0.1 Folgen und Reihen

1.1 Order Completeness Axiom

Order Completeness Axiom: Let A,B $\subseteq \mathbb{R}$ such that $\forall a \in A \forall b \in B : a \leq b \rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \forall a \in A \forall b \in B : a \leq c \leq b$

Archimedean Property:

1. $\forall b > 0 \exists n \in \mathbb{N} : b < n$ "We can always go bigger"
2. $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon$ "We can always go smaller"

$\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$: $x, y \in \mathbb{R}, x < y \rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}$ such that $x < q < y$

1.2 Supremum and Infimum:

$S \subseteq \mathbb{R}$ be a set. UB(S) denotes the set of upper bounds for S.
bounded: A set S iff UB(S)$\neq \emptyset \quad \forall a \in S \forall b \in UB(S) : a < b$
least upper bound (Supremum): Let S be bounded from above and $s^+ = supS$. It holds that $\forall \epsilon > 0 \exists s \in S : s > s^+ - \epsilon$

Monotonie

1. (a_n) ist monoton wachsend falls: $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$
2. (a_n) ist monoton fallend falls: $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq 1$

Satz von Weierstrass: Mit jeder beschränkten Folge (a_n) kann man zwei monotone Folgen (b_n) und (c_n) welche dann einen Grenzwert besitzen definieren

- Sei (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert (a_n) mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = sup\{a_n : n \geq 1\}$
- Sei (a_n) monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert (a_n) mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = inf\{a_n : n \geq 1\}$

1.3 How to prove Supremum/Infimum

Algorithm 1 Supremum Proofs

Input: A set S
if $S \neq \emptyset \wedge \mathsf{UB}(S) \neq \emptyset$ **then**
  Make a "guess" s^+ and claim "$s^+ \in \mathsf{UB}(S)$".
  Proof the claim by showing that $\forall s \in S : s^+ \geq s$. *// Now we know that* $\sup S$ *exists.*
  Now we claim "$s^+ = \sup S$".
  if $s^+ \in S$ **then**
    // Proof by demonstration
    $\sup S = \max S = s^+$ and we are done!
  else
    // Proof by contradiction
    Show that $s \notin S$. *// Now we know that* $\max S$ *does not exist.*
    Perform an ϵ-proof as explained below to show that. Done!
  end if
else
  S is either empty or not bounded from above, both implying that $\sup S$ and $\max S$ do not exist. Done!
end if

ϵ-proof: Let $\epsilon > 0$ and asume by contradiction that $s' := s - \epsilon$ is also an upper bound for S. Find an element $s \in S$ that is strictly greater than s', contradicting the assumption that s' is an upper bound for s.
claim 1.1: Let $C = A \cup B$ and $c^+ = max(a^+, b^+)$. Then $supC = c^+$

2.1 Sequences

Let $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ be a sequence.
(a_n) converges to the limit a $\iff \lim_{n\to\infty} a_n = a$
$\iff \forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$

Calculation Rules: $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}$ convergent sequences with $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$:

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}(b_n, b \neq 0)$

Theorem 2: Monotone Convergence:
(a_n) bounded $\wedge (a_n)$ monotone $\Rightarrow (a_n)$ converges

2.2 Inductively defined sequences

Sequences of the form: $a_1 := C(\in \mathbb{R}), \; a_{n+1} := f(a_n) \quad \forall n > 1$
There are two methods to prove convergence of such sequences:

1. **Variant 1:**
   1 Find a closed form representation of $(a_n) : \; a_n = \phi(n)$
   2 Prove by induction that the closed form indeed equals the inductive form
   3 Compute $\lim_{n\to\infty} \phi(n)$ directly (if possible)
2. **Variant 2:**
   1 Show the sequence is monotonically increasing/decreasing
   2 Show the sequence is bounded from above/below
   3 Conclude by Theorem 2 that $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ exists
   4 Apply "induction trick"

Induction-Trick: Es gilt:
$\lim_{n\to\infty} d_n = d \Rightarrow$ for every subsequence l(n) follows $\lim_{n\to\infty} d_{l(n)} = d$
We choose the subsequence $l(n) := n + 1$,then: $\lim_{n\to\infty} d_{n+1} = d$
Solve for d and take the valid solution

Satz 2.4.2 (Cauchy Kriterium) Die Folge (a_n) ist genau dann konvergent, falls

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \text{ so dass } |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N$$

Bolzano-Weierstrass: Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge $\Rightarrow$ Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Dann gilt für jede konvergente Teilfolge (b_n):

$$\lim_{n\to\infty} inf \; a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} sup \; a_n$$

