereiche in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	196
12.3 Der Skalierungstrick . . . . .	200

---

## INHALTSVERZEICHNIS

---

<b>13 Die Substitutionsregel</b>	<b>207</b>
13.1 Die Substitutionsregel in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	207
13.2 Die Substitutionsregel in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	215
13.3 Wichtige Koordinatentransformationen . . . . .	218
13.4 Beispiele . . . . .	218
<b>14 Anwendung: Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmoment</b>	<b>231</b>
14.1 Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmoment . . . . .	231
14.2 Beispiele . . . . .	233
<b>15 Oberflächenintegrale</b>	<b>241</b>
15.1 Flächen in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	241
15.2 Oberflächenmass . . . . .	243
15.3 Oberflächenintegrale . . . . .	247
15.4 Oberflächenintegral über den Graphen einer Funktion von zwei Variablen .	248
<b>III Vektoranalysis</b>	<b>253</b>
<b>16 Grundbegriffe der Vektoranalysis</b>	<b>255</b>
16.1 Skalarfelder und Vektorfelder . . . . .	255
16.1.1 Skalarfelder . . . . .	255
16.1.2 Vektorfelder . . . . .	256
16.2 Differenzialoperatoren . . . . .	257
16.2.1 Der Gradient . . . . .	258
16.2.2 Richtungsableitung . . . . .	260
16.2.3 Die Divergenz . . . . .	262
16.2.4 Die Rotation . . . . .	264
16.2.5 Der Laplace-Operator . . . . .	267
16.3 Rechenregeln für Differenzialoperatoren . . . . .	268
<b>17 Krummlinige Koordinaten</b>	<b>273</b>
17.1 Krummlinige Koordinaten . . . . .	273
17.2 Differenzialoperatoren in anderen Koordinaten . . . . .	277
17.2.1 Transformation von Skalar- und Vektorfeldern . . . . .	277
17.2.2 Transformation von Differenzialoperatoren . . . . .	279
17.2.3 Allgemeine Formeln für Differenzialoperatoren in allgemeinen orthogonalen krummlinigen Koordinaten . . . . .	284
<b>18 Wegintegrale</b>	<b>289</b>
18.1 Definition und erste Beispiele . . . . .	289
18.1.1 Definition . . . . .	289
18.1.2 Kochrezept und Beispiele . . . . .	290

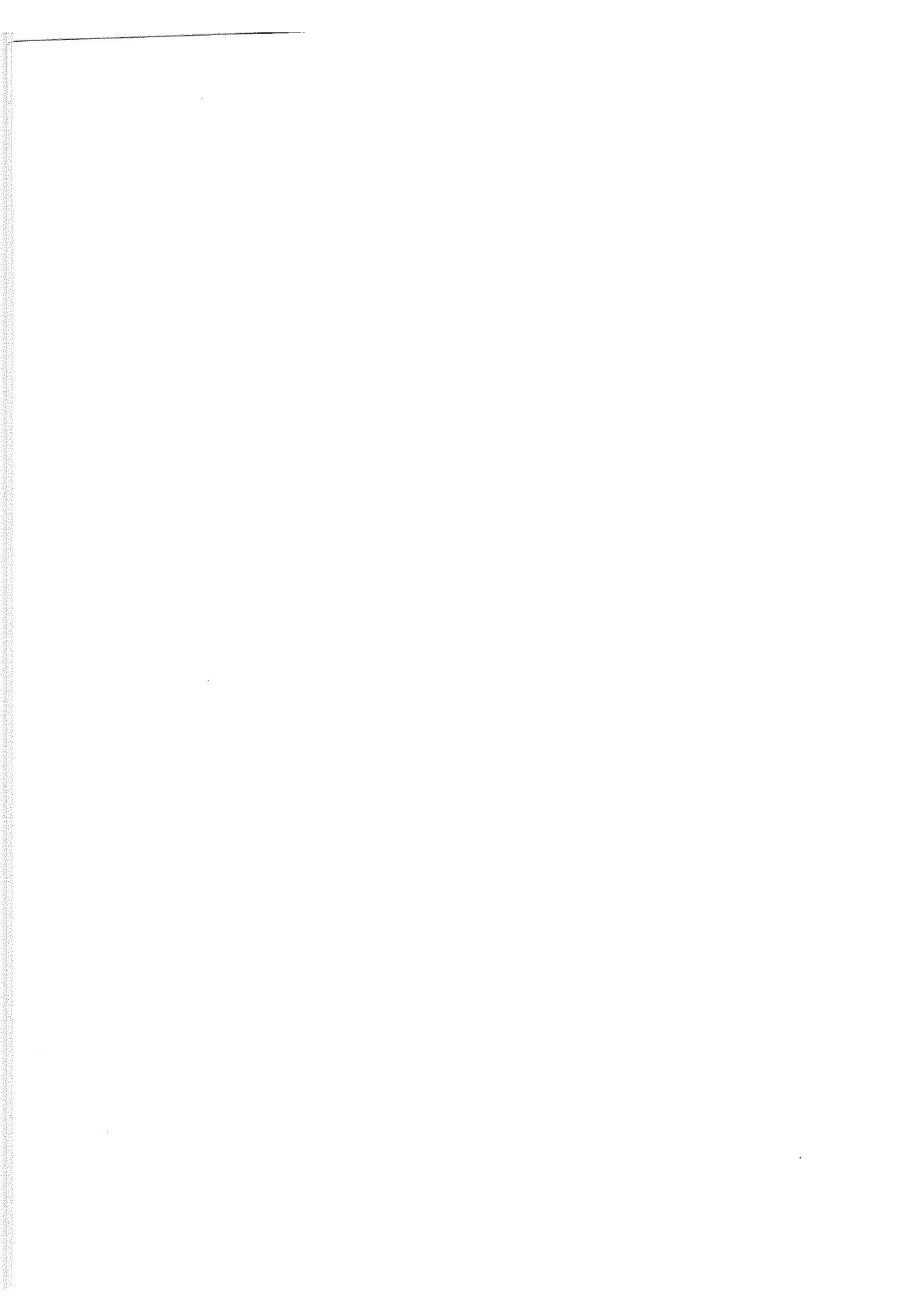
## INHALTSVERZEICHNIS

---

18.2 Potenzialfelder . . . . .	297
18.2.1 Motivierendes Beispiel . . . . .	298
18.2.2 Potenzialfelder und Potenziale . . . . .	300
18.2.3 Konservative Vektorfelder . . . . .	301
18.2.4 Zusammenfassung . . . . .	301
18.2.5 Beispiele . . . . .	302
<b>19 Flussintegrale und der Satz von Gauss</b>	<b>313</b>
19.1 Der Orientierungsbegriff . . . . .	313
19.2 Der Flussbegriff . . . . .	315
19.2.1 Beispiele . . . . .	316
19.3 Satz von Gauss . . . . .	321
19.4 Weitere Beispiele . . . . .	329
19.5 Berechnung von Volumina mit dem Satz von Gauss . . . . .	343
19.6 Der Satz von Gauss in der Ebene . . . . .	345
19.6.1 Der Fluss durch eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	345
19.6.2 Der Satz von Gauss in der Ebene . . . . .	346
<b>20 Der Satz von Stokes und der Satz von Green in der Ebene</b>	<b>355</b>
20.1 Der Satz von Stokes . . . . .	355
20.2 Der Satz von Green in der Ebene . . . . .	368
20.2.1 Berechnung von Flächeninhalten mit dem Satz von Green . . . . .	373

## Teil I

# Differenzialrechnung im $\mathbb{R}^n$



# Kapitel 1

## Funktionen von mehreren Variablen und partielle Ableitungen

### 1.1 Funktionen von mehreren Variablen

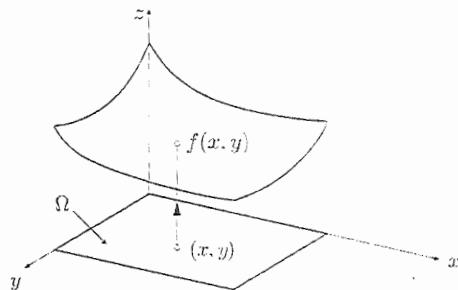
Wird jedem Punkt  $(x, y)$  in einer Teilmenge  $\Omega$  der  $xy$ -Ebene ein Skalar  $f(x, y)$  zugeordnet, so bekommt man eine Funktion der zwei (unabhängigen) Variablen  $x$  und  $y$ . In Formeln heisst dies

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y).$$

Die Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ist der **Definitionsbereich** von  $f$  und die Menge  $f(\Omega)$  der Zahlen, welche von  $f$  angenommen werden, heisst **Wertebereich** (oder Bild) von  $f$

$$\text{Bild}(f) = \{f(x, y) | (x, y) \in \Omega\}.$$

Was kann man sich darunter vorstellen? Das ist ganz einfach. Aus der Schule kennen wir ja nur Funktionen der Form  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , wie etwa  $f(x) = \sin x$ . Jetzt betrachten wir einfach Funktionen wie  $f(x, y) = x^2 \sin(x+y)$ . Diese Funktionen besitzen zwei Variable, nämlich  $x$  und  $y$ , für welche wir reelle Werte einsetzen können. Der **Graph** von  $f(x, y)$  besteht dann



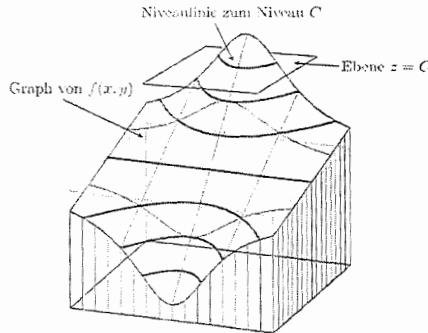
aus den Punkten

$$\text{Graph}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega, z = f(x, y)\}$$

und definiert eine Fläche im dreidimensionalen Raum. Zur geometrischen Veranschaulichung von Funktionen von zwei Variablen werden auch sogenannte **Niveaulinien** (oder Höhenlinien) benutzt. Die Niveaulinie von  $f(x, y)$  zum Niveau  $C$  ist die Menge der Punkte aus dem Definitionsbereich von  $f$ , für welche  $f$  den Wert  $C$  annimmt, d.h.

$$\mathcal{N}_C = \{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) = C\}.$$

Offenbar ist  $\mathcal{N}_C \neq \emptyset$  nur für  $C$  im Wertebereich von  $f$ , d.h. es macht keinen Sinn, Werte für  $C$  zu wählen, welche nicht im Bild von  $f$  liegen. Um Niveaulinien zu berechnen, setzt man bestimmte Werte für  $C$  ein. Man löst dann die Gleichung  $f(x, y) = C$  zum Beispiel nach  $y$  auf und man bekommt so eine Funktion in Abhängigkeit von  $x$ , die wir darstellen können. Geometrisch entspricht die Menge  $\mathcal{N}_C$  dem Schnitt der Ebene  $z = C$  mit dem Graphen  $z = f(x, y)$  von  $f$  projiziert auf die  $xy$ -Ebene. Wir schauen sozusagen von oben auf die Funktion hinab!

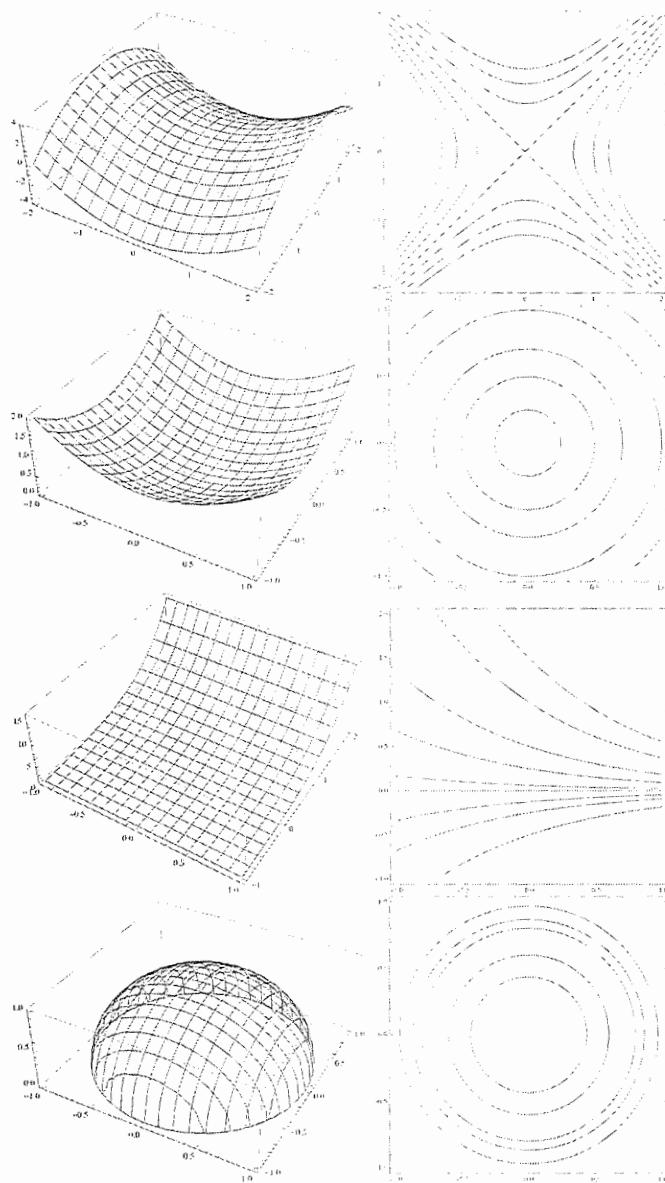


**Beispiel 1.1.1** Skizziere Graph und Niveaulinien für die folgenden Funktionen zweier Variablen:

- a)  $f(x, y) = x^2 - y^2$
- b)  $f(x, y) = x^2 + y^2$
- c)  $f(x, y) = ye^x$
- d)  $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$

**Lösung:** a) Der Definitionsbereich ist ganz  $\mathbb{R}^2$  und der Wertebereich ist ganz  $\mathbb{R}$ . Der Graph von  $f$  definiert die Fläche der Figur 1.1 und hat einen Sattelpunkt in  $(0, 0)$ . Niveaulinien sind durch die Gleichung

$$x^2 - y^2 = C$$



**Abbildung 1.1:** Graph und Niveaulinien der Funktionen  $f : (x, y) \rightarrow x^2 - y^2$ ,  $f : (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$ ,  $f : (x, y) \rightarrow ye^x$ ,  $f : (x, y) \rightarrow \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ .

bestimmt. Für  $C = 0$  bekommt man zum Beispiel  $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm x$ . Das sind die zwei Geraden durch den Mittelpunkt, welche in Figur 1.1 zu erkennen sind. Die anderen Niveaulinien sind durch die Gleichungen  $x = \pm\sqrt{C + y^2}$  bzw.  $y = \pm\sqrt{x^2 - C}$  gegeben.

b) Die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$  definiert eine skalare Funktion von 2 Variablen mit Definitionsbereich  $D(f) = \mathbb{R}^2$  und Wertebereich  $[0, \infty)$  ( $x^2 + y^2$  ist immer positiv). Der Graph ist ein Paraboloid. Niveaulinien sind konzentrische Kreise: Die Niveaulinie zum Niveau  $C$  ist

$$\mathcal{N}_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = C\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = C\}$$

ein Kreis mit Radius  $\sqrt{C}$  und Zentrum  $(0, 0)$ .

c) Die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto ye^x$  definiert eine skalare Funktion von 2 Variablen mit Definitionsbereich  $D(f) = \mathbb{R}^2$  und Wertebereich  $\mathbb{R}$ . Der Graph ist in Figur 1.1 gegeben. Niveaulinien sind durch die Gleichung

$$ye^x = C \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-x}$$

bestimmt.

d) Die Funktion  $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$  definiert eine skalare Funktion von 2 Variablen. Der Definitionsbereich ist die Einheitskreisfläche

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

und der Wertebereich ist  $[0, 1]$ . Der Graph von  $f$  ist die obere Halbkugel mit Radius 1. Niveaulinien von  $f$  sind konzentrische Kreise. Denn

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_C &= \{(x, y) \in D(f) \mid f(x, y) = C\} = \{(x, y) \in D(f) \mid \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} = C\} \\ &= \{(x, y) \in D(f) \mid x^2 + y^2 = 1 - C^2\} \end{aligned}$$

ist ein Kreis mit Radius  $\sqrt{1 - C^2}$  und Zentrum  $(0, 0)$ . Bemerke: Da  $f$  nur Werte in  $[0, 1]$  annimmt, macht es keinen Sinn  $C \notin [0, 1]$  zu betrachten. ■

**Beispiel 1.1.2** ○○○ Veranschauliche die durch  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{y}{1+x^2}$  beschriebene Fläche im Bereich  $[-2, 2]^2$  durch Niveaulinien.

**Lösung:** Um Niveaulinien zu berechnen, setzen wir bestimmte Werte für  $f(x, y) = C$  ein

$$\frac{y}{1+x^2} = C.$$

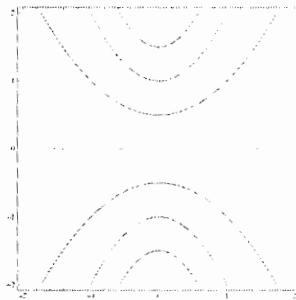
Wir lösen nach  $y$  auf und bekommen so eine Funktion in Abhängigkeit von  $x$ , die wir darstellen können. Zum Beispiel: Wir wählen zuerst  $C = 0$ . Daraus folgt:  $y = 0$ . Also erhalten wir die  $x$ -Achse. Für  $C = 0.5$  bekommen wir

$$\frac{y}{1+x^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2 + 1}{2}.$$

Es ergibt sich eine Parabel. Und so weiter: Wir wählen weitere Werte für  $C$  und erhalten entsprechende Niveaulinien. Wir können zum Beispiel die Resultate für einige Werte von  $C$  in der folgenden Tabelle zusammenfassen:

Niveau	Niveaulinie	Beschreibung
$C = 0$	$y = 0$	$x$ -Achse
$C = 0.5$	$y = 0.5(1 + x^2)$	Parabel mit Scheitel in $(0, 0.5)$
$C = 1$	$y = 1 + x^2$	Parabel mit Scheitel in $(0, 1)$
$C = 1.5$	$y = 1.5(1 + x^2)$	Parabel mit Scheitel in $(0, 1.5)$
$C = -0.5$	$y = -0.5(1 + x^2)$	Parabel mit Scheitel in $(0, -0.5)$
$C = -1$	$y = -(1 + x^2)$	Parabel mit Scheitel in $(0, -1)$
$C = -1.5$	$y = -1.5(1 + x^2)$	Parabel mit Scheitel in $(0, -1.5)$

Es ergibt sich somit das folgende Bild:



■

Allgemein gesagt, ordnet eine Funktion von  $n$  Variablen jedem Zahlentupel  $(x_1, \dots, x_n)$  eine Zahl  $f(x_1, \dots, x_n)$  zu. In Formeln heisst dies:

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n).$$

Definitionsbereich und Wertebereich sind wie im zweidimensionalen Fall erklärt. Zur geometrischen Veranschaulichung solcher Funktionen steht der Graph von  $f$

$$\text{Graph}(f) = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) | (x_1, \dots, x_n) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

nicht mehr zur Verfügung, da schon bei einer Funktion von drei Variablen ein vierdimensionaler Raum benötigt würde, der sich natürlich kaum für eine graphische Darstellung eignet. Am besten werden **Niveaupläne** benutzt, welche genauso wie Niveaulinien im zweidimensionalen Fall erklärt sind

$$\mathcal{N}_C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega | f(x_1, \dots, x_n) = C\}.$$

## 1.2 Partielle Ableitungen

Sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion von  $n$  Variablen. Unter **partieller Ableitung** versteht man üblicherweise die Ableitung einer Funktion von

mehreren Variablen nach einer dieser Variablen, wobei die anderen Variablen konstant gehalten werden. Wir definieren

**Definition 1.2.1 (Partielle Differenzierbarkeit)**  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heisst an der Stelle  $a \in \Omega$  nach der Variablen  $x_i$  partiell differenzierbar, falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

existiert. Der Limes  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  heisst partielle Ableitung von  $f$  nach  $x_i$ .

Die partielle Ableitung einer Funktion von mehreren Variablen  $f(x_1, \dots, x_n)$  nach der Variablen  $x_i$  ist somit die Ableitung von  $f$  nach  $x_i$  wobei alle anderen Variablen konstant gehalten werden. Die partielle Ableitung wird mit dem Symbol  $\partial$  notiert. Dies muss nicht mit dem  $d$  des totalen Differenzials verwechselt werden (siehe später).

Möchte man speziell darauf hinweisen, welche Variablen konstant gehalten werden, so kann man das durch Aufzählung der konstanten Variablen ausserhalb einer runden Klammer machen. Zum Beispiel, soll die Funktion  $f(x, y, z)$  partiell nach  $z$  abgeleitet werden, so kann man die konstant gehaltenen Variablen  $x$  und  $y$  optional anschreiben

$$\left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{x,y}.$$

Das ist eine sehr beliebte Praxis in der Thermodynamik.

Die  $n$  partiellen Ableitungen der Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  lassen sich in einem Vektor anordnen

$$\text{grad}(f) = \nabla f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Diesen Vektor nennt man *Gradient* von  $f$  und das Symbol  $\nabla$  wird *Nabla* genannt (Nabla-operator).

Die Regeln für die Bildung von partiellen Ableitungen sind offenbar dieselben wie für Ableitungen von Funktionen in einer Variablen. Es gelten die üblichen Produkt-, Quotient- und Kettenregeln, nur dass man alle anderen Variablen formal als Konstanten behandeln muss. Höhere partielle Ableitungen werden rekursiv definiert. Ist die Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  auf ganz  $\Omega$  partiell differenzierbar, so ist die partielle Ableitung von  $f$  nach  $x_i$  wieder eine Funktion auf  $\Omega$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

von der wir die partielle Differenzierbarkeit untersuchen können. Man bekommt auf diese Art und Weise die zweiten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f := \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

und höhere partielle Ableitungen. Bei der Bildung höherer Ableitungen ist es wichtig, auf die Reihenfolge der Differenziation aufzupassen. Denn  $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f$  und  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f$  sind nicht immer gleich (siehe Satz von Schwarz).

Zweifache partielle Ableitungen der Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  kann man in einer  $n \times n$  Matrix anordnen, die sogenannte **Hesse-Matrix**, welche so definiert ist:

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Sind die gemischten Ableitungen  $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f$  und  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f$  gleich, so ist die Hesse-Matrix symmetrisch.

**Beispiel 1.2.1** Berechne die ersten partiellen Ableitungen von  $f(x, y) = xe^y$  einmal mit der Definition und einmal mit der Regel "nach einer Variablen ableiten und alle anderen als Konstanten betrachten".

**Lösung:** Für festes  $y$  errechnet sich die partielle Ableitung nach  $x$  gemäß Definition

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)e^y - xe^y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{he^y}{h} = e^y.$$

Die partielle Ableitung nach  $y$  lautet entsprechend

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{xe^{y+h} - xe^y}{h} = xe^y \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = xe^y.$$

Dasselbe Resultat bekommt man mit der Regel "nach einer Variablen ableiten und alle anderen als Konstanten betrachten"

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y.$$

■

**Beispiel 1.2.2** Berechne die ersten partiellen Ableitungen von  $f(x, y) = xy$  einmal mit der Definition und einmal mit der Regel "nach einer Variablen ableiten und alle anderen als Konstanten betrachten". Berechne dann den Gradienten und die Hesse-Matrix von  $f$ .

**Lösung:** Die partielle Ableitung nach  $x$  errechnet sich nach der Definition

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)y - xy}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hy}{h} = y.$$

Analog dazu finden wir für die partielle Ableitung nach  $y$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(y+h) - xy}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hx}{h} = x.$$

Mit der Regel "nach einer Variablen ableiten und alle anderen als Konstanten betrachten" finden wir sofort die gleichen Resultate

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x.$$

Der Gradient von  $f$  lautet somit

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Für die zweiten partiellen Ableitungen gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1.$$

Die Hesse-Matrix ist somit

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

**Beispiel 1.2.3** Berechne die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto \sin(3x + y - 3z)$ . Berechne die Hesse-Matrix von  $f$ . Was stellt man fest?

**Lösung:** Für die ersten Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3 \cos(3x + y - 3z), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \cos(3x + y - 3z), \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= -3 \cos(3x + y - 3z). \end{aligned}$$

Für die zweiten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -9 \sin(3x + y - 3z), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\sin(3x + y - 3z), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= -9 \sin(3x + y - 3z), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -3 \sin(3x + y - 3z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= 9 \sin(3x + y - 3z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= 3 \sin(3x + y - 3z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}. \end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix lautet somit:

$$\begin{aligned}\text{Hess}(f) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9 \sin(3x + y - 3z) & -3 \sin(3x + y - 3z) & 9 \sin(3x + y - 3z) \\ -3 \sin(3x + y - 3z) & -\sin(3x + y - 3z) & 3 \sin(3x + y - 3z) \\ 9 \sin(3x + y - 3z) & 3 \sin(3x + y - 3z) & -9 \sin(3x + y - 3z) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Man stellt fest, dass die gemischten zweiten Ableitungen (z.B.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ) identisch sind. Die Hesse-Matrix ist somit symmetrisch.

■

**Beispiel 1.2.4** Berechne die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von  $f(x, y) = \sin(xy) + e^{x^2-y^2}$ . Was stellt man fest?

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= y \cos(xy) + 2xe^{x^2-y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x \cos(xy) - 2ye^{x^2-y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -y^2 \sin(xy) + 4x^2e^{x^2-y^2} + 2e^{x^2-y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -x^2 \sin(xy) + 4y^2e^{x^2-y^2} - 2e^{x^2-y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \cos(xy) - xy \sin(xy) - 4xye^{x^2-y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \cos(xy) - xy \sin(xy) - 4xye^{x^2-y^2}.\end{aligned}$$

Man stellt fest, dass die gemischten zweiten Ableitungen  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  identisch sind.

■

### 1.3 Der Satz von Schwarz

In allen Beispielen, die wir bisher betrachtet haben, "kommutieren" die zweifachen partiellen Ableitungen, in dem Sinne, dass die gemischten Ableitungen übereinstimmen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Für die einfache Funktion von zwei Variablen  $f(x, y) = x^2y^3$  gilt beispielsweise

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Das trifft für fast alle Funktionen, die in der Praxis vorkommen, zu. Trotzdem gibt es - wie immer in der Mathematik - pathologische Beispiele, für welche dies nicht der Fall ist. Wir fragen uns somit: Unter welchen Bedingungen stimmen die gemischten zweifachen partiellen Ableitungen überein? Damit die gemischten zweifachen partiellen Ableitungen übereinstimmen, müssen die zweifachen partiellen Ableitungen  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  stetig sein. Aus diesem Grund definiert man: Eine Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  soll von der **Klasse  $C^2$**  heissen, falls  $f$  auf  $\Omega$  zweimal partiell differenzierbar ist und die zweifachen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

auf  $\Omega$  stetig sind. Notiert wird  $f \in C^2(\Omega)$  und gesprochen "f ist 2-mal stetig differenzierbar" (mehr zu  $C^2$  Funktionen werden wir im nächsten Kapitel erfahren). Offenbar wird keine Stetigkeitsforderung an den ersten partiellen Ableitungen vorausgesetzt, da diese automatisch stetig sind (denn die Differenzierbarkeit impliziert die Stetigkeit). Dass für  $C^2$  Funktionen die zweiten partiellen Ableitungen kommutieren, ist der Gegenstand des Satzes von Schwarz

**Satz 1.3.1 (Schwarz)** Sei  $f \in C^2(\Omega)$ . Dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Allgemeiner besagt der Satz von Schwarz: Ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $\Omega$   $m$ -mal partiell differenzierbar und sind alle  $m$ -ten Ableitungen in  $\Omega$  stetig, so spielt die Reihenfolge der Differentiation bei allen partiellen Ableitungen der Ordnung  $\leq m$  keine Rolle. Eine solche Funktion nennt man von der **Klasse  $C^m$**  und gesprochen wird "f ist m-mal stetig differenzierbar". Zum Beispiel, für eine Funktion zweier Variablen  $f(x, y)$  von der Klasse  $C^5$  (= f ist 5-mal partiell differenzierbar und alle 5-ten partiellen Ableitungen sind stetig) gilt

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x^1 \partial y} = \frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y \partial x} = \frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y \partial x^2} = \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y \partial x^3} = \frac{\partial^5 f}{\partial y \partial x^4}.$$

Das Vertauschen der Reihenfolge bei gemischten Ableitungen kann viel Zeit sparen, wie das folgende Beispiel zeigt. Wir bestimmen die gemischte partielle Ableitung dritter Ordnung

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$$

für

$$f(x, y, z) = x^3 e^y + x^2 + z e^{xy}.$$

Eine Möglichkeit ist folgende:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x^3 e^y + x^2 + z e^{xy}) = 3x^2 e^y + 2x + y z e^{xy}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 e^y + 2x + y z e^{xy}) = 3x^2 e^y + z(1 + xy) e^{xy}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} (3x^2 e^y + z(1 + xy) e^{xy}) = (1 + xy) e^{xy}.\end{aligned}$$

$f(x, y, z)$  ist eine  $C^3$  Funktion, weil  $f$  und alle partiellen Ableitungen von  $f$  Kompositionen der stetigen Funktionen  $x, y, e^x, \dots$  sind. Somit spielt nach dem Satz von Schwarz die Reihenfolge der Differenziation keine Rolle. In der Tat ist es einfacher mit der Ableitung nach  $z$  anzufangen

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (x^3 e^y + x^2 + z e^{xy}) = e^{xy}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} (e^{xy}) = x e^{xy}. \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} (x e^{xy}) = (1 + xy) e^{xy}.\end{aligned}$$

**Beispiel 1.3.1** ○○○ Verifiziere den Satz von Schwarz für die folgenden Beispiele durch Nachrechnen

- a)  $f(x, y) = \sin(x + y^2) \cos x$
- b)  $f(x, y) = (1 + y^4)^x$
- c)  $f(x, y) = x e^y + y \sin(x^2) + 6yx$
- d)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  wobei  $(x, y) \neq (0, 0)$
- e)  $f(x, y) = \arctan(y/x)$   $x \neq 0$

Lösung: a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} (\sin(x + y^2) \cos x) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2y \cos(x + y^2) \cos x) \\ &= -2y \sin(x + y^2) \cos x - 2y \cos(x + y^2) \sin x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} (\sin(x + y^2) \cos x) \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\cos(x + y^2) \cos x - \sin(x + y^2) \sin x) \\ &= -2y \sin(x + y^2) \cos x - 2y \cos(x + y^2) \sin x\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \left( e^{x \log(1+y^4)} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{x \log(1+y^4)} \frac{4xy^3}{1+y^4} \right) \\
 &= e^{x \log(1+y^4)} \log(1+y^4) \frac{4xy^3}{1+y^4} + e^{x \log(1+y^4)} \frac{4y^3}{1+y^4} \\
 &= e^{x \log(1+y^4)} \frac{4y^3}{1+y^4} (x \log(1+y^4) + 1) \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \left( e^{x \log(1+y^4)} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( e^{x \log(1+y^4)} \log(1+y^4) \right) \\
 &= e^{x \log(1+y^4)} \log(1+y^4) \frac{4xy^3}{1+y^4} + e^{x \log(1+y^4)} \frac{4y^3}{1+y^4} \\
 &= e^{x \log(1+y^4)} \frac{4y^3}{1+y^4} (x \log(1+y^4) + 1)
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} (xe^y + y \sin(x^2) + 6yx) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (xe^y + \sin(x^2) + 6x) \\
 &= e^y + 2x \cos(x^2) + 6 \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} (xe^y + y \sin(x^2) + 6yx) \right) = \frac{\partial}{\partial y} (e^y + 2xy \cos(x^2) + 6y) \\
 &= e^y + 2x \cos(x^2) + 6
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} (\sqrt{x^2 + y^2}) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} (\sqrt{x^2 + y^2}) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \left( \arctan \frac{y}{x} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \left( \arctan \frac{y}{x} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-(x^2 + y^2) + y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}
 \end{aligned}$$

■

**Beispiel 1.3.2 ••○** Betrachte die folgende Funktion

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(x, y) = 0 \text{ für } (x, y) = (0, 0).$$

Berechne  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ . Zeige, dass  $f$  den Satz von Schwarz nicht erfüllt.

**Lösung:** Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  dürfen wir ohne Probleme die Regel "nach einer Variablen differenzieren"

und die anderen als Konstanten betrachten"

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)(y(x^2 - y^2) + 2x^2y) - xy(x^2 - y^2) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)(x(x^2 - y^2) - 2xy^2) - xy(x^2 - y^2) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Wenn  $x$  oder  $y$  gleich Null sind, haben wir ein Definitionsproblem in  $f(x, y)$ . Somit benutzen wir die Definition

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hy^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} y \left[ \frac{h^2 - y^2}{h^2 + y^2} \right] \stackrel{\rightarrow 1}{=} -y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, y+h) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, 0) - f(x, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, h) - f(x, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{xh^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} x \left[ \frac{x^2 - h^2}{x^2 + h^2} \right] \stackrel{\rightarrow 1}{=} x.$$

Es gilt somit für die zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 0}{h} = -1.$$

Die zweifachen partiellen Ableitungen sind nicht gleich. Dies liegt an der Unstetigkeit der beiden partiellen Ableitungen zweiter Ordnung an der Stelle  $(0, 0)$ .  $f$  ist an der Stelle  $(0, 0)$  nicht  $C^2$ .

Bemerkung: Wir werden im nächsten Kapitel lernen, wie man zeigen kann, dass eine Funktion zweier Veränderlichen stetig ist. Trotzdem zeige ich schon an dieser Stelle, wie man die Unstetigkeit der gemischten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von  $f$  an der Stelle  $(0, 0)$  sehen kann. Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  berechnen wir die gemischte Ableitung zweiter Ordnung mit der Regel "nach einer Variablen differenzieren und die anderen als Konstanten betrachten"

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + 10x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Nun wollen wir den Grenzwert  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ziehen, um die Stetigkeit von  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$  an der Stelle  $(0, 0)$  zu untersuchen. Dies macht man, indem man Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  einsetzt und den Grenzwert  $r \rightarrow 0$  zieht. Ist das Resultat von  $\varphi$  abhängig, so existiert der betrachtete Grenzwert nicht. In unserem Fall finden wir

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + 10x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)(r^4 \cos^4 \varphi + 10r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + r^4 \sin^4 \varphi)}{r^6} \\ &= (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)(\cos^4 \varphi + 10 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi). \end{aligned}$$

Das Resultat ist von  $\varphi$  abhängig, sodass  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$  nicht existiert. Somit ist  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$  an der Stelle  $(0, 0)$  unstetig!

■

## 1.4 Vektorwertige Funktionen

Betrachtet man  $m$  Funktionen  $f_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, m$  von  $n$  Variablen und ordnet man diese in einem Vektor an, so bekommt man eine vektorwertige Funktion von  $n$  Variablen. In Formeln heisst es

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Vektorwertige Funktionen ordnen somit jedem Punkt  $(x_1, \dots, x_n)$  des Definitionsbereiches  $\Omega$  einen Vektor mit  $m$  Komponenten zu. Natürlich heisst die vektorwertige Funktion  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  an der Stelle  $a \in \Omega$  partiell differenzierbar, falls jede der Komponenten  $f_i$  von  $f$  in  $a$  partiell differenzierbar ist. In anderen Worten: Partielle Ableitungen werden komponentenweise gebildet. Das *Differenzial* von  $f$  ist die folgende Matrix, welche die  $n$  partiellen Ableitungen aller  $m$  Komponenten von  $f$  enthält

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Diese  $m \times n$  Matrix wird oft auch *Jacobi-Matrix* genannt und ist, wie wir sehen werden, die Verallgemeinerung der üblichen totalen Ableitung des eindimensionalen Falls.<sup>1</sup>

**Beispiel 1.4.1** Berechne das Differenzial  $df$  (Jacobi-Matrix) für die folgenden Funktionen

- a)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- b)  $f(x, y) = (xy, y)$
- c)  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, xyz)$
- d)  $f(x, y) = (x^2 + y^2, e^x, xy^2)$
- e)  $f(x, y) = (\sin(x^2 + y^2 + x^3 y^6), \log((x^2 + y^2)e^x))$  ( $x, y \neq (0, 0)$ ).

**Lösung:** a) Es handelt sich um eine Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Das Differenzial (Jacobi-Matrix) ist somit eine  $1 \times 3$  Matrix (ein Zeilenvektor) mit Komponenten

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (2x, 2y, 2z).$$

<sup>1</sup>Die Jacobi-Matrix ist nicht mit der Hesse-Matrix zu verwechseln: Die Jacobi-Matrix ist die Matrix, welche die  $m \cdot n$  partiellen Ableitungen erster Ordnung einer Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  enthält, während die Hesse-Matrix die Matrix ist, welche die  $n^2$  partiellen Ableitungen zweiter Ordnung einer Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  enthält. Im Gegensatz zur Jacobi-Matrix ist die Hesse-Matrix immer quadratisch.

**b)** Es handelt sich um eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Das Differenzial (Jacobi-Matrix) ist somit eine  $2 \times 2$  Matrix mit Komponenten

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**c)** Es handelt sich um eine Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Das Differenzial (Jacobi-Matrix) ist somit eine  $2 \times 3$  Matrix mit Komponenten

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}.$$

**d)** Es handelt sich um eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Das Differenzial (Jacobi-Matrix) ist somit eine  $3 \times 2$  Matrix mit Komponenten

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ e^x & 0 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}.$$

**e)** Es handelt sich um eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Das Differenzial (Jacobi-Matrix) ist somit eine  $2 \times 2$  Matrix mit Komponenten

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x + 3x^2y^6)\cos(x^2 + y^2 + x^3y^6) & (2y + 6x^3y^5)\cos(x^2 + y^2 + x^3y^6) \\ \frac{2x}{x^2+y^2} + 1 & \frac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Beachte:  $\log((x^2 + y^2)e^x) = \log(x^2 + y^2) + x$ . ■

**Beispiel 1.4.2** ◦ ◦ ◦ Die Transformation zu Polarkoordinaten lautet  $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ . Berechne das Differenzial  $df$  (Jacobi-Matrix).

**Lösung:** Es handelt sich um eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Das Differenzial (Jacobi-Matrix) ist somit eine  $2 \times 2$  Matrix mit Komponenten

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

■

## 1. FUNKTIONEN VON MEHREREN VARIABLEN UND PARTIELLE ABLEITUNGEN

## Kapitel 2

# Stetigkeit und Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

### 2.1 Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

Genauso wie im eindimensionalen Fall, heisst eine Funktion von mehreren Variablen  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  *stetig*, falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

d.h.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert und an der Stelle  $x_0$  gleich  $f(x_0)$  ist. Beispiele stetiger Funktionen sind Polynome, rationale Funktionen (solange der Nenner nicht verschwindet), trigonometrische und hyperbolische Funktionen, die Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion, Potenzen und alle Kompositionen solcher Funktionen. Soweit so gut. Die Probleme entstehen aber, sobald man mit einem konkreten Beispiel konfrontiert ist. Nehmen wir zum Beispiel an, dass wir die folgende Funktion auf Stetigkeit untersuchen wollen

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}.$$

Man kann natürlich, genauso wie im eindimensionalen Fall, argumentieren, dass für alle  $(x, y) \neq (0, 0)$  die Funktion stetig ist, weil sie eine Zusammensetzung elementarer stetiger Funktionen ist. Konkret:  $x$  und  $y$  sind stetig, somit auch  $x^2$  und  $y^2$ , also auch  $x^2 - y^2$  und  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Ferner auch  $\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  solange der Nenner nicht verschwindet<sup>1</sup>. Die Stelle  $(x, y) = (0, 0)$  muss man aber separat untersuchen, da bei  $(x, y) = (0, 0)$  der Nenner verschwindet. Um  $f$  auf Stetigkeit in  $(0, 0)$  zu untersuchen, würden wir gerne

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

<sup>1</sup>“Summe, Differenz, Produkt, Quotient (falls Nenner  $\neq 0$ ) und die Zusammensetzung stetiger Funktionen sind stetig”: Dies ist ein sehr nützlicher Merksatz, um die Stetigkeit vieler Funktionen nachzuweisen.

zeigen können. Dies verlangt aber die Bestimmung eines zweidimensionalen Limes. Wie geht man in solchen Fällen vor? Wie berechnet man einen zweidimensionalen Grenzwert? Eine erste Idee könnte folgende sein: Wir setzen  $x = 0$  und lassen  $y$  gegen 0 streben. Wir bekommen dann einen eindimensionalen Grenzwert<sup>2</sup>

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0^2 - y^2}{\sqrt{0^2 + y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{|y|} = 0.$$

Dann könnten wir  $y = 0$  setzen und  $x$  gegen 0 streben lassen. Wir bekommen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0^2}{\sqrt{x^2 + 0^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|} = 0.$$

Sind wir fertig? Nein! Denn es gibt unendlich viele Möglichkeiten  $(x, y)$  gegen  $(0, 0)$  streben zu lassen. Man könnte zum Beispiel  $y = x$  setzen und dann  $x \rightarrow 0$  streben lassen

$$\lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x^2}} = 0.$$

Bisher haben wir den Grenzwert  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  so bestimmt, dass wir  $(x, y)$  entlang dreier spezifischer Richtungen nach  $(0, 0)$  haben streben lassen. Um sicher zu sein, dass der Grenzwert existiert, müssen wir alle möglichen Richtungen untersuchen und zeigen, dass man in allen Situationen denselben Wert (hier 0) als Resultat kriegt. Wie kann man das zeigen? Ein sehr einfacher aber sehr wichtiger Trick erlaubt dies. Der Trick besteht darin, Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  einzusetzen. Die Variable  $r$  beschreibt die Annäherung zum Nullpunkt, während die Variable  $\varphi$  alle möglichen Richtungen nach  $(0, 0)$  beschreibt. Die Polarkoordinaten erlauben sozusagen die ‘‘Richtung’’ von der ‘‘Annäherung nach  $(0, 0)$ ’’ zu trennen. Darum muss man den Grenzwert  $\lim_{r \rightarrow 0}$  bilden, wenn einmal Polarkoordinaten eingesetzt wurden. Wir bleiben somit mit einem eindimensionalen Grenzwert, für den wir wissen, was zu tun ist. Ist das Resultat von  $\varphi$  abhängig, so existiert der Grenzwert nicht, da sein Wert von der Richtung abhängt. Was heißt das konkret? In unserem Fall würden wir einfach schreiben<sup>3</sup>

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi}} = \lim_{r \rightarrow 0} \boxed{r} \cdot \boxed{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)} \stackrel{\text{beschränkt}}{=} 0.$$

Mit dem ‘‘**Polarkoordinaten-Trick**’’ haben wir gezeigt, dass der Grenzwert  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  gleich Null ist, unabhängig von der gewählten Richtung nach  $(0, 0)$ . Die Funktion  $f(x, y)$  ist somit an der Stelle  $(x, y) = (0, 0)$  stetig.

---

<sup>2</sup>Wichtige Erinnerung: Bei der Wurzel eines Quadrates muss man immer Betragsstriche setzen, d.h.  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

<sup>3</sup>Beachte: 1)  $r$  ist immer positiv. Somit ist  $\sqrt{r^2} = r$ , d.h. man darf Betragsstriche vergessen. 2)  $\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$  ist beschränkt, weil  $\sin \varphi, \cos \varphi$  für alle  $\varphi$  nur Werte im Intervall  $[-1, 1]$  annehmen. Diese Beobachtung ist sehr wichtig, weil wir dann wissen, dass wir nicht in einer Situation  $0 \cdot \infty$  sind, sodass  $\lim_{r \rightarrow 0} r(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$  wirklich gleich Null ist!

**Beispiel 2.1.1 • o o Berechne die folgenden Grenzwerte**

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{x^4 + y^6}$$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{2x^2 + y^2}$$

**Lösung:** a) Wir wenden den Polarkoordinaten-Trick an. Wir setzen Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  ein und lassen  $r \rightarrow 0$  gehen (beachte wiederum, dass  $r$  positiv ist):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r|\cos \varphi + \sin \varphi|}{r} = |\cos \varphi + \sin \varphi|.$$

Da das Resultat von  $\varphi$  (von der Richtung) abhängt, existiert dieser Grenzwert nicht.

b) Mit dem Polarkoordinaten-Trick finden wir

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{x^4 + y^6} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(r^2 \cos \varphi \sin \varphi)}{\boxed{r^4 \cos^4 \varphi} + \boxed{r^6 \sin^6 \varphi}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(r^2 \cos \varphi \sin \varphi)}{r^4 \cos^4 \varphi}.$$

dominiert    klein

Um den obigen Grenzwert zu bestimmen, erweitern wir oben und unten mit  $\sin^2 \varphi$  und benutzen  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ . Also

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{x^4 + y^6} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\boxed{1 - \cos(r^2 \cos \varphi \sin \varphi)}}{\boxed{r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\sin^2 \varphi}{2 \cos^2 \varphi}.$$

$\rightarrow \frac{1}{2}$

Da das Resultat von  $\varphi$  (von der Richtung) abhängt, existiert dieser Grenzwert nicht.

c) Mit dem Polarkoordinaten-Trick finden wir

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{2x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{r^2 \cos^2 \varphi \cdot r^2 \sin^2 \varphi}{2r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi}}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cancel{r^2}}{\cancel{r^2}} \cdot \frac{\frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + 1}}{\overset{\text{beschränkt}}{\cos^2 \varphi + 1}} = 0.$$

Der Grenzwert ist Null, weil  $\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi / (\cos^2 \varphi + 1)$  beschränkt ist (diese Beobachtung ist sehr wichtig, weil wir dann wissen, dass wir nicht in einer Situation  $0 \cdot \infty$  sind). Dies ergibt sich aus  $\sin \varphi, \cos \varphi \in [-1, 1]$  zusammen mit der Tatsache, dass  $1 + \cos^2 \varphi \in [1, 2]$ , sodass der Nenner nicht verschwindet.

■

**Beispiel 2.1.2 • o o Ist**

$$f(x,y) = 0 \text{ für } (x,y) = (0,0), \quad f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0)$$

stetig?

**Lösung:** 1) Für  $(x,y) \neq (0,0)$  ist  $f(x,y)$  Komposition stetiger Funktionen. Somit ist  $f(x,y)$  stetig

(wir haben die oben erwähnten Regeln: "Summe, Differenz, Produkt, Quotient (falls Nenner  $\neq 0$ ) und die Zusammensetzung stetiger Funktionen sind stetig").

2) Probleme gibt es bei  $(x, y) = (0, 0)$ , da der Nenner  $x^2 + y^2$  dort verschwindet. Wir müssen somit den Punkt  $(x, y) = (0, 0)$  separat untersuchen. Mit dem Polarkoordinaten-Trick können wir den zweidimensionalen Grenzwert bestimmen

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi}{r^2} = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi.$$

Da der Limes von  $\varphi$  (also von der Richtung) abhängt, existiert  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  nicht. Somit ist  $f(x, y)$  an der Stelle  $(0, 0)$  unstetig. ■

**Beispiel 2.1.3 ••• Ist**

$$f(x, y) = 0 \text{ für } (x, y) = (0, 0), \quad f(x, y) = \sqrt{|x^3 - 3y^3|} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \text{ sonst}$$

*stetig?*

**Lösung:** 1) Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  ist  $f(x, y)$  Komposition stetiger Funktionen. Somit ist  $f(x, y)$  stetig (wir haben die oben erwähnten Regeln: "Summe, Differenz, Produkt, Quotient (falls Nenner  $\neq 0$ ) und die Zusammensetzung stetiger Funktionen sind stetig").

2) Probleme gibt es bei  $(x, y) = (0, 0)$ . Wir müssen somit den Punkt  $(x, y) = (0, 0)$  separat untersuchen. Mit dem Polarkoordinaten-Trick können wir den zweidimensionalen Grenzwert bestimmen<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{|x^3 - 3y^3|} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{|r^3 \cos^3 \varphi - 3r^3 \sin^3 \varphi|} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{r^2}}\right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \boxed{r^{3/2}} \cdot \boxed{\sqrt{|\cos^3 \varphi - 3 \sin^3 \varphi|}} \cdot \boxed{\sin\left(\frac{1}{r}\right)} = 0. \end{aligned}$$

Da  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ , ist  $f(x, y)$  an der Stelle  $(0, 0)$  stetig. ■

**Beispiel 2.1.4 ••• Für welche  $\alpha, \beta > 0$  ist**

$$f(x, y) = 0 \text{ für } (x, y) = (0, 0), \quad f(x, y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0)$$

*stetig?*

**Lösung:** 1) Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  ist  $f(x, y)$  Komposition stetiger Funktionen. Somit ist  $f(x, y)$  stetig (wir haben die oben erwähnten Regeln: "Summe, Differenz, Produkt, Quotient (falls Nenner  $\neq 0$ )

<sup>4</sup>Dass  $\sin\left(\frac{1}{r}\right)$  beschränkt ist, ergibt sich einfach aus  $\sin x \in [-1, 1]$ , egal wie gross das Argument  $x$  ist.

und die Zusammensetzung stetiger Funktionen sind stetig“).

2) Probleme gibt es bei  $(x, y) = (0, 0)$ . Wir müssen somit den Punkt  $(x, y) = (0, 0)$  separat untersuchen. Da  $f(0, 0) = 0$  ist  $f$  an der Stelle  $(0, 0)$  stetig, falls

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} = 0.$$

Mit dem Polarkoordinaten-Trick können wir den zweidimensionalen Grenzwert bestimmen

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^\alpha |\cos \varphi|^\alpha r^\beta |\sin \varphi|^\beta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \begin{cases} \rightarrow 0 & \text{falls } \alpha + \beta > 2 \\ r^{\alpha + \beta - 2} & \end{cases} \cdot \boxed{|\cos \varphi|^\alpha |\sin \varphi|^\beta}.$$

Somit ist  $f(x, y)$  genau dann an der Stelle  $(0, 0)$  stetig, wenn  $\alpha + \beta > 2$ .

■

## 2.2 Differenzierbarkeit

### 2.2.1 Partielle Differenzierbarkeit und totale Differenzierbarkeit

Differenzierbarkeit im  $\mathbb{R}^n$  unterscheidet sich teils deutlich von der Differenzierbarkeit in nur einer Dimension. Dies liegt meistens in der Tatsache, dass in der mehrdimensionalen Differentialrechnung zwischen partieller Differenzierbarkeit und (totaler) Differenzierbarkeit unterschieden wird. Die Definition der partiellen Differenzierbarkeit lautet

**Definition 2.2.1 (Partielle Differenzierbarkeit)**  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heisst an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  in Richtung  $e_i$  partiell differenzierbar, falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

existiert. Allgemeiner, für  $v \in \mathbb{R}^n$  heisst der Ausdruck (falls existent)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} =: D_v f(x_0)$$

Richtungsableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$  in Richtung  $v$ .

Die Definition der (totalen) Differenzierbarkeit lautet

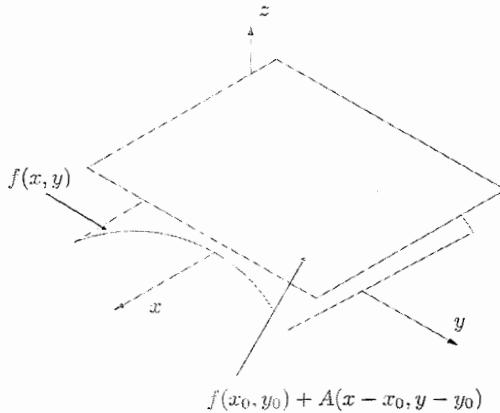
**Definition 2.2.2 ((Totale) Differenzierbarkeit)**  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heisst an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar, falls eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (also eine  $m \times n$  Matrix) existiert für welche Folgendes gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0.$$

Im eindimensionalen Fall reicht für die Differenzierbarkeit nur die Existenz der Ableitung als Grenzwert. In mehreren Dimensionen ist die Existenz der partiellen Ableitungen *per se* nicht genug. Die Existenz aller partiellen Ableitungen impliziert die partielle Differenzierbarkeit. Die totale Differenzierbarkeit, hingegen, verlangt etwas mehr:  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist an der Stelle  $x_0$  (total) differenzierbar, falls  $f$  in der Nähe des Punktes  $x_0$  durch die lineare Funktion

$$f(x_0) + A(x - x_0)$$

“gut” approximiert wird. “Gut” bedeutet in diesem Kontext, dass der Restterm  $\text{Rest}_{x_0}(x) =$



$f(x) - (f(x_0) + A(x - x_0))$  (der Fehler bei der Approximation) im Vergleich zu der schon sehr kleinen Grösse  $|x - x_0|$  klein ist. d.h.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|\text{Rest}_{x_0}(x)|}{|x - x_0|} = 0.$$

Diese Bedingung ist stärker als die Existenz der partiellen Ableitungen: Die Differenzierbarkeit impliziert die partielle Differenzierbarkeit, aber nicht umgekehrt.

Die Matrix  $A$  wird als die (*totale*) Ableitung von  $f$  im Punkt  $x_0$  bezeichnet und geschrieben wird oft  $f'(x_0) = A$ . Ist  $f$  überall in  $\Omega$  differenzierbar, so heisst  $f$  auf  $\Omega$  differenzierbar. Auf einen ersten Blick scheint die Definition der Differenzierbarkeit in  $\mathbb{R}^n$  kompliziert zu

sein: Was ist diese lineare Abbildung  $A$ , von der man in der Definition spricht? Wie bestimmt man diese? Muss man alle möglichen  $m \times n$  Matrizen untersuchen? Die Antwort auf diese Frage ist aus der Definition nicht direkt klar. Es ist aber einfach zu zeigen, dass falls  $f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar ist, so gilt

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} = \text{Jacobi-Matrix an der Stelle } x_0 = df(x_0).$$

Um die Differenzierbarkeit einer vorgelegten Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  zu überprüfen, muss man also einfach die Jacobi-Matrix an der entsprechenden Stelle  $x_0$  berechnen und die Definition 2.2.2 mit  $A = df(x_0)$  verifizieren!

Natürlich ist es auch in der mehrdimensionalen Differentialrechnung richtig, dass Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten (falls Nenner nicht verschwindet) und Kompositionen differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar sind. Dieses Resultat liefert ein sehr nützliches Argument, um die Differenzierbarkeit vieler Funktionen zu diskutieren.

### 2.2.2 Funktionen von der Klasse $C^k$

Eine Funktion  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heisst von der *Klasse  $C^1$* , falls  $f$  in jedem Punkt  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen von  $f$  auf  $\Omega$  stetig sind. Im Allgemeinen heisst eine Abbildung  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  von der *Klasse  $C^k$* , falls alle die partiellen Ableitungen der Ordnung  $k$  existieren und stetig auf  $\Omega$  sind. Die Menge der Abbildungen  $f$  der Klasse  $C^k$  auf der offenen Menge  $\Omega$  bezeichnet man mit  $C^k(\Omega)$ . Man sagt, dass  $f$  von der *Klasse  $C^\infty$*  ist, falls  $f$  von der Klasse  $C^k$  für alle  $k$  ist. Mathematisch:

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega).$$

Man kann zeigen, dass

$$f \in C^1(\Omega) \Rightarrow f \in C(\Omega), \quad \text{und} \quad f \in C^{k+1}(\Omega) \Rightarrow f \in C^k(\Omega)$$

gilt, sodass die folgenden Inklusionen gelten  $C(\Omega) \supset C^1(\Omega) \supset C^2(\Omega) \supset \dots \supset C^\infty(\Omega)$ .

Manchmal will man, dass die partiellen Ableitungen einer vorgelegten Abbildung  $f$  nicht nur auf der offenen Menge  $\Omega$  definiert sind, sondern auch auf dem Rand von  $\Omega$ . Wir wissen aber, dass partielle Ableitungen nur in inneren Punkten Sinn machen (da man einen Grenzwert bilden muss). In anderen Worten: Um eine partielle Ableitung an einer Stelle berechnen zu können, muss die betrachtete Funktion schon in einer Umgebung dieses Punktes definiert sein. Was bedeutet also, dass  $f$  am Rand  $\partial\Omega$  (wo die Menge  $\Omega$  endet) partiell differenzierbar ist? Es heisst, dass  $f$  in der Tat auf einer offenen Menge  $\Omega'$  partiell differenzierbar sein muss, welche  $\bar{\Omega}$  enthält. In diesem Sinne führt man folgende Notation ein:  $C^k(\bar{\Omega})$  bezeichnet die Menge aller  $f$  welche auf  $\Omega' \supset \bar{\Omega}$  von der Klasse  $C^k$  sind.

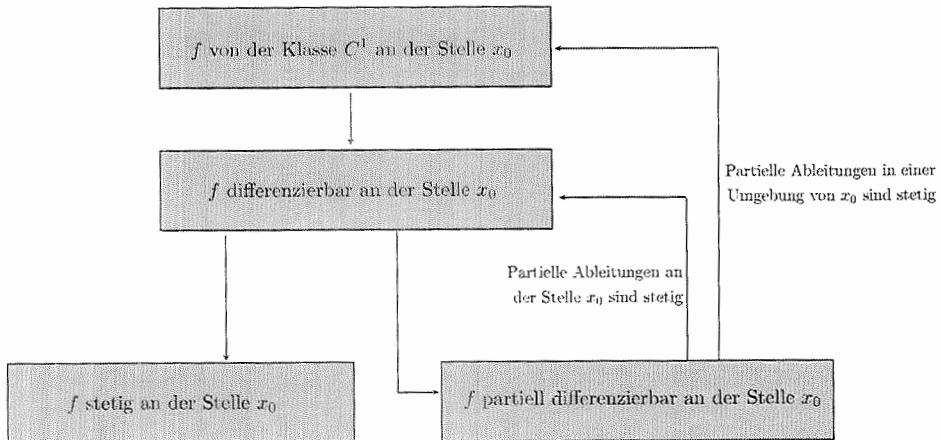
An dieser Stelle nennen wir einen weiteren Satz, der uns eine konkrete Methode bietet, um zu beweisen, dass eine vorgegebene Funktion differenzierbar ist. Der Satz lautet so

**Satz 2.2.1**  $f$  ist an der Stelle  $x_0$  differenzierbar  $\iff$  die partiellen Ableitungen von  $f$  existieren in einer Umgebung von  $x_0$  und sind an der Stelle  $x_0$  stetig.

Um zu beweisen, dass eine vorgelegte Funktion  $f$  differenzierbar ist, muss man also einfach die partielle Differenzierbarkeit von  $f$  und die Stetigkeit aller ihrer partiellen Ableitungen an der Stelle  $x_0$  zeigen. Dies muss man nicht mit dem Konzept einer  $C^1$  Funktion verwechseln:  $f$  ist an der Stelle  $x_0$  von der Klasse  $C^1$ , falls die partiellen Ableitungen von  $f$  in einer Umgebung von  $x_0$  existieren und in dieser Umgebung stetig sind!

### 2.2.3 Zusammenhang der Begriffe

Die folgende Tabelle zeigt den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Begriffen.



Die partielle Differenzierbarkeit ist der schwächste Begriff. Die Existenz aller Richtungsableitungen von  $f$  in  $x_0 \in \Omega$  allein reicht nicht aus, damit  $f$  auch stetig im Punkt  $x_0$  ist (siehe Beispiel 2.2.2). Damit  $f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar ist, muss die zusätzliche Bedingung gelten, dass die partiellen Ableitungen an der Stelle  $x_0$  stetig sind. Sind die partiellen Ableitungen in einer Umgebung von  $x_0$  stetig, so ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  von der Klasse  $C^1$ . Ist  $f$  von der Klasse  $C^1$ , so ist  $f$  differenzierbar. Ist  $f$  differenzierbar, so ist  $f$  stetig.

### 2.2.4 Beispiele

Am besten schaut man sich einige Beispiele an.

**Beispiel 2.2.1** ○○○ Sind die folgenden Funktionen überall differenzierbar?

- a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow f(x, y) = (y - 3x^2)(2y - x^2)$
- b)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xyz$
- c)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow f(x, y) = \frac{\sin(e^{x+y})}{e^{x+y}+1}$
- d)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) = (\sin(xyz), z^2 \cos(xy^2))$

**Lösung:** Alle diese Funktionen sind Zusammensetzungen von differenzierbaren Funktionen. Somit sind sie überall differenzierbar. Für c): Ein einziges Problem gibt es, wenn der Nenner verschwindet. Da  $e^{x+y} + 1 > 0$  ist, ist dies aber nie der Fall!

**Beispiel 2.2.2** •○○ Betrachte

$$f(x, y) = 0 \text{ für } (x, y) = (0, 0), \quad f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^4} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0).$$

Zeige, dass im Punkt  $(0, 0)$  alle Richtungsableitungen von  $f$  existieren, aber dass  $f$  an der Stelle  $(0, 0)$  unstetig ist.

**Lösung:** Wir berechnen die Richtungsableitung von  $f$  an der Stelle  $(0, 0)$  in einer beliebigen Richtung  $v = (a, b) \neq (0, 0)$ <sup>5</sup> mittels der Definition (2.2.1)

$$\begin{aligned} D_v f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + ha, 0 + hb) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2ha \cdot h^2 b^2}{h^2 a^2 + h^4 b^4} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \cdot 2ab^2}{h^3 a^2 + h^5 b^4}. \end{aligned}$$

Es gibt zwei Situationen. Falls  $a \neq 0$

$$D_v f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \cdot 2ab^2}{\boxed{h^3 a^2} + \boxed{h^5 b^4}} = \frac{2ab^2}{a^2} = \frac{2b^2}{a}.$$

dominant      klein

Falls  $a = 0$

$$D_v f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \cdot 0}{0 + h^5 b^4} = 0.$$

<sup>5</sup>Bedeutet:  $a$  und  $b$  nicht gleichzeitig Null!

Der Fall  $b = 0$  ist nicht problematisch, weil der Term  $h^3 a^2$  über den Term  $h^5 b^4$  für  $h \rightarrow 0$  dominiert. Somit existieren im Punkt  $(0, 0)$  alle Richtungsableitungen von  $f$ . Dennoch ist  $f$  in  $(0, 0)$  unstetig. Denn mit dem Polarkoordinaten-Trick bekommen wir

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{\boxed{r^2 \cos^2 \varphi} + r^4 \sin^4 \varphi} = \lim_{r \rightarrow 0} 2r \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$

dominant

Der Grenzwert  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  existiert nicht, weil der Term  $\frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$  bei  $\varphi = \pi/2$  gleich  $\infty$  ist. Somit ist  $f$  an der Stelle  $(0, 0)$  unstetig. Das Beispiel zeigt, dass die Existenz aller Richtungsableitungen i.Allg. die Stetigkeit nicht impliziert. ■

**Beispiel 2.2.3 ••• Ist**

$$f(x, y) = 0 \text{ für } (x, y) = (0, 0), \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0)$$

auf  $\mathbb{R}^2$  differenzierbar? Ist  $f$  von der Klasse  $C^1$ ?

**Lösung:** 1) Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  ist  $f(x, y)$  Komposition differenzierbarer Funktionen. Somit ist  $f(x, y)$  differenzierbar (hier haben wir die Regel angewandt: "Summe, Differenz, Produkt, Quotient (falls Nenner  $\neq 0$ ) und die Zusammensetzung differenzierbarer Funktionen sind differenzierbar").  
 2) Eventuell gibt es ein Problem bei  $(x, y) = (0, 0)$ , da der Nenner  $x^2 + y^2$  dort verschwindet. Wir müssen somit den Punkt  $(x, y) = (0, 0)$  separat untersuchen. Es gibt grundsätzlich zwei Varianten, das Problem zu lösen. Aber zuerst untersuchen wir  $f$  auf Stetigkeit.

Stetigkeit in  $(0, 0)$ : Mit dem Polarkoordinaten-Trick finden wir

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \boxed{r^2} \cdot \boxed{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \stackrel{\rightarrow 0}{\text{beschränkt}} = 0.$$

Der Grenzwert  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  existiert und ist gleich  $f(0, 0) = 0$ . Somit ist  $f$  an der Stelle  $(0, 0)$  stetig.

Differenzierbarkeit in  $(0, 0)$ : Variante 1. Die erste Variante besteht darin, die Jacobi-Matrix an der Stelle  $(0, 0)$  zu berechnen und die Definition 2.2.2 mit dieser Matrix zu überprüfen. Wir berechnen also die partiellen Ableitungen in  $(0, 0)$ . Da die Funktion stückweise definiert ist, müssen wir die Definition anwenden:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot h^2}{h^2 + 0} - 0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 \cdot 0}{0 + h^2} - 0}{h} = 0.$$

Darum lautet die zu untersuchende Matrix  $A$

$$A = (0, 0).$$

In anderen Worten: Wir müssen die Definition der Differenzierbarkeit mit der Matrix  $A = (0, 0)$  überprüfen.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - (0,0) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \right|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Nun haben wir wiederum einen zweidimensionalen Grenzwert, den wir mit dem Polarkoordinaten-Trick berechnen können:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{r^3} = \lim_{r \rightarrow 0} \boxed{r^0} \cdot \boxed{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \stackrel{\text{beschränkt}}{=} 0.$$

Die Definition ist erfüllt. Somit ist  $f$  an der Stelle  $(0,0)$  differenzierbar.

**Differenzierbarkeit in  $(0,0)$ : Variante 2.** In der zweiten Variante zeigen wir, dass  $f$  partiell differenzierbar ist und dass die partiellen Ableitungen stetig sind. Für  $(x,y) \neq (0,0)$  dürfen wir natürlich problemlos die Regel "nach einer Variablen ableiten und alle anderen als Konstanten betrachten" anwenden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2x^2y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von  $f(x,y)$  sind an jeder Stelle  $(x,y) \neq (0,0)$  offenbar stetig (da Komposition stetiger Funktionen). Wir müssen somit nur zeigen, dass die partiellen Ableitungen an der Stelle  $(0,0)$  stetig sind. Mit dem Polarkoordinaten-Trick finden wir

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^3 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{r^2} - \frac{2r^5 \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi}{r^4} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \boxed{2r} \cdot \boxed{\sin^2 \varphi \cos \varphi} - \lim_{r \rightarrow 0} \boxed{2r} \cdot \boxed{\sin^2 \varphi \cos^3 \varphi} \stackrel{\text{beschränkt}}{=} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{r^2} - \frac{2r^5 \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi}{r^4} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \boxed{2r} \cdot \boxed{\sin \varphi \cos^2 \varphi} - \lim_{r \rightarrow 0} \boxed{2r} \cdot \boxed{\sin^3 \varphi \cos^2 \varphi} \stackrel{\text{beschränkt}}{=} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  partielle Ableitungen stetig in  $(0,0) \Rightarrow f \in C^1 \Rightarrow f$  ist an der Stelle  $(0,0)$  differenzierbar. ■

**Beispiel 2.2.4 ••• Ist**

$$f(x,y) = 0 \text{ für } (x,y) = (0,0), \quad f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0)$$

auf  $\mathbb{R}^2$  differenzierbar?

**Lösung:** 1) Für  $(x,y) \neq (0,0)$  ist  $f(x,y)$  Komposition differenzierbarer Funktionen. Somit ist

$f(x, y)$  differenzierbar (wiederum die Regel: "Summe, Differenz, Produkt, Quotient (falls Nenner  $\neq 0$ ) und die Zusammensetzung differenzierbarer Funktionen sind differenzierbar").

2) Probleme gibt es bei  $(x, y) = (0, 0)$ , da der Nenner  $x^2 + y^2$  dort verschwindet. Wir müssen somit den Punkt  $(x, y) = (0, 0)$  separat untersuchen. Wie üblich untersuchen wir  $f$  zuerst auf Stetigkeit.

Stetigkeit in  $(0, 0)$ : Wir benutzen nun den Polarkoordinaten-Trick und finden

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \varphi}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \overrightarrow{r} \cdot \boxed{\cos^3 \varphi} \stackrel{\text{beschränkt}}{=} 0 = f(0, 0).$$

$\Rightarrow f$  stetig in  $(0, 0)$ .

Differenzierbarkeit in  $(0, 0)$ : Wir bestimmen die partiellen Ableitungen in  $(0, 0)$  mit der Definition

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0.$$

Die zu untersuchende Matrix  $A$  ist somit

$$A = (1, 0).$$

d.h. wir müssen die Definition von Differenzierbarkeit mit  $A = (1, 0)$  verifizieren

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| f(x, y) - f(0, 0) - (1, 0) \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{pmatrix} \right|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Mit dem Polarkoordinaten-Trick

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{r^3 \cos^3 \varphi}{r^2} - r \cos \varphi}{r} = \cos^3 \varphi - \cos \varphi.$$

Da der Limes von  $\varphi$  (also von der Richtung) abhängt (und insbesondere ungleich Null ist), ist  $f$  an der Stelle  $(0, 0)$  nicht differenzierbar. ■

**Beispiel 2.2.5 ••• Ist die Funktion**

$$f(x, y) = 0 \text{ für } (x, y) = (0, 0), \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0)$$

auf  $\mathbb{R}^2$  differenzierbar?

**Lösung:** 1) Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  ist  $f(x, y)$  Komposition differenzierbarer Funktionen. Somit ist  $f(x, y)$  differenzierbar (wiederum die Regel angewandt: "Summe, Differenz, Produkt, Quotient (falls Nenner  $\neq 0$ ) und die Zusammensetzung differenzierbarer Funktionen sind differenzierbar").

2) Probleme gibt es bei  $(x, y) = (0, 0)$ , da der Nenner  $x^2 + y^2$  dort verschwindet. Wir müssen somit

den Punkt  $(x, y) = (0, 0)$  separat untersuchen. Wie üblich untersuchen wir  $f$  zuerst auf Stetigkeit. Mit dem Polarkoordinaten-Trick finden wir

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} = \sin \varphi \cos \varphi.$$

Da der Limes von  $\varphi$  (also von der Richtung) abhängt, ist  $f$  an der Stelle  $(0, 0)$  unstetig. Darum kann  $f$  nicht differenzierbar sein (da differenzierbare Funktionen automatisch stetig sind). Wir haben somit gelernt, dass es i.Allg. eine gute Sache ist, immer zuerst die Stetigkeit zu überprüfen. ■

**Beispiel 2.2.6 ••◦ Ist die Funktion**

$$f(x, y) = 0 \text{ für } (x, y) = (0, 0), \quad f(x, y) = \sqrt{|xy|} \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \text{ für } (x, y) \neq (0, 0)$$

auf  $\mathbb{R}^2$  differenzierbar? Ist sie von der Klasse  $C^1$ ?

- Lösung:** 1) Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  ist  $f$  Komposition differenzierbarer Funktionen, also differenzierbar  
2) Wir müssen den Punkt  $(0, 0)$  separat untersuchen.

**Stetigkeit in  $(0, 0)$ :** Mit dem Polarkoordinaten-Trick finden wir

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \sqrt{|xy|} \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{r \rightarrow 0} \boxed{\frac{\sqrt{|xy|} \sin\left(\frac{1}{r^2}\right)}{r}} = 0 = f(0, 0).$$

$\Rightarrow f$  stetig in  $(0, 0)$ .

**Differenzierbarkeit in  $(0, 0)$ :** Dazu müssen wir die partiellen Ableitungen in  $(0, 0)$  bestimmen. was man mithilfe der Definition machen muss (da  $f$  stückweise definiert ist). Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) - 0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) - 0}{h} = 0.$$

Die zu untersuchende Matrix  $A$  ist somit

$$A = (0, 0),$$

d.h. wir verifizieren die Definition der Differenzierbarkeit mit diesem  $A$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| f(x, y) - f(0, 0) - (0, 0) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \right|} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|xy|} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|xy|} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

Mit dem Polarkoordinaten-Trick haben wir

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|xy|} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \sqrt{|\sin \varphi \cos \varphi|} \sin\left(\frac{1}{r^2}\right)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{|\sin \varphi \cos \varphi|} \boxed{\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)}.$$

Da der Limes nicht existiert (und insbesondere ungleich Null ist), ist  $f$  an der Stelle  $(0,0)$  nicht differenzierbar. Insbesondere  $f$  ist nicht  $C^1$ . ■

**Beispiel 2.2.7 ••• Ist die Funktion**

$$f(x,y) = 0 \text{ für } (x,y) = (0,0), \quad f(x,y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \text{ für } (x,y) \neq (0,0)$$

auf  $\mathbb{R}^2$  differenzierbar? Ist  $f$  von der Klasse  $C^1$ ?

**Lösung: Differenzierbar?** 1) Für  $(x,y) \neq (0,0)$  ist  $f$  Komposition differenzierbarer Funktionen, also differenzierbar.

2) Wir müssen den Punkt  $(0,0)$  separat untersuchen. Wir rechnen partielle Ableitungen in  $(0,0)$  aus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{|h|}\right) - 0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{|h|}\right) - 0}{h} = 0.$$

Die zu untersuchende Matrix  $A$  ist also

$$A = (0,0).$$

Wir verifizieren nun die Definition mit diesem  $A$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - (0,0) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \right|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Wir benutzen Polarkoordinaten um den zweidimensionalen Limes zu berechnen

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \sin\left(\frac{1}{r}\right)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \overbrace{r}^{\text{beschränkt}} \cdot \overbrace{\sin\left(\frac{1}{r}\right)}^{\text{beschränkt}} = 0.$$

Somit ist  $f$  an der Stelle  $(0,0)$  differenzierbar.

**Klasse  $C^1$ ?**: Wir berechnen die partiellen Ableitungen für  $(x,y) \neq (0,0)$ . Dies darf man aufgrund der Regel "nach einer Variablen ableiten und alle anderen als Konstanten betrachten" tun

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Die partiellen Ableitungen von  $f(x,y)$  an jeder Stelle  $(x,y) \neq (0,0)$  sind offenbar stetig (Komposition stetiger Funktionen). Wir müssen somit nur zeigen, dass die partiellen Ableitungen an der Stelle

## 2.2. DIFFERENZIERBARKEIT

$(0,0)$  stetig sind d.h.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$  und  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ . Mit dem Polarkoordinaten-Trick finden wir

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \boxed{2r \cos \varphi \sin\left(\frac{1}{r}\right)} - \cos \varphi \cdot \boxed{\cos\left(\frac{1}{r}\right)}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  partielle Ableitungen sind nicht stetig  $\Rightarrow f$  ist nicht  $C^1$ .

■

**Beispiel 2.2.8** ••• Studiere die Differenzierbarkeit der folgenden Funktionen in  $(0,0)$ :

a)  $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$       b)  $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

**Lösung:** a) Die Funktion  $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  ist nicht differenzierbar in Null, weil die partiellen Ableitungen nicht existieren. Zum Beispiel

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}.$$

Dieser Grenzwert existiert nicht, da rechts- und linksseitige Grenzwerte nicht dasselbe Resultat ergeben: Der rechtsseitige Grenzwert lautet  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$  und der linksseitige Grenzwert ist  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$ . Die partielle Ableitung von  $f$  an der Stelle  $(0,0)$  in der  $x$ -Richtung existiert somit nicht, d.h.  $f$  ist an der Stelle  $(0,0)$  nicht partiell ableitbar. Somit kann  $f$  an der Stelle  $(0,0)$  nicht differenzierbar sein! Die Funktion ist trotzdem an der Stelle  $(0,0)$  stetig.

b) Wir starten mit den partiellen Ableitungen in  $(0,0)$ . Laut Definition

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Die zu untersuchende Matrix  $A$  ist somit

$$A = (0,0).$$

Wir verifizieren nun die Definition mit diesem  $A$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - (0,0) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \right|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Wir benutzen Polarkoordinaten um den zweidimensionalen Limes zu berechnen

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \sqrt{|\sin \varphi \cos \varphi|}}{r} = \sqrt{|\sin \varphi \cos \varphi|}.$$

Das Resultat hängt von  $\varphi$  (von der Richtung) ab. Somit existiert der obige Grenzwert nicht und  $f$  ist an der Stelle  $(0, 0)$  nicht differenzierbar.

■

**Beispiel 2.2.9 ••• Beweise, dass**

$$f(x, y) = 0 \text{ für } (x, y) = (0, 0), \quad f(x, y) = xy \log \log \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0)$$

von der Klasse  $C^1$  ist, aber nicht von der Klasse  $C^2$ .

**Lösung:** Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  ist  $f$  Komposition differenzierbarer Funktionen, also differenzierbar (und stetig). Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  errechnen sich die partiellen Ableitungen mit der Regel "nach einer Variable ableiten und die andere als eine Konstante betrachten"

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y \log \log \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2) \log \sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x \log \log \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x y^2}{(x^2 + y^2) \log \sqrt{x^2 + y^2}}.\end{aligned}$$

An der Stelle  $(x, y) = (0, 0)$  rechnen wir die partiellen Ableitungen gemäss der Definition

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot h \log \log(1/|h|) - 0}{h} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot 0 \log \log(1/|h|) - 0}{h} = 0.\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von  $f(x, y)$  sind also die folgenden Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ y \log \log \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2) \log \sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ x \log \log \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x y^2}{(x^2 + y^2) \log \sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}.$$

Um zu zeigen, dass  $f \in C^1$ , müssen wir nachweisen, dass  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  stetig sind. Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  sind  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  stetig, weil Kompositionen stetiger Funktionen. Wir

müssen also nur den Punkt  $(x, y) = (0, 0)$  betrachten<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( y \log \log \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2) \log \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( r \sin \varphi \log \log(1/r) + \frac{r^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{r^2 \log(r)} \right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( x \log \log \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x y^2}{(x^2 + y^2) \log \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( r \cos \varphi \log \log(1/r) + \frac{r^3 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{r^2 \log(r)} \right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0). \end{aligned}$$

Somit ist  $f$  von der Klasse  $C^1$ . Ist  $f$  auch von der Klasse  $C^2$ ? Dazu berechnen wir die zweifachen partiellen Ableitungen. Es gilt z.B.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0 + h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \log \log(1/|h|) = \infty. \quad (2.1)$$

Somit existiert die zweifache partielle Ableitung  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  nicht. Folglich ist  $f$  nicht von der Klasse  $C^2$ . ■

**Beispiel 2.2.10 •••** Für welche  $\alpha, \beta > 0$  ist

$$f(x, y) = 0 \text{ für } (x, y) = (0, 0), \quad f(x, y) = \frac{|x|^\alpha + |y|^{3-\beta}}{(x^2 + y^2)^{\beta/2}} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0)$$

stetig, partiell differenzierbar, differenzierbar?

**Lösung:** 1) Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  ist  $f$  Komposition differenzierbarer Funktionen, also differenzierbar (und stetig).

2) Wir müssen den Punkt  $(0, 0)$  separat untersuchen.

**Stetig?**  $f(x, y)$  ist an der Stelle  $(0, 0)$  genau dann stetig, wenn

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^\alpha + |y|^{3-\beta}}{(x^2 + y^2)^{\beta/2}} = 0.$$

Den Grenzwert bestimmen wir mit dem Polarkoordinaten-Trick

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^\alpha + |y|^{3-\beta}}{(x^2 + y^2)^{\beta/2}} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^\alpha |\cos \varphi|^\alpha + r^{3-\beta} |\sin \varphi|^{3-\beta}}{r^\beta} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \boxed{r^{\alpha-\beta} |\cos \varphi|^\alpha} + \boxed{r^{3-2\beta} |\sin \varphi|^{3-\beta}} \end{aligned}$$

Der Grenzwert ist nur gleich 0, wenn  $\alpha > \beta$  und  $3 - 2\beta > 0$ . Somit ist  $f$  genau dann an der Stelle  $(0, 0)$  stetig, wenn

$$\alpha > \beta \text{ und } \beta < \frac{3}{2}.$$

<sup>6</sup>Wir haben die folgenden Grenzwerte benutzt (De L'Hospital, siehe Analysis I):  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\log(x)} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow 0+} x \log(\log(1/x)) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log(\log(1/x))}{1/x} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/\log(1/x) \cdot (-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-x}{\log(x)} = 0$ .

Partiell differenzierbar? Wir berechnen die partiellen Ableitungen in  $(0, 0)$ . Für  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{|h|^\alpha}{(h^2)^{\beta/2}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{|h|^\alpha}{h^\beta} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^{\alpha-\beta}}{h}.$$

Der Grenzwert existiert (und ist gleich Null) nur für  $\alpha - \beta > 1$  (aufpassen: Für  $\alpha - \beta = 1$  stimmen links- und rechtsseitige Grenzwerte nicht). Analog für  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{|h|^{3-\beta}}{(h^2)^{\beta/2}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{|h|^{3-\beta}}{h^\beta} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^{3-2\beta}}{h} = 0.$$

Der Grenzwert existiert nur für  $3 - 2\beta > 1$ . Somit ist  $f$  genau dann an der Stelle  $(0, 0)$  partiell differenzierbar (mit partiellen Ableitungen gleich 0), wenn

$$\alpha > \beta + 1 \text{ und } \beta < 1.$$

Differenzierbar? Für  $\alpha > \beta + 1$  und  $\beta < 1$  ist die zu untersuchende Matrix  $A$

$$A = (0, 0).$$

Wir verifizieren nun die Definition mit diesem  $A$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - (0,0) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \right|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^\alpha + |y|^{3-\beta}}{(x^2 + y^2)^{(\beta+1)/2}}.$$

Wir benutzen Polarkoordinaten um den zweidimensionalen Limes zu berechnen

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^\alpha + |y|^{3-\beta}}{(x^2 + y^2)^{(\beta+1)/2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^\alpha |\cos \varphi|^\alpha + r^{3-\beta} |\sin \varphi|^{3-\beta}}{r^{\beta+1}}$$

gleich 0 falls  $\alpha - \beta - 1 > 0$ 
gleich 0 falls  $3 - 2\beta - 1 > 0$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \boxed{r^{\alpha - \beta - 1} |\cos \varphi|^\alpha} + \boxed{r^{3 - 2\beta - 1} |\sin \varphi|^{3-\beta}}$$

$f$  ist genau dann an der Stelle  $(0, 0)$  differenzierbar, wenn

$$\alpha > \beta + 1 \text{ und } \beta < 1.$$

■

**Beispiel 2.2.11 ••• Ist die folgende Funktion stetig? Differenzierbar?**

$$f(x, y, z) = 0 \text{ für } (x, y, z) = (0, 0, 0),$$

$$f(x, y, z) = \frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tanh \left( \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \text{ für } (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

**Lösung:** 1) Für  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  ist  $f$  Komposition differenzierbarer Funktionen, also differenzierbar (und stetig).

2) Wir müssen den Punkt  $(0, 0, 0)$  separat untersuchen.

Stetig?  $f(x, y, z)$  ist an der Stelle  $(0, 0, 0)$  genau dann stetig, wenn

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tanh \left( \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \right) = 0.$$

Wie kann man diesen Grenzwert bestimmen? Ganz einfach: mit Kugelkoordinaten. Wir schreiben also  $x = r \cos \varphi \sin \theta$ ,  $y = r \sin \varphi \sin \theta$ ,  $z = r \cos \theta$  und bilden den Grenzwert  $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tanh\left(\frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}\right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \sin^3 \varphi \sin^3 \theta}{r} \tanh\left(\frac{r^3 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta \cos \theta}{r^2}\right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \overbrace{r^2}^{\rightarrow 0} \cdot \overbrace{\sin^3 \varphi \sin^3 \theta}^{\text{beschränkt}} \cdot \overbrace{\tanh(r \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta \cos \theta)}^{\rightarrow 0} = 0. \end{aligned}$$

Somit ist  $f$  an der Stelle  $(0,0,0)$  stetig.

Differenzierbar? Wir berechnen die partiellen Ableitungen in  $(0,0,0)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0,0) - f(0,0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0. \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h,0) - f(0,0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{h^3}^{=0} \overbrace{\tanh(0)}^{=0} - 0}{h} = 0. \\ \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0,0+h) - f(0,0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Wir verifizieren also die Definition der Differenzierbarkeit mit  $A = (0,0,0)$

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\left| f(x,y,z) - f(0,0,0) - (0,0,0) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} \right|} \\ &= \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2 + z^2} \tanh\left(\frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}\right). \end{aligned}$$

Wir benutzen Kugelkoordinaten, um den dreidimensionalen Limes zu berechnen

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2 + z^2} \tanh\left(\frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}\right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \sin^3 \varphi \sin^3 \theta}{r^2} \tanh\left(\frac{r^3 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta \cos \theta}{r^2}\right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \overbrace{r}^{\rightarrow 0} \cdot \overbrace{\sin^3 \varphi \sin^3 \theta}^{\text{beschränkt}} \cdot \overbrace{\tanh(r \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta \cos \theta)}^{\rightarrow 0} = 0. \end{aligned}$$

$f$  ist somit an der Stelle  $(0,0,0)$  differenzierbar.



**Beispiel 2.2.12 •••** Betrachte die Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) = 0 \text{ für } x = 0, \quad f(x) = |x| \cdot g(x/|x|) \text{ für } x \neq 0,$$

mit  $g : S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Beweise die folgende Aussage

$$f \text{ im Ursprung differenzierbar} \Leftrightarrow g(x) = \alpha \cdot x \text{ für ein } \alpha \in \mathbb{R}^n.$$

**Lösung:**  $\Leftarrow$ : Wir müssen nur den Punkt  $x = 0$  betrachten. Was bedeutet, dass  $f$  an der Stelle  $x = 0$  differenzierbar ist? Es bedeutet einfach, dass es eine  $1 \times n$  Matrix  $A \in M_{1 \times n}(\mathbb{R})$  gibt, sodass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - f(0) - A(x - 0)|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - Ax|}{|x|} \stackrel{!}{=} 0.$$

Nun benutzen wir die Definition von  $f$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - Ax|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left| |x|g\left(\frac{x}{|x|}\right) - Ax \right|}{|x|} \stackrel{!}{=} 0.$$

Um den Grenzwert zu bestimmen, gehen wir in Polarkoordinaten über. In diesem Fall müssen wir aber die  $n$ -dimensionalen Polarkoordinaten benutzen, d.h. wir schreiben  $x = r \cdot x'$ , wobei  $r$  der Radius ist und  $x'$  ein Vektor auf  $S^{n-1}$ , der den Winkelanteil enthält. Es gilt somit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - Ax|}{|x|} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\left| rg\left(\frac{rx'}{r}\right) - A(rx') \right|}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} (|g(x') - Ax'|) = |g(x') - Ax'| \stackrel{!}{=} 0.$$

Es folgt somit

$$g(x') = Ax'.$$

Wir sind fast fertig. Wir schreiben einfach  $Ax'$  als  $A^T \cdot x'$ , wobei „ $\cdot$ “ das übliche Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Wir setzen somit  $\alpha = A^T$  (eine  $n \times 1$ -Matrix, also ein Vektor) und bekommen

$$g(x') = \alpha \cdot x'.$$

was nachzuweisen war.

$\Leftarrow$ : In diesem Fall wissen wir, dass  $g(x) = \alpha \cdot x$ . Setzen wir dies in die Definition von  $f$  ein, so bekommen wir

$$f(x) = |x|g\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|\alpha \cdot \left(\frac{x}{|x|}\right) = \alpha \cdot x.$$

$f$  ist somit eine lineare Funktion, also differenzierbar. ■

**Beispiel 2.2.13 •••** Es sei eine symmetrische Bilinearform  $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben.  
Betrachte die Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) = b(x, x).$$

Beweise, dass  $f$  an jeder Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar ist mit Ableitung

$$df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto df(x_0)v = 2b(v, x_0).$$

**Lösung:** Wir müssen einfach zeigen, dass  $f$  die Definition der Differenzierbarkeit an jeder Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit dem gegebenen  $df(x_0)$  erfüllt, d.h. dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)|}{|x - x_0|} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - 2b(x - x_0, x_0)|}{|x - x_0|} \stackrel{!}{=} 0.$$

Um die Rechnungen einfacher zu machen, führen wir  $\Delta x = x - x_0$  ein. Wir müssen somit Folgendes nachweisen

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - 2b(\Delta x, x_0)|}{|\Delta x|} \stackrel{!}{=} 0.$$

Wie machen wir das? Zuerst benutzen wir die Eigenschaften einer Bilinearform, um den Term  $f(x_0 + \Delta x)$  umzuschreiben

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &= b(x_0 + \Delta x, x_0 + \Delta x) = b(x_0, x_0 + \Delta x) + b(\Delta x, x_0 + \Delta x) \quad (\text{Linearität im 1. Argument}) \\ &= b(x_0, x_0) + b(x_0, \Delta x) + b(\Delta x, x_0) + b(\Delta x, \Delta x) \quad (\text{Linearität im 2. Argument}) \\ &= b(x_0, x_0) + 2b(\Delta x, x_0) + b(\Delta x, \Delta x) \quad (\text{Symmetrie}). \end{aligned}$$

Wir bekommen somit

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - 2b(\Delta x, x_0)|}{|\Delta x|} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|b(x_0, x_0) + 2b(\Delta x, x_0) + b(\Delta x, \Delta x) - b(x_0, x_0) - 2b(\Delta x, x_0)|}{|\Delta x|} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|b(\Delta x, \Delta x)|}{|\Delta x|}. \end{aligned}$$

Dann schätzen wir den Term  $|b(\Delta x, \Delta x)|$  ab. Es seien  $\Delta x_i$  die Komponenten von  $\Delta x$  in der Standardbasis  $e_i$ . Dann gilt

$$b(\Delta x, \Delta x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \Delta x_i \Delta x_j,$$

wobei  $b_{ij}$  die Matrixelemente von  $b$  in der Standardbasis sind. Mit der Dreiecksungleichung finden wir

$$|b(\Delta x, \Delta x)| = \left| \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \right| \stackrel{\Delta-\text{Ungl.}}{\leq} \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}| |\Delta x_i| |\Delta x_j|.$$

Nun wollen wir den Term  $|\Delta x_i| |\Delta x_j|$  abschätzen. Wie? Entweder ist  $|\Delta x_i|$  grösser als  $|\Delta x_j|$  oder umgekehrt. Im ersten Fall gilt

$$|\Delta x_i| |\Delta x_j| \leq |\Delta x_i|^2 \leq |\Delta x_1|^2 + \cdots + |\Delta x_i|^2 + \cdots + |\Delta x_n|^2 = |\Delta x|^2.$$

Im zweiten Fall gilt

$$|\Delta x_i||\Delta x_j| \leq |\Delta x_j|^2 \leq |\Delta x_1|^2 + \cdots + |\Delta x_j|^2 + \cdots + |\Delta x_n|^2 = |\Delta x|^2.$$

In beiden Fällen gilt also  $|\Delta x_i||\Delta x_j| \leq |\Delta x|^2$ . Diese Ungleichung gilt für alle Terme  $|\Delta x_i||\Delta x_j|$ , sodass wir Folgendes schreiben können

$$|b(\Delta x, \Delta x)| \leq \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}| |\Delta x_i| |\Delta x_j| \leq \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}| |\Delta x|^2 = C |\Delta x|^2$$

wobei  $C = \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|$  einfach eine Konstante ist. Daraus ergibt sich

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - 2b(\Delta x, x_0)|}{|\Delta x|} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|b(\Delta x, \Delta x)|}{|\Delta x|} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C |\Delta x|^2}{|\Delta x|} = C \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0.$$

Somit ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar mit Ableitung  $df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v \mapsto df(x_0)v = 2b(v, x_0)$ .

■

# Kapitel 3

## Ableitungsregeln

### 3.1 Die Kettenregel

Die Kettenregel gehört zu den wichtigsten Sätzen der Differentialrechnung. Dazu betrachten wir die Zusammensetzung

$$g \circ f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l, x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$$

der differenzierbaren Funktionen  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  mit  $U \subset f(\Omega)$ . Die zusammengesetzte Abbildung  $g \circ f$  ist dann auf  $\Omega$  differenzierbar und für das Differenzial gilt die **Kettenregel**

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \cdot df(x).$$

Das Symbol “ $\cdot$ ” bezeichnet die Matrix-Matrix Multiplikation.

**Beispiel 3.1.1**  $\circ \circ \circ$  Berechne  $d(g \circ f)$  für

a)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (xy, y + z)$  und  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (e^x, xy)$

b)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, \sin y, ze^y)$  und  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x^2, y + z^2)$ .

**Lösung:** a) Wir berechnen das Differenzial von  $f$

$$df = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und das Differenzial von  $g$

$$dg = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Wir werten nun  $dg$  in  $f(x, y, z)$  aus (d.h. wir ersetzen  $x \mapsto xy$ ,  $y \mapsto y + z$ )

$$dg(f(x, y, z)) = \begin{pmatrix} e^{xy} & 0 \\ y + z & xy \end{pmatrix}.$$

Nach der Kettenregel gilt somit

$$\begin{aligned} d(g \circ f)(x, y, z) &= dg(f(x, y, z)) \cdot df(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{xy} & 0 \\ y+z & xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} & 0 \\ y^2 + yz & 2xy + xz & xy \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Wir berechnen das Differenzial von  $f$

$$df = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos y & 0 \\ 0 & ze^y & e^y \end{pmatrix}$$

und das Differenzial von  $g$

$$dg = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2z \end{pmatrix} \Rightarrow dg(f(x, y, z)) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2ze^y \end{pmatrix},$$

wobei wir beim Auswerten von  $dg(f(x, y, z))$  einfach  $x \rightarrow x$ ,  $y \rightarrow \sin y$  und  $z \rightarrow ze^y$  ersetzt haben.

Nach der Kettenregel gilt somit

$$\begin{aligned} d(g \circ f)(x, y, z) &= dg(f(x, y, z)) \cdot df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2ze^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos y & 0 \\ 0 & ze^y & e^y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & \cos y + 2z^2e^{2y} & 2ze^{2y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 3.1.2 • • •** Betrachte die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x+y, x-y, x^2 + y^2 - 1)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

Berechne  $d(g \circ f)$  ohne und mit der Kettenregel.

**Lösung:** Ohne Kettenregel: Wir berechnen die Zusammensetzung  $h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  explizit

$$\begin{aligned} h(x, y) &= g(f(x, y)) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + y^2 - 2xy + x^4 + y^4 + 1 - 2x^2 - 2y^2 + 2x^2y^2 \\ &= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 1 = (x^2 + y^2)^2 + 1. \end{aligned}$$

Somit lautet das Differenzial von  $h$

$$dh(x, y) = (4x(x^2 + y^2), 4y(x^2 + y^2)).$$

Mit der Kettenregel: Wir berechnen das Differenzial von  $f$

$$df = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

und das Differenzial von  $g$

$$dg = (2x, 2y, 2z) \Rightarrow dg(f(x, y)) = (2(x+y), 2(x-y), 2(x^2 + y^2 - 1)).$$

Nach der Kettenregel gilt somit

$$\begin{aligned} d(g \circ f)(x, y) &= dg(f(x, y)) \cdot df(x, y) = (2(x+y), 2(x-y), 2(x^2 + y^2 - 1)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \\ &= (2(x+y) + 2(x-y) + 4x(x^2 + y^2 - 1), 2(x+y) - 2(x-y) + 4y(x^2 + y^2 - 1)) \\ &= (4x(x^2 + y^2), 4y(x^2 + y^2)). \end{aligned}$$

■

**Beispiel 3.1.3 •••** Betrachte die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (e^x + \sin(xy), x + y^2 x), \quad g = f \circ f \circ f.$$

Berechne  $dg(0, 0)$ .

**Lösung:** Es gilt  $f(0, 0) = (1, 0)$ ,  $f(f(0, 0)) = f(1, 0) = (e, 1)$ . Wir berechnen das Differenzial von  $f$

$$df = \begin{pmatrix} e^x + y \cos(xy) & x \cos(xy) \\ 1 + y^2 & 2xy \end{pmatrix}.$$

Wir wenden die Kettenregel zweimal an

$$\begin{aligned} dg(0, 0) &= df(f(f(0, 0))) \cdot df(f(0, 0)) \cdot df(0, 0) = df(e, 1) \cdot df(1, 0) \cdot df(0, 0) \\ &= \begin{pmatrix} e^e + \cos(e) & e \cdot \cos(e) \\ 2 & 2e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^e + \cos(e) & e \cdot \cos(e) \\ 2 & 2e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e+1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^e(e+1) + 2e \cdot \cos(e) + \cos(e) & 0 \\ 4e+2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 3.1.4 •••** Eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heisst  $\alpha$ -homogen, falls für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $t > 0$

$$f(tx) = t^\alpha f(x)$$

gilt. Nimm an, dass  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$  differenzierbar ist und zeige:

$$\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x).$$

**Lösung:** Wir leiten beide Seiten der Gleichung  $f(tx) = t^\alpha f(x)$  nach  $t$  ab. Die rechte Seite ergibt

$$\frac{d}{dt}(t^\alpha f(x)) = \alpha t^{\alpha-1} f(x).$$

Für die linke Seite wenden wir die Kettenregel an

$$\frac{d}{dt}(f(tx)) = df(tx)x = \nabla f(tx) \cdot x.$$

Jetzt werten wir beide Seiten in  $t = 1$  aus und bekommen

$$\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x).$$

Die Funktion  $f(x, y) = x^3 - y^3$  ist zum Beispiel 3-homogen. Denn  $f(tx, ty) = (tx)^3 - (ty)^3 = t^3(x^3 - y^3) = t^3 f(x, y)$ . Der Gradient von  $f$  lautet  $\nabla f(x, y) = (3x^2, -3y^2)$ . Somit haben wir

$$\nabla f(x, y) \cdot (x, y) = 3x^3 - 3y^3 = 3f(x, y).$$

■

**Beispiel 3.1.5 • o o** Es seien die differenzierbaren Abbildungen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben. Berechne die partiellen Ableitungen von

$$f(g(x, y)) = f(g_1(x, y), \dots, g_n(x, y)),$$

wobei  $g_1, \dots, g_n$  die Komponenten von  $g$  sind. Benutze das Resultat, um die Ableitung von  $h(x, y) = f(g_1(x, y), g_2(x, y))$  mit  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$  und  $g_1(x, y) = xy$ ,  $g_2(x, y) = \sqrt{x}/y$  für  $x, y > 0$  zu bestimmen.

**Lösung:** Wir berechnen das Differenzial von  $f$

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

und das Differenzial von  $g$

$$dg = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x} & \frac{\partial g_n}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Nach der Kettenregel gilt somit

$$\begin{aligned} d(f \circ g)(x, y) &= df(g(x, y)) \cdot dg(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(x, y)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(x, y)) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_n}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(x, y)) \frac{\partial g_i}{\partial x}(x, y) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(x, y)) \frac{\partial g_i}{\partial y}(x, y) \right). \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(g_1(x, y), \dots, g_n(x, y)) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(x, y)) \frac{\partial g_i}{\partial x}(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial y} f(g_1(x, y), \dots, g_n(x, y)) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(x, y)) \frac{\partial g_i}{\partial y}(x, y).\end{aligned}$$

Nun benutzen wir die obigen Formeln um  $dh$  zu bestimmen. Das Differenzial von  $f(z, y)$  lautet

$$df(x, y) = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \right) \Rightarrow df(g(x, y)) = \left( \frac{2xy}{x^2 y^2 + x/y^2}, \frac{2\sqrt{x}/y}{x^2 y^2 + x/y^2} \right),$$

wobei wir beim Auswerten von  $df(g(x, y, z))$  einfach  $x \rightarrow xy$  und  $y \rightarrow \sqrt{x}/y$  ersetzt haben. Für  $g_1$  und  $g_2$  gilt

$$dg_1(x, y) = (y, x), \quad dg_2(x, y) = \left( \frac{1}{2\sqrt{xy}}, \frac{-\sqrt{x}}{y^2} \right).$$

Wir haben somit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(g_1(x, y), g_2(x, y)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(x, y)) \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(x, y)) \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) \\ &= \frac{2xy}{x^2 y^2 + x/y^2} \cdot y + \frac{2\sqrt{x}/y}{x^2 y^2 + x/y^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} \\ &= \frac{2xy^2 + 1/y^2}{x^2 y^2 + x/y^2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(g_1(x, y), g_2(x, y)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(x, y)) \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(x, y)) \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) \\ &= \frac{2xy}{x^2 y^2 + x/y^2} \cdot x + \frac{2\sqrt{x}/y}{x^2 y^2 + x/y^2} \cdot \frac{-\sqrt{x}}{y^2} \\ &= \frac{2x^2 y - 2x/y^3}{x^2 y^2 + x/y^2}.\end{aligned}$$

■

## 3.2 Der Umkehrsatz

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion von der Klasse  $C^1$  mit Wertebereich  $f(\Omega)$ . Wir wollen die folgenden Fragen beantworten: Gibt es eine Bedingung an  $f$ , die garantiert, dass  $f$  lokal invertierbar ist? Und unter welchen Bedingungen ist die Umkehrabbildung  $f^{-1} : f(\Omega) \rightarrow \Omega$  auch von der Klasse  $C^1$ ?

Aus der Differentialrechnung in  $\mathbb{R}$  wissen wir bereits, dass falls eine Funktion  $f$  auf einem Intervall  $I$  differenzierbar ist und die Bedingung  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in I$  erfüllt,  $f$  monoton wachsend und somit injektiv ist. Die Umkehrfunktion  $f : f(I) \rightarrow I$  existiert und ist ebenfalls differenzierbar mit Ableitung

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

wobei  $y = f(x)$ .

Die Existenz einer Umkehrabbildung für eine Funktion mehreren Variablen  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow$

$\mathbb{R}^n$  erfordert etwas mehr Überlegung. Wir betrachten zuerst den einfacheren Fall einer linearen Abbildung, welche durch eine  $n \times n$  Matrix  $A$  dargestellt ist

$$f(x) = Ax.$$

Die Frage nach der Existenz einer Umkehrabbildung ist gleichbedeutend mit der Frage nach der Lösung des Gleichungssystems

$$Ax = y$$

für eine gegebene rechte Seite  $y \in \mathbb{R}^n$ . Aus der linearen Algebra wissen wir, dass das obige Gleichungssystem genau dann eine eindeutig bestimmte Lösung  $x$  besitzt, wenn die Determinante der Matrix  $A$  nicht verschwindet. Somit haben wir folgendes Kriterium entdeckt:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax \text{ injektiv} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

In diesem Fall ist die Umkehrfunktion  $f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $f^{-1}(y) = A^{-1}y$  gegeben, wobei  $A^{-1}$  die inverse der Matrix  $A$  bezeichnet. Das Differenzial von  $f^{-1}$  ist somit  $A^{-1}$ . Nun haben wir aus dem vorigen Kapitel gelernt, dass eine an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  differenzierbare Funktion  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  in der Nähe von  $x_0$  durch die lineare Funktion  $f(x_0) + df(x_0)(x - x_0)$  gut approximiert wird, in dem Sinne, dass

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + \text{Rest}_{x_0}(x)$$

gilt, wobei der Restterm klein in Bezug auf die schon kleine Grösse  $|x - x_0|$  ist, d.h.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|\text{Rest}_{x_0}(x)|}{|x - x_0|} = 0$ . Es ist somit sinnvoll zu denken, dass die Bedingung  $\det(A) \neq 0$ , welche wir für lineare Funktionen hergeleitet haben, sich auf allgemeine Funktionen so verallgemeinern lässt, dass  $f$  um  $x_0$  lokal invertierbar ist, wenn  $\det(df(x_0)) \neq 0$  gilt. Somit haben wir folgenden Satz plausibel gemacht

**Satz 3.2.1 (Umkehrsatz)** Ist  $\det(df(x_0)) \neq 0$ , so ist  $f$  lokal umkehrbar, d.h. es existieren offene Umgebungen  $U$  von  $x_0$  und  $V$  von  $f(x_0)$ , sodass  $f$  eingeschränkt auf  $U$   $f|_U : U \rightarrow V$  bijektiv ist. Die inverse Abbildung  $f|_U^{-1} : V \rightarrow U$  ist auf  $V$  von der Klasse  $C^1$  und für die Ableitung gilt

$$d(f^{-1})(y) = (df(x))^{-1} = \text{Inverse der Jacobi-Matrix von } f$$

wobei  $y = f(x)$ .

