

# Analysis I Summary

March 30, 2020

## Chapter 1

# Reelle Zahlen, Euklidische Räume, Komplexe Zahlen

### 1.1 Der Körper der reellen Zahlen

Menge der natürlichen Zahlen:  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

Menge der ganzen Zahlen:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Menge der rationalen Zahlen:  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

**Satz 1.1.1 Lindemann:**

Es gibt keine Gleichung der Form  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$  mit  $a_i \in \mathbb{Q}$ , so dass  $x = \pi$  eine Lösung hat

**Satz 1.1.2**  $\mathbb{R}$  ist ein kommutativer, angeordneter Körper, der ordnungsvollständig ist. Es gilt:

1. Axiome der Addition

- A1 Assoziativität  $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
- A2 Neutrales Element  $x + 0 = x \quad \forall x, z \in \mathbb{R}$
- A3 Inverses Element  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$  (eindeutig den.  $-x$ )
- A4 Kommutativität  $x + z = z + x \quad \forall x, z \in \mathbb{R}$

2. Axiome der Multiplikation

- M1 Assoziativität  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
- M2 Neutrales Element  $x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- M3 Inverses Element  $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$  (eindeutig den.  $x^{-1}$ )
- M4 Kommutativität  $x \cdot z = z \cdot x \quad \forall x, z \in \mathbb{R}$

3. Distributivität  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

4. Ordnungsaxiome

- O1 Reflexivität  $x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- O2 Transitivität  $x \leq y$  und  $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- O3 Antisymmetrie  $x \leq y$  und  $y \leq x \Rightarrow x = y$
- O4 Total  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt entweder  $x \leq y$  oder  $y \leq x$

5. Kompatibilität

- K1  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
- K2  $\forall x \geq 0, \forall y \geq 0 : x \cdot y \geq 0$

6. Ordnungsvollständigkeit (Was  $\mathbb{R}$  von  $\mathbb{Q}$  unterscheidet) Seien  $A, B$  Teilmengen von  $\mathbb{R}$  so dass:

- $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$
- $\forall a \in A$  und  $\forall b \in B$  gilt:  $a \leq b$

Dann gibt es  $c \in \mathbb{R}$ , so dass  $\forall a \in A : a \leq c$  und  $\forall b \in B : c \leq b$

**Korollar 1.17 (Archimedisches Prinzip)** Sei  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x > 0$ . Dann gibt es  $n \in \mathbb{N}$  mit  $y \leq n \cdot x$ .

**Satz 1.1.8** Für jedes  $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$  hat die Gleichung  $x^2 = t$  eine Lösung in  $\mathbb{R}$

**Definition 1.1.9** seien  $x, y \in \mathbb{R}$

1.

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases}$$

2.

$$\min\{x, y\} = \begin{cases} y & \text{falls } y \leq x \\ x & \text{falls } x \leq y \end{cases}$$

3. Der Absolutbetrag einer Zahl  $x \in \mathbb{R} : |x| = \max\{x, -x\}$

**Satz 1.1.10** Für den Absolutbetrag gilt:

1.  $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2.  $|xy| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
3.  $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
4.  $|x + y| \geq ||x| - |y|| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

**Satz 1.1.11 (Young'sche Ungleichung)**  $\forall \epsilon > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt:  
 $2|xy| \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2$ .

**Intervalle**

1. für  $a \leq b$  in  $\mathbb{R}$ 
  - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
  - $[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
  - $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
  - $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
2. für  $a \in \mathbb{R}$ 
  - $[a, \infty[ = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
  - $]a, \infty[ = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
  - $] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
  - $] - \infty, b[ = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
3.  $] - \infty, \infty[ = \mathbb{R}$

**Definition 1.1.12** Sei  $A \subset \mathbb{R}$  eine Teilmenge.

1.  $c \in \mathbb{R}$  ist eine **obere Schranke** von A falls  $\forall a \in A : a \leq c$ . Die Menge A heisst nach oben beschränkt falls es eine obere Schranke von A gibt.
2.  $c \in \mathbb{R}$  ist eine **untere Schranke** von A falls  $\forall a \in A : c \leq a$ . Die Menge A heisst nach unten beschränkt, falls es eine untere Schranke von A gibt
3. Ein Element  $\in \mathbb{R}$  heisst ein **Maximum** von A falls  $m \in A$  und m eine obere schranke von A ist.
4. Ein Element  $m \in \mathbb{R}$  heisst ein **Minimum** von A falls  $m \in A$  und m eine untere Schranke von A ist