3.1 Convergence Techniques

Lemma 3.1: Sandwich Lemma:
$(a_n), (b_n), (c_n)$ sequences such that: $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n \leq c_n$
Then: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = b$

3.2 Divergence Proofs

Lemma 3.2 Unbounded Divergence
$\lim_{n\to\infty} a_n$ and $\lim_{n\to\infty} b_n$ sequences such that: $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |b_n| \leq |a_n|$
Then: $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

Lemma 3.3 Oscillating Divergence:
If there exist two subsequences $\lim_{n\to\infty} a_{l_1(n)} \neq \lim_{n\to\infty} a_{l_2(n)}$ then we conclude that a_n diverges

4.1 Series

Let (a_n) be a sequence we define the n-th partial sum as $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_n$
If the limit exists its written as:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

Calculation Rules: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent, sowie $\alpha \in \mathbb{C}$

1. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ konvergent und
$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) + \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right)$$
2. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Vergleichssatz: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit:

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq K \quad (K \geq 1)$$

dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

4.2 Zero Sequence Check/Nullfolgenkriterium

All converging series must satisfy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converges} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Lemma 4.1 Zero Sequence Check/Nullfolgenkriterium

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverges}$$

Always do zero sequence check before the other convergence criteria

4.3 Direct comparison test/Majorantenkriterium
a_n, b_n sequences such that: $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |a_n| \leq b_n$ Then:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converges} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converges (absolutely)}$$

4.4 Direct comparison test/Minorantenkriterium
a_n, b_n sequences such that: $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : 0 \leq b_n \leq a_n$ Then:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ diverges} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverges}$$

4.5 Leibnizkriterium
(a_n) a sequence then:

$$\left.\begin{array}{l}(i)\ a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ (ii)\ a_n \text{wird monoton (ab einem } n_0)\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ converges}$$

4.6 Quotienten/Wurzel-Kriterium
$(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ a sequence We have:

- **Quotientenkriterium:** $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$
- **Wurzelkriterium:** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$

$$\text{Then if : } \begin{cases} q < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converges absolutely} \\ q = 1 \Rightarrow \text{ no conclusions} \\ q > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverges} \end{cases}$$

5.1 Power Series

$$p(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

radius of convergence: The threshold δ between convergence and divergence. For the power series it is given by:

$$\delta := sup\{|x| : p(x) \text{ converges}\} = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| (i) \text{ Quotientenkriterium} \\ \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{a_n}|} (ii) \text{ Wurzelkriterium} \end{cases}$$

Limits Examples:

- $\lim_{n\to\infty} n^a q^n = 0$ mit $a \in \mathbb{Z} \quad 0 \leq q < 1$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \quad n \geq 1$

Beispiele von Reihen:

- Geometrische Reihe : $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ konvergiert für $|q| < 1$
- Harmonische Reihe : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert
- Alternierende Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^n$ konvergiert aber nicht absolut
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert
- $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ konvergiert für $s > 1$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$ konvergiert
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konvergiert, ist aber nicht absolut konvergent
- Exponentialfunktion: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergiert für all $z \in \mathbb{C}$
- Eulersche Zahl: e $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ für $z \in \mathbb{C}$ konvergiert absolut
- $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ für $z \in \mathbb{C}$ konvergiert absolut

Bekannte Ungleichungen:

- **Young'sche Ungleichung:** $2|xy| \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2 \ \epsilon > 0, xy \in \mathbb{R}$
- **Cauchy-Schwarz:** $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y|| \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- **Bernoulli Ungleichung:** $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \ \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$
- $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$
- $e^x > 1 + x$ für jedes $x > 0$

0.2 Stetigkeit

2.1 Verschiedene Definitionen
Grenzwertdefinition $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d, f : \Omega \to \mathbb{R}^n, x \mapsto f(x)$ eine Funktion. f heisst **stetig in** $x_0 \in \Omega$ falls

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ oder etwas formaler:}$$
$$\forall (x_n) \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ gilt } : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x_0)$$

Falls f für alle $x_0 \in \Omega$ stetig ist, dann ist f **stetig auf** Ω
$\epsilon - \delta$ Definitionen:

- **Punktweise stetig:**
  $\forall x_0 \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon$
- **Gleichmässig stetig:**
  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x_0 : ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon$

Der unterschied der beide definitionen ist, dass in der punktweisen Stetigkeit ist δ von x_0 und ϵ abhängig $(\delta(\epsilon, x_0))$, während in der gleichmässigen Stetigkeit das δ nur von ϵ abhängen darf $(\delta(\epsilon))$

Lipschitz Stetigkeit: f heisst Lipschitz stetig mit Lipschitzkonstante L, falls gilt:

$$\exists L \forall x, x_0 : ||f(x) - f(x_0)|| \leq L \cdot ||x - x_0||$$
f Lipschitz stetig $\Rightarrow$ f glm. stetig $\Rightarrow$ f punktweise stetig