Eine Abbildung  $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$  heisst *Diffeomorphismus*, falls  $f$  invertierbar ist und  $f, f^{-1}$  von der Klasse  $C^1$  sind. Der Umkehrsatz besagt somit, dass eine differenzierbare Abbildung mit invertierbarem Differenzial (d.h.  $\det df \neq 0$ ) lokal ein Diffeomorphismus ist. Wir wollen das Gewicht auf das Wort *lokal* setzen. Der Satz besagt: Falls  $\det f(x) \neq 0$  für alle  $x \in \Omega$ , so hat jeder Punkt  $x \in \Omega$  eine Umgebung  $U$  von  $x$ , sodass  $f$  ein Diffeomorphismus von  $U$

nach  $f(U)$  ist. Dass  $f$  ein lokaler Diffeomorphismus ist, reicht natürlich nicht, um daraus zu schliessen, dass  $f$  ein (globaler) Diffeomorphismus ist (siehe Beispiel 3.2.4 und 3.2.5). Dazu muss man zusätzlich die Bijektivität von  $f$  auf  $\Omega$  nachweisen.

**Beispiel 3.2.1 ••• Betrachte**

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2, x^2 - y^2).$$

Berechne  $d(f^{-1})$  auf zwei Arten.

**Lösung:** Variante 1: Direkt. Wir suchen nach der inversen Abbildung von

$$f : (x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $u + v = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{u+v}$ ,  $u - v = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{u-v}$ . Also

$$f : (x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow f^{-1} : (u, v) \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{u+v} \\ \sqrt{u-v} \end{pmatrix}.$$

Somit können wir das Differenzial von  $f^{-1}$  direkt bestimmen

$$d(f^{-1})(u, v) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{u+v}} & \frac{1}{\sqrt{u+v}} \\ \frac{1}{\sqrt{u-v}} & -\frac{1}{\sqrt{u-v}} \end{pmatrix}.$$

Variante 2: Mit dem Umkehrsatz<sup>1</sup>

$$df(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ x & -y \end{pmatrix} \Rightarrow d(f^{-1}) = (df)^{-1} = \frac{1}{-2xy} \begin{pmatrix} -y & -y \\ -x & x \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} & -\frac{1}{y} \end{pmatrix}.$$

Mit  $x = \sqrt{u+v}$  und  $y = \sqrt{u-v}$  finden wir also

$$d(f^{-1})(u, v) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{u+v}} & \frac{1}{\sqrt{u+v}} \\ \frac{1}{\sqrt{u-v}} & -\frac{1}{\sqrt{u-v}} \end{pmatrix}.$$

■

**Beispiel 3.2.2 ••• Betrachte die Abbildung**

$$f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Berechne  $d(f^{-1})(0, 1)$ .

<sup>1</sup>Erinnerung: Die Inverse der  $2 \times 2$  Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ist  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

**Lösung:** Es gilt  $f(1, \pi/2) = (1 \cdot \cos(\pi/2), 1 \cdot \sin(\pi/2)) = (0, 1)$ . Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow df(1, \pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante lautet  $\det df = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r = 1 \neq 0$ . Nach dem Umkehrssatz gibt es somit eine Umgebung von  $(1, \pi/2)$ , auf der  $f$  invertierbar ist, mit Ableitung

$$d(f^{-1})(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

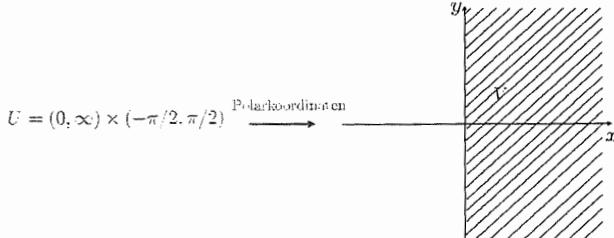
■

**Beispiel 3.2.3 ••• Betrachte die Abbildung**

$$f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Berechne  $d(f^{-1})$  mithilfe des Umkehrssatzes.

**Lösung:** Offenbar ist  $f$  auf  $(0, \infty) \times \mathbb{R}$  nicht injektiv, weil  $f(r, \varphi + 2\pi) = f(r, \varphi)$ . Beschränken wir uns jedoch auf eine kleinere offene Menge, zum Beispiel  $U := (0, \infty) \times (-\pi/2, \pi/2)$ , so wird  $U$  durch  $f$  bijektiv auf die offene Menge  $V := (0, \infty) \times \mathbb{R}$  abgebildet.



Die Umkehrfunktion ist bekannterweise gegeben durch

$$f^{-1}(x, y) = \left( \sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right)$$

und ist auf  $V$  stetig differenzierbar, weil Zusammensetzung stetig differenzierbarer Funktionen). Auf  $U$  betrachten wir das Differenzial

$$df(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und die Determinante, welche  $\det df = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r \neq 0$  lautet. Nach dem Umkehrssatz ist somit  $f$  lokal ein Diffeomorphismus und für das Differenzial der Umkehrabbildung gilt

$$\begin{aligned} d(f^{-1})(x, y) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \varphi & r \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \arctan \left( \frac{y}{x} \right) & \sin \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \\ -\frac{\sin \arctan \left( \frac{y}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{\cos \arctan \left( \frac{y}{x} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun benutzen wir die Identitäten (man findet diese in jeder Formelsammlung)

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}.$$

um die Terme  $\cos \arctan(\frac{y}{x})$  und  $\sin \arctan(\frac{y}{x})$  umzuschreiben

$$\begin{aligned} \sin \arctan\left(\frac{y}{x}\right) &= \frac{\tan(\arctan(\frac{y}{x}))}{\sqrt{1 + \tan^2(\arctan(\frac{y}{x}))}} = \frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1 + y^2/x^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \cos \arctan\left(\frac{y}{x}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\arctan(\frac{y}{x}))}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2/x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Wir bekommen somit

$$d(f^{-1})(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \sin \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ -\frac{\sin \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{\cos \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

■

**Beispiel 3.2.4 •••** Betrachte die Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$ . Beweise, dass  $f$  lokal invertierbar aber nicht (global) invertierbar ist.

**Lösung:** Das Differenzial von  $f$  an jeder Stelle  $(x, y)$  lautet

$$df(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \Rightarrow \det df(x, y) = e^{2x} \neq 0.$$

Das Differenzial von  $f$  ist somit überall invertierbar. Somit ist  $f$  lokal invertierbar, in dem Sinne, dass für jeden Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  es eine Umgebung von  $(x, y)$  gibt, auf der  $f$  invertierbar ist. Dagegen ist aber  $f$  periodisch in  $y$ , da  $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$ . Somit ist  $f$  nicht injektiv (weil aus der Periodizität folgt, dass es verschiedene Möglichkeiten für  $y$  gibt, für welche  $f$  denselben Wert annimmt). Folglich ist  $f$  nicht global invertierbar.

■

**Beispiel 3.2.5 •••** Betrachte die Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (xy, -x^2 + y^2)$ . Beweise, dass  $f$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  lokal invertierbar ist. Ist  $f$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  global invertierbar?

**Lösung:** Das Differenzial von  $f$  an jeder Stelle  $(x, y)$  lautet

$$df(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ -2x & 2y \end{pmatrix} \Rightarrow \det df(x, y) = 2y^2 + 2x^2 = 2(x^2 + y^2) \neq 0.$$

Das Differenzial von  $f$  ist somit für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  invertierbar (weil  $\det df(x, y) \neq 0$ ). Nach dem Umkehrsatz folgt, dass  $f$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  lokal umkehrbar ist, in dem Sinne, dass für jeden

Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  es eine Umgebung von  $(x, y)$  gibt, auf der  $f$  invertierbar ist. Dagegen ist aber  $f$  nicht injektiv, weil  $f(-x, -y) = ((-x)(-y), -2(-x)^2 + 2(-y)^2) = (xy, -2x^2 + 2y^2) = f(x, y)$  (aus  $f(-x, -y) = f(x, y)$  folgt, dass  $f$  an den Stellen  $(x, y)$  und  $(-x, -y)$  den selben Wert annimmt). Somit ist  $f$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  nicht global invertierbar.

**Beispiel 3.2.6** ••• Betrachte die Abbildung

$$\Phi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\}), (r, \varphi) \mapsto \Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Beweise, dass  $\Phi$  ein Diffeomorphismus von  $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$  ist.

**Lösung:**  $\Phi$  ist stetig differenzierbar (Zusammensetzung stetig differenzierbaren Funktionen) mit Differenzial

$$d\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Die Determinante von  $d\Phi$  lautet somit

$$\det d\Phi = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r \neq 0.$$

Das Differenzial von  $\Phi$  ist somit für alle  $(r, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi)$  invertierbar. Nach dem Umkehrsatz folgt, dass  $\Phi$  lokal ein Diffeomorphismus ist, in dem Sinne, dass es für jeden Punkt  $(r, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi)$  eine Umgebung von  $(r, \varphi)$  gibt, auf der  $\Phi$  invertierbar ist, mit stetig differenzierbarer Inverse. Daraus folgt, dass  $\Phi$  ein Diffeomorphismus ist? Nein! Wie schon mehrmals erwähnt, ist die Aussage des Umkehrsatzes nur lokal. Um daraus zu schliessen, dass  $\Phi$  ein (globaler) Diffeomorphismus ist, muss man zusätzlich noch die Bijektivität von  $\Phi$  zeigen. Dies ist aber in diesem Fall ganz einfach.  $\Phi$  ist injektiv, weil jedem  $r \in (0, \infty)$  und  $\varphi \in (0, 2\pi)$  stets unterschiedliche Punkte in  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$  zugeordnet werden. Außerdem ist  $\Phi$  surjektiv, weil man jeden Punkt im  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$  ( $\mathbb{R}^2$  ohne die positive  $x$ -Achse) in Polarkoordinaten als  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  hinschreiben kann, mit  $r \in (0, \infty)$  und  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . Somit bildet  $\Phi$  die Menge  $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$  bijektiv auf die Menge  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$ . Somit ist  $\Phi$  tatsächlich ein Diffeomorphismus von  $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$ .

Variante zum Beweis, dass  $\Phi$  ein Diffeomorphismus ist. Anstatt den Umkehrsatz zu Hilfe zu rufen, kann man die Aufgabe auch "direkt" lösen.  $\Phi$  ist stetig differenzierbar, weil seine Komponenten aus  $C^1$  Funktionen zusammengesetzt sind. Wie oben bewiesen, bildet  $\Phi$  die Menge  $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$  bijektiv auf die Menge  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$ . Nun müssen wir eine Inverse zu  $\Phi$  finden. Die Inverse lautet

$$\Phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\}) \rightarrow (0, \infty) \times (0, 2\pi), (x, y) \mapsto \Phi(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x)).$$

$\Phi^{-1}$  ist stetig differenzierbar, weil Zusammensetzung von  $C^1$  Funktionen. Folglich ist  $\Phi$  ein Diffeomorphismus.

Aus der vorigen Aufgabe bekommen wir ein einfaches Kochrezept für die Überprüfung,

dass eine vorgegebene Abbildung  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  ein Diffeomorphismus ist. Es lautet so

### KOCHREZEPT FÜR DIFFEOMORPHISMEN

Gegeben:  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ .

Gefragt: Ist  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  ein Diffeomorphismus?

**Schritt 1** Beweise, dass  $\Phi$  stetig differenzierbar ist, berechne das Differenzial  $d\Phi$  (Jacobi-Matrix) und zeige, dass

$$\det d\Phi(x) \neq 0, \quad \forall x \in U.$$

Der Umkehrsatz impliziert, dass  $\Phi$  lokal ein Diffeomorphismus ist.

**Schritt 2** Beweise, dass  $\Phi$  die Menge  $U$  bijektiv auf  $V$  abbildet.

Natürlich kann man in jeder Situation auch die "direkte" Methode anwenden: Dabei wird die Inverse  $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$  explizit bestimmt und gezeigt, dass  $\Phi$  und  $\Phi^{-1}$   $C^1$ -Funktionen sind. Diese Methode verlangt aber die explizite Bestimmung der Inverse von  $\Phi$ . Der Vorteil des Umkehrsatzes ist, dass man direkt auf die Differenzierbarkeit der inversen Abbildung schliessen kann, ohne diese inverse Abbildung explizit bestimmen zu müssen!

**Beispiel 3.2.7** ••• Seien  $a, b, c > 0$ . Ist

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \Phi(x, y, z) = (ax, by, cz)$$

ein Diffeomorphismus?

**Lösung:**  $\Phi$  ist sicher stetig differenzierbar. Das Differenzial von  $\Phi$  lautet

$$d\Phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Die Determinante von  $d\Phi$  lautet somit

$$\det d\Phi(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc \neq 0.$$

Das Differenzial von  $\Phi$  ist somit für alle  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  invertierbar. Nach dem Umkehrsatz folgt, dass  $\Phi$  lokal ein Diffeomorphismus ist. Um daraus zu schliessen, dass  $\Phi$  ein Diffeomorphismus ist, muss man zusätzlich noch die Bijektivität nachweisen. Dies ist aber ganz einfach.  $\Phi$  ist injektiv, weil jedem  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  und  $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$  stets unterschiedliche Punkte in  $\mathbb{R}^3$  zugeordnet werden, und zwar  $(ax, by, cz)$  bzw.  $(ax', by', cz')$ . Außerdem ist  $\Phi$  auch surjektiv, weil ja jeder Punkt  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  das Bild des Punktes  $(x/a, y/b, z/c) \in \mathbb{R}^3$  ist. Somit ist  $\Phi$  tatsächlich ein

Diffeomorphismus von  $\mathbb{R}^3$  auf  $\mathbb{R}^3$ .

**Beispiel 3.2.8** ••• Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig-differenzierbar. Zeige, dass die Abbildung

$$\Phi : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow U \times \mathbb{R}^m, (x, y) \mapsto \Phi(x, y) = (x, y - f(x))$$

ein Diffeomorphismus ist.

**Lösung:**  $\Phi$  ist stetig differenzierbar, weil Zusammensetzung stetig differenzierbarer Funktionen (insbesondere  $f$ , welche nach Annahme stetig differenzierbar ist). Das Differenzial von  $\Phi$  lautet

$$d\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \\ -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & -\frac{\partial f_1}{\partial x_n} & 1 & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ -\frac{\partial f_m}{\partial x_1} & -\frac{\partial f_m}{\partial x_n} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n \times n} & 0_{n \times m} \\ -df(x) & \mathbb{I}_{m \times m} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante von  $d\Phi$  lautet somit

$$\det d\Phi(x, y) = \det \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n \times n} & 0_{n \times m} \\ -df(x) & \mathbb{I}_{m \times m} \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Das Differenzial von  $\Phi$  ist somit für alle  $(x, y) \in U \times \mathbb{R}^m$  invertierbar. Nach dem Umkehrsatz folgt, dass  $\Phi$  lokal ein Diffeomorphismus ist. Um daraus zu schliessen, dass  $\Phi$  ein Diffeomorphismus ist, muss man zusätzlich noch die Bijektivität nachweisen.  $\Phi$  ist injektiv, weil jedem  $x \in U$  und  $y \in \mathbb{R}^m$  stets unterschiedliche Punkte in  $U \times \mathbb{R}^m$  zugeordnet werden. Außerdem ist  $\Phi$  auch surjektiv, weil ja zu jedem Punkt  $(x, y - f(x))$  der Punkt  $(x, y)$  in  $U \times \mathbb{R}^m$  gehört. Somit bildet  $\Phi$  die Menge  $U \times \mathbb{R}^m$  bijektiv auf die Menge  $U \times \mathbb{R}^m$ . Somit ist  $\Phi$  tatsächlich ein Diffeomorphismus von  $U \times \mathbb{R}^m$  auf  $U \times \mathbb{R}^m$ .

**Beispiel 3.2.9** ••• (Kugelkoordinaten) Beweise, dass die Abbildung

$$\Phi : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$$

$$(r, \theta, \phi) \mapsto \Phi(r, \theta, \phi) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

ein Diffeomorphismus von  $(0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$  auf  $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$  ist.

**Lösung:**  $\Phi$  ist stetig differenzierbar, weil Zusammensetzung stetig differenzierbarer Funktionen.

Das Differenzial von  $\Phi$  lautet

$$d\Phi(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante von  $d\Phi$  lautet somit

$$\det d\Phi(r, \theta, \phi) = \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} = r^2 \sin \theta \neq 0.$$

Das Differenzial von  $\Phi$  ist somit für alle  $(r, \theta, \phi) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$  invertierbar. Nach dem Umkehrssatz folgt, dass  $\Phi$  lokal ein Diffeomorphismus ist. Um daraus zu schliessen, dass  $\Phi$  ein Diffeomorphismus ist, muss man zusätzlich noch die Bijektivität nachweisen.  $\Phi$  ist injektiv, weil jedem  $(r, \theta, \phi)$  stets unterschiedliche Punkte in  $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$  zugeordnet werden<sup>2</sup>. Außerdem ist  $\Phi$  auch surjektiv, weil man jeden Punkt  $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$  ( $\mathbb{R}^3$  ohne die positive  $xz$ -Ebene, also die Punkte mit  $\theta = 0, \pi$  und  $\phi = 0, 2\pi$ ) in Kugelkoordinaten als  $x = r \cos \phi \sin \theta$ ,  $y = r \sin \phi \sin \theta$ ,  $z = r \cos \theta$  mit  $(r, \theta, \phi)$  in  $(0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$  schreiben kann. Somit bildet  $\Phi$  die Menge  $(0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$  bijektiv auf die Menge  $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$ . Somit ist  $\Phi$  tatsächlich ein Diffeomorphismus von  $(0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$  auf  $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$ .

■

**Beispiel 3.2.10 ••• (Kugelkoordinaten in  $\mathbb{R}^n$ )** Die Kugelkoordinaten in  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) sind durch die folgende Abbildung gegeben

$$\Phi : (0, \infty) \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x_{n-1} \geq 0, x_n = 0\}$$

$$(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}) \rightarrow \Phi(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}) = (r \cos \phi_1, r \sin \phi_1 \cos \phi_2, r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \phi_3, \dots, r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \cos \phi_{n-1}, r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \sin \phi_{n-1}).$$

Beweise, dass  $\Phi$  ein Diffeomorphismus von  $(0, \infty) \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{x_{n-1} \geq 0, x_n = 0\}$  ist.

Hinweis: Die Jacobi-Determinante ist  $r^{n-1} \sin(\phi_1)^{n-2} \sin(\phi_2)^{n-3} \cdots \sin(\phi_{n-2})$ .

**Lösung:** Damit die Formeln nicht unglaublich umständlich werden, führen wir folgende Notation ein

$$s_r = \sin(\phi_r), \quad c_r = \cos(\phi_r), \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

In dieser Schreibweise lautet  $\Phi$  wie folgt

$$\Phi(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}) = (rc_1, rs_1c_2, rs_1s_2c_3, \dots, rs_1s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1}, rs_1s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1}).$$

<sup>2</sup>Beachte, dass auf  $[0, \infty] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$  die Abbildung nicht injektiv ist!

$\Phi$  ist klarerweise stetig differenzierbar, weil es eine Zusammensetzung stetig differenzierbarer Abbildungen ( $\sin, \cos, \dots$ ) ist. Das Differenzial von  $\Phi$  lautet

$$d\Phi = \begin{pmatrix} c_1 & -rs_1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1c_2 & rc_1c_2 & -rs_1s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1s_2c_3 & rc_1s_2c_3 & rs_1c_2c_3 & -rs_1s_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \\ s_1s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} & rc_1s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & \cdots & -rs_1s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ s_1s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} & rc_1s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & \cdots & rs_1s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante der Jacobi-Matrix ist also

$$D_{r, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}}^n :=$$

$$= \det \begin{pmatrix} c_1 & -rs_1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1c_2 & rc_1c_2 & -rs_1s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1s_2c_3 & rc_1s_2c_3 & rs_1c_2c_3 & -rs_1s_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \\ s_1s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} & rc_1s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & \cdots & -rs_1s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ s_1s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} & rc_1s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & \cdots & rs_1s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Wie kann man nun diese extrem grosse Determinante berechnen? Normalerweise berechnet man solche Determinanten iterativ, in dem man zum Beispiel versucht,  $D_{r, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}}^n$  in Termen der Jacobi Determinante in  $n-1$  Dimensionen  $D_{r, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}}^{n-1}$  zu schreiben. Um auf dieses Resultat zu kommen, entwickeln wir die Determinante nach der ersten Zeile

$$D_{r, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}}^n = c_1 \det \begin{pmatrix} rc_1c_2 & -rs_1s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ rc_1s_2c_3 & rs_1c_2c_3 & -rs_1s_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ rc_1s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & \cdots & -rs_1s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ rc_1s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & \cdots & rs_1s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix} + rs_1 \det \begin{pmatrix} s_1c_2 & -rs_1s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1s_2c_3 & rs_1c_2c_3 & -rs_1s_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ s_1s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & \cdots & -rs_1s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ s_1s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & \cdots & rs_1s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ist in jeder Spalte linear. Darum dürfen wir den Faktor  $rc_1$  aus der ersten Spalte der ersten Determinante ziehen. Analog ziehen wir auch den Faktor  $s_1$  aus der ersten Spalte der

zweiten Determinante. Wir bekommen also

$$\begin{aligned}
 D_{r,\phi_1, \dots, \phi_{n-1}}^n &= rc_1^2 \det \begin{pmatrix} c_2 & -rs_1s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2c_3 & rs_1c_2c_3 & -rs_1s_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & \cdots & -rs_1s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & \cdots & rs_1s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix} \\
 &+ rs_1^2 \det \begin{pmatrix} c_2 & -rs_1s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2c_3 & rs_1c_2c_3 & -rs_1s_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & \cdots & -rs_1s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & \cdots & rs_1s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix} \\
 &= r(c_1^2 + s_1^2) \det \begin{pmatrix} c_2 & -rs_1s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2c_3 & rs_1c_2c_3 & -rs_1s_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & \cdots & -rs_1s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & \cdots & rs_1s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Nun benutzen wir die trigonometrische Identität  $c_1^2 + s_1^2 = 1$  und bekommen

$$D_{r,\phi_1, \dots, \phi_{n-1}}^n = r \det \begin{pmatrix} c_2 & -rs_1s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2c_3 & rs_1c_2c_3 & -rs_1s_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & \cdots & -rs_1s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & \cdots & rs_1s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Nun ziehen wir auch den Term  $s_1$  aus der zweiten Spalte.

$$D_{r,\phi_1, \dots, \phi_{n-1}}^n = rs_1 \det \begin{pmatrix} c_2 & -rs_2 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2c_3 & rc_2c_3 & -rs_1s_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & \cdots & -rs_1s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & \cdots & rs_1s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix}$$

dann aus der dritten Spalte

$$D_{r,\phi_1, \dots, \phi_{n-1}}^n = rs_1^2 \det \begin{pmatrix} c_2 & -rs_2 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2c_3 & rc_2c_3 & -rs_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & \cdots & -rs_1s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & \cdots & rs_1s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix}$$

und so weiter, bis wir den Term  $s_1$  aus allen Spalten 2 bis  $n-1$  gezogen haben

$$D_{r,\phi_1, \dots, \phi_{n-1}}^n = rs_1^{n-2} \det \begin{pmatrix} c_2 & -rs_2 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2c_3 & rc_2c_3 & -rs_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & \cdots & -rs_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & \cdots & rs_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Somit bekommen wir

$$D_{r,\phi_1,\dots,\phi_{n-1}}^n = rs_1^{n-2} \det \begin{pmatrix} c_2 & -rs_2 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2c_3 & rc_2c_3 & -rs_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ s_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & \cdots & -rs_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & \cdots & rs_2 \cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= rs_1^{n-2} D_{r,\phi_2,\dots,\phi_{n-1}}^{n-1}.$$

Wir haben somit eine Rekursionsformel gefunden, welche  $D_{r,\phi_1,\dots,\phi_{n-1}}^n$  und die Jacobi-Determinante in  $n-1$  Dimensionen  $D_{r,\phi_2,\dots,\phi_{n-1}}^{n-1}$  verbindet. Wendet man diese Formel rekursiv an, so bekommt man

$$D_{r,\phi_1,\dots,\phi_{n-1}}^n = rs_1^{n-2} D_{r,\phi_2,\dots,\phi_{n-1}}^{n-1} = r^2 s_1^{n-2} s_2^{n-3} D_{r,\phi_3,\dots,\phi_{n-1}}^{n-2} = \cdots = r^{n-2} s_1^{n-2} \cdots s_{n-2} D_{r,\phi_{n-1}}^2.$$

Wir müssen also nur  $D_{r,\phi_{n-1}}^2$  berechnen

$$D_{r,\phi_{n-1}}^2 = \det \begin{pmatrix} c_{n-1} & -rs_{n-1} \\ s_{n-1} & rc_{n-1} \end{pmatrix} = r(c_{n-1}^2 + s_{n-1}^2) = r.$$

Also

$$D_{r,\phi_1,\dots,\phi_{n-1}}^n = r^{n-2} s_1^{n-2} \cdots s_{n-2} D_{r,\phi_{n-1}}^2 = r^{n-1} s_1^{n-2} \cdots s_{n-2}$$

$$= r^{n-1} \sin(\phi_1)^{n-2} \sin(\phi_2)^{n-3} \cdots \sin(\phi_{n-2}) \neq 0.$$

Somit ist das Differenzial von  $\Phi$  für alle  $(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}) \in (0, \infty) \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$  invertierbar. Nach dem Umkehrssatz folgt, dass  $\Phi$  lokal ein Diffeomorphismus ist. Außerdem bildet  $\Phi$  die Menge  $(0, \infty) \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$  bijektiv auf die Menge  $\mathbb{R}^n \setminus \{x_{n-1} \geq 0, x_n = 0\}$ . Somit ist  $\Phi$  ein Diffeomorphismus von  $(0, \infty) \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{x_{n-1} \geq 0, x_n = 0\}$ .

■

Die Beweismethode mit dem Umkehrssatz funktioniert nur für Abbildungen  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ . Für allgemeine Abbildungen  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  muss man die direkte Methode anwenden. Betrachte dazu das folgende Beispiel.

**Beispiel 3.2.11** ••• Zeige:

$$f : U = (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})$$

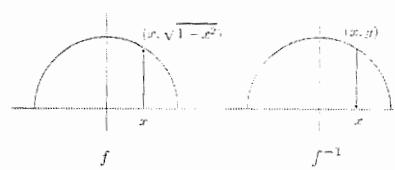
ist ein Diffeomorphismus auf sein Bild.

**Lösung:** In diesem Fall darf man den Umkehrssatz nicht zu Hilfe rufen, weil  $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  keine Funktion von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$  ist. Wir müssen also den direkten Beweis durchführen. Es ist klar, dass  $f$  differenzierbar ist (es ist eine Verkettung differenzierbaren Funktionen). Wir müssen somit zeigen, dass auch  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$  differenzierbar ist.

---

### 3.2. DER UMKEHRSATZ

---



Es gilt  $f^{-1}(x, y) = x$  (man sieht das auch aus dem Bild).  $f^{-1}$  ist somit die Projektion auf der ersten Koordinate, welche differenzierbar ist.

■



## Kapitel 4

# Taylorentwicklung für Funktionen mehrerer Variablen

### 4.1 Funktionen zweier Variablen

Wir haben schon die Taylorentwicklung für eine Funktion  $f(x)$  von einer Variablen kennengelernt. In einer ähnlichen Art und Weise kann man die Taylorentwicklung um  $(x_0, y_0)$  einer Funktion  $f(x, y)$  von zwei Variablen aufschreiben

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} (\Delta x)^2 \Delta y + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Delta x (\Delta y)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} (\Delta y)^3 \right) + \dots \end{aligned}$$

wobei  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$  und alle Ableitungen an der Stelle  $(x_0, y_0)$  auszuwerten sind.

**Beispiel 4.1.1 ••○ Bestimme die Taylorentwicklung von  $f(x, y) = ye^{xy}$  bis zur zweiten Ordnung um den Punkt  $(2, 3)$ .**

**Lösung:** Wir berechnen die partiellen Ableitungen von  $f(x, y)$

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 e^{xy} & \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 9e^6 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy} + xy e^{xy} & \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = 7e^6 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^3 e^{xy} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 3) = 27e^6 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2ye^{xy} + xy^2 e^{xy} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 3) = 24e^6 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2xe^{xy} + x^2 y e^{xy} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 3) = 16e^6 \end{array}$$

Somit lautet die gesuchte Taylorentwicklung

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(2, 3) + \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)(x - 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)(y - 3) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 3)(x - 2)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 3)(x - 2)(y - 3) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 3)(y - 3)^2 \right) + \dots \\
 &= e^6 [3 + 9(x - 2) + 7(y - 3) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} (27(x - 2)^2 + 48(x - 2)(y - 3) + 16(y - 3)^2)] + \dots
 \end{aligned}$$

■

**Beispiel 4.1.2 •••** Berechne die Taylorentwicklung von  $f(x, y) = (x + y^2)e^{-x^2-y^2}$  bis zur dritten Ordnung um den Punkt  $(0, 0)$ .

**Lösung:** Wir berechnen die partiellen Ableitungen von  $f(x, y)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} &= (1 - 2(x + y^2)x)e^{-x^2-y^2} & \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= 1 \\
 \frac{\partial f}{\partial y} &= (2y - 2(x + y^2)y)e^{-x^2-y^2} & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= 0 \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= (-4x - 2(x + y^2) + 4(x + y^2)x^2)e^{-x^2-y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) &= 0 \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= (-2y - 4xy + 4(x + y^2)xy)e^{-x^2-y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= 0 \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (2 - 8y^2 - 2(x + y^2) + 4(x + y^2)y^2)e^{-x^2-y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) &= 2 \\
 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= (-6 + 12x^2 + 12(x + y^2)x - 8(x + y^2)x^3)e^{-x^2-y^2} & \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) &= -6 \\
 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} &= (8xy - 4y + 4(x + y^2)y + 8x^2y - 8(x + y^2)x^2y)e^{-x^2-y^2} & \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0, 0) &= 0 \\
 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} &= (-2 + 4y^2 - 4x + 16xy^2 + 4(x + y^2)x - 8(x + y^2)xy^2)e^{-x^2-y^2} & \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0, 0) &= -2 \\
 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &= (-24y + 24y^3 + 12(x + y^2)y - 8(x + y^2)y^3)e^{-x^2-y^2} & \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0) &= 0.
 \end{aligned}$$

Somit lautet die gesuchte Taylorentwicklung

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y^2 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0)x^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0, 0)x^2y + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0, 0)xy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0)y^3 \right) + \dots \\
 &= x + y^2 - x^3 - xy^2 + \dots
 \end{aligned}$$

**Beispiel 4.1.3 •••** Berechne die Taylorentwicklung von  $f(x, y) = \cos x \cdot (1 - y^2)^{-1}$  bis zur vierten Ordnung um den Punkt  $(0, 0)$ .

**Lösung:** Manchmal kann man relativ viel Zeit sparen, wenn man anstatt alle partiellen Ableitungen von  $f(x, y)$  auszurechnen, bekannte eindimensionale Taylorentwicklungen zu Hilfe nimmt. In diesem Fall könnten wir einfach  $\cos(x)$  und die Funktion  $1/(1 - y^2)$  separat entwickeln

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad \frac{1}{1 - y^2} = 1 - y^2 + y^4 + \dots.$$

Die gesuchte Taylorentwicklung bestimmt man, indem man die einzelnen Taylorentwicklungen zusammen multipliziert

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \cos(x) \cdot \frac{1}{1 - y^2} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \cdot (1 - y^2 + y^4 + \dots) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + y^4 + \dots. \end{aligned}$$

**Beispiel 4.1.4 •••** Berechne die Taylorreihe von  $f(x, y) = \cos(xy)$  um den Punkt  $(0, 0)$ .

**Lösung:** Auch in diesem Fall kann man relativ viel Zeit sparen, wenn man anstatt alle partiellen Ableitungen von  $f(x, y)$  auszurechnen, bekannte eindimensionale Taylorentwicklungen zu Hilfe nimmt. In diesem Fall könnten wir einfach die Taylorreihe von  $\cos(x)$  benutzen

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Die gesuchte Taylorreihe bestimmt man in dem man  $x \rightarrow xy$  ersetzt

$$f(x, y) = \cos(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} y^{2n}}{(2n)!}.$$

## 4.2 Funktionen mehrerer Variablen

Wir bemerken zuerst, dass man den Term in der Taylorentwicklung für  $f(x, y)$ , der die ersten partiellen Ableitungen enthält, wie folgt schreiben kann,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y = \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y)$$

wobei natürlich beide Seiten an der Stelle  $(x_0, y_0)$  auszuwerten sind. Analog kann man den Term mit den zweiten partiellen Ableitungen wie folgt schreiben

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right) = \frac{1}{2!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y),$$

wobei beim Ausmultiplizieren die partiellen Ableitungen nur auf partielle Ableitungen treffen und nicht auf  $\Delta x$  oder  $\Delta y$ . Leicht weist man nach, dass die Taylorentwicklung von  $f(x, y)$  wie folgt geschrieben werden kann

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}.$$

Für allgemeine Funktionen mehrerer Veränderlichen  $f(x_1, \dots, x_n)$  genügt es einfach, die obige Formel zu verallgemeinern

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(x_1, \dots, x_n) \Big|_{(x_1^0, \dots, x_n^0)}.$$

Jetzt einige Beispiele dazu.

**Beispiel 4.2.1 • o o Berechne die Taylorentwicklung zweiter Ordnung in  $(0, 0, 0)$  von  $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ .**

**Lösung:** Wir benötigen die partiellen Ableitungen von  $f(x, y, z)$ . Diese sind aber alle gleich  $f(x, y, z)$ . Mit der Taylorformel für Funktionen mehrerer Variablen bekommen wir also

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \right)^k f(x, y, z) \Big|_{(0, 0, 0)} + \dots \\ &= f(0, 0, 0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) + z \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0, 0) + z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0, 0, 0) \right. \\ &\quad \left. + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0, 0) + 2yz \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0, 0, 0) + 2xz \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0, 0, 0) \right) + \dots \\ &= 1 + x + y + z + \frac{1}{2}[x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz] + \dots \end{aligned}$$

■

**Beispiel 4.2.2 • o o Berechne die Taylorentwicklung dritter Ordnung in  $(0, 0, 0)$  der vektorwertigen Funktion**

$$f(x, y, z) = (x^2 - y - z, xy \sin z).$$

**Lösung:** Das Taylorpolynom einer vektorwertigen Funktion berechnet man, indem man das Taylorpolynom seiner Komponenten berechnet. Die erste Funktion ist ein Polynom vom Grad < 3. Also stimmt das Taylorpolynom mit der Funktion selbst überein. Für die zweite Komponente können wir die Entwicklung des Sinus benutzen  $\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \dots$ . Betrachten wir nur Terme der Ordnung kleiner oder gleich 3 (die Ordnung ist die Summe aller Exponenten), so bekommt man

$$xy \sin z = xy \left( z - \frac{z^3}{6} + \dots \right) = xyz + \dots$$

Die gesuchte Taylorentwicklung lautet also

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 - y - z + \dots \\ xyz + \dots \end{pmatrix}.$$

■

**Beispiel 4.2.3 • • •** Berechne die Taylorentwicklung dritter Ordnung in  $(0, 0, 0)$  der vektorwertigen Funktion

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2, e^{x^2+z}).$$

■

**Lösung:** Das Taylorpolynom einer vektorwertigen Funktion berechnet man, indem man das Taylorpolynom seiner Komponenten berechnet. Die erste Funktion ist ein Polynom vom Grad 4. Um das Taylorpolynom dritten Grades zu bestimmen, behalten wir nur die Terme mit Grad kleiner oder gleich 3

$$x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2 = x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = x^2 + y^2 + \dots$$

Für die zweite Komponente können wir die Taylorentwicklung der Exponentialfunktion benutzen  $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots$ . Betrachten wir nur Terme der Ordnung kleiner oder gleich 3 (die Ordnung ist die Summe aller Exponenten), so bekommt man

$$\begin{aligned} e^{x^2+z} &= 1 + (x^2 + z) + \frac{(x^2 + z)^2}{2} + \frac{(x^2 + z)^3}{6} + \dots \\ &= 1 + x^2 + z + \frac{x^4 + 2x^2z + z^2}{2} + \frac{x^6 + 3x^4z + 3x^2z^2 + z^3}{6} + \dots \\ &= 1 + x^2 + z + x^2z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

Die gesuchte Taylorentwicklung lautet also

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + \dots \\ 1 + x^2 + z + x^2z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots \end{pmatrix}.$$

■



# Kapitel 5

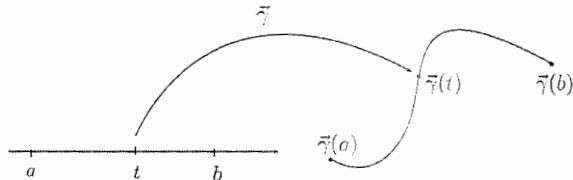
## Kurven

### 5.1 Differenzierbare Kurven

Eine **differenzierbare Kurve** ist nichts Anderes als eine  $C^1$ -Abbildung

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\rightarrow \tilde{\gamma}(t)\end{aligned}$$

welche jedem Wert des Parameters  $t$  im Intervall  $[a, b]$  den Vektor  $\tilde{\gamma}(t)$  im  $\mathbb{R}^n$  zuordnet. Die Variable  $t$  heisst **Parameter**,  $[a, b]$  ist der **Parameterbereich**,  $\tilde{\gamma}(a)$  ist der Anfangspunkt und  $\tilde{\gamma}(b)$  ist der Endpunkt der Kurve.



Eine Kurve heisst **geschlossen**, falls  $\tilde{\gamma}(a) = \tilde{\gamma}(b)$  ("Anfangspunkt = Endpunkt"). Physikalisch beschreiben Kurven die Trajektorien von Teilchen, sodass der Kurvenparameter  $t$  die Bedeutung der Zeit besitzt und  $\tilde{\gamma}(t)$  die Position des Teilchens zur Zeit  $t$  darstellt. Dass  $\tilde{\gamma}$  eine  $C^1$ -Abbildung ist, bedeutet einfach, dass jede der  $n$  Komponenten von  $\tilde{\gamma}$

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

eine differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung ist. Gewöhnlich heisst eine Kurve von der Klasse  $C^k$ , falls jede Komponente von  $\tilde{\gamma}$  eine  $C^k$ -Funktion ist.

Kurven können auf verschiedene Arten parametrisiert werden. Ein **Parameterwechsel** ist einfach eine Transformation des Parameters  $t$  zu einem neuen Kurvenparameter  $s = \varphi(t)$ ,

d.h. eine Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi : [a, b] &\rightarrow [c, d] \\ t &\rightarrow s = \varphi(t).\end{aligned}$$

Ein Parameterwechsel ist *wohldefiniert*, falls  $d\varphi/dt \neq 0$ . Ein Parameterwechsel heisst *orientierungserhaltend*, falls  $\varphi(a) = c$  und  $\varphi(b) = d$ . Ein Parameterwechsel heisst dagegen *orientierungsumkehrend*, falls  $\varphi(a) = d$  und  $\varphi(b) = c$ . Bei einem orientierungsumkehrenden Parameterwechsel wird die neue Kurve in der zur ursprünglichen Kurve umgekehrten Richtung durchlaufen.

Kurven können summiert werden. Zum Beispiel, die Kurven

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_1 : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\rightarrow \tilde{\gamma}_1(t)\end{aligned}$$

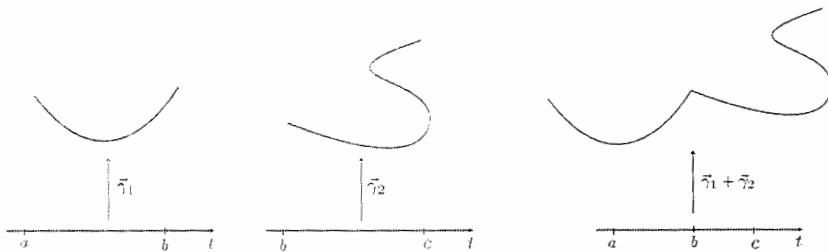
und

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_2 : [b, c] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\rightarrow \tilde{\gamma}_2(t)\end{aligned}$$

mit  $\tilde{\gamma}_1(b) = \tilde{\gamma}_2(b)$  ("Endpunkt von  $\gamma_1$  = Anfangspunkt von  $\gamma_2$ ") können aneinander gehängt werden, indem man die *Summenkurve* definiert

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} : [a, c] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\rightarrow \tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}_1(t) & a \leq t \leq b \\ \tilde{\gamma}_2(t) & b < t \leq c \end{cases}\end{aligned}$$

Die Kurve  $\gamma$  ist die Aneinandersetzung der zwei Kurven  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  und wird oft mit  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  notiert.



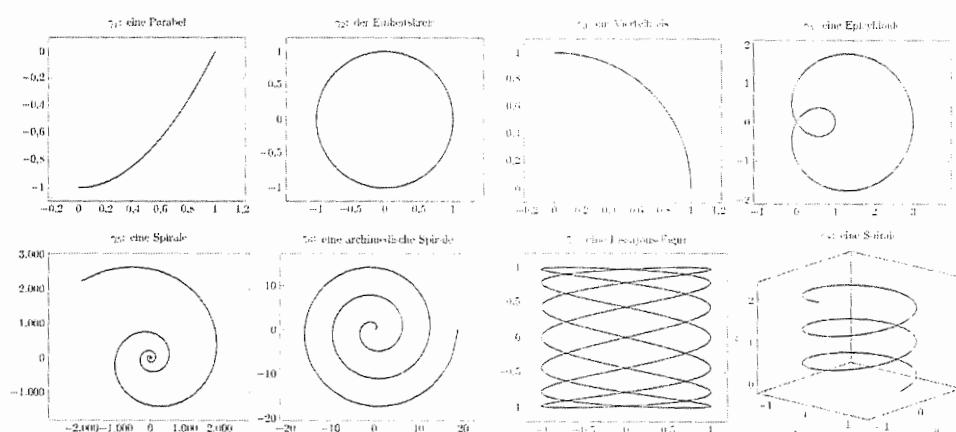
**Beispiel 5.1.1** Zeige, dass die zwei Kurven  $\tilde{\gamma}_1(t) = (t, \cos t, e^t)$  mit  $t \in (-\infty, \infty)$  und  $\tilde{\gamma}_2(s) = (\log(s), \cos \log(s), s)$  mit  $s \in [0, \infty)$  dieselbe Kurve beschreiben. Ist der Parameterwechsel orientierungsumkehrend oder orientierungserhaltend?

**Lösung:**  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  beschreiben dieselbe Kurve, weil  $\gamma_2$  aus  $\gamma_1$  mit dem wohldefinierten Parameterwechsel  $s = e^t$  entsteht. Der Parameterwechsel ist wohldefiniert, da  $d\varphi(t)/dt = e^t \neq 0$  für alle  $t \in (-\infty, \infty)$  gilt. Er ist orientierungserhaltend, weil  $t = -\infty$  dem Wert  $s = 0$  entspricht und  $t = +\infty$  dem Wert  $s = +\infty$ . ■

**Beispiel 5.1.2** ○○○ Zeige, dass die folgenden Abbildungen differenzierbare Kurven beschreiben. Skizziere die entsprechenden Graphen:

- a)  $\tilde{\gamma}_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (t, t^2 - 1)$
- b)  $\tilde{\gamma}_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \theta \rightarrow (\cos \theta, \sin \theta)$
- c)  $\tilde{\gamma}_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (\sqrt{1-t^2}, t)$
- d)  $\tilde{\gamma}_4 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, s \rightarrow ((2 \cos s - 1) \cos s, (2 \cos s - 1) \sin s)$
- e)  $\tilde{\gamma}_5 : [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (e^t \cos 5t, e^t \sin 5t)$
- f)  $\tilde{\gamma}_6 : [0, 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, u \rightarrow (u \cos u, u \sin u)$
- g)  $\tilde{\gamma}_7 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, u \rightarrow (\sin(7u), u \sin(2u))$
- h)  $\tilde{\gamma}_8 : [0, 10\pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3, u \rightarrow (\cos u, \sin u, 2u/5\pi)$

**Lösung:** Die Komponenten sind alle  $C^1$  Funktionen (Kompositionen elementarer Funktionen wie  $\sin, \cos, \exp, \dots$ ). Somit sind alle Kurven differenzierbar.



**Beispiel 5.1.3** ••• Finde eine Parametrisierung der folgenden Kurven:

- Die Parabel  $y = x^2$  von  $(-1, 1)$  nach  $(2, 4)$ .
- Die Ellipse mit Gleichung  $(x - 3)^2 + 4y^2 = 4$  einmal im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen.
- Das Dreieck mit Eckpunkten  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$   $(1, 7)$  einmal im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen.
- Die Kurve, welche vom Graphen der Funktion  $f(x) = e^x$  von  $x = 0$  bis  $x = 1$  definiert ist.
- Die Kurve mit Gleichung  $x + (\sqrt{y} - 2)^2 = 9e^t$ ,  $x, y > 0$  und  $t \in [0, 2\pi]$ .

**Lösung:** a)  $\tilde{\gamma} : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (t, t^2)$ .

b) Am besten schreiben wir die definierende Gleichung in Form einer Kreisgleichung

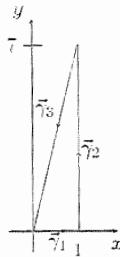
$$a^2 + b^2 = r^2$$

mit  $a = x - 3$ ,  $b = 2y$  und  $r = 2$ . Wir wissen bereits, dass man den Kreis  $a^2 + b^2 = r^2$  mit  $a = r \cos t$ ,  $b = r \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  parametrisieren kann. Somit setzen wir  $x - 3 = 2 \cos t$  und  $2y = 2 \sin t$  und finden somit die gesuchte Parametrisierung

$$\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (3 + 2 \cos t, \sin t).$$

c) Wir brauchen drei Kurven, um das Dreieck parametrisieren zu können

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_1 &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (t, 0) \\ \tilde{\gamma}_2 &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (1, 7t) \\ \tilde{\gamma}_3 &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (1 - t, 7 - 7t).\end{aligned}$$



Das Dreieck ist durch  $\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + \tilde{\gamma}_3$  parametrisiert.

d)  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (t, e^t)$ .

e) Am besten schreiben wir die definierende Gleichung in Form einer Kreisgleichung

$$a^2 + b^2 = r^2$$

mit  $a = \sqrt{x}$ ,  $b = \sqrt{y} - 2$  und  $r = 3e^{t/2}$ . Wir wissen bereits, dass man den Kreis  $a^2 + b^2 = r^2$  mit  $a = r \cos t$ ,  $b = r \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  parametrisieren kann. Somit setzen wir  $\sqrt{x} = 3e^{t/2} \cos t$  und  $\sqrt{y} - 2 = 3e^{t/2} \sin t$  und finden somit die gesuchte Parametrisierung

$$\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (9e^t \cos^2 t, (3e^{t/2} \sin t + 2)^2).$$

■

## 5.2 Reguläre Kurven

Eine differenzierbare Kurve

$$\begin{aligned}\vec{\gamma} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \vec{\gamma}(t)\end{aligned}$$

heisst **regulär**, falls

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) = \frac{d\vec{\gamma}(t)}{dt} \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

was gleichbedeutend dazu ist, dass die Ableitungen aller Komponenten von  $\vec{\gamma}(t)$  nach  $t$  ungleich Null sind.

**Beispiel 5.2.1 ••• Zeige, dass  $\vec{\gamma}(t) = (t^2, \sin t, \cos t)$  mit  $t \in [0, 1]$  eine reguläre Kurve definiert.**

**Lösung:** Die drei Komponenten von  $\vec{\gamma}(t)$  sind alle  $C^\infty$  Funktionen (es sind nur Kombinationen von  $\sin t$ ,  $\cos t$  und  $t$ ). Wir müssen zeigen, dass  $\dot{\vec{\gamma}}(t) \neq 0$  für alle  $t \in [0, 1]$  gilt. Wir leiten somit jede Komponente von  $\vec{\gamma}$  nach dem Parameter  $t$  ab

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) = (2t, \cos t, -\sin t).$$

Die Probleme entstehen, wenn die Komponenten Null werden. Dies geschieht eventuell bei  $t = 0$ . Bei  $t = 0$  ist die erste und dritte Komponente von  $\dot{\vec{\gamma}}(t)$  gleich Null. Aber die zweite ist gleich 1, also ungleich Null. Somit sind die Komponenten von  $\dot{\vec{\gamma}}(t)$  nie gleichzeitig gleich Null, d.h.  $\dot{\vec{\gamma}}(t) \neq 0$ . Die Parametrisierung ist somit regulär.

■

**Beispiel 5.2.2 ••• Zeige, dass  $\vec{\gamma}(\theta) = ((2 \cos \theta - 1) \cos \theta, (2 \cos \theta - 1) \sin \theta)$  mit  $\theta \in [0, 2\pi]$  eine reguläre Kurve definiert.**

**Lösung:** Die zwei Komponenten von  $\vec{\gamma}(\theta)$  sind beide  $C^\infty$  Funktionen (es sind nur Kombinationen

von sin und cos). Wir müssen zeigen, dass  $\dot{\gamma}(\theta) \neq 0$  für alle  $\theta \in [0, 2\pi]$  gilt. Wir leiten somit jede Komponente von  $\gamma$  nach dem Parameter  $\theta$  ab

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(\theta) &= (-2 \sin \theta \cos \theta + (1 - 2 \cos \theta) \sin \theta, -2 \sin^2 \theta + (2 \cos \theta - 1) \cos \theta) \\ &= (\sin \theta - 4 \sin \theta \cos \theta, 2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta - \cos \theta).\end{aligned}$$

Nun zu zeigen, dass  $\dot{\gamma}(\theta) \neq 0$ , ist keine einfache Aufgabe, denn es kommen komplizierte Kombinationen von sin und cos in  $\dot{\gamma}(\theta)$  vor. Wie kann man in solchen Situationen vorgehen? Am besten berechnet man den Betrag  $|\dot{\gamma}(\theta)|$ . Denn wir wissen, dass ein Vektor  $\vec{x}$  genau dann gleich Null ist, wenn  $|\vec{x}| = 0$ . Zu entscheiden, ob der Betrag  $|\dot{\gamma}(\theta)|$  ungleich Null ist, ist viel einfacher! Also los!

$$\begin{aligned}|\dot{\gamma}(\theta)| &= \sqrt{(\sin \theta - 4 \sin \theta \cos \theta)^2 + (2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta - \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{1 + 8 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 4 \sin^2 \theta \cos \theta + 4 \cos^4 \theta + 4 \sin^4 \theta - 4 \cos^3 \theta} \\ &= \sqrt{1 + 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 4 \cos^4 \theta + 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 4 \sin^4 \theta - 4 \sin^2 \theta \cos \theta - 4 \cos^3 \theta} \\ &= \sqrt{1 + 4 \cos^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 4 \sin^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 4 \cos \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\ &= \sqrt{1 + 4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta - 4 \cos \theta} = \sqrt{5 - 4 \cos \theta}.\end{aligned}$$

Wir haben ausgerechnet, dass  $|\dot{\gamma}(\theta)| = \sqrt{5 - 4 \cos \theta}$  ist. In dieser Form ist es sofort klar, dass  $|\dot{\gamma}(\theta)| \neq 0$ , weil der Term  $4 \cos \theta$  immer zwischen 4 und  $-4$  liegt und nie 5 gleichen kann! Somit ist  $\dot{\gamma}(\theta)$  regulär. ■

**Beispiel 5.2.3 •••** Die Epizykloide ist die Kurve mit Parametrisierung  $\gamma(\theta) = ((R+1) \cos \theta - r \cos((R+1)\theta), (R+1) \sin \theta - r \sin((R+1)\theta))$  mit  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Ist  $\dot{\gamma}(\theta)$  immer eine reguläre Kurve?

**Lösung:** Die zwei Komponenten von  $\dot{\gamma}(\theta)$  sind beide  $C^\infty$  Funktionen (es sind einfach Kombinationen von sin und cos). Wir müssen zeigen, dass  $\dot{\gamma}(\theta) \neq 0$  für alle  $\theta \in [0, 2\pi]$  gilt. Wir leiten somit jede Komponente von  $\gamma$  nach dem Parameter  $\theta$  ab

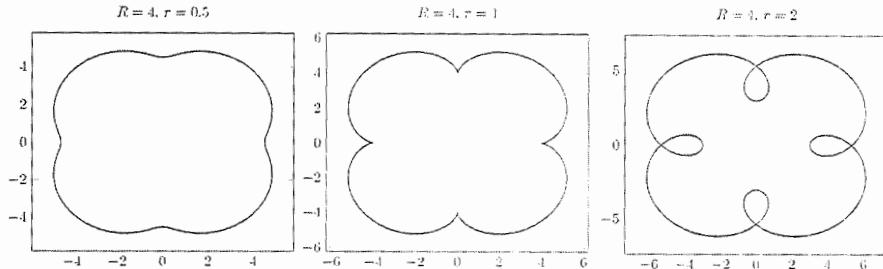
$$\dot{\gamma}(\theta) = (-(R+1) \sin \theta + r(R+1) \sin((R+1)\theta), (R+1) \cos \theta - r(R+1) \cos((R+1)\theta))$$

Nun zu zeigen, dass  $\dot{\gamma}(\theta) \neq 0$ , ist erneut keine einfache Aufgabe, denn es kommen komplizierte Kombinationen von sin und cos in  $\dot{\gamma}(\theta)$  vor. Wir gehen somit wie in der vorigen Aufgabe vor und berechnen den Betrag  $|\dot{\gamma}(\theta)|$ <sup>1</sup>

$$\begin{aligned}|\dot{\gamma}(\theta)| &= \sqrt{(-(R+1) \sin \theta + r(R+1) \sin((R+1)\theta))^2 + ((R+1) \cos \theta - r(R+1) \cos((R+1)\theta))^2} \\ &= (R+1) \sqrt{\sin^2 \theta + r^2 \sin^2((R+1)\theta) - 2r \sin \theta \sin((R+1)\theta) + \cos^2 \theta + r^2 \cos^2((R+1)\theta) - \\ &\quad - 2r \cos \theta \cos((R+1)\theta)} \\ &= (R+1) \sqrt{1 + r^2 - 2r[\sin \theta \sin((R+1)\theta) + \cos \theta \cos((R+1)\theta)]} \\ &= (R+1) \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(R\theta)}.\end{aligned}$$

<sup>1</sup>Benutze das Additionstheorem für cos, nämlich  $\cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta$ .

Es gilt somit  $|\dot{\gamma}(\theta)| = 0$  genau dann, wenn  $r = 1$  und  $R\theta = 2\pi n$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ . Insbesondere ist die Parametrisierung nur für  $r = 1$  in den Punkten  $\theta = 2\pi n/R$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  nicht regulär. Den Effekt sieht man in der Figur sehr deutlich.



■

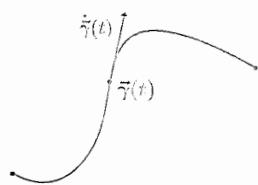
### 5.3 Der Tangentialvektor an einer Kurve

Sei

$$\begin{aligned}\vec{\gamma} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\rightarrow \vec{\gamma}(t)\end{aligned}$$

eine reguläre Kurve. Der *Geschwindigkeitsvektor* von  $\gamma$  ist der Vektor

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) \end{pmatrix}.$$



Physikalisch beschreibt  $\vec{\gamma}(t)$  die Trajektorie eines Teilchens, sodass der Vektor  $\dot{\vec{\gamma}}(t)$  die instantane Geschwindigkeit des Teilchens entlang der Trajektorie beschreibt.

Normiert man den Geschwindigkeitsvektor zu Eins, so bekommt man den *Tangentialvektor*

$$\vec{\tau}(t) := \frac{\dot{\vec{\gamma}}(t)}{|\dot{\vec{\gamma}}(t)|}.$$

Die Regularität der Kurve  $\gamma$ , sichert, dass der Vektor  $\dot{\gamma}(t)$  nie gleich Null ist, sodass es erlaubt ist, durch  $|\dot{\gamma}(t)|$  zu dividieren.

**Beispiel 5.3.1** ••• Berechne die Geschwindigkeits- und Tangentialvektoren für die Kurve  $\tilde{\gamma}(t) = (t^2, \sin t, \cos t)$  im Punkt  $(1, \sin(1), \cos(1))$ .

**Lösung:** Den Geschwindigkeitsvektor berechnet man, indem man jede Komponente von  $\gamma$  nach dem Parameter  $t$  ableitet

$$\dot{\gamma}(t) = (2t \cdot \cos t, -\sin t).$$

Dem Punkt  $(1, \sin(1), \cos(1))$  entspricht  $t = 1$ . Somit lautet der Geschwindigkeitsvektor bei  $t = 1$

$$\dot{\gamma}(1) = (2, \cos(1), -\sin(1)).$$

Wir normieren nun den Geschwindigkeitsvektor, indem wir den Betrag  $|\dot{\gamma}(t)|$  berechnen

$$|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{4t^2 + \cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{4t^2 + 1}.$$

Es gilt somit

$$\tilde{\gamma}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(2t \cdot \cos t, -\sin t) \Rightarrow \tilde{\gamma}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, \cos(1), -\sin(1)).$$

■

## 5.4 Die Länge einer Kurve

Falls eine reguläre Kurve

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\rightarrow \tilde{\gamma}(t)\end{aligned}$$

vorgegeben ist, kann man die Länge von  $\gamma$  mit der Formel

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_a^b |\dot{\tilde{\gamma}}(t)| dt$$

berechnen.

**Beispiel 5.4.1** ••• Berechne die Länge des Einheitskreises.

**Lösung:** Wir parametrisieren den Einheitskreis durch die Kurve

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \tilde{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t).\end{aligned}$$

Wir bestimmen dann den Geschwindigkeitsvektor, indem wir jede Komponente von  $\vec{\gamma}(t)$  nach  $t$  ableiten

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) = (-\sin t, \cos t) \Rightarrow |\dot{\vec{\gamma}}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1.$$

Ferner benutzen wir die obige Formel, um die Länge der Kurve zu berechnen

$$L(\text{Kreis}) = \int_0^{2\pi} |\dot{\vec{\gamma}}(t)| dt = \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi.$$

■

**Beispiel 5.4.2 • o o** Finde eine Formel für die Länge des Graphen der Funktion  $f(x)$  von  $a$  bis  $b$ . Benutze die hergeleitete Formel, um die Länge des Graphen der Funktion  $f(x) = x^2/2$  zwischen 0 und 1 zu bestimmen.

**Lösung:** Wir parametrisieren den Graphen der Funktion  $f(x)$  von  $a$  bis  $b$  durch die Kurve

$$\begin{aligned}\vec{\gamma} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\rightarrow \vec{\gamma}(x) = (x, f(x)).\end{aligned}$$

Wir bestimmen den Geschwindigkeitsvektor, indem wir jede Komponente von  $\vec{\gamma}(x)$  nach dem Parameter  $x$  ableiten

$$\dot{\vec{\gamma}}(x) = (1, f'(x)) \Rightarrow |\dot{\vec{\gamma}}(t)| = \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Ferner benutzen wir die obige Formel, um die Länge der Kurve zu berechnen

$$L(\text{Graph}) = \int_a^b |\dot{\vec{\gamma}}(t)| dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Die hergeleitete Formel kennen wir bereits aus der Zeit im Gymnasium! Mit dieser Formel berechnen wir die Länge des Graphen der Funktion  $f(x) = x^2/2$  zwischen 0 und 1. Es gilt  $f'(x) = x$ , sodass

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

■

**Beispiel 5.4.3 • o o** Berechne die Länge der Kurve  $\vec{\gamma}(t) = (6t, 3 \sinh(2t), 3 \cosh(2t))$  mit  $t \in [0, \pi]$ .

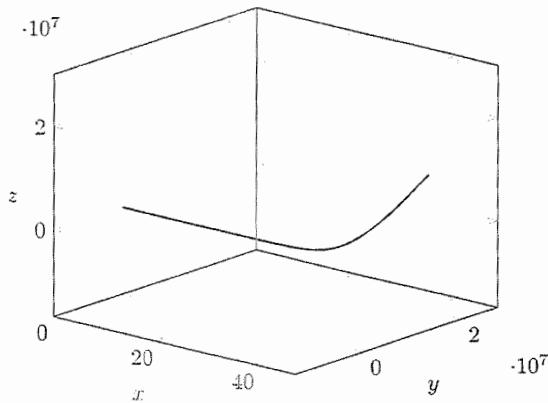
**Lösung:** Wir bestimmen den Geschwindigkeitsvektor, indem wir jede Komponente von  $\vec{\gamma}(t)$  nach  $t$  ableiten

$$\begin{aligned}\dot{\vec{\gamma}}(t) &= (6, 6 \cosh(2t), 6 \sinh(2t)) \\ \Rightarrow |\dot{\vec{\gamma}}(t)| &= \sqrt{36 + 36 \cosh^2(2t) + 36 \sinh^2(2t)} = 6\sqrt{\cosh^2(2t) + \sinh^2(2t)} = 6\sqrt{2} \cosh(2t).\end{aligned}$$

Ferner benutzen wir die obige Formel, um die Länge der Kurve zu berechnen

$$L(\vec{\gamma}) = \int_0^\pi |\dot{\vec{\gamma}}(t)| dt = 6\sqrt{2} \int_0^\pi \cosh(2t) dt = 6\sqrt{2} \left[ \frac{\sinh(2t)}{2} \right]_0^\pi = 3\sqrt{2} \sinh(2\pi).$$

Die Kurve  $\vec{\gamma}(t) = (6t, 3 \sinh(2t), 3 \cosh(2t))$  mit  $t \in [0, \pi]$



■

**Beispiel 5.4.4** • • • Berechne die Länge der Spirale  $\vec{\gamma}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$  mit  $t \in [0, 8]$ .

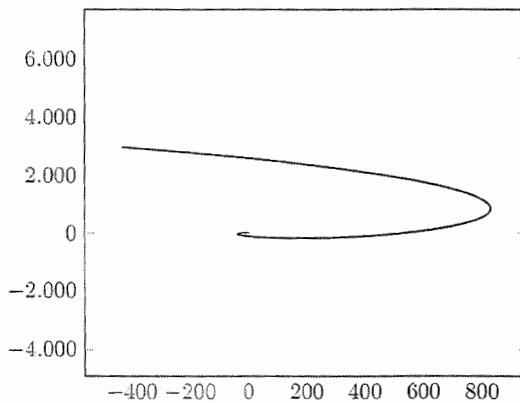
**Lösung:** Wir bestimmen den Geschwindigkeitsvektor, indem wir jede Komponente von  $\vec{\gamma}(t)$  nach  $t$  ableiten

$$\begin{aligned}\dot{\vec{\gamma}}(t) &= (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t) \\ \Rightarrow |\dot{\vec{\gamma}}(t)| &= \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2} \\ &= \sqrt{e^{2t} \sin^2 t + e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t + e^{2t} \cos^2 t + 2e^{2t} \cos t \sin t - 2e^{2t} \cos t \sin t} \\ &= \sqrt{2}e^t.\end{aligned}$$

Ferner benutzen wir die obige Formel, um die Länge der Kurve zu berechnen

$$L(\vec{\gamma}) = \int_0^8 |\dot{\vec{\gamma}}(t)| dt = \sqrt{2} \int_0^8 e^t dt = \sqrt{2}(e^8 - 1).$$

Die Spirale  $\vec{\gamma}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$  mit  $t \in [0, 8]$



■

**Beispiel 5.4.5 •••** Berechne die Länge der Kurve  $\tilde{\gamma}(t) = (t, t \cos t, t \sin t)$  mit  $t \in [0, 1]$ .

**Lösung:** Wir bestimmen den Geschwindigkeitsvektor, indem wir jede Komponente von  $\tilde{\gamma}(t)$  nach  $t$  ableiten

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\gamma}}(t) &= (1, \cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t) \\ \Rightarrow |\dot{\tilde{\gamma}}(t)| &= \sqrt{1 + (\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2} \\ &= \sqrt{1 + \sin^2 t + \cos^2 t + t^2 \sin^2 t + t^2 \cos^2 t - 2t \cos t \sin t + 2t \sin t \cos t} \\ &= \sqrt{2 + t^2}.\end{aligned}$$

Ferner benutzen wir die obige Formel, um die Länge der Kurve zu berechnen

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_0^1 |\dot{\tilde{\gamma}}(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{2 + t^2} dt = \sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt.$$

Um das Integral  $\int \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt$  zu berechnen, machen wir wie üblich die Substitution  $t/\sqrt{2} = \sinh x \Rightarrow t = \sqrt{2} \sinh x \Rightarrow dt = \sqrt{2} \cosh x dx$ . Es gilt somit

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt = \sqrt{2} \int \sqrt{1 + \sinh^2 x} \cosh x dx = \sqrt{2} \int \cosh^2 x dx.$$

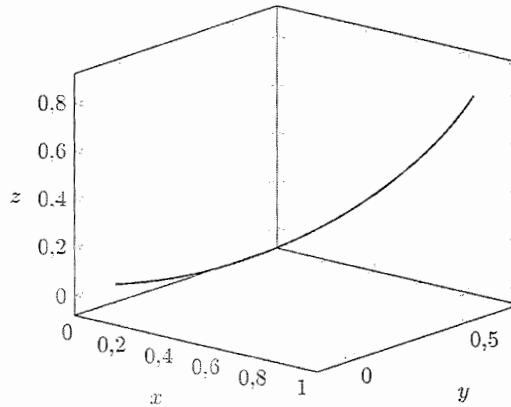
Dieses Integral lässt sich mit partieller Integration berechnen

$$\begin{aligned}\int \cosh^2 x dx &= \sinh x \cosh x - \int \sinh^2 x dx = \sinh x \cosh x - \int (\cosh^2 x - 1) dx \\ \Rightarrow \int \cosh^2 x dx &= \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x + 1) + c.\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für unser Ausgangsintegral

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt &= \sqrt{2} \int \cosh^2 x dx = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sinh x \cosh x + x) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \frac{t}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} + \operatorname{arcsinh} \left( \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ \Rightarrow L &= \sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt = \left[ \frac{t}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} + \operatorname{arcsinh} \left( \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arcsinh} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right).\end{aligned}$$

Die Kurve  $\tilde{\gamma}(t) = (t, t \cos t, t \sin t)$  mit  $t \in [0, 1]$



■

## 5.5 Einfach zusammenhängende Mengen

### 5.5.1 Homotopien

Seien  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  zwei Kurven in  $\mathbb{R}^n$  mit demselben Anfangspunkt  $p$  und Endpunkt  $q$ . Die zwei Kurven  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  heissen **homotop** (geschrieben  $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ ), wenn es eine stetige Abbildung

$$h : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, s) \mapsto h(t, s)$$

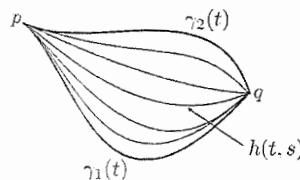
gibt, sodass

$$h(t, 0) = \gamma_1(t) \quad h(t, 1) = \gamma_2(t), \forall t \in [a, b]$$

und

$$h(0, s) = p \quad h(1, s) = q \quad \forall s \in [0, 1]$$

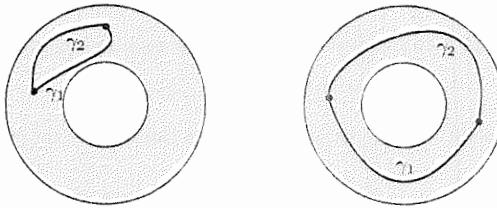
gilt. Die Abbildung  $h$  heisst **Homotopie** zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ . Zwei Kurven heissen also homotop, wenn es eine Homotopie  $h$  zwischen beiden gibt.



Das war einmal die formale Definition. Was soll das aber heissen? Man kann sich das Intervall  $[0, 1]$  als ein Zeitintervall denken. Zur Zeit  $s = 0$  stimmt die Funktion  $h$  mit der

Kurve  $\gamma_1$  überein. Mathematisch:  $h(t, 0) = \gamma_1(t) \forall t \in [a, b]$ . Im Laufe dieser Zeit, d.h. wenn  $s$  zwischen 0 und 1 variiert wird, verändert die Abbildung  $h$  ihre Gestalt. Diese Deformation ist stetig und erfolgt so, dass Anfangs- und Endpunkt fix bleiben, d.h.  $h(0, s) = p, h(1, s) = q \forall s \in [0, 1]$ . Die Abbildung  $h$  verändert sich also mit  $s$ , bis sie für  $s = 1$  mit der zweiten Kurve  $\gamma_2$  übereinstimmt, d.h.  $h(t, 1) = \gamma_2(t) \forall t \in [a, b]$  gilt. Eine Homotopie zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  ist also eine stetige Deformation von  $\gamma_1$  in  $\gamma_2$ , wobei man am Anfang ( $s = 0$ ) die Kurve  $\gamma_1$  und am Ende ( $s = 1$ ) die zweite Kurve  $\gamma_2$  hat.

Die folgende Figur zeigt ein Beispiel von homotopen und nicht homotopen Kurven. Die Kurven  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  in der linken Figur sind homotop, weil man die erste Kurve stetig in die zweite deformieren kann. Die zwei Kurven in der rechten Figur sind aber nicht homotop, weil es unmöglich ist, die erste Kurve stetig in die zweite zu deformieren (es gibt ein Loch in der Mitte).



**Beispiel 5.5.1 • o o Zeige:** Die Beziehung  $\simeq$  (homotop) definiert eine Äquivalenzrelation.

**Lösung:** Die Relation lautet

$$\gamma_1 \simeq \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1 \text{ ist homotop zu } \gamma_2.$$

Wir müssen einfach die drei Eigenschaften der Definition einer Äquivalenzrelation überprüfen (vgl. Analysis I, Kapitel 1). Es seien  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  drei Kurven in  $\mathbb{R}^n$  mit demselben Anfangs- und Endpunkt.

**1) Reflexivität:** Jede Kurve  $\gamma_1$  ist homotop zu sich selbst, weil die Abbildung

$$h : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, s) \mapsto h(t, s) = \gamma_1(t)$$

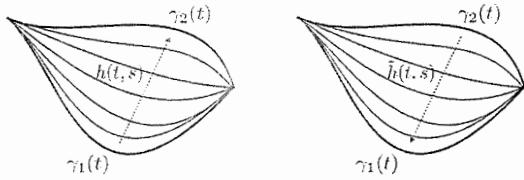
eine Homotopie zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_1$  definiert. Denn:  $h(t, 0) = \gamma_1(t)$  und  $h(t, 1) = \gamma_1(t)$ . Somit  $\gamma_1 \simeq \gamma_1$ . Die Reflexivität ist also erfüllt.

**2) Symmetrie:** Ist  $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ , so gibt es eine Homotopie zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ , d.h. eine stetige Abbildung

$$h : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, s) \mapsto h(t, s)$$

mit  $h(t, 0) = \gamma_1(t)$  und  $h(t, 1) = \gamma_2(t)$ . Die Funktion  $h$  deformiert die Kurve  $\gamma_1$  in die Kurve  $\gamma_2$ . Wir wollen jetzt zeigen, dass auch  $\gamma_2$  in  $\gamma_1$  deformiert werden kann. Die Idee ist, die Deformation rückwärts laufen zu lassen. Wir definieren also

$$\tilde{h} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, s) \mapsto \tilde{h}(t, s) = h(t, 1 - s)$$



und behaupten, dass  $\tilde{h}$  eine Homotopie zwischen  $\gamma_2$  und  $\gamma_1$  ist.

Das ist aber der Fall, weil  $\tilde{h}(t,0) = h(t,1) = \gamma_2(t)$  und  $\tilde{h}(t,1) = h(t,0) = \gamma_1(t)$ . Außerdem ist  $\tilde{h}$  stetig, weil  $h$  stetig ist. Somit sind  $\gamma_2$  und  $\gamma_1$  homotop, d.h.  $\gamma_2 \simeq \gamma_1$ . Die Symmetrie ist somit erfüllt.

3) Transitivität: Sind  $\gamma_1 \simeq \gamma_2$  und  $\gamma_2 \simeq \gamma_3$ , so lassen sich die Kurven  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  in die Kurven  $\gamma_2$  bzw.  $\gamma_3$  deformieren. Es gibt also eine Homotopie zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ , d.h. eine stetige Abbildung

$$h : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, s) \mapsto h(t, s)$$

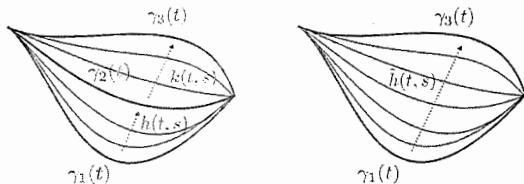
mit  $h(t, 0) = \gamma_1(t)$  und  $h(t, 1) = \gamma_2(t)$ . Es gibt auch eine Homotopie zwischen  $\gamma_2$  und  $\gamma_3$ , d.h. eine stetige Abbildung

$$k : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, s) \mapsto k(t, s)$$

mit  $k(t, 0) = \gamma_2(t)$  und  $k(t, 1) = \gamma_3(t)$ . Wir wollen jetzt zeigen, dass sich jetzt  $\gamma_1$  direkt in  $\gamma_3$  deformieren lässt. Die Idee ist, die zwei Deformationen nacheinander laufen zu lassen. Wir definieren also

$$\tilde{h} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, s) \mapsto \tilde{h}(t, s) = \begin{cases} h(t, 2s) & 0 \leq s < 1/2 \\ k(t, 2s - 1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

und behaupten, dass  $\tilde{h}$  eine Homotopie zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_3$  ist.



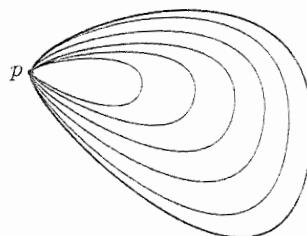
Das ist aber der Fall, weil  $\tilde{h}(t, 0) = h(t, 0) = \gamma_1(t)$  und  $\tilde{h}(t, 1) = k(t, 1) = \gamma_3(t)$ . Außerdem ist  $\tilde{h}$  eine Zusammensetzung von zwei stetigen Funktionen, also stetig. Somit sind  $\gamma_1$  und  $\gamma_3$  homotop, d.h.  $\gamma_1 \simeq \gamma_3$ . Die Transitivität ist somit erfüllt.

Die drei Eigenschaften der Definition einer Äquivalenzrelation sind erfüllt. Somit definiert  $\simeq$  eine Äquivalenzrelation. ■

### 5.5.2 Einfach zusammenhängende Mengen

Eine Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  von  $\mathbb{R}^n$  heißt *einfach zusammenhängend*, falls jede geschlossene Kurve in  $\Omega$  zu einer konstanten Kurve homotop ist. In anderen Worten:  $\Omega$  ist einfach

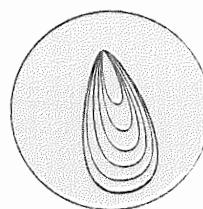
zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve in  $\Omega$  zu einem Punkt zusammengezogen werden kann.



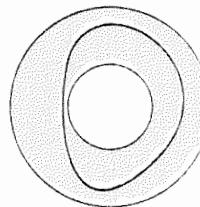
**Beispiel 5.5.2** ooo Welche der folgenden Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  ist einfach zusammenhängend?

- a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
- b)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$
- c)  $\mathbb{R}^2$
- d)  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- e) Ein Torus
- f)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

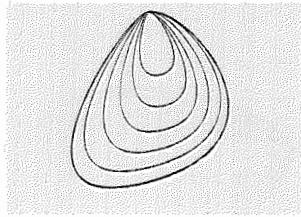
**Lösung:** a) Ja. Jede geschlossene Kurve in  $A$  kann zu einem Punkt zusammengezogen werden.



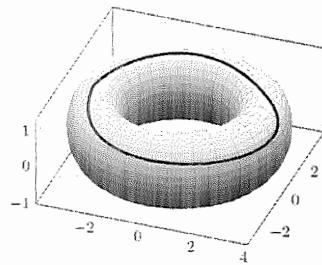
b) Nein. Die folgende geschlossene Kurve in  $B$  kann nicht zu einem Punkt zusammengezogen werden.



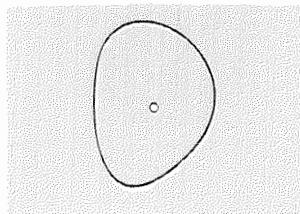
c) Ja. Jede geschlossene Kurve in  $\mathbb{R}^2$  kann zu einem Punkt zusammengezogen werden.



- d) Ja. Jede geschlossene Kurve auf  $S^2$  kann zu einem Punkt zusammengezogen werden.  
e) Nein. Auf dem Torus gibt es geschlossene Kurven, welche sich nicht zu einem Punkt zusammenziehen lassen.



- f) Nein. Die folgende geschlossene Kurve in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  kann nicht zu einem Punkt zusammengezogen werden.



■

# Kapitel 6

## Kritische und reguläre Punkte

In diesem sehr kurzen Kapitel führen wir das Konzept von regulären und kritischen Punkten ein, das wir in den folgenden Kapiteln öfters gebrauchen werden. Wir beginnen zuerst mit dem einfacheren Fall einer Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 6.1 Der Fall $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Der Punkt  $p_0 \in \Omega$  heisst *kritischer Punkt* (von  $f$ ), falls  $df(p_0) = 0$ . Die Punkte in  $\Omega$ , welche nicht kritisch sind, heissen *regulär*.

**Beispiel 6.1.1 •••** Welche Punkte sind kritische Punkte von  $f$ ?

- a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x^3 + y^3 - 9xy + 2456$
- b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y$
- c)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow x^2 + y^2 - z^2$
- d)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow yx^2(4 - x - y)$
- e)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow e^{x^2+y^2} - 4x^2 - 4y^2$
- f)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow 2x^2 + y^4 + 2z^2 + 4yz$

**Lösung a)** Die kritischen Punkte von  $f$  sind die Punkte für welche  $df = 0$  gilt. Somit müssen wir als allererstes das Differenzial von  $f$  bestimmen. Dazu bestimmen wir die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 9y$  und  $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 9x$ . Das Differenzial von  $f$  lautet somit

$$df(x, y) = (3x^2 - 9y, 3y^2 - 9x).$$

Die kritischen Punkte sind die Lösungen von

$$df(x, y) = (3x^2 - 9y, 3y^2 - 9x) \stackrel{!}{=} (0, 0).$$

Die partiellen Ableitungen müssen also Null sein. Es muss also  $3x^2 - 9y = 0$  und  $3y^2 - 9x = 0$  gelten. Aus der ersten Gleichung bekommen wir  $y = \frac{1}{3}x^2$ . Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, so bekommen wir  $3x = \frac{1}{3}x^4 \Rightarrow x(x^3 - 27) = 0$ . Es folgt somit  $x = 0$  oder  $x = 3$ . Wir setzen diese zwei Resultate in  $y = \frac{1}{3}x^2$ , um  $y$  zu bestimmen

$$x = 0 \Rightarrow y = 0, \quad x = 3 \Rightarrow y = 3.$$

Wir haben somit zwei Lösungen

$$(0, 0), \quad (3, 3).$$

Das sind die kritischen Punkte von  $f$ .

b) Die kritischen Punkte von  $f$  sind die Punkte für welche gilt  $df = 0$ . Somit müssen wir zuerst das Differenzial von  $f$  bestimmen. Dazu bestimmen wir die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2} - 4$  und  $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} + 1$ . Das Differenzial von  $f$  lautet somit

$$df(x, y) = \left( \frac{1}{x^2} - 4, -\frac{1}{y^2} + 1 \right).$$

Die kritischen Punkte sind die Lösungen von

$$df(x, y) = \left( \frac{1}{x^2} - 4, -\frac{1}{y^2} + 1 \right) \stackrel{!}{=} (0, 0).$$

Die partiellen Ableitungen müssen also Null sein. Es muss also  $\frac{1}{x^2} - 4 = 0$  und  $-\frac{1}{y^2} + 1 = 0$  gelten. Aus der ersten Gleichung bekommen wir  $x = \pm\frac{1}{2}$  und aus der zweiten  $y = \pm 1$ . Wir haben somit vier Lösungen

$$\left( \frac{1}{2}, 1 \right), \quad \left( -\frac{1}{2}, 1 \right), \quad \left( \frac{1}{2}, -1 \right), \quad \left( -\frac{1}{2}, -1 \right).$$

Das sind die kritischen Punkte von  $f$ .

c) Die kritischen Punkte von  $f$  sind die Punkte für welche gilt  $df = 0$ . Somit müssen wir als allererstes das Differenzial von  $f$  bestimmen

$$df(x, y) = (2x, 2y, -2z).$$

Die kritischen Punkte sind somit die Lösungen von

$$df(x, y) = (2x, 2y, -2z) \stackrel{!}{=} (0, 0, 0).$$

Die partiellen Ableitungen müssen also Null sein. Es muss also  $2x = 0$ ,  $2y = 0$  und  $-2z = 0$  gelten. Die einzige Lösung ist  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . Somit ist  $(0, 0, 0)$  der einzige kritische Punkt von  $f$ .

d) Die kritischen Punkte von  $f$  sind die Punkte für welche  $df = 0$ . Somit müssen wir als allererstes das Differenzial von  $f$  bestimmen. Dazu bestimmen wir die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy(4 - x - y) - x^2y = xy(8 - 2y - 3x)$  und  $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2(4 - x - y) - x^2y = x^2(4 - x - 2y)$ . Das Differenzial von  $f$  lautet somit

$$df(x, y) = (xy(8 - 2y - 3x), x^2(4 - x - 2y)).$$

Die kritischen Punkte sind die Lösungen von

$$df(x, y) = (xy(8 - 2y - 3x), x^2(4 - x - 2y)) \stackrel{!}{=} (0, 0).$$

Die partiellen Ableitungen müssen also Null sein. Es muss also  $xy(8 - 2y - 3x) = 0$  und  $x^2(4 - x - 2y) = 0$  gelten. Aus der zweiten Gleichung bekommen wir entweder  $x = 0$  oder  $4 - x - 2y = 0$ . Wenn  $x = 0$ , so ist die erste Gleichung automatisch erfüllt, sodass die Punkte  $(0, y)$  mit  $y \in \mathbb{R}$

beliebig kritisch sind. Aus  $4 - x - 2y = 0$  folgt  $x = 4 - 2y$ . Wir setzen dies in  $xy(8 - 2y - 3x) = 0$  ein und bekommen

$$0 = y(4 - 2y)(8 - 2y - 12 + 6y) = y(4 - 2y)(4y - 4).$$

Die Lösungen sind  $y = 0$ ,  $y = 2$  und  $y = 1$ . Diese Werte setzen wir wieder in  $x = 4 - 2y$ , um  $x$  zu bestimmen

$$y = 0 \Rightarrow x = 4, \quad y = 2 \Rightarrow x = 0, \quad y = 1 \Rightarrow x = 2.$$

Wir haben somit die Lösungen gefunden

$$(4, 0), \quad (2, 1), \quad (0, y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Das sind die kritischen Punkte von  $f$ .

e) Wir rechnen das Differenzial von  $f$  aus

$$df(x, y) = \left( 2xe^{x^2+y^2} - 8x, 2ye^{x^2+y^2} - 8y \right) = \left( 2x(e^{x^2+y^2} - 4), 2y(e^{x^2+y^2} - 4) \right).$$

Die kritischen Punkte sind somit die Lösungen von

$$df(x, y) = \left( 2x(e^{x^2+y^2} - 4), 2y(e^{x^2+y^2} - 4) \right) \stackrel{!}{=} (0, 0).$$

Aus der ersten Gleichung folgt entweder  $x = 0$  oder  $e^{x^2+y^2} - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = \log(4)$ . Aus der zweiten Gleichung folgt  $y = 0$  oder  $e^{x^2+y^2} - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = \log(4)$ . Somit sind die kritischen Punkte von  $f$  genau

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \log(4)\} \cup \{(0, 0)\}.$$

f) Wir rechnen das Differenzial von  $f$  aus

$$df(x, y, z) = (4x, 4y^3 + 4z, 4z + 4y).$$

Die kritischen Punkte sind somit die Lösungen von

$$df(x, y, z) = (4x, 4y^3 + 4z, 4z + 4y) \stackrel{!}{=} (0, 0, 0).$$

Aus der ersten Gleichung folgt  $x = 0$ . Aus der dritten Gleichung bekommt man  $y = -z$ . Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt dies  $4y^3 + 4z = -4z^3 + 4z = 4z(1 - z^2) = 0$ . Es folgt somit  $z = 0, \pm 1$ . Dies liefert die kritischen Punkte

$$(0, 0, 0), \quad (0, 1, -1), \quad (0, -1, 1).$$

■

**Beispiel 6.1.2** ••• Bestimme die Menge der kritischen Punkte von

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^4 + \frac{1}{2}y^2 + \cos(x^2 + y^2) - \sqrt{\pi}$$

auf der Kreisscheibe  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \pi/2, x, y \geq 0\}$ .

**Lösung:** Wir berechnen zunächst die partiellen Ableitungen von  $f$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 4x^3 - 2x \sin(x^2 + y^2) = 2x(2x^2 - \sin(x^2 + y^2)) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= y - 2y \sin(x^2 + y^2) = y(1 - 2 \sin(x^2 + y^2)).\end{aligned}$$

Das Differenzial von  $f$  lautet somit

$$df(x, y) = (2x(2x^2 - \sin(x^2 + y^2)), y(1 - 2 \sin(x^2 + y^2))).$$

Kritische Punkte sind die Punkte aus  $\Omega$ , für welche  $df = 0$  gilt. Wir müssen somit die Gleichung

$$df(x, y) = (2x(2x^2 - \sin(x^2 + y^2)), y(1 - 2 \sin(x^2 + y^2))) \stackrel{!}{=} (0, 0)$$

lösen. Es muss also  $2x(2x^2 - \sin(x^2 + y^2)) = 0$  und  $y(1 - 2 \sin(x^2 + y^2)) = 0$  gelten. Aus der ersten Gleichung folgt entweder  $x = 0$  oder  $\sin(x^2 + y^2) = 2x^2$ . Aus der zweiten Gleichung folgt entweder  $y = 0$  oder  $1 = 2 \sin(x^2 + y^2)$ . Damit beide Gleichungen erfüllt sind, muss also gelten

$$\text{Fall I: } x = 0, y = 0$$

$$\text{Fall II: } x = 0, 1 = 2 \sin(x^2 + y^2)$$

$$\text{Fall III: } \sin(x^2 + y^2) = 2x^2, y = 0$$

$$\text{Fall IV: } \sin(x^2 + y^2) = 2x^2, 1 = 2 \sin(x^2 + y^2).$$

$$\underline{\text{Fall II: }} x = 0 \Rightarrow 1 = 2 \sin(y^2) \Rightarrow \sin^2 y = 1/2 \Rightarrow y = \sqrt{\pi/6} \quad (0 \leq y \leq \pi/2).$$

$$\underline{\text{Fall III: }} y = 0 \Rightarrow \sin(x^2) = 2x^2. \text{ Die einzige Lösung ist } x = 0.$$

$$\underline{\text{Fall IV: }} \sin(x^2 + y^2) = 2x^2, 1 = 2 \sin(x^2 + y^2) \Rightarrow 2x^2 = 1/2 \Rightarrow x = 1/2 \quad (\text{da } -1/2 \notin \Omega) \Rightarrow y = \sqrt{\pi/6 - 1/4}.$$

Wir haben somit 3 Lösungen gefunden

$$(0, 0), \quad \left(0, \sqrt{\frac{\pi}{6}}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}}\right).$$

Diese sind die kritischen Punkte von  $f$  in  $\Omega$ .

■

## 6.2 Der allgemeine Fall $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Jetzt betrachten wir den allgemeineren Fall, wo eine differenzierbare Abbildung  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  vorgegeben ist. In diesem Fall ist das Differenzial von  $f$  an der Stelle  $p_0 \in \Omega$  eine  $m \times n$  Matrix, also eine lineare Abbildung

$$df(p_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Aus der linearen Algebra wissen wir, was man von unter dem **Rang** einer Matrix versteht: Der Rang von  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist die Dimension des Bildes  $\text{Bild}(A)$  dieser Abbildung. Die Nullmatrix  $0_{m \times n}$  ist die einzige Matrix mit Rang 0 und für den Rang einer  $m \times n$  Matrix  $A$  gilt

$$\text{Rang}(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Zum Beispiel:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{Rang} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = 2.$$

Da das Differenzial  $df(p_0)$  eine Matrix ist, macht es Sinn von ihrem Rang zu sprechen. Ausserdem ist  $df(p_0)$  eine  $m \times n$  Matrix, woraus folgt

$$\text{Rang}(df(p_0)) \leq \min\{m, n\}.$$

Es gibt also im Wesentlichen zwei Situationen: Falls  $n \geq m$ , kann  $df(p_0)$  höchstens den Rang  $m$  haben, falls  $n \leq m$ , hat  $df(p_0)$  höchstens den Rang  $n$ .

**Beispiel 6.2.1**  $\circ\circ\circ$  Diskutiere den Rang des Differenzials von  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (xy - z^2 - 1, x + z - 2)$ .

**Lösung:** Das Differenzial von  $f$  an jeder Stelle  $(x, y, z)$  lautet

$$df(x, y, z) = \begin{pmatrix} y & x & -2z \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich um eine  $2 \times 3$  Matrix. Somit kann  $df$  höchstens Rang 2 haben. Es gibt somit folgende Möglichkeiten für den Rang von  $df$ : 0, 1 oder 2.

Rang 0? Die einzige Matrix mit Rang 0 ist die Nullmatrix. Somit hat  $df$  genau dann Rang 0, wenn

$$df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da aber die zweite Zeile von  $df$  sicher nicht gleich  $(0, 0, 0)$  ist, hat  $df$  nie den Rang 0.

Rang 1?  $df$  hat Rang 1, wenn die erste und zweite Zeile linear abhängig sind, d.h. wenn

$$(y, x, -2z) = \lambda(1, 0, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Somit hat für die Punkte auf der Geraden

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z) = \lambda(0, 1, -1/2), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$df(x, y, z)$  den Rang 1.

Rang 2? Für alle anderen Punkten in  $\mathbb{R}^3$  hat die Matrix  $df(x, y, z)$  vollen Rang.

**Reguläre Punkte** von  $f$  sind die Punkte  $p_0 \in \Omega$ , für welche  $df(p_0)$  den maximalen Rang

besitzt (d.h.  $n$  falls  $n \leq m$  oder  $m$  falls  $n \geq m$ ). Die Punkte  $p_0 \in \Omega$  für welche  $df(p_0)$  nicht den maximalen Rang besitzt, heissen *kritisch* (oder singulär).

**Definition 6.2.1 (Reguläre und kritische Punkte)**  $p_0 \in \Omega$  heisst *regulär*, falls die Matrix  $df(p_0)$  maximalen Rang besitzt. Sonst heisst  $p_0$  *kritisch*.

Diese Definition ist eine Verallgemeinerung der Definition im Fall  $m = 1$ . Im Falle einer Abbildung  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist das Differenzial  $df(p_0)$  an einer Stelle  $p_0 \in \Omega$  eine  $1 \times n$  Matrix (ein Zeilenvektor)

$$df(p_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0) \right).$$

Diese Matrix kann höchstens den Rang 1 haben, d.h. der Rang von  $df(p_0)$  ist entweder 0 oder 1. Falls  $\text{Rang}(df(p_0)) = 0$ , so ist  $p_0$  ein kritischer Punkt, falls  $\text{Rang}(df(p_0)) = 1$ , so ist  $p_0$  regulär. Da die Nullmatrix die einzige Matrix ist, welche Rang 0 hat, folgt sofort, dass  $p_0$  genau dann ein kritischer Punkt von  $f$  ist, wenn  $df(p_0)$  die Nullmatrix ist, d.h.

$$df(p_0) = 0.$$

**Beispiel 6.2.2 •••** Betrachte die Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow (xyz - 1, x^3 + y - xz - 1)$ . Beweise, dass  $(1, 1, 1)$  ein regulärer Punkt von  $f$  ist. Enthält die Menge  $f^{-1}\{(0, 0)\}$  kritische Punkte?

**Lösung:** a) Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 3x^2 - z & 1 & -x \end{pmatrix} \Rightarrow df(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $df(1, 1, 1)$  hat Rang 2. Somit ist  $(1, 1, 1)$  ein regulärer Punkt von  $f$ .

b) Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 3x^2 - z & 1 & -x \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich um eine  $2 \times 3$  Matrix. Somit kann  $df$  höchstens Rang 2 haben. Es gibt somit folgende Möglichkeiten für den Rang von  $df$ : 0, 1 oder 2. Die Punkte, wo  $df$  Rang 0 oder 1 hat, sind somit kritisch. Die Punkte, für welche  $df$  Rang 2 hat, sind regulär. In dieser Aufgabe müssen wir somit untersuchen, ob die Menge  $f^{-1}\{(0, 0)\}$  (das ist die Menge aller Punkte  $(x, y, z)$  für welche  $f(x, y, z) = (0, 0)$ ) Punkte enthält, für welche  $df$  Rang 0 oder 1 hat.

Rang 0? Die einzige Matrix mit Rang 0 ist die Nullmatrix. Somit hat  $df$  Rang 0 nur, wenn

$$df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist aber nie der Fall, da die 2. 2-Komponente des Differenzials eine 1 ist.

Rang 1?  $df$  hat Rang 1 wenn die erste und zweite Zeile linear abhängig sind. d.h. wenn

$$(3x^2 - z, 1, -x) = \lambda(yz, xz, xy), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit  $y$  und die dritte Gleichung mit  $z$ . Wir erhalten  $y = \lambda xyz$  und  $-xz = \lambda xyz$ . Es folgt somit  $y = -xz$ . Nun wissen wir aber, dass die Punkte in  $f^{-1}(0,0)$  per Definition  $f(x,y,z) = (0,0)$  erfüllen, also insbesondere  $xyz = 1$ , woraus sich  $y^2 = -xyz = -1$  ergibt. Dies ist aber nicht möglich, weil  $y^2$  eine positive Zahl ist. Somit sind die Zeilen von  $df$  nie linear abhängig. Es gibt somit keine Punkte in  $f^{-1}\{(0,0)\}$  für welche  $df(x,y,z)$  Rang 1 hat.  
 ⇒ Somit enthält  $f^{-1}\{(0,0)\}$  nur reguläre Punkte. ■

**Beispiel 6.2.3 • • •** Betrachte die Abbildung  $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \rightarrow (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1, (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2 - 1)$ . Enthält die Menge  $f^{-1}\{(0,0)\}$  kritische Punkte?

**Lösung:** Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 2(x_1 - x_4) & 2(x_2 - x_5) & 2(x_3 - x_6) & -2(x_1 - x_4) & -2(x_2 - x_5) & -2(x_3 - x_6) \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich um eine  $2 \times 6$  Matrix. Somit kann  $df$  höchstens Rang 2 haben. Es gibt somit folgende Möglichkeiten für den Rang von  $df$ : 0, 1 oder 2. Die Punkte, wo  $df$  Rang 0 oder 1 hat, sind somit kritisch. Die Punkte, für welche  $df$  Rang 2 hat, sind regulär. In dieser Aufgabe müssen wir somit untersuchen, ob die Menge  $f^{-1}\{(0,0)\}$  (das ist die Menge aller Punkte  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$  für welche  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0,0)$ ) Punkte enthält, für welche  $df$  Rang 0 oder 1 hat.

Rang 0? Die einzige Matrix mit Rang 0 ist die Nullmatrix. Somit hat  $df$  Rang 0 nur, wenn

$$df(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Zeile folgt  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Aus der zweiten Zeile  $x_4 = x_1, x_5 = x_2$  und  $x_6 = x_3$ . Die einzige Lösung ist somit  $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . Dieser Punkt liegt aber nicht in  $f^{-1}\{(0,0)\}$ , weil  $f(0, 0, 0, 0, 0, 0) = (-1, -1) \neq (0,0)$ . Somit enthält  $f^{-1}\{(0,0)\}$  keine Punkte für welche  $df$  Rang 0 hat.

Rang 1?  $df$  hat Rang 1, wenn die erste und zweite Zeile linear abhängig sind. d.h. wenn

$$\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_4) \\ 2(x_2 - x_5) \\ 2(x_3 - x_6) \\ -2(x_1 - x_4) \\ -2(x_2 - x_5) \\ -2(x_3 - x_6) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die letzten drei Gleichungen implizieren  $x_1 = x_4, x_2 = x_5$  und  $x_3 = x_6$ . Dies eingesetzt in die ersten drei Gleichungen ergibt  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Dies ist wiederum der Punkt  $(0,0,0,0,0,0)$ .

⇒ Somit enthält  $f^{-1}\{(0,0)\}$  nur reguläre Punkte. ■

6. KRITISCHE UND REGULÄRE PUNKTE

---

## Kapitel 7

# Extremwertaufgaben in mehreren Dimensionen

Bereits im Gymnasium werden die Grundlagen für das Berechnen von Extremwertaufgaben geschaffen. Dies geschieht mit den Mitteln der Differenzialrechnung und basiert sich auf der Regel “Ableitung gleich Null setzen”. Die Punkte  $x_0$  für welche  $f'(x_0) = 0$  heißen kritische Punkte von  $f$ . Eine Funktion  $f(x)$  kann mehrere kritische Punkte besitzen. Ob es sich bei diesen Punkten um Maxima oder Minima handelt, wird von der zweiten Ableitung von  $f(x)$  entschieden. Ein kritischer Punkt  $x_0$  ist

- (i) ein Minimum, falls  $f''(x_0) > 0$ ,
- (ii) ein Maximum, falls  $f''(x_0) < 0$ ,
- (iii) ein Sattelpunkt, falls  $f''(x_0)$  um den Punkt  $x_0$  das Vorzeichen wechselt.

Wir fragen uns, wie sich diese einfache Regel im mehrdimensionalen Fall verallgemeinern lässt. Insbesondere werden wir mehrdimensionale Extremwertaufgaben mit und ohne Nebenbedingungen betrachten.

### 7.1 Extremwertaufgaben in $\mathbb{R}^n$ ohne Nebenbedingungen

Wir betrachten das folgende Problem

Gegeben: $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Omega$ offen (ohne Rand) und $f$ von der Klasse $C^2$ .
Gesucht: ein Extremum der Funktion $f$ in $\Omega$ .

Die einfache Regel “Ableitung gleich Null setzen”, welche wir aus dem Gymnasium kennen, verallgemeinert sich in der natürlichssten Art und Weise im mehrdimensionalen Fall. Wir müssen einfach alle partiellen Ableitungen (nach den Koordinatenrichtungen) simultan gleich Null setzen. Denn das Verschwinden der partiellen Ableitungen genügt, um zu sichern, dass die Richtungsableitung in jeder Richtung verschwindet. Wenn also nicht alle

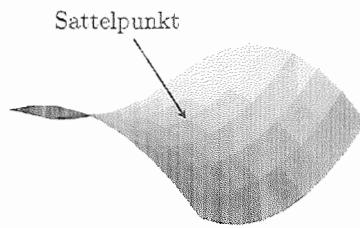
partiellen Ableitungen verschwinden sollten, würde es eine Richtung geben, in welcher  $f$  nicht flach ist, sondern ansteigend oder fallend: Wir würden keinen Extrempunkt haben. Es müssen also partielle Ableitungen verschwinden, oder in anderen Worten, es muss sich um einen kritischen Punkt handeln

**Satz 7.1.1 (Notwendige Bedingung für Extrema in  $\mathbb{R}^n$ )** Ist  $x_0 \in \Omega$  ein lokaler Extrempunkt (Maximum/Minimum) von  $f$ , so gilt

$$df(x_0) = 0$$

d.h.  $x_0$  ist ein kritischer Punkt von  $f$ .

Kritische Punkte von  $f$  sind also die Kandidaten für Extrempunkte. Allerdings muss es sich bei diesen Kandidaten nicht unbedingt um Extrempunkte handeln, denn genauso wie im eindimensionalen Fall kann es Sattelpunkte geben. Ein Sattelpunkt ist ein Punkt, der weder ein Maximum noch ein Minimum ist



Für die Überprüfung der Kandidaten steht folgendes Kriterium zur Verfügung

**Satz 7.1.2** Es sei  $f$  wie oben. Ist  $df(x_0) = 0$  und ist die Hesse-Matrix  $\text{Hess}(f)(x_0)$  positiv resp. negativ definit in dem Sinne, dass

$$x^T \text{Hess}(f)(x_0)x > 0 \text{ resp. } < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

so ist  $x_0$  ein striktes lokales Minimum resp. Maximum von  $f$ .

In einem gewissen Sinne ersetzt also die Hesse-Matrix

$$\text{Hess}(f)(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

die zweite Ableitung im Fall einer Variablen. Die Bedingungen  $f''(x_0) < 0$  respektive  $f''(x_0) > 0$  für Funktionen einer Variablen übersetzen sich in negative respektive positive Definitheit der Hesse-Matrix an der Stelle  $x_0$ .

Ist die Hesse-Matrix indefinit so handelt es sich um einen Sattelpunkt.

### 7.1.1 Exkursus: positiv und negativ definite Matrizen

In der linearen Algebra lernt man, dass eine symmetrische, reelle  $n \times n$ -Matrix  $A$  **positiv definit** ist, falls

$$x^T A x > 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Falls

$$x^T A x \geq 0, \quad \forall x \neq 0$$

heisst  $A$  **positiv semi-definit**. Analog heisst  $A$  **negativ definit**, falls

$$x^T A x < 0, \quad \forall x \neq 0$$

und **negativ semi-definit**, falls

$$x^T A x \leq 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Trifft keiner dieser Fälle zu, so heisst  $A$  **indefinit**. Soweit so gut. Wie kann man aber eine vorgegebene Matrix auf positive resp. negative Definitheit prüfen? Die Definition hilft uns nicht viel. Es gibt grundsätzlich zwei alternative Methoden.