**Satz 1.1.15** Sei  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

1. Sei A nach oben beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere Schranke von A:  $c := \sup A$  genannt das **Supremum** von A
2. Sei A nach unten beschränkt. Dann gibt es eine grösste untere Schranke von A:  $d := \inf A$  genannt das **Infimum** von A

**Korollar 1.1.16** Seien  $A \subset B \subset \mathbb{R}$  Teilmengen von  $\mathbb{R}$

- Falls B nach oben beschränkt ist, folgt  $\sup A \leq \sup B$
- Falls B nach unten beschränkt ist, folgt  $\inf B \leq \inf A$

**Konvention:** Falls A nicht nach oben beschränkt (bzw nicht nach unten beschränkt) definieren wir  $\sup A = \infty$  (bzw  $\inf A = -\infty$ )

**Definition 1.1.18 Kardinalität**

1. Zwei Mengen  $X, Y$  heißen **gleichmächtig**, falls es eine Bijektion  $f : X \rightarrow Y$  gibt.
2. Eine Menge  $X$  ist **endlich**, falls entweder  $X = \emptyset$  oder  $\exists n \in \mathbb{N}$ , sodass  $X$  und  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  gleichmächtig sind. Im ersten Fall ist die **Kardinalität** von  $X$ ,  $\text{card}X = 0$  und im zweiten Fall ist  $\text{card}X = n$ .
3. Eine Menge  $X$  ist **abzählbar**, falls sie endlich oder gleichmächtig wie  $\mathbb{N}$  ist.

**Satz 1.1.20 (Cantor)**  $\mathbb{R}$  ist nicht abzählbar.

**1.2 Der Euklidische Raum**

**Das Skalarprodukt** Das SP zweier Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ist durch  $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j$  definiert. Es gilt:

1. Symmetrie  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. Bilinear  $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n$
3. Positiv Definit  $\langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^n x_j^2 \geq 0$

**Norm** Die Norm des Vektors  $x$  ist  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

**Satz 1.2.1 (Cauchy-Schwarz)**  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

**Satz 1.2.2** Für die Norm gilt:

1.  $\|x\| \geq 0$  mit Gleichheit genau dann wenn  $x = 0$
2.  $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

**Kreuzprodukt** Das KP zwischen zwei Vektoren  $a, b \in \mathbb{R}^3$  ist definiert durch  $(a, b) \mapsto a \times b$ .  $a, b$  und  $a \times b$  bilden ein Rechtssystem.  $\|a \times b\| = \text{Flächeninhalt des von } a, b \text{ aufgespannten Parallelogramms}$ . Es gilt:

1. Distributivität  $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$
2. Antisymmetrie  $a \times b = -b \times a$
3. Jacobi-Identität  $a \times (b \times c) + c \times (a \times b) + b \times (c \times a) = 0$

## Chapter 2

# Folgen und Reihen

### 2.1 Grenzwert einer Folge

**Folge:** Eine Folge (reeller Zahlen) ist eine Abbildung  $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$   
Wir schreiben  $a_n$  statt  $a(n)$  und bezeichnen eine Folge mit  $(a_n)_{n \geq 1}$

**Lemma 2.1.3** Sei  $(a_n)$  eine Folge. Dann gibt es höchstens eine reelle Zahl  $l \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft:  $\forall \epsilon > 0$  ist die Menge  $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin (l - \epsilon, l + \epsilon)\}$  endlich

**Konvergent:** Eine Folge  $(a_n)$  heisst konvergent, falls es  $l \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $\forall \epsilon > 0$  die Menge  $\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \notin (l - \epsilon, l + \epsilon)\}$  endlich ist. Jede Konvergente Folge ist beschränkt

**Grenzwert/Limes einer Folge:** Nach L2.1.3 ist  $l$  eindeutig bestimmt und wird mit  $l := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

**Lemma 2.1.6** Folgende Aussagen sind äquivalent:

1.  $(a_n)$  konvergiert gegen  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
2.  $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1$ , so dass  $|a_n - l| < \epsilon \quad \forall n \geq N$

**Satz 2.1.8** Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergente Folgen mit  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ,  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  dann gilt:

1.  $(a_n + b_n)$  ist konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
2.  $(a_n \cdot b_n)$  ist konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. Nehmen wir zudem an, dass  $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$  und  $b \neq 0$  Dann ist  $(\frac{a_n}{b_n})$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$ .
4. Falls es ein  $K \geq 1$  gibt mit  $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq K$  dann folgt  $a \leq b$