Rechnen mit stetige Funktionen: $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $\alpha \in \mathbb{R}$ dann gilt:

- $f + g : \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x)$ ist stetig
- $fg : \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ ist stetig
- $\alpha f : \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto \alpha f(x)$ ist stetig

If $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \Omega$ dann gilt zusätzlich:

- $\frac{f}{g} : \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ ist stetig

falls $h : \Psi \to \Omega$ stetig ist ,dann:

- $f \circ h : \Psi \to \mathbb{R}, x \mapsto f(h(x))$ ist stetig

2.2 Zwischenwertsatz: Zwischenwertsatz:
sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \leq f(b)$ Dann gilt:

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \exists x \in [a, b] : f(x) = y$$

Fixpunkte: Ein punkt x_0 einer Funktion f sodass $f(x_0) = x_0$. Wir können den Fixpunkt einer Funktion finden indem wir den funktion $g(x) := f(x) - x$ definieren. Den Fixpunkt von f zu finden ist äquivalent den Wurzel von g zu finden.

$$g(x_0) = 0 \iff f(x_0) - x_0 = 0 \iff f(x_0) = x - 0$$

2.3 Konvergenz von Funktionenfolgen
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und $f_k, f : \Omega \to \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ Die Folge (f_k):

- **konvergiert punktweise** gegen f falls gilt:
  $$\forall x \in \Omega : \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$
- **konvergiert gleichmässig** gegen f, falls gilt:
  $$sup|f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$
  wobei f(x) die grenzfunktion ist. Wir setzen den Supremum nach auflösen der obigen gleichung und zeigen dass es gegen 0 konvergiert.

Seien $f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig, $k \in \mathbb{N}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$irgendeine Funktion. Es gilt:

$$f_k \xrightarrow{glm} f, (k \to \infty) \Rightarrow \text{f stetig}$$

Falls die Zielfunktion f unstetig ist, folgern wir, dass die Funktionenfolge nicht gleichmässig gegen f konvergiert.

2.4 Grenzwerte berechnen: Es gelten die folgenden Regeln:

- **Variablenwechsel:** Seien f, g Funktionen wobei f stetig in y_0 und g stetig in x_0, mit $y_0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$. Dann gilt
$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y)$$
- **Exponentenregel:** f,g: $D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ mit $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) > 0$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$ (beide Grenzwerte existieren i.e sind reelle Zahlen) dann gilt:
$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = f(x_0)^{g(x_0)}$$
$\Rightarrow f(x)^{g(x)} = e^{g(x)log(f(x))}$
$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)log(f(x))}$ (wegen stetigkeit von e^x)
- **Bernoulli-de L'Hôspital:** Seien:
  - $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig
  - $f, g : (a, c) \cup (c, d) \to \mathbb{R}$ differenzierbar (c∈(a,b))

  Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} (i) g'(x) \neq 0 (\forall x \in (a,c)\cup(c,b)) \\ (ii) f(c) = g(c) = 0 \\ (iii) \lim_{x\to c, x\neq c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(existiert) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (i) g'(x) \neq 0 (\forall x \in (a,c)\cup(c,b)) \\ (ii) \lim_{x\to c, x\neq c} \frac{f(x)}{g(x)} = A \end{cases}$$

2.5 Grenzwerte mit Potenzreihen
Potenzreihen sind stetig auf $(-\rho, \rho)$. Es gilt:

$$\forall x_0 \in (-\rho,\rho) : \lim_{x\to x_0} p(x) = p\big(\lim_{x\to x_0} x\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x\to x_0} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$$

0.3 Differentialrechnung

Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 bedeutet die Steigung der Tangente an dieser Stelle.
3.1 Differentialquotient: Der Differentialquotient einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stell $x_0 \in \Omega$ ist definiert durch:

$$f'(x_0) := \frac{d}{dx} f(x_0) := \lim_{x\to x_0, x\neq x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, wenn der oben genannte Grenzwert existiert
- $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst differenzierbar, wenn f an jeder Stell $x \in \Omega$ differenzierbar ist.