#### Das Eigenwert-Kriterium

Wie es schon aus der linearen Algebra bekannt ist, sind reelle symmetrische Matrizen<sup>1</sup> immer diagonalisierbar und die Eigenwerte sind immer reell. Kennt man die Eigenwerte der Matrix  $A$ , so liefert der folgende Satz ein nützliches Kriterium für Definitheit

**Satz 7.1.3 (Eigenwert-Kriterium)** *Es seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte der reellen, symmetrischen  $n \times n$ -Matrix  $A$ . Dann gilt*

- $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0 \Leftrightarrow A$  *positiv definit,*
- $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0 \Leftrightarrow A$  *positiv semi-definit,*
- $\lambda_1 < 0, \dots, \lambda_n < 0 \Leftrightarrow A$  *negativ definit,*
- $\lambda_1 \leq 0, \dots, \lambda_n \leq 0 \Leftrightarrow A$  *negativ semi-definit,*
- hat  $A$  sowohl positive als auch negative Eigenwerte, so ist  $A$  indefinit.*

Als Beispiel untersuchen wir die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>Beachte, dass die Hesse-Matrix von  $f$  symmetrisch ist, weil  $f \in C^2$  (Satz von Schwarz).

Die Eigenwerte von  $A$  sind  $\lambda_1 = 6 > 0$  und  $\lambda_2 = 1 > 0$ . Die Matrix  $A$  ist somit positiv definit. Die Matrix  $B$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = 2\sqrt{5} > 0$  und  $\lambda_2 = -2\sqrt{5} < 0$ . Somit ist  $B$  indefinit. Die Matrix  $C$  ist positiv semi-definit, weil die Eigenwerte  $\lambda_1 = 4 > 0$  und  $\lambda_2 = 0$  lauten.

### Das Hurwitz-Kriterium

Für grosse Matrizen ( $3 \times 3$  oder grösser) kann die Diagonalisierung sehr aufwendig werden, sodass man sehr dankbar ist, wenn es ein weiteres Kriterium gibt, das es erlaubt, eine Matrix auf Positivität zu untersuchen, ohne die Eigenwerte der Matrix bestimmen zu müssen. Das **Hurwitz-Kriterium** ist für solche Situationen sehr geeignet. Um das Kriterium formulieren zu können, muss man zuerst die sogenannten **Hauptminoren** einer symmetrischen Matrix definieren. Sei  $A$  eine reelle, symmetrische  $n \times n$  Matrix. Die Hauptminoren der Matrix  $A$  sind die "nordwestlichen Unterdeterminanten" der Matrix  $A$ , d.h. es sind die Determinanten der Teilmatrizen der Grösse  $1, 2, 3, \dots, n$ , welche man ausgehend von der linken oberen Ecke bildet. Konkret: Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

die  $n$  Hauptminoren sind

$$A_1 = \det(a_{11}) = a_{11}$$

$$A_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A_n = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det A.$$

Es gilt dann das folgende Kriterium

**Satz 7.1.4 (Hurwitz-Kriterium)** Es seien  $A_1, \dots, A_n$  die Hauptminoren der reellen, symmetrischen  $n \times n$  Matrix.

- $A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0, \dots \Leftrightarrow A$  positiv definit,
- $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots \Leftrightarrow A$  negativ definit,
- gilt weder  $A_1 \geq 0, A_2 \geq 0, A_3 \geq 0, \dots$  noch  $A_1 \leq 0, A_2 \geq 0, A_3 \leq 0, \dots$  so ist  $A$  indefinit.

Wir betrachten drei Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 20 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2/9 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 22 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Wir rechnen die Hauptminoren der Matrix  $A$  aus

$$A_1 = 2 > 0, \quad A_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0, \quad A_3 = \det(A) = 40 > 0.$$

Nach dem Hurwitz-Kriterium ist  $A$  positiv definit. Die ersten zwei Hauptminoren von  $B$  lauten

$$B_1 = -2/9 < 0, \quad B_2 = \det \begin{pmatrix} -2/9 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4/9 < 0.$$

Die Sequenz der Vorzeichen impliziert, dass  $B$  indefinit ist (ohne  $B_3$  berechnen zu müssen). Ferner rechnen wir die Hauptminoren der Matrix  $C$  aus

$$C_1 = -5 < 0, \quad C_2 = \det \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 20 > 0, \quad C_3 = \det(C) = -75 < 0.$$

Nach dem Hurwitz-Kriterium ist  $C$  negativ definit.

### 7.1.2 Beispiele

Für die Bestimmung von Maxima und Minima können wir das folgende Kochrezept aufstellen

#### KOCHREZEPT FÜR EXTREMWERTAUFGABEN OHNE NEBENBEDINGUNGEN

Gegeben:  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\Omega$  offen (ohne Rand) und  $f$  von der Klasse  $C^2$ .

Gesucht: ein Extremum der Funktion  $f$  in  $\Omega$ .

**Schritt 1** Finde kritische Punkte von  $f$ , d.h. löse

$$df = 0.$$

Die Lösungen sind die Kandidaten für Extremalstellen von  $f$ .

**Schritt 2** Um zu entscheiden, ob ein kritischer Punkt  $x_0$  von  $f$  ein Maximum oder ein Minimum ist, muss man die Hesse-Matrix von  $f$  untersuchen

$\text{Hess}(f)(x_0)$  positiv definit  $\Rightarrow x_0$  lokales Minimum von  $f$

$\text{Hess}(f)(x_0)$  negativ definit  $\Rightarrow x_0$  lokales Maximum von  $f$

$\text{Hess}(f)(x_0)$  indefinit  $\Rightarrow x_0$  Sattelpunkt von  $f$

**Beispiel 7.1.1**  $\circ\circ\circ$  Untersuche kritische Punkte von  $f = x^2 + y^2$  auf  $\mathbb{R}^2$ .

**Schritt 1:** Wir setzen partielle Ableitungen gleich 0

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \stackrel{!}{=} 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \stackrel{!}{=} 0.$$

Somit ist  $(0, 0)$  der einzige Kandidat für Extrema.

**Schritt 2:** Wir rechnen die Hesse-Matrix an der Stelle  $(0, 0)$  aus

$$\text{Hess}(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix ist positiv definit, da die Eigenwerte positiv sind. Somit ist  $(0, 0)$  ein lokales Minimum. ■

**Beispiel 7.1.2**  $\circ\circ\circ$  Untersuche kritische Punkte von  $f = x^2 - y^2$  auf  $\mathbb{R}^2$ .

## 7.1. EXTREMWERTAUFGABEN IN $\mathbb{R}^n$ OHNE NEBENBEDINGUNGEN

**Schritt 1:** Wir setzen partielle Ableitungen gleich 0

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \stackrel{!}{=} 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \stackrel{!}{=} 0.$$

Somit ist  $(0, 0)$  der einzige Kandidat für Extrema.

**Schritt 2:** Wir rechnen die Hesse-Matrix an der Stelle  $(0, 0)$  aus

$$\text{Hess}(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix ist indefinit, da ein Eigenwert positiv ist und der andere negativ. Somit ist  $(0, 0)$  ein Sattelpunkt. ■

**Beispiel 7.1.3 •••** Untersuche kritische Punkte von  $f = xy - x^2 - y^2 - x$  auf  $\mathbb{R}^2$ .

**Schritt 1:** Wir setzen partielle Ableitungen gleich 0

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2x - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y \stackrel{!}{=} 0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt  $x = 2y$ . Eingesetzt in die erste Gleichung ergibt dies  $x = -\frac{2}{3}$ . Somit ist  $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$  unser Kandidat.

**Schritt 2:** Wir berechnen die Hesse-Matrix an dieser Stelle

$$\text{Hess}(f)\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nun berechnen wir die Hauptminoren der obigen Matrix

$$A_1 = -2 < 0, \quad A_2 = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Nach dem Hurwitz-Kriterium ist die Hesse-Matrix negativ definit. Somit ist  $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$  ein lokales Maximum. ■

**Beispiel 7.1.4 •••** Bestimme die Extrema von

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2 - 4xz - 2yz - \frac{2z^3}{3}.$$

**Schritt 1:** Wir setzen partielle Ableitungen gleich 0

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4z \stackrel{!}{=} 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2z \stackrel{!}{=} 0 \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2z - 4x - 2y - 2z^2 \stackrel{!}{=} 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt  $x = 2z$  und aus der zweiten  $y = z$ . Einsetzen in die dritte Gleichung liefert  $-2z - 8z - 2z - 2z^2 = -2z(z + 6) = 0$ . Somit ist  $z = 0$  oder  $z = -6$ . Aus  $z = 0$  folgt  $x = y = 0$ . Aus  $z = -6$  folgt  $x = -12$  und  $y = -6$ . Die Kandidaten sind somit

$$(0, 0, 0), \quad (-12, -6, -6).$$

**Schritt 2:** Für die Untersuchung der Kandidaten rechnen wir die Hesse-Matrix aus

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -2 - 4z \end{pmatrix}.$$

An der Stelle  $(0, 0, 0)$  gilt

$$\text{Hess}(f)(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Wir rechnen die Hauptminoren der Matrix aus

$$A_1 = 2 > 0, \quad A_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0, \quad A_3 = \det(\text{Hess}f(0, 0, 0)) = -48 < 0.$$

Die Matrix ist somit indefinit und  $(0, 0, 0)$  ist ein Sattelpunkt.

An der Stelle  $(-12, -6, -6)$  gilt

$$\text{Hess}(f)(-12, -6, -6) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 22 \end{pmatrix}.$$

Wir rechnen die Hauptminoren der Matrix aus

$$A_1 = 2 > 0, \quad A_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0, \quad A_3 = \det(\text{Hess}f(-12, -6, -6)) = 48 > 0.$$

Die Matrix ist somit positiv definit und  $(-12, -6, -6)$  ist ein Minimum. ■

**Beispiel 7.1.5 •••** Bestimme die kritischen Punkte von  $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 - y^3 + 3\alpha xy$  in Abhängigkeit von  $\alpha \neq 0$  und entscheide jeweils, ob ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt vorliegt.

**Schritt 1:** Wir bestimmen zuerst die partiellen Ableitungen von  $f_\alpha$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x} = 3x^2 + 3\alpha y, \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial y} = -3y^2 + 3\alpha x.$$

Das Differenzial von  $f$  lautet somit

$$df_\alpha(x, y) = (3x^2 + 3\alpha y, -3y^2 + 3\alpha x).$$

Kritische Punkte sind die Punkte für welche  $df_\alpha = (0, 0)$  ist. Wir müssen somit

$$df_\alpha(x, y) = (3x^2 + 3\alpha y, -3y^2 + 3\alpha x) \stackrel{!}{=} (0, 0)$$

lösen. Die erste Gleichung ergibt  $y = -x^2/\alpha$  (erinnere:  $\alpha \neq 0$ ). Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt  $3\alpha x = 3y^2 = 3x^4/\alpha^2 \Rightarrow 3x(\alpha - x^3/\alpha^2) = 0$ . Es folgt somit entweder  $x = 0$  oder  $x = \alpha$ . Falls  $x = 0$ , so ist  $y = 0$ . Ist  $x = \alpha$ , so ist  $y = -\alpha$ . Es gibt somit zwei kritische Punkte von  $f_\alpha$ . Diese sind

$$(0, 0), (\alpha, -\alpha).$$

**Schritt 2:** Nun wissen wir, dass kritische Punkte von  $f_\alpha$  die Kandidaten für Maxima und Minima sind. Wir müssen die Hesse-Matrix untersuchen

$$\text{Hess}(f_\alpha)(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 3\alpha \\ 3\alpha & -6y \end{pmatrix}.$$

Für  $(0, 0)$ : Die Hesse-Matrix in  $(0, 0)$  lautet

$$\text{Hess}(f_\alpha)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha \\ 3\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist diese Matrix positiv, negativ definit oder indefinit? Dazu berechnen wir die Eigenwerte. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 - 9\alpha^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3\alpha, \lambda_2 = -3\alpha.$$

Da  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  verschiedene Vorzeichen haben, ist  $\text{Hess}(f_\alpha)(0, 0)$  indefinit. In  $(0, 0)$  liegt somit ein Sattelpunkt vor.

Für  $(\alpha, -\alpha)$ : Die Hesse-Matrix in  $(\alpha, -\alpha)$  lautet

$$\text{Hess}(f_\alpha)(\alpha, -\alpha) = \begin{pmatrix} 6\alpha & 3\alpha \\ 3\alpha & 6\alpha \end{pmatrix}.$$

Ist diese Matrix positiv, negativ definit oder indefinit? Dazu berechnen wir die Eigenwerte. Die charakteristische Gleichung lautet

$$(6\alpha - \lambda)^2 - 9\alpha^2 = 0 \Rightarrow 6\alpha - \lambda = \pm 3\alpha \Rightarrow \lambda_1 = 3\alpha, \lambda_2 = 9\alpha.$$

Für  $\alpha > 0$  sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  beide positiv, d.h.  $\text{Hess}(f_\alpha)(\alpha, -\alpha)$  ist positiv definit und  $(\alpha, -\alpha)$  ist ein (lokales) Minimum. Für  $\alpha < 0$  sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  beide negativ, d.h.  $\text{Hess}(f_\alpha)(\alpha, -\alpha)$  ist negativ definit und  $(\alpha, -\alpha)$  ist ein (lokales) Maximum.

**Beispiel 7.1.6 ••○** Untersuche kritische Punkte von  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(x) \cos(y)$  auf  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ .

**Schritt 1:** Wir berechnen das Differenzial von  $f$

$$df(x, y) = (\cos(x) \cos(y), -\sin(x) \sin(y)).$$

Wir suchen die kritischen Punkte von  $f$ . Dazu setzen wir also  $df = 0$

$$df(x, y) = (\cos(x)\cos(y), -\sin(x)\sin(y)) = (0, 0).$$

Wir müssen also  $\cos(x)\cos(y) = 0$  und  $-\sin(x)\sin(y) = 0$  gleichzeitig lösen. Es gibt verschiedene Lösungen in  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

$$P_1 = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad P_2 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad P_3 = \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \quad P_4 = \left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right)$$

$$P_5 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad P_6 = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), \quad P_7 = \left(0, \frac{3\pi}{2}\right), \quad P_8 = \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right).$$

**Schritt 2:** Für die Untersuchung der kritischen Punkte brauchen wir die Hesse-Matrix von  $f$

$$\text{Hess}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ -\cos x \sin y & -\sin x \cos y \end{pmatrix}.$$

Nun werten wir die Hesse-Matrix an den verschiedenen Stellen aus

$$\text{Hess}(f)(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eigenwerte } -1, -1 \Rightarrow \text{negativ definit} \Rightarrow \text{Maximum.}$$

$$\text{Hess}(f)(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eigenwerte } 1, 1 \Rightarrow \text{positiv definit} \Rightarrow \text{Minimum.}$$

$$\text{Hess}(f)(P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eigenwerte } 1, 1 \Rightarrow \text{positiv definit} \Rightarrow \text{Minimum.}$$

$$\text{Hess}(f)(P_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eigenwerte } -1, -1 \Rightarrow \text{negativ definit} \Rightarrow \text{Maximum.}$$

$$\text{Hess}(f)(P_5) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eigenwerte } -1, 1 \Rightarrow \text{indefinit} \Rightarrow \text{Sattelpunkt.}$$

$$\text{Hess}(f)(P_6) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eigenwerte } -1, 1 \Rightarrow \text{indefinit} \Rightarrow \text{Sattelpunkt.}$$

$$\text{Hess}(f)(P_7) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eigenwerte } -1, 1 \Rightarrow \text{indefinit} \Rightarrow \text{Sattelpunkt.}$$

$$\text{Hess}(f)(P_8) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eigenwerte } -1, 1 \Rightarrow \text{indefinit} \Rightarrow \text{Sattelpunkt.}$$

■

**Beispiel 7.1.7** ••• Es soll ein Dreieck in  $\mathbb{R}^2$  mit den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  bestimmt werden, sodass das Produkt

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

extremal wird.

**Lösung:** Da die Summe aller Winkel in einem Dreieck immer  $\pi$  ist, muss  $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ . Somit müssen wir

$$f(\alpha, \beta) = \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\pi - \alpha - \beta)$$

## 7.1. EXTREMWERTAUFGABEN IN $\mathbb{R}^n$ OHNE NEBENBEDINGUNGEN

maximieren auf dem Bereich<sup>2</sup>

$$D = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < \pi\}.$$

Die Kandidaten für Extrema sind die kritischen Punkte von  $f$ . Das Differenzial von  $f$  lautet

$$\begin{aligned} df(\alpha, \beta) = & (\cos \alpha \sin \beta \sin(\pi - \alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta \cos(\pi - \alpha - \beta), \\ & \sin \alpha \cos \beta \sin(\pi - \alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta \cos(\pi - \alpha - \beta)). \end{aligned}$$

Kritische Punkte sind die Lösungen von  $df = 0$ . Wir müssen somit die Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos \alpha \sin \beta \sin(\pi - \alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta \cos(\pi - \alpha - \beta) &= 0 \\ \sin \alpha \cos \beta \sin(\pi - \alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta \cos(\pi - \alpha - \beta) &= 0 \end{aligned}$$

lösen. Da  $\sin \alpha, \sin \beta \neq 0$  (weil  $\alpha, \beta > 0$  und  $\alpha, \beta < \pi$ ), dürfen wir  $\sin \alpha$  resp.  $\sin \beta$  in den zwei Gleichungen durchstreichen

$$\begin{aligned} \cos \alpha \sin(\pi - \alpha - \beta) - \sin \alpha \cos(\pi - \alpha - \beta) &= 0 \\ \cos \beta \sin(\pi - \alpha - \beta) - \sin \beta \cos(\pi - \alpha - \beta) &= 0 \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \cos \alpha \sin(\pi - \alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos(\pi - \alpha - \beta) \\ \cos \beta \sin(\pi - \alpha - \beta) &= \sin \beta \cos(\pi - \alpha - \beta) \\ \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{\sin(\pi - \alpha - \beta)}{\cos(\pi - \alpha - \beta)} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \end{aligned}$$

also

$$\tan \alpha = \tan(\pi - \alpha - \beta) = \tan \beta.$$

Wir erlauben nur Winkel  $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ . Auf  $(0, \pi)$  ist  $\tan$  injektiv. Somit folgt

$$\alpha = \pi - \alpha - \beta = \beta.$$

Es folgt somit  $\alpha = \pi - \alpha - \beta \stackrel{\alpha=\beta}{=} \pi - 2\alpha \Rightarrow 3\alpha = \pi \Rightarrow \alpha = \beta = \pi/3$ .

■

**Beispiel 7.1.8 •••** Bestimme die Extrema von  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^5 + x^3y^2 - x^3$ .

**Lösung:** Wir setzen partielle Ableitungen gleich 0

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 + 3x^2y^2 - 3x^2 = x^2(5x^2 + 3y^2 - 3) \stackrel{!}{=} 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y \stackrel{!}{=} 0.$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich entweder  $x = 0$  oder  $y = 0$ . Falls  $x = 0$ , so folgt aus der ersten Gleichung keine Bedingung an  $y$ , sodass  $y$  beliebig ist. Falls  $y = 0$ , so folgt aus der ersten Gleichung entweder  $x = 0$  oder  $5x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3/5}$ . Die Kandidaten sind somit

$$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right), \quad \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right), \quad (0, y) \text{ mit } y \in \mathbb{R}.$$

<sup>2</sup>Ein Dreieck mit Winkel 0 oder  $\pi$  macht keinen Sinn.

Für die Untersuchung der Kandidaten rechnen wir die Hesse-Matrix aus

$$\text{Hess}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 20x^3 + 6xy^2 - 6x & 6x^2y \\ 6x^2y & 2x^3 \end{pmatrix}.$$

An der Stelle  $(\sqrt{3}/5, 0)$  gilt

$$\text{Hess}(f)\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 \\ 0 & \frac{6}{5}\sqrt{\frac{3}{5}} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{positiv definit} \Rightarrow \text{Minimum.}$$

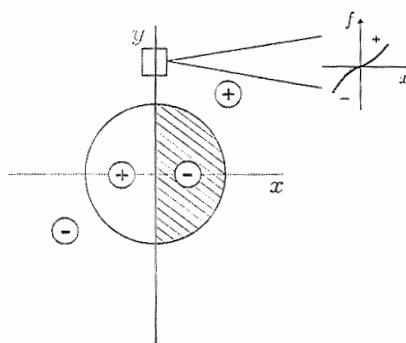
An der Stelle  $(-\sqrt{3}/5, 0)$  gilt

$$\text{Hess}(f)\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right) = \begin{pmatrix} -6\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5}\sqrt{\frac{3}{5}} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{negativ definit} \Rightarrow \text{Maximum.}$$

An der Stelle  $(0, y)$  gilt

$$\text{Hess}(f)(0, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Was bedeutet, dass die Hesse-Matrix die Nullmatrix ist? Es bedeutet einfach, dass die Untersuchung der kritischen Stelle  $(0, y)$  mit der Hesse-Matrix keine Resultate liefert. Wie muss man also in einer solchen Situation vorgehen? Üblicherweise untersucht man das Vorzeichen von  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ , wobei  $f(x_0, y_0)$  der Wert von  $f$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  ist, die wir untersuchen wollen. Wegen  $f(0, y) = 0$ , müssen wir in unserem Fall das Vorzeichen von  $f(x, y) - f(0, y) = f(x, y)$  untersuchen.  $f(x, y) = x^3(x^2 + y^2 - 1)$  ist als Produkt von zwei Faktoren ( $x^3$  und  $x^2 + y^2 - 1$ ) gegeben. Der Faktor  $x^3$  ist für  $x > 0$  positiv und für  $x < 0$  negativ. Der Faktor  $x^2 + y^2 - 1$  verschwindet auf dem Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt  $(0, 0)$  und ist innerhalb des Kreises negativ und außerhalb positiv. Man zeichnet dann eine Skizze, in der man die Vorzeichen von  $f$  aufschreibt.



Zu betrachten ist ein Punkt auf der Geraden  $(0, y)$ . Da jede Umgebung eines Punktes  $(0, y)$  auf dieser Geraden sowohl positive als auch negative Werte von  $f(x, y)$  enthält, kann  $(0, y)$  kein Maximum oder Minimum von  $f$  sein. Es sind Sattelpunkte.

## 7.2 Extrema mit Nebenbedingungen

Ziel dieses Abschnittes ist die Betrachtung der folgenden Aufgabe:

Gegeben:  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$  von der Klasse  $C^1$ .

Gesucht: ein Extremum der Funktion  $f$  unter der Nebenbedingung  $g = 0$ .

Mit anderen Worten betrachten wir nun Extremwertaufgaben, bei denen nach den Extrema der Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  gesucht wird, aber die Menge der zulässigen Punkte  $x$  durch eine **Nebenbedingung**  $g(x_1, \dots, x_n) = 0$  eingeschränkt ist. Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel.

**Beispiel 7.2.1** ••• Finde die Extrema von  $f = x + 2y$  auf dem Einheitskreis

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

**Lösung:** Die Aufgabe besteht darin, Extrema von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  zu finden. Da wir noch keine allgemeine Methode haben, welche uns erlaubt solche Aufgaben zu betrachten, können wir unsere Intuition benutzen. Wir könnten zum Beispiel die Nebenbedingung so erfüllen, dass wir  $x = \cos t$  und  $y = \sin t$  setzen. In anderen Worten, wir haben  $S^1$  parametrisiert. Die Maxima (Minima) von  $f(x, y)$  auf  $S^1$  sind dann die Maxima (Minima) der Funktion  $f(t) = \cos t + 2 \sin t$ , welche nun eine Funktion einer Variablen ist. Notwendig für eine Extremalstelle ist

$$\frac{d}{dt}(\cos t + 2 \sin t) = -\sin t + 2 \cos t \stackrel{!}{=} 0.$$

Daraus folgt

$$4 \cos^2 t = 1 - \cos^2 t \Rightarrow \cos^2 t = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos t = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Die gesuchten Extrema lauten somit

$$\left( \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

Eine weitere Untersuchung zeigt, dass  $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$  ein Maximum ist, während  $(-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$  ein Minimum ist.

■

Wir haben anhand dieses Beispiele gesehen, dass es im Prinzip möglich ist, Extremalstellen von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g = 0$  zu finden, indem man die Menge  $g^{-1}\{0\} = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$  explizit parametrisiert. Wenn aber die Menge  $g^{-1}\{0\}$  etwas komplizierter aussieht, als einfach  $S^1$ , kann die Aufgabe eine Parametrisierung zu finden, sehr schwierig werden. Wir fragen uns somit: Gibt es eine allgemeine Methode, welche nach Extrema von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g = 0$  sucht, ohne eine explizite Parametrisierung von  $g^{-1}\{0\}$  zu verlangen? Die Antwort auf diese Frage ist ja. Diese andere Möglichkeit zur Lösung

gestaltet sich über die Erschaffung einer neuen Funktion, der **Lagrange-Funktion**, und ist bekannt als die **Lagrange-Multiplikator-Regel**. Die Regel lautet so

**Satz 7.2.1 (Lagrange-Multiplikator-Regel)** *Es seien  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$  zwei gegebene Funktionen der Klasse  $C^1$ . Ist  $x_0 \in S = g^{-1}\{0\}$  ein lokales Maximum oder Minimum von  $f$  auf  $S$  und ist  $x_0$  ein regulärer Punkt von  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ , so gibt es ein  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \mathbb{R}^l$ , sodass für die Lagrange-Funktion  $L = f - \lambda \cdot g$  gilt*

$$dL(x_0) = 0.$$

In anderen Worten: Die Kandidaten für Extremalstellen von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g = 0$  sind die *kritischen Punkte der Lagrange-Funktion*  $L = f - \lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_l g_l$ , wobei  $g_1, \dots, g_l$  die  $l$  Komponenten von  $g$  sind. Die Variable  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  (ein Vektor mit  $l$  Komponenten) heisst **Lagrange-Multiplikator** (das sind oft zusätzliche Variable, die uns eigentlich nicht interessieren). Aus diesem Grund führt man die folgende Definition ein

**Definition 7.2.1**  *$x_0$  heisst kritischer Punkt von  $f$  auf  $S = g^{-1}\{0\}$ , falls  $\lambda$  existiert mit*

$$dL(x_0) = 0,$$

*wobei  $L = f - \lambda \cdot g$ .*

Die Kandidaten für Extrema sind also die kritischen Punkte der Einschränkung von  $f$  auf  $g^{-1}\{0\}$ . Ob es sich bei diesen Punkten um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt, kann man mit der Untersuchung der Hesse-Matrix von  $L$  (und nicht von  $f$ ) schaffen.

### 7.2.1 Einschub: ein Existenzsatz für Extrema

Bei der Betrachtung von Extremwertaufgaben ist oft folgender Satz sehr nützlich

**Satz 7.2.2 (Existenzsatz für Extrema)** *Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $\Omega$ , so nimmt  $f$  auf  $\Omega$  Minimum und Maximum an.*

Merkregel:

“Eine stetige Funktion nimmt auf einer kompakten Menge ihr Minimum und Maximum an.”

### 7.2.2 Beispiele

Für die Berechnung von Extrema mit Nebenbedingungen steht das folgende Kochrezept zur Verfügung

#### KOCHREZEPT FÜR EXTREMA MIT NEBENBEDINGUNGEN

Gegeben:  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$  der Klasse  $C^1$

Gesucht: ein Extremum der Funktion  $f$  unter der Nebenbedingung  $g = 0$ .

**Schritt 1:** Bilde Lagrange-Funktion

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) - \dots - \lambda_l g_l(x_1, \dots, x_n),$$

wobei  $g_1, \dots, g_l$  die  $l$  Komponenten von  $g$  sind (normalerweise  $l = 1$ ).

**Schritt 2:** Bestimme kritische Punkte von  $L$ . Löse dazu

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \dots - \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial x_1} = 0$$

⋮

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} - \dots - \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial x_n} = 0.$$

Dies ist ein System von  $n$  Gleichungen für die  $n + l$  Unbekannten  $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_l$ . Zum Glück haben wir noch  $l$  letzte Gleichungen, welche das System vollständig machen, nämlich die Nebenbedingung  $g = 0$  selbst. Das entstehende Gleichungssystem ist im allgemeinen nicht linear und deshalb sehr schwierig zu lösen. Es gibt keine allgemeinen Methoden für die Lösung des Gleichungssystems, aber oft ist es "gut" jede Gleichung nach einer der  $\lambda_i$  aufzulösen und die verschiedenen  $\lambda_i$ 's gleich zu setzen (vgl. Beispiele).

**Schritt 3:** Lösungen  $(x_1, \dots, x_n)$  sind die Kandidaten für Extremalstellen von  $f$ . Um zu entscheiden, ob ein kritischer Punkt  $x_0$  von  $L$  ein Maximum oder ein Minimum von  $f$  ist, muss man die Hesse-Matrix von  $L$  (und nicht von  $f$ ) untersuchen

Hess( $L$ )( $x_0, \lambda$ ) positiv definit  $\Rightarrow$   $x_0$  lokales Minimum von  $f$  auf  $g^{-1}\{0\}$

Hess( $L$ )( $x_0, \lambda$ ) negativ definit  $\Rightarrow$   $x_0$  lokales Maximum von  $f$  auf  $g^{-1}\{0\}$

Hess( $L$ )( $x_0, \lambda$ ) indefinit  $\Rightarrow$   $x_0$  Sattelpunkt von  $f$  auf  $g^{-1}\{0\}$

Manchmal ist man nur an *globalen Extrema* (Maximum oder Minimum) interessiert. In einer solchen Situation kann man viel Zeit sparen, indem man Satz 7.2.2 benutzt. Wie? Ist die Menge  $S = g^{-1}\{0\}$  kompakt und  $f$  stetig, so nimmt  $f$  sicher Maximum und Minimum auf  $S$  an. Somit können wir einfach die Punkte in  $f$  einsetzen und den grössten und den

kleinsten Wert nehmen, ohne die Hesse-Matrix zu untersuchen.

Jetzt einige Beispiele zur Lagrange-Multiplikator-Regel.

**Beispiel 7.2.2** ••• Finde Maxima und Minima von  $f = x + 2y$  unter der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Schritt 1:** Wir schreiben die Nebenbedingung in der Form  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Also  $g = x^2 + y^2 - 1$ . Die Lagrange-Funktion lautet somit

$$L = f - \lambda g = x + 2y - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

**Schritt 2:** Wir lösen

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= 1 - 2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2 - 2\lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{y}.\end{aligned}$$

Gleichsetzen der zwei  $\lambda$ 's gibt  $y = 2x$ . Zusammen mit der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  finden wir

$$x^2 + 4x^2 - 1 = 5x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \stackrel{y=2x}{\Rightarrow} \quad y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Wir haben also 2 Kandidaten gefunden

$$p_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \quad p_2 = \left( -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

**Schritt 3:** Um herauszufinden, welche Maxima und welche Minima darstellen, rechnen wir die Hesse Matrix von  $L$  aus

$$\text{Hess}(L)(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}.$$

Bei  $p_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$  ist  $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{5}}$  also

$$\text{Hess}(L)(p_1, \lambda) = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{negativ definit} \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum.}$$

Bei  $p_2 = \left( -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$  ist  $\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$  also

$$\text{Hess}(L)(p_2, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{positiv definit} \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum.}$$

■

**Beispiel 7.2.3** ••• Finde Maxima und Minima von  $f = xy$  unter der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 = 2$ .

**Schritt 1:** Wir schreiben die Nebenbedingung in der Form  $x^2 + y^2 - 2 = 0$ . Also  $g = x^2 + y^2 - 2$ . Die Lagrange-Funktion ist somit

$$L = f - \lambda g = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 2).$$

**Schritt 2:** Wir lösen

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= y - 2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{y}{2x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x - 2\lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{x}{2y}.\end{aligned}$$

Das Gleichsetzen der zwei  $\lambda$ 's ergibt  $y^2 = x^2$ , also  $x = \pm y$ . Zusammen mit der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 - 2 = 0$  finden wir 4 Kandidaten

$$p_1 = (1, 1) \quad p_2 = (-1, 1) \quad p_3 = (1, -1) \quad p_4 = (-1, -1).$$

**Schritt 3:** Um herauszufinden, welche dieser Punkte Maxima und welche Minima darstellen, sollte man die Hesse Matrix von  $L$  überprüfen. Dies ist aber sehr lang. Da aber die Menge  $S = \{x^2 + y^2 = 2\}$  kompakt und  $f$  auf  $S$  stetig ist, nimmt  $f$  Maximum und Minimum auf  $S$  an. Somit können wir einfach die Punkte in  $f$  einsetzen und den grössten und den kleinsten Wert nehmen (anstatt die Hesse-Matrix zu untersuchen), um globale Minima und Maxima zu finden

$$f(1, 1) = f(-1, -1) = 1 \quad f(-1, 1) = f(1, -1) = -1.$$

Somit sind  $(1, 1)$  und  $(-1, -1)$  globale Maxima, während  $(-1, 1)$  und  $(1, -1)$  globale Minima sind. ■

**Beispiel 7.2.4 • • •** Finde Extrema von  $f = xyz$  unter der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Schritt 1:** Wir schreiben die Nebenbedingung in der Form  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ . Also  $g = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ . Die Lagrange-Funktion ist somit

$$L = f - \lambda g = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

**Schritt 2:** Wir lösen

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= yz - 2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{yz}{2x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= xz - 2\lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{xz}{2y} \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= xy - 2\lambda z = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{xy}{2z}.\end{aligned}$$

Das Gleichsetzen der drei  $\lambda$ 's ergibt  $x^2 = y^2 = z^2$ . Zusammen mit der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$  finden wir

$$3x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Wir haben also unsere 8 Kandidaten gefunden

$$\left( \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Schritt 3: Das Einsetzen dieser Punkte in  $f$  ergibt

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Die Punkte  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  und  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  sind die globalen Maxima. Die anderen sind die globalen Minima. ■

**Beispiel 7.2.5** \* \* \* Betrachte  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$  und  $g(x, y) = x \cos y + y \cos x$ .

a) Beweise:  $p = (0, 0)$  ist ein regulärer Punkt von  $g$ .

b) Beweise:  $p = (0, 0)$  ist ein kritischer Punkt der Einschränkung von  $f$  auf  $g^{-1}\{0\}$ .

Ist  $p$  ein lokales Maximum, Minimum oder Sattelpunkt von  $f$  eingeschränkt auf  $g^{-1}\{0\}$ ?

Lösung: a) Das Differenzial von  $g$  lautet

$$dg(x, y) = (\cos y - y \sin x, -x \sin y + \cos x) \Rightarrow dg(0, 0) = (1, 1).$$

$dg(0, 0)$  hat Rang 1, somit ist  $(0, 0)$  ein regulärer Punkt von  $g$ .

b) Was bedeutet " $(0, 0)$  ist ein kritischer Punkt der Einschränkung von  $f$  auf  $g^{-1}\{0\}$ "? Es bedeutet, dass es ein  $\lambda$  gibt (Lagrange-Multiplikator), sodass  $(0, 0)$  ein kritischer Punkt der Lagrange-Funktion  $L = f - \lambda g$  ist. In unserem Fall lautet die Lagrange-Funktion

$$L(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y - \lambda(x \cos y + y \cos x).$$

Das Differenzial von  $L$  lautet

$$dL(x, y) = (2x - 2 - \lambda(\cos y - y \sin x), 2y - 2 - \lambda(-x \sin y + \cos x)).$$

Für die Wahl  $\lambda = -2$  gilt

$$dL(0, 0) = (2 - 2, 2 - 2) = (0, 0).$$

Somit ist  $p = (0, 0)$  ein kritischer Punkt der Einschränkung von  $f$  auf  $g^{-1}\{0\}$ . Nun betrachten wir die Hesse-Matrix von  $L$  an der Stelle  $(0, 0)$  mit  $\lambda = -2$

$$\text{Hess}(L)(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2 + \lambda y \cos x & \lambda(\sin x + \sin y) \\ \lambda(\sin x + \sin y) & 2 + \lambda x \cos y \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Hess}(L)(0, 0, -2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind 2 und 2, beide positiv. Nach dem Eigenwert-Kriterium ist die Hesse-Matrix positiv definit.  $(0, 0)$  ist ein lokales Minimum. ■

**Beispiel 7.2.6 ••• Bestimme die globalen Extrema der Funktion**

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + y^3 + z$$

*unter den Nebenbedingungen*

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - \frac{1}{2} = 0,$$

$$g_2(x, y, z) = z - y^2 - 1 = 0.$$

**Schritt 1:** Wir stellen die Lagrange-Funktion auf

$$L(x, y, z) = x^4 + y^4 + y^3 + z - \lambda \left( x^2 + y^2 - \frac{1}{2} \right) - \mu(z - y^2 - 1).$$

**Schritt 2:** Wir suchen kritische Punkte von  $L$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x^3 - 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4y^3 + 3y^2 - 2\lambda y + 2\mu y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 1 - \mu = 0.$$

Die letzte Gleichung liefert  $\mu = 1$ . Eingesetzt in die ersten zwei Gleichungen ergibt

$$x(4x^2 - 2\lambda) = 0 \quad \& \quad y(4y^2 + 3y - 2\lambda + 2) = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt entweder  $x = 0$  oder  $\lambda = 2x^2$ . Im ersten Fall ist  $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$  (nach der ersten Nebenbedingung) und somit  $z = \frac{3}{2}$  (nach der zweiten Nebenbedingung). Im zweiten Fall ist  $\lambda = 2x^2$  also  $y(4y^2 + 3y - 4x^2 + 2) = 0$ . Aus dieser Gleichung folgt entweder  $y = 0$  oder  $x^2 = y^2 + \frac{3}{4}y + \frac{1}{2}$ . Im ersten Fall ist  $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$  und  $z = 1$ . Im zweiten Fall ist, nach der ersten Nebenbedingung,  $\frac{1}{2} - y^2 = y^2 + \frac{3}{4}y + \frac{1}{2} \Rightarrow y(2y + \frac{3}{4}) = 0$ . Also  $y = 0$  (Widerspruch) oder  $y = -3/8$ . In diesem Fall ist  $x = \pm\frac{\sqrt{23}}{8}$  und  $z = \frac{73}{64}$ .

**Schritt 3:** Zusammenfassend haben wir folgende Kandidaten gefunden

$$\left( 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2} \right) \quad \left( \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 1 \right) \quad \left( \pm\frac{\sqrt{23}}{8}, -\frac{3}{8}, \frac{73}{64} \right).$$

Wir vergleichen die Funktionswerte

$$f\left( 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2} \right) = \frac{7 + \sqrt{2}}{4} \approx 2.104$$

$$f\left( 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2} \right) = \frac{7 - \sqrt{2}}{4} \approx 1.396$$

$$f\left( \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 1 \right) = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$f\left( \pm\frac{\sqrt{23}}{8}, -\frac{3}{8}, \frac{73}{64} \right) = \frac{2533}{2048} \approx 1.237$$

Somit sind  $(\pm \frac{\sqrt{23}}{8}, -\frac{3}{8}, \frac{73}{64})$  globale Minima und  $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2})$  ist das globale Maximum. ■

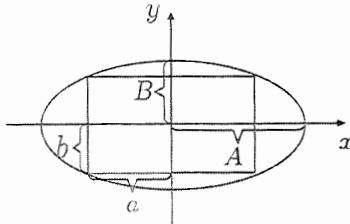
Einige Anwendungen der Lagrange-Multiplikator-Regel.

**Beispiel 7.2.7** ••• Gegeben sei die Ellipse

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \right\}.$$

Finde das Viereck dessen Eckpunkten auf  $E$  liegen mit grösstem Flächeninhalt.

**Lösung:** Das Viereck habe Seitenlängen  $2a$  und  $2b$  (zu bestimmen).



Zu maximieren ist der Flächeninhalt des Vierecks  $f(a, b) = 4ab$ . Die Nebenbedingung ist, dass die Eckpunkte auf  $E$  liegen, d.h.

$$\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} = 1.$$

Die Nebenbedingung schreiben wir nun in der Form

$$g(a, b) = \frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} - 1 = 0.$$

Die Lagrange-Funktion lautet somit

$$L = 4ab - \lambda \left( \frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} - 1 \right).$$

Wir lösen ( $A$  und  $B$  sind Konstanten)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial a} &= 4b - 2\lambda \frac{a}{A^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2A^2b}{a} \\ \frac{\partial L}{\partial b} &= 4a - 2\lambda \frac{b}{B^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2B^2a}{b}. \end{aligned}$$

Gleichsetzen der zwei  $\lambda$ 's gibt  $\frac{a^2}{A^2} = \frac{b^2}{B^2}$ . Zusammen mit der Nebenbedingung  $\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} = 1$  finden wir  $2\frac{a^2}{A^2} = 1 \Rightarrow a = \frac{A}{\sqrt{2}}$  und  $b = \frac{B}{\sqrt{2}}$ . Das gesuchte Viereck hat die Seitenlängen  $a = \frac{A}{\sqrt{2}}$  und  $b = \frac{B}{\sqrt{2}}$ . ■

**Beispiel 7.2.8 ••○ Bestimme den im Ellipsoid**

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

eingeschriebenen, achsenparallelen Quader mit grösstmöglichen Volumen.

**Lösung:** Es seien  $2A, 2B, 2C$  die Kantenlängen des Quaders. Das Volumen des Quaders

$$f(A, B, C) = 8ABC$$

wollen wir maximieren. Die Nebenbedingung ist, dass die Eckpunkte  $(\pm A, \pm B, \pm C)$  des Quaders auf dem Ellipsoid liegen müssen, d.h.

$$\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} + \frac{C^2}{c^2} = 1.$$

Also  $g(A, B, C) = \frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} + \frac{C^2}{c^2} - 1$ .

Die Lagrange-Funktion lautet somit

$$L = f - \lambda g = 8ABC - \lambda \left( \frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} + \frac{C^2}{c^2} - 1 \right).$$

Wir lösen ( $a, b$  und  $c$  sind Konstanten)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial A} &= 8BC - 2\lambda \frac{A}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4a^2 BC}{A} \\ \frac{\partial L}{\partial B} &= 8AC - 2\lambda \frac{B}{b^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4b^2 AC}{B} \\ \frac{\partial L}{\partial C} &= 8AB - 2\lambda \frac{C}{c^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4c^2 AB}{C}. \end{aligned}$$

Das Gleichsetzen der drei  $\lambda$ 's ergibt  $\frac{A^2}{a^2} = \frac{B^2}{b^2} = \frac{C^2}{c^2}$ . Zusammen mit der Nebenbedingung  $\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} + \frac{C^2}{c^2} = 1$  finden wir

$$3 \frac{A^2}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Somit:  $A = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ,  $B = \frac{b}{\sqrt{3}}$  und  $C = \frac{c}{\sqrt{3}}$ .

■

**Beispiel 7.2.9 ••○ Beweise: Für alle  $x_i \geq 0$  mit  $\sum_{i=1}^n x_i = n$  gilt**

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

**Lösung:** Die Idee der Aufgabe ist die Funktion

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

unter der Nebenbedingung zu maximieren, dass  $g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i - n = 0$  gilt. Die Lagrange-Funktion lautet also

$$L = f - \lambda g = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j - \lambda \left( \sum_{i=1}^n x_i - n \right).$$

Für  $k = 1, \dots, n$  rechnen wir die partielle Ableitung von  $L$  nach  $x_k$  aus

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \sum_{i \neq k} x_i - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \sum_{i \neq k} x_i.$$

(Um das obige Resultat zu verstehen, kann man sich die Situation im dreidimensionalen Fall genau anschauen. Im Fall  $n = 3$  lautet  $L$

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 3).$$

Somit lautet die Ableitung z.B. nach  $x_2$ :  $\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + x_3 - \lambda = \sum_{i=1, i \neq 2}^3 x_i - \lambda$ .

Nun setzen wir alle  $\lambda$ 's gleich

$$\sum_{i \neq 1} x_i = \sum_{i \neq 2} x_i = \dots = \sum_{i \neq n} x_i.$$

Dies ergibt  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ . (Im Fall  $n = 3$  hätten wir:  $x_2 + x_3 = x_1 + x_3 = x_1 + x_2$ , also  $x_1 = x_2 = x_3$ .) Zusammen mit der Nebenbedingung  $\sum_{i=1}^n x_i = n$ , finden wir  $x_i = 1$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . An der Stelle  $(1, \dots, 1)$  hat  $f$  somit ein Maximum und

$$f(1, \dots, 1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

da es  $\frac{n(n-1)}{2}$  Summanden in der Summe von  $f$  gibt. Nach der Definition von Maximum haben wir die gesuchte Ungleichung

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \leq \frac{n(n-1)}{2} = f(1, \dots, 1).$$

■

**Beispiel 7.2.10** • • • Bestimme das maximale Volumen eines Quaders, dessen Oberfläche  $100m^2$  beträgt.

**Lösung:** Es seien  $a, b, c$  die Kantenlängen (in Metern) des Quaders. Zu maximieren ist

$$f(a, b, c) = abc$$

unter der Nebenbedingung, dass die Oberfläche  $100m^2$  beträgt, d.h.

$$2(ab + ac + bc) = 100.$$

Die Lagrange-Funktion lautet somit

$$L(a, b, c) = abc - \lambda(2ab + 2ac + 2bc - 100).$$

Wir suchen kritische Punkte von  $L$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial a} &= bc - 2\lambda(b+c) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{bc}{2(b+c)} \\ \frac{\partial L}{\partial b} &= ac - 2\lambda(a+c) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{ac}{2(a+c)} \\ \frac{\partial L}{\partial c} &= ab - 2\lambda(a+b) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{ab}{2(a+b)}.\end{aligned}$$

Das Gleichsetzen der drei  $\lambda$ 's ergibt  $a = b = c$ . Die Nebenbedingung impliziert somit  $6a^2 = 100 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{50}{3}}$ . Das Volumen des Quaders mit maximalem Volumen lautet  $(\frac{50}{3})^{3/2}$ .

■

**Beispiel 7.2.11** ••• Die Scheitelpunkte einer Ellipse sind die Punkte mit maximalem bzw. minimalem Abstand vom Nullpunkt. Man bestimme die Scheitelpunkte der Ellipse  $x^2 + xy + y^2 = 3$ .

**Lösung:** Wir müssen die Distanz eines Punktes  $(x, y)$  zum Ursprung

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

unter der Nebenbedingung maximieren, dass der Punkt  $(x, y)$  auf der Ellipse liegt, d.h.

$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0.$$

Man kann die Rechnung ganz wesentlich vereinfachen, wenn man statt der Distanzfunktion  $\sqrt{x^2 + y^2}$  selbst, deren Quadrat  $x^2 + y^2$  maximiert.  $\sqrt{x^2 + y^2}$  und  $x^2 + y^2$  haben in der Tat die gleichen Extrempunkte (nicht dieselben Extremwerte), in dem Sinne, dass  $x^2 + y^2$  genau dann maximal (oder minimal) ist, wenn  $\sqrt{x^2 + y^2}$  maximal (bzw. minimal) ist. Die Funktion  $x^2 + y^2$  hat aber den Vorteil keine Wurzeln zu enthalten, was beim Ableiten ein extremer Vorteil ist.

Die Lagrange-Funktion lautet somit

$$L(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 3).$$

Wir lösen

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - 2\lambda x - \lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2x}{2x+y} \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y - 2\lambda y - \lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2y}{2y+x}.\end{aligned}$$

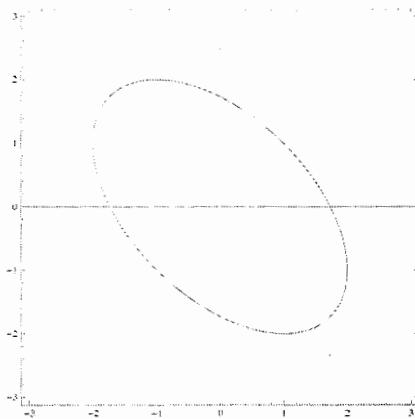
Gleichsetzen der zwei  $\lambda$ 's liefert  $x^2 = y^2$ . Falls  $x = y$ , so ist  $3x^2 = 3$  also  $x = \pm 1$ . Falls  $x = -y$ , so ist  $x^2 = 3$  also  $x = \pm\sqrt{3}$ .

Die Kandidaten sind somit

$$(1, 1) \quad (-1, -1) \quad (\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \quad (-\sqrt{3}, \sqrt{3}).$$

Wir vergleichen die Funktionswerte

$$\begin{aligned}f(1, 1) &= f(-1, -1) = \sqrt{2} \\ f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) &= f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = \sqrt{6}.\end{aligned}$$



Somit sind  $(1, 1)$  und  $(-1, -1)$  die Minima und  $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$  und  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  die Maxima. Das sind die Scheitelpunkte der Ellipse. ■

**Beispiel 7.2.12 •••** Bestimme die Distanz zwischen dem Ursprung  $(0, 0, 0)$  und der Geraden, die man bekommt, wenn man die Ebenen  $x - y + z = 1$  und  $x + y - z = 0$  schneidet.

**Lösung:** Wir müssen die Distanz eines Punktes  $(x, y, z)$  zum Ursprung

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

unter den Nebenbedingungen

$$x - y + z - 1 = 0 \quad x + y - z = 0$$

minimieren. Wie im vorigen Beispiel kann man die Rechnung ganz wesentlich vereinfachen, wenn man statt der Distanzfunktion  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  selbst, deren Quadrat  $x^2 + y^2 + z^2$  minimiert. Wir bekommen somit die folgende Lagrange-Funktion

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x - y + z - 1) - \mu(x + y - z).$$

Wir lösen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - \lambda - \mu = 0 & \Rightarrow & \mu = 2x - \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y + \lambda - \mu = 0 & \Rightarrow & \mu = 2y + \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2z - \lambda + \mu = 0 & \Rightarrow & \mu = -2z + \lambda \end{aligned}$$

Das Gleichsetzen der zwei  $\mu$ 's aus der zweiten und dritten Gleichung liefert  $y = -z$ . Zusammen mit den zwei Nebenbedingungen bekommen wir dann folgendes Gleichungssystem

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 0 \\ z + y = 0 \end{cases} .$$

Die Lösung ist  $(1/2, -1/4, 1/4)$ . Die gesuchte Distanz lautet somit

$$d = f(1/2, -1/4, 1/4) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

■

**Beispiel 7.2.13 •••** In der statistischen Thermodynamik ist die Entropie eines thermodynamischen Systems mit  $n$  Mikrozuständen

$$S = -k_B \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i),$$

wobei  $k_B$  die Boltzmann Konstante und  $p_i$  die Wahrscheinlichkeit des  $i$ -ten Mikrozustandes ist. Bestimme den Zustand des Systems mit maximaler Entropie.

**Lösung:** Da das System mit 100% Wahrscheinlichkeit in einem der Mikrozuständen ist, muss die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 ergeben

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Wir wollen die Entropie-Funktion  $S$  unter der Nebenbedingung  $g(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n p_i - 1$  maximieren. Wir betrachten somit die folgende Lagrange-Funktion

$$L(p_1, \dots, p_n) = \boxed{-\sum_{i=1}^n p_i \log(p_i)} - \lambda \left( \sum_{i=1}^n p_i - 1 \right).$$

Wir rechnen die partielle Ableitung von  $L$  nach  $p_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  aus und setzen sie gleich Null

$$\frac{\partial L}{\partial p_j} = -\frac{\partial}{\partial p_j}(p_j \log(p_j)) - \lambda = -\log(p_j) - 1 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = e^{-\lambda-1} = \text{konstant.}$$

Wir haben somit gefunden, dass der Zustand mit maximaler Entropie derjenige Zustand ist, für welchen alle  $p_j$  gleich sind (homogene Verteilung). Aus der Nebenbedingung ergibt sich

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad \Rightarrow \quad p_i = \frac{1}{n} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

■

### 7.3 Allgemeine Betrachtung von Extrema in $\mathbb{R}^n$

Wir suchen Extremwerte, wenn sich das Argument der Funktion nicht frei im Raum bewegen kann, sondern auf eine Teilmenge  $\Omega$  (mit Rand) eingeschränkt ist.

#### KOCHREZEPT FÜR EXTREMA IN $\mathbb{R}^n$

Gegeben:  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit Rand  $\partial\Omega$ .

Gesucht: globale Maxima und Minima von  $f$  auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

**Schritt 1:** Untersuche das Innere  $\overset{\circ}{\Omega}$ :

Bestimme kritische Punkte von  $f \Rightarrow$  Kandidaten.

**Schritt 2:** Untersuche den Rand  $\partial\Omega$  mit dem Lagrange-Multiplikator

1) Schreibe den Rand in impliziter Form  $\partial\Omega = g^{-1}\{0\}$ .

2) Stelle die Lagrange-Funktion  $L = f - \lambda g$  auf.

3) Bestimme die kritischen Punkte der Lagrange-Funktion  $\Rightarrow$  Kandidaten.

**Schritt 3:** Werte  $f$  in jedem Kandidaten aus und entscheide, wo  $f$  sein Maximum und sein Minimum annimmt.

**Beispiel 7.3.1** ••• Finde Maxima und Minima von  $f = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$  auf

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1 \right\}.$$

**Schritt 1:** Untersuche  $\overset{\circ}{E}$ : Kandidaten sind kritische Punkte von  $f$

$$df = (x, y) \stackrel{!}{=} (0, 0).$$

Also  $(0, 0)$  ist ein Kandidat. Es gibt keine weiteren Kandidaten im Inneren.

**Schritt 2:** Untersuche  $\partial E$ : Die Nebenbedingung lautet

$$g(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2 - 1 = 0.$$

Die Lagrange-Funktion ist also

$$L = f - \lambda g = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \lambda \left( \frac{x^2}{2} + y^2 - 1 \right).$$

Wir lösen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= x - \lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= y - 2\lambda y = 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt entweder  $x = 0$  oder  $\lambda = 1$ . Ist  $x = 0$ , so ist (nach der Nebenbedingung)  $y = \pm 1$ . Ist  $\lambda = 1$ , so folgt  $y = 0$ , also (nach der Nebenbedingung)  $x = \pm\sqrt{2}$ . Wir haben

somit vier Kandidaten auf dem Rand

$$(\pm\sqrt{2}, 0) \quad (0, \pm 1).$$

**Schritt 3:** Setzen wir alles zusammen, so haben wir 5 Kandidaten

$$(0, 0) \quad (\pm\sqrt{2}, 0) \quad (0, \pm 1).$$

Wir setzen die gefundenen Punkte in  $f$  ein und wählen die Punkte, wo  $f$  am grössten/kleinsten ist

$$f(0, 0) = 0 \quad f(\pm\sqrt{2}, 0) = 1 \quad f(0, \pm 1) = \frac{1}{2}.$$

Somit ist  $(0, 0)$  das globale Minimum und  $(\pm\sqrt{2}, 0)$  sind die globalen Maxima. ■

**Beispiel 7.3.2** ••• Finde Maxima und Minima von  $f = e^{(x+1)y}$  auf

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

**Schritt 1:** Untersuche  $\overset{\circ}{\Omega}$ : Kandidaten sind kritische Punkte von  $f$

$$df = \left( ye^{y(x+1)}, (x+1)e^{y(x+1)} \right) \stackrel{!}{=} (0, 0).$$

Da  $e^{y(x+1)}$  immer ungleich Null ist, ist  $(-1, 0)$  ein Kandidat. Der Punkt  $(-1, 0)$  liegt aber nicht im Inneren von  $\Omega$ . Somit gibt es im Inneren keine Kandidaten.

**Schritt 2:** Untersuche  $\partial\Omega$ : Die Nebenbedingung lautet

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Die Lagrange-Funktion ist also

$$L = f - \lambda g = e^{y(x+1)} - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Wir lösen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= ye^{y(x+1)} - 2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{y}{2x}e^{y(x+1)} \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= (x+1)e^{y(x+1)} - 2\lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{x+1}{2y}e^{y(x+1)}. \end{aligned}$$

Das Gleichsetzen der zwei  $\lambda$ 's liefert  $y^2 = x^2 + x$ . Zusammen mit der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 = 1$  bekommen wir  $2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, \frac{1}{2}$ .

**Schritt 3:** Wir haben folgende Kandidaten gefunden

$$\left( \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (-1, 0).$$

Wir vergleichen die Funktionswerte

$$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e^{-\frac{3\sqrt{3}}{4}},$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e^{\frac{3\sqrt{3}}{4}},$$

$$f(-1, 0) = 1.$$

Somit ist  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  das globale Minimum und  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  das globale Maximum.

**Beispiel 7.3.3 ••• Finde die Extrema von  $f = x + y^2$  auf**

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, y - x \leq 0\}.$$

**Schritt 1:** Untersuche  $\overset{\circ}{\Omega}$ : Kandidaten sind kritische Punkte von  $f$

$$df = (1, 2y) \stackrel{!}{=} (0, 0).$$

$f$  hat keine kritischen Punkte. Es gibt im Inneren keine Kandidaten.

**Schritt 2:** Untersuche  $\partial\Omega$ : Wir teilen den Rand in zwei Teile.

1) Die Nebenbedingung lautet

$$g(x, y) = y - x^2 = 0.$$

Die Lagrange-Funktion ist also

$$L = f - \lambda g = x + y^2 - \lambda(y - x^2).$$

Wir lösen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 1 + 2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{2x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2y. \end{aligned}$$

Das Gleichsetzen der zwei  $\lambda$ 's liefert  $y = -\frac{1}{4x}$ . Zusammen mit der Nebenbedingung  $y = x^2$  folgt  $4x^3 = -1 \Rightarrow x = -\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{4}\right)^{2/3}$ .

2) Die Nebenbedingung lautet

$$g(x, y) = y - x = 0.$$

Die Lagrange-Funktion ist also

$$L = f - \lambda g = x + y^2 - \lambda(y - x).$$

Wir lösen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 1 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Somit  $x = -\frac{1}{2}$  (aus der Nebenbedingung  $x = y$ ).

**Schritt 3:** Wir haben also unsere Kandidaten

$$\left(-\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}, \left(\frac{1}{4}\right)^{2/3}\right) \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Wir werten  $f$  an den gefundenen Stellen aus

$$f\left(-\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}, \left(\frac{1}{4}\right)^{2/3}\right) = -\frac{3}{4 \cdot 2^{2/3}} \approx -0.472 \quad f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

**Beispiel 7.3.4 •••** Finde die Extrema von  $f(x, y, z) = x^2 + y + 2z$  auf

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 \leq 0, -2 \leq z \leq 0\}.$$

**Schritt 1:** Untersuche  $\overset{\circ}{\Omega}$ : Kandidaten sind kritische Punkte von  $f$

$$df = (2x, 1, 2) \stackrel{!}{=} (0, 0, 0).$$

$f$  hat keine kritischen Punkte. Es gibt im Inneren von  $\Omega$  keine Kandidaten.

**Schritt 2:** Untersuche  $\partial\Omega$ : Wir teilen den Rand in fünf Teile

$$\partial\Omega_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0, -2 < z < 0\}$$

$$\partial\Omega_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0, z = -2\}$$

$$\partial\Omega_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0, z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$$

$$\partial\Omega_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 < 0, z = -2\} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < 4, z = -2\}$$

$$\partial\Omega_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 < 0, z = 0\} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < 0, z = 0\} = \emptyset.$$

Wir untersuchen die einzelne Teile separat.

$\partial\Omega_1$ : Wir benutzen die Lagrange-Multiplikator-Regel mit der Lagrange-Funktion

$$L(x, y, z) = x^2 + y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 - z^2).$$

Wir lösen

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda x = 2x(1 - \lambda) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{z}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt entweder  $x = 0$  oder  $\lambda = 1$ . Falls  $x = 0$ , ist  $y = 0$  und  $z = 0$  (denn wenn  $x = 0$ , so ist  $\lambda$  beliebig). Dann sind  $y = 1/(2\lambda)$  und  $z = -1/\lambda$ . Aber wenn  $x = 0$ , ist  $y^2 - z^2 = 0$ , also  $y = \pm z$ . Dies ist aber nicht mit  $y = 1/(2\lambda)$  und  $z = -1/\lambda$  verträglich, ausser wenn  $y = z = 0$ ). Falls  $\lambda = 1$ , ist  $z = -1$  und  $y = 1/2$ . Aus der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  folgt  $x = \pm\sqrt{3}/2$ . Die Kandidaten sind

$$(0, 0, 0) \notin \partial\Omega_1, \quad (\pm\sqrt{3}/2, 1/2, -1).$$

$\partial\Omega_2$ : Wir benutzen die Lagrange-Multiplikator-Regel mit der Lagrange-Funktion

$$L(x, y, z) = x^2 + y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 - z^2) - \mu(z + 2).$$

Wir lösen

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda x = 2x(1 - \lambda) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2 + 2\lambda z - \mu = 0.$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich entweder  $x = 0$  oder  $\lambda = 1$ . Falls  $x = 0$ , so ist  $z = -2$  und  $y = \pm 2$ . Falls  $\lambda = 1$ , so ist  $y = 1/2$ ,  $z = -2$  und  $x = \pm\sqrt{15}/2$ . Die Kandidaten sind somit

$$(0, 2, -2), \quad (0, -2, -2), \quad \left( \frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}, -2 \right), \quad \left( -\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}, -2 \right).$$

$\partial\Omega_3$ : Der einzige Kandidat ist  $(0, 0, 0)$ .

$\partial\Omega_4$ : Wir benutzen die Lagrange-Multiplikator-Regel mit der Lagrange-Funktion

$$L(x, y, z) = x^2 + y + 2z - \lambda(z + 2).$$

Wir lösen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2 - \lambda = 0. \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

**Schritt 3:** Wir haben also unsere Kandidaten gefunden

$$\begin{aligned} P_1 &= \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right) \Rightarrow f(P_1) = -\frac{3}{4} \\ P_2 &= \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right) \Rightarrow f(P_2) = -\frac{3}{4} \\ P_3 &= \left( \frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}, -2 \right) \Rightarrow f(P_3) = \frac{1}{4} \\ P_4 &= \left( -\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}, -2 \right) \Rightarrow f(P_4) = \frac{1}{4} \\ P_5 &= (0, 2, -2) \Rightarrow f(P_5) = -2 \\ P_6 &= (0, -2, -2) \Rightarrow f(P_6) = -6 \\ P_7 &= (0, 0, 0) \Rightarrow f(P_7) = 0. \end{aligned}$$

Somit ist  $(0, -2, -2)$  das globale Minimum und  $(\pm\sqrt{15}/2, 1/2, -2)$  sind die globalen Maximalstellen.

■

## Kapitel 8

# Der Satz über implizite Funktionen

Ein zentrales Kapitel von Analysis II ist der Satz über implizite Funktionen. Zu Beginn konnte ich damit wenig anfangen. Denn immer häufiger wurden nun auch im Analysis Unterricht Theoreme aus der Linearen Algebra aufgegriffen aber immer deutlicher wurde mir der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Teilbereichen der Mathematik. Mittels der Determinante wird hier über die Möglichkeit lokaler Invertierbarkeit entschieden. Das folgende Kapitel habe ich in der Art gestaltet, die mir dabei geholfen hat, die Konzepte dieses so aussagekräftigen Existenzsatzes zu verstehen, denn eigentlich sind es nur wenige simple Rechenschritte mittels derer entschieden wird, ob eine Gleichung oder ein Gleichungssystem aufgelöst werden kann. Also, viel Vergnügen beim Lesen und hoffentlich nimmt dieses Kapitel allen Lesern den Schrecken vor impliziten Funktionen.

### 8.1 Einleitung

Ziel dieses Kapitels ist die Auflösung von Gleichungssystemen der Form

$$f(x, y) = 0.$$

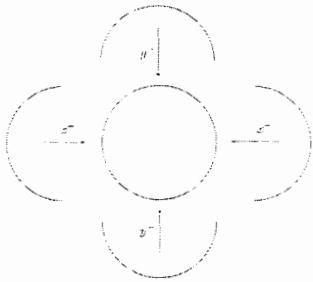
wobei  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  eine  $C^1$ -Funktion von  $n$  Variablen ist und  $x = (x_1, \dots, x_k)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_l)$  mit  $k + l = n$ . Eine solche Gleichung definiert *implizit* Funktionen  $y = y(x)$  respektive  $x = x(y)$ . Die grundlegende Frage ist somit, ob sich eine Funktion  $y = h(x)$  bzw.  $x = g(y)$  finden lässt, sodass sich die Punktmenge  $f(x, y) = 0$  zumindest teilweise beschreiben lässt, wo also gilt

$$f(x, h(x)) = 0 \quad \text{bzw.} \quad f(g(y), y) = 0.$$

Man sagt dann, dass man die Gleichung  $f(x, y) = 0$  *nach y (bzw. nach x) auflösen* kann. Globale Auflösung (d.h. wo die Lösung von  $f(x, y) = 0$  global durch eine einzige Funktion  $y = h(x)$  dargestellt werden kann) ist i.Allg. nicht zu erwarten, wie das folgende Beispiel zeigt. Die Gleichung  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  definiert implizit den Einheitskreis  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ . Offenbar gilt

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{1 - y^2} \quad \text{bzw.} \quad y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

und somit sind  $x(y) = \pm\sqrt{1-y^2}$  und  $y(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$  lokale Auflösungen der Gleichung  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Beachte aber, dass diese Auflösungen nur lokal sind. Man erkennt leicht, dass man in der Nähe des Punktes  $(1, 0)$ , die Gleichung nicht nach  $y$  auflösen kann, da zu  $x < 1$  stets zwei Werte für  $y$  gehören. Somit kann man die Gleichung  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  in der Nähe von  $(1, 0)$  nicht nach  $y$  auflösen. Wir haben aber die Möglichkeit, lokal bei  $(1, 0)$   $x$  als Funktion von  $y$  zu schreiben. Beim Punkt  $(0, 1)$  ist die Geschichte genau umgekehrt, denn die Gleichung lässt sich lokal nach  $y$  auflösen, aber nicht nach  $x$ .



$$\begin{aligned}x^+ : U = (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, y \mapsto (\sqrt{1-y^2}, y) \\x^- : U = (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, y \mapsto (-\sqrt{1-x^2}, y) \\y^+ : U = (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2}) \\y^- : U = (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, -\sqrt{1-x^2}).\end{aligned}$$

Die Gleichung  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  lässt sich somit lokal um jeden Punkt (nach  $x$  oder  $y$ ) auflösen. Eine globale Auflösung ist aber nicht möglich.

Der Satz über implizite Funktionen gibt Aussagen darüber, ob und unter welchen Bedingungen eine solche lokale Auflösung existiert oder nicht.

## 8.2 Der Satz

Bevor wir den Satz formulieren können, müssen wir einige Objekte definieren. Es sei ein Gleichungssystem in der Form

$$f(x, y) = 0,$$

gegeben, wobei  $x = (x_1, \dots, x_k)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_l)$  und  $k + l = n$ . Das Differenzial von  $f$  ist bekannterweise eine  $l \times n$  Matrix

$$df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_k} & \frac{\partial f_l}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial y_l} \end{pmatrix}.$$

Für die Formulierung des Satzes, definieren wir  $d_y f$  als die  $l \times l$  Untermatrix von  $df$ , welche die partiellen Ableitungen von  $f$  nach den Koordinaten  $y_1, \dots, y_l$  enthält. Analog werden wir die  $l \times k$ -Matrix mit den partiellen Ableitungen von  $f$  nach den Koordinaten  $x$  mit  $d_x f$  bezeichnen.

$$df(x, y) = (df_x(x, y) | df_y(x, y)) = \left( \begin{array}{ccc|cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial x_k} & \frac{\partial f_l}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial y_l} \end{array} \right) \underbrace{\left. \right|_{n-l}}_{l}$$

Der Satz über implizite Funktionen lautet dann

**Satz 8.2.1 (Implizite Funktionen)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$  offen und sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$  stetig differenzierbar. Ist der Punkt  $p_0 = (a, b) \in \Omega$  (mit  $a =$  erste  $k$  Koordinaten und  $b =$  letzte  $l$  Koordinaten von  $p_0$ ) regulär mit

$$f(p_0) = 0 \quad \text{und} \quad \det(d_y f(p_0)) \neq 0 \quad (\text{d.h. } d_y f(p_0) \text{ ist invertierbar}),$$

wobei  $d_y f(p_0)$  die Untermatrix von  $df(p_0)$ , die die partiellen Ableitungen nach den Koordinaten  $y_1, \dots, y_l$  enthält, so lässt sich das Gleichungssystem

$$f(x, y) = 0$$

nach den Koordinaten  $y$  auflösen. Genauer: Es gibt eine offene Umgebung  $U$  von  $a$  in  $\mathbb{R}^k$  und eine offene Umgebung  $V$  von  $b$  in  $\mathbb{R}^l$  und ein  $C^1$ -Diffeomorphismus  $h : U \rightarrow V$ , sodass

$$f(x, h(x)) = 0.$$

Die Funktion  $h$  gibt die lokale Auflösung der Gleichung  $f(x, y) = 0$  nach den Koordinaten  $y$  um den Punkt  $p_0$ . Der Satz bietet also ein handliches Kriterium um Aussagen darüber zu treffen, ob die Gleichung  $f(x, y) = 0$  eine lokale Auflösung nach  $y$  besitzt. Er bietet aber keine explizite Methode, um diese Auflösung bestimmen zu können. Bietet der Satz also gar keine Information über  $h$  an? Nein! Denn der Satz liefert wichtige Informationen über die Ableitung der Auflösung  $h$  an. Die Ableitung von  $h$  (Jacobi-Matrix) kann gemäß der Formel

$$dh(x) = -(d_y f(x, h(x)))^{-1} \cdot d_x f(x, h(x))$$

bestimmt werden (siehe Beispiel 8.3.11).

### 8.3 Beispiele

Wir betrachten einige Beispiele zum Satz über implizite Funktionen.

**Beispiel 8.3.1** ••• Zeige, dass für hinreichend kleine  $x, y, z$  man die Gleichung

$$x^5 + x \cos y + \sin z = 0$$

nach  $z$  durch eine Auflösung  $h(x, y)$  der Klasse  $C^1$  mit  $h(0, 0) = 0$  auflösen kann.

**Lösung:** Wir schreiben die Gleichung in der Form  $f(x, y, z) = 0$ , mit

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^5 + x \cos y + \sin z.$$

Der Punkt, den wir betrachten, ist  $p_0 = (0, 0, 0)$  (dies liest man aus  $h(0, 0) = 0$  aus). Man sieht leicht, dass  $p_0$  die Gleichung löst, sodass  $p_0 \in f^{-1}\{0\}$ . Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df(x, y, z) = (5x^4 + \cos y, -x \sin y, \cos z) \Rightarrow df(0, 0, 0) = (1, 0, 1).$$

Das Differenzial  $df(p_0)$  hat Rang 1. Somit ist  $p_0$  ein regulärer Punkt von  $f$ . Da wir nach  $z$  auflösen wollen, müssen wir die Untermatrix von  $df(p_0)$  betrachten, welche die partielle Ableitung von  $f$  nach  $z$  enthält. Dies wird “unser  $d_y f(p_0)$ ” sein

$$df(0, 0, 0) = (1, 0 | \underbrace{1}_{d_y f}) \Rightarrow d_y f(0, 0, 0) = 1.$$

Wegen  $d_y f(0, 0, 0) = 1 \neq 0$  ist  $d_y f(0, 0, 0)$  invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es somit (in einer Umgebung von  $(0, 0, 0)$ ) eine Auflösung  $h(x, y)$  von der Klasse  $C^1$ , sodass

$$f(x, y, h(x, y)) = 0,$$

d.h. die Gleichung ist nach  $z$  auflösbar.

Die Ableitung von  $h(x, y)$  in  $(0, 0)$  erzielt man mit der Formel

$$dh(0, 0) = -(d_y f(p_0))^{-1} \cdot d_x f(p_0) = -\frac{1}{1}(1, 0) = (-1, 0).$$

■

**Beispiel 8.3.2** ••• Zeige, dass man für hinreichend kleine  $x, y$  die Gleichung

$$e^{\sin(xy)} + x^3 - 7y = 1$$

nach  $y$ , aber nicht nach  $x$  auflösen kann.

**Lösung:** Wir schreiben die Gleichung in der Form  $f(x, y) = 0$ , mit

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{\sin(xy)} + x^3 - 7y - 1.$$

Der Punkt, den wir betrachten, ist  $p_0 = (0, 0)$ . Man sieht sofort, dass  $p_0$  die Gleichung löst, sodass  $p_0 \in f^{-1}\{0\}$ . Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df(x, y) = \left( e^{\sin(xy)} \cos(xy)y + 3x^2, e^{\sin(xy)} \cos(xy)x - 7 \right) \Rightarrow df(0, 0) = (0, -7).$$

Das Differenzial  $df(p_0)$  hat Rang 1. Somit ist  $p_0$  ein regulärer Punkt von  $f$ .

Auflösen nach  $y$ ? Wir wollen nach  $y$  auflösen. Somit entspricht  $d_y f(p_0)$  der Untermatrix von  $df(p_0)$ , welche die partielle Ableitung von  $f$  nach  $y$  enthält

$$df(0, 0) = (0 \mid \underbrace{-7}_{d_y f}) \Rightarrow d_y f(0, 0) = -7.$$

Da  $d_y f(0, 0) = -7 \neq 0$ , ist  $d_y f(0, 0)$  invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert  $h \in C^1$ , sodass

$$f(x, h(x)) = 0.$$

d.h. die Gleichung ist lokal nach  $y$  auflösbar.

Auflösen nach  $x$ ? Da wir nach  $x$  auflösen wollen, müssen wir die Untermatrix von  $df(p_0)$  betrachten, welche die partielle Ableitung von  $f$  nach  $x$  enthält

$$df(0, 0) = (\underbrace{0 \mid -7}_{d_x f}) \Rightarrow d_x f(0, 0) = 0.$$

Wegen  $d_x f(0, 0) = 0$  ist  $d_x f(0, 0)$  nicht invertierbar. Die Gleichung ist nicht nach  $x$  auflösbar. ■

**Beispiel 8.3.3 • • • Kann man**

$$xyz - yz^4 + x^2y = 2$$

um den Punkt  $(0, -2, 1)$  nach 1)  $x$ , 2)  $y$ , 3)  $z$  auflösen? Berechne jeweils die Ableitung der Lösung am gegebenen Punkt.

**Lösung:** Wir schreiben die Gleichung in der Form  $f(x, y, z) = 0$ , mit

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xyz - yz^4 + x^2y - 2.$$

Der Punkt, den wir betrachten, ist  $p_0 = (0, -2, 1)$ . Man sieht sofort, dass  $p_0$  die Gleichung löst, sodass  $p_0 \in f^{-1}\{0\}$ . Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df(x, y, z) = (yz + 2xy, xz - z^4 + x^2, xy - 4yz^3) \Rightarrow df(0, -2, 1) = (-2, -1, 8).$$

Das Differenzial  $df(p_0)$  hat Rang 1. Somit ist  $p_0$  ein regulärer Punkt von  $f$ .

Auflösbar nach  $x$ ? In diesem Fall müssen wir die Untermatrix von  $df(p_0)$  betrachten, welche die partielle Ableitung nach  $x$  enthält

$$df(0, -2, 1) = (\underbrace{-2 \mid -1, 8}_{d_x f}) \Rightarrow d_x f(0, -2, 1) = -2.$$

Da  $d_x f(0, -2, 1) = -2 \neq 0$ , ist  $d_x f(0, -2, 1)$  invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist das Gleichungssystem lokal um  $(0, -2, 1)$  nach  $x$  auflösbar.

Auflösbar nach  $y$ ? In diesem Fall müssen wir die Untermatrix von  $df(p_0)$  betrachten, welche die partielle Ableitung nach  $y$  enthält

$$df(0, -2, 1) = \left( \begin{array}{c|cc} -2 & -1 & 8 \\ \hline d_y f & & \end{array} \right) \Rightarrow d_y f(0, -2, 1) = -1.$$

Da  $d_y f(p_0) = -1 \neq 0$ , ist  $d_y f(p_0)$  invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist das Gleichungssystem lokal nach  $y$  auflösbar.

Auflösbar nach  $z$ ? In diesem Fall müssen wir die Untermatrix von  $df(p_0)$  betrachten, welche die partielle Ableitung nach  $z$  enthält

$$df(0, -2, 1) = \left( \begin{array}{c|cc} -2 & -1 & 8 \\ \hline d_z f & & \end{array} \right) \Rightarrow d_z f(0, -2, 1) = 8.$$

Da  $d_z f(p_0) = 8 \neq 0$ , ist  $d_z f(p_0)$  invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist das Gleichungssystem lokal nach  $z$  auflösbar.

$x'(-2, 1)$ ? Mit der üblichen Formel

$$dx(-2, 1) = \left( \frac{\partial x}{\partial y}(-2, 1), \frac{\partial x}{\partial z}(-2, 1) \right) = -(d_y f(p_0))^{-1} \cdot d_x f(p_0) = -\frac{1}{-2}(-1, 8) = \left( \frac{1}{2}, 4 \right).$$

$y'(0, 1)$ ?

$$dy(0, 1) = \left( \frac{\partial y}{\partial x}(0, 1), \frac{\partial y}{\partial z}(0, 1) \right) = -(d_y f(p_0))^{-1} \cdot d_y f(p_0) = -\frac{1}{-1}(-2, 8) = (-2, 8).$$

$z'(0, -2)$ ?

$$dz(0, -2) = \left( \frac{\partial z}{\partial x}(0, -2), \frac{\partial z}{\partial y}(0, -2) \right) = -(d_y f(p_0))^{-1} \cdot d_z f(p_0) = -\frac{1}{8}(-2, -1) = \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right).$$

■

**Beispiel 8.3.4 •••** Betrachte das lineare Gleichungssystem

$$4x - 2y - z = 7 \quad 2x - y - z = 18.$$

Kann man das Gleichungssystem nach  $y$  und  $z$  (in Abhängigkeit von  $x$ ) auflösen?

**Lösung:** Wir schreiben das Gleichungssystem in der Form  $f(x, y, z) = 0$ , mit

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 4x - 2y - z - 7 \\ 2x - y - z - 18 \end{pmatrix}.$$

Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das Differenzial hat Rang 2. Somit sind alle Punkte in  $\mathbb{R}^3$  reguläre Punkte von  $f$ . Da wir nach  $y$  und  $z$  auflösen wollen, müssen wir die Untermatrix von  $df$  betrachten, welche die partiellen Ableitungen von  $f$  nach  $y$  und  $z$  enthält

$$df = \left( \begin{array}{c|cc} 4 & -2 & -1 \\ 2 & \underbrace{-1 & -1}_{d_y f} \\ \hline \end{array} \right) \Rightarrow d_y f = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da  $\det(d_y f) = 2 - 1 = 1 \neq 0$ , ist  $d_y f$  invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert  $h \in C^1$ , sodass

$$f(x, h(x)) = 0.$$

d.h. das Gleichungssystem ist nach  $y, z$  auflösbar. ■

**Beispiel 8.3.5 • o o** Zeige, dass man für hinreichend nahe bei 1 liegende  $x, y, z$  das Gleichungssystem

$$-2x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad x^2 + e^{y-1} - 2y = 0$$

durch Funktionen  $y(x), z(x)$  auflösen kann.

**Lösung:** Wir schreiben das Gleichungssystem in der Form  $f(x, y, z) = 0$ , mit

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} -2x^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + e^{y-1} - 2y \end{pmatrix}.$$

Der Punkt, den wir betrachten, ist  $p_0 = (1, 1, 1)$ . Man sieht sogleich, dass  $p_0$  das Gleichungssystem löst, sodass  $p_0 \in f^{-1}\{0\}$ . Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df(x, y, z) = \begin{pmatrix} -4x & 2y & 2z \\ 2x & e^{y-1} - 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow df(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Differenzial  $df(p_0)$  hat Rang 2, also ist  $p_0$  regulärer Punkt von  $f$ . Da wir nach  $y$  und  $z$  auflösen wollen, müssen wir die Untermatrix von  $df(p_0)$  betrachten, welche die partiellen Ableitungen von  $f$  nach  $y$  und  $z$  enthält

$$df(1, 1, 1) = \left( \begin{array}{c|cc} -4 & 2 & 2 \\ 2 & \underbrace{-1 & 0}_{d_y f} \end{array} \right) \Rightarrow d_{yz} f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da  $\det(d_{yz} f(1, 1, 1)) = 0 + 2 \neq 0$ , ist  $d_{yz} f(1, 1, 1)$  invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen ergibt es  $h \in C^1$ , sodass

$$f(x, h(x)) = 0.$$

d.h. das Gleichungssystem ist nach  $y, z$  auflösbar. Die Ableitung der Auflösung berechnet man mit der üblichen Formel

$$h'(1) = \begin{pmatrix} y'(1) \\ z'(1) \end{pmatrix} = -(d_{yz} f(p_0))^{-1} \cdot d_x f(p_0) = -\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

■

**Beispiel 8.3.6 • o o** Dasselbe Problem wie oben. Fragen: 1) Ist das Gleichungssystem nach  $x, z$  auflösbar? 2) und nach  $x, y$ ?

Lösung: Auflösbar nach  $x, z$ ? Da wir nach  $x$  und  $z$  auflösen wollen, müssen wir die Untermatrix von  $df(p_0)$  betrachten, welche die partiellen Ableitungen von  $f$  nach  $x$  und  $z$  enthält

$$df(1, 1, 1) = \left( \begin{array}{c|c} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{array} \right) \quad \Rightarrow \quad d_y f(1, 1, 1) = \left( \begin{array}{cc} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{array} \right).$$

Da  $\det(d_y f(1, 1, 1)) = -4 \neq 0$ , ist  $d_y f(1, 1, 1)$  invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist das Gleichungssystem nach  $x, z$  auflösbar.

Auflösbar nach  $x, y$ ? Da wir nach  $x$  und  $y$  auflösen wollen, müssen wir die Untermatrix von  $df(p_0)$  betrachten, welche die partiellen Ableitungen von  $f$  nach  $x$  und  $y$  enthält

$$df(1, 1, 1) = \left( \begin{array}{c|c} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{array} \right) \quad \Rightarrow \quad d_y f(1, 1, 1) = \left( \begin{array}{cc} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{array} \right).$$

Da  $\det(d_y f(1, 1, 1)) = 4 - 4 = 0$ , ist  $d_y f(1, 1, 1)$  nicht invertierbar. Das Gleichungssystem ist nicht nach  $x, y$  auflösbar.

$x'(1), z'(1)$ ? Mit der üblichen Formel

$$h'(1) = \begin{pmatrix} x'(1) \\ z'(1) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

■

**Beispiel 8.3.7** • • • Kann man das Gleichungssystem

$$x^2y^2 + u^2v^2 = 5 \quad x^2u^2 + y^2v^2 = 5$$

durch Funktionen  $u(x, y), v(x, y)$  in der Nähe des Punktes  $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 2)$  auflösen? Wie gross sind die Ableitungen  $u'(1, 1)$  und  $v'(1, 1)$ ?

Lösung: Wir schreiben das Gleichungssystem in der Form  $f(x, y, u, v) = 0$ , mit

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, u, v) \mapsto \begin{pmatrix} x^2y^2 + u^2v^2 - 5 \\ x^2u^2 + y^2v^2 - 5 \end{pmatrix}.$$

Der Punkt, den wir betrachten, ist  $p_0 = (1, 1, 1, 2)$ . Man sieht sofort, dass  $p_0$  eine Lösung des Gleichungssystems ist, sodass  $p_0 \in f^{-1}\{0\}$ . Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} 2xy^2 & 2x^2y & 2uv^2 & 2u^2v \\ 2xu^2 & 2yv^2 & 2ux^2 & 2vy^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad df(1, 1, 1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Das Differenzial  $df(p_0)$  hat Rang 2. Somit ist  $p_0$  ein regulärer Punkt von  $f$ . Da wir nach  $u, v$  auflösen wollen, müssen wir die Untermatrix von  $df(p_0)$  betrachten, welche die partiellen Ableitungen nach den Koordinaten  $u$  und  $v$  enthält

$$df(1, 1, 1, 2) = \left( \begin{array}{c|c} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{array} \right) \quad \Rightarrow \quad d_u f(1, 1, 1, 2) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Da  $\det(d_y f(1, 1, 1, 2)) = 32 - 8 = 24 \neq 0$ , ist  $d_y f(1, 1, 1, 2)$  invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen ergibt sich  $h \in C^1$ , sodass

$$f(x, y, h(x, y)) = 0.$$

d.h. das Gleichungssystem ist lokal nach  $u, v$  auflösbar.

Ableitungen? Wir benutzen die übliche Formel

$$\begin{aligned} dh(1, 1) &= \begin{pmatrix} du(1, 1) \\ dv(1, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) & \frac{\partial u}{\partial y}(1, 1) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) & \frac{\partial v}{\partial y}(1, 1) \end{pmatrix} = -(d_y f(p_0))^{-1} \cdot d_x f(p_0) \\ &= -\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 8.3.8 ••• Kann man das Gleichungssystem**

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \quad x^2 + 2y^2 + z^2 = 5$$

für hinreichend kleine  $x$  durch positive Funktionen  $y(x), z(x)$  auflösen? Wie gross sind die Ableitungen in  $x = 0$ ?

**Lösung:** Wir schreiben das Gleichungssystem in der Form  $f(x, y, z) = 0$ , mit

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2z^2 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 - 5 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen den Punkt  $p_0$  bestimmen. Wir wissen bereits, dass  $x = 0$  sein muss, sodass der Punkt  $p_0$  die Form  $(0, y, z)$  hat. Um  $y, z$  zu bestimmen lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} y^2 - 2z^2 = 0 \\ 2y^2 + z^2 = 5 \end{cases}$$

Die Lösung ist  $y^2 = 2$  und  $z^2 = 1$ . Wir suchen positive  $y$  und  $z$ , sodass  $p_0 = (0, \sqrt{2}, 1)$ . Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -4z \\ 2x & 4y & 2z \end{pmatrix} \Rightarrow df(0, \sqrt{2}, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} & -4 \\ 0 & 4\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Das Differenzial  $df(p_0)$  hat Rang 2, also  $p_0$  ist regulärer Punkt von  $f$ . Da wir nach  $y, z$  auflösen wollen, müssen wir diesmal die Untermatrix von  $df(p_0)$  betrachten, welche die partiellen Ableitungen nach den Koordinaten  $y$  und  $z$  enthält

$$df(0, \sqrt{2}, 1) = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & 2\sqrt{2} & -4 \\ 0 & 4\sqrt{2} & 2 \end{array} \right) \underbrace{\quad}_{d_y f} \Rightarrow d_y f(0, \sqrt{2}, 1) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -4 \\ 4\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Da  $\det(d_y f)(p_0) = 20\sqrt{2} \neq 0$ , ist  $d_y f(p_0)$  invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren somit  $y, z \in C^1$ , sodass

$$f(x, y(x), z(x)) = 0.$$

Die Ableitung bekommt man mit der üblichen Formel

$$dh(0) = \begin{pmatrix} y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = -(d_y f(p_0))^{-1} \cdot d_x f(p_0) = -\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -4 \\ 4\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 8.3.9** ••• Beweise, dass das Gleichungssystem

$$x + \log y + z = 2 \quad 2x - y^2 + z = 1$$

zwei Funktionen  $y = g(x)$  und  $z = h(x)$  in einer Umgebung von  $x = 0$  implizit definiert, mit  $g(0) = 1$  und  $h(0) = 2$ . Finde die Taylorentwicklung zweiter Ordnung für  $g$  und  $h$ .

**Lösung:** Wir schreiben das Gleichungssystem als  $f(x, y, z) = 0$ , mit

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x + \log y + z - 2 \\ 2x - y^2 + z - 1 \end{pmatrix}.$$

Der Punkt, den wir betrachten, ist  $p_0 = (0, 1, 2)$ . Man sieht sofort, dass  $p_0$  eine Lösung des Gleichungssystems ist, d.h.  $p_0 \in f^{-1}\{0\}$ . Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1/y & 1 \\ 2 & -2y & 1 \end{pmatrix}.$$

An der Stelle  $p_0 = (0, 1, 2)$  gilt somit

$$df(0, 1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da  $df(0, 1, 2)$  Rang 2 hat, ist  $p_0$  ein regulärer Punkt von  $f$ . Da wir nach  $y$  und  $z$  auflösen wollen, ist  $d_y f$  die Untermatrix von  $df(p_0)$ , welche die partiellen Ableitungen nach den Koordinaten  $y$  und  $z$  enthält. Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0.$$

Somit existieren nach dem Satz über implizite Funktionen zwei Funktionen  $g(x)$  und  $h(x)$  von der Klasse  $C^1$ , sodass  $f(x, g(x), h(x)) = 0$ . Wie können wir  $g$  und  $h$  finden? Wir rechnen zuerst die Ableitungen von  $g$  und  $h$  wie üblich aus

$$\begin{pmatrix} g'(x) \\ h'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1/g(x) & 1 \\ -2g(x) & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{1/g(x) + 2g(x)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2g(x) & 1/g(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

somit

$$g'(x) = \frac{g(x)}{2g^2(x) + 1}, \quad h'(x) = -1 - \frac{1}{2g^2(x) + 1}.$$

Mit  $g(0) = 1$  und  $h(0) = 2$  finden wir die Ableitungen in 0

$$g'(0) = \frac{1}{3}, \quad h'(0) = -\frac{4}{3}.$$

Um die zweiten Ableitungen zu finden, leiten wir die Formeln für die ersten Ableitungen nochmals nach  $x$  ab

$$g''(x) = \frac{g'(x)(2g^2(x) + 1) - 4g^2(x)g'(x)}{(2g^2(x) + 1)^2}, \quad h''(x) = \frac{4g(x)g'(x)}{(2g^2(x) + 1)^2},$$

woraus sich  $g''(0) = -1/27$  und  $h''(0) = 4/27$  ergibt. Wir haben somit  $g$  und  $h$  bis zur zweiten Ordnung um  $x = 0$  bestimmt

$$g(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{54}x^2 + \mathcal{O}(x^3), \quad h(x) = 2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{27}x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$

■

**Beispiel 8.3.10 •••** Betrachte den Einheitskreis

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Beweise: Um den Punkt  $(0, 1)$  lässt sich  $S^1$  lokal durch  $(x, h(x))$  parametrisieren mit  $h \in C^1$ . Bestimme die Funktion  $h$  explizit.

**Lösung:** Wir schreiben die Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$  in der Form

$$f(x, y) = 0,$$

mit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ . Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df(x, y) = (2x, 2y) \Rightarrow df(0, 1) = (0, 2).$$

Da  $df(0, 1)$  Rang 1 hat, ist  $p_0 = (0, 1)$  ein regulärer Punkt von  $f$ . Da wir nach  $y$  auflösen wollen, betrachten wir die Untermatrix von  $df(p_0)$ , welche die partielle Ableitung nach  $y$  enthält

$$df(0, 1) = (0 | \underbrace{2}_{d_y f}) = d_y f(0, 1) = 2.$$

Da  $d_y f(p_0) = 2 \neq 0$ , ist  $d_y f(p_0)$  invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist also  $x^2 + y^2 = 1$  lokal um  $(0, 1)$  nach  $y$  auflösbar. d.h. es gibt  $h \in C^1$  mit  $f(x, h(x)) = 0$ .

Wie findet man  $h$ ? Wir wenden die Formel für die Ableitung von  $h$  an und finden

$$h'(x) = -(d_y f(x, h(x)))^{-1} \cdot d_x f(x, h(x)) = -\frac{x}{h(x)}.$$

Das ist eine Differenzialgleichung für  $h$ , die wir lösen können

$$h dh = -x dx \Rightarrow \int h dh = - \int x dx \Rightarrow \frac{h^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C.$$

Also  $h(x) = \pm \sqrt{\tilde{C} - x^2}$ . Aus der Bedingung  $h(0) = 1$  (wir betrachten den Punkt  $(0, 1)!$ ) folgt  $\tilde{C} = 1$ , also

$$h(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

**Beispiel 8.3.11 ••• Beweise die Ableitungsformel:**

$$dh(x) = -(d_y f(x, h(x)))^{-1} \cdot d_x f(x, h(x)).$$

**Lösung:** Wir starten aus der Gleichung

$$f(x, h(x)) = 0,$$

welche  $h$  implizit definiert und leiten unter Berücksichtigung der Kettenregel auf beiden Seiten ab. Wir schreiben also  $f(x, h(x))$  als Verkettung der Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l, (x, y) \mapsto f(x, y), \quad g : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto (x, h(x)),$$

sodass

$$f(x, h(x)) = (f \circ g)(x).$$

Wir leiten nun beide Seiten der Gleichung ab (Ableitung von der rechten Seite der Gleichung ist Null). Nach der Kettenregel gilt also

$$\begin{aligned} d(f \circ g)(x) &= df(g(x)) \cdot dg(x) = \left( \begin{array}{cccccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_k} & \frac{\partial f_l}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial y_l} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{ccc} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_l}{\partial x_k} \end{array} \right) \\ &= (d_x f | d_y f) \cdot \left( \frac{\mathbb{I}_{k \times k}}{dh(x)} \right) = d_x f(g(x)) + d_y f(g(x)) \cdot dh(x) = 0 \\ \Rightarrow \quad dh(x) &= -(d_y f(x, h(x)))^{-1} \cdot d_x f(x, h(x)). \end{aligned}$$

## Kapitel 9

# Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$

### 9.1 Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$

Eine nichtleere Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heisst *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit* von  $\mathbb{R}^n$ , falls zu jedem Punkt  $p \in M$  eine Umgebung von  $p$  der Form  $W_p = U_p \times V_p \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  und eine differenzierbare Abbildung  $\Psi : U_p \rightarrow V_p$  existiert, sodass gilt

$$W_p \cap M = \{(x, \Psi(x)) | x \in U_p\} = \text{Graph}(\Psi).$$

Die Zahl  $k$  ist die **Dimension** der Untermannigfaltigkeit, während die Zahl  $l := n - k$  als **Kodimension** bezeichnet wird. Eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  ist also eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  (eine Kurve, eine Oberfläche, usw.), welche sich lokal als Graph einer differenzierbaren Funktion darstellen lässt. Welche Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  sind also Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^n$ ? Aus der Definition sieht man sofort, dass zum Beispiel der Graph einer differenzierbaren Funktion in einer Variablen  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$  ist, weil dieser sich ja lokal als Graph einer differenzierbaren Funktion darstellen lässt, nämlich  $f$ ! Analog bildet jeder Graph einer differenzierbaren Funktion in zwei Variablen  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$ . Wenn man also begründen will, weshalb

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 < x < 1, 0 < y < 2, z = \cos(x^2 y)\}$$

eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$  ist, würde man dies mithilfe der obigen Bemerkung tun und argumentieren, dass  $M$  der Graph von der differenzierbaren Funktion zweier Variablen  $f : (0, 1) \times (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \cos(x^2 y)$  ist. Soweit so gut. Was macht man aber, wenn man begründen will, dass

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sin x + \sin y = 1/\sqrt{2}\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$  ist? Fängt man an, zu beweisen, dass zu jedem  $p \in M$  eine Umgebung  $W_p$  von  $p$  existiert, welche von der Form  $W_p = U_p \times V_p \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  ist, sodass etc.? Nein! Und nochmals nein! Man würde die Vorlesungsnotizen auf der Suche nach einem nützlichen Lemma, Satz oder Korollar sorgfältig durchlesen. Nach einer

intensiven Suche wird man sicher auf folgenden Fakt stossen: Für die meisten Situationen, die wir betrachten werden, reicht es zu wissen, dass eine ganz spezielle Kategorie von Mengen Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^n$  sind, nämlich *reguläre Niveaumengen*. Das sind Mengen der Form,

$$M = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a\}, \quad a \in \mathbb{R}$$

welche nur reguläre Punkte von  $f$  enthalten. Diese wichtige Kategorie von Untermannigfaltigkeiten ist der Gegenstand des *Satzes vom regulären Wert*.

**Satz 9.1.1 (Satz vom regulären Wert)** Sei  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  mit  $n > l$  gegeben. Wir betrachten die Menge

$$M = f^{-1}\{a\} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a\}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Falls jeder Punkt  $p_0 \in M$  regulär ist (d.h.  $df(p_0)$  maximalen Rang hat), ist  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $k = n - l$ .

Nun betrachten wir einige Beispiele zum Thema Untermannigfaltigkeiten.

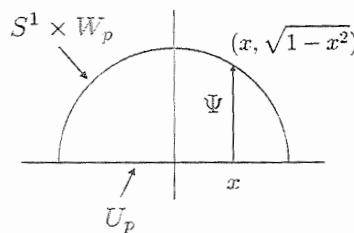
**Beispiel 9.1.1 ••• Beweise mit der Definition:**  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$  der Dimension 1.

**Lösung:** Wir müssen zeigen, dass es für jedes  $p \in S^1$  eine Umgebung  $W_p$  von  $p$  gibt, auf der  $M$  Graph einer differenzierbaren Funktion von einer Variablen ist.

Um ein Gefühl der Situation zu kriegen, betrachten wir zuerst den Punkt  $p = (0, 1)$ . Wir könnten beispielsweise

$$U_p = (-1, 1), \quad V_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

wählen. Dann ist  $W_p = U_p \times V_p$  eine offene Umgebung von  $p$ , weil  $p = (0, 1)$  ja in  $W_p$  liegt. Nun betrachten wir den Schnitt von  $S^1$  mit  $W_p$ . Es sieht so aus



$S^1 \cap W_p$  kann man als Graphen der Funktion  $\Psi(x) = \sqrt{1 - x^2}$  auf der Menge  $U_p = (-1, 1)$

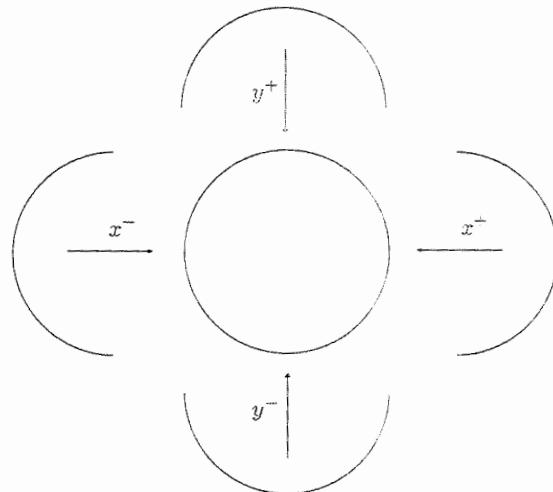
betrachten

$$S^1 \cap W_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in U_p, y = \sqrt{1 - x^2}\}.$$

Somit lässt sich  $S^1$  lokal um den Punkt  $p = (0, 1)$  als Graph einer differenzierbaren Funktion auffassen.

Entsprechend kann man dann  $S^1$  als Graph der folgenden vier differenzierbaren Funktionen betrachten

$$\begin{aligned} x^+ &: U = (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, y \rightarrow (\sqrt{1 - y^2}, y) \\ x^- &: U = (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, y \rightarrow (-\sqrt{1 - y^2}, y) \\ y^+ &: U = (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, x \rightarrow (x, \sqrt{1 - x^2}) \\ y^- &: U = (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, x \rightarrow (x, -\sqrt{1 - x^2}). \end{aligned}$$



Man kann somit  $S^1$  lokal als Graphen einer differenzierbaren Abbildung betrachten.  $S^1$  ist also eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$  der Dimension 1.

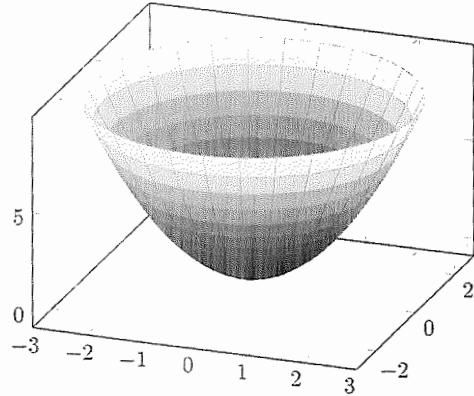
**Beispiel 9.1.2** • • • Welche der folgenden Mengen sind Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^n$  (mit geeignetem  $n$ )? Falls ja, bestimme die Dimension.

- a)  $K_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\}$
- b)  $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- c)  $K_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$
- d)  $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + z = 1, x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$
- e)  $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + xy - y - 3z = 0, 2x^2 + 3xy - 2y - 3z = 0\}$
- f)  $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^3 - x^2 = 0\}$
- g)  $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 8xy + 7y^2 = 5687\}$
- h)  $P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^3\}$
- i)  $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin x + \sin y = 1/\sqrt{2}\}$

**Lösung:** a) Wir schreiben  $K_1$  als Niveaumenge  $f^{-1}\{0\}$  für  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ . Nach dem Satz vom regulären Wert. genügt es zu zeigen, dass  $K_1$  nur reguläre Punkte von  $f$  enthält, d.h. dass  $K_1$  keine kritischen Punkte enthält. Zu diesem Zweck rechnen wir das Differenzial von  $f$  aus und setzen es gleich 0, um kritische Punkte von  $f$  zu bestimmen

$$df = (2x, 2y, -1) \stackrel{!}{=} (0, 0, 0).$$

Diese Gleichung hat keine Lösung. Somit hat  $f$  keine kritischen Punkte  $\Rightarrow K_1$  enthält nur reguläre Punkte  $\Rightarrow K_1$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$ . Die Dimension ist  $3 - 1 = 2$ .

Der Kegel  $K_1$ 

- b) Gleiche Prozedur wie in (a). Man schreibt  $S^2$  als Niveaumenge  $f^{-1}\{0\}$  für  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ . Kritische Punkte von  $f$  sind Lösungen von

$$df = (2x, 2y, 2z) \stackrel{!}{=} (0, 0, 0).$$

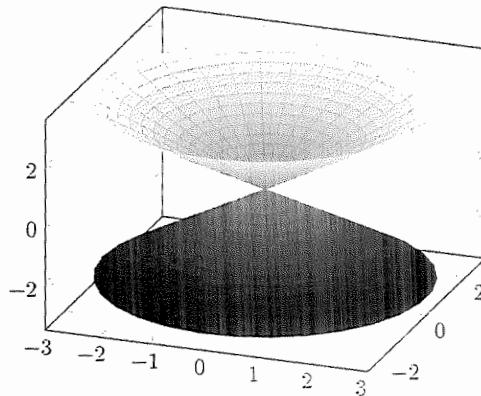
Die einzige Lösung ist  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . Darum ist  $(0, 0, 0)$  der kritische Punkt von  $f$ . Da  $0^2 + 0^2 + 0^2 - 1 = -1 \neq 0$ , liegt der Punkt  $(0, 0, 0)$  nicht in  $S^2 \Rightarrow S^2$  enthält nur reguläre Punkte  $\Rightarrow S^2$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$ . Die Dimension ist  $3 - 1 = 2$ .

