

Prof. M. Gross (Computer Graphics Lab)

R. Ziegler, C. Vögeli, D. Cötting

Prof. J. M. Buhmann (Machine Learning Group)

C. Sigg, J. Keuchel

Klausur – Sommer 2006

27.09.2006

Nachname: _____

Vorname: _____

ETH Legi-Nummer: _____

Unterschrift: _____

Allgemeine Bemerkungen

- Bitte tragen Sie zunächst oben Ihren Namen und Ihre ETH Legi-Nummer ein und unterschreiben Sie die Klausur. Halten Sie Ihre Legi zur Kontrolle bereit.
- Die Klausur dauert 3 Stunden. Die bei jeder Frage angegebene Punktezahl entspricht ungefähr dem Zeitaufwand, der zum Lösen notwendig sein sollte. Maximal können 30 Punkte pro Aufgabe erreicht werden.
- Beginnen Sie für jede Aufgabe jeweils eine neue Seite. Schreiben Sie Ihre ETH Legi-Nummer oben auf jede Seite.
- Sie können die Aufgaben in Deutsch oder Englisch beantworten. Schreiben Sie bitte so deutlich wie möglich, und verwenden Sie keinen Bleistift! Pro Aufgabe ist höchstens eine Antwort zulässig. Bitte streichen Sie deshalb ungültige Lösungen klar durch.

Aufgabe	Punkte (maximal)	Punkte (erreicht)	Visum
1	30		
2	30		
3	30		
4	30		
5	30		
6	30		
Total	180		

Note:

Aufgabe 1: Transformation & Beleuchtung (30 Punkte)

Bitte beschränken Sie sich bei den folgenden Fragen auf kurze, stichwortartige Antworten.

a) Koordinatensysteme und Quaternionen

- i) Gegeben sei eine Geometrie, die in einer OpenGL 3D Szene platziert und aus der Sicht der Kamera aufgenommen wird. Zwischen welchen drei Koordinatensystemen wird umgerechnet, bevor die Punkte für die Darstellung auf dem Bildschirm projiziert werden? Spezifizieren Sie zudem für jedes der Koordinatensysteme, ob es links- oder rechtshändig definiert ist. 1.5 P.
- ii) Nehmen Sie an, die Geometrie sei aufwendig und soll in OpenGL in 100 verschiedenen Orientierungen im 3D Raum gezeichnet werden. Welches OpenGL Konstrukt setzen Sie ein, um die Übertragung und das Zeichnen der Geometrie zu beschleunigen? 0.5 P.
- iii) Beim Zeichnen der 100 verschiedenen Orientierungen soll das Objekt schrittweise jeweils um $2\pi/100$ um die y -Achse des Weltkoordinatensystems rotiert werden. Stellen Sie die dazu benötigte 3×3 Rotationsmatrix auf. 1.5 P.
- iv) Wie würden Sie vorgehen, um eine Rotation um eine beliebige Achse (ohne Quaternionen) zu erreichen, wenn Ihnen die entsprechende Transformationsmatrix nicht direkt zur Verfügung steht? Tipp: Benutzen Sie u.a. die Rotationsmatrix um eine der drei Koordinatenachsen. 2 P.
- v) Was versteht man unter einem reinen Quaternion? Worin unterscheiden sie sich in ihrer mathematischen Definition von allgemeinen Quaternionen? 1 P.
- vi) Sie möchten einen Punkt $P = (x, y, z)^T$ um eine normalisierte Achse $N = (N_1, N_2, N_3)^T$ um den Winkel φ rotieren und anschliessend um den Vektor $T = (T_1, T_2, T_3)^T$ verschieben. Sie möchten hierzu reine Quaternionen einsetzen. Wie gehen Sie vor, um das resultierende Quaternion p' zu erhalten? Definieren Sie alle involvierten Variablen. 2 P.
- vii) Sie möchten nun nacheinander zwei Animationsschritte durchführen, welche beide aus einer Rotation q_i und einer Translation t_i bestehen. Geben Sie die verknüpfte Transformation $(t_1, q_1) \circ (t_2, q_2)$ an. 1 P.

b) Homogene Koordinaten in Farbräumen

- i) Gegeben seien Farbvektoren der Form $(X, Y, Z)^T$ im CIE Farbsystem. In welchem Bereich des CIE-3D-Farbraums liegen alle sichtbaren Farben konstruktionsbedingt? Begründen Sie und denken Sie hierbei an die Motivation für die Herleitung des CIE Farbraums. 1 P.
- ii) Üblicherweise visualisiert man die Farbwerte durch ein 2D Chart, das durch Projektion der Vektoren auf die Ebene $x+y+z-1=0$ senkrecht zur Raumdiagonalen entsteht. Geben Sie die Formeln zum Berechnen der Komponenten der projizierten Farbe (x, y) an. 1 P.
- iii) Welche Information geht durch die Projektion verloren? 0.5 P.
- iv) Durch Erweitern der Vektoren auf $(X, Y, Z, 1)^T$ und $(x', y', w)^T$ lässt sich die Projektion als Matrixmultiplikation auf homogenen Koordinaten darstellen. Leiten Sie die entsprechende 3×4 Matrix her. x und y werden anschliessend aus x' und y' durch Division mit w gewonnen. 2 P.