Ableitungsregeln:

- **Linearität:** $\frac{d}{dx}(\alpha f(x) + g(x)) = \alpha f'(x) + g'(x)$
- **Produktregel:** $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- **Quotientenregel:** $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
- **Exponentenregel:** $\frac{d}{dx}(c \cdot x^a) = c \cdot a \cdot x^{a-1}\ \forall a, c \in \mathbb{R}$
- **Kettenregel:** $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

f(x)	**f'(x)**	**f"(x)**
$sin(x)$	$cos(x)$	-sin(x)
$cos(x)$	$-sin(x)$	-cos(x)
$tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$	$\frac{2tan(x)}{cos^2(x)}$
$\frac{1}{tan(x)}$	$-\frac{1}{sin^2(x)}$	$\frac{2}{tan(x)sin^2(x)}$
$\frac{1}{cos(x)}$	$-\frac{tan(x)}{cos(x)}$	$\frac{tan^2(x)cos^2(x)+1}{cos^3(x)}$
$\frac{1}{sin(x)}$	$-\frac{1}{tan(x)sin(x)}$	$\frac{sin^2(x)+tan^2(x)}{tan^2(x)sin^3(x)}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$
$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$
$arctan(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$
$tan^2(x)$	$\frac{2tan(x)}{cos^2(x)}$	$\frac{4tan^2(x)cos^2(x)+2}{cos^4(x)}$
$sin^2(x)$	$2sin(x)cos(x)$	$2(cos^2(x) - sin^2(x))$
$cos^2(x)$	$-2sin(x)cos(x)$	$2(sin^2(x) - cos^2(x))$
$log(x)$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
e^x	e^x	e^x

3.3 Mittelwertsatz und Umkehrsatz:

- **Mittelwertsatz:** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar in (a,b). Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit
$$f(b) = f(a) + f'(x_0)(b - a) \iff f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
- **Umkehrsatz:** $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diff'bar mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ und seien
$$-\infty \leq c = inf_{x\in(a,b)} f(x) < sup_{x\in(a,b)} f(x) = d \leq \infty$$
Dann ist $f : (a, b) \to (c, d)$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : (c, d) \to \mathbb{R}$ ist diff'bar mit
$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}, \quad \forall x \in (a, b) \text{ bzw.}$$
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \forall y \in (c, d)$$

3.4 Taylorreihe
Jede glatte (i.e beliebig oft differenzierbare) Funktion $f \in \mathbb{C}^\infty$ kann als Potenzreihe angenähert werden.
Taylor-Polynom
Sei $f : I \to \mathbb{R} \in \mathbb{C}^\infty$ das N-te Taylor-Polynom $T_N f(x; a)$ an einer beliebigen Entwicklungsstelle $a \in I$ ist definiert als:

$$T_N f(x; a) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$
$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + ...$$

Das N-te Taylor-Polynom hat Grad $\leq$ N
Taylorreihe
Sei $f \in \mathbb{C}^\infty$ dann kann f auch ander dargestellt werden:

$$Tf(x; a) := T_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Diese Reihe ist die Taylorreihe von f an der Stelle a

Fehlerabschätzung der Taylor-Polynom Für ein $x \geq a$ gilt:

$$f(x) = T_N(x) + R_N f(x; a)$$

Dabei ist $R_N f(x; a)$ der Fehler. Dieser Fehler kann abgeschätzt werden:

$$|R_N f(x; a)| \leq \sup_{a<\xi<x} |f^{N+1}(\xi)| \frac{(x-a)^{N+1}}{(N+1)!}$$

R_N wird umso grösser, je grösser die Differenz zwischen x und a ist. Gewisse Taylorreihen konvergieren gegen die Funktion f es gilt: $\lim_{N\to\infty} R_N f(x; a) = 0$

0.4 Integralrechnung

Das Riemann-Integral: Liefert die Fläche zwischen der X-Achse und den Funktion eingeschlossene Fläche.

Die Riemann-Summe: Gegeben eine stetig Funktion $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$, sowie eine Partitionierung P in n Teile und Stützstellen ξ:

$$S(f,P,\xi) := \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{Höhe}} \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{Breite}}$$

Unter- und Obersumme Gegeben eine Paritionierung P.

- **Untersumme** $\underline{S}(f,P) := \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in I_i} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$
- **Obersumme** $\overline{S}(f,P) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in I_i} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$

Für jede Partitionierung P von $[a,b]$ gilt: $\underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P)$

Riemann-Integrierbarkeit Eine Funktion $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ wenn gilt:

$$\sup_{P_1} \underline{S}(f,P_1) = \inf_{P_2} \overline{S}(f,P_2) =: A$$

i.e wenn sich Unter- und Obersumme annähern, je feiner die Partitionierung wird. A heisst Riemann-Integral von f.

$$A := \int_a^b f(x)dx$$

Eine äquivalente Definition, welche für Beweise verwendet werde kann lautet: "f ist genau dann integrierbar, wenn gilt:"

$$\forall \epsilon > 0 \exists P : |\underline{S}(f,P) - \overline{S}(f,P)| < \epsilon$$

i.e es gibt immer eine Partitionierung P für die sich die Unter- und Obersumme beliebig annähern.