- c) Immer das gleiche Spiel.  $K_2 = f^{-1}\{0\}$  für  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . Die kritischen Punkte lösen

$$df = (2x, 2y, -2z) \stackrel{!}{=} (0, 0, 0).$$

Die einzige Lösung ist  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  wie im Falle der Kugel  $S^2$ .  $(0, 0, 0)$  ist somit der kritische Punkt von  $f$ . Diesmal ist aber  $(0, 0, 0) \in K_2$ . Der Satz vom regulären Wert sichert somit  $K_2$  nicht zu, dass es eine Untermannigfaltigkeit ist. In der Tat es ist keine.

Der Kegel  $K_2$



- d) Zuerst muss man  $S$  als Niveaumenge  $f^{-1}\{0\}$  schreiben. Die Funktion  $f$  ist in diesem Fall  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + z - 1 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & -2z \end{pmatrix}.$$

Wir fragen uns nach dem Rang von  $df$ , um kritische Punkte zu finden. Da die zweite Zeile nicht Null ist, kann der Rang von  $df$  nie 0 sein. Wir fragen uns also, wann  $df$  Rang 1 hat. Das geschieht, wenn die erste und zweite Zeile linear abhängig sind. Das heißt  $x = \alpha$ ,  $y = 0$  und  $z = -\frac{\alpha}{2}$ . Aber  $(\alpha, 0, -\alpha/2) \notin S$ , denn  $2\alpha - \alpha/2 - 1 = 0$  impliziert  $\alpha = 2/3$ , also  $x = 2/3$  und  $z = -1/3$ , aber  $(2/3)^2 + 0^2 - (-1/3)^2 - 1 = -2/3 \neq 0$ . Also enthält  $S$  nur reguläre Punkte  $\Rightarrow S$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$  der Dimension  $k = 3 - 2 = 1$ .

- e) Wie oben.  $C = f^{-1}\{0\}$  für  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + xy - y - 3z \\ 2x^2 + 3xy - 2y - 3z \end{pmatrix}.$$

Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + y & x - 1 & -3 \\ 4x + 3y & 3x - 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

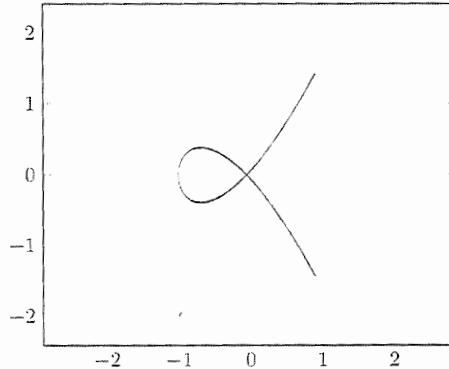
Da wir eine  $-3$  in beiden Zeilen haben, kann der Rang von  $df$  nie 0 sein. Wir fragen uns also, wann  $df$  Rang 1 hat. Dies geschieht, wenn die erste und zweite Zeile linear abhängig sind, d.h.  $x - 1 = \alpha(3x - 2)$  und  $2x + y = \alpha(4x + 3y)$ . Aus der ersten Gleichung folgt  $x = \frac{1-2\alpha}{1-3\alpha}$ . Einsetzen von  $x$  in die zweite Gleichung ergibt  $(1-3\alpha)y = (4\alpha-2)x \Rightarrow y = \frac{4\alpha-2}{1-3\alpha}x = \frac{-2(1-2\alpha)^2}{(1-3\alpha)^2}$ . Wir setzen nun die gefundenen  $x$  und  $y$  in  $f$  und  $g$  ein und setzen  $f = g = 0$  um  $z$  zu finden. Dies ergibt  $z = \frac{1}{3}(x^2 + xy - y)$  und  $z = \frac{1}{3}(2x^2 + 3xy - 2y)$ . Diese zwei Gleichungen können aber nicht gleichzeitig erfüllt werden. Also enthält  $C$  nur reguläre Punkte  $\Rightarrow C$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$  der Dimension  $k = 3 - 2 = 1$ .

f)  $M = f^{-1}\{0\}$  für  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = y^2 - x^3 - x^2$ . Kritische Punkte von  $f$  lösen

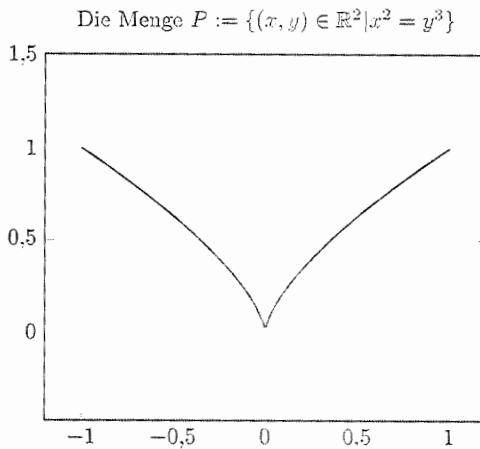
$$df = (-x(3x+2), 2y) \stackrel{!}{=} (0, 0).$$

Es sind die Punkte  $(x, y) = (0, 0)$  und  $(x, y) = (-\frac{2}{3}, 0)$ . Der zweite Punkt gehört nicht zu  $M$ , aber der Punkt  $(0, 0) \in M$ , da  $0^2 - 0^3 - 0^2 = 0$ . Somit enthält  $M$  einen kritischen Punkt.  $M$  ist keine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ . In der Tat erinnert  $M$  an den griechischen Buchstaben  $\alpha$  und bei Punkt  $(0, 0)$  ist die Kurve nicht differenzierbar.

Die Menge  $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 - x^3 - x^2 = 0\}$



- g)  $N = f^{-1}\{0\}$  für  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^2 + 8xy + 7y^2 - 5687$ . Wir suchen kritische Punkte von  $f$ . Wir setzen somit  $df = (2x + 8y, 14y + 8x) \stackrel{!}{=} (0, 0)$ . Da  $\det \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix} = 12 \neq 0$ , gibt es nur eine Lösung der obigen Gleichung, welche die triviale Lösung  $(x, y) = (0, 0)$  ist. Der Punkt  $(0, 0)$  ist somit kritischer Punkt von  $f$ . Aber  $(0, 0) \notin N$ , denn  $0 - 5687 \neq 0$ . Somit enthält  $N$  keinen kritischen Punkt  $\Rightarrow N$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ . Die Dimension ist  $2 - 1 = 1$ .
- h)  $P = f^{-1}\{0\}$  für  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^2 - y^3$ . Wir suchen kritische Punkte von  $f$ . Wir setzen somit  $df = (2x, -3y^2) \stackrel{!}{=} (0, 0)$  und bekommen den kritischen Punkt  $(x, y) = (0, 0)$ . Der Punkt  $(0, 0)$  liegt in  $P$ , da  $0^2 - 0^3 = 0$ . Somit enthält  $P$  einen kritischen Punkt.  $P$  ist keine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ .



i)  $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin x + \sin y = 1/\sqrt{2}\} = f^{-1}\{0\}$  für

$$f(x, y) = \sin x + \sin y - 1/\sqrt{2}.$$

Wir suchen die kritischen Punkte von  $f$ . Wir setzen  $d^f = (\cos x, \cos y) \stackrel{!}{=} (0, 0)$  und bekommen die kritischen Punkte

$$((2n+1)\pi/2, (2m+1)\pi/2), \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Nach dem Satz vom regulären Wert müssen wir einfach zeigen, dass diese Punkte nicht in  $Q$  liegen. Also los!

$$f((2n+1)\pi/2, (2m+1)\pi/2) = (-1)^n + (-1)^m - 1/\sqrt{2} \neq 0.$$

Somit liegen die kritischen Punkte von  $f$  nicht in  $Q$ . Es folgt also, dass  $Q$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$  ist. Die Dimension ist  $2 - 1 = 1$ .

■

### 9.1.1 Lie-Gruppen

Betrachte den Vektorraum

$$M_{n \times n}(\mathbb{R}) = \{A \mid A \text{ reelle } n \times n \text{ Matrix}\}$$

der reellen  $n \times n$  Matrizen. Den Satz vom regulären Wert kann man auch gut gebrauchen, um kompliziertere Beispiele von Untermannigfaltigkeiten zu betrachten, wie etwa die Aufgabe, zu zeigen, dass die Gruppe  $O(n)$  der  $n \times n$  orthogonalen Matrizen eine Untermannigfaltigkeit von  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  der Dimension  $n(n-1)/2$  ist. Wie kann man eine solche Aufgabe lösen? Vorgeschlagen wird, den Satz vom regulären Wert anzuwenden. Man muss sich also eine geeignete Abbildung  $f$  auf  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  suchen, für welche gilt

$$O(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{I}\} = f^{-1}\{\text{etwas}\}.$$

Die natürlichste Wahl für  $f$  ist,

$$f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow S_{n \times n}(\mathbb{R}), A \mapsto A^T A$$

wobei  $S_{n \times n}(\mathbb{R})$  die Menge der symmetrischen  $n \times n$  reellen Matrizen bezeichnet. Beachte, dass  $f$  Werte in  $S_{n \times n}(\mathbb{R})$  annimmt, weil  $f(A)$  eine symmetrische Matrix ist, d.h.

$$(f(A))^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = f(A).$$

Es gilt  $O(n) = f^{-1}\{\mathbb{I}\}$ . Wir haben also  $O(n)$  als Niveaumenge von  $f$  zum Niveau  $\mathbb{I}$  ( $\mathbb{I}$  ist die Identitätsmatrix) geschrieben. Nach dem Satz vom regulären Wert müssen wir nun nur zeigen, dass  $f^{-1}\{\mathbb{I}\}$  keine kritischen Punkte enthält, d.h. eine reguläre Niveaumenge ist. Wie zeigt man das? Im Prinzip muss man das Differenzial von  $f$  berechnen und zeigen, dass für alle Punkte in  $f^{-1}\{\mathbb{I}\}$  maximalen Rang hat. Na gut, aber jetzt haben wir keine konventionelle Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ , sondern eine Funktion von Matrizen. Wie bestimmt man also das Differenzial  $df$  in einer solchen Situation? Wenn man mit Matrizen arbeitet, ist die Jacobi-Matrix  $df$  wie folgt definiert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + hX) - f(A)}{h} = df(A)X.$$

Wie kann man dieses Objekt  $df(A)X$  interpretieren? Genauso wie das Differenzial von  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  an der Stelle  $x_0$  eine lineare Abbildung

$$df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l, v \mapsto df(x_0)v$$

ist, also eine  $l \times n$ -Matrix  $df(x_0)$ , welche einen Vektor  $v$  in  $\mathbb{R}^n$  verschlingt und den Vektor  $df(x_0)v$  in  $\mathbb{R}^l$  zurückgibt, so ist das Differenzial  $df(A)$  für Abbildungen auf  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  einfach eine lineare Abbildung,

$$df(A) : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R}), X \mapsto df(A)X$$

welche jeder Matrix  $X$  in  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  die Matrix  $df(A)X$  zuordnet (" $df(A)$  auf  $X$  angewandt").

In unserem Fall bekommen wir

$$\begin{aligned} df(A)X &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + hX) - f(A)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(A + hX)^T (A + hX) - A^T A}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A^T A + h(A^T X + X^T A) + h^2 X^T X - A^T A}{h} \\ &= A^T X + X^T A. \end{aligned}$$

Somit haben wir das Differenzial  $df$  berechnet. Nun müssen wir zeigen, dass für alle  $A \in O(n)$  das Differenzial  $df(A)$  vollen Rang hat, oder besser gesagt surjektiv ist. Wie tut man das? Man beweist, dass es für alle Matrizen  $A \in O(n)$  und  $B \in S_{n \times n}(\mathbb{R})$  eine Matrix  $X \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  gibt, sodass

$$df(A)X = B.$$

Wir suchen also eine Matrix  $X$ , für welche

$$A^T X + X^T A = B$$

gilt. Da  $B$  eine symmetrische Matrix ist, ist diese Gleichung besonders einfach zu lösen. Zuerst bemerken wir, dass  $(A^T X)^T = X^T (A^T)^T = X^T A$  und  $B = B^T \Rightarrow B = 1/2(B+B^T)$ . Somit müssen wir

$$A^T X + (A^T X)^T = \frac{1}{2}(B + B^T) \quad \Rightarrow \quad A^T X = \frac{1}{2}B$$

lösen. Es folgt  $X = \frac{1}{2}A^{-T}B$ . Somit ist  $df(A)$  für alle  $A \in O(n)$  surjektiv, weil wir für alle Matrizen  $A \in O(n)$  und  $B \in S_{n \times n}(\mathbb{R})$  eine Matrix  $X \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  gefunden haben, sodass  $df(A)X = B$  gilt. Also ist  $df(A)$  für alle  $A \in O(n)$  regulär. Nach dem Satz vom regulären Wert ist somit  $O(n)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Für die Dimension: Wegen  $\dim S_{n \times n}(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}n(n+1)$  und  $\dim M_{n \times n}(\mathbb{R}) = n^2$  folgt

$$\dim O(n) = \dim M_{n \times n}(\mathbb{R}) - \dim S_{n \times n}(\mathbb{R}) = n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

$O(n)$  ist eine Untermannigfaltigkeit, welche gleichzeitig auch eine Gruppe ist. Solche Untermannigfaltigkeiten heißen *Lie-Gruppen*.

**Beispiel 9.1.3 • • •** Welche der folgenden Abbildungen  $f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$  ist bei  $A_0$  lokal ein Diffeomorphismus?

- a)  $f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R}), A \rightarrow A^2$  bei  $A_0 = \mathbb{I}$ .
- b)  $f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R}), A \rightarrow A^k$  bei  $A_0 = \mathbb{I}$ .
- c)  $f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R}), A \rightarrow A^k$  bei  $A_0 = 0$ .

**Lösung:** a) Wie oben beschrieben, berechnen wir das Differenzial von  $f$  mit der Formel

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A+hX) - f(A)}{h} = df(A)X.$$

Es gilt (beachte, dass Matrizen nicht kommutieren, d.h. i.Allg.  $AB \neq BA$ )

$$\begin{aligned} df(A)X &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A+hX) - f(A)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(A+hX)^2 - A^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A^2 + hAX + hXA + h^2X^2 - A^2}{h} = AX + XA. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun das Differenzial an der Stelle  $A_0 = \mathbb{I}$

$$df(\mathbb{I})X = \mathbb{I}X + X\mathbb{I} = 2X \quad \Rightarrow \quad df(\mathbb{I}) = 2 \cdot \text{Id.}$$

Das Differenzial von  $f$  an der Stelle  $A_0 = \mathbb{I}$  ist somit invertierbar. Nach dem Umkehrtsatz folgt, dass  $f$  lokal bei  $A_0 = \mathbb{I}$  ein Diffeomorphismus ist.

b) Gleiches Spiel wie oben. Wir berechnen das Differenzial von  $f$  mit der Formel

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A+hX) - f(A)}{h} = df(A)X.$$

Es gilt (beachte, dass Matrizen nicht kommutieren, d.h. i.Allg.  $AB \neq BA$ )

$$\begin{aligned} df(A)X &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + hX) - f(A)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(A + hX)^k - A^k}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A^k + h(\underbrace{AA \cdots A}_{k-1} X + \underbrace{AA \cdots A}_{k-2} XA + \cdots + \underbrace{XA \cdots A}_{k-1}) + \cdots - A^k}{h} \\ &= \underbrace{AA \cdots A}_{k-1} X + \underbrace{AA \cdots A}_{k-2} XA + \cdots + \underbrace{XA \cdots A}_{k-1} = \sum_{i=1}^k A^{i-1} X A^{k-i}. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun das Differenzial an der Stelle  $A_0 = \mathbb{I}$

$$df(\mathbb{I})X = \sum_{i=1}^k \mathbb{I}^{i-1} X \mathbb{I}^{k-i} = kX \quad \Rightarrow \quad df(\mathbb{I}) = k \cdot \text{Id.}$$

Das Differenzial von  $f$  an der Stelle  $A_0 = \mathbb{I}$  ist somit invertierbar. Nach dem Umkehrtsatz folgt, dass  $f$  lokal bei  $A_0 = \mathbb{I}$  ein Diffeomorphismus ist.

c) Wir werten das Differenzial an der Stelle  $A_0 = 0$  aus

$$df(0)X = \sum_{i=1}^k 0^{i-1} X 0^{k-i} = 0 \quad \Rightarrow \quad df(0) = 0.$$

Das Differenzial von  $f$  an der Stelle  $A_0 = 0$  ist somit nicht invertierbar.  $f$  ist lokal bei  $A_0 = 0$  kein Diffeomorphismus. ■

**Beispiel 9.1.4 •••** Es sei  $D \det(A) : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  die Ableitung der Determinantenfunktion  $\det : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ .

a) Berechne  $D \det(A)$ .

b) Beweise:  $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  der Dimension  $n^2 - 1$ .

**Lösung:** a) Wie oben beschrieben, berechnen wir die Ableitung der Determinantenfunktion wie folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(A + hX) - \det(A)}{h} = D \det(A)X.$$

Es gilt

$$A + hX = A(1 + hA^{-1}X) \quad \Rightarrow \quad \det(A + hX) = \det(A) \det(1 + hA^{-1}X).$$

Wir rechnen nach (wir benutzen die Definition der Determinanten)

$$\begin{aligned} \det(1 + hA^{-1}X) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n (E_{i\sigma(i)} + h(A^{-1}X)_{i\sigma(i)}) \\ &= 1 + h \text{Spur}(A^{-1}X) + \mathcal{O}(h^2), \end{aligned}$$

wobei  $E_{ij}$  die Matrix mit Eintrag 1 bei  $ij$  und sonst Null ist. Wir bekommen somit

$$\begin{aligned} D \det(A)X &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(A + hX) - \det(A)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(A)(1 + h\text{Spur}(A^{-1}X) + \mathcal{O}(h^2)) - \det(A)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(A) + h\text{Spur}(A^{-1}X)\det(A) + \mathcal{O}(h^2) - \det(A)}{h} = \text{Spur}(A^{-1}X)\det(A). \end{aligned}$$

**b)** Wir schreiben

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} = \det^{-1}\{1\}.$$

Somit ist  $SL(n, \mathbb{R})$  die Niveaumenge der Determinantenfunktion zum Niveau 1. Nach dem Satz vom regulären Wert genügt es zu zeigen, dass  $\det^{-1}\{1\}$  keine kritischen Punkte von  $\det$  enthält, d.h. dass für alle Matrizen  $A \in \det^{-1}\{1\}$  das Differenzial  $D \det(A)$  maximalen Rang hat, oder in anderen Worten, dass  $D \det(A)$  surjektiv ist. Also los! Wir haben bereits gesehen, dass

$$D \det(A)X = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(A + hX) - \det(A)}{h} = \text{Spur}(A^{-1}X)\det(A) \stackrel{\det A=1}{=} \text{Spur}(A^{-1}X).$$

Wir wollen zeigen, dass  $D \det(A)$  surjektiv ist. In diesem Fall heißt es, dass es für jedes  $c \in \mathbb{R}$  ein  $X \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  gibt, sodass  $D \det(A)X = \text{Spur}(A^{-1}X) = c$ . Man könnte zum Beispiel

$$X = A \cdot \begin{pmatrix} c/n & & & \\ & \ddots & & \\ & & c/n & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

setzen. Dann gilt  $\text{Spur}(A^{-1}X) = c$ , wie gewünscht. Somit ist  $D \det(A)$  für alle  $A \in \det^{-1}\{1\}$  surjektiv. Somit ist  $SL(n, \mathbb{R})$  eine Untermannigfaltigkeit von  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Die Dimension ist

$$\dim SL(n, \mathbb{R}) = \dim M_{n \times n}(\mathbb{R}) - \dim \mathbb{R} = n^2 - 1.$$

■

### Beispiel 9.1.5 ••• Die Lorenz-Gruppe

$$O(3, 1) = \{A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R}) \mid A^T \Lambda A = \Lambda\}, \quad \Lambda = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$$

spielt in der speziellen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle. Beweise, dass  $O(3, 1)$  eine Lie-Gruppe ist.

**Lösung:** Wir schreiben

$$O(3, 1) = \{A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R}) \mid A^T \Lambda A = \Lambda\} = f^{-1}\{\Lambda\},$$

mit<sup>1</sup>

$$f : M_{4 \times 4}(\mathbb{R}) \rightarrow S_{4 \times 4}(\mathbb{R}), A \mapsto f(A) = A^T \Lambda A.$$

<sup>1</sup>Dass  $f$  Werte in  $S_{4 \times 4}(\mathbb{R})$  annimmt, sieht man wie folgt

$$(f(A))^T = (A^T \Lambda A)^T = A^T \Lambda^T (A^T)^T = A^T \Lambda A = f(A).$$

Somit haben wir  $O(3,1)$  als Niveaumenge der Funktion  $f$  zum Niveau  $\Lambda$  geschrieben. Nach dem Satz vom regulären Wert genügt es zu zeigen, dass  $f^{-1}\{\Lambda\}$  keine kritischen Punkte von  $f$  enthält, d.h. dass für alle Matrizen  $A \in f^{-1}\{\Lambda\}$  das Differenzial  $df(A)$  maximalen Rang hat, oder, in anderen Worten, dass  $df(A)$  surjektiv ist. Also los! Das Differenzial von  $f$  berechnen wir wie üblich

$$\begin{aligned} df(A)X &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + hX) - f(A)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(A + hX)^T \Lambda (A + hX) - A^T \Lambda A}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A^T \Lambda A + hX^T \Lambda A + hA^T \Lambda X + h^2 X^T \Lambda X - A^T \Lambda A}{h} \\ &= X^T \Lambda A + A^T \Lambda X. \end{aligned}$$

Wir müssen also zeigen, dass zu jedem  $A \in O(3,1)$  und  $B \in S_{4 \times 4}(\mathbb{R})$  eine Matrix  $X \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$  existiert, sodass  $df(A)X = B$ , d.h.

$$X^T \Lambda A + A^T \Lambda X = B.$$

Wir wenden denselben Trick wie im Beweis an, dass  $O(n)$  eine Untermannigfaltigkeit ist, und zwar wir schreiben

$$X^T \Lambda A + A^T \Lambda X = X^T \Lambda A + (X^T \Lambda A)^T = \frac{1}{2}(B + B^T) \Rightarrow X^T \Lambda A = \frac{1}{2}B.$$

Wir setzen also  $X := \frac{1}{2}(BA^{-1}\Lambda)^T$ . Somit ist  $df(A)$  regulär und nach dem Satz vom regulären Wert folgt, dass  $O(3,1)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$  ist, also eine Lie-Gruppe. ■

## 9.2 Der Tangentialraum

Sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  und  $p$  ein Punkt auf  $M$ . Ein Vektor  $\vec{X}$  heisst **Tangentialvektor** zu  $M$  an der Stelle  $p$ , falls  $\vec{X}$  der Geschwindigkeitsvektor an der Stelle  $p$  von einer differenzierbaren Kurve  $\tilde{\gamma}$ , welche auf  $M$  definiert ist und durch den Punkt  $p$  läuft. In anderen Worten,  $\vec{X}$  heisst Tangentialvektor an  $M$  an der Stelle  $p$ , falls eine differenzierbare Kurve  $\tilde{\gamma}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  existiert, mit  $\tilde{\gamma}(0) = p$  und  $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \vec{X}$ .

Der Raum aller Tangentialvektoren an  $M$  an der Stelle  $p$

$$\begin{aligned} T_p M &= \{\vec{X} \mid \vec{X} \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ in } p\} \\ &= \text{Menge aller Tangentialvektoren an } M \text{ in } p \end{aligned}$$

heisst **Tangentialraum** an  $M$  in  $p_0$ . Der Tangentialraum  $T_p M$  ist ein Vektorraum der Dimension  $k = n - l$ . Für Untermannigfaltigkeiten, welche als reguläre Niveaumengen

definiert sind, gibt es eine einfache Formel, um den Tangentialraum  $T_p M$  zu bestimmen

**Satz 9.2.1 (Formel für Tangentialraum)** Ist die Untermannigfaltigkeit  $M$  als reguläre Niveaumenge  $f^{-1}\{a\}$  einer differenzierbaren Funktion  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  gegeben, so ist der Tangentialraum in  $p \in M$  gegeben durch

$$T_p M = \ker df(p).$$

Wir betrachten einige Beispiele.

**Beispiel 9.2.1 • o o** Bestimme den Tangentialraum an den folgenden Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^3$  im gegebenen Punkt

a) Kugel  $S^2$  im Nordpol  $p_0 = (0, 0, 1)$ .

b)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y + z = 1, x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$  in  $p_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ .

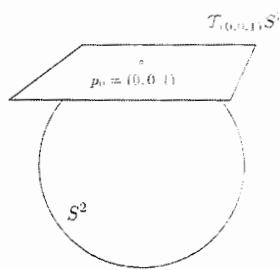
**Lösung:** a)  $S^2 = f^{-1}\{0\}$  für  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ . Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df = (2x, 2y, 2z) \Rightarrow df(p_0) = (0, 0, 2).$$

Den Tangentialraum findet man mit der Formel

$$T_{(0,0,1)} S^2 = \ker(0, 0, 2) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Es ist also die Ebene parallel zur  $xy$ -Ebene, welche durch den Punkt  $(0, 0, 1)$  geht: Es ist die Ebene  $z = 1$ .



b)  $S = f^{-1}\{0\}$  für  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2y + z - 1 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Das Differenzial lautet

$$df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2x & 2y & -2z \end{pmatrix} \Rightarrow df\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gemäss der Formel für den Tangentialraum

$$T_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)} S = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Dies gibt:  $z = t \Rightarrow y = -\frac{1}{2}t \Rightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{3}}t$ . Die folgende Gerade ist also der Tangentialraum in  $p_0$

$$T_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)} S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

■

**Beispiel 9.2.2 •••** Bestimme den Tangentialraum an der Kugel  $S^2$  in jedem Punkt  $x_0 = (x_0, y_0, z_0)$ .

Lösung: Wiederum  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

und

$$df = (2x, 2y, 2z).$$

Wir werten in  $x_0$  aus

$$df(x_0) = (2x_0, 2y_0, 2z_0).$$

Den Tangentialraum findet man mit der Formel

$$T_{x_0} S^2 = \ker(2x_0, 2y_0, 2z_0) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_0 \cdot v = 0\} = \{\text{Alle zu } x_0 \text{ senkrechte Vektoren}\}.$$

■

### 9.2.1 Lie-Algebren

Eine Kurve in  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  ist eine differenzierbare Abbildung

$$A : [a, b] \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R}), t \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung  $\dot{A}$  wird einfach komponentenweise gebildet. Dies erlaubt es, den Tangentialraum an eine Untergruppe  $G$  von  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  im Einselement 1 zu definieren. Sei  $G$  eine Untergruppe von  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  und  $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$  eine differenzierbare Kurve mit

- (i)  $A(t) \in G$  für alle  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$
- (ii)  $A(0) = \mathbb{I}$
- (iii)  $\dot{A}(0) = X.$

Dann heisst  $X$  **Tangentialvektor** von  $G$  in  $\mathbb{I}$ . Die Menge aller solchen  $X$  bildet einen Untervektorraum von  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , den **Tangentialraum** an  $G$  in  $\mathbb{I}$ . Somit besteht analog zu dem Tangentialraum an eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  in einem Punkt  $p$  der Tangentialraum  $T_{\mathbb{I}}G$  aus den Tangentialvektoren von Kurven, die in einer  $\varepsilon$ -Umgebung von  $\mathbb{I}$  in der Untergruppe  $G$  enthalten sind. Der Tangentialraum an eine Lie-Gruppe in  $\mathbb{I}$  heisst **Lie-Algebra**.

Für Lie-Gruppen  $G$ , welche als reguläre Niveaumengen gegeben sind, kann man dieselbe Formel für den Tangentialraum wie in Satz 9.2.1 benutzen.

**Beispiel 9.2.3** • • • Berechne den Tangentialraum für die folgenden Lie-Gruppen im Einselement (d.h. bestimme die Lie-Algebra der folgenden Lie-Gruppen)

- a)  $O(n)$
- b)  $SL(n, \mathbb{R})$
- c)  $O(3, 1)$
- d)  $SO(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) | A^T A = \mathbb{I}, \det(A) = 1\}.$

**Lösung:** a) In dem vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass sich  $O(n)$  als reguläre Niveaumenge schreiben lässt

$$O(n) = f^{-1}\{\mathbb{I}\}, \text{ mit } f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow S_{n \times n}(\mathbb{R}), A \mapsto A^T A.$$

Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df(A)X = A^T X + X^T A \Rightarrow df(\mathbb{I})X = X + X^T.$$

Nun wenden wir die Formel für den Tangentialraum an

$$T_{\mathbb{I}}O(n) = \ker df(\mathbb{I}) = \ker(X \rightarrow X + X^T) = \{X \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) | X^T = -X\}.$$

Die Lie-Algebra von  $O(n)$  ist somit die Menge aller schiefsymmetrischen  $n \times n$  Matrizen.

b)  $SL(n, \mathbb{R})$  lässt sich als reguläre Niveaumenge schreiben

$$SL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}\{1\}.$$

Das Differenzial der Determinantenfunktion  $\det$  lautet

$$D \det(A)X = \text{Spur}(A^{-1}X) \det(A) \Rightarrow df(\mathbb{I})X = \text{Spur}(\mathbb{I}^{-1}X) \det(\mathbb{I}) = \text{Spur}(X).$$

Nun wenden wir die Formel für den Tangentialraum an

$$T_{\mathbb{I}}SL(n, \mathbb{R}) = \ker df(\mathbb{I}) = \ker(X \rightarrow \text{Spur}(X)) = \{X \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) | \text{Spur}(X) = 0\}.$$

Die Lie-Algebra von  $SL(n, \mathbb{R})$  ist somit die Menge aller spurlosen  $n \times n$  Matrizen.

c)  $O(3, 1)$  lässt sich als reguläre Niveaumenge schreiben

$$O(3, 1) = f^{-1}\{\Lambda\} \text{ mit } f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow S_{n \times n}(\mathbb{R}), A \mapsto A^T \Lambda A.$$

Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df(A)X = X^T \Lambda A + A^T \Lambda X \Rightarrow df(\mathbb{I})X = X^T \Lambda + \Lambda X.$$

Nun wenden wir die Formel für den Tangentialraum an

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{I}} O(3, 1) &= \ker df(\mathbb{I}) = \ker(X \mapsto X^T \Lambda + \Lambda X) = \{X \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) | X^T \Lambda + \Lambda X = 0\} \\ &= \{X \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) | \Lambda X^T \Lambda + X = 0\}. \end{aligned}$$

Die Lie-Algebra von  $O(3, 1)$  ist somit

$$\{X \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) | \Lambda X^T \Lambda + X = 0\}.$$

d)  $SO(n)$  kann man als reguläre Niveaumenge schreiben

$$SO(n) = f^{-1}\{(\mathbb{I}, 1)\}, \text{ mit } f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow S_{n \times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}, A \mapsto \begin{pmatrix} A^T A \\ \det(A) \end{pmatrix}.$$

Das Differenzial von  $f$  kann man komponentenweise bestimmen und lautet somit

$$df(A)X = \begin{pmatrix} A^T X + X^T A \\ \text{Spur}(A^{-1} X) \det(A) \end{pmatrix} \Rightarrow df(\mathbb{I})X = \begin{pmatrix} X + X^T \\ \text{Spur}(X) \end{pmatrix}.$$

Nun wenden wir die Formel für den Tangentialraum an

$$T_{\mathbb{I}} SO(n) = \ker df(\mathbb{I}) = \ker \left( X \mapsto \begin{pmatrix} X + X^T \\ \text{Spur}(X) \end{pmatrix} \right) = \{X \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) | X^T = -X, \text{Spur}(X) = 0\}.$$

Da schiefsymmetrische Matrizen immer spurlos sind, gilt

$$T_{\mathbb{I}} SO(n) = \{X \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) | X^T = -X, \text{Spur}(X) = 0\} = \{X \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) | X^T = -X\}.$$

Die Lie-Algebra von  $SO(n)$  ist somit die Menge aller schiefsymmetrischen  $n \times n$  Matrizen.  $SO(n)$  und  $O(n)$  haben somit dieselbe Lie-Algebra.

■

### 9.3 Der Normalraum

Sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  und  $p$  ein Punkt auf  $M$ . Der Raum

$$N_p M := (T_p M)^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n | x \perp \eta, \forall \eta \in T_p M\}$$

heisst **Normalraum** an  $M$  in  $p$ . Der Normalraum  $N_p M$  ist das orthogonale Komplement des Tangentialraumes  $T_p M$  und ist somit ein Vektorraum der Dimension  $l = n - k$ .

Für Untermannigfaltigkeiten, welche als reguläre Niveaumengen definiert sind, gibt es eine einfache Regel, die so lautet:

**Satz 9.3.1 (Regel für Normalraumbestimmung)** Ist die Untermannigfaltigkeit  $M$  als reguläre Niveaumenge  $f^{-1}\{0\}$  einer differenzierbaren Funktion  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  gegeben, so bilden die Zeilenvektoren von  $df(p)$  eine Basis des Normalraumes  $N_p M$ .

Wir betrachten einige Beispiele zum Normalraum.

**Beispiel 9.3.1 •••** Wir betrachten die Spirale mit Parametrisierung

$$\gamma(t) = (t, \cos t, \sin t).$$

Ist diese Spirale eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$ ? Falls ja, bestimme die Dimension. Bestimme ferner den Tangential- und Normalraum in jedem Punkt.

**Lösung:** Die Kurve kann als Nullstellenmenge  $f^{-1}\{0\}$  der Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y - \cos x \\ z - \sin x \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Das Differenzial von  $f$  lautet

$$df(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin x & 1 & 0 \\ -\cos x & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Differenzial hat immer Rang 2, somit hat  $f$  keine kritischen Punkte  $\Rightarrow$  die Spirale enthält nur reguläre Punkte  $\Rightarrow$  die Spirale ist eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$  der Dimension  $k = 3 - 2 = 1$ . Um den Tangentialraum zu bestimmen, werten wir  $df$  in einem beliebigen Punkt  $x_0 = (x_0, y_0, z_0)$  auf der Spirale aus

$$df(x_0, \cos x_0, \sin x_0) = \begin{pmatrix} \sin x_0 & 1 & 0 \\ -\cos x_0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und benutzen die Formel

$$T_{x_0} S = \ker \begin{pmatrix} \sin x_0 & 1 & 0 \\ -\cos x_0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt:  $x = t \Rightarrow y = -t \sin x_0 \Rightarrow z = t \cos x_0$ . Der gesuchte Tangentialraum ist also die Gerade, welche durch den Vektor  $(1, -\sin x_0, \cos x_0)$  aufgespannt wird. d.h.

$$T_{x_0} S = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin x_0 \\ \cos x_0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \cos x_0 \\ \sin x_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin x_0 \\ \cos x_0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für den Normalraum kann man (gemäß der obigen Regel für die Normalraumbestimmung) einfach die Zeilenvektoren aus  $df(x_0, \cos x_0, \sin x_0)$  ablesen

$$N_{x_0} S = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} \sin x_0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos x_0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Der Normalraum ist also die Ebene, welche von den Vektoren  $(\sin x_0, 1, 0)$  und  $(-\cos x_0, 0, 1)$  aufgespannt ist und durch den Punkt  $(x_0, \cos x_0, \sin x_0)$  geht, d.h.

$$N_{x_0} S = \{x - y \sin x_0 + z \cos x_0 = x_0\}.$$

■

**Beispiel 9.3.2** ••• Die Menge  $M$  sei definiert durch

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2xy - y^2 = \alpha\}.$$

Für welche  $\alpha$  ist  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ ? Setze  $\alpha = 100$  und bestimme den Tangentialraum und den Normalraum im Punkt  $(10, 0)$ .

**Lösung:**  $M = f^{-1}\{0\}$  für  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - \alpha$ . Wir suchen die kritischen Punkte von  $f$  und hoffen, dass diese nicht in  $M$  liegen. Dazu setzen wir  $df = (2x + 2y, 2x - 2y) = (0, 0)$ . Da  $\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -8 \neq 0$ , hat die Gleichung  $df = 0$  nur die triviale Lösung. Somit ist  $(0, 0)$  der einzige kritische Punkt von  $f$ . Damit  $M$  eine Untermannigfaltigkeit ist, darf dieser Punkt nicht in  $M$  liegen. Es gilt  $f(0, 0) = -\alpha$ . Somit: für  $\alpha = 0$  ist  $M$  keine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ ; für alle anderen  $\alpha$  ist  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$  der Dimension  $2 - 1 = 1$ .

Wir setzen  $\alpha = 100$ . Den Tangentialraum in  $(10, 0)$  bestimmen wir mit der Formel

$$T_{(10,0)} M = \ker df(10, 0) = \ker(20, 20) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Normalraum wird von  $(1, 1)$  aufgespannt, d.h.

$$N_{(10,0)} M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

■

# Kapitel 10

## Parameterintegrale

Das Ableiten von Integralen, die von einem Parameter abhängig sind, ist Gegenstand dieses Kapitels. Um die Problematik besser zu beschreiben, wollen wir mit einem sehr einfachen Beispiel beginnen. Wir fragen uns für welche Werte von  $\alpha \in \mathbb{R}$  der Ausdruck

$$F(\alpha) = \int_0^1 [(\alpha x - x^2)^2 - \alpha^2] dx$$

maximal wird. Um das Problem zu lösen, könnten wir ja das Integral explizit bestimmen

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_0^1 [(\alpha x - x^2)^2 - \alpha^2] dx \\ &= \int_0^1 [\alpha^2 x^2 - 2\alpha x^3 + x^4 - \alpha^2] dx \\ &= \frac{\alpha^2}{3} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{5} - \alpha^2 \\ &= -\frac{2\alpha^2}{3} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

und dann die Ableitung nach  $\alpha$  gleich Null setzen. Dies ergibt

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = -\frac{4}{3}\alpha - \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{3}{8}.$$

Man tut sich leicht zu zeigen, dass bei  $\alpha = -\frac{3}{8}$  in der Tat ein Maximum liegt, denn

$$\frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2} = -\frac{4}{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum.}$$

In diesem Beispiel muss man im Prinzip die Ableitung eines Integrals bestimmen, welches von einem Parameter (in diesem Fall  $\alpha$ ) abhängt. Dies haben wir an diesem Beispiel mit direkter Rechnung geschafft, aber oft kann man das Integral selbst nicht für alle Werte des Parameters explizit bestimmen. Wie geht man in solchen Fällen vor? Eine Antwort auf diese Frage werden wir im nächsten Abschnitt geben.

## 10.1 Parameterintegrale mit konstanten Grenzen

Im Allgemeinen heisst eine Funktion  $F(t)$  von der Form

$$F(t) = \int_a^b f(t, x) dx$$

*Parameterintegral.* Unser Ziel ist es, zu verstehen, wie wir die Ableitung von  $F(t)$  nach dem Parameter  $t$  bestimmen können. ohne das Integral explizit bestimmen zu müssen, was in den meisten Fällen nicht möglich ist. Der folgende Satz erlaubt es und lautet so

**Satz 10.1.1 (Parameterintegrale)** Seien  $f(t, x)$  und  $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$  auf  $[c, d] \times [a, b]$  stetig. Dann ist die Funktion

$$F(t) = \int_a^b f(t, x) dx$$

für alle  $t \in [c, d]$  differenzierbar und es gilt

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx.$$

In Worten: Sind  $f(x, t)$  und die partielle Ableitung nach dem Parameter  $t$  stetig, so darf man die Ableitung innerhalb des Integrals ziehen und diese wird dann zu einer partiellen Ableitung. Wendet man die Aussage auf unser Beispiel an, so kann man die Rechnung etwas vereinfachen

$$\begin{aligned} \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 [(\alpha x - x^2)^2 - \alpha^2] dx \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} [(\alpha x - x^2)^2 - \alpha^2] dx \\ &= \int_0^1 [2x(\alpha x - x^2) - 2\alpha] dx \\ &= \frac{2\alpha}{3} - \frac{1}{2} - 2\alpha = -\frac{4}{3}\alpha - \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Somit folgt  $\alpha = -\frac{3}{8}$  in Übereinstimmung mit der direkten Rechnung. Natürlich ist der Vorteil in diesem spezifischen Fall nicht extrem gross, aber der Satz ist dann besonders nützlich, wenn die vorkommende Integrale nicht explizit berechenbar sind. Ein sehr bekanntes Beispiel ist die Berechnung des Integrals

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log(x)} dx.$$

Für  $\alpha = 0$  ist das Integral trivial,

$$I(0) = \int_0^1 \frac{x^0 - 1}{\log(x)} dx = 0$$

aber für alle andere  $\alpha > -1$  kann man es nicht mithilfe der konventionellen Techniken bestimmen. In der Tat hat die Funktion  $\frac{x^\alpha - 1}{\log(x)}$  die Eigenschaft, dass ihre Stammfunktion nicht elementar ausdrückbar ist. Ein sehr einfacher, aber sehr wichtiger Trick erlaubt trotzdem die Bestimmung des Integrals. Anstatt das Integral selbst zu bestimmen, betrachten wir seine Ableitung nach  $\alpha$ . Nach der Formel für Parameterintegrale finden wir

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{x^\alpha - 1}{\log(x)} dx = \int_0^1 \frac{\log(x)x^\alpha}{\log(x)} dx = \int_0^1 x^\alpha dx \stackrel{\alpha \geq -1}{=} \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Wir haben somit einen sehr einfachen Ausdruck für die Ableitung  $I'(\alpha)$  gefunden. Integrieren wir das Ergebnis, so finden wir

$$I'(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1} \Rightarrow I(\alpha) = \log(\alpha + 1) + C.$$

Für  $\alpha = 0$  gilt  $I(0) = \log(1) + C = C$ . Andererseits kennen wir  $I(0) = 0$  schon. Dies fixiert die Integrationskonstante  $C = 0$ . Somit haben wir

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log(x)} dx = \log(\alpha + 1)$$

gefunden, ohne das Integral selbst zu bestimmen. Dieser Trick ist für die Berechnung von Fourier- und Laplace-Transformierten einiger Funktionen oder für die Bestimmung spezifischer Integrale sehr nützlich. Hier sind einige Beispiele.

**Beispiel 10.1.1 ••• Berechne**

$$F(\alpha) = \int_0^\pi \frac{1}{(\alpha - \cos x)^2} dx$$

*Hinweis: Betrachte das Integral  $\int_0^\pi \frac{1}{\alpha - \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$ .*

**Lösung:** Wir betrachten das Integral  $\int_0^\pi \frac{1}{\alpha - \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$  und bemerken, dass

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{\alpha - \cos x} \right) = -\frac{1}{(\alpha - \cos x)^2}$$

gilt. Die Idee ist somit,  $F(\alpha)$  als Ableitung des Integrals  $\int_0^\pi \frac{1}{\alpha - \cos x} dx$  zu sehen. Es ist klar, dass die Funktionen

$$f(\alpha, x) = \frac{1}{\alpha - \cos x}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha, x) = -\frac{1}{(\alpha - \cos x)^2}$$

stetige Funktionen von  $\alpha$  und  $x$  sind (weil Komposition stetiger Funktionen). Somit sind die Voraussetzungen des Satzes 10.1.1 erfüllt. Mit der Formel für Parameterintegrale finden wir

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{1}{(\alpha - \cos x)^2} dx &= - \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{\alpha - \cos x} \right) dx = -\frac{d}{d\alpha} \int_0^\pi \frac{1}{\alpha - \cos x} dx \\ &= -\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \right) = \frac{\alpha \pi}{(\alpha^2 - 1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

**Beispiel 10.1.2 ••• Berechne  $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1 - \alpha \log(x)}{\log^2(x)} dx$  für alle  $\alpha > -1$ .**

**Lösung:** Wir betrachten die Ableitung von  $F(\alpha)$  nach  $\alpha$ . Mit der Formel für Parameterintegrale finden wir

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{x^\alpha - 1 - \alpha \log(x)}{\log^2(x)} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^\alpha \log(x) - \log(x)}{\log^2(x)} dx = \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log(x)} dx.$$

Das letzte Integral kennen wir schon. Sein Wert ist  $\log(\alpha + 1)$ . Wir finden somit

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \log(\alpha + 1) \Rightarrow F(\alpha) = \int \log(\alpha + 1) d\alpha.$$

Das Integral wird mittels partieller Integration gelöst

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int 1 \cdot \log(\alpha + 1) d\alpha = \alpha \log(1 + \alpha) - \int \frac{\alpha}{\alpha + 1} d\alpha \\ &= \alpha \log(1 + \alpha) - \int \frac{\alpha + 1 - 1}{\alpha + 1} d\alpha = \alpha \log(1 + \alpha) - \alpha + \log(\alpha + 1) + C. \end{aligned}$$

Nun müssen wir die Integrationskonstante  $C$  bestimmen. Dazu betrachten wir  $F(0)$

$$F(0) = \int_0^1 \frac{x^0 - 1 - 0}{\log^2(x)} dx = 0 \Rightarrow 0 = 0 - 0 + \log(1 + 0) + C = C.$$

Somit  $C = 0$  und

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1 - \alpha \log(x)}{\log^2(x)} dx = \alpha \log(1 + \alpha) - \alpha + \log(\alpha + 1).$$

**Beispiel 10.1.3 ••• Berechne  $F(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \log(\alpha^2 - \sin^2 t) dt$  für alle  $\alpha > 1$ .**

**Lösung:** Wir betrachten die Ableitung von  $F(\alpha)$  nach  $\alpha$ . Mit der Formel für Parameterintegrale finden wir

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \log(\alpha^2 - \sin^2 t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 t} dt.$$

Wir haben nur ein Integral zu berechnen mit einem  $\sin^2 t$  im Nenner. Wir substituieren also  $x = \tan t$ . Dabei ist  $t = \arctan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x^2+1}$  und  $\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ . Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 t} dt = \int_0^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \frac{x^2}{x^2+1}} \frac{dx}{x^2+1} = \int_0^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (\alpha^2 - 1)x^2} dx \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\infty} \frac{2\alpha}{1 + \frac{(\alpha^2 - 1)x^2}{\alpha^2}} dx = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} x\right)^2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \underbrace{\left[ \arctan \left( \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} x \right) \right]}_{=\pi/2}^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Wir haben somit einen Ausdruck für die Ableitung von  $F(\alpha)$  gefunden. Integrieren wir das Ergebnis, so finden wir

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \Rightarrow F(\alpha) = \int \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} d\alpha = \pi \operatorname{arccosh}(\alpha) + C.$$

Wir müssen nur die Integrationskonstante bestimmen. Dazu ziehen wir den Limes für  $\alpha$  gegen Unendlich. Dazu schreiben wir zuerst  $\operatorname{arccosh}(\alpha) = \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})$ . Es gilt natürlich für alle  $\alpha$

$$F(\alpha) = \pi \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) + C \Rightarrow F(\alpha) - \pi \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) = C.$$

Insbesondere im Limes  $\alpha \rightarrow \infty$ <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} C &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (F(\alpha) - \pi \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} [\log(\alpha^2 - \sin^2 t) - 2 \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})] dt \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{\alpha^2 - \sin^2 t}{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^2}\right) dt \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{\alpha^2 - \sin^2 t}{2\alpha^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - 1} - 1}\right) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \log\left(\frac{\alpha^2 - \sin^2 t}{2\alpha^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - 1} - 1}\right) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \log\left(\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha^2}{2\alpha^2 + 2\alpha^2}\right) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \log(1/4) dt = -\pi \log(2). \end{aligned}$$

Somit

$$F(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \log(\alpha^2 - \sin^2 t) dt = \pi \operatorname{arccosh}(\alpha) - \pi \log(2).$$

■

**Beispiel 10.1.4 ••• Berechne  $F(\alpha) = \int_0^\pi \log(\alpha - \cos t) dt$  für alle  $\alpha > 1$ .**

**Lösung:** Wiederum betrachten wir die Ableitung von  $F(\alpha)$  nach  $\alpha$ . Mit der Formel für Parameterintegrale finden wir

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \alpha} \log(\alpha - \cos t) dt = \int_0^\pi \frac{1}{\alpha - \cos t} dt.$$

Wir haben nur ein Integral zu berechnen mit ein  $\cos t$  im Nenner. Wir substituieren also  $x = \tan(t/2)$ . Dabei ist  $t = 2 \arctan x \Rightarrow dt = \frac{2}{x^2+1} dx$  und  $\cos t = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ . Wir haben somit

$$\begin{aligned} \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} &= \int_0^\pi \frac{1}{\alpha - \cos t} dt = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha - \frac{1-x^2}{1+x^2}} \frac{2}{x^2+1} dx = \int_0^\infty \frac{2}{x^2(\alpha+1) + \alpha - 1} dx \\ &= \frac{2}{\alpha-1} \int_0^\infty \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}x\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{\alpha-1}\sqrt{\alpha+1}} \left[ \arctan\left(\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}x\right) \right]_0^\infty = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Bei der Bestimmung des Grenzwertes haben wir die Stetigkeit des Logarithmus benutzt (um  $\lim$  ins Argument zu ziehen) und dann die Dominanzen: Oben dominiert  $\alpha^2$ , unten dominiert  $2\alpha^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2}$ .

Wir haben somit einen Ausdruck für die Ableitung von  $F(\alpha)$  gefunden. Integrieren wir das Ergebnis, so finden wir

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \Rightarrow F(\alpha) = \int \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} d\alpha = \pi \operatorname{arccosh}(\alpha) + C.$$

Wir müssen nur die Integrationskonstante bestimmen. Dazu ziehen wir den Limes für  $\alpha$  gegen Unendlich. Dazu schreiben wir zuerst  $\operatorname{arccosh}(\alpha) = \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})$ . Es gilt natürlich für alle  $\alpha$

$$F(\alpha) = \pi \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) + C \Rightarrow F(\alpha) - \pi \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) = C.$$

insbesondere im Limes  $\alpha \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} C &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (F(\alpha) - \pi \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\pi [\log(\alpha - \cos t) - \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})] dt \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\pi \log \left( \frac{\alpha - \cos t}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}} \right) dt \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\pi \log \left( \frac{\alpha - \cos t}{\alpha + \alpha \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}}} \right) dt \\ &= \int_0^\pi \log(1/2) dt = -\pi \log(2). \end{aligned}$$

Somit

$$F(\alpha) = \int_0^\pi \log(\alpha - \cos t) dt = \pi \operatorname{arccosh}(\alpha) - \pi \log(2).$$

■

## 10.2 Parameterintegrale mit variablen Grenzen

Im zweiten Teil dieses Kapitels wollen wir den etwas komplizierteren Fall betrachten, wo die Grenzen selbst vom Parameter abhängen. Wir betrachten also Funktionen der Form

$$F(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t, x) dx$$

mit differenzierbaren Grenzen  $\varphi$  und  $\psi$ . Um zu verstehen, was in diesem Fall passiert, untersuchen wir das folgende Integral

$$\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x) dx$$

( $f$  enthält keine  $t$ -Abhängigkeit mehr). Kennen wir eine Stammfunktion  $F(x)$  zu  $f(x)$ , so können wir das bestimmte Integral sofort berechnen

$$\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x) dx = [F(t)]_{\varphi(t)}^{\psi(t)} = F(\psi(t)) - F(\varphi(t)).$$

Somit finden wir nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x) dx &= \frac{d}{dt} [F(\psi(t)) - F(\varphi(t))] = F'(\psi(t))\psi'(t) - F'(\varphi(t))\varphi'(t) \\ &= f(\psi(t))\psi'(t) - f(\varphi(t))\varphi'(t), \end{aligned}$$

wobei wir die Tatsache benutzt haben, dass für eine Stammfunktion von  $f$  gilt:  $F' = f$ . Wir haben also eine Formel für den Fall hergeleitet, dass der Integrand  $f$  nicht von  $t$  abhängt. Allgemeines gilt folgender Satz

**Satz 10.2.1 (Parameterintegrale mit variablen Grenzen)** Seien  $f(t, x)$  und  $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$  stetig in  $t$  und  $x$  und die Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  seien nach  $t$  stetig differenzierbar. Dann ist die Funktion

$$F(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t, x) dx$$

differenzierbar und es gilt

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx + f(t, \psi(t))\psi'(t) - f(t, \varphi(t))\varphi'(t).$$

Wir betrachten einige Beispiele dazu.

**Beispiel 10.2.1**  $\circ \circ \circ$  Differenziere  $F(x) = \int_{-1/x}^{x^2} xt^2 dt$ .

**Lösung:** Wir benutzen die Formel für Parameterintegrale

$$\begin{aligned} \frac{dF(x)}{dx} &= \int_{-1/x}^{x^2} t^2 dt + x(x^2)^2 \cdot 2x - x \left(-\frac{1}{x}\right)^2 \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x^6}{3} + \frac{1}{3x^3} + 2x^6 - \frac{1}{x^3} = \frac{7x^6}{3} - \frac{2}{3x^3}. \end{aligned}$$

**Beispiel 10.2.2**  $\bullet \circ \circ$  Differenziere  $F(t) = \int_t^{t^{3/2}} \log(tx) dx$  direkt und mit der Formel für Parameterintegrale.

**Direkte Berechnung:** Wir berechnen das Integral  $\int \log(tx) dx$  mit einer partiellen Integration

$$\int \log(tx) dx = \int 1 \cdot \log(tx) dx = x \log(tx) - \int x \cdot \frac{t}{xt} dx = x \log(tx) - x + C.$$

Somit

$$F(t) = \int_t^{t^{3/2}} \log(tx) dx = t^{3/2} \log(t^{5/2}) - t \log(t^2) - t^{3/2} + t = \frac{5}{2} t^{3/2} \log(t) - 2t \log(t) + t - t^{3/2}.$$

Ableiten nach  $t$  ergibt

$$\begin{aligned}\frac{dF(t)}{dt} &= \frac{15}{4}t^{1/2}\log(t) + \frac{5}{2}t^{1/2} - 2\log(t) - 2 + 1 - \frac{3}{2}t^{1/2} \\ &= \frac{15}{4}\sqrt{t}\log(t) + \sqrt{t} - 2\log(t) - 1.\end{aligned}$$

Mit der Formel für Parameterintegrale: Wir benutzen die Formel für Parameterintegrale

$$\begin{aligned}\frac{dF(t)}{dt} &= \int_t^{t^{3/2}} \frac{1}{x} dx + \log(x \cdot t^{3/2}) \cdot \frac{3}{2}t^{1/2} - \log(t \cdot x) \cdot 1 \\ &= \frac{t^{3/2}}{t} - \frac{t}{t} + \frac{5}{2}\log(t) \cdot \frac{3}{2}t^{1/2} - 2\log(t) \\ &= \frac{15}{4}\sqrt{t}\log(t) + \sqrt{t} - 2\log(t) - 1.\end{aligned}$$

■

**Beispiel 10.2.3 ••• Berechne**

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$$

(Tipp: Führe einen Parameter  $\alpha$  ein und berechne das Integral als Parameterintegral).

**Lösung:** Wir führen einen Parameter  $\alpha$  ein und betrachten

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2} dx.$$

Anstatt  $F(\alpha)$  selbst zu betrachten, betrachten wir die Ableitung

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)} dx.$$

Es ist ein Integral einer rationalen Funktion, das wir wie üblich mit Partialbruchzerlegung lösen können

$$\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)} = \frac{1}{\alpha^2+1} \left( \frac{x+\alpha}{1+x^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha x} \right).$$

Es gilt somit

$$\begin{aligned}\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} &= \int_0^1 \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)} dx = \frac{1}{\alpha^2+1} \int_0^1 \left( \frac{x+\alpha}{1+x^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha x} \right) dx \\ &= \frac{1}{\alpha^2+1} \left[ \frac{1}{2} \log(1+x^2) + \alpha \arctan(x) - \log(1+\alpha x) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\alpha^2+1} \left( \frac{1}{2} \log(2) + \frac{\pi}{4} \alpha - \log(1+\alpha) \right).\end{aligned}$$

Wir haben somit eine explizite Formel für die Ableitung von  $F(\alpha)$  gefunden. Wir integrieren das Resultat und finden

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\pi\alpha/2 + \log 2}{2(\alpha^2+1)} - \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha^2+1} \Rightarrow F(\alpha) = \int \frac{\pi\alpha/2 + \log 2}{2(\alpha^2+1)} d\alpha - \int \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha^2+1} d\alpha.$$

Nun haben wir ein kleines Problem: Um  $F(\alpha)$  zu bestimmen, müssen wir das Integral

$$\int \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha^2+1} d\alpha$$

berechnen, was aber gerade das Integral ist, das wir berechnen wollen!

Mit der obigen Strategie machen wir also keinen Fortschritt. Um die Problematik zu umgehen, definieren wir

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2} dx.$$

In diesem Fall haben wir den Parameter  $\alpha$  auch in den Grenzen. Wir leiten mithilfe des Satzes 10.2.1 nach  $\alpha$  ab und finden

$$\begin{aligned} \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} &= \int_0^\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2} dx + \frac{\log(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} \cdot 1 \\ &= \int_0^\alpha \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)} dx + \frac{\log(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}. \end{aligned}$$

Wiederum Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} &= \int_0^\alpha \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)} dx + \frac{\log(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} \\ &= \frac{1}{\alpha^2+1} \int_0^\alpha \left( \frac{x+\alpha}{1+x^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha x} \right) dx + \frac{\log(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} \\ &= \frac{1}{\alpha^2+1} \left[ \frac{1}{2} \log(1+x^2) + \alpha \arctan(x) - \log(1+\alpha x) \right]_0^\alpha + \frac{\log(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} \\ &= -\frac{\log(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)} + \frac{\alpha \arctan \alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\log(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} \\ &= \frac{\alpha \arctan \alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\log(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}. \end{aligned}$$

Wir haben somit

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\alpha \arctan \alpha}{1+\alpha^2} d\alpha + \int_0^\alpha \frac{\log(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)} d\alpha + C.$$

Wir greifen zur partiellen Integration, um das erste Integral zu bestimmen

$$\int_0^\alpha \frac{\alpha \arctan \alpha}{1+\alpha^2} d\alpha = \int_0^\alpha \underbrace{\frac{\alpha}{1+\alpha^2}}_{\uparrow} \underbrace{\arctan \alpha}_{\downarrow} d\alpha = \frac{1}{2} \log(1+\alpha^2) \arctan(\alpha) - \frac{1}{2} \int_0^\alpha \frac{\log(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} d\alpha.$$

Mit der partiellen Integration haben wir genau das zweite Integral mit einem Minus-Vorzeichen bekommen. Diese zwei kürzen sich also weg, sodass sich folgendes ergibt:

$$F(\alpha) = \frac{1}{2} \log(1+\alpha^2) \arctan(\alpha) + C.$$

Ferner müssen wir die Integrationskonstante  $C$  bestimmen. Zu diesem Zweck werten wir  $F(\alpha)$  an der Stelle  $\alpha = 0$  aus

$$F(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} \log(1+0) \arctan(0) + C = C.$$

Also  $C = 0$ . Mit  $\alpha = 1$  finden wir den Wert des gesuchten Integrals

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \log(2).$$



### 10.3 Uneigentliche Parameterintegrale

Wir wollen nun die Resultate der vorigen Abschnitte auf uneigentliche Integrale übertragen, also auf Integrale der Form

$$\int_a^\infty f(t, x) dx \equiv \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t, x) dx$$

(eine Grenze ist  $\infty$ ) oder

$$\int_a^b f(t, x) dx \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(t, x) dx$$

(die Funktion  $f$  ist bei  $b$  nicht stetig). Natürlich kann man nicht erwarten, dass man die Aussagen von Satz 10.1.1 und 10.2.1 eins zu eins übertragen kann, denn man muss immer auf die Konvergenz der Integrale achten. Falls aber zusätzliche Voraussetzungen erfüllt sind, gelten analoge Resultate auch für uneigentliche Parameterintegrale.

**Satz 10.3.1 (Uneigentliche Parameterintegrale)** Seien  $f(t, x)$  und  $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$  stetig auf  $[c, d] \times [a, b]$  mit  $b \in \mathbb{R}$  oder  $b = \infty$  und es gibt stetig partiell nach  $t$  differenzierbare positive Funktionen  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit

- $|f(t, x)| \leq g(x)$  und  $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq h(x)$  für alle  $(t, x) \in [c, d] \times [a, b]$

- Die Integrale

$$\int_a^b g(x) dx \quad \text{und} \quad \int_a^b h(x) dx$$

konvergieren.

Dann ist

$$F(t) = \int_a^b f(t, x) dx$$

für alle  $t \in [c, d]$  differenzierbar und es gilt

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx.$$

Ein sehr beliebtes Beispiel zur Anwendung dieses Satzes ist die Berechnung der Fourier-Transformierten der Gauss-Funktion  $e^{-x^2}$ . Im Allgemeinen ist die Fourier-Transformierte einer integrierbaren, stetigen Funktion  $f$  durch

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

definiert. In unserem Fall müssen wir somit folgendes Integral

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} dx$$

berechnen. Offensichtlich ist die Fourier-Transformierte von  $f$  als uneigentliches Parameterintegral definiert. Wir prüfen, dass die Voraussetzungen des Satzes 10.3.1 erfüllt sind. Die Funktion  $f(k, x) = e^{-x^2} e^{-ikx}$  ist eine  $C^1$ -Funktion. Da  $|e^{-ikx}| = 1$  ist, gilt

$$|f(k, x)| = |e^{-x^2} e^{-ikx}| \leq e^{-x^2} =: g(x)$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial k}(k, x) \right| = |-ixe^{-x^2} e^{-ikx}| \leq xe^{-x^2} =: h(x).$$

Die uneigentlichen Integrale  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  und  $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx = 0$  konvergieren. Die Voraussetzungen des Satzes 10.3.1 sind mit  $g(x) = e^{-x^2}$  und  $h(x) = xe^{-x^2}$  erfüllt. Um die Funktion  $\hat{f}(k)$  zu berechnen, betrachten wir die Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}(k)}{dk} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{\partial}{\partial k} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (-ix) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} e^{-x^2} \right) e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

Mit einer partiellen Integration finden wir

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}(k)}{dk} &= \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-x^2} e^{-ikx} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} e^{-ikx} \right) dx \\ &= -\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (-ik) e^{-ikx} dx = -\frac{k}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} dx \\ &= -\frac{k}{2} \hat{f}(k). \end{aligned}$$

Die Funktion  $\hat{f}(k)$  erfüllt somit die Differenzialgleichung

$$\frac{d\hat{f}(k)}{dk} = -\frac{k}{2} \hat{f}(k) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d\hat{f}(k)}{\hat{f}(k)} = -\int \frac{k}{2} dk \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(k) = \hat{f}(0) e^{-\frac{k^2}{4}}.$$

Wir müssen nun nur  $\hat{f}(0)$  bestimmen. Dies geht sehr schnell

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-0} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Schlussendlich gilt

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2}{4}}.$$

**Beispiel 10.3.1 • o o** Berechne  $\int_0^{\infty} xe^{-\alpha x} dx$  für alle  $\alpha > 0$  mithilfe der Formel für Parameterintegrale.

**Lösung:** Zuerst bemerken wir, dass  $\frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-\alpha x} = -xe^{-\alpha x}$  gilt. Die Idee ist also, das Integral als Ableitung nach  $\alpha$  von  $J(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx$  zu schreiben.  $J(\alpha)$  existiert und ist nach  $\alpha$  differenzierbar,

da die Funktionen  $f(\alpha, x) = e^{-\alpha x}$  und  $\partial_\alpha f(\alpha, x) = -xe^{-\alpha x}$  auf  $(0, \infty) \times [0, \infty)$  stetig sind und die folgenden Abschätzungen gelten: Für alle  $x \geq 1$  und alle  $\varepsilon > 0$  mit  $\alpha \geq \varepsilon$  gilt

$$\begin{aligned}|f(\alpha, x)| &= |e^{-\alpha x}| \leq e^{-\varepsilon x} =: g(x) \\ \left| \frac{\partial f(\alpha x)}{\partial \alpha} \right| &= |-xe^{-\alpha x}| \leq xe^{-\varepsilon x} =: h(x)\end{aligned}$$

und die Integrale  $\int_1^\infty g(x) dx$  und  $\int_1^\infty h(x) dx$  konvergieren (Beachte:  $f(\alpha, x)$  ist auf dem Intervall  $[0, 1]$  nicht problematisch. Das einzige Problem liegt an der Grenze  $\infty$ . Somit spielt es keine Rolle, wenn die Abschätzungen mit  $g(x)$  und  $h(x)$  auf dem ganzen Intervall  $[0, \infty)$  gelten oder nur auf einem Teil davon, z.B.  $[1, \infty)$ ). Somit sind die Bedingungen des Satzes 10.3.1 erfüllt und bei der Benutzung der Formel für Parameterintegrale finden wir

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xe^{-\alpha x} dx &= - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-\alpha x} dx = - \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx \\ &= - \frac{d}{d\alpha} \left[ -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^\infty = - \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha^2}.\end{aligned}$$

■

**Beispiel 10.3.2 ••• Berechne  $\int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + \alpha^2)^2} dx$  für alle  $\alpha \neq 0$ .**

**Lösung:** Zuerst bemerken wir, dass  $\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{x^2 + \alpha^2} = \frac{-2\alpha}{(x^2 + \alpha^2)^2}$  gilt. Die Idee ist, unser Integral als Ableitung von  $I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha}$  zu schreiben. Dieses Integral existiert als uneigentliches Integral und ist nach  $\alpha$  differenzierbar, weil  $f(\alpha, x) = \frac{1}{x^2 + \alpha^2}$  und  $\partial_\alpha f(\alpha, x)$  stetig auf  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  sind und folgende Abschätzung gilt. Für alle  $x \geq 1$  gilt

$$\begin{aligned}|f(\alpha, x)| &= \left| \frac{1}{x^2 + \alpha^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} =: g(x) \\ \left| \frac{\partial f(\alpha, x)}{\partial \alpha} \right| &= \left| \frac{-1}{(x^2 + \alpha^2)^2} \right| \leq \frac{1}{x^4} =: h(x)\end{aligned}$$

und die Integrale  $\int_1^\infty g(x) dx$  und  $\int_1^\infty h(x) dx$  konvergieren (Beachte:  $f(\alpha, x)$  ist auf dem Intervall  $[0, 1]$  nicht problematisch. Das einzige Problem liegt an der Grenze  $\infty$ . Somit spielt es keine Rolle, wenn die Abschätzungen mit  $g(x)$  und  $h(x)$  auf dem ganzen Intervall  $[0, \infty)$  gelten oder nur auf einem Teil davon, z.B.  $[1, \infty)$ ). Somit sind die Bedingungen des Satzes 10.3.1 erfüllt und bei der Benutzung der Formel für Parameterintegrale finden wir

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + \alpha^2)^2} dx &= - \frac{1}{2\alpha} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{x^2 + \alpha^2} dx = - \frac{1}{2\alpha} \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + \alpha^2} dx \\ &= - \frac{1}{2\alpha} \frac{d}{d\alpha} \left[ \frac{1}{\alpha} \arctan(x/\alpha) \right]_0^\infty = - \frac{1}{2\alpha} \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\pi}{2\alpha} \right) = \frac{\pi}{4\alpha^3}.\end{aligned}$$

■

**Beispiel 10.3.3 ••• Berechne  $\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx$  für  $\alpha > 0$ .**

**Lösung:** Wir bemerken zuerst, dass

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-\alpha x^2} = -x^2 e^{-\alpha x^2}$$

gilt. Wir führen also unser Integral auf  $K(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$  zurück. Die Funktionen  $f(\alpha, x) = e^{-\alpha x^2}$  und  $\partial_\alpha f(\alpha, x) = -x^2 e^{-\alpha x^2}$  erfüllen die Voraussetzungen des Satzes 10.3.1. Somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-\alpha x^2} dx = - \frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = - \frac{d}{d\alpha} \left( \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}}.$$

■

**Beispiel 10.3.4 ••• Berechne  $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .**

**Lösung:** Für  $n$  ungerade ist das Integral offensichtlich Null, weil der Integrand eine ungerade Funktion und das Integrationsintervall um  $x = 0$  symmetrisch ist. Falls  $n$  gerade ist ( $n = 2m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ) gilt

$$\frac{\partial^m}{\partial \alpha^m} e^{-\alpha x^2} = (-1)^m x^{2m} e^{-\alpha x^2}.$$

Also

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} e^{-\alpha x^2} dx &= (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^m}{\partial \alpha^m} e^{-\alpha x^2} dx = (-1)^m \frac{d^m}{d\alpha^m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \\ &= (-1)^m \frac{d^m}{d\alpha^m} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = (-1)^m (-1)^m \sqrt{\pi} \frac{1}{2} \frac{d^{m-1}}{d\alpha^{m-1}} \alpha^{-3/2} \\ &= (-1)^2 (-1)^m \sqrt{\pi} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \dots \frac{d^{m-2}}{d\alpha^{m-2}} \alpha^{-5/2} = \dots = \dots \\ &= (-1)^m \sqrt{\pi} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \dots \frac{2m-1}{2} (-1)^m \\ &= \sqrt{\pi} \frac{(2m-1)!!}{2^m}. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 10.3.5 ••• Berechne  $\int_0^{\infty} x e^{-ax} \cos x dx$  für alle  $a > 0$ . Hinweis: Betrachte das Integral  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos x dx = \frac{a}{a^2+1}$ .**

**Lösung:** Wir bemerken zuerst, dass

$$\frac{\partial}{\partial a} e^{-ax} \cos x = -x e^{-ax} \cos x$$

gilt. Die Idee ist somit, dass wir  $\int_0^{\infty} x e^{-ax} \cos x dx$  als Ableitung von  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos x dx = \frac{a}{a^2+1}$  schreiben. Die Voraussetzungen des Satzes 10.3.1 sind erfüllt und wir haben

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-ax} \cos x dx &= - \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} e^{-ax} \cos x dx = - \frac{d}{da} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos x dx \\ &= - \frac{d}{da} \left( \frac{a}{a^2+1} \right) = \frac{a^2-1}{(a^2+1)^2}. \end{aligned}$$

**Beispiel 10.3.6** ••• Berechne  $\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$  für alle  $a > 0$ . Hinweis: Betrachte das Integral  $\int_0^\infty e^{-ax} \sin x dx = \frac{1}{a^2+1}$ .

**Lösung:** Die Voraussetzungen des Satzes 10.3.1 sind erfüllt. Wir können somit den Ausdruck  $F(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$  nach  $a$  differenzieren

$$\frac{dF(a)}{da} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx = - \int_0^\infty e^{-ax} \sin x dx = - \frac{1}{a^2+1}.$$

Somit

$$\frac{dF(a)}{da} = - \frac{1}{a^2+1} \Rightarrow F(a) = -\arctan a + C.$$

Wir müssen nur noch die Integrationskonstante bestimmen. Dazu betrachten wir den Limes  $a \rightarrow \infty$ . Es gilt

$$|F(a)| = \left| \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx \right| \stackrel{\Delta-\text{Ungl.}}{\leq} \int_0^\infty \left| e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right| dx \stackrel{|\frac{\sin x}{x}| \leq 1}{\leq} \int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a} \rightarrow 0.$$

Somit geht  $F(a)$  nach 0 für  $a \rightarrow \infty$ . Wir haben somit die Bedingung

$$\lim_{a \rightarrow \infty} F(a) = -\lim_{a \rightarrow \infty} \arctan(a) + C \Rightarrow 0 = -\frac{\pi}{2} + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2},$$

welche das gewünschte Resultat liefert

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \arctan a.$$

Insbesondere erhalten wir für  $a = 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

**Beispiel 10.3.7** ••• Berechne  $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2\alpha x) dx$ .

**Lösung:** Das Integral  $I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2\alpha x) dx$  existiert als uneigentliches Parameterintegral und ist nach  $\alpha$  differenzierbar, da die Voraussetzungen des Satzes 10.3.1 erfüllt sind.

Anstatt  $I(\alpha)$  selbst zu bestimmen, berechnen wir seine Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} &= \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \cos(2\alpha x) dx = \int_0^\infty e^{-x^2} (-2x) \sin(2\alpha x) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} (e^{-x^2}) \sin(2\alpha x) dx. \end{aligned}$$

Mit einer partiellen Integration

$$\begin{aligned}\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}(e^{-x^2}) \sin(2\alpha x) dx \\ &= \underbrace{\left[ e^{-x^2} \sin(2\alpha x) \right]_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{\partial}{\partial x}(\sin(2\alpha x)) dx \\ &= - \int_0^\infty e^{-x^2} 2\alpha \cos(2\alpha x) dx = -2\alpha I(\alpha).\end{aligned}$$

Wir haben somit eine Differenzialgleichung für unser Integral  $I(\alpha)$  gefunden

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = -2\alpha I(\alpha) \Rightarrow \int \frac{dI(\alpha)}{I(\alpha)} = -\int 2\alpha d\alpha \Rightarrow I(\alpha) = I(0)e^{-\alpha^2}.$$

Wir müssen nur noch  $I(0)$  bestimmen

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(0) dx = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Somit

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2\alpha x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2}.$$

■

**Beispiel 10.3.8 ••• Benutze das vorige Resultat, um**

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \frac{\sin(2zx)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{erf}(z)$$

zu zeigen. Hier ist  $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy$  die sog. Fehlerfunktion. (Tipp: Satz von Fubini)

**Lösung:** Wir haben in dem vorigen Beispiel

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2\alpha x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2}$$

gefunden. Wir integrieren das Resultat zwischen 0 und  $z$

$$\int_0^z d\alpha \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2\alpha x) dx = \int_0^z \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Die rechte Seite ist gleich

$$\int_0^z \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{4} \operatorname{erf}(z).$$

Für die linke Seite benutzen wir den Satz von Fubini (siehe Kapitel 11), um die Integrale zu vertauschen

$$\int_0^z d\alpha \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2\alpha x) dx = \int_0^\infty dx \int_0^z e^{-x^2} \cos(2\alpha x) d\alpha = \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{\sin(2zx)}{2x} dx.$$

Dies liefert genau das gewünschte Resultat

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \frac{\sin(2zx)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{erf}(z).$$

■

**Beispiel 10.3.9 ••• Berechne  $\int_0^\infty \frac{\log(1+\alpha^2 x^2)}{1+x^2} dx$ .**

**Lösung:** Das Integral  $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\log(1+\alpha^2 x^2)}{1+x^2} dx$  ist definiert und nach  $\alpha$  differenzierbar. Anstatt  $F(\alpha)$  zu betrachten, betrachten wir seine Ableitung

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\log(1+\alpha^2 x^2)}{1+x^2} dx = \int_0^\infty \frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2 x^2)} dx.$$

Dies ist ein Integral einer rationalen Funktion und der Grad unten ist grösser als der Grad oben. Wir machen somit eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2 x^2)} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\alpha^2 x^2} \right).$$

Wir haben somit

$$\begin{aligned} \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} &= \int_0^\infty \frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2 x^2)} dx \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \int_0^\infty \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\alpha^2 x^2} \right) dx \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \left[ \arctan(x) - \frac{1}{\alpha} \arctan(\alpha x) \right]_0^\infty = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{\pi}{\alpha + 1}. \end{aligned}$$

Wir haben einen Ausdruck für die Ableitung unseres Integrals gefunden. Integrieren wir das Ergebnis, so finden wir

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\pi}{\alpha + 1} \Rightarrow F(\alpha) = \pi \log(1 + \alpha) + C.$$

Um die Integrationskonstante  $C$  zu bestimmen, werten wir  $F(\alpha)$  bei  $\alpha = 0$  aus

$$F(0) = 0 \Rightarrow 0 = \pi \log(0 + 1) + C = C.$$

Also

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+\alpha^2 x^2)}{1+x^2} dx = \pi \log(1 + \alpha).$$

■

**Beispiel 10.3.10 ••• Berechne  $\int_0^\infty e^{-ax^2-b/x^2} dx$  für alle  $a, b > 0$ .**

**Lösung:** Wir haben in diesem Fall ein Parameterintegral mit zwei Parametern  $a$  und  $b$ ,

$$I(a, b) = \int_0^\infty e^{-ax^2-b/x^2} dx$$

aber das Prinzip ist das gleiche, wie im Falle eines einzelnen Parameters. Wir leiten nach  $b$  ab

$$\frac{\partial I(a, b)}{\partial b} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial b} e^{-ax^2 - b/x^2} dx = - \int_0^\infty \frac{1}{x^2} e^{-ax^2 - b/x^2} dx.$$

Um  $\frac{1}{x^2}$  zu eliminieren, machen wir die Substitution  $y = \frac{1}{x} \Rightarrow dy = -\frac{1}{x^2} dx$ . Wir haben somit

$$\frac{\partial I(a, b)}{\partial b} = - \int_0^\infty \frac{1}{x^2} e^{-ax^2 - b/x^2} dx = \int_\infty^0 e^{-a/y^2 - by^2} dy = - \int_0^\infty e^{-a/y^2 - by^2} dy.$$

Wir haben nun ein Integral, das fast so aussieht wie  $I(a, b)$ , nur dass die Rollen von  $a$  und  $b$  vertauscht sind. Wir führen eine weitere Substitution durch:  $z = \sqrt{\frac{b}{a}}y \Rightarrow dy = \sqrt{\frac{a}{b}}dz$ . Somit

$$\frac{\partial I(a, b)}{\partial b} = - \int_0^\infty e^{-a/y^2 - by^2} dy = - \sqrt{\frac{a}{b}} \int_0^\infty e^{-az^2 - b/z^2} dz = - \sqrt{\frac{a}{b}} I(a, b).$$

Wir haben also eine Differenzialgleichung für  $I(a, b)$  gefunden

$$\frac{\partial I(a, b)}{\partial b} = - \sqrt{\frac{a}{b}} I(a, b) \quad \Rightarrow \quad I(a, b) = I(a, 0) e^{-2\sqrt{ab}}.$$

Wir müssen nur noch  $I(a, 0)$  bestimmen

$$I(a, 0) = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Schlussendlich

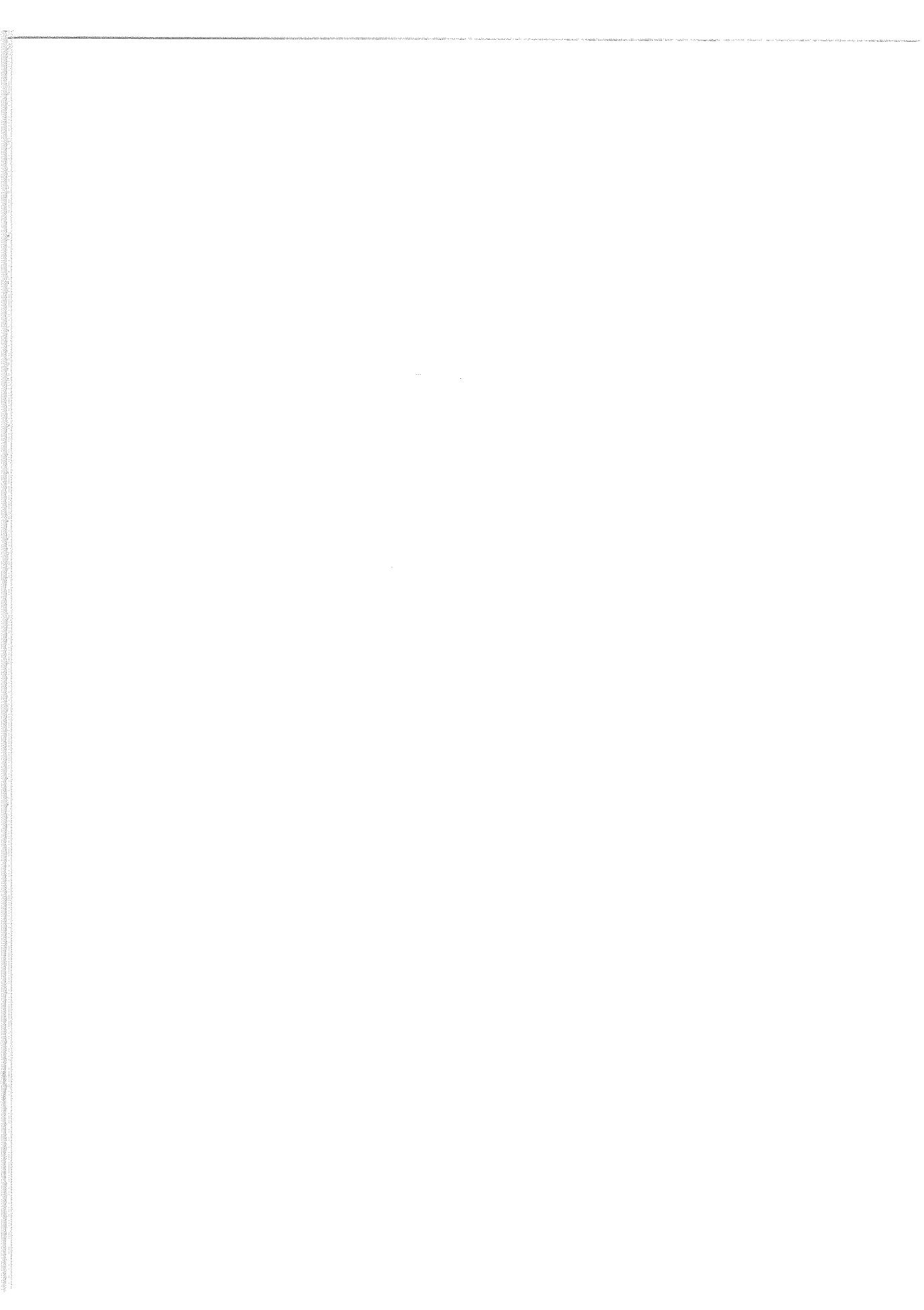
$$\int_0^\infty e^{-ax^2 - b/x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}.$$

■



## Teil II

# Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

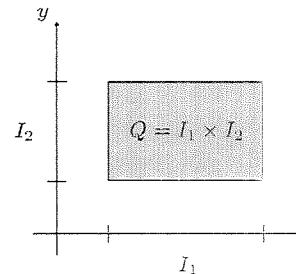


## Kapitel 11

# Integration auf Quadern und der Satz von Fubini

### 11.1 Integration auf Quadern in $\mathbb{R}^2$

Der einfachste Integralbegriff in mehreren Dimensionen sind Integrale auf Quadern. Ein **Quader** in  $\mathbb{R}^2$  ist nichts Anderes als ein Produkt von zwei (offenen, abgeschlossenen oder halboffenen) Intervallen, also ein Rechteck. Zum Beispiel sind  $Q = [0, 2] \times [0, 1]$  und  $Q = (2, 4) \times (0, \log(3))$  zwei Quadern in  $\mathbb{R}^2$ .



Der **Elementarinhalt** eines Quaderns lässt sich auf die natürlichste Art und Weise erklären. Für  $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  ist

$$\mu(Q) = \int_Q d\mu(x, y) =: (b_2 - a_2) \cdot (b_1 - a_1).$$

Zum Beispiel:  $\mu([0, 2] \times [0, 1]) = (2 - 0) \cdot (1 - 0) = 2$  und  $\mu((2, 4) \times (0, \log(3))) = (4 - 2) \cdot (\log(3) - 0) = 2 \log(3)$ . Da eine aus einem einzelnen Punkt bestehende Menge  $\{a\}$  eine Nullmenge ist, also Mass Null hat, macht es keinen Unterschied, ob die Intervalle offen, abgeschlossen oder halb-offen sind: Der Elementarinhalt (resp. das Integral) ergibt dasselbe Resultat!

Es sei jetzt  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  eine vorgegebene stetige Funktion, welche auf einem Quader  $Q$

definiert ist und Werte in  $\mathbb{R}$  annimmt. Dann wird das Integral

$$\int_Q f(x, y) d\mu(x, y)$$

als Limes von Riemannschen Summen erklärt, wie im eindimensionalen Fall. In der Praxis benötigen wir aber eine allgemeine Methode, um derartige Integrale effizient zu berechnen, wenn  $f$  ein Ausdruck in den Variablen  $x, y$  ist und  $Q$  als Quader gegeben ist. Dazu dient der *Satz von Fubini*, der in einer seiner einfachsten Formen so lautet

**Satz 11.1.1 (Satz von Fubini in  $\mathbb{R}^2$ )** Es seien der Quader  $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  und  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \in C^0(\bar{Q})$  gegeben. Dann gilt

$$\int_Q f(x, y) d\mu(x, y) = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy f(x, y).$$

In dieser Schreibweise werden Integrale von innen nach aussen ausgewertet, d.h. zuerst das Integral über  $y$  und dann das Integral über  $x$ . In diesem Fall spielt die Reihenfolge der Integration keine Rolle. Aus Symmetriegründen können wir nämlich auch zuerst über  $x$  und dann über  $y$  integrieren, ohne das Endresultat zu ändern

$$\int_Q f(x, y) d\mu(x, y) = \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} dx f(x, y).$$

Die Aufgabe, eine vorgelegte stetige Funktion  $f$  auf einem Quader zu integrieren, besteht also einfach darin, zwei hintereinander geschaltete Integrale zu bestimmen, bei denen jedes Mal nur eine Variable betroffen ist und alle anderen als Konstanten zu betrachten sind.

Als Beispiel wollen wir das Integral

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 y^2}} d\mu(x, y)$$

bestimmen. Um das gegebene Integral zu berechnen, wenden wir den Satz von Fubini an

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 y^2}} d\mu(x, y) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 y^2}}.$$

Wir haben somit zwei hintereinander geschaltete eindimensionale Integrale zu bestimmen. Es wird zuerst das “innere” Integral bestimmt. Dabei wird über  $y$  integriert und  $x$  als eine Zahl betrachtet

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 y^2}} d\mu(x, y) &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 y^2}} = \int_0^1 dx \left[ -\frac{\sqrt{4 - x^2 y^2}}{x^2} \right]_0^1 \\ &= \int_0^1 \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Wir bleiben nun mit einem Integral über  $x$ , das wir direkt auswerten können. Mit einer partiellen Integration bekommen wir<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{y}{\sqrt{4-x^2}y^2} d\mu(x,y) &= \int_0^1 \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx = \int_0^1 \left[ \frac{1}{x^2} \right] \cdot \left[ \frac{\downarrow}{(2-\sqrt{4-x^2})} \right] dx \\ &= \left[ -\frac{1}{x} (2-\sqrt{4-x^2}) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \sqrt{3} - 2 + \left[ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^1 = \sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Die andere Integrationsreihenfolge liefert dasselbe Resultat,

$$\begin{aligned}\int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{y}{\sqrt{4-x^2}y^2} d\mu(x,y) &= \int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{y}{2\sqrt{1-(xy/2)^2}} = \int_0^1 dy \left[ \arcsin\left(\frac{xy}{2}\right) \right]_0^1 \\ &= \int_0^1 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) dy = \left[ y \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) - \sqrt{4-y^2} \right]_0^1 \\ &= \sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

aber der Rechenaufwand ist definitiv kleiner geworden. Dieses Beispiel zeigt, wie eine Umkehrung in der Integrationsreihenfolge (welche in diesem Kontext keine Rolle spielt) mit einem Schlag ganz anders aussehen kann. Wir lernen daraus, dass es eine gute Idee ist, jedes Mal daran zu denken, in welcher Reihenfolge die Integrale am besten zu berechnen sind. In anderen Worten: "Wähle die beste Integrationsreihenfolge!"

**Beispiel 11.1.1 • •**  $\int_{[0,1] \times [0,\pi/2]} y \sin(xy) d\mu(x,y)$

**Lösung:** Nach dem Satz von Fubini müssen wir zwei eindimensionale Integrale berechnen

$$\int_{[0,1] \times [0,\pi/2]} y \sin(xy) d\mu = \int_0^1 dx \int_0^{\pi/2} dy y \sin(xy).$$

Am einfachsten ist das Integral über  $x$  (wenn wir nach  $y$  integrieren würden, müssten wir eine partielle Integration durchführen...). Somit kehren wir einfach die Reihenfolge der Integration um und bekommen

$$\begin{aligned}\int_{[0,1] \times [0,\pi/2]} y \sin(xy) d\mu &= \int_0^{\pi/2} dy \int_0^1 dx y \sin(xy) = \int_0^{\pi/2} dy [-\cos(xy)]_0^1 \\ &= \int_0^{\pi/2} dy (1 - \cos y) = [y - \sin y]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Für die untere Grenze bei der partiellen Integration benutzen wir Taylor ( $\sqrt{1+a} = 1 + a/2 + \dots$ ) um den Grenzwert zu bestimmen:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-(x/2)^2}}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-1+x^2/8+\dots}{x} = 0$ .

■

**Beispiel 11.1.2 •••**  $\int_{[0,1]^2} x^{y+1} d\mu(x, y)$

Lösung: Nach dem Satz von Fubini

$$\int_{[0,1]^2} x^{y+1} d\mu = \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{y+1}.$$

Am besten integriert man zuerst über  $x$ . Wir kehren somit die Integrationsreihenfolge um und bekommen

$$\int_{[0,1]^2} x^{y+1} d\mu = \int_0^1 dy \int_0^1 dx x^{y+1} = \int_0^1 dy \left[ \frac{x^{y+2}}{y+2} \right]_0^1 = \int_0^1 \frac{1}{y+2} dy = [\log(y+2)]_0^1 = \log\left(\frac{3}{2}\right).$$

Bemerke, dass die Rechnung komplizierter wird, wenn man die Reihenfolge der Integration umkehrt!

■

**Beispiel 11.1.3 •••**  $\int_{[0,1] \times [1,2]} \frac{1}{(1+x+y)^2} d\mu(x, y).$

Lösung: Nach dem Satz von Fubini

$$\int_{[0,1] \times [1,2]} \frac{1}{(1+x+y)^2} d\mu(x, y) = \int_0^1 dx \int_1^2 dy \frac{1}{(1+x+y)^2}.$$

Wir haben somit zwei hintereinander geschaltete eindimensionale Integrale zu bestimmen. Es wird zuerst das innere Integral bestimmt. Dabei wird über  $y$  integriert und  $x$  als eine Zahl betrachtet

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [1,2]} \frac{1}{(1+x+y)^2} d\mu(x, y) &= \int_0^1 dx \int_1^2 dy \frac{1}{(1+x+y)^2} = \int_0^1 dx \left[ -\frac{1}{1+x+y} \right]_1^2 \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} \right) dx. \end{aligned}$$

Wir bleiben nun mit einem Integral über  $x$ , das wir direkt auswerten können

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [1,2]} \frac{1}{(1+x+y)^2} d\mu(x, y) &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} \right) dx = [\log(x+2) - \log(x+3)]_0^1 \\ &= \log(3) - \log(2) - \log(4) + \log(3) = \log\left(\frac{9}{8}\right). \end{aligned}$$

■

**Beispiel 11.1.4 •••**  $\int_{[0,1] \times [1,2]} \sqrt{x+y} d\mu(x, y)$

**Lösung:** Nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\int_{[0,1] \times [1,2]} \sqrt{x+y} d\mu &= \int_0^1 dx \int_1^2 dy \sqrt{x+y} = \int_0^1 dx \frac{2}{3} [(x+y)^{3/2}]_1^2 \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 dx \left( (x+2)^{3/2} - (x+1)^{3/2} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \left[ (x+2)^{5/2} - (x+1)^{5/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{15} (3^{5/2} - 2^{7/2} + 1).\end{aligned}$$

■

**Beispiel 11.1.5 ••○**

$$\int_{[1,2] \times [2,3]} \frac{1}{1+(x+y)^2} d\mu(x,y)$$

**Lösung:** Um das gegebene Integral zu berechnen, wenden wir den Satz von Fubini an

$$\int_{[1,2] \times [2,3]} \frac{1}{1+(x+y)^2} d\mu(x,y) = \int_1^2 dx \int_2^3 dy \frac{1}{1+(x+y)^2}.$$

Wir haben somit zwei hintereinander geschaltete eindimensionale Integrale zu bestimmen. Es wird zuerst das innere Integral bestimmt. Dabei wird über  $y$  integriert und  $x$  als eine Zahl betrachtet

$$\begin{aligned}\int_{[1,2] \times [2,3]} \frac{1}{1+(x+y)^2} d\mu(x,y) &= \int_1^2 dx \int_2^3 dy \frac{1}{1+(x+y)^2} = \int_1^2 dx [\arctan(x+y)]_2^3 \\ &= \int_1^2 (\arctan(x+3) - \arctan(x+2)) dx.\end{aligned}$$

Wir bleiben nun mit einem Integral über  $x$ , das wir direkt auswerten können

$$\begin{aligned}\int_1^2 (\arctan(x+3) - \arctan(x+2)) dx &= \left[ (x+3) \arctan(x+3) - \frac{1}{2} \log(1+(x+3)^2) \right]_1^2 \\ &\quad - \left[ (x+2) \arctan(x+2) - \frac{1}{2} \log(1+(x+2)^2) \right]_1^2 \\ &= 3 \arctan(3) - 8 \arctan(4) + 5 \arctan(5) + \frac{1}{2} \log\left(\frac{289}{260}\right).\end{aligned}$$

■

**Beispiel 11.1.6 ••○** Wir haben gelernt: Der Satz von Fubini impliziert, dass bei der Berechnung von Integralen auf Quadern die Integrationsreihenfolge keine Rolle spielt. Betrachte das folgende Integral

$$\int_{[0,1]^2} \frac{x-y}{(x+y)^3} d\mu(x,y).$$

Berechne das Integral auf zwei Arten: 1) Zuerst nach  $y$  und dann nach  $x$  integrieren, 2) zuerst nach  $x$  und dann nach  $y$  integrieren. Was beobachtet man? Ist dies im Widerspruch zu dem Satz von Fubini?

Lösung: 1) Wir wollen

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{x-y}{(x+y)^3}$$

berechnen. Das innere Integral kann man leicht bestimmen ( $x$  ist wie eine Konstante)

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \frac{x-y}{(x+y)^3} &= \int_0^1 dy \frac{2x-(x+y)}{(x+y)^3} = 2x \int_0^1 \frac{dy}{(x+y)^3} - \int_0^1 \frac{dy}{(x+y)^2} \\ &= 2x \left[ \frac{-1}{2(x+y)^2} \right]_0^1 - \left[ \frac{-1}{x+y} \right]_0^1 = 2x \left( \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2(x+1)^2} \right) - \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= -\frac{x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Somit

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{x-y}{(x+y)^3} = \int_0^1 dx \frac{1}{(x+1)^2} = \left[ \frac{-1}{x+1} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

2) Wir wollen nun die andere Reihenfolge betrachten

$$\int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{x-y}{(x+y)^3}.$$

Das innere Integral kann man auch leicht bestimmen ( $y$  ist wie eine Konstante)

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \frac{x-y}{(x+y)^3} &= \int_0^1 dx \frac{(x+y)-2y}{(x+y)^3} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+y)^2} - 2y \int_0^1 \frac{dx}{(x+y)^3} \\ &= \left[ \frac{-1}{x+y} \right]_0^1 - 2y \left[ \frac{-1}{2(x+y)^2} \right]_0^1 = \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) - 2y \left( \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{2(y+1)^2} \right) \\ &= \frac{y}{(y+1)^2} - \frac{1}{y+1} = \frac{-1}{(y+1)^2}. \end{aligned}$$

Somit

$$\int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{x-y}{(x+y)^3} = \int_0^1 dy \frac{-1}{(y+1)^2} = \left[ \frac{1}{y+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Wir beobachten: Die zwei Integrationsreihenfolgen geben unterschiedliche Resultate. In diesem Fall darf der Satz von Fubini nicht angewandt werden. Denn der Integrand  $f(x, y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$  ist an der Stelle  $(x, y) = (0, 0)$  unstetig. Denn mit dem Polarkoordinaten-Trick für zweidimensionale Grenzwerte findet man

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{(x+y)^3} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r(\cos \varphi - \sin \varphi)}{r^3 (\cos \varphi + \sin \varphi)^3} = \infty.$$

Die Voraussetzung  $f \in C^0(\bar{Q})$  ist in diesem Fall nicht erfüllt. ■

**Beispiel 11.1.7 ••• Berechne das Integral**

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Hinweis: Zeige  $1/x = \int_0^\infty e^{-xt} dt$  und benutze den Satz von Fubini.

**Lösung:** Der Trick bei dieser Aufgabe ist, das folgende Integral zu betrachten

$$\int_0^\infty e^{-xt} dt = \left[ -\frac{1}{x} e^{-xt} \right]_0^\infty = \frac{1}{x}.$$

Die Idee ist, den Term  $1/x$  als  $\int_0^\infty e^{-xt} dt$  zu schreiben. Wir bekommen somit ein Doppelintegral, das wir mit dem Satz von Fubini behandeln können.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \sin(x) \left( \int_0^\infty e^{-xt} dt \right) dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty dt \int_0^\infty dx \sin(x) e^{-xt}.$$

Da die Integrationsreihenfolge keine Rolle spielt, integrieren wir zuerst über  $x$ . Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \boxed{\sin(x)} \cdot \boxed{e^{-xt}} dx &= \underbrace{\left[ -\cos(x) e^{-xt} \right]_0^\infty}_{=1} - t \int_0^\infty \cos(x) e^{-xt} dx \\ &= 1 - \underbrace{\left[ t \sin(x) e^{-xt} \right]_0^\infty}_{=0} + t^2 \int_0^\infty \sin(x) e^{-xt} dx \\ \Rightarrow \quad (1+t^2) \int_0^\infty \sin(x) e^{-xt} dx &= 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \sin(x) e^{-xt} dx = \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich somit

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty dt \int_0^\infty dx \sin(x) e^{-xt} = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

■

## 11.2 Integration auf Quadern in $\mathbb{R}^n$

Im Allgemeinen ist ein *Quader*  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein Produkt

$$Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \prod_{j=1}^n I_j$$

von  $n$  Intervallen  $I_j = [a_i, b_i]$ ,  $b_i > a_i$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Natürlich müssen die einzelnen Intervalle nicht notwendigerweise abgeschlossen sein. Im Gegenteil, sie dürfen offen, abgeschlossen oder halb-offen sein, wie zum Beispiel in  $Q = [3, 4] \times (0, 3) \times [1, 2]$ . Der *Elementarinhalt* des Quaders  $Q$  ist gegeben durch

$$\mu(Q) = \int_Q d\mu(x) =: \prod_j |I_j|,$$

wobei  $|I_j| = b_j - a_j$  die Länge des Intervalls  $I_j$  ist. Zum Beispiel:  $\mu([0, 1]^3) = (1 - 0)^3 = 1$  und  $\mu([3, 4] \times (0, 3) \times [1, 2]) = (4 - 3) \cdot (3 - 0) \cdot (2 - 1) = 3$ .

Die mehrdimensionale Version des Satzes von Fubini lautet dann

**Satz 11.2.1 (Satz von Fubini in  $\mathbb{R}^n$ )** Es seien der Quader  $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  und  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \in C^0(\bar{Q})$  gegeben. Dann gilt

$$\int_Q f(x) d\mu(x) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} dx_n f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Auch in diesem Fall spielt die Reihenfolge der Integration keine Rolle: Aus Symmetriegründen gilt zum Beispiel

$$\int_Q f(x) d\mu(x) = \int_{a_n}^{b_n} dx_n \cdots \int_{a_1}^{b_1} dx_1 f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

oder alle anderen möglichen Reihenfolgen.

Die Aufgabe, eine vorgelegte stetige Funktion  $f$  auf einem Quader  $Q \subset \mathbb{R}^n$  zu integrieren, besteht also einfach darin,  $n$  hintereinander geschaltete Integrale zu bestimmen, bei denen jedes Mal nur eine Variable betroffen ist und alle anderen als Konstanten zu betrachten sind.

Als ganz einfaches Beispiel betrachten wir das Integral

$$\int_{[0,1]^3} xy^2 z^3 d\mu(x, y, z).$$

Nach dem Satz von Fubini in  $\mathbb{R}^n$  können wir das gegebene Integral als drei eindimensionale Integrale schreiben

$$\int_{[0,1]^3} xy^2 z^3 d\mu(x, y, z) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz xy^2 z^3.$$

Das Beispiel ist besonders einfach, weil der Integrand als ein Produkt von Termen vor kommt, die nur von einer Variablen abhängen. Wir können somit das Integral als Produkt von eindimensionalen Integralen schreiben

$$\int_{[0,1]^3} xy^2 z^3 d\mu(x, y, z) = \left( \int_0^1 dx x \right) \left( \int_0^1 dy y^2 \right) \left( \int_0^1 dz z^3 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

Wir sagen, das Integral sei *faktorisiert* worden.