- v) Seien zwei Farben $F_1 = (x'_1, y'_1, w_1)^T = (0.5, 0.5, 1.0)^T$ und $F_2 = (x'_2, y'_2, w_2)^T = (0.6, 1.0, 2.0)^T$ gegeben. Geben Sie eine mögliche Mischfarbe der beiden Farben an. 1 P.
- vi) Welche perzeptuelle Eigenschaft vermögen der CIE Farbraum und dessen 2D Projektion schlecht zu modellieren? 1 P.
- vii) Nennen Sie zwei Farbräume, die diese Schwäche etwas mildern. 1 P.
- viii) Lässt sich die Transformation in diese Räume auch als lineare Transformation in (homogenen) Koordinaten darstellen? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.

c) Projektionen und Kameramodelle

- i) Definieren Sie in je einem Satz (1) orthographische Projektion, (2) isometrische Projektion, (3) oblique/schiefe Projektion. 1.5 P.
- ii) Durch welchen OpenGL Matrix-Stack wird die Kameraposition festgelegt? 0.5 P.
- iii) Durch welchen Matrix-Stack werden in OpenGL der Öffnungswinkel und die Aspect-Ratio der Kamera festgelegt? 0.5 P.
- iv) Gegeben sei die Lichtquelle $L = (10, 20, 30)^T$. Sie möchten in OpenGL Schatten von Objekten auf die Ebene $x = 0$ generieren. Wie funktioniert das Verfahren, das Sie in den Übungen zur Vorlesung kennengelernt haben? Beschreiben Sie die notwendigen Schritte, inkl. der benötigten Matrizen. 3 P.

d) Beleuchtung

- i) Aus welchen drei Anteilen setzt sich die Beleuchtung in OpenGL hauptsächlich zusammen? Von welchen Größen sind diese abhängig, bzw. unabhängig? 3 P.
- ii) Geben Sie die drei in der Vorlesung vorgestellten Shading-Verfahren an und ordnen Sie sie nach zunehmender Qualität der generierten Bilder. Definieren Sie zudem, wie die Farben innerhalb der Dreiecke berechnet werden und erklären Sie, ob die Berechnungen im Image Space oder im Object Space erfolgen müssen. 1.5 P.
- iii) Wieso ergeben sich bei interpolierendem Shading Artefakte, wenn anstelle von Dreiecken Vierecke oder Polygone verwendet werden? 2 P.

Aufgabe 2: Clipping in 3D (30 Punkte)

a) Kurzaufgaben

- i) Zu welchem Zeitpunkt wird in der Graphics Pipeline das 3D-Clipping durchgeführt? 1 P.
- ii) Welche Eigenschaft müssen Clipping-Polygone haben, damit man den Sutherland-Hodgeman Algorithmus anwenden kann, und wie können Sie diese Eigenschaft testen? (Clipping-Polygone sind die Polygone, an denen geklippt wird.) 2 P.
- iii) Auf den meisten Graphikkarten ist die einzige optimierte Clipping-Prozedur nur auf Quader bzw. Parallelprojektionen anwendbar. Weshalb braucht man für perspektivische Projektionen keine spezielle Prozedur? 1 P.

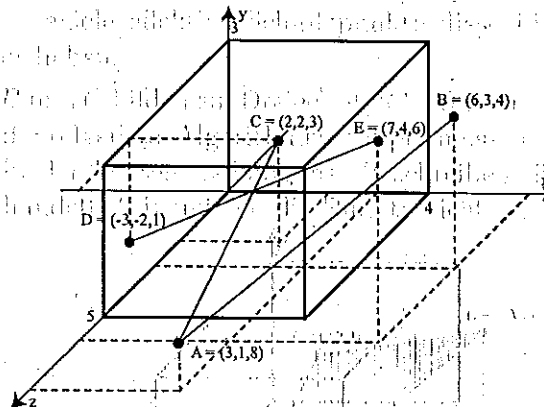
b) Linien-Clipping in 3D nach Liang-Barsky

Der Algorithmus von Liang-Barsky in 2D für das Clipping von Linien an Clipping-Kanten lässt sich leicht auf 3D erweitern, da die Grundlagen des Algorithmus' gleich bleiben. Die Clipping-Kanten werden dabei zu Clipping-Ebenen. In dieser Aufgabe betrachten wir das Clipping an einem (rechtwinkligen) Quader, wie es z.B. bei Parallelprojektionen auftritt.

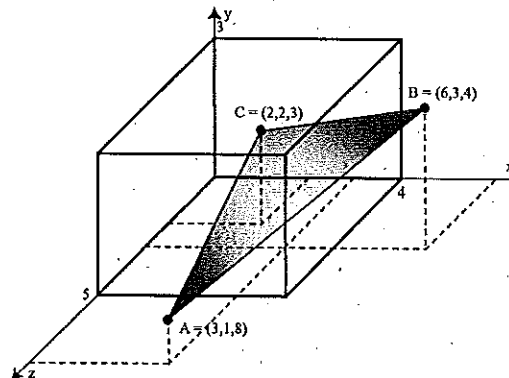
- i) Um das Liniensegment $\overline{P_0P_1}$ zu clippen, muss für jede Ebene des Clipping-Quaders der Schnittpunktparameter t berechnet werden. Zur Berechnung benötigt man den Normalenvektor N_i der entsprechenden Ebene sowie einen beliebigen Punkt P_{E_i} auf der Ebene. Mit dieser Information kann t gemäss der Formel oben rechts in der untenstehenden Tabelle berechnet werden. Vervollständigen Sie die Tabelle. Graue Zellen müssen Sie nicht füllen. 5 P.