Zwei Kriterien zur Integrierbarkeit:

1. Ist f stetig in einem kompakten Intervall [a,b], so ist f über [a,b] integrierbar
2. Ist f monoton in einem kompakten Intervall [a,b], so ist f über [a,b] integrierbar

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und sei $P_{(n)}$ eine Folge von Partitionierungen in n Teilintervalle, deren Feinheit $(\max_{i \leq n}\{|I_i|\})$ gegen 0 geht $n \to \infty$. dan gilt:

$$\lim_{n\to\infty} S(f, P_(n)) = \int_a bf(x)dx$$

4.2 Stammfunktionen

Sei $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. F heisst Stammfunktion von f, wenn gilt:

$$F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$$

Wenn f integrierbar ist, heisst das nicht zwingend, dass auch eine Stammfunktion existieren muss.
Bsp:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Sei $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und F(x) ihre Stammfunktion, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Eine äquivalente Darstellung ist die folgende:
Sei $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktikon. Wir definieren F(x) wie folgt:

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

Dann ist F(x) eine Stammfunktion von f

Eigenschaften der Integral:

- **Linearität:** f,g Funktionen von [a,b] nach $\mathbb{R}$ dann gilt:
$$\int_a^b (u \cdot f(x) + v \cdot g(x))dx = u \cdot \int_a^b f(x)dx + v \cdot \int_a^b g(x)dx$$
- **Monotonie:** f,g Funktionen von [a,b] nach $\mathbb{R}$ und es gelte $f(x) \leq g(x) \forall x$ Dann gilt:
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$
- **Gebietsadditivität:** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $c \in [a,b]$ Dann gilt:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

Unbestimmtes Integral: Der Stammfunktion F(x) einer Funktion f. Zu jeder Funktion gibt es beliebig viele Stammfunktionen, welche sich um eine Konstante c unterscheiden:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

4.3 Berechnung der Integrale:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- **Polynome:**
$$\int c \cdot x^n dx = \frac{c \cdot x^{n+1}}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$$
- **Partielle Integration:**
$$\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$$
  - Gundsätzlich leiten wir Polynome ab und sich wiederholende Funktionen integrieren wir
  - Manchmal müssen wir künstlich mit 1 multiplizieren
- **Substitution:** Wir ersetzen g(x) durch u:
$$\int_a^b f(g(x))dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\frac{du}{g'(x)}$$

Partialbruchzerlegung:

Definition 4.11. *Partialbruchzerlegung*
Seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei Polynome. Wir betrachten das Integral $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$. Wir berechnen das Integral in mehreren Schritten:

1. *Prüfe den Grad von p und q. Falls $deg(p) \geq deg(q)$, dann führe eine Polynomdivision durch, so dass wir dann das äquivalente Integral $\int a(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ erhalten. Die Schwierigkeit hat sich jetzt auf den Bruch $\frac{r(x)}{q(x)}$ reduziert. Fahre deshalb damit beim nächsten Schritt weiter.*
2. *Jetzt gilt sicher $deg(p) < deg(q)$. Berechne die Nullstellen von $q(x)$. Dabei handelt es sich oft um kubische Gleichungen. Dann muss eine Nullstelle erraten werden. Die Restlichen können dann mit Polynomdivision herausgefunden werden.*
3. *Für jede Nullstelle erstellen wir einen Partialbruch mit folgendem Ansatz:*
   a) *Einfache, reelle Nullstelle*
   $x_1 \to \frac{A}{x-x_1}$
   b) *r-fache, reelle Nullstelle*
   $x_1 \to \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + ... + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$
   c) *Einfache, komplexe Nullstelle*
   $x^2 + px + q \to \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$
   d) *r-fache, komplexe Nullstelle*
   $x^2 + px + q \to \frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2} + ... + \frac{A_rx+B_r}{(x^2+px+q)^r}$

   Wir können jetzt alle Partialbrüche aufsummieren und erhalten unseren originalen Bruch.

4. *Als letztes müssen wir nur noch die Parameter $A_1...A_n$ (bzw. auch $B_1...B_n$) bestimmen. Dies machen wir mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs. Am besten veranschaulichen wir das anhand eines Beispiels:*

Beispiel. Wir zerlegen den Bruch $\frac{x+1}{x^2-3x+2}$ in die Partialbrüche $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ Dazu multiplizieren wir auf beiden Seiten mit dem gesamten Nenner $x^2 - 3x + 2$.

$$\begin{aligned} & x+1 = A(x-2) + B(x-1) \\ \iff & x+1 = Ax - 2A + Bx - B \\ \iff & x+1 = x(A+B) - 2A - B \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $A + B = 1$ und $-2A - B = 1$ sein muss. Wenn wir dieses Gleichungssystem auflösen, erhalten wir

$$A = -2 \text{ und } B = 3$$
$$\implies \frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

4.4 Uneigentliche Integrale: Ein Integral bei den eine oder beide Grenzen nicht im Definitionsbereich von f liegen. Ein uneigentliches Integral bezeichnet man als konvergent, wenn es existiert. Ansonsten bezeichnet man es als divergent.