**Beispiel 11.2.1**  $\circ \circ \circ \int_{[0,1]^2 \times [-\pi, \pi]} (x^2 + \tanh(x + y^3))^{234} \sin z d\mu(x, y, z)$

**Lösung:** Nach dem Satz von Fubini

$$\int_{[0,1]^2 \times [-\pi, \pi]} (x^2 + \tanh(x + y^3))^{234} \sin z d\mu = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_{-\pi}^{\pi} dz (x^2 + \tanh(x + y^3))^{234} \sin z.$$

Am besten führen wir zuerst die Integration über  $z$  durch und finden sofort

$$\int_{[0,1]^2 \times [-\pi, \pi]} (x^2 + \tanh(x+y^3))^{234} \sin z d\mu = \int_0^1 dx \int_0^1 dy (x^2 + \tanh(x+y^3))^{234} \cdot \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} dz \sin z} = 0.$$

■

**Beispiel 11.2.2** ••◦  $\int_{[0,1]^3} \frac{x(x+y)}{1+z^2} d\mu(x, y, z)$

**Lösung:** Nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^3} \frac{x(x+y)}{1+z^2} d\mu &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{x(x+y)}{1+z^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy x(x+y) [\arctan(z)]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 dx \int_0^1 dy (x^2 + xy) = \frac{\pi}{4} \int_0^1 dx \left[ x^2 y + \frac{xy^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \int_0^1 dx \left( x^2 + \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{7\pi}{48}. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 11.2.3** ••◦  $\int_{[0,\pi]^3} \sin(x+y+z) d\mu(x, y, z)$

**Lösung:** Nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{[0,\pi]^3} \sin(x+y+z) d\mu &= \int_0^\pi dx \int_0^\pi dy \int_0^\pi dz \sin(x+y+z) \\ &= \int_0^\pi dx \int_0^\pi dy [-\cos(x+y+z)]_0^\pi \\ &= \int_0^\pi dx \int_0^\pi dy (\cos(x+y) - \cos(x+y+\pi)) \\ &= \int_0^\pi dx [\sin(x+y) - \sin(x+y+\pi)]_0^\pi \\ &= \int_0^\pi (2\sin(x+\pi) - \sin(x) - \sin(x+2\pi)) dx \\ &= [-2\cos(x+\pi) + \cos x + \cos(x+2\pi)]_0^\pi \\ &= -2\cos(2\pi) + 2\cos(\pi) + \cos(\pi) - \cos(0) + \cos(3\pi) - \cos(2\pi) \\ &= -8. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 11.2.4** ••◦  $\int_{[0,\pi]^n} \sin(x_1 + \dots + x_n) d\mu(x)$

Lösung: Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\int_{[0,\pi]^n} \sin(x_1 + \dots + x_n) d\mu = \int_0^\pi dx_1 \cdots \int_0^\pi dx_n \sin(x_1 + \dots + x_n).$$

Um die Rechnung viel einfacher als im obigem Beispiel zu machen, rechnen wir komplex. Wir sehen den Sinus als Imaginärteil von  $e^{ix}$  aus, d.h.  $\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix})$  und finden

$$\begin{aligned} \int_{[0,\pi]^n} \sin(x_1 + \dots + x_n) d\mu &= \operatorname{Im} \int_{[0,\pi]^n} e^{i(x_1 + \dots + x_n)} d\mu = \operatorname{Im} \int_0^\pi dx_1 \cdots \int_0^\pi dx_n e^{i(x_1 + \dots + x_n)} \\ &= \operatorname{Im} \left( \int_0^\pi e^{ix_1} dx_1 \right) \cdots \left( \int_0^\pi e^{ix_n} dx_n \right) = \operatorname{Im} \left( \int_0^\pi e^{ix} dx \right)^n \\ &= \operatorname{Im} \left( \left[ \frac{e^{ix}}{i} \right]_0^\pi \right)^n = \operatorname{Im} \left( \frac{-2}{i} \right)^n = \operatorname{Im}(2i)^n. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_{[0,\pi]^n} \sin(x_1 + \dots + x_n) d\mu = \operatorname{Im}(2i)^n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade } n = 2m \\ (-1)^m 2^n & n \text{ ungerade } n = 2m+1 \end{cases}.$$

■

**Beispiel 11.2.5** •••  $\int_{[-1,1]^n} (x_1 + \dots + x_n)^2 d\mu(x)$

Lösung: Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\int_{[-1,1]^n} (x_1 + \dots + x_n)^2 d\mu(x) = \int_{-1}^1 dx_1 \cdots \int_{-1}^1 dx_n (x_1 + \dots + x_n)^2.$$

Die Idee ist, das Quadrat  $(x_1 + \dots + x_n)^2$  explizit aufzuschreiben

$$(x_1 + \dots + x_n)^2 = \boxed{\text{Quadrat}} \quad \boxed{\text{Gemischte Terme}} \\ \boxed{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} + \boxed{2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \dots + 2x_{n-1}x_n}.$$

Es gilt dann

$$\int_{[-1,1]^n} (x_1 + \dots + x_n)^2 d\mu(x) = \int_{-1}^1 dx_1 \cdots \int_{-1}^1 dx_n (\boxed{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} + \boxed{2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \dots + 2x_{n-1}x_n}).$$

Die Integrale über die Terme  $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$  ergeben alle dasselbe Resultat, z.B.

$$\int_{-1}^1 dx_1 \cdots \int_{-1}^1 dx_n x_1^2 = \boxed{\left( \int_{-1}^1 dx_1 x_1^2 \right)} \cdot \boxed{\left( \int_{-1}^1 dx_2 \right)} \cdots \boxed{\left( \int_{-1}^1 dx_n \right)} = \frac{2}{3} \cdot \boxed{2 \cdots 2} = \frac{2^n}{3}.$$

Es gibt  $n$  solche Integrale. Diese tragen somit  $n \frac{2^n}{3}$  bei. Weiter geben die Integrale über die gemischten Terme dasselbe Resultat, z.B.

$$\int_{-1}^1 dx_1 \cdots \int_{-1}^1 dx_n x_1 x_2 = \boxed{\left( \int_{-1}^1 dx_1 x_1 \right)} \cdot \boxed{\left( \int_{-1}^1 dx_2 x_2 \right)} \cdots \boxed{\left( \int_{-1}^1 dx_3 \right)} \cdots \boxed{\left( \int_{-1}^1 dx_n \right)} = 0.$$

Somit lautet das Gesamtintegral  $n\frac{2^n}{3}$ . ■

**Beispiel 11.2.6** •••  $\int_{[0,1]^n} (x_1 + \dots + x_n)^2 d\mu(x)$

**Lösung:** Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\int_{[0,1]^n} (x_1 + \dots + x_n)^2 d\mu(x) = \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_n (x_1 + \dots + x_n)^2$$

Die Idee ist, wiederum das Quadrat  $(x_1 + \dots + x_n)^2$  explizit aufzuschreiben

$$(x_1 + \dots + x_n)^2 = \boxed{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} + \boxed{2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \dots + 2x_{n-1}x_n}.$$

Es gilt dann

$$\int_{[0,1]^n} (x_1 + \dots + x_n)^2 d\mu(x) = \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_n (\boxed{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} + \boxed{2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \dots + 2x_{n-1}x_n})$$

Die Integrale über die Terme  $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$  ergeben alle dasselbe Resultat

$$\int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_n x_1^2 = \left( \int_0^1 dx_1 x_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_0^1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdots \left( \int_0^1 dx_n \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \boxed{1 \cdots 1} = \frac{1}{3}.$$

Es gibt  $n$  solche Integrale. Diese tragen somit  $\frac{n}{3}$  bei. Weiter geben die Integrale über die gemischten Termen alle dasselbe Resultat

$$\int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_n 2x_1x_2 = 2 \left( \int_0^1 dx_1 x_1 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_0^1 dx_2 x_2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_0^1 dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \cdots \left( \int_0^1 dx_n \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Es gibt  $\frac{n(n-1)}{2}$  solche Integrale. Diese tragen somit  $\frac{n(n-1)}{4}$ .

Also lautet das Gesamtintegral  $\frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{4}$ . ■



## Kapitel 12

# Integration auf Normalbereichen

Wir haben bereits gelernt, mehrdimensionale Integrale auf Quadern mithilfe des Satzes von Fubini zu berechnen. Leider sind die meisten Bereiche, auf denen man integrieren will, normalerweise komplizierter als Quader. Eine der grössten Schwierigkeiten der Integration im  $\mathbb{R}^n$  ist nicht die praktische Berechnung der Integrale selbst, sondern die Aufstellung dieser Integralen, in anderen Worten eine geeignete Parametrisierung des Gebietes zu finden. Leider gibt es keine feste Regeln bei der Parametrisierung von Gebieten in  $\mathbb{R}^n$ . Am besten schaut man sich viele Beispiele an und wendet das Prinzip *learning by doing* an. Erst wenn man genügend viele Beispiele durchgerechnet hat, beginnt man ein gewisses “Gefühl” für Parametrisierungen zu bekommen. Im Allgemeinen ist es aber so, dass die meisten Probleme, welche in der Praxis vorkommen, sich essentiell mit zwei Methoden lösen lassen: mit der Methode der Normalbereiche oder mit einer geeigneten Substitution. Normalbereiche sind der Gegenstand dieses Kapitels. Die Substitutionsregel wird im nächsten Kapitel behandelt. Wir beginnen mit Normalbereichen in  $\mathbb{R}^2$  (einfacher) und verallgemeinern dann die Resultate auf allgemeine Normalbereiche in  $\mathbb{R}^n$ .

### 12.1 Normalbereiche in $\mathbb{R}^2$

Im Folgenden sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  eine beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ .

$\Omega$  heisst ein *y-Normalbereich*, falls sich  $\Omega$  wie folgt darstellen lässt,<sup>1</sup>

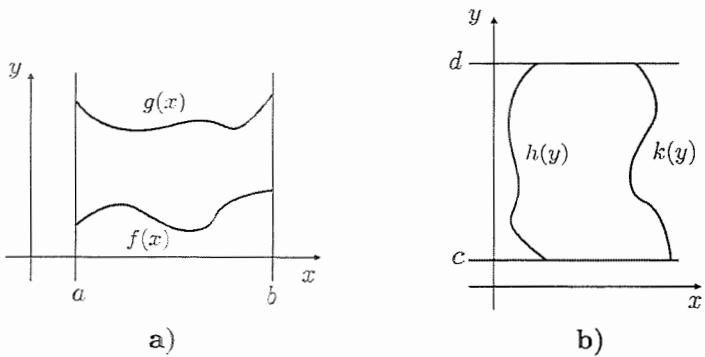
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

wobei  $f, g$  zwei stetige Funktionen der Variablen  $x$  sind. Mit anderen Worten:  $\Omega$  ist ein *y-Normalbereich*, falls zwei Zahlen  $a, b$  und zwei stetige Funktionen  $f, g$  existieren, sodass  $x$  zwischen  $a$  und  $b$  liegt und, für fixes  $x$ , die Variable  $y$  zwischen  $f(x)$  und  $g(x)$  liegt. Entsprechend definiert man einen *x-Normalbereich*, wenn man die Rolle von  $x$  und  $y$  vertauscht

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, h(y) \leq x \leq k(y)\}.$$

---

<sup>1</sup>Weil die aus einem Punkt bestehende Menge eine Nullmenge ist, spielt es keine Rolle ob “ $<$ ” oder “ $\leq$ ” in der Definition vorkommt.



**Abbildung 12.1:** a)  $y$ -Normalbereich: Es gibt zwei Zahlen  $a, b$  und zwei stetige Funktionen  $f, g$ , so dass  $x$  zwischen  $a$  und  $b$  liegt und, für fixes  $x$ ,  $y$  zwischen  $f(x)$  und  $g(x)$  liegt. b)  $x$ -Normalbereich:  $y$  ist zwischen  $c$  und  $d$  und für fixes  $y$  ist  $x$  zwischen  $h(y)$  und  $k(y)$ .

Eine Menge  $\Omega$  als Normalbereich ( $x$ - oder  $y$ -Normalbereich spielt keine grosse Rolle) schreiben zu können, ist im Rahmen der Integrationsrechnung im  $\mathbb{R}^n$  sehr wichtig, denn es gibt eine sehr einfache Formel für Integrale auf Normalbereichen. Der Satz lautet:

**Satz 12.1.1 (Integration auf Normalbereichen ( $\mathbb{R}^2$ ))** Sei

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

mit stetigen Funktionen  $f, g$  und sei  $F \in C^0(\bar{\Omega})$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} F d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy F(x, y).$$

Das Integral wird von innen nach aussen ausgewertet, d.h. zuerst das innere und dann das aussere Integral.

Der Satz ist sozusagen eine Verallgemeinerung des Satzes von Fubini für den Fall, dass  $\Omega$  kein Quader, sondern ein Normalbereich ist. Natürlich gilt der Satz auch für  $x$ -Normalbereiche. In diesem Fall muss man nur die Rolle von  $x$  und  $y$  vertauschen. Für

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, h(y) \leq x \leq k(y)\}$$

gilt

$$\int_{\Omega} F d\mu = \int_c^d dy \int_{h(y)}^{k(y)} dx F(x, y).$$

Das Integral wird immer von innen nach aussen ausgewertet, d.h. zuerst wird das  $x$ - und dann das  $y$ -Integral bestimmt. Die Reihenfolge der Integration spielt in diesem Fall natürlich eine Rolle, denn die inneren Grenzen sind ja Funktionen von  $x$  (resp.  $y$ )!

Um diese einfache Prozedur zu illustrieren, wollen wir den Flächeninhalt der Einheitsdisk in  $\mathbb{R}^2$  bestimmen. Natürlich weiss der Leser schon, dass der Flächeninhalt der Einheitsdisk in  $\mathbb{R}^2$  gerade  $\pi$  beträgt. Trotzdem wollen wir ihn mithilfe von Normalbereichen bestimmen. Dies geschieht wie folgt. Die Einheitsdisk in  $\mathbb{R}^2$  ist folgende Menge

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Der Flächeninhalt von  $\Omega$  ist definiert als das Integral der Funktion 1 auf  $\Omega$ . d.h.

$$\mu(\Omega) = \int_{\Omega} d\mu.$$

Um dieses Integral zu berechnen, versuchen wir  $\Omega$  als Normalbereich zu schreiben. Um das zu machen, wählt man zuerst eine der zwei Variablen aus. sagen wir  $x$ , und “vergisst” die andere. Dies machen wir, um die äussersten Grenzen für  $x$  zu finden. Man bekommt

$$x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

So liegt jetzt  $x$  zwischen zwei Zahlen ( $-1$  und  $1$ ). Nun nimmt man die andere Variable, in diesem Fall  $y$ , und betrachtet die vorige (in diesem Fall  $x$ ) als eine Konstante. Man löst nach  $y$  auf

$$x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow y^2 \leq 1 - x^2 \Rightarrow -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}.$$

Wir haben es geschafft!  $x$  liegt nun zwischen zwei Zahlen ( $-1$  und  $1$ ) und, für fixes  $x$ , liegt  $y$  zwischen zwei Funktionen von  $x$  ( $-\sqrt{1 - x^2}$  und  $\sqrt{1 - x^2}$ ). D.h.  $\Omega$  lässt sich als Normalbereich schreiben

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$

Darum können wir die Formel für Normalbereiche benutzen und finden

$$\begin{aligned} \mu(\Omega) &= \int_{\Omega} d\mu = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \int_{-1}^1 dx [y]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} dx = \left[ x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Wie schon am Anfang erwähnt, ist Integration auf Normalbereichen grundsätzlich nur eine Frage von Übung. Somit beginnen wir sofort weitere Beispiele anzuschauen.

**Beispiel 12.1.1** •◦◦  $\int_{\Omega} e^{-y^2/2} d\mu \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq |y| \leq 1\}.$

**Schritt 1:** Wir müssen zuerst  $\Omega$  als Normalbereich schreiben. Dazu wählen wir eine Variable aus, zum Beispiel  $y$ , und „vergessen“ alle anderen Variablen. Aus  $|y| \leq 1$  folgt  $-1 \leq y \leq 1$ . Dann schauen wir die andere Variable an ( $x$  in diesem Fall), betrachten die vorige ( $y$  in diesem Fall) als eine Konstante und versuchen nach  $x$  aufzulösen. Aus  $|x| \leq |y|$  folgt  $-|y| \leq x \leq |y|$ . Wir haben somit  $\Omega$  als Normalbereich geschrieben

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1, -|y| \leq x \leq |y|\}.$$

**Schritt 2:** Jetzt benutzen wir die Formel für Normalbereiche (12.1.1)

$$\int_{\Omega} e^{-y^2/2} d\mu = \int_{-1}^1 dy \int_{-|y|}^{|y|} dx e^{-y^2/2} = 2 \int_{-1}^1 dy |y| e^{-y^2/2}.$$

Nun haben wir ein Integral einer Funktion welche  $|y|$  enthält. Wie kann man in solchen Situationen vorgehen? Normalerweise trennt man das Integral in zwei Teile (benutze  $|y| = y$  für  $y \geq 0$  und  $|y| = -y$  für  $y < 0$ )

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 dy |y| e^{-y^2/2} &= 2 \int_{-1}^0 dy (-y) e^{-y^2/2} + 2 \int_0^1 dy y e^{-y^2/2} = \\ &= 4 \int_0^1 y e^{-y^2/2} dy = 4 \left[ -e^{-y^2/2} \right]_0^1 = 4(1 - e^{-1/2}). \end{aligned}$$

■

**Beispiel 12.1.2** •◦◦  $\int_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\mu \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x, x < 1\}.$

**Schritt 1:** Wir müssen zuerst  $\Omega$  als Normalbereich schreiben. Dazu wählen wir eine Variable aus, zum Beispiel  $x$ , und „vergessen“ alle anderen Variablen. Aus  $x < 1$  und  $0 \leq x$  folgt  $0 \leq x < 1$ . Dann schauen wir die andere Variable an ( $y$  in diesem Fall), betrachten die vorige ( $x$  in diesem Fall) als eine Konstante. In diesem Fall brauchen wir gar keine Arbeit zu leisten, da  $0 \leq y \leq x$  schon in der richtigen Form steht. Wir haben somit  $\Omega$  als Normalbereich geschrieben

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

**Schritt 2:** Jetzt benutzen wir die Formel für Normalbereiche (12.1.1)

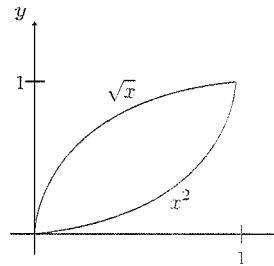
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\mu &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_0^1 dx \left[ \sqrt{x^2 + y^2} \right]_0^x \\ &= \int_0^1 (\sqrt{2}x - x) dx = (\sqrt{2} - 1) \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}. \end{aligned}$$

Wichtige Bemerkung: Da die aus einem Punkt bestehende Menge eine Nullmenge ist (d.h. Mass Null hat), spielt es für die Integration gar keine Rolle, ob ein  $\leq$  oder ein  $<$  in der Definition des Normalbereiches steht. In beiden Fällen benutzt man dieselbe Formel und das Resultat ist dasselbe!

■

**Beispiel 12.1.3** •◦◦  $\int_{\Omega} xy d\mu \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, x \geq y^2\}.$

**Schritt 1:** Wir müssen als Erstes  $\Omega$  als Normalbereich schreiben. Dazu machen wir zuerst eine kleine Skizze der Menge.



Wir betrachten dann eine der zwei Variablen, zum Beispiel  $x$ , und sehen, dass  $x$  zwischen 0 und 1 liegt (das sind die äussersten Grenzen!). Dann betrachten wir  $x$  als eine Konstante und schauen, was mit  $y$  passiert. Aus  $y \geq x^2$  und  $x \geq y^2$  folgt  $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$ . Wir haben somit  $\Omega$  als Normalbereich geschrieben

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

**Schritt 2:** Jetzt benutzen wir die Formel für Normalbereiche (12.1.1)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} xy d\mu &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy xy = \int_0^1 dx x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx = \left[ \frac{x^5}{6} \right]_0^1 - \left[ \frac{x^6}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 12.1.4 •••**  $\int_{\Omega} (x^2 + y^2) d\mu \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$

**Schritt 1:** Wir müssen als Erstes  $\Omega$  als Normalbereich schreiben. Wir betrachten eine der zwei Variablen, zum Beispiel  $x$ , und „vergessen“ die andere ( $y$  in diesem Fall). Aus  $x \geq 0$  und  $x \leq 1$  folgt  $0 \leq x \leq 1$ . Dann betrachten wir  $x$  als eine Konstante und schauen, was mit  $y$  passiert. Aus  $y \geq 0$  und  $x + y \geq 1$  folgt  $0 \leq y \leq 1 - x$ . Wir haben somit  $\Omega$  als Normalbereich geschrieben

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

**Schritt 2:** Jetzt benutzen wir die Formel für Normalbereiche (12.1.1)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (x^2 + y^2) d\mu &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (x^2 + y^2) = \int_0^1 dx \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} \\ &= \int_0^1 \left( x^2 (1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 - \left[ \frac{(1-x)^4}{12} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

**Beispiel 12.1.5** • o o  $\int_{\Omega} \frac{y}{1+x^3} d\mu \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq y \leq 2x \leq 1\}$ .

**Schritt 1:** Wir müssen als Erstes  $\Omega$  als Normalbereich schreiben. Wir betrachten eine der zwei Variablen, zum Beispiel  $x$ , und vergessen die andere ( $y$  in diesem Fall). Aus  $0 \leq x \leq 2x \leq 1$  folgt  $0 \leq x \leq 1/2$ . Dann betrachten wir  $x$  als eine Konstante und schauen, was mit  $y$  passiert. Dies ist aber direkt aus der Definition von  $\Omega$  ablesbar:  $x \leq y \leq 2x$ . Wir haben somit  $\Omega$  als Normalbereich geschrieben

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1/2, x \leq y \leq 2x\}.$$

**Schritt 2:** Jetzt benutzen wir die Formel für Normalbereiche (12.1.1)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{y}{1+x^3} d\mu &= \int_0^{1/2} dx \int_x^{2x} dy \frac{y}{1+x^3} = \int_0^{1/2} dx \frac{\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{2x}}{1+x^3} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{3x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{2} [\log(1+x^3)]_0^{1/2} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{9}{8}\right). \end{aligned}$$

**Beispiel 12.1.6** • o o Mass von  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | |x| + |y| \leq 1\}$ .

**Schritt 1:** Wir müssen als Erstes  $\Omega$  als Normalbereich schreiben. Wir betrachten eine der zwei Variablen, zum Beispiel  $x$ , und vergessen die andere ( $y$  in diesem Fall). Aus  $|x| \leq 1$  folgt  $-1 \leq x \leq 1$ . Dann betrachten wir  $x$  als eine Konstante und schauen, was mit  $y$  passiert. Aus  $|x| + |y| \leq 1$  folgt  $-(1 - |x|) \leq y \leq 1 - |x|$ . Wir haben somit  $\Omega$  als Normalbereich geschrieben

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, -(1 - |x|) \leq y \leq 1 - |x|\}.$$

**Schritt 2:** Jetzt benutzen wir die Formel für Normalbereiche (12.1.1)

$$\begin{aligned} \mu(\Omega) &= \int_{\Omega} d\mu = \int_{-1}^1 dx \int_{-(1-|x|)}^{1-|x|} dy = \int_{-1}^1 dx 2(1 - |x|) \\ &\stackrel{\text{Symmetric}}{=} 4 \int_0^1 (1 - x) dx = 4 \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2. \end{aligned}$$

**Beispiel 12.1.7** • o o Mass von  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \leq 1, |x| \leq 1, x^2 - 1 \leq y\}$ .

**Schritt 1:** Wir müssen als Erstes  $\Omega$  als Normalbereich schreiben. Wir betrachten eine der zwei Variablen, zum Beispiel  $x$ , und vergessen die andere ( $y$  in diesem Fall). Aus  $x \leq 1$ ,  $|x| \leq 1$  und

$x^2 - 1 \leq 0$  folgt  $-1 \leq x \leq 1$ . Dann betrachten wir  $x$  als eine Konstante und schauen, was mit  $y$  passiert. Aus  $x + y \leq 1$  und  $x^2 - 1 \leq y$  folgt  $x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x$ . Wir haben somit  $\Omega$  als Normalbereich geschrieben

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x\}.$$

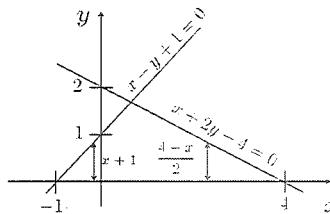
**Schritt 2:** Jetzt benutzen wir die Formel für Normalbereiche (12.1.1)

$$\begin{aligned}\mu(\Omega) &= \int_{\Omega} d\mu = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} dy = \int_{-1}^1 dx (1 - x - x^2 + 1) \\ &= \int_{-1}^1 (2 - x - x^2) dx = \left[ 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = 4 - 0 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}.\end{aligned}$$

■

**Beispiel 12.1.8** •••  $\int_{\Omega} x d\mu \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x - y + 1 \geq 0, x + 2y - 4 \leq 0\}.$

**Schritt 1:** Wir müssen zuerst  $\Omega$  als Normalbereich schreiben. Am besten zeichnen wir die Situation auf.



Aus der Graphik sieht man, dass  $x$  zwischen  $-1$  und  $4$  liegt (äußerste Grenzen) und dass wir für  $y$  zwei Fälle unterscheiden müssen: den Fall, dass  $y$  zwischen der  $x$ -Achse und der Funktion  $x + 1$  liegt und den Fall, dass  $y$  zwischen der  $x$ -Achse und der Funktion  $\frac{4-x}{2}$  liegt. Die zwei Funktionen treffen sich bei  $1 + x = \frac{4-x}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ . Somit schreiben wir

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 + x \text{ wenn } -1 \leq x \leq 2/3 \text{ und } 0 \leq y \leq \frac{4-x}{2} \text{ wenn } 2/3 \leq x \leq 4\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 + x, -1 \leq x \leq 2/3\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{4-x}{2}, 2/3 \leq x \leq 4\} \\ &= \Omega_1 + \Omega_2.\end{aligned}$$

**Schritt 2:** Jetzt benutzen wir die Formel für Normalbereiche (12.1.1) und summieren die Beiträge aus  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} x d\mu &= \int_{-1}^{2/3} dx \int_0^{x+1} dy x + \int_{2/3}^4 dx \int_0^{\frac{4-x}{2}} dy x = \int_{-1}^{2/3} dx (x+1)x + \int_{2/3}^4 dx \frac{4-x}{2} x \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2/3} + \left[ x^2 + \frac{x^3}{6} \right]_{1/2}^4 = \frac{25}{162} + \frac{400}{81} = \frac{275}{54}.\end{aligned}$$

■

**Beispiel 12.1.9 •◦◦**

$$\int_{\Omega} d\mu \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \leq 1\}$$

**Schritt 1:** Wir schreiben  $\Omega$  als Normalbereich. Dazu wählen wir eine Variable aus, z.B.  $x$  und vergessen die andere. Es gilt

$$\sqrt{|x|} \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Dann schauen wir  $y$  an und betrachten  $x$  als eine Konstante

$$\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \leq 1 \Rightarrow |y| \leq (1 - \sqrt{|x|})^2 \Rightarrow -(1 - \sqrt{|x|})^2 \leq y \leq (1 - \sqrt{|x|})^2.$$

Somit haben wir

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, -(1 - \sqrt{|x|})^2 \leq y \leq (1 - \sqrt{|x|})^2\}.$$

**Schritt 2:** Wir benutzen die Formel für Normalbereiche

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d\mu(x, y) &= \int_{-1}^1 dx \int_{-(1-\sqrt{|x|})^2}^{(1-\sqrt{|x|})^2} dy = 2 \int_{-1}^1 (1 - \sqrt{|x|})^2 dx \\ &= 4 \int_0^1 (1 - 2\sqrt{x} + x) dx = 4 \left(1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

■

**12.2 Normalbereiche in  $\mathbb{R}^n$** 

Genauso wie in  $\mathbb{R}^2$  kann man Normalbereiche in  $\mathbb{R}^n$  definieren.  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  heisst Normalbereich, falls sich  $\Omega$  folgendermassen darstellen lässt

$$\begin{aligned} \Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | a \leq x_1 \leq b, f_1(x_1) \leq x_2 \leq g_1(x_1), \dots, \\ f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\} \end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen  $f_i, g_i$ . Für solche Bereiche gilt die Formel

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_a^b dx_1 \int_{f_1(x_1)}^{g_1(x_1)} dx_2 \cdots \int_{f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}^{g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} dx_n.$$

Schauen wir uns einige Beispiele an.

**Beispiel 12.2.1 •◦◦**  $\int_{\Omega} x d\mu \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x+y \leq \sqrt{z}, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}.$

**Schritt 1:** Wir müssen zuerst  $\Omega$  als Normalbereich schreiben. Da  $z$  schon zwischen zwei Zahlen steht ( $0 \leq z \leq 1$ ), ist es sicher mal gut  $z$  als erste Variable zu wählen. Dann schauen wir eine andere Variable an (zum Beispiel  $x$ ), betrachten die vorige ( $z$  in diesem Fall) als eine Konstante und vergessen alle anderen Variablen. Aus  $x \leq \sqrt{z}$  und  $x \geq 0$  folgt  $0 \leq x \leq \sqrt{z}$ . Ferner betrachten wir die verbleibende Variable  $y$  und betrachten die vorigen Variablen ( $x$  und  $z$ ) als Konstanten. Aus  $x+y \leq \sqrt{z}$  und  $y \geq 0$  folgt  $0 \leq y \leq \sqrt{z}-x$ . Wir haben somit  $\Omega$  als Normalbereich geschrieben

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z < 1, 0 \leq x \leq \sqrt{z}, 0 \leq y \leq \sqrt{z}-x\}.$$

**Schritt 2:** Jetzt benutzen wir die Formel für Normalbereiche

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x d\mu &= \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z}} dx \int_0^{\sqrt{z}-x} dy x = \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z}} dx x(\sqrt{z}-x) \\ &= \int_0^1 dz \left[ \sqrt{z} \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{z}} = \int_0^1 dz \frac{z^{3/2}}{6} = \frac{1}{6} \left[ \frac{2}{5} z^{5/2} \right]_0^1 = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 12.2.2** •••  $\int_{\Omega} \frac{1}{2\sqrt{z}} d\mu \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1\}.$

**Schritt 1:** Wir müssen zuerst  $\Omega$  als Normalbereich schreiben. Wir betrachten eine Variable, zum Beispiel  $x$ , und vergessen alle anderen Variablen. Aus  $x \geq 0$  und  $\sqrt{x} \leq 1$  folgt  $0 \leq x \leq 1$ . Dann schauen wir eine andere Variable an (zum Beispiel  $y$ ), betrachten die vorige ( $x$  in diesem Fall) als eine Konstante und vergessen alle anderen Variablen. Aus  $y \geq 0$  und  $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1$  folgt  $0 \leq y \leq (1 - \sqrt{x})^2$ . Ferner betrachten wir die verbleibende Variable  $z$  und betrachten die vorigen Variablen ( $x$  und  $y$ ) als Konstanten. Aus  $z \geq 0$  und  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1$  folgt  $0 \leq z \leq (1 - \sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ . Wir haben somit  $\Omega$  als Normalbereich geschrieben

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq (1 - \sqrt{x})^2, 0 \leq z \leq (1 - \sqrt{x} - \sqrt{y})^2\}.$$

**Schritt 2:** Jetzt benutzen wir die Formel für Normalbereiche

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x d\mu &= \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy \int_0^{(1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} dz \frac{1}{2\sqrt{z}} = \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy [\sqrt{z}]_0^{(1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy (1 - \sqrt{x} - \sqrt{y}) = \int_0^1 dx \left[ (1 - \sqrt{x})y - \frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^{(1-\sqrt{x})^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{(1 - \sqrt{x})^3}{3} = \frac{1}{3} \int_0^1 dx (1 - 3x^{1/2} + 3x - x^{3/2}) \\ &= \frac{1}{3} \left[ x - 2x^{3/2} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^{5/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left( 1 - 2 + \frac{3}{2} - \frac{2}{5} \right) = -\frac{1}{30}. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 12.2.3 • o o Volumen von**

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, y \geq 0, x + y \leq 1, 0 < z \leq x^2\}.$$

■

**Schritt 1:** Wir müssen zuerst  $\Omega$  als Normalbereich schreiben. Wir haben Glück, dass  $x$  schon zwischen zwei Zahlen liegt. Darum wählen wir zuerst  $x$  aus. Dann fixieren wir  $x$ , wählen eine andere Variable aus (zum Beispiel  $y$ ) und vergessen alle anderen Variablen. Aus  $y \geq 0$  und  $x + y \leq 1$  folgt  $0 \leq y \leq 1 - x$ . Ferner betrachten wir die verbleibende Variable  $z$  und fassen die vorigen Variablen ( $x$  und  $y$ ) als Konstanten auf. In diesem Fall müssen wir gar keine Arbeit leisten, da bereits  $0 < z \leq x^2$  in der Definition von  $\Omega$  steht. Wir haben somit  $\Omega$  als Normalbereich geschrieben

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 < z \leq x^2\}.$$

■

**Schritt 2:** Jetzt benutzen wir die Formel für Normalbereiche

$$\begin{aligned}\mu(\Omega) &= \int_{\Omega} d\mu = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x^2} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy x^2 \\ &= \int_0^1 dx (1-x)x^2 = \int_0^1 dx (x^2 - x^3) = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

■

**Beispiel 12.2.4 • • o**

$$\int_{\Omega} d\mu, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

■

**Schritt 1:** Wir schreiben  $\Omega$  als Normalbereich. Als erste Variable wählen wir  $y$  aus. Es gilt

$$y^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1.$$

Dann wählen wir  $x$  aus, und betrachten  $y$  als eine Konstante. Wir lösen nach  $x$  auf

$$x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}.$$

Analog für  $z$

$$y^2 + z^2 \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{1-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-y^2}.$$

Es gilt somit

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, -\sqrt{1-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-y^2}\}.$$

**Schritt 2** Jetzt wenden wir die Formel für Normalbereiche an

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} d\mu(x, y, z) &= \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dz = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx 2\sqrt{1-y^2} \\ &= 4 \int_{-1}^1 dy (1-y^2) = 8 \int_0^1 dy (1-y^2) = 8 \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{3}.\end{aligned}$$

**Beispiel 12.2.5 •••** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  stetig. Wir definieren den Rotationskörper

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, x^2 + y^2 \leq f^2(z)\}.$$

Berechne das Volumen von  $R$ .

**Schritt 1:** Wir schreiben  $R$  als Normalbereich. Als erste Variable wählen wir  $z$  aus, da  $z$  schon zwischen zwei Zahlen liegt

$$a \leq z \leq b.$$

Dann wählen wir  $x$  aus, und betrachten  $z$  als eine Konstante. Wir lösen nach  $x$  auf ( $f$  ist positiv)

$$x^2 \leq f^2(z) \Rightarrow -f(z) \leq x \leq f(z).$$

Ferner schauen wir  $y$  an und betrachten  $x$  und  $z$  als Konstanten. Wir lösen nach  $y$  auf

$$y^2 + x^2 \leq f^2(z) \Rightarrow -\sqrt{f^2(z) - x^2} \leq y \leq \sqrt{f^2(z) - x^2}.$$

Es gilt somit

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, -f(z) \leq x \leq f(z), -\sqrt{f^2(z) - x^2} \leq y \leq \sqrt{f^2(z) - x^2}\}.$$

**Schritt 2:** Jetzt wenden wir die Formel für Normalbereiche an

$$\begin{aligned} \mu(R) &= \int_R d\mu(x, y, z) = \int_a^b dz \int_{-f(z)}^{f(z)} dx \int_{-\sqrt{f^2(z) - x^2}}^{\sqrt{f^2(z) - x^2}} dy \\ &= 2 \int_a^b dz \int_{-f(z)}^{f(z)} dx \sqrt{f^2(z) - x^2}. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir das  $x$  Integral. Mit der Substitution  $x/f(z) = \sin(m) \Rightarrow dx = f(z) \cos m dm$  finden wir

$$\begin{aligned} \int \sqrt{f^2(z) - x^2} dx &= \int f(z) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{f(z)}\right)^2} dx = f^2(z) \int \cos^2 m dm = \frac{f^2(z)}{2} (\sin m \cos m + m) \\ &= \frac{f^2(z)}{2} \left( \frac{x}{f(z)} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{f(z)}\right)^2} + \arcsin \left( \frac{x}{f(z)} \right) \right) + C. \end{aligned}$$

Somit gilt

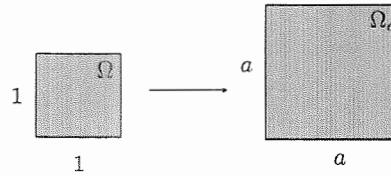
$$\begin{aligned} \mu(R) &= 2 \int_a^b dz \int_{-f(z)}^{f(z)} dx \sqrt{f^2(z) - x^2} = \int_a^b dz f^2(z) \left[ \frac{x}{f(z)} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{f(z)}\right)^2} + \arcsin \left( \frac{x}{f(z)} \right) \right]_{-f(z)}^{f(z)} \\ &= \int_a^b dz f^2(z) (0 + \arcsin(1) - \arcsin(-1)) = \pi \int_a^b dz f^2(z). \end{aligned}$$

### 12.3 Der Skalierungstrick

Der *Skalierungstrick* ist eine sehr einfache aber hilfreiche Methode, welche es uns erlaubt, Volumina von  $n$ -dimensionalen Gebieten zu bestimmen. Will man etwa das Volumen des  $n$ -dimensionalen Balles in jeder Dimension  $n$  bestimmen, so kann man das relativ schnell und reibungslos mithilfe des Skalierungstricks schaffen.

Am besten geht man wie folgt vor: Man stelle sich ein Quadrat mit Seitenlängen 1 vor. Das Volumen (der Flächeninhalt in diesem Fall) des Quadrats ist dann  $1 \cdot 1 = 1$ . Nun skaliert man dasselbe Quadrat um einen Faktor  $a$ . Man bekommt ein Quadrat der Seitenlänge  $a$ . Das Volumen des skalierten Quadrates ist nun  $a \cdot a = a^2$ , also gerade  $a^2$  mal das Volumen des Quadrats mit Seitenlänge 1

$$\mu(\Omega_a) = a^2 \mu(\Omega).$$



Nun wendet man dasselbe Prinzip in  $n$  Dimensionen an. Ein Quader in  $n$  Dimensionen der Seitenlänge 1 hat Volumen 1. Skaliert man es mit einem Faktor  $a$ , so bekommt man ein Quader mit Volumen  $a^n$ , also  $a^n$  mal das Volumen mit Seitenlänge 1. Allgemein gilt das folgende *Skalierungsprinzip*:

**Satz 12.3.1 (Skalierungstrick)** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  messbar (d.h.  $\mu(\Omega)$  ist definiert). Die Menge  $\Omega_a$ , welche man durch Skalierung von  $\Omega$  um einen Faktor  $a > 0$  bekommt, ist auch messbar und es gilt*

$$\mu(\Omega_a) = a^n \mu(\Omega).$$

Die Merkregel ist

“Eine Skalierung um einen Faktor  $a$  in  $n$  Dimensionen trägt mit  $a^n$  zum Gesamtvolumen bei.”

Als Beispiel betrachten wir das  $n$ -Simplex  $\Sigma_n$  in  $n$  Dimensionen definiert durch

$$\Sigma_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1, x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Unser Ziel ist es, das Volumen  $\mu(\Sigma_n)$  für alle  $n$  zu bestimmen. Um das zu machen, schreiben wir zuerst  $\Sigma_n$  als Normalbereich

$$\Sigma_n = \{0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 - x_1, \dots, 0 \leq x_n \leq 1 - x_1 - \dots - x_{n-1}\}.$$

Mit der Formel für Normalbereiche finden wir dann ein iteriertes Integral

$$\mu(\Sigma_n) = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \cdots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-1}} dx_n.$$

Im Prinzip lassen sich die hier auftretenden  $n$  Integrationen durchführen, allerdings sind (wie man leicht sieht) die dazu notwendigen Rechnungen sehr umständlich. Eine bessere, viel einfachere Art, das Problem anzugehen, besteht darin, den Skalierungstrick anzuwenden. Wir betrachten die letzten  $n-1$  Integrale

$$\mu(\Sigma_n) = \int_0^1 dx_1 \left( \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \cdots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-1}} dx_n \right).$$

= Volumen von  $\Sigma_{n-1}^{1-x_1} = \{(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} | x_2 + \dots + x_n \leq 1 - x_1, x_i \geq 0 \ \forall i = 2, \dots, n\}$

Es ist sofort klar, dass die  $n-1$  Integrale in den Klammern genau dieselbe Struktur haben wie das gesamte Integral  $\mu(\Sigma_n)$ . Es gibt aber einige Unterschiede: Es gibt nur  $n-1$  Integrale (und nicht  $n$ ) und das erste Integral ist  $\int_0^{1-x_1}$  und nicht  $\int_0^1$ . Dies ist genau das Volumen des  $(n-1)$ -Simplexes in  $n-1$  Dimensionen mit “ $1 - x_1$ ” anstatt “ $1$ ” in der Definition. d.h.

$$\Sigma_{n-1}^{1-x_1} = \{(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} | x_2 + \dots + x_n \leq [1 - x_1], x_i \geq 0 \ \forall i = 2, \dots, n\}.$$

Dies ist eine “skalierte” Version von  $\Sigma_{n-1}$

$$\Sigma_{n-1} = \{(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} | x_2 + \dots + x_n \leq [1], x_i \geq 0 \ \forall i = 2, \dots, n\}.$$

Denn  $\Sigma_{n-1}^{1-x_1}$  bekommt man, indem man  $\Sigma_{n-1}$  um den Faktor  $1 - x_1$  skaliert. Wir wissen dann: Skalierungsfaktor  $1 - x_1$  in  $n-1$  Dimensionen trägt  $(1 - x_1)^{n-1}$  bei. Somit ist

$$\begin{aligned} \mu(\Sigma_n) &= \int_0^1 dx_1 \left( \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \cdots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-1}} dx_n \right) \\ &= \int_0^1 dx_1 (1 - x_1)^{n-1} \mu(\Sigma_{n-1}) \\ &= \left[ -\frac{(1 - x_1)^n}{n} \right]_0^1 \mu(\Sigma_{n-1}) \\ &= \frac{1}{n} \mu(\Sigma_{n-1}). \end{aligned}$$

Mit dieser Methode haben wir eine Rekursionsformel für  $\Sigma_n$  gefunden. Wendet man diese Rekursionsformel  $n$  mal an, so bekommt man

$$\mu(\Sigma_n) = \frac{1}{n} \mu(\Sigma_{n-1}) = \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \mu(\Sigma_{n-2}) = \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \frac{1}{n-2} \mu(\Sigma_{n-3}) = \cdots = \frac{1}{n!} \mu(\Sigma_1).$$

Natürlich ist  $\mu(\Sigma_1) = 1$  (ist die Gerade  $0 \rightarrow 1$ ). Also

$$\mu(\Sigma_n) = \frac{1}{n!}.$$

Hier sind weitere Beispiele zum Thema Skalierungstrick.

**Beispiel 12.3.1 ••• Berechne das Volumen der folgenden Menge**

$$\Omega_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}.$$

**Lösung:** Wir schreiben  $\Omega_n$  als Normalbereich. Wir wählen zuerst  $x_n$  und vergessen alle anderen Variablen. Wir finden  $0 \leq x_n \leq 1$ . Dann wählen wir  $x_{n-1}$  und finden  $0 \leq x_{n-1} \leq x_n$ . Und so weiter

$$\Omega_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_n \leq 1, 0 \leq x_{n-1} \leq x_n, \dots, 0 \leq x_1 \leq x_2\}.$$

Mit der Formel für Normalbereiche findet man

$$\mu(\Omega_n) = \int_0^1 dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} \cdots \int_0^{x_2} dx_1.$$

Wir wenden den Skalierungstrick an und betrachten die letzten  $n-1$  Integrale

$$\mu(\Omega_n) = \int_0^1 dx_n \left[ \left( \int_0^{x_n} dx_{n-1} \cdots \int_0^{x_2} dx_1 \right) \right]^{=\mu(\Omega_{n-1}^{x_n})}.$$

Die  $n-1$  Integrale in den Klammern geben das Volumen von  $\Omega_{n-1}^{x_n} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid 0 \leq x_{n-1} \leq x_n, \dots, 0 \leq x_1 \leq x_2\}$ , was eine Skalierte Version von  $\Omega_{n-1}$  ist (es ist  $\Omega_{n-1}$  um den Faktor  $x_n$  skaliert, da ein  $x_n$  anstatt 1 in der Definition steht). Ein Skalierungsfaktor  $x_n$  in  $n-1$  Dimensionen gibt  $x_n^{n-1}$ . Somit

$$\mu(\Omega_n) = \int_0^1 dx_n \left[ \left( \int_0^{x_n} dx_{n-1} \cdots \int_0^{x_2} dx_1 \right) \right]^{=\mu(\Omega_{n-1}^{x_n})=x_n^{n-1}\mu(\Omega_{n-1})} = \int_0^1 x_n^{n-1} dx_n \mu(\Omega_{n-1}) = \frac{1}{n} \mu(\Omega_{n-1}).$$

Wir haben wiederum eine Rekursionsformel für  $\mu(\Omega_n)$  bekommen, welche man  $n$  Mal anwenden kann, um  $\mu(\Omega_n)$  zu bestimmen. Wir haben somit

$$\mu(\Omega_n) = \frac{1}{n} \mu(\Omega_{n-1}) = \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \mu(\Omega_{n-2}) = \cdots = \frac{1}{n!},$$

wobei wir  $\mu(\Omega_1) = 1$  benutzt haben. ■

**Beispiel 12.3.2 ••• Berechne das Volumen des Einheitsballs  $B^n$  in  $n$  Dimensionen.**

**Lösung:** Der Einheitsball in  $n$  Dimensionen ist folgende Menge

$$B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}.$$

Als erstes schreiben wir  $B^n$  als Normalbereich. Wir wählen zuerst  $x_1$  und vergessen alle anderen Variablen. Wir finden  $-1 \leq x_1 \leq 1$ . Dann wählen wir  $x_2$ , betrachten  $x_1$  als eine Konstante und lösen nach  $x_2$  auf

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{1-x_1^2} \leq x_2 \leq \sqrt{1-x_1^2}.$$

Dann machen wir dasselbe mit  $x_3$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \leq x_3 \leq \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}.$$

und so weiter. Wir bekommen somit

$$B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq x_1 \leq 1, -\sqrt{1-x_1^2} \leq x_2 \leq \sqrt{1-x_1^2}, \\ -\sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \leq x_3 \leq \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}, \dots\}.$$

Mit der Formel für Normalbereiche findet man dann

$$\mu(B^n) = \int_{-1}^1 dx_1 \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_2 \int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} dx_3 \cdots \int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_{n-1}^2}} dx_n.$$

Wiederum haben wir ein sehr kompliziertes Integral, dessen Berechnung fast unmöglich zu sein scheint. Mit dem Skalierungstrick ist es aber möglich es zu bestimmen. Wir schreiben

$$\mu(B^n) = \int_{-1}^1 dx_1 \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_2 \quad \boxed{\int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} dx_3 \cdots \int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_{n-1}^2}} dx_n}.$$

Die  $n-2$  Integrale in den Klammern ergeben das Volumen des Balles mit Radius  $\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$  in  $n-2$  Dimensionen. Nach dem Skalierungsprinzip ist das genau  $(\sqrt{1-x_1^2-x_2^2})^{n-2}$  Mal das Volumen des Einheitsballes in  $n-2$  Dimensionen. Somit

$$\mu(B^n) = \int_{-1}^1 dx_1 \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_2 \boxed{\int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} dx_3 \cdots \int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_{n-1}^2}} dx_n} \\ = (\sqrt{1-x_1^2-x_2^2})^{n-2} \mu(B^{n-2}).$$

Das doppelte Integral kann man mit den Polarkoordinaten lösen (siehe Kapitel Substitutionsregel). Wir schreiben  $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$ , integrieren über  $\varphi$  von 0 bis  $2\pi$  und über  $r$  von 0 bis 1 und betrachten, dass in Polarkoordinaten  $dxdy = rdrd\varphi$  gilt

$$\mu(B^n) = \mu(B^{n-2}) \int_{-1}^1 dx_1 \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_2 \left( \sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \right)^{n-2} = \mu(B^{n-2}) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr (1-r^2)^{(n-2)/2} \\ = 2\pi \mu(B^{n-2}) \int_0^1 r (1-r^2)^{n/2-1} dr = 2\pi \mu(B^{n-2}) \int_0^1 \frac{(-2r)}{(-2)} (1-r^2)^{n/2-1} dr \\ = 2\pi \mu(B^{n-2}) \left[ \frac{-1}{n} (1-r^2)^{n/2} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{n} \mu(B^{n-2}).$$

Wir haben somit eine Rekursionsformel für  $\mu(B^n)$  bekommen

$$\mu(B^n) = \frac{2\pi}{n} \mu(B^{n-2}).$$

Bekannterweise ist  $\mu(B^1) = 2$  (es ist die Gerade  $[-1, 1]$ ) und  $\mu(B^2) = \pi$ . Somit erhalten wir für  $n = 2m$  (gerade)

$$\mu(B^{2m}) = \frac{2\pi}{2m} \mu(B^{2m-2}) = \frac{2\pi}{2m} \frac{2\pi}{2m-2} \mu(B^{2m-4}) = \dots = \frac{\pi^{m-1}}{m(m-1)\dots 2} \mu(B^2) = \frac{\pi^m}{m!}$$

und für  $n = 2m+1$  (ungerade)<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \mu(B^{2m+1}) &= \frac{2\pi}{2m+1} \mu(B^{2m-1}) = \frac{2\pi}{2m+1} \frac{2\pi}{2m-1} \mu(B^{2m-3}) = \dots \\ &= \frac{2^m \pi^m}{(2m+1)(2m-1)\dots 3} \mu(B^1) = \frac{2^{m+1} \pi^m}{(2m+1)!!}. \end{aligned}$$

Zusammenfassend

$$\mu(B^n) = \begin{cases} \frac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!} & n = 2m+1 \\ \frac{\pi^m}{m!} & n = 2m \end{cases}$$

■

**Beispiel 12.3.3** ••• Berechne das Volumen der Menge

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq |x_4| \leq 1\}.$$

**Lösung:** Als erstes schreiben wir  $\Omega$  als Normalbereich. Wir wählen zuerst  $x_4$  und vergessen alle anderen Variablen. Wir finden  $-1 \leq x_4 \leq 1$ . Wir halten schon an dieser Stelle an, da  $\Omega$  bereits eine gute Form hat

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -1 \leq x_4 \leq 1, |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq |x_4|\}.$$

Wir bekommen somit

$$\mu(\Omega) = \int_{-1}^1 dx_4 \int_{\{|x_1| + |x_2| + |x_3| \leq |x_4|\}} d\mu(x_1, x_2, x_3).$$

Nun kommt die zentrale Beobachtung. Wir bemerken, dass die Menge  $\{|x_1| + |x_2| + |x_3| \leq |x_4|\}$  eine skalierte Version von

$$Z_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1\}$$

ist (es ist genau  $Z_3$  um den Faktor  $|x_4|$  skaliert, weil " $|x_4|$ " statt "1" in der Definition vorkommt). Nach dem Skalierungsprinzip finden wir somit (Skalierungsfaktor  $|x_4|$  in 3 Dimensionen trägt  $|x_4|^3$  bei)

$$\mu(\Omega) = \int_{-1}^1 dx_4 \int_{\{|x_1| + |x_2| + |x_3| \leq |x_4|\}} d\mu(x_1, x_2, x_3) = \int_{-1}^1 dx_4 |x_4|^3 \mu(Z_3) = 2\mu(Z_3) \int_0^1 x_4^3 dx_4 = \frac{1}{2} \mu(Z_3).$$

Wir müssen also nur das Mass von  $Z_3$  bestimmen. Das gelingt wiederum mit dem Skalierungstrick. Wir schreiben  $Z_3$  als Normalbereich

$$Z_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x_1 \leq 1, -(1-|x_1|) \leq x_2 \leq (1-|x_1|), -(1-|x_1|-|x_2|) \leq x_3 \leq (1-|x_1|-|x_2|)\}.$$

<sup>2</sup>Erinnerung:  $(2m+1)!! = (2m+1)(2m-1)(2m-3)\dots$

Somit haben wir

$$\mu(Z_3) = \int_{-1}^1 dx_1 \int_{-(1-|x_1|)}^{(1-|x_1|)} dx_2 \int_{-(1-|x_1|-|x_2|)}^{(1-|x_1|-|x_2|)} dx_3.$$

Nun betrachten wir die letzten zwei Integrale

$$\mu(Z_3) = \int_{-1}^1 dx_1 \left[ \int_{-(1-|x_1|)}^{(1-|x_1|)} dx_2 \int_{-(1-|x_1|-|x_2|)}^{(1-|x_1|-|x_2|)} dx_3 \right].$$

$\stackrel{=Z_2 \text{ skaliert um den Faktor } (1-|x_1|)}{\boxed{}}$

Die zwei Integrale in den Klammern ergeben das Volumen von

$$Z_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x_1 \leq 1, -(1-|x_1|) \leq x_2 \leq (1-|x_1|)\}$$

um den Faktor  $(1-|x_1|)$  skaliert. Nach dem Skalierungsprinzip haben wir also

$$\begin{aligned} \mu(Z_3) &= \int_{-1}^1 dx_1 \left[ \int_{-(1-|x_1|)}^{(1-|x_1|)} dx_2 \int_{-(1-|x_1|-|x_2|)}^{(1-|x_1|-|x_2|)} dx_3 \right] \\ &= \int_{-1}^1 dx_1 (1-|x_1|)^2 \mu(Z_2) = 2\mu(Z_2) \int_0^1 dx_1 (1-x_1)^2 = 2\mu(Z_2) \left[ x_1 - x_1^2 + \frac{x_1^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}\mu(Z_2). \end{aligned}$$

Ferner müssen wir noch das Volumen von  $Z_2$  bestimmen. Dies ist aber einfach. Denn

$$\mu(Z_2) = \int_{-1}^1 dx_1 \int_{-(1-|x_1|)}^{(1-|x_1|)} dx_2 = \int_{-1}^1 dx_1 2(1-|x_1|) = 4 \int_0^1 (1-x_1) dx_1 = 4 \left[ x_1 - \frac{x_1^2}{2} \right]_0^1 = 2.$$

Wir haben es geschafft! Aus  $\mu(Z_2) = 2$  bekommen wir  $\mu(Z_3) = 2/3\mu(Z_2) = 4/3$ . Somit haben wir

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{2}\mu(Z_3) = \frac{2}{3}.$$

■



# Kapitel 13

## Die Substitutionsregel

Neben Normalbereiche bietet die Substitutionsregel einen anderen wichtigen Hilfsmittel für die Berechnung von mehrdimensionalen Integralen, denn eine geschickte Wahl eines dem Problem angepassten Koordinatensystems ist für die Berechnung mehrdimensionaler Integralen von fundamentaler Wichtigkeit. Die Substitutionsregel wollen wir jetzt näher anschauen, aber wir beginnen mit dem etwas einfacheren Fall des  $\mathbb{R}^2$ .

### 13.1 Die Substitutionsregel in $\mathbb{R}^2$

Für die Berechnung von Integralen in einer Variablen ist die Substitutionsregel natürlich ein wichtiges Instrument. Will man zum Beispiel das Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

berechnen, so führt die Substitution ( $g$  ist ein Diffeomorphismus)

$$x = g(u) \quad \Rightarrow \quad dx = g'(u)du$$

zu dem Integral

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u)du.$$

Mit anderen Worten: Das Integrationselement  $dx$  wird durch  $g'(u)du$  in der neuen Variablen ersetzt.

In zwei Dimensionen gelten analoge Überlegungen. Wir betrachten eine Funktion  $f(x, y)$ , welche auf dem Gebiet  $\Omega$  Riemann-integrierbar ist. Wir betrachten auch die Substitution

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v)$$

oder kompakt geschrieben

$$(x, y) = \Phi(u, v).$$

wobei  $\Phi$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus sein soll. Unter dieser Koordinatentransformation transformiert sich auch das Integrationsgebiet gemäss  $\tilde{\Omega} = \Phi^{-1}(\Omega)$ .  $\tilde{\Omega}$  ist also das neue Integrationsgebiet in den Koordinaten  $u, v$ . Der Transformationssatz in  $\mathbb{R}^2$  lautet dann

**Satz 13.1.1 (Substitutionsregel in  $\mathbb{R}^2$ )**

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\tilde{\Omega}} f(g(u, v), h(u, v)) |\det d\Phi| du dv.$$

Hier ist

$$d\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}$$

die sogenannte **Funktionalmatrix** oder Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation  $\Phi$ . Bei der Substitution  $x = g(u, v), y = h(u, v)$  wird also das Flächenelement  $dx dy$  durch das Flächenelement im  $(u, v)$ -Koordinatensystem

$$\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix} \right| du dv$$

ersetzt. Die Funktionalmatrix wird oft durch das Symbol

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

bezeichnet. Diese Schreibweise soll daran erinnern, dass die Funktionalmatrix aus den Ableitungen von  $x, y$  nach den neuen Koordinaten  $u, v$  zu bilden ist, und nicht umgekehrt! Wir betrachten jetzt ein Beispiel, das zeigt, wie wichtig die geschickte Wahl der Koordinatentransformation sein kann. Gegeben sei die stetige Funktion  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  auf der Einheitsdisk  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Gesucht ist das Integral

$$\int_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)} d\mu(x, y).$$

Wir könnten probieren,  $\Omega$  als Normalbereich zu schreiben

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

und dann die Formel für Normalbereiche anwenden

$$\int_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)} d\mu(x, y) = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy e^{-(x^2+y^2)}.$$

Das Problem liegt darin, dass wir keine Chancen haben, das Integral  $\int e^{-y^2} dy$  zu bestimmen, weil die Stammfunktion von  $e^{-y^2}$  nicht elementar ausdrückbar ist. Eine bessere Art

das Problem anzugehen, besteht darin, zuerst ein angepasstes Koordinatensystem einzuführen. Da ein Term  $x^2 + y^2$  in der Funktion  $f$  vorkommt, denken wir sofort an Polarkoordinaten, weil in diesen Koordinaten  $x^2 + y^2 = r^2$  gilt. Wechselt man in  $\mathbb{R}^2$  von Kartesischen zu Polarkoordinaten, so gilt

$$x = g(r, \varphi) = r \cos \varphi, \quad y = h(r, \varphi) = r \sin \varphi.$$

Die Funktionalmatrix lautet

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial h}{\partial r} & \frac{\partial h}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Die Funktionaldeterminante lautet somit

$$\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \right| = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r,$$

sodass wir das Flächenelement in Polarkoordinaten erhalten

$$dx dy = r dr d\varphi.$$

Nun bildet die Koordinatentransformation nach Polarkoordinaten

$$\Phi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\}), (r, \varphi) \mapsto \Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

die Menge  $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$  bijektiv auf  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$ . Die Funktionaldeterminante  $\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right| = |\det d\Phi| = r > 0$  impliziert, dass  $\Phi$  lokal invertierbar ist (nach dem Umkehrssatz). Dies zusammen mit der Bijektivität von  $\Phi$  impliziert, dass  $\Phi$  ein Diffeomorphismus von  $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$  ist. In Polarkoordinaten kann man nun  $\Omega$  wie folgt schreiben

$$\tilde{\Omega} = \{(r, \varphi) | 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}.$$

Wir haben ein Problem, weil  $\Phi$  nur auf  $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$  ein Diffeomorphismus ist. Was können wir mit den Punkten  $\varphi = 0, 2\pi$  oder  $r = 0$  machen? Ganz einfach! Da die aus einem Punkt bestehende Menge eine Nullmenge ist, dürfen wir diese Punkte einfach "vergessen". Sie spielen für die Integration sozusagen keine Rolle. Somit dürfen wir die Substitutionsregel anwenden, so dass das Integral von  $e^{-(x^2+y^2)}$  auf  $\Omega$  lautet

$$\int_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)} d\mu(x, y) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r e^{-r^2} dr = 2\pi \int_0^1 r e^{-r^2} dr = -\pi [e^{-r^2}]_0^1 = \pi(1 - e^{-1}).$$

Der Vorteil der Polarkoordinaten ist der Extra-Term " $r$ ", was es uns erlaubt, die Funktion  $e^{-r^2}$  zu integrieren! Ohne das Einführen der Polarkoordinaten wäre somit die Bestimmung des Integrals unmöglich.

**Beispiel 13.1.1 ••• Berechne den Flächeninhalt der Menge**

$$\Omega = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) | 0 \leq r \leq 1 + \cos \varphi\}.$$

**Lösung:**

Wir benutzen Polarkoordinaten. Dazu müssen wir die Transformation zu Polarkoordinaten betrachten

$$\Phi : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, (r, \varphi) \mapsto (x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi).$$

Die Funktionalmatrix lautet

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Die Funktionaldeterminante lautet somit

$$\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \right| = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

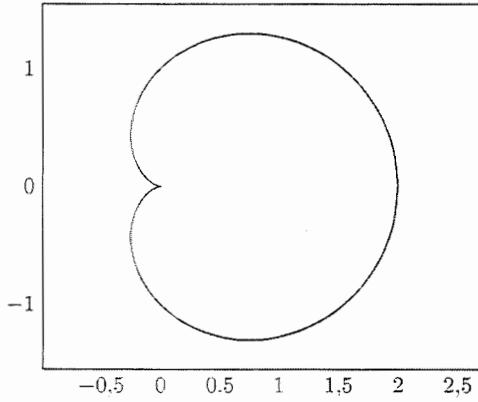
so dass das Flächenelement in Polarkoordinaten lautet

$$dx dy = r dr d\varphi.$$

Also erhalten wir mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \mu(\Omega) &= \int_{\Omega} d\mu = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1+\cos \varphi} r dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(1+\cos \varphi)^2}{2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1+2\cos \varphi + \cos^2 \varphi}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \varphi + 2 \sin \varphi + \frac{1}{2} (\sin \varphi \cos \varphi + \varphi) \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Die Menge  $\Omega = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) | 0 \leq r \leq 1 + \cos \varphi\}$



■

**Beispiel 13.1.2** •••  $\int_{\Omega} y / \sqrt{x} d\mu$

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0, \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}, 1/x \leq y \leq 2/x\}.$$

**Lösung:** Dies ist ein typischer Fall für eine Substitution. Weshalb? Weil man die Bedingungen in der Definition von  $\Omega$  wie folgt umschreiben kann

$$1 \leq \frac{y}{\sqrt{x}} \leq 2, \quad 1 \leq xy \leq 2.$$

Wir haben schon gesehen, wie einfach es ist, Integrale auf Quadern mit dem Satz von Fubini zu bestimmen. Nun haben wir gar keinen Quader, aber beinahe! Betrachtet man die Ausdrücke  $\frac{y}{\sqrt{x}}$  und  $xy$  als neue Variablen  $u, v$ , so haben wir

$$1 \leq u \leq 2, \quad 1 \leq v \leq 2.$$

In diesen Variablen ist  $\Omega$  nicht anders als ein Quader ( $[1, 2]^2$ )! Aus diesem Grund macht es Sinn, die folgende Substitution zu betrachten

$$u = \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad v = xy.$$

Nach den Regeln der Kunst müssen wir die Funktionaldeterminante bestimmen. Zuerst müssen wir die Transformation aber umkehren

$$u = \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad v = xy \Rightarrow u^2 v = \frac{y^2}{x} \cdot xy = y^3 \Rightarrow y = u^{2/3} v^{1/3} \Rightarrow x = \frac{v}{y} = v^{2/3} u^{-2/3}.$$

Dann rechnen wir die Funktionalmatrix aus

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}u^{-5/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{-2/3}v^{-1/3} \\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \end{pmatrix}.$$

Die Funktionaldeterminante lautet somit

$$\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}u^{-5/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{-2/3}v^{-1/3} \\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \end{pmatrix} \right| = \left| -\frac{4}{9}u^{-1} - \frac{2}{9}u^{-1} \right| \stackrel{u \geq 0}{=} \frac{2}{3u}.$$

sodass das Flächenelement in den neuen Koordinaten lautet

$$dxdy = \frac{2}{3u} dudv.$$

Mit dieser Transformation haben wir das Problem,  $\int_{\Omega} y/\sqrt{x} d\mu$  zu berechnen, auf das viel einfache Problem zurückgeführt, die Funktion  $u \cdot \frac{2}{3u}$  auf dem Quader  $[1, 2]^2$  zu integrieren (das  $\frac{2}{3u}$  kommt aus der Koordinatentransformation). Das ist die Macht der Substitutionsregel! Nach dem Satz von Fubini gilt somit

$$\int_{\Omega} y/\sqrt{x} d\mu = \int_1^2 du \int_1^2 dv u \cdot \frac{2}{3u} = \int_1^2 du \int_1^2 dv \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

■

**Beispiel 13.1.3 ••◦**  $\int_{\Omega} (x^3 y + xy^3) d\mu$

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0, 1/x \leq y \leq 3/x, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4\}.$$

**Lösung:** Dies ist wiederum ein typischer Fall für eine Substitution, da man die Bedingungen der Definition von  $\Omega$  wie folgt schreiben kann

$$1 \leq xy \leq 3, \quad 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4.$$

Mit der folgenden Substitution

$$u = xy, \quad v = x^2 - y^2$$

kann man  $\Omega$  als Quader schreiben

$$1 \leq u \leq 3, \quad 1 \leq v \leq 4.$$

Nach den Regeln der Kunst müssen wir jetzt die Funktionaldeterminante bestimmen. Zuerst müssen wir aber die Transformation umkehren. Manchmal ist dies aber nur eine Zeitverschwendungs. Manchmal ist es besser, die Koordinatentransformation nicht umzukehren und stattdessen die Regel  $\det A^{-1} = 1/\det A$  zu benutzen, welche wir aus der linearen Algebra kennen. Konkret geht man wie folgt vor. Man berechnet die inverse Funktionalmatrix (dazu muss man nicht die inverse Koordinatentransformation kennen, sondern nur  $u$  und  $v$  als Funktion von  $x$  und  $y$ )

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{pmatrix}.$$

Die Funktionaldeterminante lautet somit

$$\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{\left| \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|} = \frac{1}{\left| \det \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{|-2(x^2 + y^2)|} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$$

sodass das Flächenelement in den neuen Koordinaten lautet

$$dxdy = \frac{1}{2(x^2 + y^2)} dudv.$$

Das Problem bei dieser Methode ist es, dass wir beim neuen Flächenelement  $x$  und  $y$  noch haben. In diesem Fall ist es aber kein Problem, denn der Term  $(x^2 + y^2)$  lässt sich wegkürzen, weil  $x^3y + xy^3 = xy(x^2 + y^2)$ , sodass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (x^3y + xy^3) d\mu &= \int_1^3 du \int_1^4 dv u(x^2 + y^2) \cdot \frac{1}{2(x^2 + y^2)} = \frac{1}{2} \int_1^3 du \int_1^4 dv u \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{u^2}{2} \right]_1^3 [v]_1^4 = \frac{3}{2} \left( \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) = 6. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 13.1.4 ••○**  $\int_{\Omega} \frac{x+y}{(x-y)^2} d\mu \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0, x+y \leq 1\}.$

**Lösung:** Die Bedingung  $x+y \leq 1$  suggeriert uns,  $u = x+y$  zu substituieren. Der Faktor  $\frac{x+y}{(x-y)^2}$  suggeriert uns weiter, auch  $v = x-y$  zu substituieren. Wir betrachten somit die Transformation

$$u = x+y, \quad v = x-y.$$

Die Bedingungen  $x, y > 0$  und  $x + y \leq 1$  implizieren  $0 < x + y \leq 1$ , d.h.  $0 < u \leq 1$ . Was passiert mit der Variablen  $v$ ? Es gilt  $v = x - y = x + y - y = x + y - 2y \stackrel{v>0}{\leq} x + y = u$ . Analog  $v = x - y = x + x - x - y = 2x - (x + y) \stackrel{x>0}{\geq} -(x + y) = -u$ . In den neuen Variablen lautet also  $\Omega$  wie folgt

$$\Omega = \{(u, v) | 0 < u \leq 1, -u \leq v \leq u\}.$$

Nach den Regeln der Kunst müssen wir nun die Funktionaldeterminante bestimmen. Zuerst müssen wir die Transformation umkehren

$$u = x + y, \quad v = x - y \quad \Rightarrow \quad u + v = x + y + x - y = 2x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{u + v}{2} \quad \Rightarrow \quad y = u - x = \frac{u - v}{2}.$$

Dann rechnen wir die Funktionalmatrix aus

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Funktionaldeterminante lautet somit

$$\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2},$$

sodass das Flächenelement in den neuen Koordinaten lautet

$$dxdy = \frac{1}{2}dudv.$$

Es gilt somit

$$\int_{\Omega} \frac{x+y}{(x-y)^2} d\mu = \int_0^1 du \int_{-u}^u dv \frac{u}{2v^2} = \int_0^1 du \frac{u}{2} \left[ -\frac{1}{v} \right]_{-u}^u = \int_0^1 du \frac{u}{2} \cdot \frac{-2}{u} = -1.$$

■

**Beispiel 13.1.5 •••** Wir betrachten das Integral

$$I = \int_{[0,1]^2} \frac{d\mu(x, y)}{1 - x^2 y^2} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{[0,1-\varepsilon]^2} \frac{d\mu(x, y)}{1 - x^2 y^2}$$

a) Berechne  $I$  explizit mit der Parametrisierung

$$\Phi : \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 | s, t > 0, s + t < \pi/2\} \rightarrow [0, 1]^2, (s, t) \mapsto \left( \frac{\sin s}{\cos t}, \frac{\sin t}{\cos s} \right).$$

b) Benutze das obige Resultat um  $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  zu berechnen.

Hinweis: Zeige dass

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

**Lösung: a)** Wir betrachten die Substitution

$$\Phi : \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 | s, t > 0, s + t < \pi/2\} \rightarrow [0, 1]^2, (s, t) \mapsto \left( \frac{\sin s}{\cos t}, \frac{\sin t}{\cos s} \right).$$

Die Funktionalmatrix der Transformation lautet

$$d\Phi(s, t) = \begin{pmatrix} \frac{\cos s}{\cos t} & \frac{\sin s \sin t}{\cos^2 t} \\ \frac{\sin s \sin t}{\cos^2 s} & \frac{\cos t}{\cos s} \end{pmatrix}.$$

Die Funktionaldeterminante lautet somit

$$\det d\Phi(s, t) = \det \begin{pmatrix} \frac{\cos s}{\cos t} & \frac{\sin s \sin t}{\cos^2 t} \\ \frac{\sin s \sin t}{\cos^2 s} & \frac{\cos t}{\cos s} \end{pmatrix} = \frac{\cos s \cos t}{\cos t \cos s} - \frac{\sin s \sin t \sin s \sin t}{\cos^2 t \cos^2 s} = 1 - \tan^2 s \tan^2 t.$$

Mit der Substitutionsregel finden wir somit<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} I &= \int_{[0,1]^2} \frac{d\mu}{1-x^2y^2} = \int_0^{\pi/2} ds \int_0^{\pi/2-s} dt \frac{1-\tan^2 s \tan^2 t}{1-\tan^2 s \tan^2 t} \\ &= \int_0^{\pi/2} ds \int_0^{\pi/2-s} dt = \int_0^{\pi/2} ds (\pi/2-s) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

b) Die Idee ist, den Integranden als geometrische Reihe zu schreiben  $\frac{1}{1-x^2y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}y^{2n}$ . Wir zweifeln aber ein bisschen, weil es an der Stelle  $x = y = 1$  ein Konvergenzproblem geben könnte. Was machen wir? Wir benutzen die Definition des obigen Integrals

$$I = \int_{[0,1-\varepsilon]^2} \frac{d\mu}{1-x^2y^2} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{[0,1-\varepsilon]^2} \frac{d\mu}{1-x^2y^2}.$$

Auf  $(x, y) \in [0, 1 - \varepsilon]^2$  konvergiert  $\frac{1}{1-x^2y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}y^{2n}$  gleichmäßig. Wir dürfen somit Integral und Summe vertauschen (vgl. Analysis I, Kapitel Potenzreihen)

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{[0,1-\varepsilon]^2} \frac{d\mu}{1-x^2y^2} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{[0,1-\varepsilon]^2} d\mu \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}y^{2n} \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1-\varepsilon} dx \int_0^{1-\varepsilon} dy x^{2n}y^{2n} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^{1-\varepsilon} \cdot \left[ \frac{y^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^{1-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(1-\varepsilon)^{2n+1}}{2n+1} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}. \end{aligned}$$

Aus der Rechnung von Teil (a) lernen wir also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Wie können wir nun das Resultat benutzen, um  $\zeta(2)$  zu bestimmen? Es ist ganz einfach. Wir müssen einfach einige Umformungen machen. Wir trennen die geraden von den ungeraden Termen

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots = \boxed{\left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right)} + \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) \\ &\stackrel{=\frac{\pi^2}{8}}{=} \zeta(2) \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2^2} \cdot \boxed{\left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right)} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \zeta(2) \\ \Rightarrow \quad \left( 1 - \frac{1}{4} \right) \zeta(2) &= \frac{\pi^2}{8} \quad \Rightarrow \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

■

<sup>1</sup>Wir schreiben  $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 | s, t > 0, s + t < \pi/2\}$  als Normalbereich  $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 | 0 < s < \pi/2, 0 < t < \pi/2 - s\}$ .

## 13.2 Die Substitutionsregel in $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten eine Riemann-integrierbare Funktion  $f$  auf dem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und die Koordinatentransformation

$$(x_1, \dots, x_n) = \Phi(u_1, \dots, u_n)$$

oder in Komponenten

$$x_1 = g_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n = g_n(u_1, \dots, u_n).$$

Wir nehmen an, dass die Abbildung  $\Phi$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus ist, also eine in beiden Richtungen stetig-differenzierbare Abbildung. Das Integrationsgebiet  $\Omega$  ist das Bild eines Gebietes  $\tilde{\Omega} = \Phi^{-1}(\Omega)$  im  $(u_1, \dots, u_n)$ -Koordinatensystem. Der Substitutionssatz sagt dann

**Satz 13.2.1 (Substitutionsregel in  $\mathbb{R}^n$ )**

$$\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{\tilde{\Omega}} f(g_1(u), \dots, g_n(u)) |\det d\Phi| du_1 \cdots du_n.$$

Dabei ist

$$dx_1 \cdots dx_n = |\det d\Phi| du_1 \cdots du_n = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} \right| du_1 \cdots du_n$$

das Volumenelement im  $(u_1, \dots, u_n)$ -Koordinatensystem. Für die Funktionalmatrix  $d\Phi$  benutzt man auch die Notation

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)}.$$

Als Beispiel berechnen wir das Integral

$$\int_{\{x^2+y^2+z^2 \leq 9\}} e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} d\mu(x, y, z).$$

Da wir auf einer Kugel integrieren wollen, wählt man am besten Kugelkoordinaten. Wechselt man von Kartesischen zu Kugelkoordinaten, so gilt

$$x = g_1(r, \theta, \phi) = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = g_2(r, \theta, \phi) = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = g_3(r, \theta, \phi) = r \cos \theta,$$

sodass die Funktionalmatrix lautet

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Funktionaldeterminante lautet somit

$$\left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \right| = r^2 \sin \theta.$$

Das Volumenelement in Kugelkoordinaten lautet also

$$dxdydz = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi.$$

Das Integrationsgebiet  $\Omega$  lautet in Kugelkoordinaten

$$\tilde{\Omega} = \{(r, \theta, \phi) | 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi\},$$

so dass

$$\begin{aligned} \int_{\{x^2+y^2+z^2 \leq 9\}} e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} d\mu(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^3 r^2 e^{-r} dr \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^3 r^2 e^{-r} dr \\ &= 2\pi [\cos \theta]_0^\pi \int_0^3 r^2 e^{-r} dr \\ &= 4\pi [-r^2 e^{-r} - 2re^{-r} - 2e^{-r}]_0^3 = 4\pi(2 - 17e^{-3}). \end{aligned}$$

Auch hier wäre die Integration ohne das Einführen der Kugelkoordinaten unmöglich!

**Beispiel 13.2.1** • o o  $\int_{\Omega} \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} d\mu \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\}.$

**Lösung:** Wir schreiben  $\Omega$  in Zylinderkoordinaten um. Da in Zylinderkoordinaten  $x^2+y^2=r^2$  gilt, sind die Bedingungen  $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$  äquivalent zu  $r \leq z \leq 1$  und  $0 \leq r \leq 1$ . Somit lautet  $\Omega$  in Zylinderkoordinaten so

$$\Omega = \{(r, \theta, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} | 0 \leq r \leq 1, r \leq z \leq 1\}.$$

Wechselt man von Kartesischen zu Zylinderkoordinaten, so gilt

$$x = g(r, \varphi, z) = r \cos \varphi, \quad y = h(r, \varphi, z) = r \sin \varphi, \quad z = g(r, \varphi, z) = z$$

so dass die Funktionalmatrix lautet

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Funktionaldeterminante lautet somit

$$\left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r.$$

Das Volumenelement in Zylinderkoordinaten lautet also

$$dxdydz = r dr d\varphi dz.$$

sodass

$$\int_{\Omega} \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\mu = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^1 dz \frac{e^{z^2}}{r} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 dz e^{z^2}.$$

Jetzt haben wir leider ein Problem, da wir das Integral  $\int e^{z^2} dz$  nicht berechnen können. Wie könnte man das Problem umgehen? Ganz einfach: Wir schreiben die Bedingung  $0 \leq r \leq z \leq 1$  als  $0 \leq r \leq z$  und  $0 \leq z \leq 1$ . Dann haben wir

$$\int_{\Omega} \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\mu = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_0^z r dr \frac{e^{z^2}}{r} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{z^2} dz \int_0^z dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 z e^{z^2} dz.$$

Jetzt hat man den Term  $z$  vor dem  $e^{z^2}$ . Da  $z$  die Ableitung von  $\frac{z^2}{2}$  ist, ist das Integral direkt

$$\int_{\Omega} \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\mu = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 z e^{z^2} dz = \int_0^{2\pi} d\theta \left[ \frac{1}{2} e^{z^2} \right]_0^1 = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{(e - 1)}{2} = 2\pi \frac{(e - 1)}{2} = \pi(e - 1).$$

■

**Beispiel 13.2.2** ••• Betrachte die Menge  $U = (0, 1) \times (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$  und den Volltorus

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \cos \phi(r \cos \theta + 1), y = \sin \phi(r \cos \theta + 1), z = r \sin \theta, (r, \phi, \theta) \in U\}.$$

Berechne das folgende Integral

$$\int_T d\mu = \mu(T).$$

**Lösung:** Wir betrachten die Transformation

$$\Phi : (0, 1) \times (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow T, (r, \phi, \theta) \rightarrow (x, y, z) = (\cos \phi(r \cos \theta + 1) \sin \phi(r \cos \theta + 1), r \sin \theta),$$

so dass die Funktionalmatrix lautet

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi(r \cos \theta + 1) & -r \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta & \cos \phi(r \cos \theta + 1) & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Die Funktionaldeterminante lautet somit

$$\begin{aligned} \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)} \right| &= \left| \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi(r \cos \theta + 1) & -r \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta & \cos \phi(r \cos \theta + 1) & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix} \right| \\ &= r \cos^2 \theta(r \cos \theta + 1) + r \sin^2 \theta(r \cos \theta + 1) = r(r \cos \theta + 1). \end{aligned}$$

Das Volumenelement in Toruskoordinaten lautet also

$$dxdydz = r(r \cos \theta + 1) dr d\phi d\theta,$$

sodass

$$\mu(T) = \int_T d\mu = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta r(r \cos \theta + 1) = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi 2\pi r = 4\pi^2 \int_0^1 r dr = 2\pi^2.$$

■

### 13.3 Wichtige Koordinatentransformationen

In diesem Abschnitt fassen wir die Resultate für die wichtigsten Koordinatentransformationen zusammen. Ziel dieses Abschnittes ist es, dass der Leser sich bewusst wird, dass man gewisse Resultate direkt und effizient anwenden darf, ohne jedes Mal die Funktional-determinante der Koordinatentransformation berechnen zu müssen.

#### Koordinatentransformationen in $\mathbb{R}^2$

Polarkoordinaten		
Definition	Maximaler Definitionsbereich	Volumenelement
$x = r \cos \varphi$	$0 \leq r < \infty$	$dxdy = rdrd\varphi$
$y = r \sin \varphi$	$0 \leq \varphi < 2\pi$	

Elliptische Koordinaten		
Definition	Maximaler Definitionsbereich	Volumenelement
$x = ra \cos \varphi$	$0 \leq r < \infty$	$dxdy = abrdrd\varphi$
$y = rb \sin \varphi$	$0 \leq \varphi < 2\pi$	

#### Koordinatentransformationen in $\mathbb{R}^3$

Zylinderkoordinaten		
Definition	Maximaler Definitionsbereich	Volumenelement
$x = r \cos \varphi$	$0 \leq r < \infty$	
$y = r \sin \varphi$	$0 \leq \varphi < 2\pi$	
$z = z$	$-\infty < z < \infty$	

Kugelkoordinaten		
Definition	Maximaler Definitionsbereich	Volumenelement
$x = r \sin \theta \cos \varphi$	$0 \leq r < \infty$	
$y = r \sin \theta \sin \varphi$	$0 \leq \theta \leq \pi$	
$z = r \cos \theta$	$0 \leq \varphi < 2\pi$	

### 13.4 Beispiele

Wir betrachten nun weitere Beispiele zur Substitutionsregel.

**Beispiel 13.4.1 •••** Gegeben ist die Ellipse  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ . Man berechne das Integral

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \cdot d\mu(x, y)$$

a) direkt als Integral über einen Normalbereich; b) mithilfe der elliptischen Koordinaten.

Lösung:

a) Um das Integral direkt zu bestimmen, schreiben wir  $\Omega$  als Normalbereich

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a, -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right\}.$$

Mit der Formel für Normalbereiche folgt

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = \int_{-a}^a dx \int_{-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} dy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Im Prinzip lassen sich die hier auftretenden Integrale durchführen, allerdings sind die Rechnungen sehr umständlich. Wir machen die Substitution ( $x$  ist eine Konstante, weil wir zuerst über  $y$  integrieren)

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot t \quad \Rightarrow \quad dy = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot dt.$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy &= \int_{-a}^a dx \int_{-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} dy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \\ &= \int_{-a}^a dx \int_{-1}^1 \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)t^2} \cdot b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot dt \\ &= \int_{-a}^a b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt = 2b \left(a - \frac{a}{3}\right) \underbrace{\int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt}_{=\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3} ab. \end{aligned}$$

b) Wir führen nun Elliptische Koordinaten ein ( $x = ar \cos \varphi, y = br \sin \varphi, dx dy = ab \cdot r dr d\varphi$ ), so dass die Rechnung viel schneller geht

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr = 2\pi ab \left[ -\frac{2\sqrt{1 - r^2}}{2 \cdot 3} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3} ab.$$

■

**Beispiel 13.4.2 •••**  $\int_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} d\mu \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, z \geq 0\}.$

**Lösung:** Wir schreiben  $\Omega$  in Kugelkoordinaten um. Da in Kugelkoordinaten  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  und

$z = r \cos \theta$  gilt, sind die Bedingungen  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, z \geq 0$  äquivalent zu  $r^2 \leq 2, \cos \theta \geq 0$ , d.h.  $r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Somit lautet  $\Omega$  in Kugelkoordinaten

$$\Omega = \{(r, \theta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi) \mid r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

Wir erinnern daran, dass beim Übergang zu Kugelkoordinaten  $dxdydz = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$  gilt, sodass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} d\mu &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr \cdot r \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = 2\pi [-\cos \theta]_0^{\pi/2} = 2\pi. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 13.4.3 • o o Volumen von**

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 4z^2 \leq x^2 + y^2 + z^2\}.$$

**Lösung:** Wir schreiben  $\Omega$  in Kugelkoordinaten um. Da in Kugelkoordinaten  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  und  $z = r \cos \theta$  gilt, sind die Bedingungen  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 4z^2 \leq x^2 + y^2 + z^2$  äquivalent zu  $r^2 \leq 4, 4r^2 \cos^2 \theta \leq r^2$ , d.h.  $r \leq 2, \cos^2 \theta \leq \frac{1}{4} \Rightarrow r \leq 2, \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ . Somit lautet  $\Omega$  in Kugelkoordinaten

$$\Omega = \{(r, \theta, \varphi) \in [0, \infty) \times [\pi/3, 2\pi/3] \times [0, 2\pi) \mid r \leq 2, \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}\}.$$

Wir erinnern daran, dass beim Übergang zu Kugelkoordinaten  $dxdydz = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$ , sodass

$$\begin{aligned} \mu(\Omega) &= \int_{\Omega} d\mu = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin \theta d\theta \int_0^2 r^2 dr \\ &= 2\pi [-\cos \theta]_{\pi/3}^{2\pi/3} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^2 = 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 13.4.4 • o o  $\int_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\mu$**

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x, 1 \leq x\}.$$

**Lösung:** Wir schreiben  $\Omega$  in Polarkoordinaten um. Da in Polarkoordinaten  $x^2 + y^2 = r^2$  und  $x = r \cos \theta$  gilt, sind die Bedingungen  $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x, 1 \leq x$  äquivalent zu  $r^2 \leq 4, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  (erster Quadrant)<sup>2</sup>,  $1 \leq r \cos \theta$ , d.h.  $\frac{1}{\cos \theta} \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ . Somit lautet  $\Omega$  in Polarkoordinaten

$$\Omega = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, \pi/4] \mid 1/\cos \theta \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

<sup>2</sup>Die Bedingung  $0 \leq y \leq x$  ist äquivalent zu  $0 \leq \sin \theta \leq \cos \theta$ . Dies ist nur für  $\theta \in [0, \pi/4]$  wahr.

Wir erinnern daran, dass beim Übergang zu Polarkoordinaten  $dxdy = rdrd\theta$  gilt, sodass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\mu &= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta}}^2 r dr \frac{r \sin \theta}{r} = \int_0^{\pi/4} \sin \theta d\theta \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{\frac{1}{\cos \theta}}^2 \\ &= \int_0^{\pi/4} 2 \sin \theta d\theta - \int_0^{\pi/4} \frac{\sin \theta}{2 \cos^2 \theta} d\theta \\ &= [-2 \cos \theta]_0^{\pi/4} - \left[ \frac{1}{2 \cos \theta} \right]_0^{\pi/4} = -\sqrt{2} + 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = \frac{5 - 3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 13.4.5** • • •  $\int_{\Omega} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\mu$

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}.$$

**Lösung:** Wir schreiben  $\Omega$  in Polarkoordinaten. Da in Polarkoordinaten  $x^2 + y^2 = r^2$  und  $x = r \cos \theta$  gilt, sind die Bedingungen  $x^2 + y^2 \leq 1, x, y > 0$  äquivalent zu  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Somit lautet  $\Omega$  in Polarkoordinaten

$$\Omega = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Wir erinnern uns daran, dass beim Übergang zu Polarkoordinaten  $dxdy = rdrd\theta$  gilt, sodass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\mu &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r dr \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 dr \cdot r \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} \sqrt{\frac{1-r^2}{1-r^2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 dr \frac{r(1-r^2)}{\sqrt{1-r^4}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 dr \frac{r}{\sqrt{1-r^4}} - \frac{\pi}{2} \int_0^1 dr \frac{r^3}{\sqrt{1-r^4}}. \end{aligned}$$

Das erste Integral lösen wir mit der Substitution  $r^2 = y \Rightarrow r = \sqrt{y} \Rightarrow dr = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

$$\int_0^1 dr \frac{r}{\sqrt{1-r^4}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-y^2}} \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{2} [\arcsin(y)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Das zweite Integral ist direkt

$$\int_0^1 dr \frac{r^3}{\sqrt{1-r^4}} = -\frac{1}{4} \int_0^1 dr \frac{4r^3}{\sqrt{1-r^4}} = -\frac{1}{4} \left[ 2\sqrt{1-r^4} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Zusammenfassend

$$\int_{\Omega} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\mu = \frac{\pi}{2} \int_0^1 dr \frac{r}{\sqrt{1-r^4}} - \frac{\pi}{2} \int_0^1 dr \frac{r^3}{\sqrt{1-r^4}} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}.$$

■

**Beispiel 13.4.6** • • •  $\int_{\Omega} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) d\mu$

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x/\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}x\}.$$

**Lösung:** Wir schreiben  $\Omega$  in Polarkoordinaten. Da in Polarkoordinaten  $x^2 + y^2 = r^2$  und  $x = r \cos \theta$  gilt, sind die Bedingungen  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x/\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}x$  äquivalent zu  $1 \leq r \leq 2, \cos \theta/\sqrt{3} \leq \sin \theta \leq \sqrt{3} \cos \theta \Rightarrow 1/\sqrt{3} \leq \tan(\theta) \leq \sqrt{3} \Rightarrow \pi/6 \leq \theta \leq \pi/3$ . Somit lautet  $\Omega$  in Polarkoordinaten

$$\Omega = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \mid 1 \leq r \leq 2, \pi/6 \leq \theta \leq \pi/3\}.$$

Wir erinnern uns daran, dass beim Übergang zu Polarkoordinaten  $dxdy = rdrd\theta$  gilt, sodass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) d\mu &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\theta \int_1^2 r dr \arctan(\tan \theta) = \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\theta \int_1^2 r dr \theta \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \theta d\theta \int_1^2 r dr = \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 = \frac{\pi^2}{16}. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 13.4.7** • • • Volumen von

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{3}{2}(x^2 + y^2) - 1 \leq z \leq 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2), z \geq 0\}.$$

**Lösung:** Wir schreiben  $\Omega$  in Zylinderkoordinaten um. Da in Zylinderkoordinaten  $x^2 + y^2 = r^2$  gilt, sind die Bedingungen  $\frac{3}{2}(x^2 + y^2) - 1 \leq z \leq 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  äquivalent zu  $\frac{3}{2}r^2 - 1 \leq z \leq 1 - \frac{r^2}{2}$ . Aus  $\frac{3}{2}r^2 - 1 = 1 - \frac{r^2}{2}$  folgt  $r = 1$ , also  $z = \frac{1}{2}$ . Somit schreiben wir  $\Omega$  in Polarkoordinaten als  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , wobei

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(r, \theta, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \mid 0 \leq z \leq 1/2, 0 \leq r \leq \sqrt{2-2z}\}, \\ \Omega_2 &= \{(r, \theta, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \mid 1/2 \leq z \leq 1, 0 \leq r \leq \sqrt{(2z+2)/3}\}. \end{aligned}$$

Wir erinnern daran, dass beim Übergang zu Zylinderkoordinaten  $dxdy = rdrd\theta dz$  gilt, sodass für den Teil  $\Omega_1$  gilt

$$\begin{aligned} \mu(\Omega_1) &= \int_{\Omega_1} d\mu = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} dz \int_0^{\sqrt{2-2z}} r dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} dz \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2-2z}} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} dz \frac{2-2z}{2} = \int_0^{2\pi} d\theta \left[z - \frac{z^2}{2}\right]_0^{1/2} = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Für den Teil  $\Omega_2$  gilt analog

$$\begin{aligned}\mu(\Omega_2) &= \int_{\Omega_2} d\mu = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/2}^1 dz \int_0^{\sqrt{(2z+2)/3}} r dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/2}^1 dz \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{(2z+2)/3}} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} dz \frac{2+2z}{6} = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} d\theta [z^2 + 2z]_0^{1/2} = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot \frac{7}{4} = \frac{7\pi}{12}.\end{aligned}$$

Zusammenzählen ergibt

$$\mu(\Omega) = \mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_2) = \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{12} = \frac{4\pi}{3}.$$

■

**Beispiel 13.4.8** ••• Betrachte die Menge  $U = (0, 1) \times (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$  und den Volltorus

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \cos \phi(r \cos \theta + 1), y = \sin \phi(r \cos \theta + 1), z = r \sin \theta, (r, \phi, \theta) \in U\}.$$

Berechne das folgende Integral

$$\int_T (x^2 + y^2 + z^2) d\mu.$$

**Lösung:** Wir betrachten die Transformation

$$\Phi : (0, 1) \times (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow T, (r, \phi, \theta) \mapsto (x, y, z) = (\cos \phi(r \cos \theta + 1) \sin \phi(r \cos \theta + 1), r \sin \theta),$$

sodass die Funktionalmatrix lautet

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi(r \cos \theta + 1) & -r \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta & \cos \phi(r \cos \theta + 1) & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Die Funktionaldeterminante lautet somit

$$\begin{aligned}\left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)} \right| &= \left| \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi(r \cos \theta + 1) & -r \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta & \cos \phi(r \cos \theta + 1) & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix} \right| \\ &= r \cos^2 \theta (r \cos \theta + 1) + r \sin^2 \theta (r \cos \theta + 1) = r(r \cos \theta + 1).\end{aligned}$$

Das Volumenelement in Toruskoordinaten lautet also

$$dxdydz = r(r \cos \theta + 1) dr d\phi d\theta,$$

sodass

$$\begin{aligned}
 \int_T (x^2 + y^2 + z^2) d\mu &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta r(r \cos \theta + 1)((r \cos \theta + 1)^2 + r^2 \sin^2 \theta) \\
 &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta (r^2 + 2r \cos \theta + 1)(r^2 \cos \theta + r) \\
 &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta (r^4 \cos \theta + r^3 + 2r^3 \cos^2 \theta + 3r^2 \cos \theta + r) \\
 &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi (0 + 2\pi r^3 + 2r^3 \pi + 0 + 2\pi r) \\
 &= \int_0^1 dr (8\pi^2 r^3 + 4\pi^2 r) = 2\pi^2 + 2\pi^2 = 4\pi^2.
 \end{aligned}$$

■

**Beispiel 13.4.9 •••** Für  $\alpha > 0$  ist die Gamma-Funktion definiert durch

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx.$$

Zeige

- a)  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ .
- b)  $\Gamma(n + 1) = n!$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$
- c)  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

**Lösung:** a) Wir integrieren einmal partiell

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^\infty \overbrace{e^{-x}}^{\uparrow} \cdot \overbrace{x^\alpha}^{\downarrow} dx = [-e^{-x} x^\alpha]_0^\infty + \alpha \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx \\
 &= \alpha \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx = \alpha \Gamma(\alpha).
 \end{aligned}$$

b) Zuerst haben wir

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1.$$

Dann wenden wir die Formel  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$  rekursiv an

$$\Gamma(n + 1) = n \Gamma(n) = n(n - 1) \Gamma(n - 2) = \cdots = n(n - 1)(n - 2) \cdots 1 \cdot \Gamma(1) = n!.$$

c) Laut Definition ist

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt.$$

Da eine Wurzel vorkommt, substituieren wir  $\sqrt{t} = x \Rightarrow t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$ . Somit bekommen wir

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt = \int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-x^2} \cdot 2x dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Nun müssen wir das Integral  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  berechnen. Wie tut man das? Der Trick besteht darin, das Quadrat des Integrals zu betrachten, den Satz von Fubini anzuwenden und ferner Polarkoordinaten einzuführen. Wir betrachten also das Quadrat von  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ . Nach dem Satz von Fubini kann man es als doppeltes Integral auf  $[0, \infty)^2$  schreiben

$$\left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy e^{-(x^2+y^2)}.$$

Da ein  $x^2 + y^2$  vorkommt, gehen wir auf Polarkoordinaten über. Wir schreiben  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , sodass  $[0, \infty)^2$  in Polarkoordinaten zu  $[0, \infty) \times [0, \pi/2]$  wird. Wir betrachten die Substitutionsregel  $dxdy = rdrd\varphi$  und bekommen<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy e^{-(x^2+y^2)} \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty r dr e^{-r^2} = \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Wir finden somit

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \Rightarrow \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

■

**Beispiel 13.4.10 •••** Die Beta-Funktion ist definiert durch

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Beweise die folgende Relation

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)},$$

wobei  $\Gamma(u)$  die Gamma-Funktion bezeichnet. Benutze das obige Resultat, um  $\int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi \sin^6 \varphi d\varphi$  zu berechnen.

**Lösung:** a) Wir benutzen die Definition der Gamma-Funktion

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = \int_0^\infty e^{-x} x^{u-1} dx \int_0^\infty e^{-y} y^{v-1} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)} x^{u-1} y^{v-1} dxdy.$$

Wir machen nun die folgende Substitution  $t = x+y$  und  $s = x/(x+y)$ . Die inverse Transformation lautet  $x = ts$  und  $y = t(1-s)$ , so dass  $(0, \infty) \times (0, \infty)$  auf  $0 < t < \infty, 0 < s < 1$  abgebildet wird. Die Funktionaldeterminante lautet

$$\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, s)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} s & t \\ 1-s & -t \end{pmatrix} \right| = | -ts - t + ts | = | -t | = t.$$

<sup>3</sup> Beachte dass  $[0, \infty)^2$  nur der erste Quadrant ist. Somit liegt  $\varphi$  nur zwischen 0 und  $\pi/2$ .

Da  $t > 0$ , wir bekommen das neue Volumenelement  $dxdy = tdt ds$ . Somit haben wir

$$\begin{aligned}\Gamma(u)\Gamma(v) &= \int_0^1 ds \int_0^\infty dt e^{-t} t^{u-1} s^{u-1} t^{v-1} (1-s)^{v-1} t \\ &= \int_0^\infty dt e^{-t} t^{u+v-1} \int_0^1 ds s^{u-1} (1-s)^{v-1} = \Gamma(u+v) B(u, v).\end{aligned}$$

b) Wir starten mit der Definition der Beta-Funktion

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx.$$

Wir machen die Substitution  $x = \cos^2 \varphi \Rightarrow dx = -2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$  und bekommen

$$\begin{aligned}B(\alpha, \beta) &= \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \int_{\pi/2}^0 (\cos^2 \varphi)^{\alpha-1} (1-\cos^2 \varphi)^{\beta-1} (-2 \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi)^{2\alpha-2} (\sin \varphi)^{2\beta-2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi)^{2\alpha-1} (\sin \varphi)^{2\beta-1} d\varphi.\end{aligned}$$

Wir haben somit folgende nützliche Formel bewiesen

$$\int_0^{\pi/2} (\cos \varphi)^{2\alpha-1} (\sin \varphi)^{2\beta-1} d\varphi = \frac{1}{2} B(\alpha, \beta).$$

Wir benutzen nun diese Formel mit  $\alpha = 5/2$  und  $\beta = 7/2$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi \sin^6 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B(5/2, 7/2) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(7/2)}{\Gamma(6)}.$$

Nun benutzen wir die Eigenschaften der Gamma Funktion  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  und  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , um die verschiedenen Terme zu bestimmen

$$\begin{aligned}\Gamma(5/2) &= \frac{3}{2} \Gamma(3/2) = \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \\ \Gamma(7/2) &= \frac{5}{2} \Gamma(5/2) = \frac{5}{2} \frac{3}{2} \Gamma(3/2) = \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}, \\ \Gamma(6) &= 5!.\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi \sin^6 \varphi d\varphi &= \frac{1}{2} B(5/2, 7/2) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(7/2)}{\Gamma(6)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(1/2) \cdot \frac{5}{2} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(1/2)}{5!} \\ &= \frac{5 \cdot 3^2 \cdot \pi}{2^6 \cdot 5!} = \frac{3\pi}{512}.\end{aligned}$$

**Beispiel 13.4.11 •••** In dieser Aufgabe wollen wir das Volumen des Einheitsballes in  $n$ -Dimensionen

$$B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

auf eine andere Art bestimmen, als in Beispiel 12.3.2. Gehe wie folgt vor:

a) Berechne das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

b) Benutze den Satz von Fubini, um den Oberflächeninhalt der Kugel  $S^{n-1}$  in  $n$ -Dimensionen zu berechnen. (Hinweis: Kugelkoordinaten in  $\mathbb{R}^n$ ).

c) Berechne mithilfe des Resultats aus (b) das Volumen von  $B^n$ .