Ebene i	N_i	P_{E_i}	$P_0 - P_{E_i}$	$t = \frac{N_i^T (P_0 - P_{E_i})}{-N_i^T (P_1 - P_0)}$
links $x = x_{min}$				
rechts $x = x_{max}$				
unten $y = y_{min}$				
oben $y = y_{max}$				
hinten $z = z_{min}$				
vorne $z = z_{max}$				

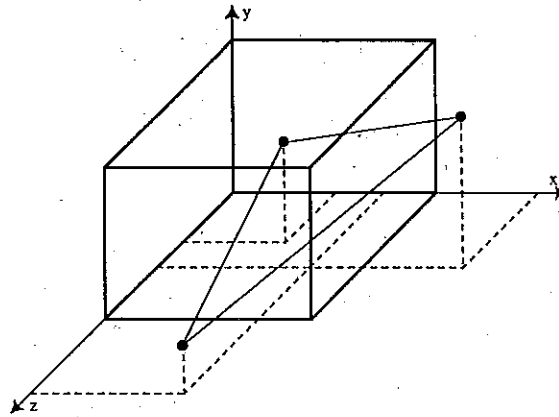
- ii) Obwohl man jeden Schnittpunktparameter t berechnen muss, muss man danach nicht jeden Schnittpunkt berechnen. Geben Sie die einzelnen Schritte an, in denen die Schnittpunktparameter weiterverarbeitet werden. Erklären Sie, wie man entscheidet, welche Schnittpunkte effektiv berechnet werden müssen. Gehen Sie dabei auch auf die Klassifizierung in *Entry-Points* und *Leaving-Points* ein. 5 P.
- iii) Wieviele Schnittpunkte müssen mindestens und wieviele Schnittpunkte höchstens berechnet werden? Geben Sie für beide Fälle an, wie die Liniensegmente liegen, und wie man diese Fälle an Hand der Schnittpunktparameter erkennt. 3 P.
- c) Liang-Barsky und Sutherland-Hodgeman an einem Beispiel



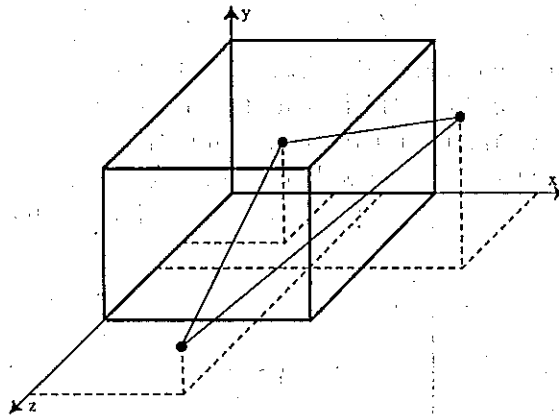
- i) Illustrieren Sie für das Liniensegment \overline{DE} die Funktionsweise des Liang-Barsky Algorithmus. Berechnen Sie die Schnittpunktparameter für alle Clipping-Ebenen numerisch (mit Brüchen) und bearbeiten Sie sie so, wie sie der Algorithmus bearbeiten würde. Teilen Sie die Schnittpunktparameter in *Entry-Points* und *Leaving-Points* ein und berechnen Sie schliesslich die effektiven Schnittpunkte, welche für das Clipping benötigt werden. 4 P.
- ii) Berechnen Sie für die Liniensegmente \overline{AB} und \overline{AC} nur die Schnittpunktparameter mit den Clipping-Ebenen, welche die Liniensegmente effektiv schneiden. Leiten Sie daraus ab, wieviele effektive Schnittpunkte diese Liniensegmente mit dem Clipping-Quader haben. 3 P.
- iii) Die Punkte A , B und C bilden ein Dreieck ABC . Wenn man dieses Dreieck gemäss dem Sutherland-Hodgeman Algorithmus clippt, muss man mehr Schnittpunkte berechnen als in der letzten Teilaufgabe. Beschreiben Sie, um welche Schnittpunkte es sich handelt. (Sie müssen die Punkte nicht ausrechnen.) 2 P.



