ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf16`

1. Zwischenklausur

Zürich, 11. November 2016

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten (in graphischer Darstellung), der die Sprache

$$L = \{w = 01x \in \{0,1\}^* \mid (|w|_0 + 2|w|_1) \bmod 3 = 0\}$$

akzeptiert.

(b) Geben Sie die Zustandsklasse $\mathrm{Kl}(q)$ für jeden Zustand q Ihres in Aufgabenteil (a) konstruierten Automaten an.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

Wir betrachten wieder die Sprache L aus Aufgabe 1.

(a) Beweisen Sie, dass jeder deterministische endliche Automat für L mindestens 6 Zustände haben muss.

Hinweis: Falls ihr Beweis nur eine untere Schranke von $i \in \{3,4,5\}$ Zuständen zeigt, erhalten Sie i Punkte für diesen Aufgabenteil.

(b) Geben Sie eine reguläre Grammatik für L an.

6+4 Punkte

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{ww^{\mathsf{R}}w \mid w \in \{0,1\}^*\}$,

(b) $L_2 = \{0^{n\lceil \log_2 n \rceil} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Hierfür dürfen Sie sich jeweils eine der folgenden drei Beweismethoden aussuchen, jedoch *nicht* dieselbe für beide Aufgabenteile.

(bitte wenden)

(i) Mit Hilfe eines angenommenen endlichen Automaten (Verwendung von Lemma 3.3 aus dem Buch oder direkt über den Automaten),

(ii) mit Hilfe des Pumping-Lemmas oder

(iii) mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität.

Bitte beachten Sie, dass bei Lösungen, die dieselbe Methode für beide Teilaufgaben verwenden, nur Teilaufgabe (a) bewertet wird. **5+5 Punkte**

Aufgabe 4

Wir betrachten eine unendliche streng monoton steigende Folge $n_1, n_2, n_3, \ldots$ von natürlichen Zahlen mit $n_1 \geq 2$ und

$$K(n_i) \geq (1+\varepsilon)\log_2 \log_2 n_i$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ und eine beliebig kleine Konstante $\varepsilon > 0$. Sei ferner

$$P = \{p \in \text{PRIM} \mid p \text{ ist ein Faktor von } n_i \text{ für ein } i \in \mathbb{N}\}$$

die Menge aller Primzahlen, die Primfaktor mindestens eines n_i der obigen Folge sind.

(a) Beweisen Sie $|P| > 1$.

(b) Was könnte man über $|P|$ beweisen, falls für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$K(n_i) \geq f(n_i)\log_2 \log_2 n_i \ ,$$

wobei $f(n)$ eine beliebig kleine unbeschränkt in n wachsende Funktion ist? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

5+5 Punkte

Bonus-Aufgabe 5

(a) Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des Pumping-Lemmas:

> Für jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ und jedes $a \in \Sigma$ existiert eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $w \in \Sigma^*$ mit $|w|_a \geq n_0$ zerlegen lässt als $w = yxz$ mit den Eigenschaften
>
> (i) $|xz|_a \leq n_0$,
>
> (ii) $|x|_a \geq 1$ und
>
> (iii) $\{yx^iz \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $\{yx^iz \mid i \in \mathbb{N}\} \cap L = \emptyset$.

(b) Finden Sie eine nichtreguläre Sprache L, für die ein Beweis der Nichtregularität mit dem Pumping-Lemma aus der Vorlesung unmöglich oder sehr aufwändig ist, für die man aber mit der Variante aus Aufgabenteil (a) einfach $L \notin \mathcal{L}_{\text{EA}}$ beweisen kann.

5+5 Bonus-Punkte