**Lösung:** a) Wir gehen wie in Beispiel 13.4.9 vor, d.h. wir betrachten das Quadrat von  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ . Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x^2+y^2)}.$$

Das letzte Integral verlangt ganz offensichtlich Polarkoordinaten (wegen dem Term  $x^2 + y^2$ ). Wir führen also Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  ein und bekommen mit der Substitutionsregel ( $dxdy = rdrd\varphi$ )

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x^2+y^2)} = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-r^2} = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi \left[ -\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{\infty} = \pi.$$

Somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

b) Wir haben in Teilaufgabe (a) gezeigt, dass  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ . Wir betrachten nun die  $n$ -te Potenz dieses Integrals und benutzen den Satz von Fubini. Wir bekommen

$$\begin{aligned} \pi^{n/2} &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_n^2} dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}. \end{aligned}$$

Wie berechnen wir nun das letzte Integral? Mit den Kugelkoordinaten in  $\mathbb{R}^n$ . Diese haben wir bereits in Beispiel 3.2.10 kennengelernt

$$\Phi : (0, \infty) \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x_{n-1} \geq 0, x_n = 0\}$$

$$(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}) \rightarrow \Phi(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}) = \begin{pmatrix} r \cos \phi_1 \\ r \sin \phi_1 \cos \phi_2 \\ r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \phi_3 \\ \vdots \\ r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \cos \phi_{n-1} \\ r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \sin \phi_{n-1} \end{pmatrix}.$$

In diesen Koordinaten gilt

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Die Determinante von  $d\Phi$  haben wir bereits in Beispiel 3.2.10 ausgerechnet

$$\det d\Phi = r^{n-1} \sin(\phi_1)^{n-2} \sin(\phi_2)^{n-3} \cdots \sin(\phi_{n-2}),$$

sodass die Substitutionsregel für Kugelkoordinaten in  $\mathbb{R}^n$  lautet

$$dx_1 dx_2 \cdots dx_n = r^{n-1} \sin(\phi_1)^{n-2} \sin(\phi_2)^{n-3} \cdots \sin(\phi_{n-2}) dr d\phi_1 \cdots d\phi_{n-1}.$$

Der Teil  $\sin(\phi_1)^{n-2} \sin(\phi_2)^{n-3} \cdots \sin(\phi_{n-2}) d\phi_1 \cdots d\phi_{n-1}$  ist der Winkelanteil. Das Integral des Winkelanteils auf  $(0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$  ist genau der Oberflächeninhalt von  $S^{n-1}$

$$\int_0^\pi d\phi_1 \cdots \int_0^\pi d\phi_{n-2} \int_0^{2\pi} d\phi_{n-1} \sin(\phi_1)^{n-2} \sin(\phi_2)^{n-3} \cdots \sin(\phi_{n-2}) = \mu(S^{n-1}).$$

Wir haben somit

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)} = \\ &= \int_0^{\infty} r^{n-1} dr \int_0^\pi d\phi_1 \cdots \int_0^\pi d\phi_{n-2} \int_0^{2\pi} d\phi_{n-1} \sin(\phi_1)^{n-2} \sin(\phi_2)^{n-3} \cdots \sin(\phi_{n-2}) e^{-r^2} \\ &= \int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r^2} dr \cdot \boxed{\int_0^\pi d\phi_1 \cdots \int_0^\pi d\phi_{n-2} \int_0^{2\pi} d\phi_{n-1} \sin(\phi_1)^{n-2} \sin(\phi_2)^{n-3} \cdots \sin(\phi_{n-2})} \\ &= \mu(S^{n-1}) \int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r^2} dr. \end{aligned}$$

Das Integral  $\int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r^2} dr$  berechnen wir mit der Substitution  $r^2 = y \Rightarrow r = \sqrt{y} \Rightarrow dr = dy/2\sqrt{y}$

$$\int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r^2} dr = \int_0^{\infty} y^{(n-1)/2} e^{-y} \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} y^{n/2-1} e^{-y} dy = \frac{1}{2} \Gamma(n/2).$$

Wir haben somit das folgende wichtige Resultat gefunden

$$\pi^{n/2} = \frac{\mu(S^{n-1})}{2} \Gamma(n/2) \quad \Rightarrow \quad \mu(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

c) Das Volumen von  $B^n$  berechnen wir mit den Kugelkoordinaten in  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mu(B^n) &= \int_0^1 r^{n-1} dr \cdot \boxed{\int_0^\pi d\phi_1 \cdots \int_0^\pi d\phi_{n-2} \int_0^{2\pi} d\phi_{n-1} \sin(\phi_1)^{n-2} \sin(\phi_2)^{n-3} \cdots \sin(\phi_{n-2})} \\ &= \mu(S^{n-1}) \int_0^1 r^{n-1} dr = \frac{\mu(S^{n-1})}{n} = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}. \end{aligned}$$

Wir können auch ein wenig Kosmetik machen, indem wir die Formel  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  benutzen. So bekommen wir die folgende schöne Formel

$$\mu(B^n) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} = \frac{\pi^{n/2}}{n/2\Gamma(n/2)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

Beachte, dass diese Formel dem Resultat von Beispiel 12.3.2 gleicht. Zum Beispiel gilt für  $n = 2m$  (d.h.  $n$  gerade)

$$\mu(B^n) = \frac{\pi^m}{\Gamma(m+1)} = \frac{\pi^m}{m!},$$

weil  $\Gamma(m+1) = m!$ . ■

### Beispiel 13.4.12 •••

a) Sei  $a > 0$ . Berechne das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2} dx$$

b) Sei  $A$  eine symmetrische, positiv definite  $n \times n$  Matrix. Zeige:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}x^T A x} d^n x = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}.$$

**Lösung:** a) Wir gehen wie in Beispiel 13.4.9 vor, d.h. wir betrachten das Quadrat von  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2} dx$ . Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2/2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-a(x^2+y^2)/2}.$$

Das letzte Integral verlangt ganz offensichtlich Polarkoordinaten (wegen dem Term  $x^2 + y^2$ ). Wir führen also Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  ein und bekommen mit der Substitutionsregel ( $dxdy = rdrd\varphi$ )

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-a(x^2+y^2)/2} = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ar^2/2} = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-ar^2/2} dr = 2\pi \left[ -\frac{e^{-r^2}}{a} \right]_0^{\infty} = \frac{2\pi}{a}.$$

Somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

b) Wir wollen das folgende Integral berechnen

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}x^T A x} d^n x.$$

Der Trick bei dieser Aufgabe ist: Symmetrische Matrizen sind immer diagonalisierbar, sodass es eine orthogonale Matrix  $U$  gibt, für welche folgendes gilt

$$A = U^T D U = U^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U.$$

Somit

$$x^T Ax = x^T U^T D U x = \underbrace{(Ux)^T}_{=y} D \underbrace{(Ux)}_{=y} = y^T Dy.$$

Wir substituieren  $y = Ux$ . Nach der Substitutionsregel gilt  $d^n x = \underbrace{|\det(U^{-1})|}_{=1} d^n y = d^n y$ , weil  $U$  orthogonal ist. Es folgt also

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} y^T D y} d^n x &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} y^T D y} d^n y = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n e^{-\frac{1}{2} (\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2)} \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 e^{-\frac{1}{2} \lambda_1 y_1^2} \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 e^{-\frac{1}{2} \lambda_2 y_2^2} \right) \cdots \left( \int_{-\infty}^{\infty} dx_n e^{-\frac{1}{2} \lambda_n y_n^2} \right) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_1}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_2}} \cdots \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_n}} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}. \end{aligned}$$

■

## Kapitel 14

# Anwendung: Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmoment

### 14.1 Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmoment

#### Masse

Sei  $\Omega$  ein zweidimensionales Gebiet (zum Beispiel eine Kreisscheibe) mit Massendichte  $\rho(x, y)$ , welche die Massenverteilung auf  $\Omega$  beschreibt. Die *Masse* von  $\Omega$  ist dann

$$M = \int_{\Omega} \rho(x, y) d\mu(x, y).$$

Entsprechend erhalten wir die Masse eines dreidimensionalen Körpers  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  mit Massendichte  $\rho(x, y, z)$  als Volumenintegral von  $\rho$  über  $\Omega$

$$M = \int_{\Omega} \rho(x, y, z) d\mu(x, y, z).$$

#### Schwerpunkt

Für eine Fläche  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ist der *Schwerpunkt* der Punkt  $S = (x_S, y_S)$ , sodass  $\Omega$  im Gleichgewicht ist, wenn man es an der Stelle  $S$  anlegt.  $S$  ist also der Punkt, auf dem die Summe der Drehmomente Null ergibt. Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  mit Massendichte  $\rho(x, y)$  ist der Schwerpunkt  $S = (x_S, y_S)$  gegeben durch

$$x_S = \frac{1}{M} \int_{\Omega} x \rho(x, y) d\mu(x, y), \quad y_S = \frac{1}{M} \int_{\Omega} y \rho(x, y) d\mu(x, y).$$

Entsprechend erhält man für den Schwerpunkt  $S = (x_S, y_S, z_S)$  eines dreidimensionalen Körpers  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  mit Massendichte  $\rho(x, y, z)$

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{M} \int_{\Omega} x \rho(x, y, z) d\mu(x, y, z), \\ y_S &= \frac{1}{M} \int_{\Omega} y \rho(x, y, z) d\mu(x, y, z), \\ z_S &= \frac{1}{M} \int_{\Omega} z \rho(x, y, z) d\mu(x, y, z). \end{aligned}$$

### Trägheitsmoment

Das *Trägheitsmoment* von  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  mit Massendichte  $\rho(x, y)$  bezüglich einer gegebenen Drehachse  $K$  ist

$$\Theta_K = \int_{\Omega} \text{dist}((x, y), K)^2 \rho(x, y) d\mu(x, y),$$

wobei  $\text{dist}((x, y), K)$  die Distanz des Punktes  $(x, y)$  von der Achse  $K$  bezeichnet. Im Besonderen gilt für das Trägheitsmoment bezüglich der  $x$ -,  $y$ -Achsen

$$\begin{aligned}\Theta_x &= \int_{\Omega} y^2 \rho(x, y) d\mu(x, y), \\ \Theta_y &= \int_{\Omega} x^2 \rho(x, y) d\mu(x, y).\end{aligned}$$

Entsprechend findet man das Trägheitsmoment von  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um  $K$

$$\Theta_K = \int_{\Omega} \text{dist}((x, y, z), K)^2 \rho(x, y, z) d\mu(x, y, z),$$

wobei  $\text{dist}((x, y, z), K)$  die Distanz des Punktes  $(x, y, z)$  von der Achse  $K$  bezeichnet. Im Besonderen gilt für das Trägheitsmoment bezüglich der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achsen

$$\begin{aligned}\Theta_x &= \int_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) d\mu(x, y, z), \\ \Theta_y &= \int_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) d\mu(x, y, z), \\ \Theta_z &= \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) d\mu(x, y, z).\end{aligned}$$

### Erweiterung auf $\mathbb{R}^n$

Für einen Körper  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit Massendichte  $\rho(x)$  gilt für die Masse

$$M = \int \rho(x) d\mu(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{skalarwertig})$$

den Schwerpunkt berechnet man mit der Formel

$$S = \frac{1}{M} \int_{\Omega} x \rho(x) d\mu(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{vektorwertig})$$

Das Trägheitsmoment um die Achse  $K$  ist

$$\Theta_K = \int_{\Omega} \text{dist}(x, K)^2 \rho(x) d\mu(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{skalarwertig})$$

wobei  $\text{dist}(x, K)$  die Distanz des Punktes  $x$  von der Achse  $K$  bezeichnet.

## 14.2 Beispiele

In diesem Abschnitt betrachten wir einige Beispiele zum Thema.

**Beispiel 14.2.1 ••• Berechne Masse und Schwerpunkt der folgenden Mengen**

- a)  $\Omega = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1] | y \leq x^2\}$
- b)  $\Omega = \{(r \cos \phi, r \sin \phi) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \phi - ar \leq \pi\}, a \in \mathbb{R}$

**Lösung:** a) Da keine Angabe an der Massendichte steht, setzen wir  $\rho \equiv 1$ . Die Masse von  $\Omega$  lautet somit

$$M = \int_{\Omega} d\mu(x, y).$$

Wir schreiben  $\Omega$  als Normalbereich. Wir lesen direkt ab, dass  $-1 \leq x \leq 1$ . Und weiter geht es: Aus  $y \in [0, 1]$  und  $y \leq x^2$ , folgt  $0 \leq y \leq x^2$ . Somit

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}.$$

Mit der Formel für Normalbereiche finden wir die Masse von  $\Omega$

$$M = \int_{\Omega} d\mu(x, y) = \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} dy = \int_{-1}^1 dx x^2 = 2 \int_0^1 dx x^2 = 2 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Die  $x$ -Komponente des Schwerpunktes lautet

$$x_S = \frac{1}{M} \int_{\Omega} x d\mu(x, y) = \frac{1}{M} \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} dy x = \frac{1}{M} \int_{-1}^1 dx [xy]_0^{x^2} = \frac{1}{M} \int_{-1}^1 dx x^3 = 0.$$

Die  $y$ -Komponente lautet

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{M} \int_{\Omega} y d\mu(x, y) = \frac{1}{M} \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} dy y = \frac{1}{M} \int_{-1}^1 dx \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{x^2} = \frac{1}{M} \int_{-1}^1 dx \frac{x^4}{2} = \frac{2}{M} \int_0^1 dx \frac{x^4}{2} \\ &= \frac{2}{M} \left[ \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = \frac{1}{M} \frac{1}{5} = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Somit  $S = (x_S, y_S) = (0, 3/10)$ .

b) Die Menge  $\Omega$  ist als Normalbereich in Polarkoordinaten gegeben

$$\Omega = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq r \leq 1, ar \leq \varphi \leq ar + \pi\}.$$

Wir führen Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  ein und berücksichtigen die Substitutionsregel  $dxdy = rdrd\varphi$ . Für die Masse bekommen wir somit

$$M = \int_{\Omega} d\mu(x, y) = \int_0^1 r dr \int_{ar}^{ar+\pi} d\varphi = \int_0^1 r dr (ar + \pi - ar) = \pi \int_0^1 r dr = \pi \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Die  $x$ -Komponente des Schwerpunktes lautet

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{M} \int_0^1 r dr \int_{ar}^{ar+\pi} d\varphi \underbrace{r \cos \varphi}_x = \frac{1}{M} \int_0^1 r^2 dr [\sin \varphi]_{ar}^{ar+\pi} \\ &= \frac{1}{M} \int_0^1 r^2 dr (\sin(ar + \pi) - \sin(ar)) = -\frac{2}{M} \int_0^1 r^2 \sin(ar) dr. \end{aligned}$$

Zweimalige partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}
 x_S &= -\frac{2}{M} \int_0^1 r^2 \sin(ar) dr \stackrel{P.I.}{=} \frac{2}{Ma} [r^2 \cos(ar)]_0^1 - \frac{4}{Ma} \int_0^1 r \cos(ar) dr \\
 &= \frac{2}{Ma} \cos(a) - \frac{4}{Ma} \int_0^1 r \cos(ar) dr \stackrel{P.I.}{=} \frac{2}{Ma} \cos(a) - \frac{4}{Ma^2} [r \sin(ar)]_0^1 + \frac{4}{Ma^2} \int_0^1 \sin(ar) dr \\
 &= \frac{2}{Ma} \cos(a) - \frac{4}{Ma^2} \sin(a) + \frac{4}{Ma^2} \int_0^1 \sin(ar) dr = \frac{2}{Ma} \cos(a) - \frac{4}{Ma^2} \sin(a) + \frac{4}{Ma^3} [-\cos(ar)]_0^1 \\
 &= \frac{2}{Ma} \cos(a) - \frac{4}{Ma^2} \sin(a) - \frac{4}{Ma^3} \cos(a) + \frac{4}{Ma^3} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos(a)}{a} - \frac{2 \sin(a)}{a^2} - \frac{2(\cos(a) - 1)}{a^3} \right).
 \end{aligned}$$

Die  $y$ -Komponente des Schwerpunktes bekommt man analog

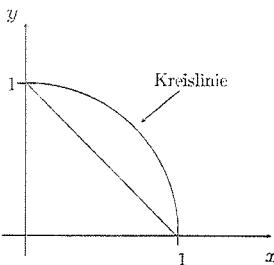
$$\begin{aligned}
 y_S &= \frac{1}{M} \int_0^1 r dr \int_{ar}^{ar+\pi} d\varphi \underbrace{r \sin \varphi}_y = \frac{1}{M} \int_0^1 r^2 dr [-\cos \varphi]_{ar}^{ar+\pi} \\
 &= \frac{1}{M} \int_0^1 r^2 dr (-\cos(ar + \pi) + \cos(ar)) = \frac{2}{M} \int_0^1 r^2 \cos(ar) dr.
 \end{aligned}$$

Zweimalige partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}
 y_S &= \frac{2}{M} \int_0^1 r^2 \cos(ar) dr \stackrel{P.I.}{=} \frac{2}{Ma} [r^2 \sin(ar)]_0^1 - \frac{4}{Ma} \int_0^1 r \sin(ar) dr \\
 &= \frac{2}{Ma} \sin(a) - \frac{4}{Ma} \int_0^1 r \sin(ar) dr \stackrel{P.I.}{=} \frac{2}{Ma} \sin(a) + \frac{4}{Ma^2} [r \cos(ar)]_0^1 - \frac{4}{Ma^2} \int_0^1 \cos(ar) dr \\
 &= \frac{2}{Ma} \sin(a) + \frac{4}{Ma^2} \cos(a) - \frac{4}{Ma^2} \int_0^1 \cos(ar) dr = \frac{2}{Ma} \sin(a) + \frac{4}{Ma^2} \cos(a) - \frac{4}{Ma^3} [\sin(ar)]_0^1 \\
 &= \frac{2}{Ma} \sin(a) + \frac{4}{Ma^2} \cos(a) - \frac{4}{Ma^3} \sin(a) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin(a)}{a} + \frac{2 \cos(a)}{a^2} - \frac{2 \sin(a)}{a^3} \right).
 \end{aligned}$$

■

**Beispiel 14.2.2 ••• Berechne den Schwerpunkt der in der Figur angegebenen Menge  $\Omega$ .**



**Lösung:** Da keine Angabe an der Massendichte steht, setzen wir  $\rho \equiv 1$ . Die Masse von  $\Omega$  lautet somit

$$M = \int_{\Omega} d\mu(x, y).$$

Wir schreiben  $\Omega$  als Normalbereich. Wir betrachten die Figur, wählen eine Variable aus, z.B.  $y$  aus und "vergessen" die anderen Variablen. Wir lesen  $0 \leq y \leq 1$  ab (äußerste Grenzen). Dann fixieren wir  $y$  und schauen was mit  $x$  passiert:  $x$  liegt zwischen der Geraden  $1-y$  und der Kreislinie  $\sqrt{1-y^2}$ . Somit

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 1-y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}.$$

Mit der Formel für Normalbereiche finden wir dann

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Omega} d\mu(x, y) = \int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dx = \int_0^1 dy (\sqrt{1-y^2} - 1 + y) \\ &= \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy}_{=\pi/4} - 1 + \frac{1}{2} = \frac{\pi - 2}{4}. \end{aligned}$$

Die  $x$ -Komponente des Schwerpunktes  $S = (x_S, y_S)$  lautet

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{M} \int_{\Omega} x d\mu(x, y) = \frac{1}{M} \int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dx x = \frac{1}{M} \int_0^1 dy \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \frac{1}{M} \int_0^1 dy \frac{1-y^2 - (1-y)^2}{2} = \frac{1}{M} \int_0^1 dy (y - y^2) = \frac{1}{M} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{6M} = \frac{2}{3(\pi - 2)}. \end{aligned}$$

Für die  $y$ -Komponente

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{M} \int_{\Omega} y d\mu(x, y) = \frac{1}{M} \int_0^1 dy y \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dx = \frac{1}{M} \int_0^1 dy (y \sqrt{1-y^2} - y + y^2) \\ &= \frac{1}{M} \left[ -\frac{1}{3}(1-y^2)^{3/2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{M} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6M} = \frac{2}{3(\pi - 2)}. \end{aligned}$$

Also

$$S = (x_S, y_S) = \left( \frac{2}{3(\pi - 2)}, \frac{2}{3(\pi - 2)} \right).$$

■

**Beispiel 14.2.3** ••• Berechne den Schwerpunkt von

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x, y, z \geq 0, z \leq y, x^2 + y \leq 1\}.$$

**Lösung:** Da keine Angabe an der Massendichte gegeben ist, setzen wir  $\rho \equiv 1$ . Die Masse von  $\Omega$  lautet somit

$$M = \int_{\Omega} d\mu(x, y, z).$$

Wir schreiben nun  $\Omega$  als Normalbereich. Wir betrachten  $x$  und vergessen alle anderen Variablen. Aus  $x \geq 0$  und  $x^2 \leq 1$  folgt  $0 \leq x \leq 1$ . Dann fixieren wir  $x$  und schauen was mit  $y$  passiert. Aus  $y \geq 0$  und  $x^2 + y \leq 1$  folgt  $0 \leq y \leq 1 - x^2$ . Ferner betrachten wir  $z$ : aus  $z \geq 0$  und  $z \leq y$  folgt  $0 \leq z \leq y$ . Somit

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2, 0 \leq z \leq y\}.$$

Mit der Formel für Normalbereiche finden wir dann

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Omega} d\mu(x, y, z) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dy \int_0^y dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dy y \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x^2} dx = \int_0^1 \frac{(1-x^2)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

Die  $x$ -Komponente des Schwerpunktes  $S = (x_S, y_S, z_S)$  lautet

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{M} \int_{\Omega} x d\mu(x, y, z) = \frac{1}{M} \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dy \int_0^y dz x = \frac{1}{M} \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dy y x \\ &= \frac{1}{M} \int_0^1 \left[ x \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x^2} dx = \frac{1}{M} \int_0^1 \frac{x(1-x^2)^2}{2} dx = \frac{1}{2M} \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{M} \frac{1}{12} = \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Für die  $y$ -Komponente

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{M} \int_{\Omega} y d\mu(x, y, z) = \frac{1}{M} \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dy \int_0^y dz y = \frac{1}{M} \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dy y^2 = \frac{1}{M} \int_0^1 \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x^2} dx \\ &= \frac{1}{M} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^3}{3} dx = \frac{1}{3M} \left[ x - \frac{3x^3}{3} + \frac{3x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{1}{M} \frac{16}{105} = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Für die  $z$ -Komponente

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{1}{M} \int_{\Omega} z d\mu(x, y, z) = \frac{1}{M} \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dy \int_0^y dz z = \frac{1}{M} \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dy \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^y \\ &= \frac{1}{M} \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dy \frac{y^2}{2} = \frac{1}{M} \int_0^1 \left[ \frac{y^3}{6} \right]_0^{1-x^2} dx = \frac{1}{M} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^3}{6} dx \\ &= \frac{1}{6M} \left[ x - \frac{3x^3}{3} + \frac{3x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{1}{M} \frac{8}{105} = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

Also

$$S = (x_S, y_S, z_S) = \left( \frac{5}{16}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7} \right).$$

■

**Beispiel 14.2.4** •• Berechne das Trägheitsmoment einer Vollkugel mit Masse  $M$  und Radius  $R$  um die  $z$ -Achse.

**Lösung:** Laut Definition errechnet sich das Trägheitsmoment bezüglich der  $z$ -Achse zu

$$\Theta_z = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho d\mu(x, y, z),$$

wobei  $\rho$  die Massendichte der Kugel bezeichnet (noch zu bestimmen). Wir rechnen in Kugelkoordinaten. In diesen Koordinaten ist

$$\Omega = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \mid 0 \leq r \leq R\}.$$

Es folgt  $x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi = r^2 \sin^2 \theta$ . Nach der Substitutionsregel müssen wir das Integrationsmass gemäss  $dxdydz = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$  ändern. Wir finden somit

$$\begin{aligned}\Theta_z &= \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho d\mu(x, y, z) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr \underbrace{r^2 \sin^2 \theta}_{=x^2+y^2} \rho = 2\pi \rho \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^R r^4 dr \\ &2\pi \rho \int_0^\pi \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta \int_0^R r^4 dr = 2\pi \rho \left[ -\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^R \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^R = 2\pi \rho \frac{4}{3} \frac{R^5}{5} = \frac{8\pi \rho}{15} R^5.\end{aligned}$$

Die Massendichte  $\rho$  wird aus der Masse der Kugel bestimmt

$$M = \int_{\Omega} \rho d\mu(x, y, z) = \rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr}_{=4\pi} = 4\pi \rho \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{4\pi \rho}{3} R^3 \Rightarrow \rho = \frac{3M}{4\pi R^3}.$$

Somit

$$\Theta_z = \frac{8\pi \rho}{15} R^5 = \frac{8\pi}{15} \frac{3M}{4\pi R^3} R^5 = \frac{2}{5} MR^2.$$

■

**Beispiel 14.2.5 • o o** Berechne das Trägheitsmoment um die  $z$ -Achse für einen Vollzylinder mit homogener Massendichte  $\rho$ , Höhe  $h$  und Radius  $a$ .

**Lösung:** Laut Definition errechnet sich das Trägheitsmoment bezüglich der  $z$ -Achse zu

$$\Theta_z = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho d\mu(x, y, z).$$

Diesmal rechnen wir in Zylinderkoordinaten. In diesen Koordinaten ist

$$\Omega = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} | 0 \leq r \leq a, 0 \leq z \leq h\}.$$

Weiter  $x^2 + y^2 = r^2$ . Nach der Substitutionsregel müssen wir  $dxdydz = r dr d\varphi dz$  schreiben. Somit

$$\begin{aligned}\Theta_z &= \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho d\mu(x, y, z) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^a r dr \underbrace{r^2}_{=x^2+y^2} \rho \\ &= 2\pi h \rho \int_0^a r^3 dr = 2\pi h \rho \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{\pi h \rho}{2} a^4.\end{aligned}$$

Die Massendichte  $\rho$  wird aus der Masse des Zylinders bestimmt

$$M = \int_{\Omega} \rho d\mu(x, y, z) = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^a r dr = \rho 2\pi h \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^a = \rho \pi h a^2 \Rightarrow \rho = \frac{M}{\pi h a^2}.$$

Somit

$$\Theta_z = \frac{\pi h \rho}{2} a^4 = \frac{\pi h}{2} \frac{M}{\pi h a^2} a^4 = \frac{1}{2} M a^2.$$

**Beispiel 14.2.6 •••** Die Hohlkugel  $\Omega$  habe die folgende Darstellung in Kugelkoordinaten

$$\Omega = \{(r, \theta, \phi) | 1-a \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

und habe eine konstante Massendichte  $\rho$ . Berechne das Trägheitsmoment bezüglich der  $z$ -Achse.

**Lösung:** Laut Definition errechnet sich das Trägheitsmoment bezüglich der  $z$ -Achse zu

$$\Theta_z = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho d\mu(x, y, z).$$

Wir rechnen in Kugelkoordinaten und finden

$$\begin{aligned} \Theta_z &= \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho d\mu(x, y, z) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{1-a}^1 r^2 dr \underbrace{r^2 \sin^2 \theta}_{=x^2+y^2} \rho \\ &= 2\pi\rho \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta}_{=4/3} \int_{1-a}^1 r^4 dr = 2\pi\rho \frac{4}{3} \left[ \frac{r^5}{5} \right]_{1-a}^1 = \frac{8\pi\rho}{15} (1 - (1-a)^5). \end{aligned}$$

Ein bisschen Kosmetik: Die Dichte  $\rho$  wird aus der Masse der Hohlkugel bestimmt

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Omega} \rho d\mu(x, y, z) = \rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta}_{=4\pi} \int_{1-a}^1 r^2 dr = 4\pi\rho \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{1-a}^1 = \frac{4\pi\rho}{3} (1 - (1-a)^3) \\ \Rightarrow \quad \rho &= \frac{3M}{4\pi(1 - (1-a)^3)}. \end{aligned}$$

Somit

$$\Theta_z = \frac{8\pi\rho}{15} (1 - (1-a)^5) = \frac{2M}{5} \frac{(1 - (1-a)^5)}{(1 - (1-a)^3)}.$$

Speziell ergibt sich mit  $a = 1$  das Trägheitsmoment der vollen Kugel

$$\Theta_z(a=1) = \frac{2}{5}M.$$

Mit dem Satz von Bernoulli-de l'Hôpital können wir das Trägheitsmoment einer Kugeloberfläche bestimmen

$$\lim_{a \rightarrow 0} \Theta_z(a) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2M}{5} \frac{(1 - (1-a)^5)}{(1 - (1-a)^3)} \stackrel{H.}{=} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2M}{5} \frac{5(1-a)^4}{3(1-a)^2} = \frac{2}{3}M.$$

**Beispiel 14.2.7 •••** Berechne das Trägheitsmoment von

$$\Sigma_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

bezüglich der  $x$ -Achse.

**Lösung:** Laut Definition errechnet sich das Trägheitsmoment bezüglich der  $x$ -Achse zu

$$\Theta_z = \int_{\Sigma_3} (y^2 + z^2) d\mu(x, y, z)$$

(da nichts über die Massendichte angegeben ist, nehmen wir  $\rho \equiv 1$ ). Wir schreiben  $\Sigma_3$  als Normalbereich. Wir wählen  $z$  aus und “vergessen” die anderen Variablen. Aus  $z \geq 0$  und  $z \leq 1$  folgt  $0 \leq z \leq 1$ . Dann betrachten wir  $y$ . Aus  $y \geq 0$  und  $y + z \leq 1$  finden wir  $0 \leq y \leq 1 - z$ . Ferner  $0 \leq x \leq 1 - y - z$ . Somit

$$\Sigma_3 = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - z, 0 \leq x \leq 1 - y - z\}$$

Mit der Formel für Normalbereiche finden wir dann

$$\begin{aligned}\Theta_z &= \int_{\Sigma_3} (y^2 + z^2) d\mu(x, y, z) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} dx (y^2 + z^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy [x(y^2 + z^2)]_0^{1-y-z} \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy (y^2 + z^2)(1 - y - z) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy (y^2 - y^3 - y^2 z + z^2 - z^2 y - z^3) \\ &= \int_0^1 dz \left[ \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{y^3 z}{3} + y z^2 - \frac{z^2 y^2}{2} - z^3 y \right]_0^{1-z} = \frac{1}{12} \int_0^1 dz (1 - 4z + 12z^2 - 16z^3 + 7z^4) \\ &= \frac{1}{12} \left[ z - 2z^2 + 4z^3 - 4z^4 + \frac{7z^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{30}.\end{aligned}$$

■



# Kapitel 15

## Oberflächenintegrale

In diesem Kapitel betrachten wir einen ganz anderen Typ von mehrdimensionalen Integralen, nämlich **Oberflächenintegrale**, welche Integrale auf zweidimensionalen Flächen in  $\mathbb{R}^3$  sind.

### 15.1 Flächen in $\mathbb{R}^3$

Genauso wie eine Kurve in  $\mathbb{R}^3$  (ein eindimensionales Objekt) durch einen Parameter parametrisiert werden kann, wird eine Fläche  $F \subset \mathbb{R}^3$  (ein zweidimensionales Objekt) mit zwei Parametern parametrisiert. Eine **Parametrisierung** einer Fläche  $F$  in  $\mathbb{R}^3$  ist also ein Diffeomorphismus

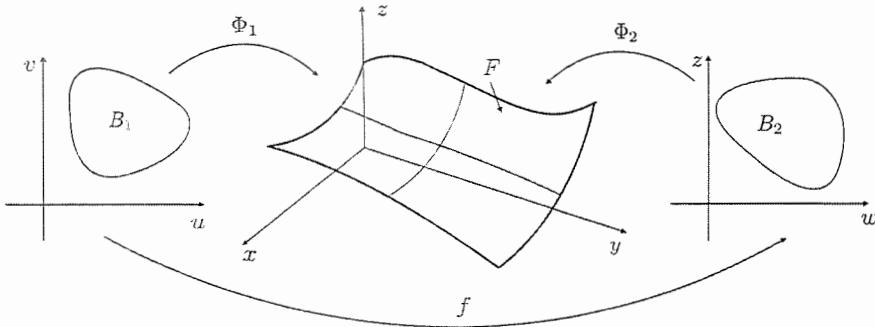
$$\Phi : B \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix},$$

sodass  $\Phi(B) = F$  gilt. Die Menge  $B$  heisst das **Parametergebiet** der Parametrisierung  $\Phi$ , denn sie gibt an, wo die Parameter  $u$  und  $v$  zu nehmen sind. Natürlich darf eine vorgegebene Fläche  $F$  mehr als eine Parametrisierung besitzen. Sind  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  zwei Parametrisierungen von  $F$  mit Parametergebieten  $B_1$  und  $B_2$ , so heisst der Diffeomorphismus  $f = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : B_1 \rightarrow B_2$  **Parameterwechsel**.

Man kann zum Beispiel die obere Halbkugel  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  mindestens auf zwei Arten parametrisieren. Man kann  $H$  mithilfe der Kugelkoordinaten parametrisieren. In diesem Fall sind die Parameter  $u = \theta$  und  $v = \varphi$  (nicht  $r$ , da  $r$  fix gleich 1 ist) und das Parametergebiet ist natürlich  $B = [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$ . Die Parametrisierung ist somit

$$\Phi : [0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (\theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Dieselbe Oberfläche kann aber auch als Graphen der Funktion  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  gesehen werden, wobei die Variablen  $x$  und  $y$  Werte in der Einheitsdisk annnehmen. Somit



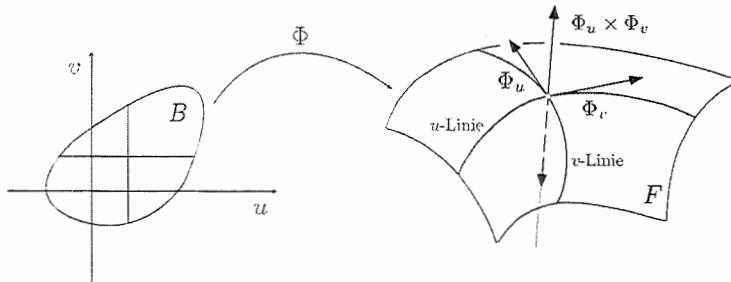
stellt

$$\Phi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}$$

eine weitere sinnvolle Parametrisierung von  $H$  dar. In diesem Fall sind die Parameter  $u = x$  und  $v = y$  mit Parametergebiet  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Je nachdem, ob wir  $v$  oder  $u$  festhalten und nur die Abhängigkeit in der anderen Variablen betrachten, erhalten wir die sogenannten *u- und v-Linien*. Diese Kurven besitzen die Tangentialvektoren

$$\Phi_u := \frac{\partial \Phi}{\partial u} \quad \text{und} \quad \Phi_v := \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Diese zwei Vektoren bilden eine Basis des (zweidimensionalen) Tangentialraumes an der Fläche  $F$  im Punkt  $\Phi(u, v)$ .



Die *Normale* an die Oberfläche ist ein Vektor der in jedem Punkt senkrecht zum Tangentialraum steht, also senkrecht zu  $\Phi_u$  und  $\Phi_v$ . Die Normale  $\vec{n}$  ist somit parallel zu  $\Phi_u \times \Phi_v$  und da sie Länge Eins haben muss, gilt

$$\vec{n} = \pm \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_u \times \Phi_v|}.$$

Damit die obige Gleichung Sinn macht, fordert man daher bei einer Parametrisierung, dass  $\Phi_u \times \Phi_v \neq 0$  in  $B$  gilt. Eine solche Parametrisierung nennt man *regulär*. Das Vorzeichen von  $\vec{n}$  darf für den Moment beliebig gewählt werden. Es wird aber eine Rolle bei der Berechnung des Flusses eines Vektorfeldes durch eine Oberfläche spielen.

## 15.2 Oberflächenmass

Wir wollen nun den Flächeninhalt einer in Parameterform dargestellten Fläche  $F$  bestimmen. Es gilt

**Definition 15.2.1 (Flächenelement und Flächeninhalt)** Das Flächenelement bezüglich der Parametrisierung  $\Phi$  ist

$$do = |\Phi_u \times \Phi_v| dudv = |\det(d\Phi)| dudv,$$

wobei

$$\Phi_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \Phi_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Der Flächeninhalt von  $F$  ist

$$\mu(F) = \int_F do = \int_B |\Phi_u \times \Phi_v| dudv.$$

Die Definition des Oberflächenmasses  $\mu(F)$  ist nicht nur geometrisch sinnvoll, sondern auch unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

**Beispiel 15.2.1** ••• Berechne den Flächeninhalt von

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

auf zwei Arten.

**Lösung:** a) Eine mögliche Parametrisierung einer Kugel mit Radius  $R$  und Zentrum  $(0, 0, 0)$  ist durch den Kugelkoordinaten

$$\Phi : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\theta, \varphi) \mapsto (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)$$

gegeben. Wir bestimmen nun die Vektoren  $\Phi_\theta$  und  $\Phi_\varphi$

$$\Phi_\theta = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \varphi \\ R \cos \theta \sin \varphi \\ -R \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \Phi_\varphi = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \varphi \\ R \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit

$$\Phi_\theta \times \Phi_\varphi = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \varphi \\ R \cos \theta \sin \varphi \\ -R \sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \varphi \\ R \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ R^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ R^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Darum

$$|\Phi_\theta \times \Phi_\varphi| = \sqrt{(R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi)^2 + (R^2 \sin^2 \theta \sin \varphi)^2 + (R^2 \sin \theta \cos \theta)^2} \\ = R^2 \sqrt{\sin^4 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta} = R^2 \sqrt{\sin^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} = R^2 \sin \theta.$$

Mit der Formel bekommen wir dann

$$\mu(F) = \int_F d\sigma = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{|\Phi_\theta \times \Phi_\varphi|}{R^2 \sin \theta} = 2\pi R^2 [-\cos \theta]_0^\pi = 4\pi R^2.$$

b) In der Variante kann man die Kugel als zwei Halbkugeln betrachten. Die obere Halbkugel können wir als Graphen von  $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  auf  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq R^2\}$  betrachten. Die Parametrisierung lautet somit

$$\Phi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq R^2\} \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen die Tangentialvektoren  $\Phi_x$  und  $\Phi_y$

$$\Phi_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}, \quad \Phi_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_x \times \Phi_y = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit

$$|\Phi_x \times \Phi_y| = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + 1} \\ = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + R^2 - x^2 - y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Der Flächeninhalt der oberen Halbkugel lautet somit

$$\mu(H) = \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq R\}} |\Phi_x \times \Phi_y| dx dy = \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq R\}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Der Term  $x^2 + y^2$  verlangt ganz offensichtlich Polarkoordinaten, also gehen wir in Polarkoordinaten über, um das Integral zu bestimmen

$$\mu(H) = \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq R\}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} \\ = 2\pi R \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2\pi R \left[ -\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^R = 2\pi R^2.$$

Der Flächeninhalt der Kugel ist somit  $2 \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^2$ . ■

**Beispiel 15.2.2 • o o Berechne den Flächeninhalt von**

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 < 8, z = \frac{1}{2}(x^2 + 2y^2) \right\}.$$

**Lösung:** Wegen der Vorschrift  $z = \frac{1}{2}(x^2 + 2y^2)$ , kann man  $F$  als Graphen der Funktion  $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + 2y^2)$  auf  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 4y^2 < 8\}$  sehen. Eine Parametrisierung von  $F$  ist somit

$$\Phi : B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 4y^2 < 8\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto \left( x, y, \frac{1}{2}(x^2 + 2y^2) \right).$$

Wir bestimmen nun die Vektoren  $\Phi_x$  und  $\Phi_y$

$$\Phi_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \quad \Phi_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \Phi_x \times \Phi_y = \begin{pmatrix} -x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Darum

$$|\Phi_x \times \Phi_y| = \sqrt{1 + x^2 + 4y^2}.$$

Mit der Formel bekommen wir dann

$$\mu(F) = \int_F d\sigma = \int_B dx dy \boxed{\sqrt{1 + x^2 + 4y^2}}.$$

Das Integral kann sehr leicht berechnet werden, wenn man auf elliptische Koordinaten übergeht. Wir setzen  $x = 2\sqrt{2}r \cos \theta$  und  $y = \sqrt{2}r \sin \theta$ . Wir kennen bereits die Transformationsregel für elliptische Koordinaten  $dxdy = 2\sqrt{2}\sqrt{2}rdrd\theta = 4rdrd\theta$ . Somit bekommen wir

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \int_F d\sigma = \int_B dx dy \sqrt{1 + x^2 + 4y^2} = \int_0^1 4r dr \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{1 + 8r^2 \cos^2 \theta + 4r^2 \cdot 2 \sin^2 \theta} \\ &= \int_0^1 4r dr \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{1 + 8r^2} = 8\pi \int_0^1 r \sqrt{1 + 8r^2} dr = 8\pi \left[ \frac{1}{24} (1 + 8r^2)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{26}{3}\pi. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 15.2.3 ••• Berechne den Flächeninhalt der Viviani-Oberfläche**

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0, \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

**Lösung:** Um eine Parametrisierung von  $F$  zu finden, benutzen wir Polarkoordinaten. Setzen wir  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  ein, so finden wir  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm\sqrt{1 - r^2}$ . Die Bedingung  $z \geq 0$  sagt uns aber, dass wir nur  $z = \sqrt{1 - r^2}$  betrachten müssen. Nun müssen wir noch die Bedingung  $\left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$  in Polarkoordinaten übersetzen. Aus  $(r \cos \varphi - 1/2)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2 \cos^2 \varphi - r \cos \varphi + \frac{1}{4} + r^2 \sin^2 \varphi \leq \frac{1}{4}$  folgt  $r^2 \leq r \cos \varphi$ . Es folgt somit  $r \leq \cos \varphi$ . Somit lautet eine Parametrisierung von  $F$

$$\Phi : B = [-\pi/2, \pi/2] \times [0, \cos \varphi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\varphi, r) \mapsto \left( r \cos \varphi, r \sin \varphi, \sqrt{1 - r^2} \right).$$

Wir bestimmen nun die Vektoren  $\Phi_\varphi$  und  $\Phi_r$ .

$$\Phi_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}} \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \Phi_\varphi \times \Phi_r = \begin{pmatrix} -\frac{r^2 \cos \varphi}{\sqrt{1-r^2}} \\ -\frac{r^2 \sin \varphi}{\sqrt{1-r^2}} \\ -r \end{pmatrix}.$$

Darum

$$|\Phi_\varphi \times \Phi_r| = \sqrt{\frac{r^4 \cos^2 \varphi}{1-r^2} + \frac{r^4 \sin^2 \varphi}{1-r^2} + r^2} = \sqrt{r^2 \left( \frac{r^2}{1-r^2} + 1 \right)} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Mit der Formel bekommen wir dann

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \int_F d\sigma = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} dr \boxed{\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}} = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \left[ -\sqrt{1-r^2} \right]_0^{\cos \varphi} \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \sqrt{1-\cos^2 \varphi} \right) d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin \varphi) d\varphi = \pi - 2. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 15.2.4** ••• Berechne den Flächeninhalt der folgenden Oberfläche ( $-1 < a < b < 1$ )

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, a < z < b\}.$$

Das ist der Teil von  $S^2$  für den  $a < z < b$  gilt.

**Lösung:** Wir parametrisieren die Oberfläche wie folgt

$$\Phi : B = [0, 2\pi) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\varphi, z) \rightarrow \left( \sqrt{1-z^2} \cos \varphi, \sqrt{1-z^2} \sin \varphi, z \right).$$

Das ist eine weitere Möglichkeit, eine Kugel ohne Kugelkoordinaten zu parametrisieren. Diese Parametrisierung hat den Vorteil, dass  $z$  als Variable vorkommt. Wir bestimmen nun die Vektoren  $\Phi_\varphi$  und  $\Phi_z$

$$\Phi_\varphi = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-z^2} \sin \varphi \\ \sqrt{1-z^2} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_z = \begin{pmatrix} \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}} \cos \varphi \\ \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}} \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \Phi_\varphi \times \Phi_z = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-z^2} \cos \varphi \\ -\sqrt{1-z^2} \sin \varphi \\ -z \end{pmatrix}.$$

Darum

$$|\Phi_\varphi \times \Phi_z| = \sqrt{(1-z^2)(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + z^2} = 1.$$

Mit der Formel bekommen wir dann

$$\mu(F) = \int_F d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b dz \boxed{|\Phi_\varphi \times \Phi_z|} = 2\pi(b-a).$$

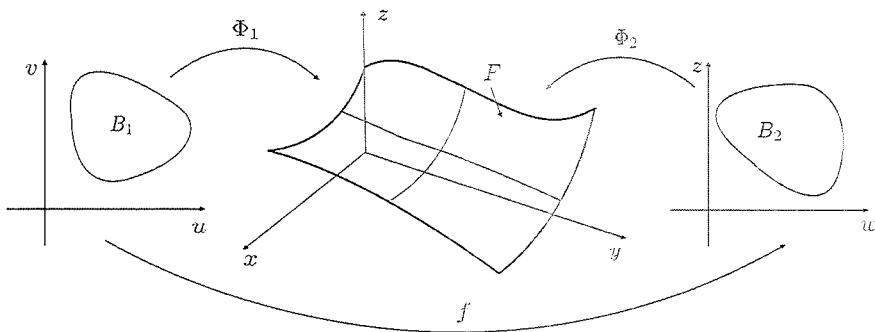
■

**Beispiel 15.2.5** ••• Beweise, dass  $\mu(F)$  unabhängig von der gewählten Parametrisierung ist.

**Lösung:** Es seien  $\Phi_1 : B_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\Phi_2 : B_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  zwei Parametrisierungen von  $F$ . Aus der Definition von Parametrisierung folgt, dass  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  zwei Diffeomorphismen sind. So ist auch die Abbildung

$$f := \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : B_1 \rightarrow B_2$$

ein Diffeomorphismus von  $B_1$  auf  $B_2$ , da Zusammensetzung zweier Diffeomorphismen.  $f$  ist der Parameterwechsel von den Koordinaten  $(u, v)$  zu den neuen Koordinaten  $(w, z) = f(u, v)$ .



Wir schreiben die Gleichung  $f = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$  in der Form  $\Phi_1 = \Phi_2 \circ f$ . Nach der Kettenregel ist dann

$$d\Phi_1(u, v) = d\Phi_2(f(u, v)) \cdot df(u, v) = d\Phi_2(w, z) \cdot df(u, v).$$

Nun benutzen wir die Definition des Oberflächenmasses (die Definition mit der Determinante ist in diesem Fall am geeignetesten). Wegen  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$  gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \right| &= |\det(d\Phi_1(u, v))| = |\det((d\Phi_2(w, z)) \cdot df(u, v)))| = |\det(d\Phi_2(w, z))| \cdot |\det(df(u, v))| \\ &= \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} \times \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right| \cdot |\det(df(u, v))|. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\int_{B_1} \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \right| du dv = \int_{B_1} \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} \times \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right| \cdot |\det(df(u, v))| du dv.$$

Wenn wir nun die Integration auf  $B_1$  in eine Integration über  $B_2$  umwandeln wollen, müssen wir natürlich die Substitutionsregel beachten:  $dwdz = |\det(df(u, v))| du dv$ . Somit gilt

$$\int_{B_1} \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \right| du dv = \int_{B_1} \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} \times \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right| \cdot \underbrace{|\det(df(u, v))| du dv}_{=dwdz} = \int_{B_2} \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} \times \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right| dw dz.$$

$\mu(F)$  ist also unabhängig von der Wahl der Parametrisierung. ■

## 15.3 Oberflächenintegrale

Ebenso können wir für eine stetige Funktion  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  bezüglich einer Parametrisierung  $\Phi : B \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \rightarrow \Phi(u, v)$  von  $F$  das *Oberflächenintegral* definieren

$$\int_F f(x) do = \int_B f(\Phi(u, v)) |\Phi_u \times \Phi_v| du dv.$$

Analog zur Definition des Oberflächenmasses  $\mu(F)$  ist das oben definierte Oberflächenintegral unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

**Beispiel 15.3.1 •••** Betrachte die Menge  $\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | 1/2 < u < v < 1\}$ . Berechne das Oberflächenintegral

$$\int_F \frac{x^2 + y^2}{z^3} do,$$

wobei  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z) = (\sin(uv), \cos(uv), u), (u, v) \in \Omega\}$ .

**Lösung:** Aus der Definition von  $F$  kann man direkt die Parametrisierung ablesen

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \rightarrow (\sin(uv), \cos(uv), u).$$

Wir bestimmen nun die Vektoren  $\Phi_u$  und  $\Phi_v$

$$\Phi_u = (v \cos(uv), -v \sin(uv), 1), \quad \Phi_v = (u \cos(uv), -u \sin(uv), 0).$$

Somit

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} v \cos(uv) \\ -v \sin(uv) \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \cos(uv) \\ -u \sin(uv) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \sin(uv) \\ u \cos(uv) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\Phi_u \times \Phi_v| = u.$$

Somit

$$\int_F \frac{x^2 + y^2}{z^3} do = \int_{\Omega} \frac{\cos^2(uv) + \sin^2(uv)}{u^3} \cdot \boxed{u} \cdot dudv = \int_{\Omega} \frac{dudv}{u^2}.$$

Nun haben wir ein Integral über  $\Omega$  zu bestimmen. Dazu schreiben wir  $\Omega$  als Normalbereich

$$\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | 1/2 < u < v < 1\} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | 1/2 < u < 1, u < v < 1\}.$$

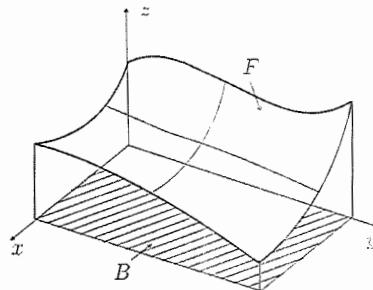
Wir bekommen somit

$$\begin{aligned} \int_F \frac{x^2 + y^2}{z^3} do &= \int_{\Omega} \frac{dudv}{u^2} = \int_{1/2}^1 du \int_u^1 dv \frac{1}{u^2} \\ &= \int_{1/2}^1 du \frac{1}{u^2} [v]_u^1 = \int_{1/2}^1 du \left( \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} \right) = \left[ -\frac{1}{u} - \log(u) \right]_{1/2}^1 \\ &= -1 + 2 - 0 + \log(1/2) = 1 - \log(2). \end{aligned}$$

■

## 15.4 Oberflächenintegral über den Graphen einer Funktion von zwei Variablen

Von besonderem Interesse ist der Spezialfall, dass  $F$  der Graph einer Funktion von zwei Variablen  $f(x, y)$  auf dem Bereich  $B$  ist.



In diesem Fall lautet die Parametrisierung der Oberfläche natürlich

$$\Phi : B \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix},$$

weil  $z = f(x, y)$ . Die Tangentialvektoren  $\Phi_x$  und  $\Phi_y$  lauten somit

$$\Phi_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \Phi_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_x \times \Phi_y = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix},$$

sodass das Flächenelement  $do$  lautet

$$do = |\Phi_x \times \Phi_y| dx dy = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx dy.$$

Es folgt daher die folgende nützliche Formel

**Satz 15.4.1** Für den Flächeninhalt der von der differenzierbaren Funktion  $f(x, y)$  definierten Oberfläche  $F = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in B\}$  gilt

$$\mu(F) = \int_B \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx dy$$

und für eine stetige Funktion  $g : F \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $F$  gilt

$$\int_F g do = \int_B g(x, y) \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx dy.$$

Einige Beispiele dazu.

**Beispiel 15.4.1 •••** Betrachte die Menge  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 2z\}$ . Berechne den Flächeninhalt von

$$F = \{(x, y, z) \in \Omega | z < 1\}.$$

**Lösung:** Wir schreiben die Menge  $F$  etwas um

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \Omega | z < 1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z < 1, x^2 + y^2 = 2z\} \\ &\stackrel{z=(x^2+y^2)/2 \geq 0}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq z < 1, z = (x^2 + y^2)/2\}. \end{aligned}$$

Wegen der Vorschrift  $z = (x^2 + y^2)/2$  kann man  $F$  als Graphen der Funktion  $f(x, y) = (x^2 + y^2)/2$  auf

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 2\}$$

sehen. Nach der obigen Formel lautet das Oberflächenelement

$$do = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx dy = \sqrt{1 + (x)^2 + (y)^2} dx dy = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

Somit

$$\mu(F) = \int_F do = \int_B dx dy \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Wir gehen auf Polarkoordinaten über, um das Integral zu bestimmen. Wir schreiben  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = \sin \varphi$  und berücksichtigen die Substitutionsregel  $dxdy = rdrd\varphi$ . In Polarkoordinaten wird die Bedingung  $x^2 + y^2 < 2$  zu  $r < \sqrt{2}$ . Wir bekommen somit

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \int_F do = \int_B dx dy \sqrt{1 + x^2 + y^2} = \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{1 + r^2} \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r \sqrt{1 + r^2} dr = 2\pi \left[ \frac{1}{3}(1 + r^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

■

**Beispiel 15.4.2 •••** Berechne  $\int_F \frac{1}{z} do$  für

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = (x^2 + y^2)^{-1/2}, 1 \leq z \leq 2\}.$$

**Lösung:** Wegen der Vorschrift  $z = (x^2 + y^2)^{-1/2}$  kann man  $F$  als Graphen der Funktion

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$$

sehen. Aus  $1 \leq z \leq 2$  folgt zusammen mit  $z = (x^2 + y^2)^{-1/2}$ , dass  $1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ . Darum ist  $F$  der Graph der Funktion  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$  auf

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

## 15.4. OBERFLÄCHENINTEGRAL ÜBER DEN GRAPHEN EINER FUNKTION VON ZWEI VARIABLEN

---

Die Parametrisierung von  $F$  lautet somit

$$\Phi : B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, 1/\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Nach der obigen Formel lautet das Oberflächenelement

$$do = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dxdy = \sqrt{1 + \left( \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right)^2 + \left( \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right)^2} = \frac{\sqrt{1 + (x^2 + y^2)^2}}{x^2 + y^2} dxdy.$$

Somit

$$\int_F \frac{1}{z^4} do = \int_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}} (x^2 + y^2)^2 \cdot \frac{\sqrt{1 + (x^2 + y^2)^2}}{x^2 + y^2} dxdy.$$

Jetzt befassen wir uns mit Polarkoordinaten ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $dxdy = rdrd\varphi$ ) und bekommen

$$\begin{aligned} \int_F \frac{1}{z^4} do &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1/2}^1 r dr \cdot r^2 \sqrt{1 + r^4} = 2\pi \int_0^1 r^3 \sqrt{1 + r^4} dr \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{6} (1 + r^4)^{3/2} \right]_{1/2}^1 = \frac{\pi}{3} \left( 2\sqrt{2} - \frac{17}{64}\sqrt{17} \right). \end{aligned}$$

■

**Beispiel 15.4.3 ••◦ Berechne  $\int_F \frac{1}{\sqrt{1-y^4}} do$  für**

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \pi/4 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq 1/\sqrt{2}, z = x + y^2/\sqrt{2}\}.$$

**Lösung:** Wegen der Vorschrift  $z = x + y^2/\sqrt{2}$  kann man  $F$  als Graphen der Funktion

$$f(x, y) = z = x + y^2/\sqrt{2}$$

auf  $B = [\pi/4, \pi/2] \times [0, 1/\sqrt{2}]$  sehen. Nach der obigen Formel lautet das Oberflächenelement

$$do = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dxdy = \sqrt{1 + (1)^2 + (\sqrt{2}y)^2} dxdy = \sqrt{2 + 2y^2} dxdy.$$

Somit

$$\begin{aligned} \int_F \frac{1}{\sqrt{1-y^4}} do &= \sqrt{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_0^{1/\sqrt{2}} dy \frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1-y^4}} = \sqrt{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_0^{1/\sqrt{2}} dy \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \sqrt{2} [x]_{\pi/4}^{\pi/2} [\arcsin(y)]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi^2}{16} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 15.4.4 ••◦ Berechne  $\int_F z^2 do$  für**

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, x^2 + y^2 < 1, z = xy\}.$$

Lösung: Wegen der Vorschrift  $z = xy$  kann man  $F$  als Graphen der Funktion  $f(x, y) = xy$  auf

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, x^2 + y^2 < 1\}$$

sehen. Nach der obigen Formel lautet das Oberflächenelement

$$do = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx dy = \sqrt{1 + (y)^2 + (x)^2} dx dy = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

Somit

$$\int_F z^2 do = \int_B dx dy x^2 y^2 \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Jetzt befassen wir uns mit Polarkoordinaten, um das Integral zu bestimmen. In Polarkoordinaten lauten die Bedingungen  $0 \leq y \leq \sqrt{3}x$ ,  $x^2 + y^2 < 1$  wie folgt

$$r^2 < 1, 0 \leq r \sin \varphi \leq \sqrt{3}r \cos \varphi \Rightarrow r < 1, 0 \leq \tan \varphi < \sqrt{3} \Rightarrow r < 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

Wir bekommen somit

$$\begin{aligned} \int_F z^2 do &= \int_B dx dy x^2 y^2 \sqrt{1 + x^2 + y^2} = \int_0^1 r dr \int_0^{\pi/3} d\varphi r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \sqrt{1 + r^2} \\ &= \left( \int_0^1 r^5 \sqrt{1 + r^2} dr \right) \left( \int_0^{\pi/3} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \right). \end{aligned}$$

Wir berechnen die Integrale separat. Das  $r$ -Integral berechnet man mit zwei partiellen Integrationen

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^5 \sqrt{1 + r^2} dr &= \int_0^1 \boxed{r^4} \cdot \boxed{r \sqrt{1 + r^2}} dr = \left[ \frac{1}{3} r^4 (1 + r^2)^{3/2} \right]_0^1 - \frac{4}{3} \int_0^1 r^3 (1 + r^2)^{3/2} dr \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{4}{3} \int_0^1 \boxed{r^2} \cdot \boxed{r (1 + r^2)^{3/2}} dr \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{4}{3} \left[ \frac{1}{5} r^2 (1 + r^2)^{5/2} \right]_0^1 + \frac{8}{15} \int_0^1 r (1 + r^2)^{5/2} dr \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{16}{15} \sqrt{2} + \frac{8}{15} \left[ \frac{1}{7} (1 + r^2)^{7/2} \right]_0^1 = \frac{2}{105} (11\sqrt{2} - 4). \end{aligned}$$

Das  $\varphi$ -Integral kann man mit der Formel  $2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin(2\varphi)$  bestimmen

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/3} \sin^2(2\varphi) d\varphi = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{4} (2\varphi - \sin(2\varphi) \cos(2\varphi)) \right]_0^{\pi/3} \\ &= \frac{1}{16} \left( \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \right). \end{aligned}$$

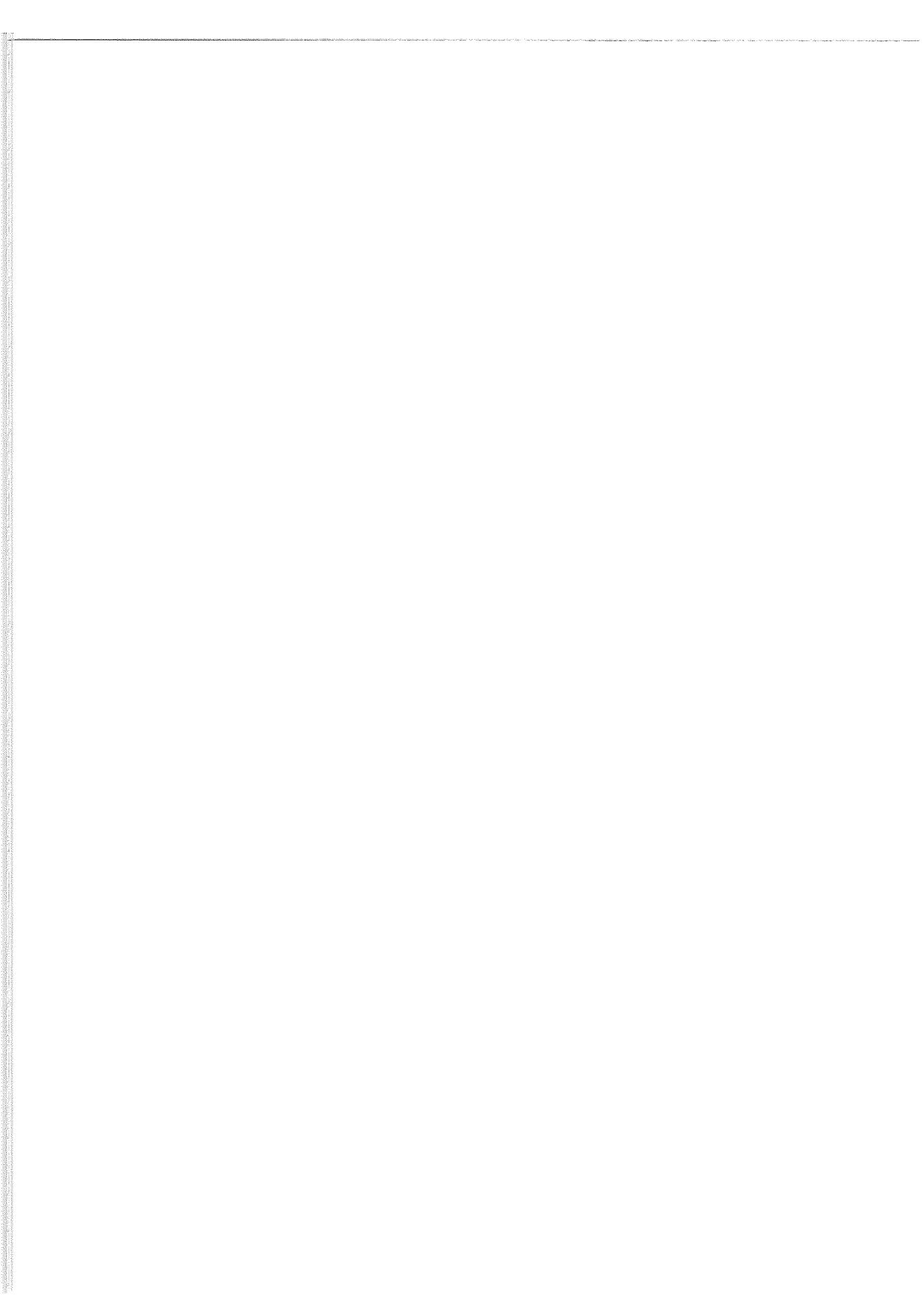
Somit

$$\int_F z^2 do = \left( \int_0^1 r^5 \sqrt{1 + r^2} dr \right) \left( \int_0^{\pi/3} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \right) = \frac{1}{420} (11\sqrt{2} - 4) \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right).$$

■

# Teil III

## Vektoranalysis



## Kapitel 16

# Grundbegriffe der Vektoranalysis

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Vektoranalysis behandelt. Grundsätzlich geht es darum, die Hauptobjekte der Vektoranalysis zu definieren (das sind Skalar- und Vektorfelder) sowie die wichtigsten Operationen anzuschauen, welche sich auf diese Objekte auswirken können. Wie üblich wird die essentielle Theorie von vielen ausführlich gelösten Beispielen unterstützt.

### 16.1 Skalarfelder und Vektorfelder

Also los! Unter *Vektoranalysis* in der klassischen Formulierung versteht man üblicherweise die Theorie der Skalar- und Vektorfelder. Einfach ausgedrückt ist ein Feld nichts Anderes als eine Abbildung, welche auf dem Raum  $\mathbb{R}^n$  definiert ist (oder auf einer echten Teilmenge davon). Wird jedem Punkt ein Skalar zugeordnet, so spricht man von einem *Skalarfeld*. Wird hingegen jedem Punkt des Raumes ein Vektor zugeordnet, so spricht man von einem *Vektorfeld*. Da Felder mehr oder weniger überall in der Physik vorkommen (man denke zum Beispiel an elektrische und magnetische Felder), gehört heute die Vektoranalysis zur Grundausbildung in Mathematik, Physik und im wissenschaftlichen Bereich allgemein.

#### 16.1.1 Skalarfelder

Ein *Skalarfeld* ist eine Abbildung  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , welche jedem Punkt  $x$  des Definitionsbereiches  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine Zahl (Skalar) zuordnet. In Formeln heisst dies

$$f : \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Ein Skalarfeld ist somit nichts Anderes als eine Funktion von  $n$  Variablen. Normalerweise ist  $n = 2, 3$ . Schauen wir uns einige Beispiele kurz an.

**Beispiel 16.1.1** Die Temperaturverteilung in einem Körper  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$T : \quad \vec{x} \rightarrow T(x, y, z)$$

stellt ein Skalarfeld dar. Es wird nämlich jedem Punkt  $\vec{x} \in \Omega$  des Körpers eine Zahl zugeordnet, und zwar die Temperatur in  $\vec{x}$ . ■

**Beispiel 16.1.2** Abstand eines Punktes vom Ursprung des Koordinatensystems in zwei

$$d : \vec{x} \rightarrow d(\vec{x}) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

oder drei Dimensionen

$$d : \vec{x} \rightarrow d(\vec{x}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Jedem Punkt von  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  wird die Distanz des Punktes zum Ursprung zugeordnet. ■

**Beispiel 16.1.3** Irgendeine Funktion von drei Variablen, wie etwa

$$f : (x, y, z) \rightarrow x^2 y^3 z - 3\sqrt{|z^4 x^2| \cos(y)} - e^{\arctan(y+z-1)}$$

definiert ein Skalarfeld auf  $\mathbb{R}^3$ . ■

### 16.1.2 Vektorfelder

Ein **Vektorfeld** ist eine Abbildung  $\vec{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , welche jedem Punkt  $x$  des Definitionsbereiches  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  einen Vektor mit  $m$  Komponenten zuordnet. Ein Vektorfeld hat also die Form

$$\vec{v} : x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \vec{v}(x) = \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ v_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ v_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

wobei  $v_1, \dots, v_m$   $m$  Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$  sind. Ein Vektorfeld kann man sich also als einen Vektor von  $m$  Funktionen von  $n$  Variablen denken. Auch hier sind normalerweise  $n, m = 2, 3$ . Wir betrachten jetzt einige Beispiele von Vektorfeldern auf  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ .

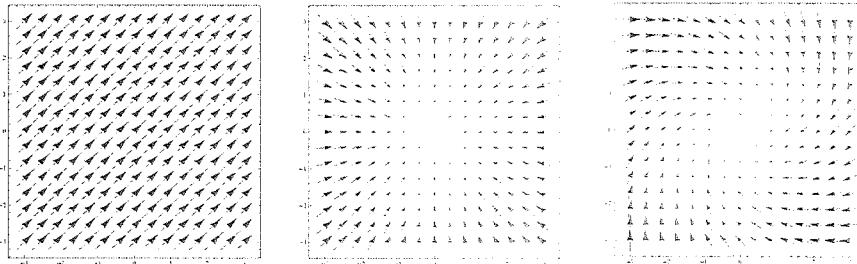
**Beispiel 16.1.4** Die Figur 16.1 (a) gibt die graphische Darstellung (Feldlinien) des Vektorfeldes

$$\vec{v}_1(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an, welches jedem Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  denselben Vektor  $(1, 1)$  zuordnet. Ein solches Vektorfeld, das jedem Punkt denselben Vektor zuordnet, heißt **homogen**. ■

**Beispiel 16.1.5** Die Figur 16.1 (b) bezieht sich auf das Vektorfeld,

$$\vec{v}_2(x, y) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$



**Abbildung 16.1:** Feldlinien der Vektorfelder  $v_1$ ,  $v_2$  und  $v_3$ .

welches jedem Punkt  $(x, y)$  den Vektor  $(-x, -y)$  zuordnet. Wie man sieht, zeigen alle Vektoren nach dem Zentrum.

**Beispiel 16.1.6** Die Figur 16.1 (c) zeigt ein etwas wirbelnderes Vektorfeld:

$$\vec{v}_3(x, y) = \begin{pmatrix} -x + y \\ -x - y \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 16.1.7** Kraftfelder, welche in der Physik so oft vorkommen, sind Vektorfelder, da jedem Punkt  $\vec{x}$  ein Kraftvektor  $\vec{F}(\vec{x})$  zugeordnet wird. Beispiele sind: für  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  elektrisches Kraftfeld (Coulomb)

$$\vec{F}_C : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{x} \rightarrow \vec{F}_C(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{x}$$

oder Gravitationskraftfeld (Newton)

$$\vec{F}_G : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{x} \rightarrow \vec{F}_G(\vec{x}) = -\frac{GmM}{r^3} \vec{x}.$$

$r = |\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  bezeichnet hier den Abstand vom Koordinatenursprung.

## 16.2 Differentialoperatoren

Nachdem wir die Hauptobjekte der Vektoranalysis eingeführt und ein bisschen kennengelernt haben, wollen wir nun die Differentialoperatoren der Vektoranalysis näher anschauen. Natürlich kennt die Vektoranalysis sowohl vektorielle als auch skalare Operatoren. Diese Operatoren werden auf Skalar- oder Vektorfelder angewandt, sodass neue Skalar- oder Vektorfelder resultieren.

In diesem Abschnitt werden wir zusammen mit sehr einfachen Beispielen meistens eine Reihe von Rechenvorschriften angeben. Welche Bedeutung oder Wichtigkeit die eingeführten Objekte haben, wird im Laufe der weiteren Kapitel klarer werden.

### 16.2.1 Der Gradient

Den ersten wichtigen Differenzialoperator der Vektoranalysis kennen wir bereits: den **Gradienten**. Ist  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetig differenzierbares Skalarfeld, so definiert man den Gradienten von  $f$  als

$$\text{grad}(f) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist der Gradient des Skalarfeldes  $f$  ein Vektorfeld. Der Gradient “frisst” also ein Skalarfeld und macht daraus ein neues Vektorfeld.

In der Praxis ist es sehr nützlich den sogenannten **Nabla-Operator**  $\nabla$  einzuführen. Das definiert man als

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Es ist ein Vektor, wobei die Komponenten keine Zahlen oder Funktionen sind, sondern Operatoren ( $\frac{\partial}{\partial x_i}$  in diesem Fall). Man spricht von einem **Vektoroperator**. Der Vorteil dieser Notation besteht meistens darin, dass man mit  $\nabla$  genauso wie mit normalen Vektoren rechnen kann. Aufpassen muss man nur, wenn Produkte vorkommen, da in solchen Situationen die Produktregel beachtet werden muss. Das formale Rechnen mit  $\nabla$  heisst **Nabla-Kalkül**. Wendet man zum Beispiel  $\nabla$  komponentenweise auf das Skalarfeld  $f$  an, so bekommt man natürlich einen Vektor, eben den Gradienten von  $f$ . Geschrieben wird somit

$$\text{grad}(f) = \nabla f.$$

**Beispiel 16.2.1** ○○○ Berechne den Gradienten der folgenden Skalarfelder:

- a)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow \frac{1}{2}x^2z^2 - 3yz^2 + xy$
- b)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow e^{-xy} \arctan z$
- c)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x^2 + ye^{x-1}$
- d)  $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow \frac{1}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

**Lösung:** Einfache direkte Rechnung. Im ersten Fall bekommen wir

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz^2 + y \\ x - 3z^2 \\ x^2z - 6yz \end{pmatrix}.$$

Im zweiten Fall

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ye^{-xy} \arctan z \\ -xe^{-xy} \arctan z \\ \frac{e^{-xy}}{1+z^2} \end{pmatrix}.$$

Im dritten Fall

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + ye^{x-1} \\ e^{x-1} \end{pmatrix}.$$

Schlussendlich für  $\vec{x} \neq 0$

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \\ \frac{-y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \\ \frac{-z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \end{pmatrix} = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}.$$

■

**Beispiel 16.2.2** ○○○ Berechne den Gradienten des Skalarfeldes

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

im Punkt  $P_0 = (1, 0, 1)$ .

**Lösung:** Eine direkte Rechnung ergibt

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

■

**Beispiel 16.2.3** ○○○ Es sei  $A \in S_{n \times n}(\mathbb{R})$  eine symmetrische  $n \times n$  Matrix ( $A^T = A$ ). Wir betrachten das Skalarfeld

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x^T A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j,$$

wobei  $a_{ij}$  die Komponenten von  $A$  sind. Bestimme  $\text{grad}(f)$ .

**Lösung:** Zuerst schreiben wir  $f$  explizit auf

$$\begin{aligned} f(x) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + \\ &\quad + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2. \end{aligned}$$

Wir rechnen die partiellen Ableitungen von  $f$  aus und bekommen

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n \\ a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + a_{12}x_1 + \cdots + a_{n2}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + 2a_{nn}x_n + a_{1n}x_1 + \cdots + a_nx_n \end{pmatrix}$$

Da  $A$  symmetrisch ist, gilt  $a_{ij} = a_{ji}$ . Somit

$$\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_n \\ 2a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 + \cdots + 2a_{2n}x_n \\ \vdots \\ 2a_{n1}x_1 + 2a_{n2}x_2 + \cdots + 2a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ 2 \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ 2 \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{pmatrix} = 2Ax.$$

■

### 16.2.2 Richtungsableitung

Gegeben seien das stetig differenzierbare Skalarfeld  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und der Einheitsvektor  $\vec{e}$ . Der Ausdruck

$$D_{\vec{e}}f(x_0) := \vec{e} \cdot \nabla f(x_0)$$

heisst **Richtungsableitung** von  $f$  im Punkt  $x_0$  und Richtung  $\vec{e}$ . Die Richtungsableitung hat die folgende anschauliche Interpretation:  $D_{\vec{e}}f(x_0)$  misst die Änderung von  $f$  im Punkte  $x_0$  in Richtung  $\vec{e}$ .

**Beispiel 16.2.4** Man berechne die Richtungsableitung von

- a)  $f(x, y, z) = e^{-xy} \arctan z$  im Punkt  $P_0 = (1, 0, 1)$  und in Richtung  $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$
- b)  $f(x, y, z) = \sin xyz$  im Punkt  $P_0 = (1, 0, 1)$  und Richtung  $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1)$ .

Lösung: a) Der Gradient von  $f$  lautet

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -ye^{-xy} \arctan z \\ -xe^{-xy} \arctan z \\ \frac{e^{-xy}}{1+z^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Somit haben wir

$$D_{\vec{e}}f(P_0) = \vec{e} \cdot \nabla f(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0 - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{-2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \left( \frac{\pi}{4} + 1 \right).$$

b) Der Gradient von  $f$  lautet

$$\nabla f = \begin{pmatrix} yz \cos xyz \\ xz \cos xyz \\ xy \cos xyz \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit haben wir

$$D_{\vec{e}} f(P_0) = \vec{e} \cdot \nabla f(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

■

**Beispiel 16.2.5** Es ist bekannt, dass die Richtungsableitung des Skalarfeldes  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $x_0$  in Richtung  $(1, 0)$  gleich 4 ist und dass diejenige in Richtung  $(1, -1)$  gleich 3 ist. Man bestimme den Gradienten von  $f$  in  $x_0$ .

**Lösung:** Laut Definition

$$D_{(1,0)} f(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 4.$$

In Richtung  $(1, -1)$ <sup>1</sup>

$$D_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)} f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \stackrel{!}{=} 3.$$

Wir lösen nach  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0)$  auf und bekommen  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0) = 4 - 3\sqrt{2}$ . Somit gilt

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 - 3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

■

**Beispiel 16.2.6** Man bestimme  $\vec{e}$  derart, dass  $D_{\vec{e}} f(x_0)$  maximal ist.

**Lösung:** Wir benutzen die Definition des Skalarproduktes

$$D_{\vec{e}} f(x_0) = \vec{e} \cdot \nabla f(x_0) = |\vec{e}| \cdot |\nabla f(x_0)| \cos \theta$$

wobei  $\theta$  den Winkel zwischen  $\vec{e}$  und  $\nabla f(x_0)$  bezeichnet. Es gilt somit

$$D_{\vec{e}} f(x_0) \text{ maximal} \Leftrightarrow \theta = 0, \pi \Leftrightarrow \vec{e} \parallel \nabla f(x_0).$$

Dies bedeutet, dass  $D_{\vec{e}} f(x_0)$  maximal ist, falls  $\vec{e}$  parallel zum Gradienten im Punkte  $x_0$  steht. Da  $D_{\vec{e}} f(x_0)$  die Änderung der Funktion  $f$  in Richtung  $\vec{e}$  misst, lernen wir einen wichtigen Fakt: Der Gradient zeigt in die Richtung der maximalen Zuwachsrate von  $f$  und seine Länge ist gleich der maximalen Änderung von  $f$ .

■

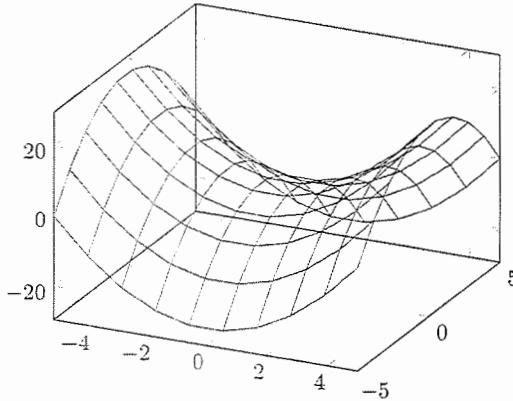
<sup>1</sup>Wichtig: Die Richtung muss normiert werden!

**Beispiel 16.2.7** Berechne die Richtung des grössten Anstiegs der Funktion  $f(x, y) = x^2 - y^2$  im Punkt  $(1, 1)$  und die Steigung in dieser Richtung.

Lösung: Der Gradient von  $f$  ist

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aus dem vorigen Beispiel wissen wir, dass  $f$  in Richtung des Gradienten, also des Vektors  $(2, -2)$ , am schnellsten wächst.



Wir normieren den Vektor, weil wir nur an der Richtung interessiert sind

$$\bar{v} = \frac{\nabla f(1, 1)}{|\nabla f(1, 1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Steigung im Punkt  $(1, 1)$  in dieser Richtung beträgt dann

$$D_{\bar{v}} f(1, 1) = \bar{v} \cdot \nabla f(1, 1) = |\nabla f(1, 1)| = 2\sqrt{2}.$$

■

### 16.2.3 Die Divergenz

Gegeben sei ein Vektorfeld  $\vec{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^1$  mit Komponenten  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Die **Divergenz** von  $\vec{v}$  ist definiert als

$$\operatorname{div}(\vec{v}) := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}.$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist somit ein Skalarfeld. Physikalisch misst die Divergenz die Quellenstärke des Vektorfeldes. Ein Vektorfeld  $\vec{v}$  mit der Eigenschaft, dass  $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$  ist, heisst somit *quellenfrei* (oder divergenzfrei).

In kompakter Form kann man die Divergenz von  $\vec{v}$  mithilfe des  $\nabla$ -Operators als formales Skalarprodukt ausdrücken

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}.$$

Hier sind einige einfache Beispiele, um das Konzept zu fixieren.

**Beispiel 16.2.8** Berechne die Divergenz der folgenden Vektorfelder

a)  $\vec{v} = (xy^2, 2x^2yz, 3yz^2)$

b)  $\vec{v} = \left( \frac{xy}{x^2+y^2}, \frac{xy}{x^2+y^2} \right)$

c)  $\vec{v} = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$

**Lösung:** a) Eine einfache Rechnung ergibt

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = y^2 + 2x^2z + 6yz.$$

b) Eine direkte Rechnung ergibt

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x(x^2+y^2) - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^2-y^2)(x-y)}{(x^2+y^2)^2}.$$

c) Eine direkte Rechnung ergibt

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{2xy - 2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

Das Vektorfeld  $\vec{v}$  ist somit divergenzfrei. ■

**Beispiel 16.2.9** Gegeben ist das Vektorfeld  $\vec{v} = (-2xy^3z^2, xy^2z, x^2z)$ . Berechne folgende Ausdrücke:  $\operatorname{div}(\vec{v})$ ,  $\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{v}))$  und  $\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{v}))(-2, 2, 1)$

**Lösung:** Eine direkte Rechnung ergibt

$$\nabla \cdot \vec{v} = -2y^3z^2 + 2xyz + x^2 \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = \begin{pmatrix} 2yz + 2x \\ -6y^2z^2 + 2xz \\ -4y^3z + 2xy \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{v})(-2, 2, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -28 \\ -40 \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 16.2.10** ◯ ◯ ◯ Berechne die Divergenz des Coulombschen Feldes

$$\vec{v} = \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

für  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ .

**Lösung:** Nach direkter Rechnung finden wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{v}) &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ &= \frac{3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0. \end{aligned}$$

**Beispiel 16.2.11** ◯ ◯ ◯ Berechne die Divergenz von  $\vec{v}(x) = x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lösung:**

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

#### 16.2.4 Die Rotation

Gegeben sei ein Vektorfeld  $\vec{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  von der Klasse  $C^1$  mit Komponenten  $v_1, v_2, v_3$ . Die *Rotation* von  $\vec{v}$  ist definiert durch

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Die Rotation eines Vektorfeldes ist somit ein Vektorfeld, also eine Abbildung  $\operatorname{rot}(\vec{v}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Physikalisch misst die Rotation die *Wirbelstärke* des Vektorfeldes. Ein Vektorfeld  $\vec{v}$ , welches  $\operatorname{rot}(\vec{v}) = (0, 0, 0)$  erfüllt, nennt man *wirbelfrei*.

In kompakter Form kann man die Rotation von  $\vec{v}$  mithilfe des  $\nabla$ -Operators als "Kreuzprodukt" von  $\nabla$  mit  $\vec{v}$  formulieren

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) := \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass die Rotation in dieser Form nur für dreidimensionale Vektorfelder sinnvoll ist (im Gegensatz zur Divergenz zum Beispiel, welche für beliebige Vektorfelder  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert ist). Man kann aber die Rotation auch im zweidimensionalen Fall definieren. Für  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  setzen wir (siehe Satz von Green)

$$\text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

**Beispiel 16.2.12** ◊◊◊ Berechne die Rotation der folgenden Vektorfelder

a)  $\vec{v} = (x^2y, -2xz, 2yz)$

b)  $\vec{v} = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$

Lösung: a)

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z + 2x \\ 0 \\ -2z - x^2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

■

**Beispiel 16.2.13** ◊◊◊ Bestimme die Rotation von  $\vec{v} = (v_1(x, y), v_2(x, y), 0)$ .

Lösung:

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Diese Formel suggeriert, wie man die Rotation im zweidimensionalen Fall definieren kann. Für das Vektorfeld  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  setzen wir  $\text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$ .

■

**Beispiel 16.2.14** ◊◊◊ Das Geschwindigkeitsfeld eines rotierenden, starren Körpers mit Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  ist gegeben durch  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega_2 z - \omega_3 y, \omega_3 x - \omega_1 z, \omega_1 y - \omega_2 x)$ . Bestimme die Rotation des Vektorfeldes  $\vec{v}$ .

Lösung:

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 + \omega_1 \\ \omega_2 + \omega_2 \\ \omega_3 + \omega_3 \end{pmatrix} = 2\vec{\omega}. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 16.2.15** Für  $(x, y, z) \neq 0$  berechne die Rotation des Coulombschen Feldes  $\vec{v} = \left( \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$ .

Lösung:

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ \frac{-3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ \frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist das Coulombfeld ein wirbelfreies Vektorfeld.  $\blacksquare$

**Beispiel 16.2.16** Berechne die Rotation von  $\vec{v} = e^{\sqrt{r}} \vec{x}$ . Ist das Feld wirbelfrei?

Lösung: Zuerst schreiben wir  $\vec{v}$  explizit auf

$$\vec{v} = e^{\sqrt{r}} \vec{x} = e^{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Wir haben somit

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} xe^{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}} \\ ye^{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}} \\ ze^{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{4}}}}{4(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{4}}} (2yz - 2yz) \\ \frac{e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{4}}}}{4(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{4}}} (2xz - 2xz) \\ \frac{e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{4}}}}{4(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{4}}} (2xy - 2xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Feld ist wirbelfrei.  $\blacksquare$

**Beispiel 16.2.17** Bestimme  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , sodass

$$\vec{v} = (x + 2y + \alpha z, \beta x - 3y - z, 4x + \gamma y + 2z)$$

rotationsfrei wird.

**Lösung:**

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x+2y+\alpha z \\ \beta x - 3y - z \\ 4x + \gamma y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma + 1 \\ \alpha - 4 \\ \beta - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt:  $\alpha = 4, \beta = 2, \gamma = -1$ . ■

### 16.2.5 Der Laplace-Operator

Gegeben sei ein Skalarfeld  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  der Klasse  $C^2$ . Der Laplace-Operator  $\Delta$  wirkt auf  $f$  wie folgt

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

**Beispiel 16.2.18**  $\circ \circ \circ$  Berechne  $\Delta f$  für  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ .

**Lösung:**

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2(x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2(y^2 - x^2) + 2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Eine Funktion für welche  $\Delta f = 0$  gilt, nennt man *harmonisch*. ■

**Beispiel 16.2.19**  $\bullet \circ \circ$  Bestimme  $\Delta f$  für  $f(x, y, z) = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  und  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ .

**Lösung:** Für  $j = x, y, z$  gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f = -\frac{2x_j}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{x_j}{|x|^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{3}{2} \frac{2x_j^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3x_j^2 - x^2 - y^2 - z^2}{|x|^5}.$$

Somit

$$\Delta f = \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = \frac{3x^2 - x^2 - y^2 - z^2}{|x|^5} + \frac{3y^2 - x^2 - y^2 - z^2}{|x|^5} + \frac{3z^2 - x^2 - y^2 - z^2}{|x|^5} = 0.$$

**Beispiel 16.2.20** • • • Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{|x|}$  gegeben. Berechne  $\Delta f$  für alle  $n$ .

Lösung: Es gilt

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}.$$

Somit gilt für  $j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{2x_j}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} e^{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_j}{|x|} e^{|x|}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f = \frac{1}{|x|} e^{|x|} - \frac{x_j^2}{|x|^3} e^{|x|} + \frac{x_j^2}{|x|^2} e^{|x|} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_j^2}{|x|^3} e^{|x|} + \frac{x_j^2}{|x|^2} e^{|x|}.$$

Also

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_1^2}{|x|^3} e^{|x|} + \dots + \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_n^2}{|x|^3} e^{|x|} \\ &\quad + \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{|x|^2} e^{|x|} = \frac{(n-1)(x_1^2 + \dots + x_n^2)}{|x|^3} e^{|x|} + e^{|x|} \\ &= \left( \frac{n-1}{|x|} + 1 \right) e^{|x|}. \end{aligned}$$

### 16.3 Rechenregeln für Differenzialoperatoren

Wir haben bisher ganz einfache Beispiele betrachtet. Oft müssen wir aber Differenzialoperatoren auf relativ komplizierte Felder anwenden, sodass in der Praxis einfache Rechenregeln von grosser Hilfe sind. Im Folgenden listen wir die wichtigsten Rechenregeln für Differenzialoperatoren auf. Dabei wird immer vorausgesetzt, dass  $f, g, \vec{v}, \vec{w}$  zweimal stetig

differenzierbare Skalar- bzw. Vektorfelder sind.

**Satz 16.3.1 (Rechenregeln für Differenzialoperatoren)** Es seien  $f, g, \vec{v}, \vec{w}$  zweimal stetig differenzierbare Skalar- bzw. Vektorfelder. Dann gelten folgende Rechenregeln

$$\text{grad}(f + g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$$

$$\text{div}(\vec{v} + \vec{w}) = \text{div}(\vec{v}) + \text{div}(\vec{w})$$

$$\text{rot}(\vec{v} + \vec{w}) = \text{rot}(\vec{v}) + \text{div}(\vec{w})$$

$$\text{div}(f\vec{v}) = (\text{grad}f) \cdot \vec{v} + f \text{div}(\vec{v})$$

$$\text{rot}(f\vec{v}) = \text{grad}(f) \times \vec{v} + f \text{rot}(\vec{v})$$

$$\text{div}(\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot \text{rot}(\vec{v}) - \vec{v} \cdot \text{rot}(\vec{w})$$

$$\text{rot}(\vec{v} \times \vec{w}) = \text{div}(\vec{w})\vec{v} - \text{div}(\vec{v})\vec{w} + (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w}$$

$$\nabla(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w} + \vec{w} \times \text{rot}(\vec{v}) + \vec{v} \times \text{rot}(\vec{w})$$

$$\text{div}(\text{grad}(f)) = \Delta f$$

$$\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0$$

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{v})) = 0$$

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{v})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{v})) - \Delta \vec{v}$$

In den folgenden Beispielen werden wir einige dieser Relationen als Übung beweisen.

**Beispiel 16.3.1** o o o Es sei  $f \in C^2$  ein Skalarfeld. Zeige

a)  $\text{div}(\text{grad}(f)) = \Delta f$

b)  $\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0$

Lösung: a)

$$\text{div}(\text{grad}(f)) = \text{div} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \Delta f.$$

b)

$$\text{rot}(\text{grad}(f)) = \text{rot} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Da  $v$  der Klasse  $C^2$  ist, dürfen wir die Ordnung der partiellen Ableitungen vertauschen (Satz von Schwarz). ■

**Beispiel 16.3.2** • o o Es sei  $\vec{v}$  ein zweimal stetig-differenzierbares Vektorfeld. Zeige

$$a) \text{div}(\text{rot}(\vec{v})) = 0$$

$$b) \text{rot}(\text{rot}(\vec{v})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{v})) - \Delta \vec{v}.$$

Lösung: a)

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{v})) = \text{div} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0.$$

b)

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot}(\vec{v})) &= \text{rot} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \\ &= \nabla \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) - \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Da  $v$  der Klasse  $C^2$  ist, dürfen wir die Ordnung der partiellen Ableitungen vertauschen (Satz von Schwarz). ■

**Beispiel 16.3.3** • o o Sei  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\vec{a}$  ein konstanter Vektor und  $n = 2, 3, 4, \dots$ . Berechne folgende Ausdrücke

- a)  $\text{grad}(r^n)$
- b)  $\text{div}(r^n(\vec{a} \times \vec{x}))$ .

**Lösung:** a) Wir berechnen die partiellen Ableitungen von  $r^n$  nach den Koordinaten  $x, y$  und  $z$

$$\frac{\partial}{\partial x} r^n = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} = 2x \cdot \frac{n}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2-1} = nxr^{n-2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} r^n = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} = 2y \cdot \frac{n}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2-1} = nyr^{n-2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} r^n = \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} = 2z \cdot \frac{n}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2-1} = nzr^{n-2}.$$

Also

$$\text{grad}(r^n) = nr^{n-2}(x, y, z) = nr^{n-2}\vec{x}.$$

b) Wir benutzen die Formel

$$\text{div}(f\vec{v}) = (\text{grad } f) \cdot \vec{v} + f \text{div}(\vec{v}).$$

Also

$$\text{div}(r^n(\vec{a} \times \vec{x})) = (\text{grad}(r^n)) \cdot (\vec{a} \times \vec{x}) + r^n \text{div}(\vec{a} \times \vec{x}).$$

Aus der Teilaufgabe (a) wissen wir bereits, dass  $\text{grad}(r^n) = nr^{n-2}\vec{x}$ . Es genügt also  $\text{div}(\vec{a} \times \vec{x})$  zu berechnen. Dazu wenden wir die Formel

$$\text{div}(\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot \text{rot}(\vec{v}) - \vec{v} \cdot \text{rot}(\vec{w})$$

an. Also

$$\text{div}(\vec{a} \times \vec{x}) = \vec{x} \cdot \underbrace{\text{rot}(\vec{a})}_{=0} - \vec{a} \cdot \underbrace{\text{rot}(\vec{x})}_{=0} = 0.$$

Somit gilt

$$\text{div}(r^n(\vec{a} \times \vec{x})) = (\text{grad}(r^n)) \cdot (\vec{a} \times \vec{x}) + r^n \text{div}(\vec{a} \times \vec{x}) = nr^{n-2} \underbrace{\vec{x} \cdot (\vec{a} \times \vec{x})}_{=0} + 0 = 0.$$

■



# Kapitel 17

## Krummlinige Koordinaten

### 17.1 Krummlinige Koordinaten

Einige Koordinatensysteme im  $\mathbb{R}^3$  haben wir bereits kennengelernt

kartesische Koordinaten:  $x, y, z$

Kugelkoordinaten:  $r, \theta, \varphi$

Zylinderkoordinaten:  $r, \varphi, z$

Eine Koordinatentransformation ist im Allgemeinen eine Vorschrift der Form

$$x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad \dots, \quad x_n = x_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

wobei wir die alten Koordinaten  $x_1, x_2, \dots$  (z.B. kartesische Koordinaten) als Funktionen der neuen Koordinaten  $\xi_1, \xi_2, \dots$  (z.B. Kugelkoordinaten) schreiben können. Lokal können wir auch immer umgekehrt die  $\xi_i$  durch die  $x_i$  ausdrücken

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \xi_2 = \xi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \dots, \quad \xi_n = \xi_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Diese Möglichkeit ist gesichert, wenn die Determinante der Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation nicht verschwindet

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ändert man nun die Variable  $\xi_i$  ein kleines bisschen, so ändert sich der Ortsvektor  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  dementsprechend um  $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_i} d\xi_i$ . Die Änderung von  $\vec{x}$  als Folge einer kleinen Änderung  $d\xi_i$  liegt in Richtung des neuen Einheitsvektors  $\vec{e}_{\xi_i}$ . Die *Einheitsvektoren* im neuen Koordinatensystem lassen sich daher schreiben als

$$\vec{e}_{\xi_1} = \frac{1}{h_{\xi_1}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1}, \quad \vec{e}_{\xi_2} = \frac{1}{h_{\xi_2}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2}, \quad \dots, \quad \vec{e}_{\xi_n} = \frac{1}{h_{\xi_n}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_n},$$

wobei

$$h_{\xi_1} = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} \right|, \quad h_{\xi_2} = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} \right|, \quad \dots, \quad h_{\xi_n} = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_n} \right|.$$

Die Einheitsvektoren  $\vec{e}_{\xi_1}, \vec{e}_{\xi_2}, \dots$  hängen i.Allg. von  $\xi_1, \xi_2, \dots$  ab und ändern somit die Richtung in jedem Punkt. Dies ist bei kartesischen Koordinaten nicht der Fall.

Für sogenannte *orthogonale Koordinatensysteme* stehen die Einheitsvektoren senkrecht übereinander, d.h.

$$\vec{e}_{\xi_i} \cdot \vec{e}_{\xi_j} = \delta_{ij}.$$

Die Vektoren  $\vec{e}_{\xi_i}$  eines orthogonalen Koordinatensystems bilden somit eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^n$ .

**Beispiel 17.1.1** ○○○ Berechne die Einheitsvektoren für Polarkoordinaten. Sind Polarkoordinaten orthogonale Koordinaten?

**Lösung:** Die Koordinatentransformation ist gegeben durch

$$(x, y) \rightarrow (r, \varphi)$$

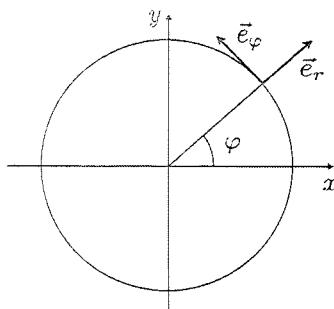
mit  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$ . Somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow h_r = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} \right| = \left| \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \right| = 1, \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow h_\varphi = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right| = \left| \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} \right| = r. \end{aligned}$$

Die zugehörigen Basisvektoren lauten somit

$$\vec{e}_r = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

$\vec{e}_r$  zeigt in Richtung der Variation von  $r$  (also radial), während  $\vec{e}_\varphi$  in Richtung der Variation von  $\varphi$  zeigt, also tangential ausgerichtet ist.



Die Polarkoordinaten sind offenbar orthogonale Koordinaten, weil

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = 0.$$

Die Vektoren  $\vec{e}_r$  und  $\vec{e}_\varphi$  bilden somit eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^2$ . ■

**Beispiel 17.1.2** Berechne die Einheitsvektoren für Kugelkoordinaten. Sind Kugelkoordinaten orthogonale Koordinaten?

**Lösung:** In diesem Fall ist die Koordinatentransformation gegeben durch

$$(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$$

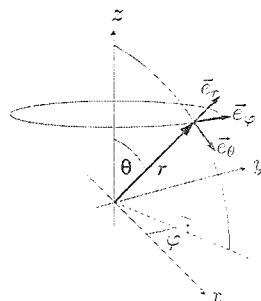
mit  $x = r \cos \varphi \sin \theta$ ,  $y = r \sin \varphi \sin \theta$  und  $z = r \cos \theta$ . Somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow h_r = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} \right| = \left| \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right| = 1. \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} \Rightarrow h_\theta = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \right| = \left| \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} \right| = r, \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_\varphi = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right| = \left| \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \right| = r \sin \theta. \end{aligned}$$

Die zugehörigen Basisvektoren lauten somit

$$\vec{e}_r = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\vec{e}_r$  zeigt in radiale Richtung (Variation von  $r$ ), während  $\vec{e}_\theta$  und  $\vec{e}_\varphi$  in Richtung der Variation von  $\theta$  bzw.  $\varphi$  zeigen.



Die Kugelkoordinaten sind offenbar orthogonale Koordinaten, weil

$$\begin{aligned}\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = 0, \quad \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = 0.\end{aligned}$$

Die Vektoren  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  und  $\vec{e}_\varphi$  bilden somit eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$ . ■

**Beispiel 17.1.3** Berechne die Einheitsvektoren für Zylinderkoordinaten. Sind Zylinderkoordinaten orthogonale Koordinaten?

**Lösung:** Die Koordinatentransformation ist gegeben durch

$$(x, y, z) \rightarrow (r, \varphi, z)$$

mit  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  und  $z = z$ . Somit

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{x}}{\partial r} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_r = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} \right| = \left| \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 1, \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_\varphi = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right| = \left| \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right| = r \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial z} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow h_z = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial z} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 1.\end{aligned}$$

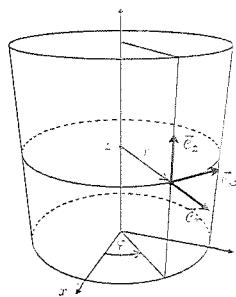
Die zugehörigen Basisvektoren lauten somit

$$\vec{e}_r = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \frac{1}{h_z} \frac{\partial \vec{x}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{e}_r$  zeigt in radiale Richtung (Variation von  $r$ ), während  $\vec{e}_\varphi$  in Richtung der Variation von  $\varphi$  zeigt.  $\vec{e}_z$  zeigt in  $z$ -Richtung. Die Kugelkoordinaten sind offenbar orthogonale Koordinaten, weil

$$\begin{aligned}\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z &= \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.\end{aligned}$$

Die Vektoren  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  und  $\vec{e}_\varphi$  bilden somit eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$ . ■



## 17.2 Differenzialoperatoren in anderen Koordinaten

Gesucht ist nun die Form von Differenzialoperatoren in den neuen Koordinaten. Wir wissen zum Beispiel, dass der Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten lautet

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Wie kann man  $\Delta f$  bestimmen, wenn nun aber  $f$  in Kugelkoordinaten gegeben wird? Wir müssen verstehen, welche Form der Laplace-Operator in den neuen Koordinaten annimmt.

### 17.2.1 Transformation von Skalar- und Vektorfeldern

Im Allgemeinen wirken transformierte Differenzialoperatoren auf die transformierten Skalar- bzw. Vektorfelder. Die Transformation von Skalarfeldern ist selbstverständlich: Man muss einfach nur die neuen Koordinaten einsetzen

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), x_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \dots, x_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)) = \hat{f}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Für Vektorfelder muss man aufpassen, denn es müssen auch die Basisvektoren angepasst werden. Wir wissen aber bereits, dass die Einheitsvektoren in den neuen Koordinaten  $\vec{e}_{\xi_1}, \vec{e}_{\xi_2}, \dots$  eine Basis von  $\mathbb{R}^n$  bilden, sodass wir alle Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  (also auch unser Vektorfeld) als Linearkombination der neuen Basisvektoren darstellen können

$$\vec{v} = v_{\xi_1} \vec{e}_{\xi_1} + v_{\xi_2} \vec{e}_{\xi_2} + \dots + v_{\xi_n} \vec{e}_{\xi_n}.$$

Für orthogonale Koordinaten sind die Vektoren  $\vec{e}_{\xi_1}, \vec{e}_{\xi_2}, \dots$  orthonormal. In diesem Fall ist die Formel für die Komponenten von  $\vec{v}$  in der Basis  $\vec{e}_{\xi_1}, \vec{e}_{\xi_2}, \dots$  besonders einfach

$$v_{\xi_1} = \vec{e}_{\xi_1} \cdot \vec{v} = \frac{1}{h_{\xi_1}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} \cdot \vec{v}, \quad v_{\xi_2} = \vec{e}_{\xi_2} \cdot \vec{v} = \frac{1}{h_{\xi_2}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} \cdot \vec{v}, \quad \dots, \quad v_{\xi_n} = \vec{e}_{\xi_n} \cdot \vec{v} = \frac{1}{h_{\xi_n}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_n} \cdot \vec{v}.$$

Am besten betrachten wir einige Beispiele dazu.

**Beispiel 17.2.1** ○○○ Transformiere das Vektorfeld  $\vec{v} = (z, 0, 0)$  in Kugelkoordinaten.

**Lösung:** Die Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten lauten

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen nun die Komponenten von  $\vec{v} = (z, 0, 0)$  in der neuen Basis  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$  mit der Formel  $v_{\xi_i} = \vec{v} \cdot \vec{e}_{\xi_i}$  (vergiss nicht die neuen Koordinaten einzusetzen)

$$v_r = \vec{v} \cdot \vec{e}_r = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = r \sin \theta \cos \theta \cos \varphi$$

$$v_\theta = \vec{v} \cdot \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = r \cos^2 \theta \cos \varphi$$

$$v_\varphi = \vec{v} \cdot \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -r \cos \theta \sin \varphi.$$

Das Vektorfeld  $\vec{v}$  lautet in Kugelkoordinaten  $\vec{v} = (r \sin \theta \cos \theta \cos \varphi, r \cos^2 \theta \cos \varphi, -r \cos \theta \sin \varphi)$ . ■

**Beispiel 17.2.2**  $\circ \circ \circ$  Transformiere das Vektorfeld  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  in Polarkoordinaten.

**Lösung:** Die Einheitsvektoren in Polarkoordinaten lauten

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen nun die Komponenten von  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  in der neuen Basis  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$  mit der Formel  $v_{\xi_i} = \vec{v} \cdot \vec{e}_{\xi_i}$

$$v_r = \vec{v} \cdot \vec{e}_r = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi$$

$$v_\varphi = \vec{v} \cdot \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi.$$

Das Vektorfeld  $\vec{v}$  lautet in Polarkoordinaten  $\vec{v} = (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi, v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi)$ . Die Umkehrtransformation ist durch

$$v_x = v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi, \quad v_y = v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi$$

gegeben. ■

### 17.2.2 Transformation von Differenzialoperatoren

Für die Transformation der Differenzialoperatoren muss man die Kettenregel beachten. Nehmen wir zum Beispiel an, dass wir die Transformation für  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  bestimmen wollen. Dies wollen wir nun auf dem transformierten Skalarfeld  $\hat{f}$  anwenden

$$\hat{f}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f(x_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), x_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \dots, x_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)).$$

Dabei muss man die Kettenregel beachten. Wir haben bereits im Kapitel 3, Beispiel 3.1.5 diesen Fall durchgerechnet. Wir hatten folgende wichtige Formel

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_2} + \dots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_n} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_k}$$

hergeleitet. Schematisch können wir diese Transformation so aufschreiben

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \dots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_n}.$$

Diese Formel wird die Basis für alle unsere Berechnungen sein. Beachte, dass beim Differenzieren von Vektorfeldern in allgemeinen Koordinaten immer zu beachten ist, dass nicht nur die Komponenten, sondern auch die Basisvektoren differenziert werden müssen!

**Beispiel 17.2.3** ••◦ Drücke den Laplace-Operator in Polarkoordinaten aus.

**Lösung:** In kartesischen Koordinaten lautet der Laplace-Operator

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Die Koordinatentransformation lautet

$$(x, y) \rightarrow (r, \varphi) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x)).$$

Wir müssen zuerst  $\frac{\partial}{\partial x}$  und  $\frac{\partial}{\partial y}$  in Polarkoordinaten ausdrücken. Nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi}.\end{aligned}$$

Wir rechnen nach

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cos \varphi}{r} = \cos \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{-y}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-r \sin \varphi}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \sin \varphi}{r} = \sin \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{r \cos \varphi}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r}.\end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}.\end{aligned}$$

Wir haben also die ersten partiellen Ableitungen in Polarkoordinaten umgewandelt. Wir brauchen aber die zweiten Ableitungen. Diese bekommt man, indem man eine Ableitung zweimal anwendet (und nicht quadriert!). Also

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad \text{und nicht} \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2.$$

Wir beginnen mit  $x$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

Hier muss man die Produktregel beachten

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r} + \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}$$

Dasselbe gilt für  $y$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \\ &\quad + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r} - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r} + \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \\ &\quad + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r} - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}$$

■

**Beispiel 17.2.4 ••• Drücke den Gradienten in Polarkoordinaten aus.**

**Lösung:** In kartesischen Koordinaten lautet der Gradient

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{e}_y.$$

Die Koordinatentransformation lautet

$$(x, y) \rightarrow (r, \varphi) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x)).$$

Wir müssen zuerst  $\frac{\partial}{\partial x}$  und  $\frac{\partial}{\partial y}$  transformieren. Nach der Regel der Kunst

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Wie im vorigen Beispiel bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Wir haben also die ersten partiellen Ableitungen in Polarkoordinaten transformiert. Nun ist aber der Gradient ein Vektor, also muss man das in der richtigen Basis ausdrücken:  $\bar{e}_r, \bar{e}_\varphi$  und nicht  $\bar{e}_x, \bar{e}_y$ .

