

**1. Klausur**  
**Gruppe A**

Zürich, 16. Dezember 2004

**Aufgabe 1**

- a) Es sei
- $(w_j)_{j=0}^{\infty}$
- die durch

$$w_j := b^{j^3}$$

gegebene (unendliche) Folge von Wörtern. Zeigen Sie, dass es eine Konstante  $c$  gibt, so dass für alle  $j$  gilt:

$$K(w_j) \leq \frac{1}{3} \log |w_j| + c.$$

*Hinweis:* Vergessen Sie nicht, dass diese Aufgabe auch das Aufschreiben von Programmen, die die  $w_j$  generieren, fordert.

- b) Beweisen Sie mit Hilfe des Konzeptes der Kolmogorov-Komplexität, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

*Hinweis:* Beweise, die sich nicht auf ein die Kolmogorov-Komplexität nutzendes Argument beziehen, werden nicht akzeptiert.

**2 × 5 Punkte****Aufgabe 2**

- a) Entwerfen Sie einen endlichen Automaten für die reguläre Sprache

$$L = \{x \in \{a, b\}^* \mid |x|_a \text{ ist gerade und es gibt } u, v \in \{a, b\}^* \text{ mit } x = uabbv\}.$$

(Die Angabe eines Diagramms genügt hier.)

- b) Geben Sie zu allen Zuständen
- $q$
- Ihres Automaten die zugehörigen Klassen
- $Kl[q]$
- explizit an.

**4 + 6 Punkte**

### Aufgabe 3

In der Vorlesung haben wir drei Methoden vorgestellt, mit Hilfe derer man beweisen kann, dass eine Sprache nicht regulär ist. Suchen Sie sich für diese Aufgabe eine davon aus.

- Erklären Sie mit wenigen Sätzen die Idee der Methode.
- Formulieren Sie eine Behauptung, auf der die Methode beruht.
- Beweisen Sie diese Behauptung.
- Wenden Sie Ihre Methode an, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L = \{xcy \mid x, y \in \{a, b\}^*, |x|_a = |y|_b\}$$

über  $\Sigma = \{a, b, c\}$  nicht regulär ist.

2 + 3 + 5 + 5 Punkte

### Aufgabe 4

Definieren Sie die aus der Vorlesung bekannten Sprachen  $L_U$  und  $L_H$ .

Beweisen Sie:

$$L_U \leq_R L_H.$$

*Hinweise:*

- Womöglich fällt es Ihnen leichter, einen anderen Reduktionstyp zu verwenden. Dies ist erlaubt, wenn Sie zunächst beschreiben, *welchen* Reduktionstyp Sie verwenden, und wenn Sie (kurz) beschreiben, an welcher Stelle die zu zeigende Aussage folgt.
- Eine Reduktion besteht immer aus der Beschreibung eines geeigneten Mechanismus und aus dem Beweis, warum dadurch das Gewünschte geleistet wird.

10 Punkte

Frohe Weihnachten!