ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič

http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf17

1. Zwischenklausur

Zürich, 10. November 2017

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten (in graphischer Darstellung), der die Sprache

$$L = \{xa \mid x \in \{a,b\}^* \text{ und } (|x|_a + 2|x|_b) \bmod 3 = 1\}$$

akzeptiert.

(b) Geben Sie die Zustandsklasse $\mathrm{Kl}[q]$ für jeden Zustand q Ihres in Aufgabenteil (a) konstruierten Automaten an.

6+4 Punkte

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } |w|_0 = k^2 \text{ oder } |w|_1 = k^3\}$,

(b) $L_2 = \{0^{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Hierfür dürfen Sie sich jeweils eine der folgenden drei Beweismethoden aussuchen, jedoch *nicht* dieselbe für beide Aufgabenteile.

(i) Mit Hilfe von Lemma 3.3 aus dem Buch (oder direkt über den Automaten),

(ii) mit Hilfe des Pumping-Lemmas oder

(iii) mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität.

Bitte beachten Sie, dass bei Lösungen, die dieselbe Methode für beide Teilaufgaben verwenden, nur Teilaufgabe (a) bewertet wird. **5+5 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 3

(a) Sei für alle $i \in \mathbb{N} - \{0\}$ die natürliche Zahl x_i definiert durch

$$x_i = 2^i \cdot 3^i \cdot 5^i \,.$$

Zeigen Sie, dass eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $i \in \mathbb{N} - \{0\}$ gilt, dass

$$K(x_i) \leq c + \lceil \log_2 \log_2 x_i \rceil \,.$$

(b) Konstruieren Sie eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots$, so dass die folgenden Bedingungen gelten:

(i) $n_i < n_{i+1}$,

(ii) die Menge aller Primfaktoren, die in mindestens einer der Zahlen n_i vorkommen, ist unendlich und

(iii) es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{N}$, so dass

$$K(n_i) \leq c + \lceil \log_2 \log_2 n_i \rceil \,.$$

Weisen Sie nach, dass die von Ihnen konstruierte Zahlenfolge tatsächlich die Bedingungen (i) bis (iii) erfüllt.

4+6 Punkte

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass $L_{\mathrm{U}} \leq_{\mathrm{R}} (L_{\mathrm{H}})^{\complement}$ gilt, indem Sie eine konkrete Reduktion angeben und argumentieren Sie, warum Ihre Reduktion korrekt ist. **10 Punkte**