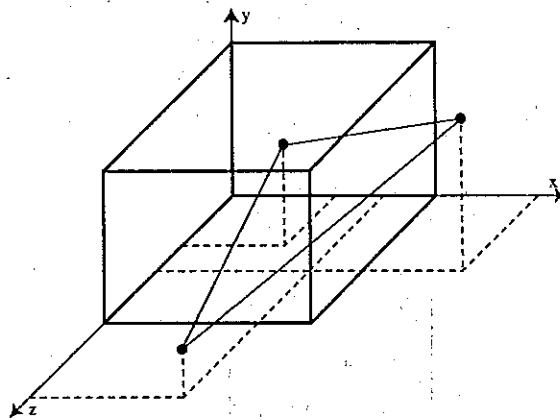
- iv) Stellen Sie auf den folgenden Skizzen dar, wie man nach dem Sutherland-Hodgeman Algorithmus das Dreieck ABC mit dem Clipping-Quader clippt. Stellen Sie die entscheidenden Zwischenschritte dar, und erklären Sie in Stichworten, was Sie machen. (Sie müssen die Schnittpunkte nicht ausrechnen. Die Punkte müssen aber geometrisch korrekt konstruiert sein, was aus Ihrer Zeichnung ersichtlich sein sollte.) 4 P.



mögl. Zwischenschritt



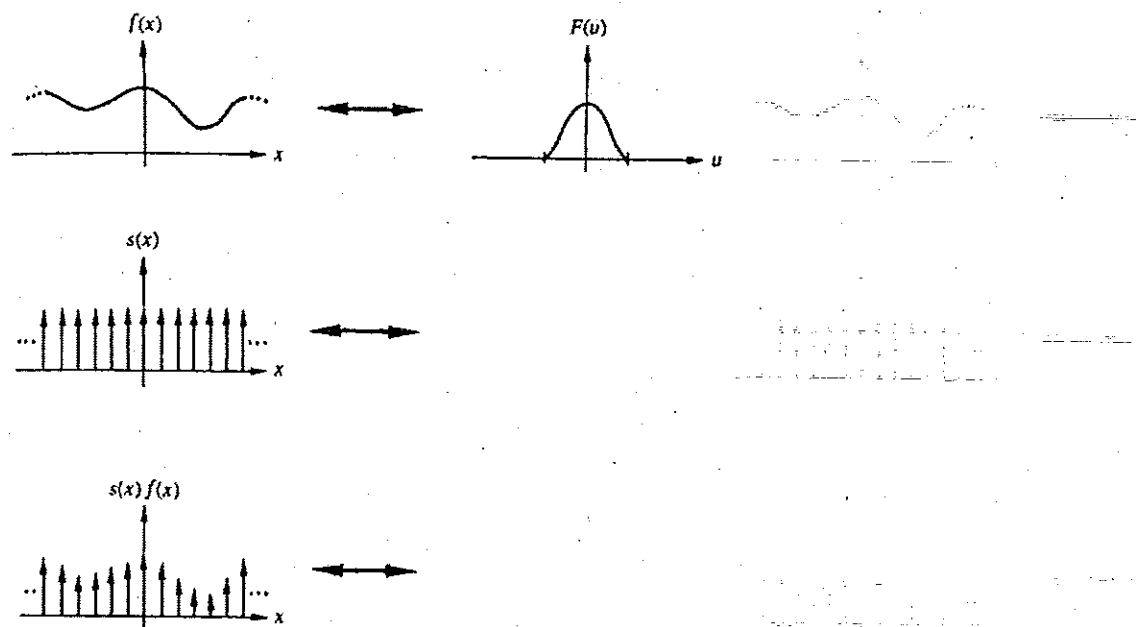
mögl. Zwischenschritt



Geclipptes Dreieck

Aufgabe 3: Texture-Mapping und Anti-Aliasing (30 Punkte)

- Erklären Sie in 2-3 Sätzen, was im Rasterisierungsschritt mit einem texturierten Dreieck passiert. Welche Informationen müssen im Vergleich mit einem einfarbigen Dreieck zusätzlich vorhanden sein, damit die Texturierung möglich ist? **2 P.**
- Wieso werden die Texturkoordinaten jeweils zwischen 0 und 1 angegeben? **1 P.**
- Beschreiben Sie in 1-2 Sätzen das Problem, aufgrund dessen MipMapping eingeführt wurde. **2 P.**
- Beschreiben Sie ein Vorgehen ohne MipMap-Pyramide, welches trotzdem die gleiche oder eine bessere Bildqualität erzeugen würde. **3 P.**
- Um die Reflexionseigenschaften einer Oberfläche zu modellieren, gibt es viele Ansätze in der Computer Graphik. Einer davon ist die Verwendung einer BRDF (Bidirectional Reflection Distribution Function). Beschreiben Sie Ihr Vorgehen, falls Sie die BRDF mittels einer Kamera und einer Lichtquelle messen müssten. Was würde im signaltheoretischen Sinne Ihrem Vorgehen entsprechen? Sie können annehmen, dass jeder Oberflächenpunkt von jedem Punkt im Halb-Raum sichtbar ist. **4 P.**
- Wie hängt die Anzahl benötigter Messungen mit der Reflexionseigenschaft der Oberfläche zusammen? Beziehen Sie sich in Ihrer Antwort auf eine diffuse bzw. spekulare Oberfläche. **3 P.**
- Was muss bei Ihrer Messung mathematisch garantiert sein, damit Sie die BRDF voll-mathematisch rekonstruieren können? **2 P.**
- Ergänzen Sie in der folgenden Abbildung die fehlenden Spektren. Kennzeichnen Sie die Samplingdistanz der Abtastfunktion im Orts- und im Frequenzbereich und tragen Sie die maximale Frequenz für $F(u)$ ein. **3 P.**



