(a) Wir wählen 2k+1 elemente. Die Wahrscheinlichkeit dass ein zufällig gewählte element kleiner gleich ist als das $\lfloor \frac{1-\epsilon}{2} n \rfloor$-grösste element ist $\frac{\lfloor \frac{1-\epsilon}{2} n \rfloor}{n}$. Durch die Linearität der Erwartungswert erhalten wir für $\mathbb{E}[K] = \frac{(2k+1)(\lfloor \frac{1-\epsilon}{2} n \rfloor)}{n}$. Analog berechnen wir $\mathbb{E}[G]$. Wahrscheinlichkeit dass ein zufällig gewählte element grösser als das $\lceil \frac{1+\epsilon}{2} n \rceil$-grösste element ist $\frac{n - \lceil \frac{1+\epsilon}{2} n \rceil}{n}$. Durch die Linearität der Erwartungswert erhalten wir für $\mathbb{E}[G] = \frac{(2k+1)(n - \lceil \frac{1+\epsilon}{2} n \rceil)}{n}$

(b) Wenn wir mindestens $\frac{2k+1}{2}$ der zufällig gewählte elemente in K oder G liegen, dann kriegen wir ein median welche kein ϵ median ist. Wir müssen also zeigen:

1. $\frac{2k+1}{2} \geq (1+\epsilon)\mathbb{E}[K]$
2. $\frac{2k+1}{2} \geq (1+\epsilon)\mathbb{E}[G]$

Bew 1:
$(1+\epsilon)\mathbb{E}[K] = \frac{(2k+1)(\lfloor \frac{1-\epsilon}{2} n \rfloor)}{n} \cdot (1+\epsilon) \leq \frac{(2k+1)(\frac{1-\epsilon}{2} n)}{n} \cdot (1+\epsilon) \leq (2k+1)(\frac{1-\epsilon}{2})(1+\epsilon) \leq (2k+1)\frac{(1-\epsilon^2)}{2}$
$\leq \lim_{\epsilon \to 0} (2k+1)\frac{(1-\epsilon^2)}{2} = \frac{2k+1}{2}$
Bew 2:
$(1+\epsilon)\mathbb{E}[G] = \frac{(2k+1)(n - \lceil \frac{1+\epsilon}{2} n \rceil)(1+\epsilon)}{n} \leq \frac{(2k+1)(n - \frac{1+\epsilon}{2} n)(1+\epsilon)}{n} \leq (2k+1)(1 - \frac{1+\epsilon}{2})(1+\epsilon) = (2k+1)(\frac{1-\epsilon}{2})(1+\epsilon)$
$= (2k+1)(\frac{1-\epsilon^2}{2}) \leq \lim_{\epsilon \to 0} (2k+1)(\frac{1-\epsilon^2}{2}) = \frac{2k+1}{2}$

(c) Wir wählen den Abschätzung von Chernoff:
$\Rightarrow Pr[K \geq (1+\epsilon)\mathbb{E}[K]] \leq e^{-\frac{1}{3}\epsilon^2 \mathbb{E}[K]}$
$\Rightarrow Pr[G \geq (1+\epsilon)\mathbb{E}[G]] \leq e^{-\frac{1}{3}\epsilon^2 \mathbb{E}[G]}$

(d) Unser Erfolgswahrscheinlichkeit ist gegeben durch $1 - (Pr[K \geq (1+\epsilon)\mathbb{E}[K]] + Pr[G \geq (1+\epsilon)\mathbb{E}[G]])$
$\Rightarrow 1 - (Pr[K \geq (1+\epsilon)\mathbb{E}[K]] + Pr[G \geq (1+\epsilon)\mathbb{E}[G]]) \leq 1 - (e^{-\frac{1}{3}\epsilon^2 \mathbb{E}[K]} + e^{-\frac{1}{3}\epsilon^2 \mathbb{E}[G]})$
$\Rightarrow 1 - (e^{-\frac{1}{3}\epsilon^2 \mathbb{E}[K]} + e^{-\frac{1}{3}\epsilon^2 \mathbb{E}[G]}) = 1 - (e^{-\frac{1}{3}\epsilon^2 (2k+1)\frac{1-\epsilon}{2}} + e^{-\frac{1}{3}\epsilon^2 (2k+1)(1-\frac{1+\epsilon}{2})}) = 1 - 2e^{-\frac{1}{3}\epsilon^2 (2k+1)\frac{1-\epsilon}{2}}$
$= \underline{1 - 2e^{-\frac{1}{6}(2k+1)(\epsilon^2 - \epsilon^3)}}$

(e) Wir setzen δ als unsere berechnete wert aus d) i.e $\delta = 2e^{-\frac{1}{6}(2k+1)(\epsilon^2-\epsilon^3)}$
$\Rightarrow \left(\frac{\delta}{2}\right) = -\frac{1}{6}(2k+1)(\epsilon^2 - \epsilon^3)$
$\Rightarrow -\frac{6ln(\frac{\delta}{2})}{\epsilon^2 - \epsilon^3} = (2k+1)$
$\Rightarrow k = -\frac{3ln(\frac{\delta}{2})}{\epsilon^2 - \epsilon^3} - \frac{1}{2}$
$\Rightarrow k \in \mathcal{O}\left(\frac{ln\delta}{\epsilon^2 - \epsilon^3}\right)$