ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl

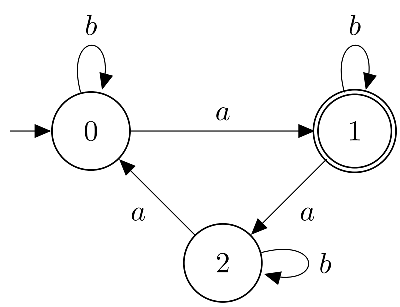
2. Zwischenklausur

Zürich, 12. Dezember 2014

Aufgabe 1

(a) Sei $R = ((a + bb)^*b)^*$ ein regulärer Ausdruck. Geben Sie einen λ-NEA A mit $L(A) = L(R)$ an.

(b) Geben Sie für den folgenden endlichen Automaten A einen äquivalenten regulären Ausdruck an. Verwenden Sie hierfür entweder eines der Verfahren aus dem Selbststudium oder begründen Sie informell die Korrektheit Ihrer Konstruktion.



4+6 Punkte

Aufgabe 2

(a) Formulieren Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

(b) Verwenden Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ und } k = \min\{i, j\}\}$$

nicht kontextfrei ist.

3+7 Punkte

(bitte wenden)

Aufgabe 3

Seien die beiden Sprachen

$$L_{011} = \{\mathrm{Kod}(M) \mid \text{die TM } M \text{ akzeptiert das Wort } 011\}$$

und

$$L_{110} = \{\mathrm{Kod}(M) \mid \text{die TM } M \text{ akzeptiert das Wort } 110\}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass $L_{011} \leq_{\mathrm{R}} L_{110}$ gilt, indem Sie eine konkrete Reduktion angeben.

10 Punkte

Aufgabe 4

Sei $C = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ eine aussagenlogische Formel mit den Klauseln $C_1, C_2, \ldots, C_m$, wobei jede Klausel $C_i = (l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee l_{i,3})$ genau 3 Literale besitzt. Für jede solche Klausel C_i kann man eine Formel $\Phi(C_i)$ in 2-KNF wie folgt konstruieren:

$$\begin{aligned}\Phi(C_i) = {} & (l_{i,1}) \wedge (l_{i,2}) \wedge (l_{i,3}) \\ & \wedge (\overline{l_{i,1}} \vee \overline{l_{i,2}}) \wedge (\overline{l_{i,1}} \vee \overline{l_{i,3}}) \wedge (\overline{l_{i,2}} \vee \overline{l_{i,3}}) \\ & \wedge (y_i) \wedge (l_{i,1} \vee \overline{y_i}) \wedge (l_{i,2} \vee \overline{y_i}) \wedge (l_{i,3} \vee \overline{y_i}),\end{aligned}$$

wobei y_i eine neue Variable ist, die nur in $\Phi(C_i)$ vorkommt.

(a) Zeigen Sie, dass für jede Belegung, die die Klausel C_i nicht erfüllt, jede mögliche Ergänzung der Belegung um einen Wahrheitswert für y_i zu höchstens 6 erfüllten Klauseln von $\Phi(C_i)$ führt.

(b) Zeigen Sie, dass jede Belegung, die die Klausel C_i erfüllt, sich so zu einer Belegung von $\Phi(C_i)$ ergänzen lässt (durch die Angabe eines Wahrheitswertes für y_i), dass dadurch 7 Klauseln von $\Phi(C_i)$ erfüllt werden.

Man kann zeigen, dass zusätzlich gilt:

$$\text{Es gibt keine Belegung, die mehr als 7 Klauseln von } \Phi(C_i) \text{ erfüllt.} \tag{1}$$

(c) Wir betrachten das Entscheidungsproblem SCHWELLENWERT-2SAT, das aus allen Paaren (Φ, k) besteht, so dass Φ eine Formel in 2-KNF ist, für die eine Belegung existiert, die mindestens k der Klauseln von Φ erfüllt. Zeigen Sie mit Hilfe der Aussagen aus (a), (b) und (1), dass SCHWELLENWERT-2SAT NP-schwer ist, indem Sie eine Polynomzeitreduktion von 3SAT angeben.

(d) **Zusatzaufgabe für 3 Zusatzpunkte:** Zeigen Sie (1).

2+4+4 Punkte