i) Würde in Ihrer Skizze Aliasing entstehen, oder wäre die Abtastrate gegeben durch $s(x)$ hoch genug? Auf welches Theorem stützen Sie Ihre Aussage? (Die korrekte Antwort ist davon abhängig, wie Sie Aufgabe h) gelöst haben.) **2 P.**

j) Gegeben seien zwei Funktionen $H(\omega) = \frac{1}{\omega} \sin(2\omega)$ und $F(\omega) = \cos(3\omega)$ im Frequenzbereich mit $\omega = 2\pi u$, mit den inversen Fouriertransformierten $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$ und $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$. Berechnen Sie die Faltung $g(t) = h(t) * f(t)$ und skizzieren Sie die Funktion $g(t)$.

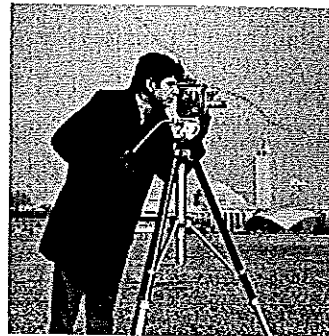
Tipps:

- Die Funktion $F(\omega) = \cos(3\omega)$ kann umgeschrieben werden zu $F(\omega) = \frac{1}{2}(e^{i3\omega} + e^{-i3\omega})$.
- Transformieren Sie die Funktionen zuerst in den Ortsbereich.

8 P.

Aufgabe 4: Image Filtering (30 Punkte)

- a) Die folgende Abbildung zeigt ein Originalbild eines Kameramannes, welches mit sechs unterschiedlichen Filtern bearbeitet wurde:



Original



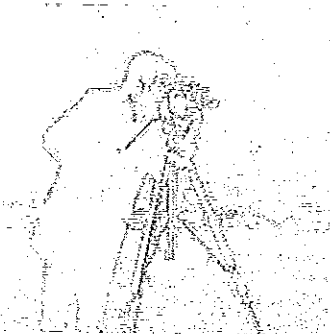
(a)



(b)



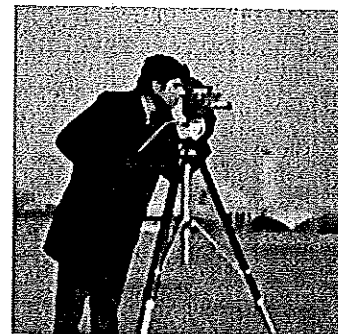
(c)



(d)



(e)



(f)

Ordnen Sie die Bilder den folgenden Filtern zu. Begründen Sie kurz Ihre Entscheidung.

1. Gauss-Filter mit Standardabweichung $\sigma = 5.0$
2. Laplace-Filter mit Standardabweichung $\sigma = 5.0$
3. Idealer Hochpass mit Threshold 30
4. Idealer Tiefpass mit Threshold 30
5. Motion-Filter der Länge $l = 20$
6. Nichtlineare Perona-Malik Diffusion mit $\lambda = 0.05$ und $t = 20$

6 P.

- b) Der Gaußkern $G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$ ist ein eindimensionaler Glättungsfilter. Welchen Glättungsfilter erhält man bei zweifacher Anwendung dieses Gaußfilters?

Tipp: Betrachten Sie die Fourier-Transformierte von G_σ ! 8 P.

- c) Ihre Aufgabe ist es, ein eindimensionales Signal $f(x)$ aus einer Messung $b(x)$ so zu rekonstruieren, dass der durchschnittliche quadratische Fehler minimiert wird. Angenommen, die Messung ist durch Glätten mit einem Gaußkern

$$h(x) = \exp(-\pi x^2)$$

und additivem Rauschen $\eta(x)$ aus dem Originalsignal hervorgegangen.

- i) Unter welchen Annahmen liefert Ihnen der Wiener Filter den optimalen Rekonstruktionsfilter? 2 P.
 - ii) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte des Wiener Filters in Abhängigkeit vom Signal-zu-Rausch-Verhältnis $\text{SNR}(u)$. 3 P.
 - iii) Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf für den Fall von keinem ($1/\text{SNR}(u) = 0$) bzw. konstantem ($1/\text{SNR}(u) = c$) Signal-zu-Rausch-Verhältnis. 3 P.
- d) Ein geeignetes Mass zur Kantendetektion in einem Bild f ist der Betrag des Gradienten

$$\|\nabla f\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

- i) Ist die Bild-Transformation $\mathcal{T}f(x, y) := \|\nabla f\|(x, y)$ linear? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.
- ii) Zeigen Sie, dass die Transformation \mathcal{T} isotrop, d.h. invariant gegenüber Rotationen ist. Nehmen Sie dazu an, dass eine Rotation durch die Funktion

$$h_\Theta(x, y) = \begin{pmatrix} x \cos \Theta - y \sin \Theta \\ x \sin \Theta + y \cos \Theta \end{pmatrix}$$

gegeben ist, und zeigen Sie, dass $[\mathcal{T}f(x, y)]^2 = [\mathcal{T}f(h_\Theta(x, y))]^2$ ist.

