ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf16`

2. Zwischenklausur

Zürich, 13. Dezember 2016

Aufgabe 1

Wir betrachten die Sprache

$$L_{\text{nohalt}} = \{\text{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM, die auf keiner Eingabe hält}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(L_{\text{nohalt}})^{\complement} \in \mathcal{L}_{\text{RE}}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $L_{\text{nohalt}} \notin \mathcal{L}_{\text{R}}$ gilt.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

Wir betrachten die Sprache

$$L_{\cap} = \{\text{Kod}(M)\#\text{Kod}(M') \mid \ M \text{ und } M' \text{ sind TM und } L(M) \cap L(M') \neq \emptyset\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $L_{\cap} \in \mathcal{L}_{\text{RE}}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $L_{\text{diag}} \leq_{\text{R}} L_{\cap}$ gilt, indem Sie eine konkrete Reduktion angeben und ihre Korrektheit beweisen.

5+5 Punkte

Aufgabe 3

Wir bezeichnen mit 4SAT das Problem, zu bestimmen, ob eine gegebene Formel in 4KNF erfüllbar ist. Wir wollen zeigen, dass 4SAT $\leq_p$ 3SAT gilt.

(a) Geben Sie eine Konstruktion an, die eine beliebige Formel Φ in 4KNF in polynomieller Zeit in eine 3KNF-Formel Ψ umwandelt, so dass Φ genau dann erfüllbar ist, wenn Ψ erfüllbar ist.

(b) Wenden Sie Ihre Konstruktion aus Aufgabenteil (a) auf die folgende Formel an:

$$\Phi_1 = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_6}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_5) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (\overline{x_6}).$$

(c) Beweisen Sie, dass die von Ihnen in Aufgabenteil (a) konstruierte 3KNF-Formel Ψ genau dann erfüllbar ist, wenn die gegebene 4KNF-Formel Φ erfüllbar ist.

4+2+4 Punkte

(bitte wenden)

Aufgabe 4

Sei M eine TM mit Arbeitsalphabet $\Gamma = \{X_1, \ldots, X_m\}$ und Zustandsmenge $Q = \{q_0, \ldots, q_s\}$ für geeignete $m, s \in \mathbb{N}$. Wir können eine Konfiguration von M schreiben als uqv für $u \in \Gamma^*$, $v \in \Gamma^+$ und $q \in Q$, mit der Bedeutung, dass M im Zustand q ist, $uv\sqcup\sqcup\ldots$ der Bandinhalt ist und der Kopf von M auf dem ersten Symbol von v steht.

Wir betrachten nun ein $(2 \times n)$-Array A, in dessen zwei Zeilen wir zwei Konfigurationen von M darstellen und diese durch eine SAT-Formel beschreiben wollen.

(a) Definieren Sie eine Menge von Variablen, mit deren Hilfe Sie für jedes Feld des $(2 \times n)$-Arrays beschreiben können, welche Teilmenge von Symbolen aus $\Gamma \cup Q$ auf dem Feld stehen darf.

(b) Geben Sie eine Formel Φ_1 über den in Aufgabenteil (a) definierten Variablen an, die genau dann erfüllbar ist, wenn auf jedem Feld von A genau ein Symbol aus $\Gamma \cup Q$ steht.

(c) Geben Sie eine Formel Φ_2 über den in Aufgabenteil (a) definierten Variablen an, die genau dann erfüllbar ist, wenn jede der zwei Zeilen von A eine syntaktisch korrekte Konfiguration von M darstellt.

(d) Geben Sie eine Formel Φ_3 über den in Aufgabenteil (a) definierten Variablen an, die genau dann erfüllbar ist, wenn

(i) die erste Zeile von A eine Konfiguration C_1 beschreibt, in der sich M im Zustand q_1 befindet, mit dem Kopf auf dem zweiten Feld des Bandes, auf dem sich das Symbol X_3 befindet, und

(ii) die zweite Zeile eine Nachfolgekonfiguration von C_1 nach Ausführung der Transition $\delta(q_1, X_3) = (q_2, X_2, \mathrm{R})$ beschreibt.

2+2+2+4 Punkte

Bonus-Aufgabe 5

(a) Wir betrachten die Sprache

$$L_{001} = \{\mathrm{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM und } L(M) = \{001\}\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $L_{\mathrm{H},\lambda} \leq_{\mathrm{EE}} L_{001}$ gilt, indem Sie eine konkrete EE-Reduktion angeben und ihre Korrektheit beweisen.

(b) Wir betrachten die Sprache

$$L_{\mathrm{all}} = \{\mathrm{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM mit Eingabealphabet } \Sigma \text{ und } L(M) = \Sigma^*\}\,.$$

Aus dem Satz von Rice folgt unmittelbar, dass L_{all} und $(L_{\mathrm{all}})^\complement$ nicht rekursiv sind. Zeigen Sie, dass sogar $(L_{\mathrm{all}})^\complement \notin \mathcal{L}_{\mathrm{RE}}$.

5+5 Bonus-Punkte