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}}_{=\bar{e}_r} \frac{\partial}{\partial r} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{\sin \varphi}{r} \\ \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix}}_{=\frac{1}{r}\bar{e}_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Somit

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi,$$

das wir mit

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

identifizieren können (natürlich in der Basis  $\bar{e}_r, \bar{e}_\varphi$ ). ■

**Beispiel 17.2.5 ••◦ Drücke die Divergenz in Polarkoordinaten aus.**

**Lösung:** In kartesischen Koordinaten lautet die Divergenz

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}.$$

wobei  $v_x, v_y$  die Komponenten von  $\vec{v}$  in Kartesischen Koordinaten sind. Wir haben schon die transformierten partiellen Ableitungen bestimmt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Wir müssen nun nur die Vektorkomponenten von  $\vec{v}$  in die neue Basis  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$  transformieren. Die transformierten Komponenten haben wir bereits in Beispiel 17.2.2 bestimmt

$$v_x = v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi, \quad v_y = v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi.$$

Wir haben somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi) \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi). \end{aligned}$$

Mit der Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi) \\ &= \cos^2 \varphi \frac{\partial v_r}{\partial r} - \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} v_r \\ &\quad + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} v_\varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}. \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi) \\ &= \sin^2 \varphi \frac{\partial v_r}{\partial r} + \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r} v_r \\ &\quad - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} v_\varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{v}) &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ &= \cos^2 \varphi \frac{\partial v_r}{\partial r} - \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} v_r \\ &\quad + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} v_\varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} v_\varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \\ &\quad + \sin^2 \varphi \frac{\partial v_r}{\partial r} + \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r} v_r \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 17.2.6 ••• Drücke die Rotation in Zylinderkoordinaten aus.**

**Lösung:** Zylinderkoordinaten sind gegeben durch

$$(x, y, z) \rightarrow (r, \varphi, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x), z).$$

Die Basisvektoren lauten

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In kartesischen Koordinaten lautet die Rotation

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \tilde{e}_x + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \tilde{e}_y + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \tilde{e}_z.$$

Wir transformieren partielle Ableitungen gemäss der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

und bekommen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Wir müssen Komponenten von  $\vec{v}$  in der neuen Basis  $\tilde{e}_r, \tilde{e}_\varphi, \tilde{e}_z$  ausdrücken

$$v_x = v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi, \quad v_y = v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi, \quad v_z = v_z.$$

Die erste Komponente von  $\text{rot}(\vec{v})$  wird somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} &= \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) v_z - \frac{\partial}{\partial z} (v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi) \\ &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \cos \varphi + \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \sin \varphi \end{aligned}$$

die zweite

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} (v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi) - \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) v_z \\ &= \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \cos \varphi + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \sin \varphi \end{aligned}$$

und die letzte

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi) \\ &\quad - \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi) \\ &= \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial v_r}{\partial r} + \cos^2 \varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} v_r \\ &\quad - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} v_\varphi - \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial v_r}{\partial r} + \sin^2 \varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \\ &\quad - \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} v_r + \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r} v_\varphi \\ &= \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Wir bekommen somit

$$\begin{aligned}
 \text{rot}(\vec{v}) &= \left( \begin{array}{c} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cos \varphi + \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \sin \varphi \\ \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \cos \varphi + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \sin \varphi \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \end{array} \right) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\tilde{e}_r} \\
 &\quad + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\tilde{e}_\varphi} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\tilde{e}_z} \\
 &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \tilde{e}_r + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \tilde{e}_\varphi + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \tilde{e}_z.
 \end{aligned}$$

■

### 17.2.3 Allgemeine Formeln für Differenzialoperatoren in allgemeinen orthogonalen krummlinigen Koordinaten

In der Praxis wollen wir die obigen Rechnungen nicht jedes Mal durchführen müssen. Es ist sicher gut, einmal im Leben den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten durchgerechnet zu haben, aber es stehen ganz allgemeine Formeln zur Verfügung, mit welchen wir die bisher kennengelernten Differenzialoperatoren direkt in den neuen Koordinaten bestimmen

können. Die Formeln lauten so

**Satz 17.2.1 (Transformation von Differenzialoperatoren)** Es gelten folgende Transformationen

Gradient

$$\text{grad}(f) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_{\xi_i}} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \bar{e}_{\xi_i}$$

Divergenz

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{1}{h_{\xi_1} h_{\xi_2} h_{\xi_3}} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_1} (h_{\xi_2} h_{\xi_3} v_{\xi_1}) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_{\xi_1} h_{\xi_3} v_{\xi_2}) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h_{\xi_1} h_{\xi_2} v_{\xi_3}) \right]$$

Rotation

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{v}) &= \frac{1}{h_{\xi_2} h_{\xi_3}} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_{\xi_3} v_{\xi_3}) - \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h_{\xi_2} v_{\xi_2}) \right] \bar{e}_{\xi_1} \\ &\quad + \frac{1}{h_{\xi_3} h_{\xi_1}} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h_{\xi_1} v_{\xi_1}) - \frac{\partial}{\partial \xi_1} (h_{\xi_3} v_{\xi_3}) \right] \bar{e}_{\xi_2} \\ &\quad + \frac{1}{h_{\xi_1} h_{\xi_2}} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_1} (h_{\xi_2} v_{\xi_2}) - \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_{\xi_1} v_{\xi_1}) \right] \bar{e}_{\xi_3} \end{aligned}$$

Laplace-Operator

$$\Delta f = \frac{1}{h_{\xi_1} h_{\xi_2} h_{\xi_3}} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{h_{\xi_2} h_{\xi_3}}{h_{\xi_1}} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{h_{\xi_1} h_{\xi_3}}{h_{\xi_2}} \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( \frac{h_{\xi_1} h_{\xi_2}}{h_{\xi_3}} \frac{\partial f}{\partial \xi_3} \right) \right]$$

**Beispiel 17.2.7** Drücke  $\Delta$  in Kugelkoordinaten aus.

**Lösung:** Wir wenden einfach die Formel an. Für Kugelkoordinaten wissen wir bereits

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta.$$

Somit lautet der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten wie folgt

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h_\theta h_\varphi}{h_r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h_r h_\varphi}{h_\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{h_r h_\theta}{h_\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 17.2.8** Benutze die Divergenz in Kugelkoordinaten, um die Divergenz des Coulombschen Feldes  $\vec{v} = \vec{x}/r^3$  zu bestimmen.

**Lösung:** Wir wenden einfach die Formel an. Für Kugelkoordinaten wissen wir bereits

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta.$$

Somit lautet die Divergenz in Kugelkoordinaten wie folgt

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2},$$

wobei  $v_r$ ,  $v_\theta$  und  $v_\varphi$  die Komponenten von  $\vec{v}$  in Kugelkoordinaten sind. Also müssen wir zuerst  $\vec{v}$  in Kugelkoordinaten transformieren. Wir gehen wir üblich vor. Das Vektorfeld  $\vec{v}$  lautet explizit (in der Basis  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  und  $\vec{e}_z$ )

$$\vec{v} = \frac{\vec{x}}{r^3} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Die Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten lauten

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen nun die Komponenten von  $\vec{v}$  in der neuen Basis  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$  mit der Formel  $v_{\xi_i} = \vec{v} \cdot \vec{e}_{\xi_i}$

$$\begin{aligned} v_r &= \vec{v} \cdot \vec{e}_r = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{r^2} \\ v_\theta &= \vec{v} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = 0 \\ v_\varphi &= \vec{v} \cdot \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Somit lautet das Vektorfeld  $\vec{v}$  in Kugelkoordinaten  $\vec{v} = (1/r^2, 0, 0)$ . Die Divergenz von  $\vec{v}$  lautet also

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (1) = 0.$$

■

**Beispiel 17.2.9 ••○ Bestimme alle rotationssymmetrischen harmonischen Funktionen**

$$a) f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$b) f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

*Hinweis:  $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt rotationssymmetrisch, falls  $f$  nur von  $|x| = r$  abhängt.*

**Lösung:** a) Wir sind im zweidimensionalen Fall und führen somit Polarkoordinaten ein. Dass  $f$  rotationssymmetrisch ist, bedeutet einfach, dass  $f$  nur von  $r$  (und somit nicht von  $\varphi$ ) abhängt, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0.$$

Nun wissen wir bereits, wie der Laplace-Operator in Polarkoordinaten aussieht

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Wir wollen nun  $\Delta f = 0$  lösen. Da  $f$  rotationssymmetrisch ist, verschwinden die Ableitungen nach  $\varphi$ , sodass wir folgende Differenzialgleichung lösen müssen

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} = 0.$$

Wie löst man diese Gleichung? Am besten schreiben wir die linke Seite der Gleichung ein bisschen um

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right).$$

Wir haben somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r \frac{df}{dr} = A \\ &\Rightarrow \quad \frac{df}{dr} = \frac{A}{r} \quad \Rightarrow \quad f = A \log(r) + B, \end{aligned}$$

wobei  $A, B \in \mathbb{R}$ .

b) Nun führen wir Kugelkoordinaten ein. Dass  $f$  rotationssymmetrisch ist, bedeutet einfach, dass  $f$  nur von  $r$  (und somit nicht von  $\theta$  und  $\varphi$ ) abhängt, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0.$$

Nun wissen wir bereits, wie der Laplace-Operator in Polarkoordinaten aussieht

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Wir wollen nun  $\Delta f = 0$  lösen. Da  $f$  rotationssymmetrisch ist, verschwinden die Ableitungen nach  $\theta$  und  $\varphi$ , sodass wir folgende Differenzialgleichung lösen müssen

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df}{dr} \right) = 0.$$

Die Lösung ist mehr oder weniger direkt

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df}{dr} \right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df}{dr} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 \frac{df}{dr} = A \\ &\Rightarrow \quad \frac{df}{dr} = \frac{A}{r^2} \quad \Rightarrow \quad f = -\frac{A}{r} + B, \end{aligned}$$

mit  $A, B \in \mathbb{R}$ . ■



# Kapitel 18

## Wegintegrale

### 18.1 Definition und erste Beispiele

#### 18.1.1 Definition

Es seien  $\vec{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld und  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine differenzierbare Kurve. Der Ausdruck

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}(t) dt$$

wird **Wegintegral** (oder Kurvenintegral) von  $\vec{v}$  längs  $\tilde{\gamma}$  genannt. Falls  $\gamma$  eine geschlossene Kurve ist (d.h.  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ), so notiert man oft

$$\oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

anstatt  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ . Das Wegintegral besitzt folgende physikalische Bedeutung:  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  ist die Arbeit, welche längs  $\gamma$  unter der Wirkung von  $\vec{v}$  geleistet wird.

$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  ist von der gewählten Parametrisierung unabhängig. Etwas genauer: Das Wegintegral  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  ist invariant bezüglich orientierungserhaltenden Parameterwechseln, während es sein Vorzeichen bei orientationsumkehrenden Parameterwechseln wechselt. Wir erinnern dabei daran, dass ein Parameterwechsel

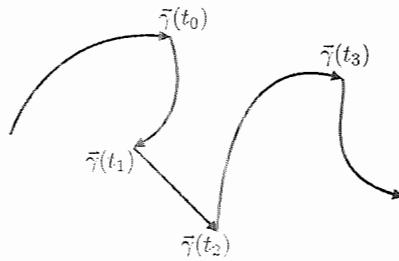
$$\begin{aligned}\varphi : & [a, b] \rightarrow [c, d] \\ t & \rightarrow s = \varphi(t)\end{aligned}$$

**orientierungserhaltend** heisst, falls  $\varphi(a) = c$  und  $\varphi(b) = d$ , während man **orientationsumkehrend** sagt, falls  $\varphi(a) = d$  und  $\varphi(b) = c$ . Bei einem orientationsumkehrenden Parameterwechsel wird die neue Kurve in der umgekehrten Richtung zur ursprünglichen Kurve durchlaufen, sodass das Wegintegral  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  sein Vorzeichen wechselt.

Wir wissen bereits, dass Kurven auch summiert werden können. Für die Summenkurve  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  gilt

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Allgemeiner gesagt, muss die Kurve  $\tilde{\gamma}$  nicht unbedingt differenzierbar sein. Denn es genügt, dass  $\tilde{\gamma}$  stückweise der Klasse  $C^1$  angehört. Was bedeutet das? Eine Kurve  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heisst **stückweise stetig differenzierbar**, falls  $\tilde{\gamma}$  bis auf endlich viele Stellen  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  stetig differenzierbar ist. Es sind also "Knicke" erlaubt



In diesem Fall gilt einfach

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Notiert wird:  $\tilde{\gamma} \in C_{pw}^1$  (piece-wise = stückweise).

### 18.1.2 Kochrezept und Beispiele

Für die Berechnung von Wegintegralen, kann man folgendes Kochrezept anwenden

#### KOCHREZEPT FÜR WEGINTEGRALE

Gegeben: Vektorfeld  $\vec{v}$  von der Klasse  $C^1$ , Kurve  $\gamma$  (aus  $C_{pw}^1$ ).

Gesucht: Wegintegral  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ .

**Schritt 1:** Parametrisiere  $\gamma$ , d.h. finde

$$\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \rightarrow \gamma(t).$$

**Schritt 2:** Berechne  $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}(t)$  (jede Komponente nach dem Parameter  $t$  ableiten).

**Schritt 3:** Benutze die Formel

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{v}(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}(t) dt.$$

Ein Tipp: Es ist nützlich, sich folgende wichtige Integrale zu merken. Denn diese Integrale

kommen oft in Rechnungen vor.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^4 t dt &= \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt = \frac{3\pi}{4}, \\ \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt &= \int_0^{2\pi} \sin^3 t dt = 0, \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi, \\ \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t dt &= \int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t dt = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt &= \int_0^{2\pi} \sin t dt = \int_0^{2\pi} \cos t dt = 0.\end{aligned}$$

**Beispiel 18.1.1** ••• Berechne  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  für

- a)  $\vec{v} = (y, 0)$  und  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$
- b)  $\vec{v} = (0, xy^2)$  und  $\gamma$  die Ellipse mit Gleichung  $x^2 + (y/2)^2 = 1$  einmal im Gegen- uhrzeigersinn durchlaufen
- c)  $\vec{v} = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$  und  $\gamma$  das Dreieck mit Eckpunkten  $(0, 0), (0, 1)$  und  $(1, 0)$  einmal im Uhrzeigersinn durchlaufen.

a) **Schritt 1:** Die Parametrisierung von  $\gamma$  ist bereits angegeben

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

**Schritt 2:** Wir bestimmen  $\dot{\gamma}$

$$\dot{\gamma} = (1 - \cos t, \sin t).$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für Wegintegrale

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = 2\pi - 0 + \pi = 3\pi.\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Formeln  $\int_0^{2\pi} \cos t dt = 0$  und  $\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi$  benutzt.

b) **Schritt 1:** Die Ellipse wird parametrisiert durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, 2 \sin t).$$

**Schritt 2:** Wir bestimmen  $\dot{\gamma}$

$$\dot{\gamma} = (-\sin t, 2 \cos t).$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für Wegintegrale

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \sin^2 t \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} dt = 8 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt \\ &= 8 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - \sin^4 t) dt = 8(\pi - 3\pi/4) = 2\pi.\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Integrale  $\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi$  und  $\int_0^{2\pi} \sin^4 t dt = 3\pi/4$  benutzt.

**c) Schritt 1:** Um das Dreieck zu parametrisieren, benutzen wir 3 Teilstrecken (es resultiert somit eine Kurve der Klasse  $C_{pw}^1$ ). Wir starten in  $(0, 0)$  und gehen einmal nach  $(0, 1)$  mit

$$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (0, t).$$

Dann gehen wir von  $(0, 1)$  nach  $(1, 0)$

$$\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 1-t).$$

Daraufhin kehren wir zu  $(0, 0)$  zurück

$$\gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (1-t, 0).$$

**Schritt 2:** Wir bestimmen die Geschwindigkeitsvektoren

$$\dot{\gamma}_1 = (0, 1), \quad \dot{\gamma}_2 = (1, -1), \quad \dot{\gamma}_3 = (-1, 0).$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für Wegintegrale, um die einzelnen Integrale zu bestimmen

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = - \int_0^1 t^2 dt = -\frac{1}{3} \\ \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 + (1-t)^2 \\ t^2 - (1-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (2t^2 - 4t + 2) dt = \left[ \frac{2t^3}{3} - 2t^2 + 2t \right]_0^1 = \frac{2}{3}. \\ \int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^2 \\ (1-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = - \int_0^1 (1-2t+t^2) dt = - \left[ t - t^2 + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Nach der Additivität des Wegintegrals müssen wir nun nur zusammenzählen. Dies ergibt

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

■

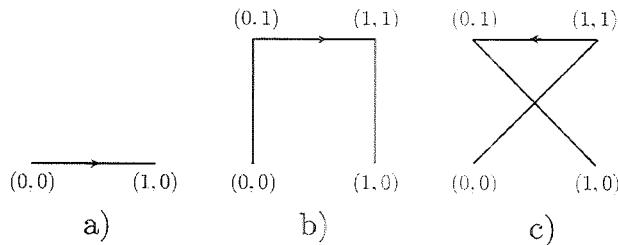
**Beispiel 18.1.2 •• Berechne  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  für  $\vec{v} = (y^2, -x^2)$  und die Wege von  $(0, 0)$  nach  $(1, 0)$  in der Figur.**

a) **Schritt 1:** Wir müssen einfach die Gerade  $(0, 0) \rightarrow (1, 0)$  parametrisieren

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 0).$$

**Schritt 2:** Der Geschwindigkeitsvektor lautet

$$\dot{\gamma} = (1, 0).$$



**Schritt 3:** Wir wenden die Formel für Wegintegrale an

$$\int_a \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0.$$

**b) Schritt 1:** Die Parametrisierung verlangt 3 Teilstrecken

$$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (0, t)$$

$$\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 1)$$

$$\gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (1, 1-t).$$

**Schritt 2:** Die Geschwindigkeitsvektoren lauten

$$\dot{\gamma}_1 = (0, 1), \quad \dot{\gamma}_2 = (1, 0), \quad \dot{\gamma}_3 = (0, -1).$$

**Schritt 3:** Wir wenden die Formel für Wegintegrale an (und die Additivität des Wegintegrals)

$$\int_b \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ -t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = 2.$$

**c) Schritt 1:** Parametrisierung in 3 Teilstrecken

$$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t)$$

$$\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (1-t, 1)$$

$$\gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 1-t).$$

**Schritt 2:** Die Geschwindigkeitsvektoren lauten

$$\dot{\gamma}_1 = (1, 1), \quad \dot{\gamma}_2 = (-1, 0), \quad \dot{\gamma}_3 = (1, -1).$$

**Schritt 3:** Wir wenden die Formel für Wegintegrale an (und die Additivität des Wegintegrals)

$$\begin{aligned} \int_c \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ -(1-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^2 \\ -t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} dt \\ &= -1 + \int_0^1 ((1-t)^2 + t^2) dt = -1 + \left[ t - t^2 + \frac{2}{3}t^3 \right]_0^1 = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Wir haben drei unterschiedliche Resultate bekommen, obwohl Anfangs- und Endpunkt gleich sind. In einem solchen Fall nennt man  $\vec{v}$  nicht konservativ, weil das Wegintegral wegabhängig ist.

■

**Beispiel 18.1.3 •••** Sei  $\varepsilon > 0$ . Betrachte die Familie der Kurven

$$\gamma_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \varepsilon^2\}$$

und das Vektorfeld  $\vec{v} = (\vec{x}^T A \vec{x} + \vec{a} \cdot \vec{x} + a_0, \vec{x}^T B \vec{x} + \vec{b} \cdot \vec{x} + b_0)$ , wobei  $\vec{x} = (x, y)$ ,  $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  und  $a, b \in \mathbb{R}^2$ . Berechne den Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\gamma_\varepsilon} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

**Schritt 1:** Parametrisierung von  $\gamma_\varepsilon$

$$\gamma_\varepsilon : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\varepsilon \cos t, \varepsilon \sin t).$$

**Schritt 2:** Wir rechnen  $\dot{\gamma}_\varepsilon$  aus

$$\dot{\gamma}_\varepsilon = (-\varepsilon \sin t, \varepsilon \cos t).$$

**Schritt 3:** Es seien  $a_{ij}$  und  $b_{ij}$  die Komponenten von  $A$  respektive  $B$  und  $a_i, b_i$  die Komponenten der Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$ . Das Vektorfeld  $\vec{v}$  lautet dann explizit

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 x + a_2 y + a_{11} x^2 + (a_{12} + a_{21}) x y + a_{22} y^2 \\ b_0 + b_1 x + b_2 y + b_{11} x^2 + (b_{12} + b_{21}) x y + b_{22} y^2 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Parametrisierung in  $\vec{v}$  ergibt

$$\vec{v}(\gamma_\varepsilon(t)) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \varepsilon \cos t + a_2 \varepsilon \sin t + a_{11} \varepsilon^2 \cos^2 t + (a_{12} + a_{21}) \varepsilon^2 \cos t \sin t + a_{22} \varepsilon^2 \sin^2 t \\ b_0 + b_1 \varepsilon \cos t + b_2 \varepsilon \sin t + b_{11} \varepsilon^2 \cos^2 t + (b_{12} + b_{21}) \varepsilon^2 \cos t \sin t + b_{22} \varepsilon^2 \sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Mit der Formel für Wegintegrale (wir interessieren uns nicht für die Terme der Ordnung 2 oder grösser in  $\varepsilon$ ) finden wir dann

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\varepsilon} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \varepsilon \cos t + a_2 \varepsilon \sin t + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ b_0 + b_1 \varepsilon \cos t + b_2 \varepsilon \sin t + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\varepsilon \sin t \\ \varepsilon \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-a_0 \varepsilon \sin t - a_1 \varepsilon^2 \cos t \sin t - a_2 \varepsilon^2 \sin^2 t + b_0 \varepsilon \cos t + b_1 \varepsilon^2 \cos^2 t + \\ &\quad + b_2 \varepsilon^2 \sin t \cos t + \mathcal{O}(\varepsilon^3)) dt \\ &= \pi \varepsilon^2 (b_1 - a_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Dabei haben wir wiederum die Integrale  $\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi$  benutzt. Somit haben wir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\gamma_\varepsilon} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi \varepsilon^2 (b_1 - a_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)}{\varepsilon^2} = \pi(b_1 - a_2).$$

**Beispiel 18.1.4 ••• Berechne das Wegintegral  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  für**

- a)  $\vec{v} = (x - y, x + y, z)$  und  $\gamma(t) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$  (eine Spirale)
- b)  $\vec{v} = (x, y, z)$  und  $\gamma$  der Einheitskreis in der  $xy$ -Ebene einmal im Gegenuhzeigersinn durchlaufen
- c)  $\vec{v} = (z, x, y)$  und

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (a \cos t, a \sin t, a^2(\cos^2 t - \sin^2 t)).$$

**a) Schritt 1:** Die Parametrisierung der Kurve ist schon gegeben

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos t, \sin t, t).$$

**Schritt 2:** Wir rechnen  $\dot{\gamma}$  aus

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, 1).$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für Wegintegrale

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + \sin^2 t + \cos^2 t + \sin t \cos t + t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + t) dt = \left[ t + \frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi + 2\pi^2. \end{aligned}$$

**b) Schritt 1:** Eine Parametrisierung der Kurve ist

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos t, \sin t, 0).$$

**Schritt 2:** Wir rechnen  $\dot{\gamma}$  aus

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, 0).$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für Wegintegrale

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (\sin t \cos t - \sin t \cos t) dt = 0.$$

**c) Schritt 1:** Die Parametrisierung der Kurve ist schon gegeben

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (a \cos t, a \sin t, a^2(\cos^2 t - \sin^2 t)).$$

**Schritt 2:** Der Geschwindigkeitsvektor lautet

$$\dot{\gamma} = (-a \sin t, a \cos t, -4a^2 \sin t \cos t).$$

**Schritt 3:** Mit der Formel für Wegintegrale finden wir

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a^2(\cos^2 t - \sin^2 t) \\ a \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ -4a^2 \sin t \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= - \int_0^{2\pi} 4a^3 \sin^2 t \cos t dt - a^3 \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t dt + a^3 \int_0^{2\pi} \sin^3 t dt + a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \\ &= 0 + 0 + 0 + a^2 \pi = a^2 \pi.\end{aligned}$$

■

**Beispiel 18.1.5 • o o** Das Kraftfeld  $\vec{v} = (x, 2xy, yz)$  verschiebt einen Körper von  $A = (0, 0, 0)$  nach  $B = (1, 1, 1)$  entlang der Parabel  $\gamma(t) = (t, t, t^2)$ . Wie gross ist die geleistete Arbeit?

**Schritt 1:** Die Parametrisierung der Kurve ist schon gegeben

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t, t, t^2).$$

**Schritt 2:** Wir rechnen  $\dot{\gamma}$  aus

$$\dot{\gamma}(t) = (1, 1, 2t).$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für Wegintegrale

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (t + 2t^2 + 2t^4) dt = \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{2t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{47}{30}.\end{aligned}$$

Die geleistete Arbeit ist somit  $47/30$ .

■

**Beispiel 18.1.6 • o o** Betrachte das Kraftfeld  $\vec{v} = (y^2, xz, 1)$  sowie die beiden Kurven  $\gamma_1 = (t, t, t)$  und  $\gamma_2 = (t, t^2, t^3)$ . Bestimme die geleistete Arbeit  $W_{AB}$  von  $A = (0, 0, 0)$  und  $B = (1, 1, 1)$  entlang beider Kurven. Entlang welcher Kurve wird mehr Arbeit geleistet?

**Schritt 1:** Die Parametrisierung der ersten Kurve lautet

$$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t, t, t).$$

Für die zweite gilt

$$\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t, t^2, t^3).$$

**Schritt 2:** Die Geschwindigkeitsvektoren lauten

$$\dot{\gamma}_1 = (1, 1, 1), \quad \dot{\gamma}_2 = (1, 2t, 3t^2).$$

**Schritt 3:** Für die erste Kurve haben wir somit

$$W_{AB} = \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (2t^2 + 1) dt = \left[ \frac{2t^3}{3} + t \right]_0^1 = \frac{5}{3}.$$

Für die zweite Kurve

$$W_{AB} = \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^4 \\ t^4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (3t^2 + t^4 + 2t^5) dt = \left[ \frac{3t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^6}{3} \right]_0^1 = \frac{23}{15}.$$

Da  $\frac{23}{15} < \frac{5}{3}$ , wird es längs  $\gamma_2$  weniger Arbeit verrichtet. Es wird also nicht dieselbe Arbeit längs  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  geleistet. Darum ist  $\vec{v}$  nicht konservativ. ■

**Beispiel 18.1.7 •••** Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine geschlossene differenzierbare Kurve in  $\mathbb{R}^2$  und sei  $\vec{v} = (0, -x)$ . Finde eine  $2 \times 2$  Matrix für welche folgende Formel gilt

$$\int_0^1 \vec{\gamma} \cdot J\dot{\vec{\gamma}} dt = 2 \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

**Lösung:** Die gesuchte Matrix ist

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denn

$$\begin{aligned} \int_0^1 \vec{\gamma} \cdot J\dot{\vec{\gamma}} dt &= \int_0^1 \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\gamma}_2(t) \\ \dot{\gamma}_1(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 (\gamma_2(t)\dot{\gamma}_1(t) - \gamma_1(t)\dot{\gamma}_2(t)) dt. \end{aligned}$$

Wir integrieren partiell und benutzen die Tatsache, dass  $\gamma$  geschlossen ist (d.h.  $\gamma(0) = \gamma(1)$ )

$$\begin{aligned} \int_0^1 \vec{\gamma} \cdot J\dot{\vec{\gamma}} dt &= \underbrace{[\gamma_1(t)\gamma_2(t)]_0^1}_{=0 \text{ weil } \gamma \text{ geschlossen}} - \int_0^1 \gamma_1(t)\dot{\gamma}_2(t) dt - \int_0^1 \gamma_1(t)\dot{\gamma}_2(t) dt \\ &= -2 \int_0^1 \gamma_1(t)\dot{\gamma}_2(t) dt = 2 \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma_1(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix} dt = 2 \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}. \end{aligned}$$
■

## 18.2 Potenzialfelder

In gewissen Fällen kann man die Berechnung von Wegintegralen etwas vereinfachen. Dies geschieht immer, wenn wir sogenannte Potenzialfelder haben. Zuerst betrachten wir ein Beispiel, als Einleitung.

### 18.2.1 Motivierendes Beispiel

Wir wollen das Wegintegral  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  für das Vektorfeld  $\vec{v}(x, y) = e^{xy}(1 + xy, x^2)$  entlang des Kreisbogens  $\gamma$  von  $(1, 0)$  nach  $(-1, 0)$  berechnen.

#### Erste Möglichkeit

Wir gehen die drei Schritte des Kochrezeptes durch.

**Schritt 1:** Wir parametrisieren die Kurve mit Polarkoordinaten ( $t$  nur bis  $\pi$ , denn es handelt sich um einen halben Kreis)

$$\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (\cos t, \sin t).$$

**Schritt 2:** Wir rechnen  $\dot{\gamma}$  aus

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t).$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für Wegintegrale

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{\pi} e^{\sin t \cos t} \begin{pmatrix} 1 + \sin t \cos t \\ \cos^2 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{\pi} e^{\sin t \cos t} [-\sin t - \sin^2 t \cos t + \cos^3 t] dt. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass das Integral relativ kompliziert aussieht. Gibt es Tricks, um das Problem zu umgehen? Die Antwort auf diese Frage ist ja! Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten (wir werden diese im nächsten Abschnitt genauer diskutieren)

- i) Falls der Definitionsbereich  $\Omega$  des Vektorfeldes  $\vec{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine einfach zusammenhängende Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  (vgl. 5.5) ist und auf  $\Omega$   $\text{rot}(\vec{v}) = 0$  gilt, so ist  $\vec{v}$  *konservativ*. Was bedeutet "konservativ"? Es bedeutet, dass das Wegintegral  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  *wegunabhängig* ist, d.h. nur vom Anfangs- und Endpunkt von  $\gamma$  abhängt und nicht von der exakten Form von  $\gamma$ . Wie kann man diese Eigenschaft ausnutzen? In der Praxis kann man einen komplizierten Weg durch einen einfacheren Weg ersetzen, der denselben Anfangs- und Endpunkt hat: Das Resultat des Wegintegrals ist das gleiche!
- ii) Dieselbe Situation wie oben. Alternativ kann man das Problem mithilfe von Potenzialen lösen. Ein *Potenzial* von  $\vec{v}$  auf  $\Omega$  ist eine stetig differenzierbare Funktion  $\Phi$ , welche  $\vec{v} = \nabla \Phi$  auf  $\Omega$  erfüllt.

#### Erste Variante

Wir bestimmen die Rotation von  $\vec{v}$

$$\text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = ye^{xy}x^2 + 2xye^{xy} - xe^{xy}(1 + xy) - xe^{xy} = 0.$$

Ausserdem ist der Definitionsbereich von  $\vec{v}$  der ganze  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^2$  ist einfach zusammenhängend. Wir sind somit in der Situation von (i). Darum dürfen wir  $\gamma$  mit einem einfacheren

Weg mit denselben Anfangs- und Endpunkt ersetzen. Wir wählen zum Beispiel die Gerade von  $(1, 0)$  nach  $(-1, 0)$

$$\tilde{\gamma} : [1, -1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 0).$$

Für diesen Weg gilt  $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = (1, 0)$ , sodass

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\tilde{\gamma}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_1^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = -2.$$

Somit  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = -2$ .

### Zweite Variante

Wir versuchen ein Potenzial für  $\vec{v}$  zu finden, d.h. eine Funktion  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  für welche  $\vec{v} = \nabla \Phi$  gilt. Der Vorteil von Potenzialen ist, dass falls  $\vec{v} = \nabla \Phi$  ist, das Wegintegral direkt mit der folgenden Formel berechenbar ist (siehe später)

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} \nabla \Phi \cdot d\vec{s} = \Phi(\text{Ende}) - \Phi(\text{Anfang}).$$

Um das Potenzial  $\Phi$  zu finden, müssen wir

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \Phi$$

lösen. Wir starten zum Beispiel mit der zweiten Gleichung und integrieren einfach über  $y$  (und betrachten  $x$  als eine Konstante)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = e^{xy}x^2 \Rightarrow \Phi = \int e^{xy}x^2 dy = xe^{xy} + C(x).$$

Da bei der Integration  $x$  als eine Konstante betrachtet wurde, kann die Integrationskonstante  $C$  eventuell eine Funktion von  $x$  sein. Dann leiten wir partiell nach  $x$  ab. Das Resultat muss gleich der ersten Komponente von  $\vec{v}$  sein

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = e^{xy} + xy e^{xy} + C' \stackrel{!}{=} e^{xy} + xy e^{xy}.$$

Somit folgt  $C' = 0$ , also  $C = \text{const.}$  Somit ist  $\Phi = xe^{xy} + \text{const.}$  das gesuchte Potenzial (das Potenzial ist bis auf die additive Konstante bestimmt). Schlussendlich

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(-1, 0) - \Phi(1, 0) = -1 + C - 1 - C = -2.$$

Das Beispiel zeigt die Wichtigkeit der Potenziale für die Berechnung von Wegintegralen. Potenzialfelder wollen wir jetzt näher anschauen.

### 18.2.2 Potenzialfelder und Potenziale

Ein Vektorfeld  $\vec{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heisst *Potenzialfeld*, falls es eine stetig differenzierbare Abbildung  $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gibt (ein Skalarfeld), für welche

$$\vec{v} = \nabla \Phi$$

gilt. Die Abbildung  $\Phi$  heisst *Potenzial* von  $\vec{v}$ . Das Potenzial eines Vektorfeldes (falls existent) ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Denn falls  $\Phi$  ein Potenzial von  $\vec{v}$  ist, so ist auch  $\Phi + C$  ein Potenzial von  $\vec{v}$ .

Der Vorteil von Potenzialfeldern ist, dass die Berechnung des Wegintegrals besonders einfach wird. Denn nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_{\gamma} \nabla \Phi \cdot d\vec{s} = \int_a^b \nabla \Phi(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) dt = \int_a^b \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\vec{\gamma}(t)) \frac{d\gamma_i}{dt}(t) \right] dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \Phi(\vec{\gamma}(t)) dt = [\Phi(\vec{\gamma}(t))]_a^b = \Phi(\vec{\gamma}(b)) - \Phi(\vec{\gamma}(a)). \end{aligned}$$

Das Wegintegral  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  ist also einfach die Differenz der Werte des Potenzials am Ende und am Anfang der Kurve. Insbesondere ist

$$\oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$$

für jede geschlossene Kurve  $\gamma$ , weil “Ende” = “Anfang”.

Leider, es ist nicht immer möglich, ein Potenzial für ein gegebenes  $\vec{v}$  zu finden. Es gibt gewisse Bedingungen, die ein Vektorfeld  $\vec{v}$  erfüllen muss, um ein Potenzialfeld zu sein. Diese Bedingungen werden *Integrabilitätsbedingungen* genannt und lauten so

**Satz 18.2.1 (Integrabilitätsbedingungen für Potenzialfelder)** Es sei das stetig differenzierbare Vektorfeld  $\vec{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben, welches auf  $\Omega$  definiert ist. Ist  $\vec{v}$  ein Potenzialfeld, so gelten die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Ist  $\Omega$  einfach zusammenhängend, so sind die Integrabilitätsbedingungen auch hinreichend, d.h.

$$\vec{v} \text{ Potenzialfeld} \iff \text{Integrabilitätsbedingungen erfüllt}$$

Bemerke, dass im dreidimensionalen Fall  $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Integrabilitätsbedingungen äquivalent zur Bedingung  $\text{rot}(\vec{v}) = 0$  sind.

### 18.2.3 Konservative Vektorfelder

Ein Vektorfeld  $\vec{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heisst *konservativ*, falls für je zwei Kurven  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ , welche im Definitionsbereich  $\Omega$  von  $\vec{v}$  enthalten sind und denselben Anfangs- und Endpunkt haben, gilt

$$\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

In anderen Worten: Das Wegintegral über Kurven in  $\Omega$  hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab. Diese Aussage ist äquivalent zu: Für alle geschlossenen Kurven  $\gamma$ , welche ganz in  $\Omega$  enthalten sind, gilt

$$\oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Potenzialfelder sind offenbar konservativ. Denn falls  $\vec{v} = \nabla\Phi$  auf  $\Omega$  gilt, so ist das Wegintegral von  $\vec{v}$  längs einer beliebigen Kurve  $\gamma$  in  $\Omega$  durch die Formel

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(\text{Ende}) - \Phi(\text{Anfang})$$

gegeben. Das Wegintegral hängt somit nur vom Anfangs- und Endpunkt ab.  $\vec{v}$  ist somit konservativ.

Gilt auch die Umkehrung? D.h. besitzen konservative Vektorfelder immer ein Potenzial? Die Antwort auf diese Frage ist ja! Denn es gilt folgender Satz

**Satz 18.2.2 (Konservative Felder sind Potenzialfelder)** Es sei das Vektorfeld  $\vec{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben. Dann ist  $\vec{v}$  genau dann konservativ, wenn eine stetig differenzierbare Abbildung  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit  $\vec{v} = \nabla\Phi$ .

Der Satz besagt also, dass Potenzialfelder und konservative Vektorfelder das gleiche sind!

### 18.2.4 Zusammenfassung

Sei  $\vec{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit *einfach zusammenhängendem* Definitionsbereich  $\Omega$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent

- (1)  $\vec{v}$  erfüllt die Integrabilitätsbedingungen auf  $\Omega$  (d.h.  $\text{rot}(\vec{v}) = 0$  für  $n = 3$  und  $\partial v_1 / \partial y = \partial v_2 / \partial x$  für  $n = 2$ ).
- (2)  $\vec{v}$  ist Potenzialfeld (d.h.  $\vec{v} = \nabla\Phi$ ).
- (3)  $\vec{v}$  ist konservativ.
- (4)  $\oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$  für alle geschlossene Kurven  $\gamma$  in  $\Omega$ .
- (5) Das Wegintegral  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  ist wegunabhängig.

### 18.2.5 Beispiele

Wir betrachten einige Beispiele zum Thema Potenzialfelder.

**Beispiel 18.2.1 •••** Ist das Vektorfeld  $\vec{v} = (xz - y, x^2 + z^3, 3xz^3 - xy)$  ein Potenzialfeld? Falls ja, gib ein Potenzial an.

**Lösung:** Wir testen die Integrabilitätsbedingungen

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} xz - y \\ x^2y + z^3 \\ 3xz^2 - xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - 3z^2 \\ x - 3z^2 + y \\ 2x + 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

$\vec{v}$  erfüllt die Integrabilitätsbedingungen nicht. Folglich ist  $\vec{v}$  kein Potenzialfeld. ■

**Beispiel 18.2.2 •••** Betrachte  $\vec{v} = (y^2 - x^2, 2xy)$ . Finde ein Potenzial für  $\vec{v}$  falls existent.

**Lösung:** Die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = 2y = \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

sind erfüllt. Da  $\vec{v}$  von der Klasse  $C^1$  und auf  $\mathbb{R}^2$  definiert ist (und  $\mathbb{R}^2$  eine einfach zusammenhängende Menge ist), besitzt  $\vec{v}$  ein Potenzial. Rechnen wir es aus! Wir müssen

$$\begin{pmatrix} y^2 - x^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

lösen. Diesmal starten wir mit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \stackrel{!}{=} 2xy \quad \Rightarrow \quad \Phi = \int 2xy dy = xy^2 + C(x).$$

Nun leiten wir partiell nach  $x$  ab

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = y^2 + C' \stackrel{!}{=} y^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad C' = -x^2 \Rightarrow \quad C = -\frac{x^3}{3} + \text{const.}$$

Fertig! Das gesuchte Potenzial lautet somit

$$\Phi = xy^2 - \frac{x^3}{3} + \text{const.}$$

**Beispiel 18.2.3 •••** Ist das Vektorfeld  $\vec{v} = (2xe^{-y}, \cos z - x^2e^{-y}, -y \sin z)$  ein Potenzialfeld? Falls ja, gib ein Potenzial an.

**Lösung:** Integrabilitätsbedingungen

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2xe^{-y} \\ \cos z - x^2e^{-y} \\ -y \sin z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin z + \sin z \\ 0 - 0 \\ -2xe^{-y} + 2xe^{-y} \end{pmatrix} = 0.$$

Da  $\vec{v}$  der Klasse  $C^1$  angehört (ist einfach eine Komposition von elementaren  $C^1$  Funktionen) und auf  $\mathbb{R}^3$  definiert ist (und  $\mathbb{R}^3$  eine einfach zusammenhängende Menge ist), besitzt  $\vec{v}$  ein Potenzial. Rechnen wir es aus! Wir lösen

$$\begin{pmatrix} 2xe^{-y} \\ \cos z - x^2e^{-y} \\ -y \sin z \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Wir starten mit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \stackrel{!}{=} 2xe^{-y} \Rightarrow \Phi = \int 2xe^{-y} dx = x^2e^{-y} + C(y, z).$$

Dann leiten wir das bereits gefundene  $\Phi$  partiell nach  $y$  ab

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -x^2e^{-y} + \frac{\partial C}{\partial y} \stackrel{!}{=} -x^2e^{-y} + \cos z \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = \cos z \Rightarrow C = y \cos z + D(z).$$

Also  $\Phi = x^2e^{-y} + y \cos z + D(z)$ . Ferner leiten wir noch nach  $z$  ab

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -y \sin z + D' \stackrel{!}{=} -y \sin z \Rightarrow D' = 0 \Rightarrow D = \text{const.}$$

Fertig! Das gesuchte Potenzial lautet somit

$$\Phi = x^2e^{-y} + y \cos z + \text{const.}$$

■

#### Beispiel 18.2.4 ••• Ist das Vektorfeld

$$\vec{v} = (ye^{xy} \sin z + x + y, xe^{xy} \sin z + x + y - z, e^{xy} \cos z - y + z)$$

ein Potenzialfeld? Falls ja, gib ein Potenzial an.

**Lösung:** Integrabilitätsbedingungen

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ye^{xy} \sin z + x + y \\ xe^{xy} \sin z + x + y - z \\ e^{xy} \cos z - y + z \end{pmatrix} = 0.$$

Da  $\vec{v}$  der Klasse  $C^1$  angehört (ist einfach eine Komposition von elementaren  $C^1$  Funktionen) und auf  $\mathbb{R}^3$  definiert ist (und  $\mathbb{R}^3$  eine einfach zusammenhängende Menge ist), besitzt  $\vec{v}$  ein Potenzial. Rechnen wir es aus

$$\begin{pmatrix} ye^{xy} \sin z + x + y \\ xe^{xy} \sin z + x + y - z \\ e^{xy} \cos z - y + z \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Wir starten mit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \stackrel{!}{=} ye^{xy} \sin z + x + y \Rightarrow \Phi = \int (ye^{xy} \sin z + x + y) dx = e^{xy} \sin z + \frac{x^2}{2} + xy + C(y, z).$$

Dann leiten wir das bereits gefundene  $\Phi$  partiell nach  $y$  ab

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = xe^{xy} \sin z + x + \frac{\partial C}{\partial y} \stackrel{!}{=} xe^{xy} \sin z + x + y - z \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = y - z \Rightarrow C = \frac{y^2}{2} - zy + D(z).$$

Also  $\Phi = e^{xy} \sin z + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} - zy + D(z)$ . Ferner leiten wir noch nach  $z$  ab

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = e^{xy} \cos z - y + D' \stackrel{!}{=} e^{xy} \cos z - y + z \Rightarrow D' = z \Rightarrow D = \frac{z^2}{2} \text{ const.}$$

Fertig! Das gesuchte Potenzial lautet somit

$$\Phi = e^{xy} \sin z + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} - zy + \frac{z^2}{2} + \text{const.}$$

■

**Beispiel 18.2.5** • o o Für welche Werte von  $\alpha$  ist  $\vec{v} = (2x + \alpha x^2 y, x^\alpha + 42 \cos y)$  ein Potenzialfeld?

**Lösung:** Die Integrabilitätsbedingungen lauten

$$\frac{\partial(x^\alpha + 42 \cos y)}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} \stackrel{!}{=} \alpha x^2 = \frac{\partial(2x + \alpha x^2 y)}{\partial y}.$$

Dies impliziert  $\alpha = 3$ . Das Vektorfeld  $\vec{v}$  ist von der Klasse  $C^1$  (Zusammensetzung elementarer  $C^1$  Funktionen) und ist auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet  $\mathbb{R}^2$  definiert. Somit ist  $\vec{v}$  für  $\alpha = 3$  konservativ. Wir bestimmen nun das Potenzial

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \stackrel{!}{=} 2x + 3x^2 y \Rightarrow \Phi = x^2 + x^3 y + C(y).$$

Wir leiten partiell nach  $y$  ab

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x^3 + C' \stackrel{!}{=} x^3 + 42 \cos y \Rightarrow C' = 42 \cos y \Rightarrow C = 42 \sin y + \text{const.}$$

Fertig! Das Potenzial lautet

$$\Phi = x^2 + x^3 y + 42 \sin y + \text{const.}$$

■

**Beispiel 18.2.6** • o o Betrachte das Vektorfeld

$$\vec{v} = \left( \frac{x}{y}(x^2 + y^2)^{\alpha/2}, -\frac{x^2}{y^2}(x^2 + y^2)^{\alpha/2}, 8 + 5z + \log(z) \right)$$

und zwei unterschiedliche Punkte  $A$  und  $B$  in  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y, z > 0\}$ . Bestimme  $\alpha \in \mathbb{R}$  sodass  $\int_{A \rightarrow B} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  wegunabhängig ist.

**Lösung:** Wir wollen  $\alpha$  suchen, sodass  $\vec{v}$  ein Potenzialfeld wird. Die Integritätsbedingung lautet

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\vec{v}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{x}{y}(x^2+y^2)^{\alpha/2} \\ -\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^{\alpha/2} \\ 8+5z+\log(z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{x(x^2+y^2)^{\alpha/2}}{y^2} - \frac{x^2(x^2+y^2)^{\alpha/2}\alpha}{y^2(x^2+y^2)} - \frac{(x^2+y^2)^{\alpha/2}\alpha x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

Dies impliziert  $-(x^2+y^2)-x^2\alpha-y^2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=-1$ .

Das Vektorfeld ist auf  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y, z > 0\}$  definiert,  $\Omega$  ist einfach zusammenhängend und die Komponenten von  $\vec{v}$  sind dort  $C^1$  Funktionen (da Zusammensetzung elementarer  $C^1$  Funktionen). Somit ist  $\vec{v}$  genau dann auf  $\Omega$  konservativ wenn  $\alpha = -1$ . Wir setzen nun  $\alpha = -1$  und suchen das Potenzial

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \stackrel{!}{=} \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}} \quad \Rightarrow \quad \Phi = \int \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}} dx = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} + C(y, z).$$

Wir leiten nach  $y$  partiell ab

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{y}{y\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y^2} + \frac{\partial C}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial C}{\partial y} \stackrel{!}{=} -\frac{x^2}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = C(z).\end{aligned}$$

Also  $\Phi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} + C(z)$ . Ableiten nach  $z$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = C' \stackrel{!}{=} 8+5z+\log(z) \quad \Rightarrow \quad C = 8z + \frac{5}{2}z^2 + z\log(z) - z + \text{const.}$$

Fertig! Das Potenzial lautet somit

$$\Phi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} + 7z + \frac{5}{2}z^2 + z\log(z) + \text{const.}$$

■

**Beispiel 18.2.7** ••• Berechne das Wegintegral  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  für  $\vec{v} = (10x^4 - 2xy^3, -3x^2y^2)$  und  $\gamma$  die Kurve, welche von  $(0, 0)$  nach  $(2, 1)$  läuft und durch die Gleichung  $x^4 - 6xy^3 = 4y^2$  definiert ist.

**Lösung:** Eine direkte Berechnung des Integrals wäre sehr schwierig, vor allem weil es schwierig ist, eine Parametrisierung von  $\gamma$  zu finden. Wir haben aber Glück, denn  $\vec{v}$  erfüllt die Integritätsbedingung

$$\frac{\partial(-3x^2y^2)}{\partial x} = -6xy^3 = \frac{\partial(10x^4 - 2xy^3)}{\partial y}.$$

Da  $\vec{v}$  aus elementaren  $C^1$  Funktionen zusammengesetzt und auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet  $\mathbb{R}^2$  definiert ist, ist  $\vec{v}$  konservativ. Wir suchen also ein Potenzial für  $\vec{v}$ , indem wir

$$\begin{pmatrix} 10x^4 - 2xy^3 \\ -3x^2y^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

lösen. Wir beginnen mit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \stackrel{!}{=} 10x^4 - 2xy^3 \quad \Rightarrow \quad \Phi = \int (10x^4 - 2xy^3)dx = 2x^5 - x^2y^3 + C(y).$$

Dann leiten wir das bereits gefundene  $\Phi$  partiell nach  $y$  ab

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -3x^2y^2 + C' \stackrel{!}{=} -3x^2y^2 \Rightarrow C' = 0 \Rightarrow C = \text{const.}$$

Fertig! Das gesuchte Potenzial lautet

$$\Phi = 2x^5 - x^2y^3 + \text{const.}$$

Dies können wir jetzt benutzen, um das Wegintegral zu bestimmen

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(2, 1) - \Phi(0, 0) = 60 - 0 = 60.$$

(Die Konstante kürzt sich immer weg). ■

**Beispiel 18.2.8** ••• Berechne  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  für  $\vec{v} = (2x + 3z - yz, -2y - xz, 2 + 3x - xy)$  und  $\gamma$  irgendeiner differenzierbaren Kurve von  $(0, 0, 0)$  nach  $(1, 0, 1)$  (es spielt keine Rolle welche).

**Lösung:** Integrabilitätsbedingungen

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2x + 3z - yz \\ -2y - xz \\ 2 + 3x - xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + x \\ 3 - y - (3 - y) \\ -z + z \end{pmatrix} = 0.$$

sind erfüllt. Das Vektorfeld ist von der Klasse  $C^1$  (weil alle Komponenten aus elementaren  $C^1$ -Funktionen zusammengesetzt sind) und auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet  $\mathbb{R}^3$  definiert. Somit ist  $\vec{v}$  konservativ und besitzt ein Potenzial. Wir bestimmen das Potenzial

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \stackrel{!}{=} 2x + 3z - yz \Rightarrow \Phi = \int (2x + 3z - yz)dx = x^2 + 3xz - xyz + C(y, z).$$

Dann leiten wir das bereits gefundene  $\Phi$  partiell nach  $y$  ab

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -xz + \frac{\partial C}{\partial y} \stackrel{!}{=} -2y - xz \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = -2y \Rightarrow C = -y^2 + C(z).$$

Also  $\Phi = x^2 + 3xz - xyz - y^2 + C(z)$ . Nun leiten wir nach  $z$  ab

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 3x - xy + C' \stackrel{!}{=} 2 + 3x - xy \Rightarrow C' = 2z + \text{const.}$$

Fertig! Das Potenzial lautet somit

$$\Phi = x^2 + 3xz - xyz - y^2 + 2z + \text{const.}$$

Das Wegintegral  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  lautet somit

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(1, 0, 1) - \Phi(0, 0, 0) = 6 - 0 = 6.$$

**Beispiel 18.2.9** •• Berechne  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  für  $\vec{v} = (xe^{\sqrt{x^2+y^2}}, ye^{\sqrt{x^2+y^2}})$  und  $\gamma$  der Kreis mit Radius  $a$  um  $(0,0)$  auf zwei Arten.

**Direkt:** Wir gehen die drei Schritte des Kochrezeptes für Wegintegrale durch.

**Schritt 1:** Die Parametrisierung lautet

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (a \cos t, a \sin t).$$

**Schritt 2:** Der Geschwindigkeitsvektor ist

$$\dot{\gamma} = (-a \sin t, a \cos t).$$

**Schritt 3:** Formel für Wegintegrale

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a \cos t e^a \\ a \sin t e^a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix} dt = 0.$$

**Berechnung mit Potenzial:** Die Integrabilitätsbedingungen sind erfüllt, denn

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{xye^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Das Vektorfeld ist auf den ganzen  $\mathbb{R}^2$  definiert und  $\mathbb{R}^2$  ist einfach zusammenhängend. Somit ist  $\vec{v}$  konservativ. Da die Kurve  $\gamma$  geschlossen ist, ist das gesuchte Wegintegral Null.

**Beispiel 18.2.10** •• Für welche  $\alpha$  ist  $\vec{v} = (4xy, \alpha x^2 - z^3, -3yz^2)$  ein Potenzialfeld? In diesem Fall berechne  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  entlang  $\gamma(t) = (\sqrt{t}, t, t^2)$  von  $(0,0,0)$  nach  $(1,1,1)$  auf zwei Arten.

Potenzialfeld? Integrabilitätsbedingungen

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4xy \\ \alpha x^2 - z^3 \\ -3yz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3z^2 + 3z^2 \\ 0 - 0 \\ 2\alpha x - 4x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \alpha = 2$ . Da  $\vec{v}$  aus elementaren  $C^1$  Funktionen zusammengesetzt und auf den ganzen  $\mathbb{R}^2$  definiert ist, ist  $\vec{v}$  ein Potenzialfeld genau dann, wenn  $\alpha = 2$ .

**Berechnung des Wegintegrals mit Potenzial:** Wir rechnen das Potenzial von  $\vec{v}$  aus

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \stackrel{!}{=} 4xy \quad \Rightarrow \quad \Phi = 2x^2y + C(y, z).$$

Wir leiten partiell nach  $y$  ab

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2x^2 + \frac{\partial C}{\partial y} \stackrel{!}{=} 2x^2 - z^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial C}{\partial y} = -z^3 \quad \Rightarrow \quad C = -z^3y + C(z).$$

Also  $\Phi = 2x^2 - yz^3 + C(z)$ . Wir leiten nun partiell nach  $z$  ab

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -3yz^2 + C' \stackrel{!}{=} -3yz^2 \Rightarrow C = \text{const.}$$

Das Potenzial lautet somit

$$\Phi = 2x^2 - yz^3 + \text{const.}$$

Für das Wegintegral finden wir also

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(1, 1, 1) - \Phi(0, 0, 0) = 2 - 1 - 0 = 1.$$

**Direkte Berechnung des Wegintegrals:** Wir befolgen die drei Schritte des Kochrezeptes für Wegintegrale.

**Schritt 1:** Parametrisierung

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (\sqrt{t}, t, t^2).$$

**Schritt 2:** Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\gamma} = (1/2\sqrt{t}, 1, 2t).$$

**Schritt 3:** Formel für Wegintegrale

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 4t^{3/2} \\ 2t - t^6 \\ -3t^5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (4t - t^6 - 6t^6) dt = 2 - 1 = 1.$$

■

**Beispiel 18.2.11 •••** Es sei  $\vec{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld. Beweise: Falls  $\vec{v}$  konservativ ist, so gibt es eine stetig differenzierbare Abbildung  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass

$$\vec{v} = \nabla \Phi.$$

**Lösung:** Es sei also das Vektorfeld  $\vec{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  konservativ und sei  $x_0$  irgendein Punkt in  $\Omega$ . Wir betrachten eine beliebige Kurve  $\gamma$  in  $\Omega$  mit Anfangspunkt  $x_0$  und Endpunkt  $x$ . Da  $\vec{v}$  konservativ ist, ist das Wegintegral

$$\int_{x_0}^x \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

nur von  $x_0$  und  $x$  abhängig und nicht vom gewählten Weg. Wir setzen dann

$$\Phi(x) := \int_{x_0}^x \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Wir behaupten, dass  $\Phi$  ein Potenzial von  $\vec{v}$  auf  $\Omega$  ist. Also müssen wir jetzt zeigen, dass

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x) = v_j(x), \quad j = 1, \dots, n,$$

wobei  $v_j$  die  $j$ -te Komponente von  $\vec{v}$  bezeichnet. Also los! Wir benutzen die Definition der partiellen Ableitung<sup>1</sup>

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + he_j) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{x_0}^{x+he_j} \vec{v} \cdot d\vec{s} - \int_{x_0}^x \vec{v} \cdot d\vec{s}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+he_j} \vec{v} \cdot d\vec{s}}{h}.$$

<sup>1</sup> $e_j$  sind die Standardbasisvektoren des  $\mathbb{R}^n$ , also  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , usw.

Da  $\vec{v}$  konservativ ist, ist das Integral  $\int_x^{x+he_j} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  wegunabhängig. Um das Integral explizit zu bestimmen, dürfen wir also einen beliebigen Weg von  $x$  nach  $x+he_j$  wählen. Wir wählen folgenden Weg<sup>2</sup>

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto x + hte_j.$$

Der Geschwindigkeitsvektor längs  $\gamma$  lautet

$$\dot{\gamma} = he_j.$$

Somit haben wir nach der Formel für Wegintegrale

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+he_j} \vec{v} \cdot d\vec{s}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 \vec{v}(x + the_j) \cdot he_j dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 \vec{v}(x + the_j) \cdot e_j dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 v_j(x + the_j) dt = \int_0^1 \lim_{h \rightarrow 0} v_j(x + the_j) dt \quad (\text{Stetigkeit von } v_j) \\ &= \int_0^1 v_j(\lim_{h \rightarrow 0} x + the_j) dt = \int_0^1 v_j(x + 0) dt = v_j(x) \int_0^1 dt = v_j(x). \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt haben wir die Stetigkeit von  $v_j$  ausgenutzt, um den Limes ins Argument zu ziehen (vgl. Analysis I)

■

Bisher haben wir immer Felder betrachtet, welche auf einer einfach zusammenhängenden Menge definiert waren (z.B.  $\mathbb{R}^{2,3}$ ). Die Bedingung, dass  $\Omega$  einfach zusammenhängend ist, ist sehr wichtig. Das folgende Beispiel zeigt, was passieren kann, falls diese Bedingung nicht erfüllt ist.

**Beispiel 18.2.12 •••** Betrachte das Vektorfeld  $\vec{v} = \frac{1}{x^2+y^2} (y, -x)$ .

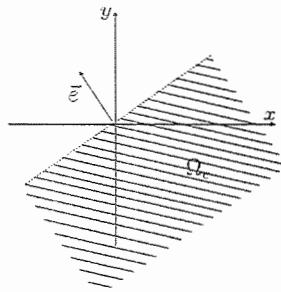
- a) Es sei ein Einheitsvektor  $\vec{e} \in \mathbb{R}^2$  gegeben. Definiere die Menge  $\Omega_e = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) | \vec{x} \cdot \vec{e} < 0\}$ . Zeige, dass  $\vec{v}$  auf  $\Omega_e$  konservativ ist.
- b) Zeige, dass  $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = -2\pi$  für  $\gamma = \text{Kreis von Radius 1 um } (0, 0)$ . Ist  $\vec{v}$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  konservativ? Ist dies ein Widerspruch zu den Integrabilitätsbedingungen?
- c) Berechne  $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$  für  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (3 \cosh(2 - 2t^2), 2t + t^3)$ .

**Lösung:** a) Die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

sind erfüllt. Das Vektorfeld ist auf der Menge  $\Omega_e$  definiert (der Punkt  $(0, 0)$  ist nicht in  $\Omega_e$  enthalten) und ist dort von der Klasse  $C^1$ . Die Menge  $\Omega_e$  ist einfach zusammenhängend, weil sich jede geschlossene Kurve in  $\Omega_e$  zu einem Punkt zusammenziehen lässt (wie man z.B. im Bild sieht).

<sup>2</sup>Es wird angenommen, dass  $h$  so klein ist, dass  $x + he_j \in \Omega$ .



Somit ist  $\vec{v}$  auf  $\Omega_e$  konservativ. Das Potenzial ist  $\Phi = -\arctan(y/x) + C$ , weil

$$\nabla \Phi = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ -\frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \vec{v}.$$

b) Obwohl  $\vec{v}$  auf  $\Omega_e$  konservativ ist, ist  $\vec{v}$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  nicht konservativ. Denn das Wegintegral von  $\vec{v}$  längs des Einheitskreises ist nicht Null. Um letzteres zu berechnen, parametrisieren wir den Einheitskreis wie üblich mit

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (\cos t, \sin t).$$

Dann gilt

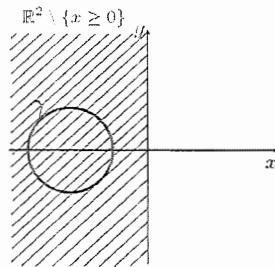
$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = - \int_0^{2\pi} dt = -2\pi \neq 0.$$

Wir haben also ein Vektorfeld gefunden, das die Integrabilitätsbedingungen erfüllt, aber auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  nicht konservativ ist. Wo liegt das Problem? Es liegt darin, dass  $\vec{v}$  eine Singularität in  $(0,0)$  hat, sodass der Definitionsbereich von  $\vec{v}$  nicht **einfach zusammenhängend** ist (er hat ein Loch in  $(0,0)$ ).

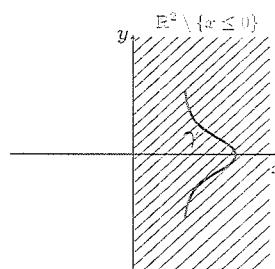
Natürlich ist dies kein Problem, wenn wir geschlossene Kurven betrachten, welche nicht um den Nullpunkt laufen. In einer solchen Situation kann man für  $\vec{v}$  eine einfach zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  als Definitionsbereich wählen. Es existiert dann ein Potenzial und alles ist wieder in Ordnung. Zum Beispiel

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$$

wenn  $\gamma$  der Kreis mit Radius 1 um  $(-2,0)$  ist. Denn  $\gamma$  ist in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{x \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0\} = \Omega_{(1,0)}$  enthalten, welcher eine einfach zusammenhängende Menge ist!



c) Das Bild von  $\gamma$  ist ganz in der Menge  $\mathbb{R}^2 \setminus \{x \leq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\} = \Omega_{(-1,0)}$  enthalten.



Diese Menge ist einfach zusammenhängend.

Somit dürfen wir das Potenzial benutzen, um das gegebene Wegintegral zu bestimmen

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(-1)) = \Phi(3, 3) - \Phi(3, -3) = -2 \arctan(1) = -\frac{\pi}{2}.$$

■



## Kapitel 19

# Flussintegrale und der Satz von Gauss

Im Zentrum der Vektoranalysis steht sicher der Begriff des Flusses und der damit verbundene Satz von Gauss, auch Divergenzsatz genannt.

### 19.1 Der Orientierungsbegriff

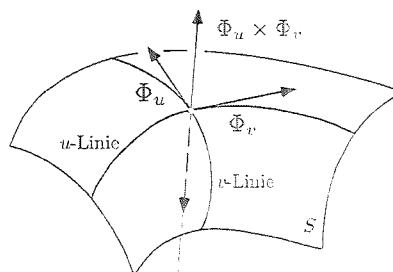
Wir betrachten ein Flächenstück  $S$ , welches durch die reguläre Parametrisierung

$$\Phi : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \rightarrow \Phi(u, v) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v))$$

mit Parameterbereich  $B$  parametrisiert wird. Wir haben im Kapitel 15 gesehen, dass der Normalvektor  $\vec{n}$  an der Oberfläche bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmt ist, d.h.

$$\vec{n} = \pm \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_u \times \Phi_v|},$$

wobei  $\Phi_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$  und  $\Phi_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ .

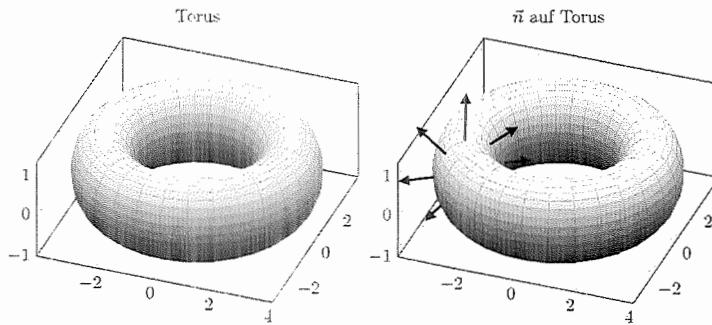


Die Vektoren  $\vec{n}$  und  $-\vec{n}$  stehen beide normal zur Oberfläche, zeigen aber in umgekehrte Richtungen. Für die Berechnung von Oberflächenintegralen haben wir gesehen, dass die Richtung von  $\vec{n}$  keine Rolle spielt, da wir einfach den Betrag  $|\Phi_u \times \Phi_v|$  integrieren müssen.

Für die Berechnung von Flussintegralen ist aber zentral eine Richtung für  $\vec{n}$  festzulegen. Denn es ist wichtig, genau zu sagen, in welcher Richtung man den Fluss berechnen will, d.h. ob von innen nach aussen oder von unten nach oben. Diese Ideen führen zum Begriff der *Orientierung*.

Wir sagen, dass  $S$  *orientierbar* ist, falls für jede geschlossene Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ , welche ganz in  $S$  liegt,  $\vec{n}(\gamma(a)) = \vec{n}(\gamma(b))$  gilt, d.h. dass nach einer vollen Drehung längs  $\gamma$  die Normale  $\vec{n}$  die selbe Richtung wie am Anfang hat. Für eine solche Oberfläche legt die Wahl von  $\vec{n}$  oder  $-\vec{n}$  eine bestimmte *Orientierung* von  $S$  fest. Man sagt:  $S$  ist mittels  $\vec{n}$  orientiert. In anderen Worten: Auf einer orientierten Fläche ist es immer möglich, die zwei Seiten der Oberfläche zu erkennen, d.h. was unten und was oben ist oder was innen und was aussen ist. Das Feststellen einer Orientierung bedeutet, dass man eine Richtung festlegt, wie man die Oberfläche durchgehen (z.B. von unten nach oben oder von innen nach aussen) und entsprechend den Fluss berechnen will.

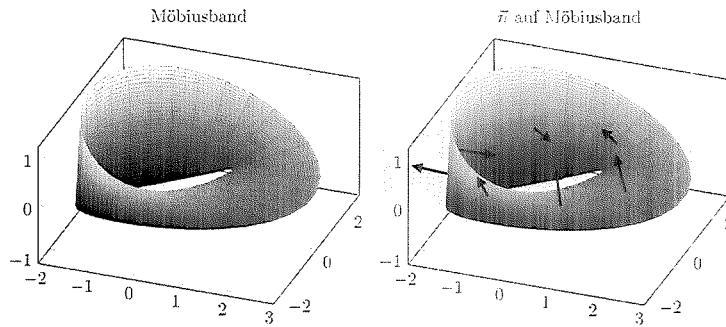
Beispiele von orientierbaren Oberflächen sind die Kugel, der Torus, der Graph einer Funktion von zwei Variablen und so weiter.



Es gibt auch nicht orientierbare Flächen. Ein Beispiel bietet das *Möbiusband*. Diese Fläche ist nicht orientierbar, d.h. man kann nicht zwischen unten und oben oder zwischen innen und aussen unterscheiden. Das Möbiusband ist die Oberfläche mit folgender Parametrisierung

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \left( \cos(u) \left( 2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right), \sin(u) \left( 2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right), v \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right).$$

Man kann leicht nachvollziehen, dass man sich nach einer Drehung entlang des Möbiusbandes auf der dem Anfang gegenüberliegenden Seite befindet. Somit ist das Möbiusband nicht orientierbar. Das Möbiusband hat also kein oben und kein unten. Obwohl nicht orientierbare Oberflächen ein interessantes Diskussionsthema sind, werden wir im Folgenden *nur* orientierbare Flächen betrachten.



## 19.2 Der Flussbegriff

Es seien  $\vec{v}$  ein Vektorfeld und  $S \subset \mathbb{R}^3$  ein mittels  $\vec{n}$  orientiertes Flächenstück<sup>1</sup>. Die Grösse

$$\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

wird **Fluss** des Vektorfeldes  $\vec{v}$  durch das Flächenstück  $S$  genannt. Der Ausdruck  $\vec{n} d\sigma$  wird **orientiertes Flächenelement** genannt. Dies besitzt im Gegensatz zum üblichen Flächenelement  $d\sigma = |\Phi_u \times \Phi_v|$  eine Richtung, welche durch die Wahl der Orientierung (also von  $\vec{n}$ ) bestimmt ist.

Dieser so mathematisch definierte Begriff des Flusses besitzt die folgende anschaulich-physikalische Bedeutung: Deuten wir  $\vec{v}$  als Strömungsfeld (z.B. Wasser), dann ist der Fluss  $\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$  das Flüssigkeitsvolumen, welches pro Zeiteinheit in Richtung  $\vec{n}$  durch  $S$  hindurchströmt. Wird das Flächenstück  $S$  durch

$$\Phi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \Phi(u, v) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v))$$

parametrisiert, so gilt folgende Formel für den Fluss eines Vektorfeldes  $\vec{v}$  durch  $S$

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \pm \int_a^b \int_c^d \vec{v}(\Phi(u, v)) \cdot \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_u \times \Phi_v|} |\Phi_u \times \Phi_v| du dv \\ &= \pm \int_a^b \int_c^d \vec{v}(\Phi(u, v)) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) du dv. \end{aligned}$$

Das Vorzeichen des Flusses hängt von der Orientierung von  $S$  ab. In anderen Worten hängt das Vorzeichen davon ab, ob wir den Fluss von innen nach aussen, von aussen nach innen, von unten nach oben oder von oben nach unten berechnen wollen. Wenn nichts Besonderes spezifiziert wird, ist der Fluss von innen nach aussen gemeint.

<sup>1</sup>D.h. es wird  $S$  vorgegeben und für  $\vec{n}$  wird eine Richtung festgelegt, zum Beispiel von unten nach oben.

### 19.2.1 Beispiele

Für die Berechnung von Flussintegralen kann man folgendes Kochrezept anwenden.

#### KOCHREZEPT FÜR FLUSSINTEGRALE

**Gegeben:** Vektorfeld  $\vec{v}$ , Fläche  $S$       **Gesucht:** Flussintegral  $\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$

**Schritt 1:** Parametrisiere die Fläche  $S$ , d.h. finde

$$\Phi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \rightarrow \Phi(u, v) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v))$$

**Schritt 2:** Berechne  $\Phi_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$  und  $\Phi_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$  indem du jede Komponente von  $\Phi$  nach  $u$  respektive  $v$  partiell ableitest. Berechne ferner das Kreuzprodukt

$$\Phi_u \times \Phi_v$$

**Schritt 3:** Benutze die Formel

$$\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \pm \int_a^b \int_c^d \vec{v}(\Phi(u, v)) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) du dv$$

Entscheide nach dem Vorzeichen (je nach Situation).

Die korrekte Wahl des Vorzeichens ist für die Studenten immer ein Problem. Mein Tipp: Kontrolliert immer, dass der in Schritt 2 berechnete Vektor  $\Phi_u \times \Phi_v$  in die korrekte Richtung zeigt, wie in der Aufgabenstellung gefragt wird (z.B. von innen nach aussen oder von aussen nach innen). Falls die Richtung falsch wäre (z.B.: Es wird der Fluss von innen nach aussen gefragt, aber  $\Phi_u \times \Phi_v$  zeigt nach innen), dann schreibe einfach ein Minuszeichen per Hand.

**Beispiel 19.2.1 •••** Es sei das Vektorfeld  $\vec{v} = (xz, z, y)$  gegeben. Gesucht ist der Fluss von  $\vec{v}$  von innen nach aussen durch die Oberfläche  $S$  der Einheitskugel mit Mittelpunkt  $O = (0, 0, 0)$ .

**Lösung:** Für die Berechnung des Flussintegrals  $\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$  gehen wir die drei Schritte des Kochrezeptes durch.

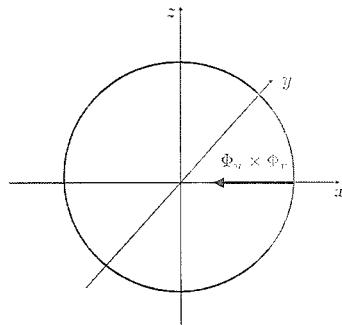
**Schritt 1:** Wir parametrisieren  $S$  mit Kugelkoordinaten

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \rightarrow \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} \sin v \cos u \\ \sin v \sin u \\ \cos v \end{pmatrix}.$$

**Schritt 2:** Wir rechnen den Normalvektor aus

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} -\sin v \sin u \\ \sin v \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_v = \begin{pmatrix} \cos v \cos u \\ \cos v \sin u \\ -\sin v \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} -\sin^2 v \cos u \\ -\sin^2 v \sin u \\ -\sin v \cos v \end{pmatrix}.$$

Wir kontrollieren, dass die Richtung von  $\Phi_u \times \Phi_v$  korrekt ist. Wir wollen den Fluss durch  $S$  von Innen nach aussen bestimmen. Somit verlangen wir, dass  $\Phi_u \times \Phi_v$  nach aussen zeigt. Wie kann man das kontrollieren? Am besten setzt man ein paar Werte für die Parameter  $u, v$  ein. Für  $u = 0$  und  $v = \pi/2$  bekommen wir zum Beispiel den Vektor  $(-1, 0, 0)$ . Dieser Vektor zeigt nach innen.



Somit müssen wir den berechneten Vektor  $\Phi_u \times \Phi_v$  per Hand mit  $(-1)$  multiplizieren

$$\begin{pmatrix} -\sin^2 v \cos u \\ -\sin^2 v \sin u \\ -\sin v \cos v \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{nach außen}} \begin{pmatrix} \sin^2 v \cos u \\ \sin^2 v \sin u \\ \sin v \cos v \end{pmatrix}.$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für das Flussintegral und finden

$$\begin{aligned} \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_0^{2\pi} du \int_0^\pi dv \begin{pmatrix} \sin v \cos v \cos u \\ \cos v \\ \sin v \sin u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 v \cos u \\ \sin^2 v \sin u \\ \sin v \cos v \end{pmatrix} \\ &= \int_0^{2\pi} du \int_0^\pi dv (\sin^3 v \cos v \cos^2 u + 2 \sin^2 v \cos v \sin u) \\ &= \int_0^\pi dv \int_0^{2\pi} \sin^3 v \cos v \cos^2 u du + 2 \int_0^\pi dv \int_0^{2\pi} \sin^2 v \cos v \sin u du \\ &= \int_0^\pi \sin^3 v \cos v \left[ \frac{1}{2}(\sin u \cos u + u) \right]_0^{2\pi} dv + 2 \int_0^\pi \sin^2 v \cos v [-\cos u]_0^{2\pi} dv \\ &= \pi \int_0^\pi \sin^3 v \cos v dv + 0 = \pi \left[ \frac{\sin^4 v}{4} \right]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 19.2.2 • o o** Gesucht ist der Fluss (nach aussen) des Vektorfeldes  $\vec{v} = (2x - yz, xz + 3y, xy - z)$  durch den Mantel des Kegels mit Spitze in O, Öffnungswinkel  $\frac{\pi}{4}$  und Höhe 1, dessen Achse gleich der z-Achse ist.

**Lösung:** Auch hier gehen wir die drei Schritte des Kochrezeptes durch.

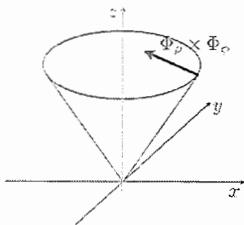
**Schritt 1:** Wir parametrisieren  $S$  mit Zylinderkoordinaten

$$\Phi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (\rho, \phi) \mapsto \Phi(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ \rho \end{pmatrix}.$$

**Schritt 2:** Wir rechnen  $\Phi_\rho \times \Phi_\phi$  aus

$$\Phi_\rho = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix}, \Phi_\phi = \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_\rho \times \Phi_\phi = \begin{pmatrix} -\rho \cos \phi \\ -\rho \sin \phi \\ \rho \end{pmatrix}.$$

Wir kontrollieren, ob die Richtung von  $\Phi_\rho \times \Phi_\phi$  korrekt ist. Wir setzen  $r = 1$  und  $\phi = 0$  und bekommen den Vektor  $(-1, 0, 1)$ . Somit zeigt  $\Phi_\rho \times \Phi_\phi$  von aussen nach innen, also in die falsche Richtung.



Somit kehren wir die Richtung von  $\Phi_\rho \times \Phi_\phi$  um, indem wir ein  $(-1)$  per Hand malen

$$\Phi_\rho \times \Phi_\phi = \begin{pmatrix} -\rho \cos \phi \\ -\rho \sin \phi \\ \rho \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{nach aussen}} \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ -\rho \end{pmatrix}.$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für das Flussintegral und finden

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} 2\rho \cos \phi - \rho^2 \sin \phi \\ \rho^2 \cos \phi + 3\rho \sin \phi \\ \rho^2 \sin \phi \cos \phi - \rho \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ -\rho \end{pmatrix} \\ &= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\phi (2\rho^2 \cos^2 \phi + 3\rho^2 \sin^2 \phi - \rho^3 \sin \phi \cos \phi + \rho^2) \\ &= \int_0^1 d\rho (2\rho^2 \pi + 3\rho^2 \pi - 0 + 2\pi \rho^2) = 7\pi \int_0^1 \rho^2 d\rho = 7\pi \left[ \frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{7}{3}\pi. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 19.2.3** • o o Es sei das Flächenstück

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 1 + xy + x^2\}$$

gegeben und das Vektorfeld  $\vec{v} = (-y, x, x^2 + y^2)$ . Man berechne das Flussintegral  $\int_F \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$  von unten nach oben.

**Schritt 1:** Wir parametrisieren  $F$ . Wie könnte man es tun? Es wird eine Vorschrift  $z = 1 + xy + x^2$  gegeben. Darum kann man  $F$  als Graphen der Funktion  $1 + xy + x^2$  auf  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  sehen. Darum lautet die richtige Parametrisierung von  $F$

$$\Phi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \Phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 + xy + x^2 \end{pmatrix}.$$

**Schritt 2:** Wir rechnen  $\Phi_x \times \Phi_y$  aus

$$\Phi_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y + 2x \end{pmatrix}, \Phi_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_x \times \Phi_y = \begin{pmatrix} -y - 2x \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir kontrollieren, ob die Richtung von  $\Phi_x \times \Phi_y$  korrekt ist. Wir setzen z.B.  $x = y = 0$  ein und bekommen den Vektor  $(0, 0, 1)$  der nach oben zeigt, also in die richtige Richtung. Wir fahren also einfach fort.

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für Flussintegrale und finden

$$\begin{aligned} \int_F \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}} dx dy \begin{pmatrix} -y \\ x \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y - 2x \\ -x \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}} dx dy (y^2 + xy). \end{aligned}$$

Um dieses Integral zu berechnen, gehen wir in Polarkoordinaten über ( $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, dx dy = r dr d\theta$ )

$$\int_F \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2 \sin^2 \theta + r^2 \sin \theta \cos \theta) r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 r^3 dr + 0 = 2\pi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

**Beispiel 19.2.4 •◦◦ Es sei das Flächenstück**

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 < 1\}$$

gegeben und das Vektorfeld  $\vec{v} = (x, y, 0)$ . Man berechne das Flussintegral  $\int_F \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$  von oben nach unten.

**Schritt 1:** Wir parametrisieren  $F$ . Wie könnte man es tun? Es wird eine Vorschrift  $z = x^2 + y^2$  gegeben. Darum kann man  $F$  als Graphen der Funktion  $x^2 + y^2$  auf  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  sehen. Darum lautet die richtige Parametrisierung von  $F$

$$\Phi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \Phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

**Schritt 2:** Wir rechnen  $\Phi_x \times \Phi_y$  aus

$$\Phi_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}, \Phi_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_x \times \Phi_y = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir kontrollieren, ob die Richtung von  $\Phi_x \times \Phi_y$  korrekt ist. Wir setzen z.B.  $x = y = 0$  ein und bekommen den Vektor  $(0, 0, 1)$ , der nach oben zeigt. Da wir am Fluss nach unten interessiert sind, müssen wir ein Minus malen

$$\begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{nach Unten}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für Flussintegrale und finden

$$\int_F \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}} dx dy \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix} = \int_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}} dx dy 2(x^2 + y^2).$$

Um dieses Integral zu berechnen, gehen wir in Polarkoordinaten über ( $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, dx dy = r dr d\theta$ )

$$\int_F \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}} dx dy 2(x^2 + y^2) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \cdot 2r^2 = 2\pi \left[ \frac{2r^4}{4} \right]_0^1 = \pi.$$

### 19.3 Satz von Gauss

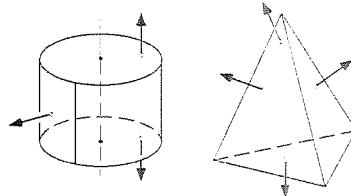
Der Satz von Gauss vereinfacht die Berechnung von Flussintegralen via Umwandlung in Volumenintegrale. In einer seiner einfachsten Formen lautet der Satz von Gauss so

**Satz 19.3.1 (Gauss)** Es sei ein beschränkter räumlicher Bereich  $V$  mit Rand  $\partial V \in C_{pw}^1$  gegeben, es sei das Vektorfeld  $\vec{v}$  auf ganz  $V$  definiert und stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_V \operatorname{div}(\vec{v}) d\mu$$

wobei  $\vec{n}$  die nach aussen gerichtete Normale längs  $\partial V$  bezeichnet.

Bemerkung: Beim Satz von Gauss: Fluss immer von innen nach aussen!



**Beispiel 19.3.1 • o o** Wir wollen den Fluss von  $\vec{v} = (xz, z, y)$  durch die Einheitskugel um  $O = (0, 0, 0)$  mithilfe des Satzes von Gauss berechnen.

**Lösung:** Da  $\vec{v}$  ein Vektorfeld der Klasse  $C^1$  und die Einheitskugel Rand des Einheitsballen  $B_1$  ist, gilt nach dem Satz von Gauss

$$\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{B_1} \operatorname{div}(\vec{v}) d\mu.$$

Dazu rechnen wir zuerst die Divergenz von  $\vec{v}$  aus

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = z + 0 + 0 = z.$$

Somit gilt (wir benutzen Kugelkoordinaten:  $dx dy dz = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$ )

$$\begin{aligned} \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_{B_1} z d\mu = \int_0^1 r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot r \cos \theta = \int_0^1 r^3 dr \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 r^3 \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^\pi dr = 0. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 19.3.2** ••• Wir wollen das Flussintegral  $\int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$  für  $\vec{v} = (xy^2, x^2y, y)$  und

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$$

mithilfe des Satzes von Gauss berechnen.

**Lösung:** Da  $\vec{v}$  ein Vektorfeld der Klasse  $C^1$  und  $S$  eine Menge mit Rand  $\partial S$  ist, gilt nach dem Satz von Gauss

$$\int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_S \operatorname{div}(\vec{v}) d\mu.$$

Dazu rechnen wir zuerst die Divergenz von  $\vec{v}$  aus

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = x^2 + y^2.$$

Somit

$$\int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_S (x^2 + y^2) d\mu.$$

Das Integral bestimmen wir nun mit Zylinderkoordinaten ( $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z = z$ ,  $dx dy dz = r dr d\theta dz$ ). In diesen Koordinaten lautet  $S$

$$S = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 1\},$$

sodass

$$\int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_S (x^2 + y^2) d\mu = \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 r^2 dz = 4\pi \int_0^1 r^3 dr = 4\pi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \pi.$$

■

**Beispiel 19.3.3** ••• Gegeben sei das Vektorfeld  $\vec{v} = (y \cos y, x^3 + ze^z - 1, e^z)$ . Wir wollen das Flussintegral  $\int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$  für

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, x + y \leq 2, x - y \leq 2, 0 \leq z \leq \log(1 + x)\}$$

mithilfe des Satzes von Gauss berechnen.

**Lösung:** Da  $\vec{v}$  ein Vektorfeld der Klasse  $C^1$  und  $S$  eine Menge mit Rand  $\partial S$  ist, gilt nach dem Satz von Gauss

$$\int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_S \operatorname{div}(\vec{v}) d\mu.$$

Die Divergenz von  $\vec{v}$  lautet

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 + 0 + e^z = e^z.$$

Wir schreiben  $S$  als Normalbereich

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2, x - 2 \leq y \leq 2 - x, 0 \leq z \leq \log(1+x)\}.$$

Somit haben wir nach der Formel für Normalbereiche

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_S e^z d\mu = \int_0^2 dx \int_{x-2}^{2-x} dy \int_0^{\log(1+x)} dz e^z = \int_0^2 dx \int_{x-2}^{2-x} dy [e^z]_0^{\log(1+x)} \\ &= \int_0^2 dx \int_{x-2}^{2-x} dy (1+x-1) = \int_0^2 dx \int_{x-2}^{2-x} dy x = \int_0^2 dx x (2-x-x+2) = \\ &= \int_0^2 dx (4x - 2x^2) = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 19.3.4** • o o Gegeben sei das Vektorfeld  $\vec{v} = (4x, -2y^2, z^2)$ . Wir wollen das Flussintegral  $\int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$  für den Zylinder

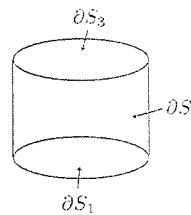
$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$$

(mit Boden und Deckel!) auf zwei Arten berechnen.

**Direkte Rechnung:** Wir berechnen das Flussintegral  $\int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$  direkt, mit dem Kochrezept für Flussintegrale.

**Schritt 1:** Wir betrachten 3 Regionen

$$\begin{aligned} \partial S_1 &= \{x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\} = \text{Boden} \\ \partial S_2 &= \{x^2 + y^2 = 4, 0 < z < 3\} = \text{Mantel} \\ \partial S_3 &= \{x^2 + y^2 \leq 4, z = 3\} = \text{Deckel} \end{aligned}$$



und parametrisieren jeden Teil

$$\Phi_1 : [0, 2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \phi) \mapsto (r \cos \phi, r \sin \phi, 0).$$

$$\Phi_2 : [0, 3] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (z, \phi) \mapsto (2 \cos \phi, 2 \sin \phi, z),$$

$$\Phi_3 : [0, 2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \phi) \mapsto (r \cos \phi, r \sin \phi, 3).$$

**Schritt 2:** Wir rechnen die Normalvektoren aus (und kontrollieren die Richtung: immer nach aussen im Satz von Gauss)

$$\begin{aligned}\Phi_{1,r} &= \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_{1,\phi} = \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_{1,r} \times \Phi_{1,\phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{nach unten}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}, \\ \Phi_{2,\phi} &= \begin{pmatrix} -2 \sin \phi \\ 2 \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_{2,z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_{2,\phi} \times \Phi_{2,z} = \begin{pmatrix} 2 \cos \phi \\ 2 \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \Phi_{3,r} &= \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_{3,\phi} = \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_{3,r} \times \Phi_{3,\phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für Flussintegrale und die Additivität des Flussintegrals

$$\int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\partial S_1} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\partial S_2} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\partial S_3} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Für den Boden:

$$\int_{\partial S_1} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} 4r \cos \phi \\ -2r^2 \sin^2 \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} = 0.$$

Für den Mantel:

$$\begin{aligned}\int_{\partial S_2} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} 8 \cos \phi \\ -2(2 \sin \phi)^2 \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cos \phi \\ 2 \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} d\phi (16 \cos^2 \phi - 16 \sin^3 \phi) = \int_0^{2\pi} 48 \cos^2 \phi d\phi = 48\pi.\end{aligned}$$

Für den Deckel:

$$\int_{\partial S_3} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} 4r \cos \phi \\ -2r^2 \sin^2 \phi \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = 9 \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi r = 9 \cdot 2\pi \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^2 = 36\pi.$$

Insgesamt:  $84\pi$ .

**Mit dem Satz von Gauss:** Da  $\vec{v}$  ein  $C^1$ -Vektorfeld und  $S$  eine Menge mit Rand ist, gilt nach dem Satz von Gauss

$$\int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_S \operatorname{div}(\vec{v}) d\mu.$$

Die Divergenz von  $\vec{v}$  lautet

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 4 - 4y + 2z.$$

also

$$\int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_S (4 - 4y + 2z) d\mu.$$

Wir benutzen nun Zylinderkoordinaten, um das Integral zu bestimmen. In diesen Koordinaten

$$S = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}.$$

Somit

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_Z (4 - 4y + 2z) d\mu = \int_0^2 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 dz (4 - 4r \sin \varphi + 2z) \\ &= 2\pi \cdot 3 \int_0^2 4r dr + 0 + 4\pi \int_0^2 r dr \int_0^3 z dz = 2\pi \cdot 3 [2r^2]_0^2 + 4\pi \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^2 \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^3 = 84\pi. \end{aligned}$$

■

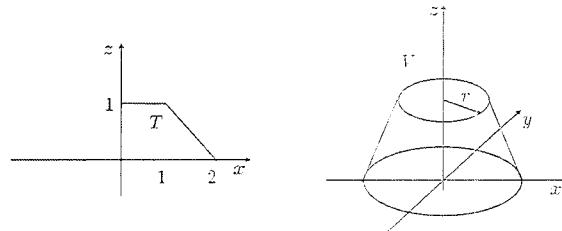
**Beispiel 19.3.5** ••• Berechne den Fluss des Vektorfeldes  $\vec{v} = (x, y, 0)$  von innen nach aussen durch die Oberfläche, welche man bekommt, indem man

$$T = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq 2 - z\}$$

um die  $z$ -Achse rotiert

- a) als Flussintegral,
- b) mit Hilfe des Satzes von Gauss.

**Lösung:** Durch die Rotation von  $T$  um die  $z$ -Achse bekommt man einen Zylinder, dessen Radius sich mit  $z$  ändert gemäss  $0 \leq r \leq 2 - z$ .



Durch die Rotation von  $T$  um die  $z$ -Achse bekommt man also das Gebiet (einfach  $x \rightarrow r$  ersetzen)

$$V = \{(r, \varphi, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \mid 0 \leq z \leq 1, 0 \leq r \leq 2 - z\}.$$

a) **Schritt 1:** Der Rand  $\partial V$  hat 3 Teile: Boden, Deckel und Mantel. Der Boden ist eine Disk mit Radius 2 an der Höhe  $z = 0$ , somit

$$\Phi_1 : [0, 2\pi] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3, (\varphi, r) \mapsto \Phi_1(\varphi, r) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für den Deckel ist es analog: Es handelt sich um eine Disk mit Radius 1 bei  $z = 1$ , sodass

$$\Phi_2 : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, (\varphi, r) \mapsto \Phi_2(\varphi, r) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Mantel ist ein Zylinder mit variablem Radius (der Radius ist 2 bei  $z = 0$  und 1 bei  $z = 1$ ), somit

$$\Phi_3 : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, (\varphi, z) \mapsto \Phi_3(\varphi, z) = \begin{pmatrix} (2-z)\cos\varphi \\ (2-z)\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

**Schritt 2:** Wir rechnen die Normalvektoren aus. Für den Boden:

$$\Phi_{1,\varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_{1,r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_{1,\varphi} \times \Phi_{1,r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}.$$

Wir kontrollieren, ob die Richtung stimmt.  $\Phi_{1,\varphi} \times \Phi_{1,r}$  zeigt von oben nach unten, hat also die richtige Richtung. Also können wir weiterfahren.

Für den Deckel:

$$\Phi_{2,\varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_{2,r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_{2,\varphi} \times \Phi_{2,r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}.$$

Wir kontrollieren, ob die Richtung stimmt. In diesem Fall müsste der Vektor von unten nach oben zeigen, somit malen wir ein Minus Zeichen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{nach oben}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Für den Mantel:

$$\Phi_{3,\varphi} = \begin{pmatrix} -(2-z)\sin\varphi \\ (2-z)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_{3,z} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_{3,\varphi} \times \Phi_{3,z} = \begin{pmatrix} (2-z)\cos\varphi \\ (2-z)\sin\varphi \\ 2-z \end{pmatrix}.$$

Wir kontrollieren die Richtung. Der Vektor zeigt nach aussen, da die  $z$ -Komponente immer positiv ist, wie es sein muss.

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für Flussintegrale

$$\begin{aligned} \int_{\text{Boden}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} = 0, \\ \int_{\text{Deckel}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = 0, \\ \int_{\text{Mantel}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz \begin{pmatrix} (2-z)\cos\varphi \\ (2-z)\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (2-z)\cos\varphi \\ (2-z)\sin\varphi \\ 2-z \end{pmatrix} \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz (2-z)^2 = 2\pi \left[ -\frac{(2-z)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{14}{3}\pi. \end{aligned}$$

Somit

$$\int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\text{Boden}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\text{Deckel}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\text{Mantel}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{14}{3}\pi.$$

b) Wir rechnen die Divergenz von  $\vec{v}$  aus

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 1 + 1 + 0 = 2.$$

Nach dem Satz von Gauss gilt somit

$$\int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_V \operatorname{div}(\vec{v}) d\mu = 2\mu(V).$$

Um  $\mu(V)$  zu bestimmen, benutzen wir die Formel für Normalbereiche (beachte: Wir sind in Zylinderkoordinaten)

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_V \operatorname{div}(\vec{v}) d\mu = 2\mu(V) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz \int_0^{2-z} r dr \\ &= 4\pi \int_0^1 dz \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^{2-z} = 2\pi \int_0^1 dz (2-z)^2 = 2\pi \left[ -\frac{(2-z)^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{14}{3}\pi. \end{aligned}$$

■

Typischer Fehler: Um den Satz von Gauss anwenden zu dürfen, muss die betrachtete Menge geschlossen sein. Schliesse sie, falls das nicht der Fall sei! Das folgende Beispiel soll ein wenig Klarheit zu diesem Punkt schaffen.

**Beispiel 19.3.6 ••◦ Berechne den Fluss des Vektorfeldes  $\vec{v} = (0, 0, 1-z)$  von unten nach oben durch die obere Hälfte der Einheitssphäre**

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$$

a) als Flussintegral

b) mit Hilfe des Satzes von Gauss

a) **Schritt 1:** Wir parametrisieren  $H$  mit Kugelkoordinaten

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} \sin v \cos u \\ \sin v \sin u \\ \cos v \end{pmatrix}$$

gehen aber mit  $v$  nur von 0 bis  $\pi/2$ .

**Schritt 2:** Wir berechnen den Normalvektor

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} -\sin v \sin u \\ \sin v \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_v = \begin{pmatrix} \cos v \cos u \\ \cos v \sin u \\ -\sin v \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} -\sin^2 v \cos u \\ -\sin^2 v \sin u \\ -\sin v \cos v \end{pmatrix}.$$

Wir kontrollieren, ob die Richtung von  $\Phi_u \times \Phi_v$  korrekt ist. Wir wollen den Fluss durch  $H$  von innen nach aussen bestimmen. Somit verlangen wir, dass  $\Phi_u \times \Phi_v$  nach aussen zeigt. Wir setzen

ein paar Werte für die Parameter  $u, v$  ein. Für  $u = 0$  und  $v = \pi/2$  bekommen wir zum Beispiel den Vektor  $(-1, 0, 0)$ . Dieser Vektor zeigt nach innen. Somit müssen wir den berechneten Vektor  $\Phi_u \times \Phi_v$  per Hand mit  $(-1)$  multiplizieren.

$$\begin{pmatrix} -\sin^2 v \cos u \\ -\sin^2 v \sin u \\ -\sin v \cos v \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{nach aussen}} \begin{pmatrix} \sin^2 v \cos u \\ \sin^2 v \sin u \\ \sin v \cos v \end{pmatrix}.$$

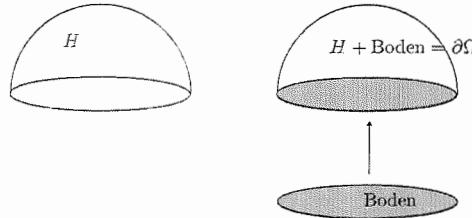
**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für Flussintegrale und finden

$$\begin{aligned} \int_H \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi/2} dv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - \cos v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 v \cos u \\ \sin^2 v \sin u \\ \sin v \cos v \end{pmatrix} \\ &= \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi/2} dv \sin v \cos v (1 - \cos v) \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} dv \sin v \cos v - 2\pi \int_0^{\pi/2} dv \sin v \cos^2 v \\ &= 2\pi \left[ \frac{\sin^2 v}{2} \right]_0^{\pi/2} + 2\pi \left[ \frac{\cos^3 v}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

**b)** Wir rechnen die Divergenz von  $\vec{v}$  aus

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = -1.$$

Um den Satz von Gauss anzuwenden, müssen wir das Gebiet  $H$  schliessen. Das können wir tun, indem wir zum Beispiel den Boden (in der  $xy$ -Ebene) addieren. Somit schliessen sich  $H + \text{Boden}$  zu  $\Omega = \text{obere H\"alfte des Einheitsballes}$ .



Für  $\Omega$  gilt nun der Satz von Gauss

$$\int_{H+\text{Boden}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Omega} -1 d\mu = -\mu(\Omega) = -\frac{2}{3}\pi.$$

Nun müssen wir die linke Seite auswerten

$$\int_{H+\text{Boden}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_H \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\text{Boden}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

wobei der Fluss immer von innen nach aussen betrachtet werden muss. Es bleibt nur der Fluss durch den Boden (von oben nach unten!) zu berechnen. Dazu betrachten wir die Parametrisierung

$$\Phi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (\rho, \phi) \mapsto \Phi(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann rechnen wir  $\Phi_\rho \times \Phi_\phi$  aus

$$\Phi_\rho = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_\phi = \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_\rho \times \Phi_\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix}.$$

Wir kontrollieren, ob die Richtung von  $\Phi_\rho \times \Phi_\phi$  korrekt ist. Leider zeigt  $\Phi_\rho \times \Phi_\phi$  von unten nach oben (wir wollen einen Vektor, der nach unten zeigt). Also malen wir ein  $(-1)$ :

$$\Phi_\rho \times \Phi_\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{nach unten}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \end{pmatrix}.$$

Ferner benutzen wir die Formel für Flussintegrale und finden

$$\int_{\text{Boden}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \end{pmatrix} = - \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \rho = -2\pi \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 = -\pi.$$

Zusammenfassend

$$\boxed{\int_{H+\text{Boden}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma} = \boxed{\int_H \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma} + \boxed{\int_{\text{Boden}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma} \stackrel{= -\pi}{\Rightarrow} \int_H \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}.$$

■

## 19.4 Weitere Beispiele

Wir betrachten weitere Beispiele zum Satz von Gauss.

**Beispiel 19.4.1 •••** Bestätige den Satz von Gauss für  $\vec{v} = (x^2y, xy^2, z^2)$  und den Würfel  $[0, 1]^3$ .

**Direkte Rechnung:** Wir bestimmen das Flussintegral  $\int_{\partial[0,1]^3} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$  direkt.

**Schritt 1:** Wir teilen  $\partial[0, 1]^3$  in 6 Teile

Die Parametrisierungen lauten

$$\Phi_1 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, 0)$$

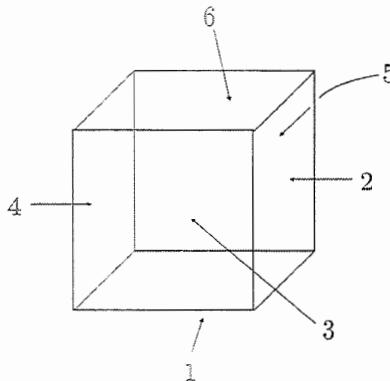
$$\Phi_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, (y, z) \mapsto (1, y, z)$$

$$\Phi_3 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, z) \mapsto (x, 0, z)$$

$$\Phi_4 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, (y, z) \mapsto (0, y, z)$$

$$\Phi_5 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, z) \mapsto (x, 1, z)$$

$$\Phi_6 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, 1)$$


**Schritt 2:** Normalvektoren

$$\Phi_{1,x} = (1, 0, 0), \quad \Phi_{1,y} = (0, 1, 0) \quad \Rightarrow \quad \Phi_{1,x} \times \Phi_{1,y} = (0, 0, 1)$$

$$\Phi_{2,y} = (0, 1, 0), \quad \Phi_{2,z} = (0, 0, 1) \quad \Rightarrow \quad \Phi_{2,y} \times \Phi_{2,z} = (1, 0, 0)$$

$$\Phi_{3,x} = (1, 0, 0), \quad \Phi_{3,z} = (0, 0, 1) \quad \Rightarrow \quad \Phi_{3,x} \times \Phi_{3,z} = (0, -1, 0)$$

$$\Phi_{4,y} = (0, 1, 0), \quad \Phi_{4,z} = (0, 0, 1) \quad \Rightarrow \quad \Phi_{4,y} \times \Phi_{4,z} = (1, 0, 0)$$

$$\Phi_{5,x} = (1, 0, 0), \quad \Phi_{5,z} = (0, 0, 1) \quad \Rightarrow \quad \Phi_{5,x} \times \Phi_{5,z} = (0, -1, 0)$$

$$\Phi_{6,x} = (1, 0, 0), \quad \Phi_{6,y} = (0, 1, 0) \quad \Rightarrow \quad \Phi_{6,x} \times \Phi_{6,y} = (0, 0, 1)$$

Wir kontrollieren die Richtung der Normalvektoren, damit diese nach **aussen** zeigen (falls nötig male ein  $(-1)$ )

$$n_1 = (0, 0, -1)$$

$$n_2 = (1, 0, 0)$$

$$n_3 = (0, -1, 0)$$

$$n_4 = (-1, 0, 0)$$

$$n_5 = (0, 1, 0)$$

$$n_6 = (0, 0, 1)$$

**Schritt 3:** Wir berechnen die einzelnen Beiträge

$$\int_{(1)} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \begin{pmatrix} x^2 y \\ xy^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\int_{(2)} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^1 dy \int_0^1 dz \begin{pmatrix} y \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^1 dy \int_0^1 dz y = 1 \cdot \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_{(3)} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^1 dz \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\int_{(4)} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^1 dy \int_0^1 dz \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\int_{(5)} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^1 dz \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^1 dx \int_0^1 dz x = 1 \cdot \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_{(6)} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \begin{pmatrix} x^2 y \\ xy^2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Somit lautet der Gesamtfluss von  $\vec{v}$  durch  $\partial[0,1]^3$

$$\int_{\partial[0,1]^3} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \sum_{j=1}^6 \int_{(j)} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2.$$

**Mit dem Satz von Gauss:** Die Divergenz lautet

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 2xy + 2xy + 2z = 4xy + 2z.$$

Nach dem Satz von Gauss müssen wir ein Integral über den Quader  $[0,1]^3$  bestimmen. Dazu benutzen wir den Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\partial[0,1]^3} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_{[0,1]^3} (4xy + 2z) d\mu = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz (4xy + 2z) \\ &= 4 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^1 + 2 \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^1 = 2. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 19.4.2 ••• Berechne den Fluss von**

$$\vec{v} = (\tanh y + z \cos^3 y, y \cos^2 x - x^3 z + y^3, z(\sin^2 x - 3y^2))$$

durch  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ .

**Lösung:** Die Aufgabe scheint schwierig zu sein. Mithilfe des Satzes von Gauss kann man aber die

Aufgabe sehr leicht lösen. Denn die Divergenz von  $\vec{v}$  lautet

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \cos^2 x + 3y^2 + \sin^2 x - 3y^2 = 1.$$

Somit gilt nach dem Satz von Gauss ( $S$  ist eine Kugel mit Radius 2)

$$\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\{x^2+y^2+z^2 \leq 4\}} 1 d\mu = \operatorname{vol}(\text{Ball von Radius } 2) = \frac{32}{3}\pi.$$

■

**Beispiel 19.4.3** ••• Bestätige den Satz von Gauss für  $\vec{v} = (x, y, z)$  und die obere Halbkugel  $H$  (ohne Boden). Gibt es Punkte, wo der Fluss von aussen nach innen gerichtet ist? (Begründung)

**Direkte Rechnung:** Wir berechnen das Flussintegral  $\int_H \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$  direkt.

**Schritt 1:** Für die Parametrisierung können wir natürlich Kugelkoordinaten benutzen, aber hier benutze ich eine andere Parametrisierung (um zu zeigen, dass es verschiedene Arten gibt, ein Objekt zu parametrisieren). Denn man kann die obere Halbkugel  $H$  als Graphen von  $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  auf  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq R^2\}$  sehen, d.h.

$$\Phi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq R^2\} \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}).$$

**Schritt 2:** Normalvektor

$$\Phi_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}, \quad \Phi_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_x \times \Phi_y = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Richtung ist korrekt (von innen nach aussen).

**Schritt 3:** Formel für Flussintegrale

$$\begin{aligned} \int_H \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} dx dy \\ &= \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} dx dy \left[ \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right] \\ &= \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} dx dy \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

Nun gehen wir nach Polarkoordinaten über, um das Integral zu bestimmen ( $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, dx dy = r dr d\varphi$ )

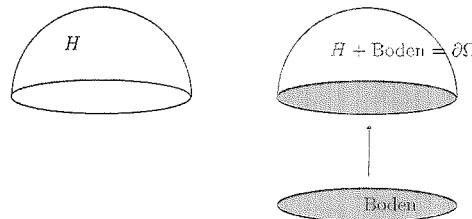
$$\int_H \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2\pi R^2 \left[ -\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^R = 2\pi R^3.$$

Da das Vektorfeld  $\vec{v}$  und die Normale  $\Phi_x \times \Phi_y$  immer in die gleiche Richtung zeigen, findet der Fluss immer von innen nach aussen statt.