Tipp: Für $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind die partiellen Ableitungen der Komposition $g \circ h(x_1, \dots, x_n) := g(h(x_1, \dots, x_n))$ gegeben durch

$$\frac{\partial (g \circ h)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial h_j}{\partial x_i}.$$

Ausserdem gilt für beliebige Winkel $\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta = 1$. 5 P.

- iii) Bei der Implementierung wird der Gradient $\|\nabla f\|(x, y)$ üblicherweise approximiert durch Berechnung von Differenzen der Form $f(x_i, y_i) - f(x_{i+1}, y_i)$ zwischen horizontal bzw. vertikal benachbarten Pixeln. Welchen Einfluss hat diese Diskretisierung auf die Isotropie von \mathcal{T} ? 2 P.

Aufgabe 5: Entscheidungstheorie nach Bayes (30 Punkte)

In dieser Aufgabe nehmen wir an, dass Trainingsdaten nach folgendem Modell generiert wurden:

$$\begin{aligned} y^{(i)} &\sim P(y) \\ \mathbf{x}^{(i)} &\sim p(\mathbf{x}|y^{(i)}) \end{aligned}$$

D.h. wir bestimmen zuerst ein Klassenlabel $y^{(i)} \in \{1, \dots, k\}$ gemäss $P(y)$, wobei k die Anzahl Klassen ist (Ausreisser- und Zweifelsklasse betrachten wir nicht). Dann ziehen wir $\mathbf{x}^{(i)}$ gemäss der klassenspezifischen Dichte $p(\mathbf{x}|y^{(i)})$ und erhalten so ein Trainingsdatum $(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})$. Dieser Prozess wird für die gesamte Trainingsmenge wiederholt.

- a) Leiten Sie mittels der Bayes'schen Regel die *a posteriori* Verteilung $P(y|\mathbf{x})$ her, dass ein Datenpunkt \mathbf{x} aus der Klasse y stammt. Identifizieren Sie in Ihrer Antwort den *prior*-, *likelihood*- und *evidence*-Term.

Dem *prior* kommt in der Bayes'schen Theorie eine besondere Bedeutung zu. Beschreiben Sie den zentralen Unterschied der bayesianischen gegenüber der frequentistischen Interpretation der Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis eintritt.

- b) Häufig verwendet man für $p(\mathbf{x}|y)$ die (mehrdimensionale) Gaussverteilung $N(\mu_y, \Sigma_y)$:

$$p(\mathbf{x}|y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma_y|}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu_y)^\top \Sigma_y^{-1} (\mathbf{x} - \mu_y) \right),$$

mit den Parametern μ_y (ein Vektor) und Σ_y (eine Matrix). Dabei ist d die Dimensionalität der Gaussverteilung und $|\cdot|$ bezeichnet die Determinante.

Geben Sie je in einem Satz Interpretationen zu μ_y und Σ_y , wobei Sie bei Σ_y zwischen Einträgen auf und neben der Diagonale unterscheiden sollen. Zeigen Sie nun, dass o.g. Formel eine Erweiterung der eindimensionalen Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ ist, indem Sie den mehrdimensionalen auf den eindimensionalen Fall zurückführen.

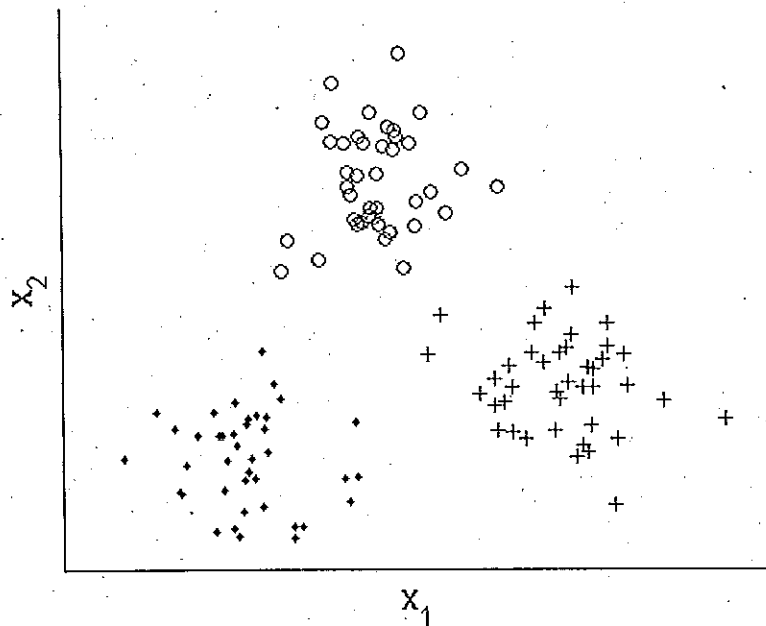
- c) Im folgenden betrachten wir den zweidimensionalen Fall ($d=2$): Die Datenpunkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ bestehen aus zwei Messungen, welche ein zu klassifizierendes Objekt repräsentieren. Wir nehmen an, es gelte $\mathbf{x} \sim N(\mu, \Sigma)$.