Konvergenzkriterien:

- $\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx konvergiert \iff s > 1$
- **Vergleichskriterium:** $f,g : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \leq g(x) \forall x \in (a,b)$ es gilt:
$$\int_a^b g(x)dx \text{ konvergiert } \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ konvergent}$$
$$\int_a^b f(x)dx \text{ divergent } \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \text{ divergent}$$

- **Leibniz-Kriterium:**

1. Sei $f(x)$ auf $[a, \infty)$ stetig, monoton fallend und sei $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, dann konvergieren die Integrale $\int_a^\infty f(x)\sin(x)dx$ und $\int_a^\infty f(x)\cos(x)dx$.
2. Sei $f(x)$ auf $(a, b]$ stetig. Ist die Funktion $f(x)(x-a)^2$ monoton wachsend und gilt
$$\lim_{x\to a^+} f(x)(x-a)^2 = 0$$
dann konvergieren die Integrale
$$\int_a^b f(x)\sin(\frac{1}{x-a})dx$$
und
$$\int_a^b f(x)\cos(\frac{1}{x-a})dx$$

Absolute Konvergenz: $\int_a^b f(x)dx$ konvergiert absolut, wenn $\int_a^b |f(x)|dx$ konvergiert. Aus absoluter Konvergenz folgt normale Konvergenz.

0.5 Extras

Trigonometrische Funktionen:

- $e^{iz} = cos(z) + i \cdot sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- cos(z) = cos(-z) und sin(-z) = -sin(z) $\forall z \in \mathbb{C}$
- $sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad cos(z)\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
- sin(z + w) = sin(z)cos(w) + cos(z)sin(w)
  cos(z+w) = cos(z)cos(w) - sin(z)sin(w)
- $cos(z)^2 + sin(z)^2 = 1 \forall z \in \mathbb{C}$
- sin(2z) = 2sin(z)cos(z)
  $cos(2z) = cos(z)^2 - sin(z)^2$
- $sin(x) = -cos(x + \frac{\pi}{2})$
- $cos(x) = sin(x + \frac{\pi}{2})$
- $tan(x) = tan(x + n \cdot \pi)$
- $sin(-x) = -sin(x)$
- $cos(-x) = cos(x)$
- $tan(-x) = -tan(x)$
- $cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$
- $cohs^2(x) + sinh^2(x) = cosh(2x)$

Trigonometrische Werte:

α	0/360	15	30	45	60	75	90	105
x	$0/2\pi$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$
$sin(x)$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$tan(x)$	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$\pm\infty$	

α	120	135	150	165	180	195	210	225
x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$
$sin(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$cos(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	-1	$\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$tan(x)$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		π		$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$

α	240	255	270	285	300	315	330	345
x	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$
$sin(x)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	-1	$\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$cos(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$tan(x)$	$\sqrt{3}$		$\pm\infty$		$-\sqrt{3}$	-1		

Endliche Reihen:

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

0.6 Multiple Choice

Supremum und Infimum auf $\mathbb{R}$:

a) $inf(]a,b]) = a$ für alle $a < b$ in $\mathbb{R}$
$\to$ JA

b) Wenn $A \subset B$ und B ein Maximum besitzt, dann besitzt auch A ein Maximum $\to$ NEIN

c) $max\{\frac{1}{k+1}|k \in \mathbb{N}\} = 1(\mathbb{N} = 0, 1, 2, ...) \to JA$

d) Sei S eine nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R}$ ihr Infimum Dann:

- für jedes $\epsilon > 0$ existiert eine untere Schranke b von S, so dass $a < b < a + \epsilon$
  a ist die Grösste der unteren Schranken für jede untere Schranke b muss immer $a \geq b$ sein.
- $S\backslash\{a\}$ besitzt ein Minimum
  z.B $S = (0, 1), a = 0, S\backslash\{0\} = S$ besitzt kein Minimum
- a ist das Supremum der unteren Schranken

Folgenkonvergenz:

a) Welche Aussagen sind richtig?