### 2.2 Der Satz von Weierstrass und Anwendungen

**Monotonie**

1.  $(a_n)$  ist monoton wachsend falls:  $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$
2.  $(a_n)$  ist monoton fallend falls:  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq 1$

**Satz von Weierstrass** Eine wichtige Anwendung dieses Satzes ist, wie man mit jeder beschränkten Folge  $(a_n)$  zwei monotone Folgen  $(b_n)$  und  $(c_n)$  definieren kann, welche dann einen Grenzwert besitzen

- Sei  $(a_n)$  monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert  $(a_n)$  mit Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$
- Sei  $(a_n)$  monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert  $(a_n)$  mit Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$

**Limits Examples**

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a q^n = 0$  mit  $a \in \mathbb{Z} \quad 0 \leq q < 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \quad n \geq 1$

**Bernoulli Ungleichung**  $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$

## 2.3 Limes superior und Limes inferior

**Limes Inferior/Limes Superior**  $(a_n)$  ein beschränkter Folge. Sei für jedes  $n \geq 1$ :

$$b_n = \inf\{a_k : k \geq n\} \text{ und } c_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$$

Aus Korollar 1.1.16 folgt:  $b_n \leq b_{n+1}$   $c_{n+1} \leq c_n$   $\forall n \geq 1$  und beide Folgen sind beschränkt. Nach Weierstrass sind beide Folgen konvergent und wir definieren:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ (Limes inferior)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \text{ (Limes Superior)}$$

$$\text{Aus } b_n \leq c_n \text{ folgt: } \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n$$

## 2.4 Das Cauchy Kriterium:

Bestimmen ob ein Folge konvergiert ohne sein Grenzwert zu kennen.

**Lemma 2.4.1**  $(a_n)$  konvergiert genau dann, falls  $(a_n)$  beschränkt ist und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n$

**Satz 2.4.2 (Cauchy Kriterium)** Die Folge  $(a_n)$  ist genau dann konvergent, falls  $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1$  so dass  $|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N$

## 2.5 Der Satz von Bolzano-Weierstrass

**Definition 2.5.1** Ein abgeschlossenes Intervall ist eine Teilmenge  $I \subset \mathbb{R}$  der Form ( $L(I)$  ist definiert als die Länge eines Intervalls):

1.  $[a, b], \quad a \leq b \quad a, b \in \mathbb{R} \quad L(I) = b - a$
2.  $[a, +\infty[, \quad a \in \mathbb{R} \quad L(I) = +\infty$
3.  $[-\infty, a[, \quad a \in \mathbb{R} \quad L(I) = +\infty$
4.  $] - \infty, +\infty[ = \mathbb{R} \quad L(I) = +\infty$

$\Rightarrow$  Ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  genau dann abgeschlossen, falls für jede konvergente Folge  $(a_n)$  aus Elementen in  $I$ , der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  auch in  $I$  ist

**Cauchy-Cantor** Sei  $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$  eine Folge abgeschlossener Intervalle mit  $L(I_1) < +\infty$  Dann gilt:

$$\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$$

Falls zudem  $\lim_{n \rightarrow \infty} L(I_n) = 0$  enthält  $\bigcap_{n \geq 1} I_n$  genau ein Punkt.

**Satz 2.5.6**  $\mathbb{R}$  ist nicht abzählbar.

**Definition 2.5.7** Eine Teilfolge einer Folge  $(a_n)$  ist eine Folge  $(b_n)$  wobei

$$b_n = a_{l(n)}$$

und  $l : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  eine Abbildung bezeichnet mit der Eigenschaft

$$l(n) < l(n+1) \quad \forall n \geq 1$$

**Bolzano-Weierstrass:** Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge  $\Rightarrow$  Sei  $(a_n)$  eine beschränkte Folge. Dann gilt für jede konvergente Teilfolge  $(b_n)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n$$

## 2.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

**D2.6.1 Abbildung** Eine Folge in  $\mathbb{R}^d$  ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}^d$$

Wir schreiben  $a_n$  statt  $a(n)$  und bezeichnen die Folge mit  $(a_n)$

**Konvergenz einer Folge** Eine Folge  $(a_n)$  in  $\mathbb{R}^d$  heisst konvergent, falls es  $a \in \mathbb{R}^d$  gibt so dass:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 \text{ mit } \|a_n - a\| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