**Mit dem Satz von Gauss:** Die Divergenz von  $\vec{v}$  lautet

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Um den Satz von Gauss anwenden zu können, müssen wir die Oberfläche schliessen. Wir addieren also den Boden.



Mit dem Satz von Gauss bekommen wir (aufpassen: Gesamtfluss immer von innen nach aussen!)

$$\int_H \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\text{Boden}\downarrow} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\text{volle Halbkugel}} 3d\mu = 3\mu(\text{volle Halbkugel}) = 2\pi R^3.$$

Wir müssen also den Fluss durch den Boden (von oben nach unten!) bestimmen. Dazu parametrisieren wir den Boden mit Polarkoordinaten

$$\Phi : [0, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0).$$

Die Normale lautet

$$\Phi_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_r \times \Phi_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Wir kontrollieren, ob die Richtung von  $\Phi_r \times \Phi_\varphi$  korrekt ist. Leider zeigt  $\Phi_r \times \Phi_\varphi$  von unten nach oben. Um den Satz von Gauss anwenden zu können, muss er aber von oben nach unten zeigen. Also malen wir ein (-1)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{nach unten}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}.$$

Wir benutzen die Formel für Flussintegrale und bekommen

$$\int_{\text{Boden}\downarrow} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} = 0.$$

Da der Fluss durch den Boden verschwindet, finden wir

$$\boxed{\int_H \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma} + \boxed{\int_{\text{Boden}\downarrow} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma} = \boxed{\int_{\text{volle Halbkugel}} 3d\mu} \Rightarrow \int_H \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = 2\pi R^3.$$

**Beispiel 19.4.4** • o o Berechne den Fluss von

$$\vec{v} = \left( \frac{x^2 - y^2}{z} + \log(z), \frac{x^2 + y^2}{z} + \log(z), -(x + y) \log(z) + \cos y \right)$$

durch den Würfel  $S = [-1, 2] \times [0, 1] \times [1, 4]$ .

**Lösung:** Die Divergenz lautet

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{2x}{z} + \frac{2y}{z} - \frac{x+y}{z} = \frac{x+y}{z}.$$

Somit gilt nach dem Satz von Gauss

$$\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{-1}^2 dx \int_0^1 dy \int_1^4 dz \frac{x+y}{z} = \left( \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 + 3 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^1 \right) [\log(z)]_1^4 = 6 \log(2).$$

**Beispiel 19.4.5** • o o Berechne den Fluss von  $\vec{v} = (z^3 + \cos y, x + \tan z, x + y + z^2)$  durch die Oberfläche  $\partial M$  mit

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 2-x-y\}.$$

**Lösung:** Die Divergenz lautet

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 2z.$$

Somit gilt nach dem Satz von Gauss

$$\int_{\partial M} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_M 2z d\mu.$$

Wir bemerken, dass  $M$  bereits in der Form eines Normalbereiches geschrieben ist, sodass die Bestimmung des Volumenintegrals sehr einfach ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_M 2z d\mu = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{2-x-y} dz 2z = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [z^2]_0^{2-x-y} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (2-x-y)^2 = \int_0^1 dx \left[ -\frac{(2-x-y)^3}{3} \right]_0^{1-x} \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 ((2-x)^3 - 1) dx = \frac{1}{3} \left[ -\frac{(2-x)^4}{4} - x \right]_0^1 = \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 19.4.6** ••◦ Es seien das Vektorfeld  $\vec{v}$  von der Klasse  $C^2$  und die Kugel  $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$  gegeben. Betrachte außerdem die Ebene  $x + y + z = 0$ , welche  $K$  in zwei Teile  $K_1$  und  $K_2$  teilt. Beweise

$$\int_{K_1} \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma = - \int_{K_2} \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma.$$

■

**Lösung:**  $K_1 \cup K_2 = K$  ist eine geschlossene Fläche in  $\mathbb{R}^3$ .  $K$  ist Rand des Balles  $B$  mit Radius  $\sqrt{2}$  um den Nullpunkt. Der Satz von Gauss ist also anwendbar und es gilt

$$\int_{K_1} \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{K_2} \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_K \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_B \operatorname{div}(\operatorname{rot})(\vec{v}) d\mu.$$

Da aber  $\operatorname{div}(\operatorname{rot})(\vec{v}) = 0$  gilt, ist

$$\int_{K_1} \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{K_2} \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma = 0$$

also

$$\int_{K_1} \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma = - \int_{K_2} \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma.$$

■

**Beispiel 19.4.7** ••◦ Es seien das Vektorfeld

$$\vec{v} = (x + y + z^4, z^3 + x^2 \arctan(\cosh(z)) - y, z + 2)$$

und die Fläche  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < 1, x^2 + y^2 = e^{-4z}\}$  gegeben. Man berechne  $\int_F \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$  von innen nach aussen.

■

**Lösung:** Die Divergenz von  $\vec{v}$  lautet

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 1 - 1 + 1 = 1.$$

Um den Satz von Gauss anwenden zu können, müssen wir  $F$  schliessen. Wir addieren den Boden

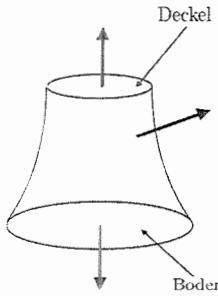
$$\text{Boden} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$$

und den Deckel

$$\text{Deckel} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1, x^2 + y^2 = e^{-4}$$
.

Nach dem Satz von Gauss gilt

$$\int_F \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\text{Deckel}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\text{Boden}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_V 1 d\mu$$



wobei

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq e^{-4z}\}.$$

Da wir ein  $x^2 + y^2$  in der Definition von  $V$  haben, benutzen wir Zylinderkoordinaten. Der Radius variiert mit  $z$ : Er ist gleich 1 wenn  $z = 0$  und gleich  $e^{-2}$  bei  $z = 1$

$$V = \{(r, \phi, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \mid 0 \leq z \leq 1, 0 \leq r \leq e^{-2z}\}.$$

$V$  ist also ein Normalbereich in Zylinderkoordinaten. Es gilt somit (vergiss  $rdr$  nicht!)

$$\int_V d\mu = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{e^{-2z}} r dr = 2\pi \int_0^1 \frac{e^{-4z}}{2} dz = \pi \left[ -\frac{e^{-4z}}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-4}).$$

Wir müssen jetzt den Fluss durch den Boden und durch den Deckel bestimmen.

Boden: Die Parametrisierung lautet

$$\Phi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \phi) \rightarrow (r \cos \phi, r \sin \phi, 0).$$

Die Normale muss nach unten zeigen und lautet somit  $(0, 0, -r)$ . Mit der Formel für Flussintegrale finden wir

$$\int_{\text{Boden}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} * \\ * \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} = -2\pi \int_0^1 2r dr = -2\pi \left[ \frac{2r^2}{2} \right]_0^1 = -2\pi.$$

Dabei bezeichnet "\*" einen Ausdruck, den wir gar nicht schreiben wollen, weil er für die Berechnung keine Rolle spielt (man multipliziert mit 0).

Deckel: Die Parametrisierung lautet

$$\Phi : [0, e^{-2}] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \phi) \rightarrow (r \cos \phi, r \sin \phi, 1).$$

Die Normale muss nach oben zeigen und lautet somit  $(0, 0, r)$ . Mit der Formel für Flussintegrale finden wir

$$\int_{\text{Deckel}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^{e^{-2}} dr \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} * \\ * \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = 2\pi \int_0^{e^{-2}} 3r dr = 2\pi \left[ \frac{3r^2}{2} \right]_0^{e^{-2}} = 3\pi e^{-4}.$$

Dabei bezeichnet "\*" einen Ausdruck, den wir gar nicht schreiben wollen, weil er für die Berechnung keine Rolle spielt (man multipliziert mit 0).

Zusammenfassend

$$\boxed{\int_F \vec{v} \cdot \vec{n} do} + \boxed{\int_{\text{Deckel}\uparrow} \vec{v} \cdot \vec{n} do} + \boxed{\int_{\text{Boden}_\downarrow} \vec{v} \cdot \vec{n} do} = \boxed{\int_V 1 d\mu}.$$

Also

$$\int_F \vec{v} \cdot \vec{n} do = \frac{9\pi}{4} - \frac{13\pi}{4} e^{-4}.$$

■

**Beispiel 19.4.8 •••** Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{v} = (x+y, y+z, x+z)$$

und das Gebiet

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}.$$

Berechne den Fluss  $\int_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{n} do$  von innen nach aussen einmal mit und einmal ohne Satz von Gauss.

**Direkte Rechnung:** Wir bestimmen  $\int_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{n} do$  direkt.

**Schritt 1:** Der Rand von  $G$  besteht aus zwei Teilen: der Bodenfläche und der "Paraboloidoberfläche". Dazu parametrisieren wir die Bodenkreisfläche mit

$$\Phi_1 : [0, 2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \phi) \rightarrow (r \cos \phi, r \sin \phi, 0)$$

und die "Paraboloidoberfläche" durch

$$\Phi_2 : [0, 2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \phi) \rightarrow (r \cos \phi, r \sin \phi, 4 - r^2)$$

(hier ist  $z$  einfach gleich  $4 - x^2 - y^2 = 4 - r^2$ ).

**Schritt 2:** Wir berechnen die Normalvektoren an den zwei Teilen

$$\Phi_{1,r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_{1,\varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_{1,r} \times \Phi_{1,\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

und

$$\Phi_{2,r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ -2r \end{pmatrix}, \Phi_{2,\varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_{2,r} \times \Phi_{2,\varphi} = \begin{pmatrix} 2r^2 \cos \phi \\ 2r^2 \sin \phi \\ r \end{pmatrix}.$$

**Schritt 3:** Wir wenden die Formel für Flussintegrale an. Für den Boden (von oben nach unten!):

$$\int_{\text{Boden}} \vec{v} \cdot \vec{n} do = \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} * \\ * \\ r \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} = - \int_0^2 r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi = 0.$$

Dabei bezeichnet "\*" einen Ausdruck, den wir gar nicht schreiben wollen, weil er für die Berechnung keine Rolle spielt (man multipliziert mit 0).

Für die Paraboloidoberfläche:

$$\begin{aligned}\int \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} r \cos \phi + r \sin \phi \\ r \sin \phi + 4 - r^2 \\ r \cos \phi + 4 - r^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2r^2 \cos \phi \\ 2r^2 \sin \phi \\ r \end{pmatrix} \\ &= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi (2r^3 + 2r^2 \sin \phi \cos \phi + 8r^2 \sin \phi - 2r^4 \sin \phi + r^2 \cos \phi + r(4 - r^2)) \\ &= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi (2r^3 + r(4 - r^2)) = 2\pi \int_0^2 (2r^3 + r(4 - r^2)) dr \\ &= 2\pi \left[ \frac{r^4}{4} + 2r^2 \right]_0^2 = 24\pi.\end{aligned}$$

Wir finden also in der direkten Rechnung, dass

$$\int_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = 0 + 24\pi = 24\pi.$$

**Mit dem Satz von Gauss:** Hier berechnen wir die Divergenz von  $\vec{v}$

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Mit dem Satz von Gauss finden wir somit

$$\begin{aligned}\int_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_G \operatorname{div}(\vec{v}) d\mu = 3 \int_{x^2+y^2 \leq 4} dx dy \int_{4-x^2-y^2} dz \\ &= 3 \int_{x^2+y^2 \leq 4} dx dy (4 - x^2 - y^2) \underset{\text{Polarkoordinaten}}{\approx} 3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 r dr (4 - r^2) \\ &= \frac{6\pi}{-2} \left[ \frac{(4 - r^2)^2}{2} \right]_0^2 = 24\pi\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit der direkten Rechnung. ■

**Beispiel 19.4.9 • • •** Berechne den Fluss des Vektorfeldes  $\vec{v} = (x, y, z^2)$  durch den Rand  $\partial D$  von

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq z \leq -(x^2 + y^2)\}$$

einmal mit und einmal ohne Satz von Gauss.

**Ohne den Satz von Gauss:** Der Rand von  $\partial D$  besteht aus zwei Teilen

$$\begin{aligned}S_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = -1\} \\ S_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = -(x^2 + y^2)\}.\end{aligned}$$

Darum

$$\int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{S_1} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{S_2} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Wir berechnen die zwei Integrale separat.

Fluss durch  $S_1$ : Da in der Definition von  $S_1$  die Vorschrift  $z = -1$  vorkommt, ist die beste Idee,  $S_1$  als Graphen der Funktion  $f(x, y) = -1$  auf  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$  zu sehen. Die Parametrisierung von  $S_1$  lautet somit

$$\Phi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, -1).$$

Wir bestimmen die Normale an  $S_1$ , wie üblich

$$\Phi_x = (1, 0, 0), \quad \Phi_y = (0, 1, 0) \quad \Rightarrow \quad \Phi_x \times \Phi_y = (0, 0, 1).$$

Der Vektor zeigt von aussen nach innen. Da wir den Fluss von innen nach aussen bestimmen wollen, betrachten wir  $(0, 0, -1)$ . Mit der Formel für den Fluss bekommen wir

$$\int_{S_1} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx dy = - \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}} dx dy = -\mu(S_1) = -\pi.$$

Fluss durch  $S_2$ : Da in der Definition von  $S_1$  die Vorschrift  $z = -(x^2 + y^2)$  vorkommt, ist die beste Idee,  $S_2$  als Graphen der Funktion  $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$  auf  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$  zu sehen. Die Parametrisierung von  $S_2$  lautet somit

$$\Phi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, -x^2 - y^2).$$

Wir bestimmen die Normale an  $S_1$ , wie üblich

$$\Phi_x = (1, 0, -2x), \quad \Phi_y = (0, 1, -2y) \quad \Rightarrow \quad \Phi_x \times \Phi_y = (2x, 2y, 1).$$

Der Vektor zeigt von innen nach aussen. Darum müssen wir die Richtung nicht ändern. Mit der Formel für den Fluss bekommen wir dann

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ (x^2 + y^2)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} dx dy \\ &= \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}} [2(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2] dx dy. \end{aligned}$$

Um das Integral zu bestimmen, gehen wir in Polarkoordinaten über ( $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, dx dy = r dr d\varphi$ )

$$\int_{S_2} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi (2r^2 + r^4) = 2\pi \left[ \frac{1}{2}r^4 + \frac{1}{6}r^6 \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Zusammenfassend:

$$\int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{S_1} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{S_2} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = -\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

**Mit dem Satz von Gauss:** Da  $\vec{v}$  ein Vektorfeld der Klasse  $C^1$  ist und  $D$  eine offene Menge mit Rand, gilt nach dem Satz von Gauss

$$\int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_D \operatorname{div}(\vec{v}) d\mu.$$

Die Divergenz von  $\vec{v}$  lautet

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 1 + 1 + 2z = 2 + 2z.$$

Die Menge  $D$  ist schon als Normalbereich geschrieben, da

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq -(x^2 + y^2)\}.$$

Mit der Formel für Normalbereiche finden wir

$$\begin{aligned} \int_D \operatorname{div}(\vec{v}) d\mu &= \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}} dx dy \int_{-1}^{-(x^2+y^2)} dz (2 + 2z) \\ &= \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}} dx dy [2z + z^2]_{-1}^{-(x^2+y^2)} \\ &= \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}} dx dy [(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1]. \end{aligned}$$

Nun führen wir Polarkoordinaten ein ( $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, dx dy = r dr d\varphi$ )

$$\begin{aligned} \int_D \operatorname{div}(\vec{v}) d\mu &= \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}} dx dy [(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1] \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr (r^4 - 2r^2 + 1) = 2\pi \left[ \frac{r^6}{6} - \frac{1}{2}r^4 + \frac{r^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 19.4.10** ••• Sei  $V$  wie im Satz von Gauss mit Rand  $\partial V$  und nach aussen gerichtete Normale  $\vec{n}$ . Berechne das folgende Integral

$$\int_{\partial V} \vec{n} do.$$

**Lösung:** Die Idee ist, den Satz von Gauss anzuwenden. Wir haben aber ein Problem, da das Integral  $\int_{\partial V} \vec{n} do$  kein Flussintegral ist. Der Trick besteht darin,  $\int_{\partial V} \vec{n} do$  mit einem konstanten Vektor  $\vec{a}$  zu multiplizieren (es spielt keine Rolle mit welchem). Somit bekommen wir

$$\vec{a} \cdot \int_{\partial V} \vec{n} do = \int_{\partial V} \vec{a} \cdot \vec{n} do.$$

Nun haben wir ein Flussintegral (Vektorfeld ist  $\vec{a}$ ), das wir mit dem Satz von Gauss zu einem Volumenintegral über  $V$  transformieren können

$$\vec{a} \cdot \int_{\partial V} \vec{n} do = \int_{\partial V} \vec{a} \cdot \vec{n} do = \int_V \underbrace{\operatorname{div}(\vec{a})}_{=0} d\mu = 0.$$

Da der Vektor  $\vec{a}$  beliebig war, haben wir

$$\vec{a} \cdot \int_{\partial V} \vec{n} do = 0, \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \int_{\partial V} \vec{n} do = 0.$$

**Beispiel 19.4.11 •••** Sei  $V$  wie im Satz von Gauss mit Rand  $\partial V$  und nach aussen gerichtete Normale  $\vec{n}$ . Es seien  $\phi$  und  $\psi$  zwei reellwertige  $C^2$ -Funktionen. Beweise die zwei Formeln von Green

$$\int_V \nabla \phi \cdot \nabla \psi d\mu = \int_{\partial V} \phi \nabla \psi \cdot \vec{n} do - \int_V \phi \Delta \psi d\mu$$

$$\int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d\mu = \int_{\partial V} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \vec{n} do$$

**Lösung:** a) Für die erste Formel wenden wir einfach den Satz von Gauss auf das Vektorfeld  $\phi \nabla \psi$  an. Es gilt somit

$$\int_{\partial V} \phi \nabla \psi \cdot \vec{n} do = \int_V \operatorname{div}(\phi \nabla \psi) d\mu.$$

Wir müssen somit die Divergenz von  $\phi \nabla \psi$  bestimmen. Dazu wenden wir die Formel  $\operatorname{div}(f \vec{v}) = \operatorname{grad}(f) \cdot \vec{v} + f \operatorname{div}(\vec{v})$  an, welche wir aus Kapitel 16 bereits kennen. Somit

$$\operatorname{div}(\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \operatorname{div}(\nabla \psi) = \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \Delta \psi.$$

Wir haben somit die erste Formel von Green gezeigt

$$\int_{\partial V} \phi \nabla \psi \cdot \vec{n} do = \int_V (\nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \Delta \psi) d\mu.$$

b) Für die zweite Formel wenden wir den Satz von Gauss auf das Vektorfeld  $\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi$  an. Es gilt

$$\int_{\partial V} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \vec{n} do = \int_V \operatorname{div}(\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) d\mu.$$

Die Divergenz von  $(\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi)$  bestimmen wir wiederum mit der Formel  $\operatorname{div}(f \vec{v}) = \operatorname{grad}(f) \cdot \vec{v} + f \operatorname{div}(\vec{v})$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) &= \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \Delta \psi - \nabla \psi \cdot \nabla \phi - \psi \Delta \phi \\ &= \phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi. \end{aligned}$$

Somit haben wir auch die zweite Formel von Green bewiesen

$$\int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d\mu = \int_{\partial V} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \vec{n} do.$$

**Beispiel 19.4.12 •••** In dieser Aufgabe wollen wir die erste Formel von Green anwenden, um die Eindeutigkeit der Lösung der Laplace-Gleichung mit Randbedingung

$$\Delta u = 0 \text{ auf } \Omega, \quad u = f \text{ auf } \partial\Omega$$

zu zeigen. Hinweis: Nimmt an, dass zwei Lösungen  $u$  und  $v$  derselben Gleichung existieren. Betrachte die Differenz  $h = u - v$  und wende die erste Formel von Green an, um zu zeigen, dass  $h = 0$ .

**Lösung:** Wir betrachten die Laplace-Gleichung mit Randbedingung

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ auf } \Omega \\ u = f \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Wir wollen zeigen, dass diese Gleichung nur eine Lösung besitzt. Wir nehmen also widersprüchlich an, dass zwei Lösungen  $u$  und  $v$  der obigen Gleichung existieren.  $u$  und  $v$  lösen also

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ auf } \Omega \\ u = f \text{ auf } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \Delta v = 0 \text{ auf } \Omega \\ v = f \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Wir betrachten nun  $h = u - v$ . Die neue Funktion  $h$  löst

$$\begin{cases} \Delta h = 0 \text{ auf } \Omega \\ h = f - f = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Nun wenden wir die erste Formel von Green mit  $\phi = \psi = h$  an

$$\int_{\partial\Omega} \underbrace{h}_{=0} \nabla h \cdot \bar{n} d\sigma = \int_{\Omega} (\nabla h \cdot \nabla h + h \underbrace{\Delta h}_{=0}) d\mu.$$

Wir bekommen also

$$\int_{\Omega} |\nabla h|^2 d\mu = 0.$$

Der Integrand ist positiv (es ist ein Quadrat) und somit ist es auch das Integral. Die einzige Möglichkeit für ein Integral einer positiven Funktion gleich Null zu sein, ist also, dass der Integrand selbst gleich Null ist. Es folgt somit

$$|\nabla h|^2 = 0 \Rightarrow \nabla h = 0 \Rightarrow h = C \text{ auf } \Omega.$$

Wir müssen nun die Konstante  $C$  bestimmen. Wir wissen, dass  $h$  auf dem Rand  $\partial\Omega$  gleich Null ist. Es folgt also  $C = 0$ . Dies bedeutet aber

$$h = 0 \Rightarrow u = v \text{ auf } \Omega.$$

Die Lösung ist somit eindeutig.

## 19.5 Berechnung von Volumina mit dem Satz von Gauss

Der Satz von Gauss erlaubt es nicht nur Flussintegrale mithilfe von Volumenintegralen zu berechnen, sondern auch umgekehrt. In diesem Abschnitt zeigen wir, wie es möglich ist, den Satz von Gauss auf die Berechnung des Volumens von dreidimensionalen Gebieten anwenden zu können. Wir betrachten ein beschränktes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  mit Rand  $\partial\Omega$  und nach aussen gerichtete Normale  $\vec{n}$ . Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{v} = (x, y, z) = \vec{x}.$$

Natürlich gilt

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Wenden wir nun den Satz von Gauss an, so bekommen wir unmittelbar folgende Volumenformel

$$\int_{\partial\Omega} \vec{x} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{x}) d\mu = \int_{\Omega} 3 d\mu = 3\mu(\Omega)$$

d.h.

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} \vec{x} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Das ist eine Formel für das Volumen von  $\Omega$ ! Wir können diese Formel zum Beispiel benutzen, um das Volumen der Kugel mit Radius  $R$  in  $\mathbb{R}^3$

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

zu bestimmen. Dabei zeigt die Normale an der Kugeloberfläche  $\partial\Omega$  immer radial nach aussen, d.h.  $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{\vec{x}}{R}$ . Somit gilt

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} \underbrace{\vec{x} \cdot \vec{n}}_{=\vec{x} \cdot \frac{\vec{x}}{R} = R} d\sigma = \frac{R}{3} \underbrace{\int_{\partial\Omega} d\sigma}_{=\pi R^2} = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Obige Volumenformel gilt auch für andere Entscheidungen bezüglich des Vektorfeldes  $\vec{v}$ . Man kann zum Beispiel auch

$$\vec{v} = (x, 0, 0) \quad \text{oder} \quad \vec{v} = (0, y, 0) \quad \text{oder} \quad \vec{v} = (0, 0, z)$$

in Betracht ziehen. Alle diese Vektorfelder erfüllen  $\operatorname{div}(\vec{v}) = 1$ , sodass sich folgende Volumenformel

$$\mu(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

ergibt. Je nach der Situation kann man sich für das eine oder das andere Vektorfeld entscheiden.

**Beispiel 19.5.1 •••** Benutze den Satz von Gauss, um das Volumen des Ellipsoids

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

zu bestimmen.

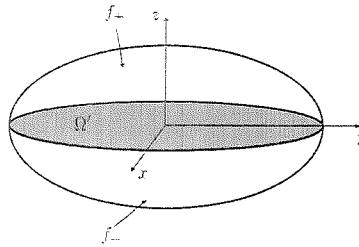
**Lösung:** Für die Berechnung wählen wir (zum Beispiel) das Vektorfeld  $\vec{v} = (0, 0, z)$ . Gemäß der Formel

$$\mu(E) = \int_{\partial E} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

müssen wir den Fluss von  $\vec{v}$  durch den Rand  $\partial E$  berechnen. Wir parametrisieren also die Oberfläche  $\partial E$  des Ellipsoids als Graphen der Funktionen

$$z = f_{\pm}(x, y) = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

auf  $\Omega' = \{(x, y) | x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$  ( $f_+$  für den oberen Teil und  $f_-$  für den unteren Teil).



Wir bekommen somit die Parametrisierungen

$$\Phi_{\pm} : \Omega' = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \Phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \end{pmatrix}$$

mit  $\Phi_+$  für den oberen und  $\Phi_-$  für den unteren Teil. Wir berechnen die Normale an  $\partial E$

$$\Phi_{\pm,x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mp \frac{xc}{a^2} \\ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \end{pmatrix}, \Phi_{\pm,y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mp \frac{yc}{b^2} \\ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_{\pm,x} \times \Phi_{\pm,y} = \begin{pmatrix} \frac{\pm \frac{xc}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \\ \frac{\pm \frac{yc}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus Symmetriegründen ist das Flussintegral durch den unteren Teil des Ellipsoids gleich dem Flussintegral durch den oberen Teil. Somit können wir einfach das Integral über dem oberen Teil doppelt zählen

$$\mu(E) = \int_{\partial E} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = 2 \int_{\Omega'} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\frac{xc}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \\ \frac{\frac{yc}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \\ 1 \end{pmatrix} dx dy = 2c \int_{\Omega'} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy.$$

Wir führen nun elliptische Koordinaten ein ( $x = ar \cos \varphi, y = br \sin \varphi, dxdy = abr dr d\varphi$ ), sodass

$$\begin{aligned}\mu(E) &= 2c \int_{\Omega'} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = 2abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr \\ &= 4\pi abc \left[ -\frac{(1 - r^2)^{3/2}}{3} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3} abc.\end{aligned}$$

■

## 19.6 Der Satz von Gauss in der Ebene

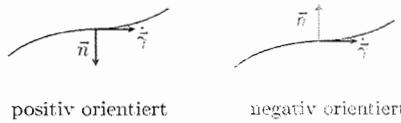
In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff des Flusses und den damit verbundenen Satz von Gauss im zweidimensionalen Fall betrachten.

### 19.6.1 Der Fluss durch eine Kurve in $\mathbb{R}^2$

Es seien  $\gamma \in C_{pw}^1$  eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in  $\mathbb{R}^2$  und  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Aus Kapitel 5 wissen wir, dass der Vektor  $\dot{\gamma}$  tangential zur Kurve verläuft. Ein zu  $\dot{\gamma}$  senkrechter Vektor  $\vec{n} = \pm \dot{\gamma}^\perp$  steht also normal zur Kurve. Wählt man den Normalenvektor  $\vec{n}$  so, dass  $(\vec{n}, \dot{\gamma})$  eine positiv orientierte Basis von  $\mathbb{R}^2$  bildet<sup>2</sup>, so definiert man

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds$$

als das **Flussintegral** von  $\vec{v}$  durch die Kurve  $\gamma$ .



Für eine Parametrisierung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  der Kurve gilt folgende Formel

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{n}(t) dt.$$

**Beispiel 19.6.1** •• Berechne den Fluss von

$$\vec{v} = (x \exp(\tan(x^2 + y^2)), y \exp(\tan(x^2 + y^2)))$$

durch  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$  von innen nach aussen.

<sup>2</sup>Erinnerung:  $(\vec{a}, \vec{b})$  heißt positiv orientiert, falls  $(\vec{a}, \vec{b})$  aus einer Drehung der Standardbasisvektoren  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  entsteht.

Lösung: Die Parametrisierung von  $K$  lautet

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (\cos t, \sin t).$$

Schritt 2: Die Normale bekommt man wie folgt. Zuerst rechnet man  $\dot{\gamma}$  aus

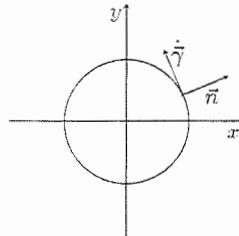
$$\dot{\gamma} = (-\sin t, \cos t).$$

Dann vertauscht man die zwei Komponenten und multipliziert die erste mit  $(-1)$

$$(\cos t, \sin t).$$

Man kontrolliert, ob die Richtung stimmt. In diesem Fall muss  $\vec{n}$  nach aussen zeigen (Figur)

$$\vec{n} = (\cos t, \sin t).$$

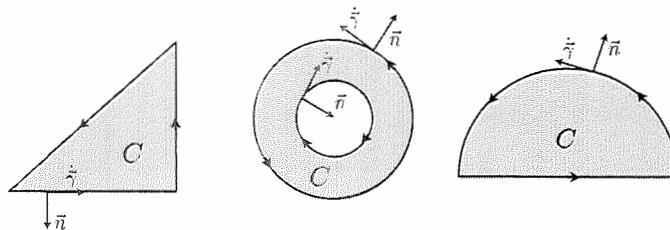


Schritt 3: Man benutzt die Formel für den Fluss

$$\int_K \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \cdot e^{\tan(1)} \\ \sin t \cdot e^{\tan(1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} e^{\tan(1)} dt = 2\pi e^{\tan(1)}. \blacksquare$$

### 19.6.2 Der Satz von Gauss in der Ebene

Wir betrachten einen regulären, beschränkten Bereich  $C$  in  $\mathbb{R}^2$  mit orientiertem Rand  $\gamma$ . Der **orientierte Rand**  $\gamma$  von  $C$  ist eine stückweise  $C^1$ -Kurve, deren Umlaufsinn so gewählt ist, dass  $C$  immer links von  $\gamma$  liegt (siehe Figur). Es seien  $\dot{\gamma}$  und  $\vec{n}$  die Tangential- und Normalvektoren auf dem Rand.



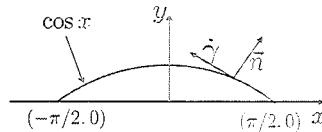
Es gilt nun der Satz von Gauss in der Ebene

**Satz 19.6.1 (Gauss in der Ebene)** Für einen regulären, beschränkten ebenen Bereich  $C$  mit orientiertem Rand  $\gamma$  und ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\vec{v}$  gilt

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_C \operatorname{div}(\vec{v}) do.$$

Wir betrachten einige Beispiele.

**Beispiel 19.6.2** • o o Berechne den Fluss  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds$  von innen nach aussen für  $\vec{v} = (x - y^2, y - x^2)$  und die in der Figur gezeichnete Kurve.



**Direkte Rechnung:** Wir teilen die Kurve in zwei Teile.

Teil 1: 1) Parametrisierung

$$\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (-t, \cos t).$$

2) Normalenvektor?

$$\dot{\gamma} = (-1, -\sin t) \Rightarrow \vec{n} = (\sin t, -1) \xrightarrow{\text{nach aussen}} (-\sin t, 1).$$

3) Formel

$$\begin{aligned} \int_{(1)} \vec{v} \cdot \vec{n} ds &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{pmatrix} -t - \cos^2 t \\ \cos t - t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (t \sin t + \cos^2 t \sin t + \cos t - t^2) dt = 4 - \frac{\pi^3}{12}. \end{aligned}$$

Teil 2: 1) Parametrisierung

$$\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 0).$$

2) Normalenvektor?

$$\dot{\gamma} = (1, 0) \Rightarrow \vec{n} = (0, 1) \xrightarrow{\text{nach aussen}} (0, -1)$$

3) Formel

$$\int_{(2)} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{12}.$$

Zusammenfassend:

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_{(1)} \vec{v} \cdot \vec{n} ds + \int_{(2)} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = 4 - \frac{\pi^3}{12} + \frac{\pi^3}{12} = 4.$$

Mit dem Satz von Gauss: Die Divergenz von  $\vec{v}$  lautet

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 1 + 1 = 2.$$

Nach dem Satz von Gauss in der Ebene gilt also

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_{\Omega} 2 d\mu,$$

wobei  $\Omega$  die Menge ist, welche von  $\gamma$  berandet wird

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \cos x\}.$$

Mit der Formel für Normalbereiche finden wir somit

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} dy 2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx 2 \cos x = 2 [\sin x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4.$$

■

**Beispiel 19.6.3** ○○○ Berechne den Fluss von

$$\vec{v} = (x + \exp(\tanh y + y^2), \log(x+1) + y)$$

durch die Ellipse  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 9y^2 = 4\}$  von innen nach aussen.

**Lösung:** Die Divergenz von  $\vec{v}$  lautet

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 1 + 1 = 2.$$

Somit gilt nach dem Satz von Gauss in der Ebene

$$\int_E \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 9y^2 \leq 4\}} 2 d\mu = 2\mu(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 9y^2 \leq 4\}) = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}\pi.$$

■

**Beispiel 19.6.4** •○○ Berechne den Fluss  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds$  von unten nach oben für

$$\vec{v} = (xe^{xy}, -ye^{xy})$$

und  $\gamma$  den Streckenzug  $(5, 0) \rightarrow (3, 7) \rightarrow (0, 0)$ .

**Direkte Rechnung:** Wir berechnen  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds$  explizit.

**Schritt 1:** Wir parametrisieren  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  mit<sup>3</sup>

$$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (5 - 2t, 7t).$$

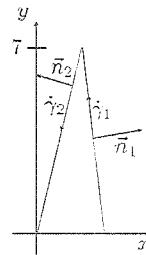
$$\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (3 - 3t, 7 - 7t).$$

**Schritt 2:** Wir rechnen Normalvektoren aus

$$\dot{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_1 ds = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} dt$$

$$\dot{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_2 ds = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} dt$$

wobei wir die Richtung von  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$  so gewählt haben, dass  $(\vec{n}_1, \dot{\gamma}_1)$  und  $(\vec{n}_2, \dot{\gamma}_2)$  positiv orientiert sind (siehe Figur).



**Schritt 3:**

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds &= \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot \vec{n} ds + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot \vec{n} ds \\ &= \int_0^1 e^{35t-14t^2} \begin{pmatrix} 5-2t \\ -7t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 e^{21-42t+21t^2} \begin{pmatrix} 3-3t \\ 7t-7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 e^{35t-14t^2} (35-28t) dt + \int_0^1 e^{21-42t+21t^2} (-42+42t) dt \\ &= \left[ e^{35t-14t^2} \right]_0^1 + \left[ e^{21-42t+21t^2} \right]_0^1 \\ &= e^{21} - 1 + 1 - e^{21} = 0. \end{aligned}$$

**Mit dem Satz von Gauss:** Wir rechnen die Divergenz von  $\vec{v}$  aus

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = e^{xy} + xy e^{xy} - e^{xy} - xy e^{xy} = 0.$$

Um den Satz von Gauss in der Ebene anwenden zu können, müssen wir unsere Kurve  $\gamma$  zu einer geschlossenen Kurve schliessen. Wir schliessen mit dem Streckenzug  $(0, 0) \rightarrow (5, 0)$ . Nach dem Satz

<sup>3</sup>Ein Trick: Bei der Parametrisierung von Geraden kann man sich einfach Folgendes überlegen. Man lässt  $t$  nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen und wählt in jeder Komponente  $a + bt$ , sodass man bei  $t = 0$  den gewünschten Anfangspunkt und bei  $t = 1$  den korrekten Endpunkt bekommt. In diesem Beispiel: Setzen wir  $t = 0$  in  $\gamma_1$  ein, so sind wir bei  $(5, 0)$ ; setzen wir  $t = 1$  ein, so bekommen wir  $(3, 7)$ .

von Gauss in der Ebene gilt dann

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{v}) d\mu = \int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds + \int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot \vec{n} ds$$

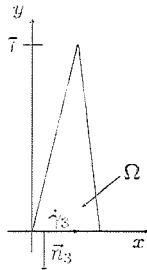
wobei  $\Omega$  die in der Figur gezeichnete Figur ist und

$$\gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (5t, 0).$$

Wir rechnen die Normale an  $\gamma_3$  aus

$$\dot{\gamma}_3(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_3 ds = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} dt.$$

(Bei Gauss müssen die Normalen nach aussen zeigen!).



Somit gilt

$$\int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_0^1 e^0 \begin{pmatrix} 5t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} dt = 0.$$

Somit gilt

$$\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{v}) d\mu} = \boxed{\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds} + \boxed{\int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot \vec{n} ds} \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = 0.$$

■

**Beispiel 19.6.5** •• Berechne den Fluss  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds$  von unten nach oben für

$$\vec{v} = (2xy + y^4, 1 - y^2)$$

und  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y = 1 - x^2\}$ .

**Direkte Rechnung:** Wir berechnen  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds$  direkt.

**Schritt 1:** Wir parametrisieren  $\gamma$  mit<sup>4</sup>

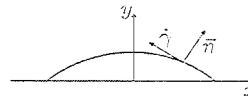
$$\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (-t, 1 - t^2).$$

<sup>4</sup>Aus  $0 \leq y = 1 - x^2$  folgt  $-1 \leq x \leq 1$  und  $y = 1 - x^2$ . Die gesuchte Parametrisierung lautet somit  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (-t, 1 - t^2)$ . Beachte: Die Richtung von  $\gamma$  muss wie im Satz von Gauss sein.

**Schritt 2:** Wir rechnen Normalvektoren aus

$$\hat{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2t \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}ds = \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix} dt,$$

wobei wir die Richtung von  $\vec{n}$  so gewählt haben, dass  $\vec{n}$  von unten nach oben zeigt (siehe Figur).



**Schritt 3:**

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds &= \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} -2t(1-t^2) + (1-t^2)^4 \\ 1 - (1-t^2)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{-1}^1 [4t^2(1-t^2) - 2t(1-t^2)^4 + 1 - (1-t^2)^2] dt \\ &= \int_{-1}^1 [4t^2 - 4t^4 - 2t(1-t^2)^4 + 2t^2 - t^4] dt \\ &= \left[ \frac{4t^3}{3} \right]_{-1}^1 - \left[ \frac{4t^5}{5} \right]_{-1}^1 + \left[ \frac{1}{5}(1-t^2)^5 \right]_{-1}^1 + \left[ \frac{2t^3}{3} \right]_{-1}^1 - \left[ \frac{t^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{8}{5} - 0 + \frac{4}{3} - \frac{2}{5} = 2. \end{aligned}$$

**Mit dem Satz von Gauss:** Wir rechnen die Divergenz von  $\vec{v}$  aus

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 2y - 2y = 0.$$

Um den Satz von Gauss in der Ebene anwenden zu können, müssen wir unsere Kurve  $\gamma$  zu einer geschlossenen Kurve schliessen. Wir schliessen mit dem Streckenzug  $(-1, 0) \rightarrow (1, 0)$ . Nach dem Satz von Gauss in der Ebene gilt dann

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{v}) d\mu = \int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds + \int_{\tilde{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{n} ds,$$

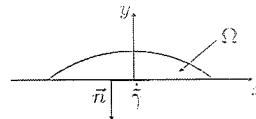
wobei  $\Omega$  die in der Figur gezeichnete Figur ist und

$$\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (-1 + 2t, 0).$$

Wir rechnen die Normale an  $\tilde{\gamma}$  aus

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}ds = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} dt.$$

(Bei Gauss muss die Normale nach aussen zeigen!).



Also

$$\int_{\tilde{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} dt = -2.$$

Somit gilt

$$\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{v}) d\mu} = \boxed{\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds} + \boxed{\int_{\tilde{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{n} ds} \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = 2.$$

■

**Beispiel 19.6.6** • o o Berechne den Fluss  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds$  von unten nach oben für  $\vec{v} = (x, y)$  und  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, y = 2 - x^7\}$ .

**Direkte Rechnung:** Wir berechnen  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds$  direkt.

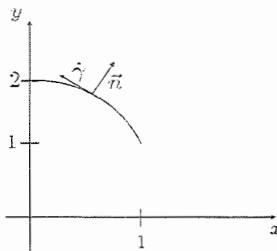
**Schritt 1:** Wir parametrisieren  $\gamma$  mit

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (1-t, 2-(1-t)^7).$$

**Schritt 2:** Wir rechnen die Normale aus

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 7(1-t)^6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} ds = \begin{pmatrix} 7(1-t)^6 \\ 1 \end{pmatrix} dt,$$

wobei wir die Richtung von  $\vec{n}$  so gewählt haben, dass  $\vec{n}$  von unten nach oben zeigt (siehe Figur).



**Schritt 3:**

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t \\ 2-(1-t)^7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7(1-t)^6 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 [7(1-t)^7 + 2 - (1-t)^7] dt = \frac{6}{8} + 2 = \frac{11}{4}.$$

**Mit dem Satz von Gauss:** Wir rechnen die Divergenz von  $\vec{v}$  aus

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 1 + 1 = 2.$$

Um den Satz von Gauss in der Ebene anwenden zu können, müssen wir unsere Kurve  $\gamma$  zu einer geschlossenen Kurve schliessen. Wir schliessen mit dem Streckenzug  $(0, 2) \rightarrow (1, 1)$ . Nach dem Satz von Gauss in der Ebene gilt dann

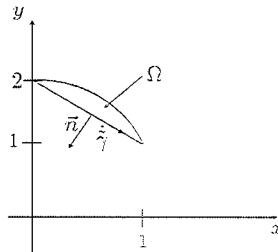
$$\int_{\Omega} 2 d\mu = \int_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds + \int_{\tilde{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{n} ds$$

wobei  $\Omega$  die in der Figur gezeichnete Figur ist und

$$\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 2 - t).$$

Wir rechnen die Normale an  $\tilde{\gamma}$  aus

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{n} ds = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} dt.$$



Somit gilt

$$\int_{\tilde{\gamma}} \vec{v} \cdot \tilde{n} ds = \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ 2-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (-t - 2 + t) dt = -2.$$

Wir müssen noch  $\int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{v}) d\mu$  bestimmen. Dazu schreiben wir  $\Omega$  als Normalbereich

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 2-x \leq y \leq 2-x^2\}.$$

Also

$$\int_{\Omega} 2 d\mu = \int_0^1 dx \int_{2-x}^{2-x^2} dy 2 = 2 \int_0^1 (-x^2 + x) = 2 \left( -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}.$$

Somit gilt

$$\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{v}) d\mu} = \boxed{\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \tilde{n} ds} + \boxed{\int_{\tilde{\gamma}} \vec{v} \cdot \tilde{n} ds} \stackrel{\text{gesucht}}{\Rightarrow} \int_{\gamma} \vec{v} \cdot \tilde{n} ds = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

■



## Kapitel 20

# Der Satz von Stokes und der Satz von Green in der Ebene

### 20.1 Der Satz von Stokes

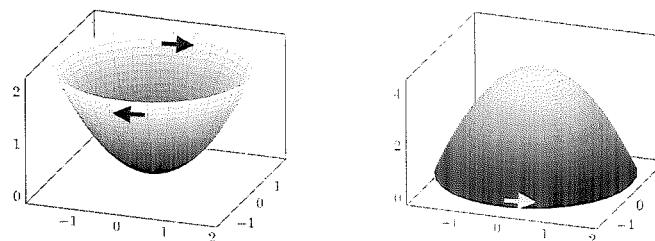
Der Satz von Stokes erlaubt Flussintegrale mithilfe von Wegintegralen zu bestimmen und umgekehrt. Der Satz lautet so

**Satz 20.1.1 (Stokes)** Es seien  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  und  $C \subset \Omega$  eine offene Fläche durch die geschlossene  $C_{pw}^1$ -Kurve  $\gamma = \partial C$  berandet. Dann gilt

$$\int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Die Kurve  $\gamma$  läuft in positiver mathematischer Richtung.

Die Kurve  $\gamma$ , welche die Menge  $C$  berandet, muss diese in mathematisch positiver Richtung umlaufen. Was bedeutet das? Die positive Orientierung von  $\partial C$  kann man mit folgender Regel bestimmen: Eine Person, welche entlang  $\vec{n}$  den Rand  $\partial C$  durchläuft, sieht die Punkte der Oberfläche  $C$  links. Zum Beispiel



Nicht alle Oberflächen besitzen einen Rand: Es gibt Flächen ohne Rand. Beispiele sind: die Kugel, der Torus. Solche Oberflächen heißen *geschlossen*.

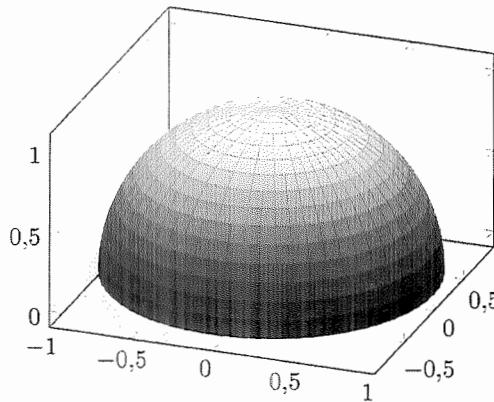
**Beispiel 20.1.1** ••• Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{v} = (y(z^2 - x^2), x(y^2 - z^2), z(x^2 + y^2))$$

und die obere Hälfte der Einheitssphäre

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}.$$

Gesucht ist das Wegintegral  $\int_{\partial H} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  entlang des Randes von  $H$  (siehe Figur).



**Direkte Rechnung:** Wir bestimmen das Wegintegral  $\int_{\partial H} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  direkt mithilfe des Kochrezeptes für Wegintegrale.

**Schritt 1:** Wir parametrisieren den Rand  $\partial H$  mit der Kurve

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \rightarrow (\cos t, \sin t, 0).$$

Dabei haben wir beachtet, dass  $\gamma$  in positiver Richtung läuft (gemäß der oben erwähnten Regel).

**Schritt 2:** Wir rechnen  $\dot{\gamma}$  aus

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, 0).$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für Wegintegrale

$$\begin{aligned} \int_{\partial H} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos^2 t \sin t \\ \cos t \sin^2 t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt - 2 \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt = 2 \left( \pi - \frac{3}{4}\pi \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

**Mit dem Satz von Stokes:** Hier berechnen wir den Fluss der Rotation von  $\vec{v}$  durch  $H$ , denn nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int_{\partial H} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_H \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} do.$$

Somit müssen wir als Allererstes die Rotation von  $\vec{v}$  ausrechnen

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y(z^2 - x^2) \\ x(y^2 - z^2) \\ z(x^2 + y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z(x+y) \\ 2z(y-x) \\ x^2 + y^2 - 2z^2 \end{pmatrix}.$$

Nun benutzen wir das Kochrezept für Flussintegrale.

**Schritt 1:** Wir parametrisieren  $H$  mithilfe der Kugelkoordinaten

$$\Phi : [0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (\theta, \phi) \mapsto \Phi(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Beachte: Da  $H$  nur die obere Hälfte der Einheitskugel ist, haben wir  $\theta \in [0, \pi/2]$  gewählt.

**Schritt 2:** Nun berechnen wir  $\Phi_\theta \times \Phi_\phi$

$$\Phi_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \Phi_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_\theta \times \Phi_\phi = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos \phi \\ \sin^2 \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}.$$

**Schritt 3:** Somit finden wir (mit der Formel für den Fluss)

$$\begin{aligned} \int_{\partial H} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_H \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} 2 \sin \theta \cos \theta (\sin \phi + \cos \phi) \\ 2 \sin \theta \cos \theta (\sin \phi - \cos \phi) \\ \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos \phi \\ \sin^2 \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (2 \sin^3 \theta \cos \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) + \sin^3 \theta \cos \theta - 2 \cos^3 \theta \sin \theta) \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (3 \sin^3 \theta \cos \theta - 2 \cos^3 \theta \sin \theta) \\ &= 2\pi \left( 3 \left[ \frac{\sin^4 \theta}{4} \right]_0^{\pi/2} + 2 \left[ \frac{\cos^4 \theta}{4} \right]_0^{\pi/2} \right) = 2\pi \left( \frac{3}{4} - \frac{2}{4} \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

■

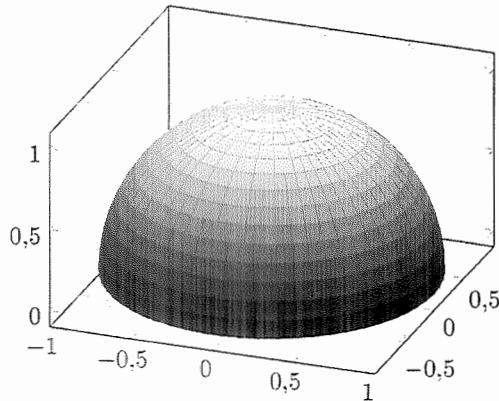
**Beispiel 20.1.2 •••** Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{v} = (z, x, y)$$

und die obere Halbkugel

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}.$$

Man berechne  $\int_H \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma$ .



**Direkte Rechnung:** Wir müssen den Fluss des Vektorfeldes  $\text{rot}(\vec{v})$  durch  $H$  bestimmen. Zuerst bestimmen wir also die Rotation von  $\vec{v}$

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann wenden wir das Kochrezept für Flussintegrale an.

**Schritt 1:** Wir parametrisieren die obere Halbkugel wie im vorigen Beispiel

$$\Phi : [0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (\theta, \phi) \mapsto \Phi(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

**Schritt 2:** Wir berechnen  $\Phi_\theta \times \Phi_\phi$

$$\Phi_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \Phi_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_\theta \times \Phi_\phi = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos \phi \\ \sin^2 \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}.$$

**Schritt 3:** Mit der Formel für den Fluss finden wir also

$$\begin{aligned} \int_H \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos \phi \\ \sin^2 \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (\cos \phi \sin^2 \theta + \sin \phi \sin^2 \theta + \cos \theta \sin \theta) \\ &= 0 + 0 + \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \cos \theta \sin \theta = 2\pi \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi. \end{aligned}$$

**Mit dem Satz von Stokes:** Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int_H \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\partial H} \vec{v} \cdot d\vec{s},$$

wobei  $\partial H$  der Kreis mit Radius 1 und Zentrum  $(0, 0, 0)$  in der  $xy$ -Ebene ist. Somit müssen wir das Wegintegral  $\int_{\partial H} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  bestimmen, was wir mithilfe des Kochrezeptes für Wegintegrale tun können.

**Schritt 1:** Wir parametrisieren den Rand  $\partial H$  mit

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos t, \sin t, 0).$$

**Schritt 2:** Wir rechnen  $\dot{\gamma}$  aus

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, 0).$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für Wegintegrale

$$\int_H \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\partial H} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi.$$

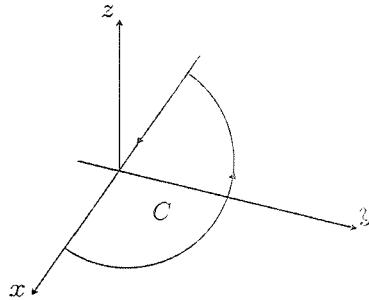
■

**Beispiel 20.1.3 ••◦ Bestätige den Satz von Stokes für  $\vec{v} = (x + y^2, y + z, x + z)$  und**

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, z = 0\}$$

**Direkte Rechnung:** Wir berechnen  $\int_{\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  direkt, und zwar mithilfe des Kochrezeptes für Wegintegrale.

**Schritt 1:** Der Rand von  $C$  besteht aus dem halben Kreisbogen in der  $xy$ -Ebene und der Geraden  $[-1, 1]$  entlang der  $x$ -Achse, beide im Gegenuhzeigersinn durchlaufen.



Wir parametrisieren diese wie folgt

$$\gamma_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos t, \sin t, 0),$$

$$\gamma_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t, 0, 0).$$

**Schritt 2:** Wir rechnen die Geschwindigkeitsvektoren der zwei Kurven aus

$$\dot{\gamma}_1 = (-\sin t, \cos t, 0).$$

$$\dot{\gamma}_2 = (1, 0, 0).$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für Wegintegrale

$$\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^\pi \begin{pmatrix} \cos t + \sin^2 t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = - \int_0^\pi \sin^3 t dt = -\frac{4}{3}$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_{-1}^1 t dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0.$$

Somit

$$\int_{\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = -\frac{4}{3}.$$

Mit dem Satz von Stokes: Aus dem Satz von Stokes folgt

$$\int_{\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Wir müssen also den Fluss der Rotation von  $\vec{v}$  durch  $C$  bestimmen. Die Rotation von  $\vec{v}$  lautet

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x + y^2 \\ y + z \\ x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2y \end{pmatrix}.$$

**Schritt 1:** Wir parametrisieren die Fläche  $C$  mit Zylinderkoordinaten (Polarkoordinaten eigentlich, da wir auf der  $xy$ -Ebene sind)

$$\Phi : [0, 1] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \phi) \mapsto (r \cos \phi, r \sin \phi, 0).$$

**Schritt 2:** Wir rechnen die Normale an  $C$  aus

$$\Phi_r = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_\phi = \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_r \times \Phi_\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für Flussintegrale

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_C \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^1 dr \int_0^\pi d\phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2r \sin \phi \end{pmatrix} \\ &= - \int_0^1 dr \int_0^\pi d\phi 2r^2 \sin \phi = \left[ \frac{2}{3} r^3 \right]_0^\pi [\cos \phi]_0^\pi = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

**Beispiel 20.1.4 ••• Betrachte die Kurven**

$$\gamma_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos t, 5 + \sin t, t)$$

$$\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (1 - 2t, 5, \pi t)$$

und das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \setminus \{x, y = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto \left( \frac{2(zx + y)}{x^2 + y^2}, \frac{2(zy - x)}{x^2 + y^2}, \log(x^2 + y^2) \right).$$

Benutze den Satz von Stokes um

$$\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

zu berechnen.

**Lösung:** Die Kurve  $\gamma_1$  geht von  $(1, 5, 0)$  nach  $(-1, 5, \pi)$ . Die Kurve  $\gamma_2$  geht auch von  $(1, 5, 0)$  nach  $(-1, 5, \pi)$ . Somit ist die Kurve  $\gamma_1 - \gamma_2$  geschlossen. Diese Kurve darf man also als Rand eines Bereiches  $C$  sehen. Mit dem Satz von Stokes folgt also

$$\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} do.$$

Nun ist aber  $\vec{v}$  rotationsfrei

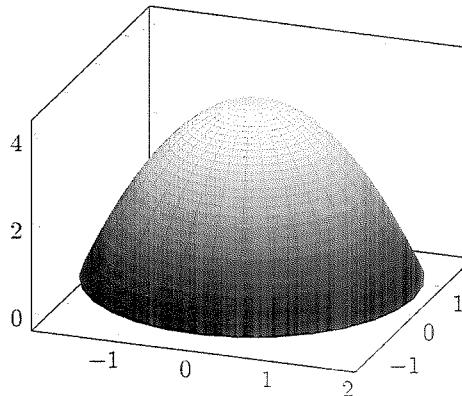
$$\text{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{2(zx+y)}{x^2+y^2} \\ \frac{2(zy-x)}{x^2+y^2} \\ \log(x^2+y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2} \\ \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2} \\ \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} z - \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} xyz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit

$$\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} do = 0.$$

■

**Beispiel 20.1.5** ••• Man berechne  $\int_S \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} do$  für  $\vec{v} = (x^2+y, 3xy, \cos(z)+z^2)$  und  $S$  der Teil des Paraboloids  $z = 4 - (x^2 + y^2)$  ist, welcher oberhalb der  $xy$ -Ebene liegt.



**Lösung:** Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int_S \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} do = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Wir bestimmen somit  $\int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  mit dem Kochrezept für Wegintegrale.

**Schritt 1:** Der Rand von  $S$  besteht aus dem Kreis mit Radius 2 und Mittelpunkt  $(0, 0, 0)$  in der  $xy$ -Ebene. Eine Parametrisierung ist

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (2 \cos t, 2 \sin t, 0).$$

**Schritt 2:**

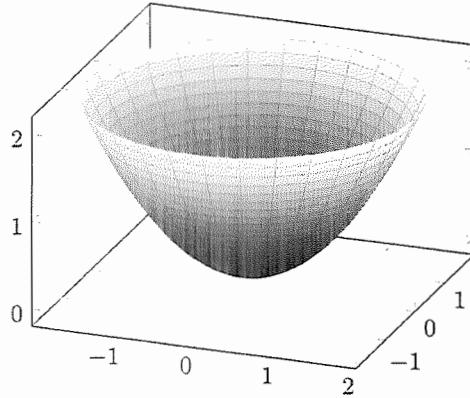
$$\dot{\gamma} = (-2 \sin t, 2 \cos t, 0).$$

**Schritt 3:** Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\begin{aligned}\int_S \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 4 \cos^2 t + 2 \sin t \\ 12 \sin t \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ 2 \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-8 \cos^2 t \sin t - 4 \sin^2 t + 24 \sin t \cos^2 t) dt \\ &= 0 - 4\pi + 0 = -4\pi.\end{aligned}$$

■

**Beispiel 20.1.6 •••** Bestätige den Satz von Stokes für  $\vec{v} = (3y, -xz, yz^2)$  und  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - 2z = 0, z \leq 2\}$ .



**Direkte Rechnung:** Wir bestimmen das Wegintegral  $\int_{\partial F} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  direkt.

**Schritt 1:** Der Rand von  $F$  ist der Kreis mit Radius 2 und Zentrum  $(0, 0, 2)$ , der in der Ebene  $z = 2$  liegt. Eine Parametrisierung lautet somit

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \rightarrow (2 \cos t, 2 \sin t, 2).$$

**Schritt 2:** Der Geschwindigkeitsvektor längs  $\gamma$  lautet

$$\dot{\gamma} = (-2 \sin t, 2 \cos t, 0).$$

**Schritt 3:** Wir haben somit

$$\begin{aligned}\int_{\partial F} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 6 \cos t \\ -4 \cos t \\ 8 \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ 2 \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-12 \sin^2 t - 8 \cos^2 t) dt = -12\pi - 8\pi = -20\pi.\end{aligned}$$

**Mit dem Satz von Stokes:** Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int_{\partial F} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_F \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} do.$$

Die Rotation von  $\vec{v}$  lautet

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3y \\ -xz \\ yz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 + x \\ 0 \\ -3 - z \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen nun  $\int_F \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} do$  mit dem Kochrezept für Flussintegrale.

**Schritt 1:** Wir parametrisieren  $F$  mithilfe der Zylinderkoordinaten. Wir setzen somit  $x = r \cos \phi$  und  $y = r \sin \phi$ . Für  $z$  benutzen wir die Bedingung  $x^2 + y^2 - 2z = 0$ , welche impliziert  $z = (x^2 + y^2)/2 = r^2/2$ . Somit

$$\Phi : [0, 2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \phi) \rightarrow (r \cos \phi, r \sin \phi, r^2/2).$$

**Schritt 2:** Wir berechnen den Normalvektor

$$\Phi_r = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ r \end{pmatrix}, \quad \Phi_\phi = \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_r \times \Phi_\phi = \begin{pmatrix} -r^2 \cos \phi \\ -r^2 \sin \phi \\ r \end{pmatrix}.$$

**Schritt 3:** Es gilt

$$\begin{aligned} \int_F \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} do &= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} \frac{r^4}{4} + r \cos \phi \\ 0 \\ -\frac{r^2}{2} - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r^2 \cos \phi \\ -r^2 \sin \phi \\ r \end{pmatrix} \\ &= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \left( -\frac{r^6}{4} \cos \phi - r^3 \cos^2 \phi - \frac{r^3}{2} - 3r \right) \\ &= \int_0^2 dr \left( 0 - \pi r^3 - 2\pi \frac{r^5}{2} - 6\pi r \right) \\ &= \left[ -\pi \frac{r^4}{4} - 2\pi \frac{r^4}{8} - 6\pi \frac{r^2}{2} \right]_0^2 = -20\pi. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 20.1.7 ••○** Bestätige den Satz von Stokes für  $\vec{v} = (z, x, y)$  und  $C$  gleich dem Teil der Fläche, die von  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  und  $x + y + z = 1$  begrenzt wird aber nicht in der  $xz$ -Ebene liegt (siehe Figur).

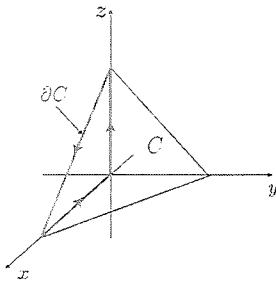
**Direkte Rechnung:** Wir bestimmen das Wegintegral  $\int_{\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  direkt.

**Schritt 1:** Wir parametrisieren den Rand in 3 Stücken

$$\gamma_1 : [1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \rightarrow (t, 0, 0).$$

$$\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \rightarrow (0, 0, t),$$

$$\gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \rightarrow (t, 0, 1-t).$$



**Schritt 2:**  $\dot{\gamma}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\dot{\gamma}_2 = (0, 0, 1)$  und  $\dot{\gamma}_3 = (1, 0, -1)$ .

**Schritt 3:** Wir haben

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_1^0 \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0 \\ \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = 0 \\ \int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (1-t) dt = \left[ t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zusammenfassend

$$\int_{\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Mit dem Satz von Stokes: Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int_{\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Die Rotation von  $\vec{v}$  lautet

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Schritt 1:** Wir teilen die Oberfläche in 3 Teile

$$\Phi_1 : [0, 1] \times [0, 1-x] \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, 0),$$

$$\Phi_2 : [0, 1] \times [0, 1-x] \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, 1-x-y),$$

$$\Phi_3 : [0, 1] \times [0, 1-y] \rightarrow \mathbb{R}^3, (y, z) \mapsto (0, y, z).$$

(Beachte: Im ersten Fall haben wir zum Beispiel auf  $[0, 1] \times [0, 1-x]$  und nicht auf  $[0, 1] \times [0, 1]$  integriert. Denn sonst hätten wir nicht auf dem Dreieck integriert, sondern auf einem Quadrat!).

**Schritt 2:** Wir rechnen die Normalvektoren aus

$$\Phi_{1,x} = (1, 0, 0), \quad \Phi_{1,y} = (0, 1, 0) \quad \Rightarrow \quad \Phi_{1,x} \times \Phi_{1,y} = (0, 0, 1),$$

$$\Phi_{2,x} = (1, 0, -1), \quad \Phi_{2,y} = (0, 1, -1) \quad \Rightarrow \quad \Phi_{2,x} \times \Phi_{2,y} = (1, 1, 1),$$

$$\Phi_{3,y} = (0, 1, 0), \quad \Phi_{3,z} = (0, 0, 1) \Rightarrow \Phi_{3,y} \times \Phi_{3,z} = (1, 0, 0).$$

Wir korrigieren die Richtung des ersten und dritten Vektors, damit sie von innen nach aussen zeigen

$$\Phi_{1,x} \times \Phi_{1,y} = (0, 0, 1) \xrightarrow{\text{nach aussen}} (0, 0, -1).$$

$$\Phi_{3,y} \times \Phi_{3,x} = (1, 0, 0) \xrightarrow{\text{nach aussen}} (-1, 0, 0).$$

**Schritt 3:** Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{(1)} \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\ &= - \int_0^1 dx (1-x) = - \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{(2)} \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy 3 \\ &= 3 \int_0^1 dx (1-x) = 3 \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{(3)} \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \\ &= - \int_0^1 dy (1-y) = - \left[ y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Insgesamt

$$\int_C \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

■

**Beispiel 20.1.8 •••** Es sei  $\vec{v}$  ein Vektorfeld der Klasse  $C^2$  auf  $\mathbb{R}^3$ . Beweise

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v})) = 0$$

a) durch explizites Nachrechnen,

b) mithilfe der Sätze von Stokes und Gauss.

Hinweis: Benutze, dass aus  $\int_B f d\mu = 0$  für alle Bälle  $B \subset \mathbb{R}^n$   $f = 0$  folgt.

**Lösung a)**

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v})) = \operatorname{div} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0.$$

b) Wir wenden die Sätze von Gauss und Stokes an, um zu zeigen, dass

$$\int_B \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v})) d\mu = 0$$

für jeden Ball  $B \subset \mathbb{R}^3$  gilt. Also los! Sei  $B$  ein Ball in  $\mathbb{R}^3$ . Nach dem Satz von Gauss gilt

$$\int_B \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v})) d\mu = \int_{\partial B = S} \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} do,$$

wobei  $\partial B = S$  eine Sphäre ist. Nun wenden wir den Satz von Stokes an

$$\int_{\partial B = S} \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} do = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0,$$

da  $\partial S = \emptyset$  (die Sphäre hat keinen Rand). Somit haben wir gezeigt, dass für jeden Ball  $B \subset \mathbb{R}^3$  gilt

$$\int_B \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v})) d\mu = 0.$$

Es folgt somit  $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v})) = 0$ . ■

**Beispiel 20.1.9 •••** Es sei  $S$  eine orientierte Fläche mit Normalenvektor  $\vec{n}$ .

a) Sei  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$  gegeben. Berechne die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{x}.$$

b) Es sei  $\partial S$  der Rand von  $S$  (in positiver Richtung orientiert). Zeige

$$\int_S \vec{n} do = \frac{1}{2} \int_{\partial S} \vec{x} \times d\vec{s}.$$

**Lösung a)** Das Vektorfeld lautet explizit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 z - a_3 y \\ a_3 x - a_1 z \\ a_1 y - a_2 x \end{pmatrix}.$$

Somit lautet die Rotation

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 z - a_3 y \\ a_3 x - a_1 z \\ a_1 y - a_2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \\ 2a_3 \end{pmatrix} = 2\vec{a}.$$

b) Um solche Vektoridentitäten zu zeigen (wie unsere), benutzt man normalerweise einen Trick. Man multipliziert die ganze Identität mit einem festen Vektor  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ , den wir ins Integral ziehen können und am Ende der Rechnung (nachdem wir Gauss oder Stokes angewandt haben) wieder aus dem Integral herausziehen können. Also los! Wir multiplizieren unsere Identität mit  $\vec{a}$  auf beiden Seiten. Die linke Seite wird dann

$$\vec{a} \cdot \int_S \vec{n} do = \int_S \vec{a} \cdot \vec{n} do.$$

Nach der Teilaufgabe (a) schreiben wir  $\vec{a}$  als die Rotation von  $\frac{1}{2}\vec{a} \times \vec{x}$ . Also

$$\vec{a} \cdot \int_S \vec{n} d\sigma = \int_S \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{1}{2} \int_S \text{rot}(\vec{a} \times \vec{x}) \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Nun benutzen wir den Satz von Stokes, um das Flussintegral als Wegintegral zu schreiben

$$\frac{1}{2} \int_S \text{rot}(\vec{a} \times \vec{x}) \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\partial S} (\vec{a} \times \vec{x}) \cdot ds = \frac{1}{2} \int_{\partial S} (\vec{x} \times d\vec{s}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \frac{1}{2} \int_{\partial S} (\vec{x} \times d\vec{s}).$$

Dabei haben wir die Zyklizität des gemischten Produktes benutzt (d.h.  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$ ). Somit haben wir Folgendes gezeigt

$$\vec{a} \cdot \int_S \vec{n} d\sigma = \vec{a} \cdot \frac{1}{2} \int_{\partial S} \vec{x} \times d\vec{s}, \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3.$$

Da der Vektor  $\vec{a}$  beliebig war, finden wir<sup>1</sup>

$$\int_S \vec{n} d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\partial S} \vec{x} \times d\vec{s}.$$

■

**Beispiel 20.1.10** ••• Es sei  $S$  eine orientierte, kompakte Fläche mit Normalenvektor  $\vec{n}$  und  $f$  eine  $C^1$ -Funktion auf der Menge  $\Omega$ , welche  $S$  enthält. Zeige

$$\int_S \vec{n} \times \nabla f d\sigma = \int_{\partial S} f d\vec{s}.$$

**Lösung:** Um die Vektoridentität zu zeigen, benutzen wir den Trick des vorigen Beispiels. Wir multiplizieren die Identität mit einem festen Vektor  $\vec{a}$  auf beiden Seiten. Die rechte Seite wird dann

$$\vec{a} \cdot \int_{\partial S} f d\vec{s} = \int_{\partial S} f \vec{a} \cdot d\vec{s}.$$

Nun benutzen wir den Satz von Stokes, um das Wegintegral als Flussintegral zu schreiben

$$\int_{\partial S} f \vec{a} \cdot d\vec{s} = \int_S \text{rot}(f \vec{a}) \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Nun müssen wir die Rotation des Vektorfeldes  $f \vec{a}$  bestimmen

$$\text{rot}(f \vec{a}) = \text{rot} \begin{pmatrix} fa_1 \\ fa_2 \\ fa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} fa_1 \\ fa_2 \\ fa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \frac{\partial f}{\partial y} - a_2 \frac{\partial f}{\partial z} \\ a_1 \frac{\partial f}{\partial z} - a_3 \frac{\partial f}{\partial x} \\ a_2 \frac{\partial f}{\partial x} - a_1 \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla f \times \vec{a}.$$

Somit haben wir

$$\int_{\partial S} f \vec{a} \cdot d\vec{s} = \int_S \text{rot}(f \vec{a}) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_S (\nabla f \times \vec{a}) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_S (\vec{n} \times \nabla f) \cdot \vec{a} d\sigma.$$

<sup>1</sup>Dies folgt aus der positiven Definitheit des Skalarproduktes. Denn aus  $\vec{a} \cdot \vec{y}$  für alle  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$  folgt  $\vec{y} = 0$ . In diesem Fall:  $\vec{a} \cdot (\int_S \vec{n} d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\partial S} \vec{x} \times d\vec{s}) = 0$ , also  $\int_S \vec{n} d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\partial S} \vec{x} \times d\vec{s} = 0$ .

Dabei haben wir die Zyklizität des gemischten Produktes benutzt (d.h.  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$ ). Somit haben wir Folgendes gezeigt

$$\vec{a} \cdot \int_S \vec{n} \times \nabla f d\sigma = \vec{a} \cdot \int_{\partial S} f d\vec{s}. \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3.$$

Da der Vektor  $\vec{a}$  beliebig war, finden wir

$$\int_S \vec{n} \times \nabla f d\sigma = \int_{\partial S} f d\vec{s}.$$

■

## 20.2 Der Satz von Green in der Ebene

Der Satz von Green erlaubt zweidimensionale Wegintegrale auf eine einfache Art zu berechnen, indem man zweidimensionale Gebietsintegrale ausrechnet. Der Satz lautet

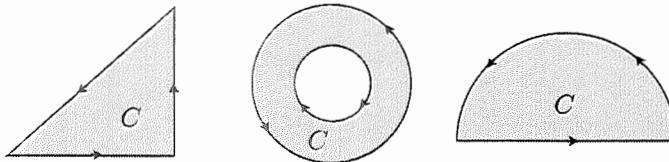
**Satz 20.2.1 (Green)** Es seien  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  und  $C \subset \Omega$  ein beschränkter Bereich mit  $C_{pw}^1$  Rand  $\partial C$ . Dann gilt

$$\int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Der Satz von Green ist die zweidimensionale Version des Satzes von Stokes. Man notiert

$$\text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Der Rand  $\partial C$  wird im positiven mathematischen Sinn umlaufen, d.h. so, dass das Gebiet  $C$  immer links steht (siehe Figur).



**Beispiel 20.2.1** •• Berechne  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  für  $\vec{v} = (xy^2, yx^2)$  und  $\gamma =$  Kreis mit Radius 1 um  $(0,0)$  einmal ohne und einmal mit dem Satz von Green.

**Direkte Rechnung:** Wir berechnen  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  mit dem Kochrezept für Wegintegrale.

**Schritt 1:** Wir parametrisieren die Kurve  $\gamma$  wie üblich

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t).$$

**Schritt 2:** Wir rechnen  $\dot{\gamma}$  aus

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t).$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für Wegintegrale

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \sin^2 t \\ \cos^2 t \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} [\cos^3 t \sin t - \cos t \sin^3 t] dt = \left[ -\frac{\cos^4 t}{4} \right]_0^{2\pi} + \left[ -\frac{\sin^4 t}{4} \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

**Mit dem Satz von Green:** Zuerst rechnen wir die Rotation von  $\vec{v}$  aus

$$\text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 2xy - 2xy = 0.$$

Nach dem Satz von Green gilt somit

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \text{rot}(\vec{v}) dx dy = 0.$$

■

**Beispiel 20.2.2 •••** Berechne  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  für  $\vec{v} = (x+y, y)$  und  $\gamma = \text{Kreis mit Radius 1 um } (0,0)$  einmal ohne und einmal mit dem Satz von Green.

**Direkte Rechnung:** Wir berechnen  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  mit dem Kochrezept für Wegintegrale.

**Schritt 1:** Wir parametrisieren die Kurve mit

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t).$$

**Schritt 2:** Wir rechnen  $\dot{\gamma}$  aus

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t).$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = - \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -\pi.$$

**Mit dem Satz von Green:** Die Rotation von  $\vec{v}$  ist

$$\text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 - 1 = -1.$$

Somit gilt nach dem Satz von Green ( $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\} = \text{Einheitsdisk}$ )

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_E -1 dx dy = -\mu(E) = -\pi.$$

**Beispiel 20.2.3 ••• Berechne  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  für  $\vec{v} = (y - \sin x, \cos x)$  und  $\gamma$  der Streckenzug von  $(0, 0) \rightarrow (\pi/2, 0) \rightarrow (\pi/2, 1) \rightarrow (0, 0)$  einmal ohne und einmal mit dem Satz von Green.**

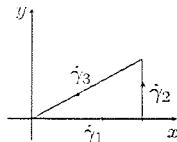
**Direkte Rechnung:** Wir berechnen  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  mit dem Kochrezept für Wegintegrale.

**Schritt 1:** Wir parametrisieren die Kurve in drei Stücken

$$\gamma_1 : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 0),$$

$$\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\pi/2, t),$$

$$\gamma_3 : [\pi/2, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\pi/2, \frac{2}{\pi}t).$$



**Schritt 2:** Wir rechnen  $\dot{\gamma}_i$  für die drei Stücke aus

$$\dot{\gamma}_1(t) = (1, 0),$$

$$\dot{\gamma}_2(t) = (0, 1),$$

$$\dot{\gamma}_3(t) = (1, 2/\pi).$$

**Schritt 3:** Wir haben

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Für Stück 1:

$$\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = - \int_0^{\pi/2} \sin t dt = [\cos t]_0^{\pi/2} = -1.$$

Für Stück 2:

$$\int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} t-1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = 0.$$

Für Stück 3:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_{\pi/2}^0 \begin{pmatrix} \frac{2t}{\pi} - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{\pi} \end{pmatrix} dt = \int_{\pi/2}^0 \left( \frac{2}{\pi}t - \sin t + \frac{2}{\pi} \cos t \right) dt \\ &= \left[ \frac{t^2}{\pi} + \cos t + \frac{2}{\pi} \sin t \right]_{\pi/2}^0 = 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Somit

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s} = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}.$$

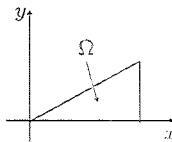
**Mit dem Satz von Green:** Die Rotation von  $\vec{v}$  lautet

$$\text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = -\sin x - 1.$$

Somit gilt nach dem Satz von Green

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy.$$

wobei  $\Omega$  das von  $\gamma$  berandete Gebiet ist.



Wir schreiben  $\Delta$  als Normalbereich

$$\Omega = \{0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq 2x/\pi\}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_{\Omega} (-\sin x - 1) dx dy = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{2x/\pi} dy (-\sin x - 1) \\ &= \int_0^{\pi/2} dx [-y \sin x - y]_0^{2x/\pi} = \int_0^{\pi/2} dx \left( -\frac{2x}{\pi} \sin x - \frac{2x}{\pi} \right) \\ &= \left[ \frac{2}{\pi} (x \cos x - \sin x) - \frac{x^2}{\pi} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

■

**Beispiel 20.2.4** ••• Berechne  $\int_{\Omega} \text{rot}(\vec{v}) d\mu$  für  $\vec{v} = (y, xy(1-x))$  und  $\Omega = [0,1] \times [0,2]$  einmal ohne und einmal mit dem Satz von Green.

**Direkte Rechnung:** Um das Integral direkt zu bestimmen, berechnen wir die Rotation von  $\vec{v}$

$$\text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = y(1-x) - xy - 1 = y - 2xy - 1.$$

Wir finden somit ein Integral über dem Quader  $[0,1] \times [0,2]$ , das wir mit dem Satz von Fubini berechnen können

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{rot}(\vec{v}) dx dy &= \int_{[0,1] \times [0,2]} (y - 2xy - 1) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^2 dy (y - 2xy - 1) \\ &= \int_0^1 dx \left[ \frac{y^2}{2} - 2x \frac{y^2}{2} - y \right]_0^2 = \int_0^1 dx (2 - 4x - 2) = [2x - 2x^2 - 2x]_0^1 = -2. \end{aligned}$$

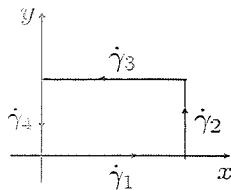
Mit dem Satz von Green: Nach dem Satz von Green gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot}(\vec{v}) d\mu = \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Wir müssen also  $\int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  bestimmen.

**Schritt 1:** Wir parametrisieren den Rand von  $\Omega$  mit den vier Kurven

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (t, 0), \\ \gamma_2 &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (1, 2t), \\ \gamma_3 &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (1-t, 2), \\ \gamma_4 &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (0, 2-2t).\end{aligned}$$



**Schritt 2:** Wir rechnen  $\dot{\gamma}_i$  aus

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_1(t) &= (1, 0), \\ \dot{\gamma}_2(t) &= (0, 2), \\ \dot{\gamma}_3(t) &= (-1, 0), \\ \dot{\gamma}_4(t) &= (0, -2).\end{aligned}$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel für Wegintegrale

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_4} \vec{v} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} dt \\ &\quad + \int_0^1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2(1-t)(1-1+t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 2-2t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} dt \\ &= - \int_0^1 2 dt = -2.\end{aligned}$$

Also

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot}(\vec{v}) d\mu = \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot d\vec{s} = -2.$$

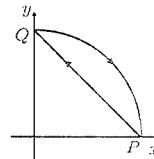
■

**Beispiel 20.2.5 ••• Berechne  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  für  $\vec{v} = (-x^3, y(1+x))$ , wobei der Weg  $\gamma$  von  $P = (0, 1)$  nach  $Q = (1, 0)$  längs der Geraden  $y = 1 - x$  verläuft und von dort längs des Einheitskreises zurück nach  $P$ .**

**Lösung:** Wir wenden den Satz von Green an

$$\int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot d\vec{s} = - \int_{\Omega} \text{rot}(\vec{v}) d\mu$$

wobei  $\Omega$  das von  $\gamma$  berandete Gebiet ist. In diesem Fall haben wir ein zusätzliches Minus gemalt, weil die Kurve  $\gamma$  nicht im positiven mathematischen Sinn verläuft!



Wir berechnen die Rotation von  $\vec{v}$

$$\text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = y.$$

Wir schreiben den Bereich  $\Omega$ , welcher durch  $\gamma$  berandet wird, als Normalbereich

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 1-y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}.$$

Nach dem Satz von Green finden wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= - \int_{\Omega} \text{rot}(\vec{v}) dx dy = - \int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} y dx \\ &= - \int_0^1 dy \left( y\sqrt{1-y^2} - y(1-y) \right) = - \frac{1}{2} \int_0^1 2y\sqrt{1-y^2} dy - \int_0^1 (y^2 - y) dy \\ &= - \frac{1}{2} \left[ -\frac{2}{3}(1-y^2)^{3/2} \right]_0^1 - \left[ \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

■

### 20.2.1 Berechnung von Flächeninhalten mit dem Satz von Green

Der Satz von Green erlaubt es, nicht nur Wegintegrale als Flächenintegrale zu bestimmen. Man kann zum Beispiel auch den Flächeninhalt eines zweidimensionalen Gebietes mithilfe von Wegintegralen über den Satz von Green bestimmen. Dies geht wie folgt. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y) = (0, x)$$

welches jedem Punkt  $(x, y)$  den Vektor  $(0, x)$  zuordnet. Die Rotation von  $\vec{v}$  kann man sehr leicht bestimmen

$$\text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 1 - 0 = 1.$$

Wenden wir nun den Satz von Green auf einem beschränkten Gebiet  $C \subset \mathbb{R}^2$  mit  $C_{pw}^1$ -Rand  $\partial C$  an, so bekommen wir

$$\int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \text{rot}(\vec{v}) d\mu(x, y) = \int_C d\mu(x, y) = \mu(C).$$

Wir haben also gezeigt, dass das Wegintegral von  $\vec{v}$  entlang des Randes von  $C$  gleich dem Flächeninhalt von  $C$  ist. Das ist eine sehr nützliche Formel für die Berechnung von  $\mu(C)$ . Das Resultat fassen wir im folgenden Kochrezept zusammen

### BERECHNUNG VON $\mu(C)$ MIT DEM SATZ VON GREEN

Gegeben:  $C \subset \mathbb{R}^2$  beschränkt mit  $C_{pw}^1$ -Rand  $\partial C$ .

Gesucht:  $\mu(C)$ .

**Schritt 1** Parametrisiere den Rand von  $C$  mit der Kurve

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow \gamma(t).$$

Beachte dabei, dass die Parametrisierung in mathematisch positiver Richtung verläuft (d.h. so dass die Menge  $C$  immer links steht).

**Schritt 2** Berechne  $\dot{\gamma}$  (jede Komponente nach dem Parameter  $t$  ableiten).

**Schritt 3** Wende die Formel

$$\mu(C) = \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

an, mit  $\vec{v} = (0, x)$ .

Bemerkung: Anstatt  $\vec{v} = (0, x)$  kann man natürlich auch  $\vec{v} = (-y, 0)$  oder  $\vec{v} = 1/2(-y, x)$  benutzen. Für beide gilt nämlich auch  $\operatorname{rot}(\vec{v}) = 1$ , wie man leicht nachrechnen kann.

**Beispiel 20.2.6** • • • Berechne den Flächeninhalt der Einheitsdisks  $E$  in  $\mathbb{R}^2$  mithilfe des Satzes von Green.

**Schritt 1:** Wir parametrisieren den Rand von  $E$  mit der Kurve

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (\cos t, \sin t).$$

**Schritt 2:** Wir rechnen  $\dot{\gamma}$  aus

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t).$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel von Green mit dem Vektorfeld  $\vec{v} = (0, x)$

$$\mu(\text{Kreis}) = \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi.$$

■

**Beispiel 20.2.7 ••○** Berechne den Flächeninhalt der durch  $x = a \cos \theta$ ,  $y = b \sin \theta$  berandeten Ellipse  $E$  mithilfe des Satzes von Green.

■

**Schritt 1:** Wir parametrisieren den Rand von  $E$  mit der Kurve

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \theta \mapsto (a \cos \theta, b \sin \theta).$$

**Schritt 2:** Wir rechnen  $\dot{\gamma}$  aus

$$\dot{\gamma}(\theta) = (-a \sin \theta, b \cos \theta).$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel von Green mit dem Vektorfeld  $\vec{v} = \frac{1}{2}(-y, x)$  (wir könnten natürlich auch  $\vec{v} = (0, x)$  benutzen)

$$\begin{aligned}\mu(\text{Ellipse}) &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -b \sin \theta \\ a \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin \theta \\ b \cos \theta \end{pmatrix} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = \pi ab.\end{aligned}$$

■

**Beispiel 20.2.8 ••○** Berechne den Flächeninhalt des Gebiets

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 \leq 1\}.$$

(Hinweis: parametrisiere den Rand von  $\Omega$  und benutze den Satz von Green).

■

**Schritt 1:** Wir parametrisieren den Rand von  $\Omega$ . Der Rand von  $\Omega$  ist folgende Menge

$$\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 = 1, y \geq 0\}.$$

Wie kann man  $\partial\Omega$  parametrisieren? Die Idee ist, dass man die Gleichung

$$x^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 = 1$$

als die Gleichung eines Kreises

$$a^2 + b^2 = 1$$

sehen kann, mit  $a = x$  und  $b = \sqrt{y} - 1$ . Einen Kreis kann man mit  $a = \cos t$  und  $b = \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , parametrisieren. Also  $x = \cos t$  und  $\sqrt{y} - 1 = \sin t \Rightarrow y = (\sin t + 1)^2$ . Die gesuchte Parametrisierung lautet somit

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, (\sin t + 1)^2).$$

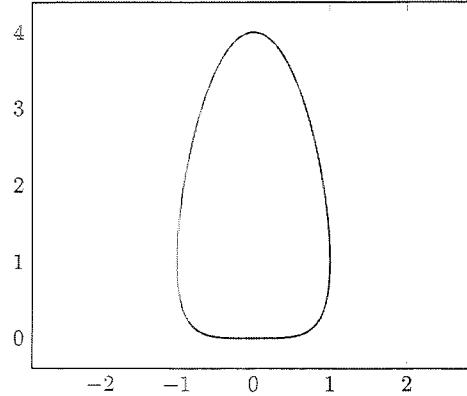
**Schritt 2:** Wir rechnen  $\dot{\gamma}$  aus

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, 2(1 + \sin t) \cos t).$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel von Green mit dem Vektorfeld  $\vec{v} = (0, x)$

$$\begin{aligned}\mu(\Omega) &= \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2(1+\sin t)\cos t \end{pmatrix} dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt + 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t dt = 2\pi + 0 = 2\pi.\end{aligned}$$

Die Menge  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, x^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 \leq 1\}$



■

**Beispiel 20.2.9 ••• Berechne den Flächeninhalt von**

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | |x|^{2/3} + |y|^{2/3} \leq 1\}.$$

**Schritt 1:** Wir parametrisieren den Rand von  $\Omega$ . Um das zu machen, bemerken wir, dass

$$(x^{1/3})^2 + (y^{1/3})^2 = 1$$

nichts Anderes als die Gleichung eines Kreises ist

$$a^2 + b^2 = 1$$

wenn wir  $a = x^{1/3}$  und  $b = y^{1/3}$  setzen. Einen Kreis kann man mit  $a = \cos t$  und  $b = \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , parametrisieren. Also setzen wir  $x = \cos^3 t$  und  $y = \sin^3 t$ . Die gesuchte Parametrisierung ist somit

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

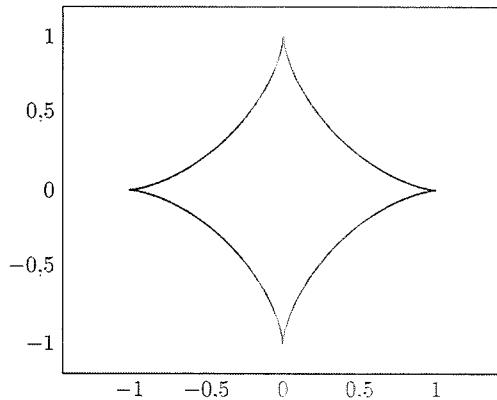
**Schritt 2:** Wir rechnen  $\dot{\gamma}$  aus

$$\dot{\gamma}(t) = (-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t).$$

**Schritt 3:** Wir benutzen die Formel von Green mit dem Vektorfeld  $\vec{v} = (0, x)$

$$\begin{aligned}\mu(\Omega) &= \int_{\gamma} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{v} \cdot \begin{pmatrix} -3 \cos^2 t \sin t \\ 3 \sin^2 t \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^3 t dt = 3 \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt - 3 \int_0^{2\pi} \cos^6 t dt = 3 \frac{3\pi}{4} - 3 \frac{5\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

Die Menge  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^{2/3} + |y|^{2/3} \leq 1\}$



■

**Beispiel 20.2.10** ••• Berechne den Flächeninhalt der von der Kurve

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x\}$$

berandeten Menge  $\Omega$ .

**Schritt 1** Wir suchen eine Parametrisierung des Randes  $\partial\Omega$ . Die Gleichung  $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$  lässt sich offensichtlich mit Polarkoordinaten vereinfachen. So schreiben wir  $x = r(t) \cos t$  und  $y = r(t) \sin t$  (wobei der Radius variabel ist). Wir setzen in die Gleichung  $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$  ein und bekommen

$$r^2 = r + r \cos t \quad \Rightarrow \quad r(r - 1 - \cos t) = 0.$$

Es folgt entweder  $r = 0$  oder  $r = 1 + \cos t$ . Die erste Lösung ist nicht sinnvoll, da  $\Omega$  nicht einfach aus dem Punkt  $(0, 0)$  besteht. Somit erhalten wir die gewünschte Parametrisierung

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto ((1 + \cos t) \cos t, (1 + \cos t) \sin t).$$

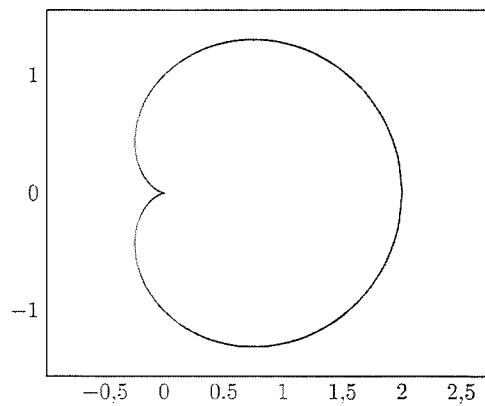
**Schritt 2** Wir bestimmen  $\dot{\gamma}$

$$\dot{\gamma} = (-\sin t - 2 \sin t \cos t, \cos t + \cos^2 t - \sin^2 t).$$

**Schritt 3** Wir benutzen die Formel von Green mit dem Vektorfeld  $\vec{v} = (-y, 0)$

$$\begin{aligned} \mu(\Omega) &= \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t - 2 \sin t \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t - 2 \sin t \cos t \\ \cos t + \cos^2 t - \sin^2 t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + 3 \sin^2 t \cos t + 2 \sin^2 t \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} (3 \sin^2 t + 3 \sin^2 t \cos t - 2 \sin^4 t) dt \\ &= 3\pi + [\sin^3 t]_0^{2\pi} - 2 \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

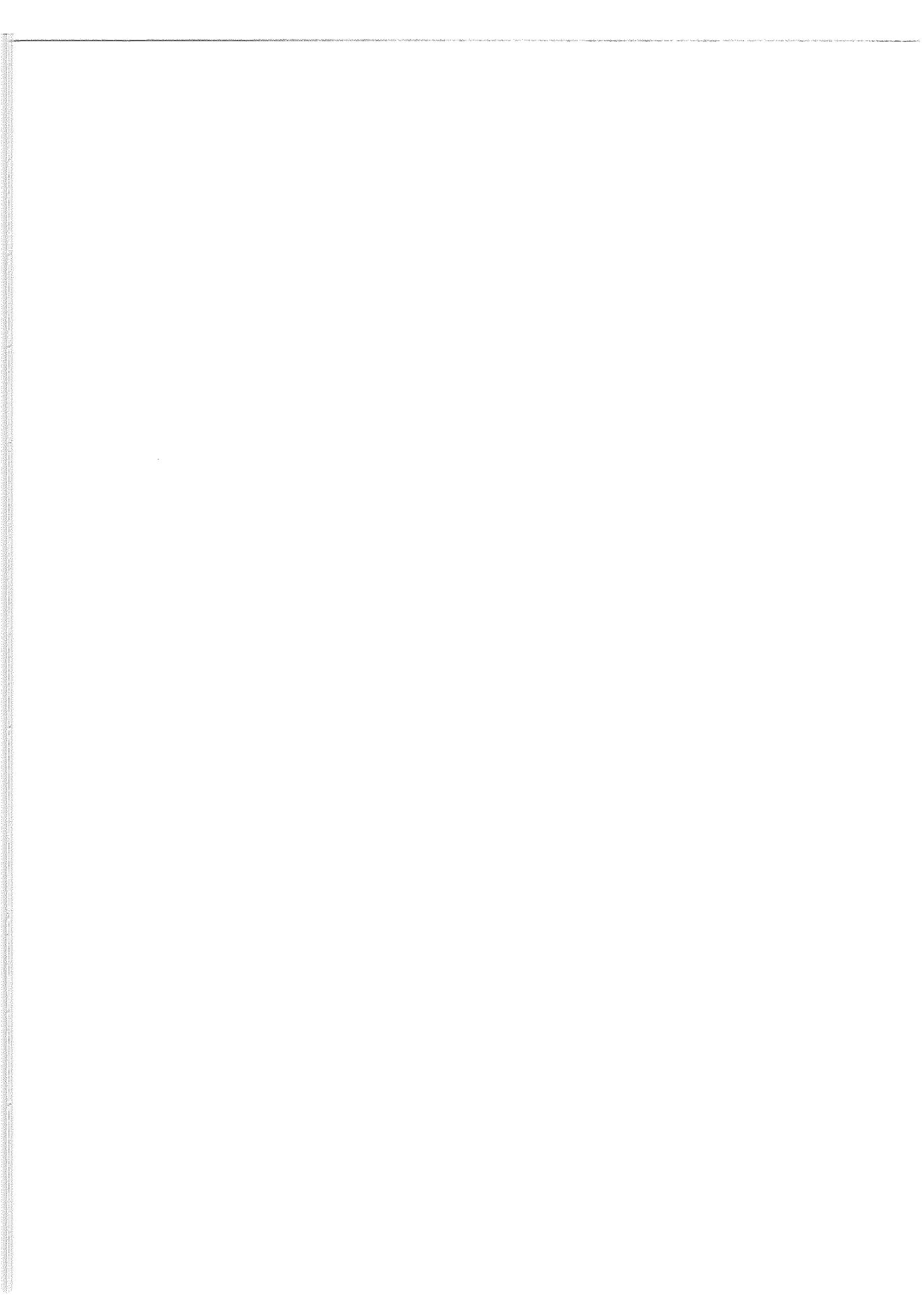
Die Kurve  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x\}$



■

# Literatur

- [1] Königsberger, *Analysis 1, 2*. Springer, Berlin Heidelberg, 2004
- [2] Jänich, *Vektoranalysis*. Springer, Berlin Heidelberg, 1992
- [3] Jänich, *Topologie*, Springer, Berlin Heidelberg, 2008
- [4] Riley, Hobson, Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012
- [5] Furlan, *Das gelbe Rechenbuch*, Verlag Martina Furlan, Dortmund, 2009
- [6] Spiegel, *Analisi di Fourier*, McGraw-Hill, 1994
- [7] Lipschutz, *General Topology*, McGraw-Hill, 1965
- [8] Stammbach, *Analysis I/II*, ETH Zürich
- [9] Struwe, *Analysis I/II*, Vorlesungsnotizen, ETH Zürich, 2006



# Index

Auflösung	127	homotop	84
Bild	11	Homotopie	84
Definitionsbereich	11	Hurwitz-Kriterium	101
Diffeomorphismus	54,59	Integrabilitätsbedingungen	300
Differenzial	24	Jacobi-Matrix	24
Differentialoperator	257	Kettenregel	49
Differenzierbarkeit	31	Kodimension	139
Divergenz	263	konservativ	298,301
Eigenwert-Kriterium	99	kritischer Punkt	89,93
einfach zusammenhängend	86	krummlinige Koordinaten	273
Einheitsvektor	273	Kugelkoordinaten	218
Elementarinhalt	177,183	Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^n$	61
elliptische Koordinaten	218	Kurve	73
Extrema in $\mathbb{R}^n$	98	Lagrange-Funktion	110
Extrema mit Nebenbedingung	109	Lagrange-Multiplikator	110
Flächenelement	243	Länge einer Kurve	80
Flächeninhalt	243	Laplace-Gleichung	342
Fluss	315,345	Laplace-Operator	267
Funktionaldeterminante	208,215	Lie-Algebra	153
Funktionalmatrix	208,215	Lie-Gruppe	147
Funktion von zwei Variablen	11	lokale Umkehrbarkeit	54
Funktion von mehreren Variablen	15	Masse	231
geschlossene Fläche	356	Maximum (global)	111
geschlossene Kurve	73	Maximum (lokal)	98
Geschwindigkeitsvektor	79	Minimum (global)	111
Gradient	16,258	Minimum (lokal)	98
Graph	11	Nabla	16
harmonische Funktion	267	Nebenbedingung	109
Hesse-Matrix	17	negativ definite Matrix	99
homogene Funktion	51	Niveaulinie	12

Niveaufläche	15	Satz vom regulären Wert	140
Normalbereich	189,196	Satz von Fubini in $\mathbb{R}^2$	178
Normale	242	Satz von Fubini in $\mathbb{R}^n$	184
Normalraum	154	Satz von Gauss	321
Oberflächenintegral	247	Satz von Gauss in der Ebene	346
Oberflächenmass	243	Satz von Green in der Ebene	368
orientierbar	314	Satz von Schwarz	20
orientierter Rand	346	Satz von Stokes	355
orientiertes Flächenelement	315	Schwerpunkt	231
Orientierung	314	Simplex	200
orientierungserhaltend	74	Skalarfeld	255
orientierungsumkehrend	74	Skalierungsprinzip	200
orthogonale Koordinaten	274	Stetigkeit	27
Parameterbereich (-gebiet)	73,241	Substitutionsregel in $\mathbb{R}^2$	208
Parameterintegral	158	Substitutionsregel in $\mathbb{R}^n$	215
Parameterwechsel	74,241	Summenkurve	74
Parametrisierung	73,241	Tangentialraum	150
Partielle Ableitung	15	Tangentialvektor	79,150
Partielle Differenzierbarkeit	16 , 31	Taylorentwicklung	67
Polarkoordinaten	218	Trägheitsmoment	232
positiv definite Matrix	99	$u$ -Linie	242
Potenzial	298,300	Umkehrsatz	54
Potenzialfeld	300	Untermannigfaltigkeit	139
Quader	177,183	Vektorfeld	256
Quellenstärke	263	Vektorwertige Funktion	24
quellenfrei	263	Wegintegral	289
Rang	92	Wertebereich	11
reguläre Kurve	77	Wirbelstärke	264
reguläre Niveaumenge	140	wirbelfrei	264
regulärer Punkt	89,93	zweidimensionale Grenzwerte	27
Richtungsableitung	260	Zylinderkoordinaten	218
Rotation	264	$C^0(\Omega), C^1(\Omega), C^k(\Omega), C^\infty(\Omega)$	20, 33
Satz über implizite Funktionen	127	$C^k(\overline{\Omega})$	33
Satz über Parameterintegrale	158,163,166	$C_{pu}^1(\Omega)$	290

# Bezeichnungen

$\mathbb{I}$	Identitätsmatrix
$ z $	Betrag der Zahl $z$
$ x $	Euklidische Norm von $x \in \mathbb{R}^n$ , $ x  = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
$ I $	Länge des Intervalls $I$
$\sim$	Äquivalenzrelation
$\simeq$	homotop
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient
$n!$	Fakultät
$n!!$	Doppelfakultät ( $n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \dots$ )
$\cdot$	Skalarprodukt oder Matrix-Matrix Multiplikation
$\times$	Kreuzprodukt
$\det$	Determinante
Spur	Spur
$M_{n \times n}(\mathbb{R})$	Vektorraum der reellen $n \times n$ Matrizen
$S_{n \times n}(\mathbb{R})$	Vektorraum der symmetrischen, reellen $n \times n$ Matrizen
$O(n)$	Orthogonale Matrizen $O(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{I}\}$
$SO(n)$	spezielle orthogonale Matrizen $SO(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{I}, \det(A) = 1\}$
$SL(n, \mathbb{R})$	Spezielle lineare Gruppe $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$
$C^0$	Vektorraum der stetigen Abbildungen
$C^1$	Vektorraum der stetig differenzierbaren Abbildungen
$C^k$	Vektorraum der $k$ -mal stetig differenzierbaren Abbildungen
$C^\infty$	Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Abbildungen
$C_{pw}^1$	Vektorraum der stückweise stetig-differenzierbaren Abbildungen
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	partielle Ableitung von $f$ nach $x_i$
$df$	Differenzial (Jacobi-Matrix) von $f$
$\text{Hess}(f)$	Hess-Matrix von $f$
$\nabla$	Nabla-Operator
$\Delta$	Laplace-Operator
$\text{grad}$	Gradient
$\text{div}$	Divergenz
$\text{rot}$	Rotation

$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$	Wegintegral von $\vec{v}$ entlang der Kurve $\gamma$
$\oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$	Wegintegral von $\vec{v}$ entlang der geschlossenen Kurve $\gamma$
$\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} do$	Flussintegral von $\vec{v}$ durch $S$
$\int_V f d\mu$	Volumenintegral von $f$ über $V$
$T_p M$	Tangentialraum an $M$ in $p$
$N_p M$	Normalraum an $M$ in $p$
$\perp$	orthogonales Komplement
Span	Span
$\mu$	Mass



Wie wendet man den Satz über implizite Funktionen konkret an? Wie zeigt man, dass  $SO(n)$  eine Untermannigfaltigkeit der reellen Matrizen ist? Wie berechnet man das Volumen des Einheitsballes in  $n$  Dimensionen? Wie hängen die drei Integralsätze von Gauss, Green und Stokes zusammen und wie wendet man sie an?

Die Antworten dazu werden in diesem Buch nicht mit der klassischen Struktur von Definition, Satz und Beweis gegeben, sondern anhand von mehr als 400 Beispielen. Alle Beispiele werden Schritt für Schritt durchgerechnet und es gibt kein "trivial" oder "man sieht einfach".

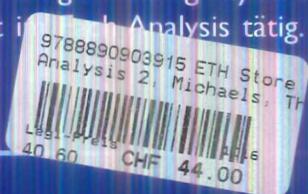
Dieses Buch eignet sich perfekt, um zu verstehen, was konkret hinter den abstrakten Definitionen und Sätzen der Analysis II steckt und ist damit das ideale Begleitbuch für jeden Studenten. Das Buch behandelt grundsätzlich den Teil der Analysis II, den ein Student der Mathematik oder Physik im ersten Jahr beherrschen sollte. Mit diesem Buch wird der Student langsam (Beispiel für Beispiel) von den grundlegenden Konzepten ausgehend bis zu einer Stufe gebracht, wo er auch mit komplizierten Aufgaben der mehrdimensionalen Differential- und Integralrechnung zurecht kommt.

Durch diese Vielfalt an Beispielen eignet sich das Buch sowohl für den Studienanfänger als auch für den fortgeschrittenen Studenten.

"Genial! Endlich ein Buch, das den Stoff von Analysis II so erklärt, dass man ihn richtig versteht!" (Beatrix Mühlmann, Physik 2. Semester)

"Ein genialer Assistent. Ohne die Übungsstunden von Thomas hätte ich die Analysis Basisprüfung nicht bestanden. Danke Thomas!" (Joel Bloch, Physik Master)

Thomas Michaels ist in Lugano geboren. Er hat an der ETH Zürich gleichzeitig Physik und Mathematik studiert. Vier Jahre lang war er als Hilfsassistent in der Analysis tätig. Er doktoriert jetzt in Chemie an der University of Cambridge.



ISBN 978-88-909039-1-5

9 788890 903915