- Eine divergente Folge ist nicht beschränkt
  z.b $\{(-1)^n\}$ ist beschränkt und divergent
- Jede beschränkte Folge ist konvergent
  z.b $\{(-1)^n\}$ ist beschränkt und divergent
- Jede konvergente Folge ist beschränkt
- Eine nicht beschränkte Folge divergiert

b) Seien $(a_n), (b_n)$ und (c_n) Folgen in $\mathbb{R}$ mit $|c_n| = |a_n| + |b_n|$ Dann:

- falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ existiert, existieren $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ und es gilt:
$$|\lim_{n\to\infty} a_n| + |\lim_{n\to\infty} b_n| = |\lim_{n\to\infty} c_n|$$
- falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ existiert, existieren $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ und es gilt:
$$|\lim_{n\to\infty} c_n| = |\lim_{n\to\infty} c_n| - |\lim_{n\to\infty} b_n|$$
- falls (a_n) und (b_n) beschränkt sind, muss (c_n) beschränkt sein
- falls (c_n) konvergiert, konvergiert wenigstens eine der Folgen $(a_n)und(b_n)$

c) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ Dann:

- falls $\epsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ existieren sodass
$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq 1$$
gilt, dann konvergiert (a_n)
- falls (a_n) konvergiert, ist die Folge $b_n = a_{n+1} + a_n$ konvergent
- falls die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ nach 0 konvergiert, ist (a_n) konvergent
- falls $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $a_n \leq a \quad \forall n \geq 1$, und $a_{n+1} \geq a_n \forall n \geq 1$, dann ist (a_n) konvergent

Folgenkonvergenz 2:

a)
$$a_n = \begin{cases} 3 + \sqrt{\frac{2k}{3k+1}} & n = 3k+1 \text{ für } k \geq 0 \\ \frac{3k^2+5}{k^2+2} & n = 3k+2 \text{ für } k \geq 0 \\ \frac{(-1)^k}{k} & n = 3k+3 \text{ für } k \geq 0 \end{cases}$$

Welche Aussagen gelten:

- $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert
  (a_{3k+1}) konvergiert gegen $3+\sqrt{\frac{2}{3}}$, (a_{3k+2}) gegen 3 und die Teilfolge (a_{3k}) gegen 0. Es folgt (a_n) nicht konvergiert.
- $\lim_{n\to\infty} inf a_n$ existiert
  Die Folge (a_n) hat untere Schranke -1. Also existiert der Limes inferior von (a_n)

- $\lim_{n\to\infty} sup a_n = 3 + \sqrt{\frac{2}{3}}$
  $\{3+\sqrt{\frac{2}{3}}, 3, 0\}$ ist die Menge der Häufungspunkte der Folge (a_n). Der grösste Häufungspunkt $3+\sqrt{\frac{2}{3}}$ ist der Limes superior

b) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Falls $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \alpha$ dann folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$
- Sei (a_n) eine konvergente Folge und σ eine Permutation von $\{1,2,3,...\}$ (d.h eine Bijektion der Menge $\{1,2,3,...\}$ auf sich selbst). Dann konvergiert auch die Folge $(b_n), b_n = a_{\sigma(n)}, \forall n \geq 1$
  Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ der Grenzwert der Folge (a_n). es gilt:
  $$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon : |\alpha - a_n| \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$$
  Wir definieren $m_\epsilon = max(\{k : \sigma(k) \leq n_\epsilon\})$. Es ist $m_\epsilon < \infty$, weil $n_\epsilon < \infty$ und σ eine Bijektion ist. Dann gilt $|\alpha - b_n| = |\alpha - a_{\sigma(n)}| \leq \epsilon \quad \forall n \geq m_\epsilon$. somit folgt $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$

c) Sei (x_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Dann

- konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$
  z.B $x_n = \frac{1}{n}$ ist Cauchy(weil konvergent), aber $\sum_{n=1}^{\infty}$ ist divergent
- konvergiert (x_n) gegen 0
  Jede Cauchy-Folge ist konvergent, nicht notwendigerweise mit Grenzwert 0
- ist x_n beschränkt
  Jede Cauchy-Folge ist konvergent, also beschränkt

Folgenkonvergenz 3:

a) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe.

- Falls $\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1$, so dass $\sum_{k=n}^{n+100} |a_k| < \epsilon \quad \forall n \geq N$ dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.
- Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, so folgt: $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1$ so dass $\sum_{k=n}^{n+100} |a_k| < \epsilon \quad \forall n \geq N$
- Falls $\sum_{k=1}^{\infty} sin a_k$ absolut konvergiert, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

b) Sei $\sum a_k$ eine reelle Reihe mit $\forall k \geq 1 : a_k \leq 0$ Die Reihe konvergiert...