Falls solch ein  $a$  existiert, ist es eindeutig und heisst Grenzwert der Folge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Eine konvergente Folge  $(a_n)$  in  $\mathbb{R}^d$  ist beschränkt

**Satz 2.6.6**

1. Eine Folge  $(a_n)$  konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy Folge ist
2. Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge

**2.7 Reihen**

**Konvergenz:** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist konvergent, falls die Folge  $(S_n)$  der Partialsummen konvergiert. Wir definieren:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

### 2.7.1 Beispiele

- Geometrische Reihe :  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$  konvergiert für  $|q| < 1$
- Harmonische Reihe :  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  divergiert
- Alternierende Harmonische Reihe:  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$  konvergiert aber nicht absolut
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  konvergiert
- $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$  konvergiert für  $s > 1$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$  konvergiert
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$  konvergiert, ist aber nicht absolut konvergent
- Exponentialfunktion:  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  konvergiert für all  $z \in \mathbb{C}$
- Eulersche Zahl:  $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

**Satz 2.7.4**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{j=1}^{\infty} b_j$  konvergent, sowie  $\alpha \in \mathbb{C}$

1. Dann ist  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  konvergent und  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) + \left( \sum_{j=1}^{\infty} b_j \right)$
2. Dann ist  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k$  konvergent und  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

**Cauchy Kriterium:** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist genau dann konvergent, falls:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \text{ mit } \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N$$

**Satz 2.7.6** Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine Reihe mit  $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$ . Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert genau dann, falls die Folge

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

**Vergleichssatz:**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  Reihen mit:

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq K \quad (K \geq 1)$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent} \end{aligned}$$

**Absolut Konvergenz:** Falls  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergiert. Eine absolut konvergente Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist auch konvergent und es gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$



**Leibniz:**  $(a_n)$  monoton fallend mit  $a \geq 0 \quad \forall n \geq 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt:  $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$

**Umordnung:** Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a'_n$  ist eine Umordnung der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ , falls es eine bijektive Abbildung

$$\phi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$$

gibt, sodass  $a'_n = a_{\phi(n)}$

**Dirichlet:** Falls  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat denselben Grenzwert.

**Quotientenkriterium:** Sei  $(a_n)$  mit  $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$  Falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  absolut. Falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$$

divergiert die Reihe. Das Quotientenkriterium versagt, wenn z.B. unendlich viele Glieder  $a_n$  der Reihe verschwinden.

**Wurzelkriterium:**

1. Falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut

2. Falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

dann divergieren  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

**Nullfolgenkriterium:** Verwendet um zu zeigen dass eine Reihe divergiert

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_n \text{ existiert} &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \\ &\Rightarrow |a_n| \text{ keine Nullfolge} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_n| \text{ nicht konvergent} \end{aligned}$$

Wenn es 0 ist kann man noch keine Aussage machen.

**Majorantenkriterium:** zu zeigen  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert

Finde  $(b_n)$  s.d.  $|a_n| \leq b_n (\forall n \geq n_0)$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergiert  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert (absolut!)

**Lineare Anordnung:**  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  ist eine lineare Anordnung der Doppelreihe  $\sum_{i,j \geq 0} a_{ij}$ , falls es eine Bijektion

$$\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

gibt, mit  $b_k = a_{\sigma(k)}$

**Potenz Reihe:** Eine Reihe der Form:

$$p(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$$

wobei  $a_n$  eine beliebige Folge ist und  $x \in \mathbb{R}$  eine Parameter.

SATZ 2.7.23 (Cauchy 1821). Wir nehmen an, dass es  $B \geq 0$  gibt, so dass

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0.$$

Dann konvergieren die folgenden Reihen absolut:

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0 \quad \text{und} \quad U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0$$

sowie

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

und es gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

Zudem konvergiert jede lineare Anordnung der Doppelreihe absolut, mit selbem Grenzwert.