Was sind die Eigenschaften der Matrix Σ , wenn beide Messungen statistisch abhängig bzw. unabhängig sind? Geben Sie für beide Fälle die geometrische Form der Isolinien der Verteilung an, abhängig von (μ, Σ) .

Tipp: Auf Isolinien gilt $p(\mathbf{x}) = \text{const}$ (vgl. mit der Definition von Höhenlinien einer Landkarte).

4 P.

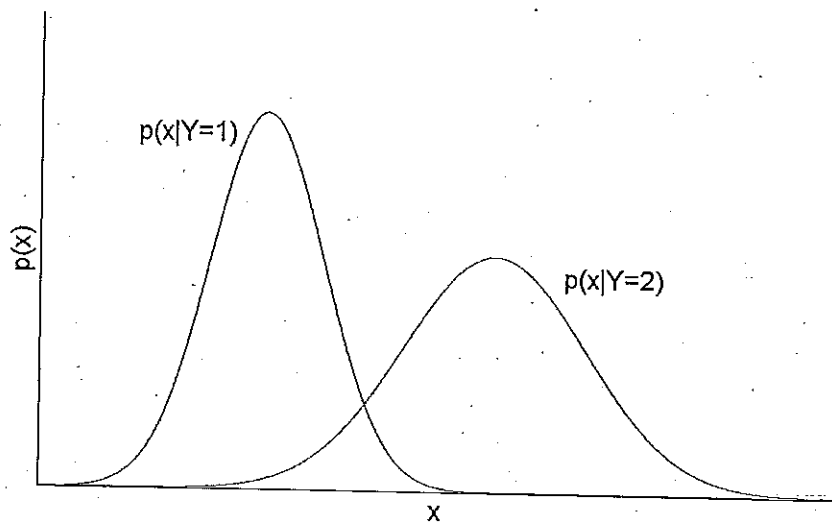
d) Betrachten Sie für diese Teilaufgabe folgende Trainingsdaten ($k = 3$):



Wir modellieren jede der klassenspezifischen Dichten $p(\mathbf{x}|y)$, $y = 1..3$ mit einer Gaussverteilung $N(\boldsymbol{\mu}_y, \boldsymbol{\Sigma}_y)$. Als ersten Schritt sollen Sie für eine Klasse y den Parameter $\hat{\boldsymbol{\mu}}_y$ mit der *maximum-likelihood* Methode schätzen. Beschreiben Sie in einem Satz die Eigenschaft, die der ML-Schätzer $\hat{\boldsymbol{\mu}}_y$ erfüllen muss. Geben Sie dann die Formel für $\hat{\boldsymbol{\mu}}_y$ an und zeichnen Sie (qualitativ) alle $\hat{\boldsymbol{\mu}}_y$, $y = 1..3$ in der Grafik ein. Welche Annahme müssen Sie treffen, um diese Formel anwenden zu können?

Nehmen wir nun in einem zweiten Schritt an, es sei $\boldsymbol{\Sigma}_y = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$, $y = 1..3$ (für *alle* Klassen identisch). Zeichnen Sie die Entscheidungsgrenzen des optimalen Bayes'schen Klassifikators für den 0 – 1 Verlust ein. Welche geometrische Konstruktion müssen Sie dazu anwenden? Begründen Sie Ihre Antwort in 1-2 Sätzen. 5 P.

- e) Wechseln wir in den eindimensionalen Fall, mit $k = 2$. In folgender Grafik sind zwei klassenspezifische Dichten $p(x|Y = 1)$ und $p(x|Y = 2)$ eingezeichnet:



Wie muss die Verteilung $P(y)$ gewählt werden, damit diese Kurven (bis auf eine vertikale Reskalierung) auch den jeweiligen posteriors $P(Y = 1|x)$ und $P(Y = 2|x)$ entsprechen? Zeichnen Sie wieder die Entscheidungsgrenze des Klassifikators für den 0-1-Verlust ein. Welche zwei Arten von Fehlern können bei der Klassifikation auftreten? Leiten Sie daraus ein geometrisches Argument für die Wahl der Entscheidungsgrenze ab. In welche Richtung verschiebt sich die Grenze für die folgende Wahl von $P(y)$: $P\{Y = 1\} = \frac{1}{3}$, $P\{Y = 2\} = \frac{2}{3}$? Geben Sie auch hier eine Begründung in einem Satz. 6 P.

- f) Betrachten Sie nun die folgende Verlust-Matrix:

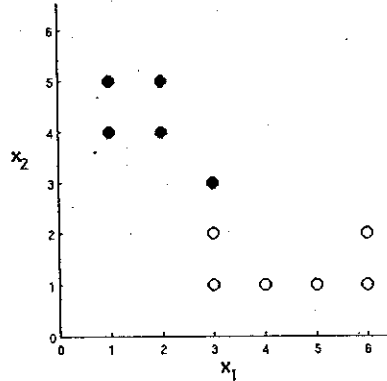
L_{ij}	$\hat{c}(x^{(i)}) = 1$	$\hat{c}(x^{(i)}) = 2$
$y^{(i)} = 1$	0	a
$y^{(i)} = 2$	b	0

Dabei bedeutet $L_{21} = b$, dass der Klassifikator \hat{c} dem Datenpunkt $x^{(i)}$ die Klasse $\hat{y} = 1$ zuweist, anstatt das korrekte Label $y^{(i)} = 2$. Dieser Fehler erzeugt die Kosten b . Im folgenden sei $b \gg a$. Was ist nun die Entscheidungsregel für den optimalen Klassifikator? In welche Richtung verschiebt sich die Entscheidungsgrenze in der Grafik zu Aufgabe e), im Vergleich zum 0-1-Verlust? Geben Sie ein plausibles Beispiel an für eine Entscheidungssituation, wo eine Verlust-Matrix der o.g. Form auftritt. 4 P.

- g) Was ist die Bedeutung der Zweifelsklasse? Beschreiben Sie in einem Satz, wann sich der Klassifikator für die Zweifelsklasse entscheidet. Illustrieren Sie die Regel anhand der Grafik in Aufgabe e). 3 P.

Aufgabe 6: Support Vector Machines (30 Punkte)

- a) Das folgende Diagramm zeigt einen zweidimensionalen Datensatz von Punkten $(x_1, x_2)^T$, die zwei Klassen zugeordnet sind: einer positiven Klasse +1 (volle Punkte) und einer negativen Klasse -1 (Kreise).



Angenommen, Sie trainieren eine lineare SVM auf diesem Datensatz. Zeichnen Sie in das oben dargestellte Diagramm drei Linien ein: die Entscheidungsgrenze und die beiden zugehörigen Seiten des maximalen Rands (*margin*). Kreisen Sie die Stützvektoren (*support vectors*) ein. 5 P.

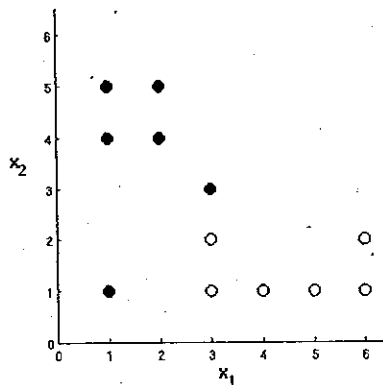
- b) Die Bedingung für eine lineare SVM lautet:

$$\mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0 \geq m \Rightarrow \text{Klasse } +1$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0 \leq -m \Rightarrow \text{Klasse } -1$$

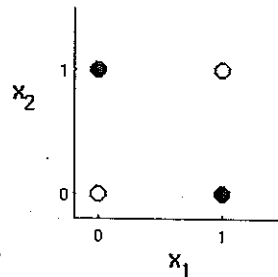
Geben Sie die im oben dargestellten Problem gelernten Werte für \mathbf{w} , w_0 und m an (für $\|\mathbf{w}\| = 1$). Wie werden die Testpunkte $\mathbf{y}_1 = (1, 2)^T$ und $\mathbf{y}_2 = (5, 2.2)^T$ klassifiziert? 5 P.

- c) Angenommen, es ist ein zusätzlicher Trainingspunkt $(1, 1)^T$ aus der positiven Klasse +1 gegeben:



Zeichnen Sie die Entscheidungsgrenze und den Rand ein, die man nun durch Trainieren einer linearen SVM auf diesen Daten erhält. Markieren Sie die Stützvektoren. Wie gross ist nun der Rand m ? Wie werden nun die Testpunkte \mathbf{y}_1 und \mathbf{y}_2 aus Aufgabe b) klassifiziert? 8 P.

- d) Angenommen, Sie trainieren eine lineare *Soft Margin SVM* auf dem Datensatz aus Aufgabe a). Wie verändert sich der qualitative Verlauf der Entscheidungsgrenze, wenn der Wert des (positiven) Kontrollparameters reduziert wird, der die Verletzungen der Rand-Bedingungen gewichtet? Begründen Sie Ihre Entscheidung. 4 P.
- e) Das folgende Diagramm zeigt einen Datensatz mit zwei Klassen im \mathbb{R}^2 , der offensichtlich nicht linear trennbar ist:



Zeigen Sie, dass sich die Daten in einem höherdimensionalen Raum linear trennen lassen, indem Sie eine einfache nichtlineare Transformation $\Phi(\mathbf{x})$ in den \mathbb{R}^3 sowie eine entsprechende Hyperebene $\mathbf{w}^T \Phi(\mathbf{x}) + w_0$ angeben (nicht notwendigerweise mit maximalem Rand). Mit Hilfe welcher (einfachen) Kernfunktion $K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \Phi^T(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{z})$ lassen sich Skalarprodukte für Ihre Transformation beschreiben? 5 P.

- f) Gegeben seien die folgenden Kernfunktionen:

$$K_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2}{100}\right)$$

$$K_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}^T \mathbf{z})^5$$

Welche der folgenden Funktionen definieren zulässige Kerne? Warum?

$$K_3(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = K_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + 10 \cdot K_1(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

$$K_4(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (K_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}))^3 \cdot \exp(K_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}))$$

$$K_5(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -10 \cdot K_2(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

3 P.