Figure 2.1:

**Konvergenz Radius:** Der konvergenz radius einer Potenzreihe ist gegeben durch:

$$\rho := \sup\{|x| : p(x) \text{ converges}\} \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| & \text{(i) Quotientenkriterium} \\ \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{(ii) Wurzelkriterium} \end{cases}$$

$$|x| := \begin{cases} < \rho \Rightarrow \text{konvergiert} \\ > \rho \Rightarrow \text{divergiert} \\ = \rho \Rightarrow \text{keine Aussage} \quad (*) \end{cases}$$

(\*) : in diesem Fall müssen wir kontrollieren ob es konvergiert oder divergiert

**Cauchy-Produkt:** der Reihen

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$

ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots$$

Falls die Reihen absolut konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j \right) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

**Satz 2.7.28:** Sei  $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge. Wir nehmen an, dass:

1.  $f(j) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(j)$  existiert  $\forall j \in \mathbb{N}$
2. Es gibt eine Funktion  $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty[$ , so dass:
  - (a)  $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0, \forall n \geq 0$
  - (b)  $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$  konvergiert

Dann folgt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$$

## Chapter 3

# Stetige Funktionen

### 3.1 Reelwertige Funktionen

Die Menge  $\mathbb{R}^D$ : Sei  $D$  eine beliebige Menge. Die Menge  $\mathbb{R}^D$  aller Funktionen

$$f_D \rightarrow \mathbb{R}$$

bildet ein VR über  $\mathbb{R}$  mit:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

$$0(x) = 0 \quad \forall x \in D$$

$$1(x) = 1 \quad \forall x \in D$$

$$f + 0 = f, \quad g \cdot 1 = g \quad \forall f, g \in \mathbb{R}^D$$

Falls  $|D| \geq 2$  gibt es immer ein  $f \neq 0$  das kein multiplikatives Inverses besitzt

$$f \leq g \text{ falls } f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in D$$

$$f \text{ ist nicht negativ falls } 0 \leq f$$

Beschränktheit: Sei  $f \in \mathbb{R}^D$

1.  $f$  ist **nach oben beschränkt**, falls  $f(D) \subset \mathbb{R}$  nach oben beschränkt ist
2.  $f$  ist **nach unten beschränkt**, falls  $f(D) \subset \mathbb{R}$  nach unten beschränkt ist
3.  $f$  ist **beschränkt**, falls  $f(D) \subset \mathbb{R}$  beschränkt ist.

Monotonie:  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $D \subset \mathbb{R}$  falls  $\forall x, y \in D$

1. **monoton wachsend**  $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
2. **streng monoton wachsend**  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
3. **monoton fallend**  $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
4. **streng monoton fallend**  $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
5. **monoton** falls  $f$  monoton wachsend oder monoton fallend ist
6. **steng monoton** falls  $f$  streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist

Beispiel: Sei  $n \in \mathbb{N}$   $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $x \mapsto x^n$ .  $f$  ist genau dann (streng) monoton wachsend, falls  $n$  ungerade ist.

### 3.2 Stetigkeit

Stetigkeit in  $x_0$ : Sei  $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D$ . Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $x_0$  stetig, falls es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt so dass für alle  $x \in D$  die Implikation:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

gilt.

Stetigkeit: Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, falls sie in jedem Punkt von  $D$  stetig ist.

**Satz 3.2.4:** Sei  $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  ist genau dann in  $x_0$  stetig, falls für jede Folge  $(a_n)$  in  $D$  folgende Implikation gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$$

**Korollar 3.2.5:** Sei  $x_0 \in D \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  beide stetig in  $x_0$ :

1. Dann sind  $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g$  stetig in  $x_0$
2. Falls  $g(x_0) \neq 0$  dann ist

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

stetig in  $x_0$

**polynomiale Funktion:**  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Funktion der Form

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

wobei:  $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ . Falls  $a_n \neq 0$  ist  $n$  der **Grad** von  $P$ .

Polynomiale Funktionen sind auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig.

Seien  $P, Q$  polynomiale Funktionen auf  $\mathbb{R}$  mit  $Q \neq 0$ . Seien  $x_1, \dots, x_m$  die Nullstellen von  $Q$ . Dann ist:

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{P(x)}{Q(x)} \end{aligned}$$

stetig.

### 3.3 Der Zwischenwertsatz

**Satz 3.3.1 Bolzano:** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $a, b \in I$ . Für jedes  $c$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  gibt es ein  $z$  zwischen  $a$  und  $b$  mit  $f(z) = c$ .

**Korollar 3.3.2:** Sei  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  ein Polynom mit  $a_n \neq 0$  und  $n$  ungerade. Dann besitzt  $P$  mindestens eine Nullstelle in  $\mathbb{R}$

Für  $c > 0$  besitzt  $Q(x) = x^2 + c$  keine Nullstelle in  $\mathbb{R}$