- genau dann, wenn die Folge der Partialsummen nach unten beschränkt ist
- genau dann, wenn (a_k) eine monoton wachsende Nullfolge ist
- falls $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq n_0 : |a_k| < \epsilon$
  Hier ist die Folge der Partialsummen monoton fallend. Ist sie zusätzlich noch nach unten beschränkt, dann ist sie konvergent

c) Sei $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ eine Abbildung, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $b_n = a_{\phi(n)}$

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und ϕ surjektiv $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent
  Gegenbeispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + (-1) + \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) + ...$ konvergent aber $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + 1 + (-1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) + ...$ nicht konvergent
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und ϕ injektiv $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent
  Gegenbeispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + (-1) + \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) + ...$ konvergent aber $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$ nicht konvergent
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent absolut und ϕ surjektiv $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent
  Gegenbeispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} ...$ absolut konvergent aber $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + ...$ nicht konvergent
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent absolut und ϕ injektiv $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent
  Eine Teilfolge oder eine Umordnung der absolut konvergent Reihe ist auch absolut konvergent

Folgenkonvergenz:

a) Wir nehmen an, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergiert und $\alpha > 0$ Definiere: $a_n = c_n \alpha^n, b_n = n c_n \alpha^{n-1}$

- $\lim_{n\to+\infty} sup |a_n|^{\frac{1}{n}} > \lim_{n\to+\infty} sup |b_n|^{\frac{1}{n}}$
- $\lim_{n\to+\infty} sup |a_n|^{\frac{1}{n}} < \lim_{n\to+\infty} sup |b_n|^{\frac{1}{n}}$
- $\lim_{n\to+\infty} sup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} sup |b_n|^{\frac{1}{n}}$
  $\lim_{n\to\infty} sup |b_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{n|c_n|}\alpha^{1-\frac{1}{n}} = \alpha \lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{n|c_n|}\alpha^{-\frac{1}{n}} = \alpha \lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to+\infty} sup |a_n|^{\frac{1}{n}}$

b) Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert und dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert.

- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$
  - konvergiert nicht unbedingt
  - konvergiert immer, aber konvergiert nicht umbedingt absolut
  - konvergiert immer absolut
- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$
  - konvergiert nicht unbedingt
  - konvergiert immer, aber konvergiert nicht umbedingt absolut
  - konvergiert immer absolut

  (a_k) und (b_k) sind beschränkt. Dann $\exists C > 0, |a_k| + |b_k| < C$ und
  $$|a_k|^2 < C|a_k|, \; |a_k b_k| < C|a_k|$$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$

- konvergiert nicht unbedingt
  - $a_k = b_k = 1 \to \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ divergiert

- $a_k = b_k = \frac{1}{n} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergiert absolut
- $a_k = \frac{1}{n}, b_k = (-1)^k \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergiert aber nicht absolut.

- konvergiert immer, aber konvergiert nicht umbedingt absolut
- konvergiert immer absolut

Stetigkeit:

a) Die Aufrundungsfunktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lceil x \rceil := min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq x\}$ ist im Punkt x=2

- stetig
- unstetig
  $\epsilon = \frac{1}{2}$ Dann $\nexists \delta > 0$ mit $|\lceil x \rceil - 2| < \frac{1}{2} \forall x \in (2-\delta, 2+\delta)$

b) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Bedingungen stellt sicher, dass $\lim_{x\to 2} f(x) = \pi$, dass für jede Folge (x_n), die Grenzwert 2 hat, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pi$ gilt

- $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$
  Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist an der Stelle 2 beschränkt und stetig, also existiert $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x}$ genau dann, wenn $\lim_{x\to 2} f(x)$ existiert, und muss
  $$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{2}$$
- Für jedes $\epsilon > 0$ existiert $\overline{n} \in \mathbb{N}$, so dass $|f(2-\frac{1}{n}) - \pi| < \epsilon$ für jedes $n \geq \overline{n}$
- $\lim_{n\to\infty} f(2-\frac{1}{n}) = \pi$
  Das meint nur, dass für die Folge $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pi$ gilt; die Definition von Grenzwert mit Folgen erfordert, dass für jede Folge (x_n) die Grenzwert 2 hat, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pi$ gilt.

Stetigkeit 2:

a) a,b reelle zahlen mit $a < b$

- Sei $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gelte $f(a) < f(b)$. Dann liegen alle Funktionswerte zwischen f(a) und f(b)
  Gegenbeispiel ist sin auf das Intervall $[0, 3\pi]$
- Sei $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f in [a,b] genau eine Nullstelle
  Gegenbeispiel ist die konstante Funktion $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$
- Sei $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann besitzt f in (a,b) genau eine Nullstelle
  Der Zwischenwertsatz garantiert die Existenz einer Nullstelle und aufgrund der strengen Monotonie kann es höchstens eine geben.

b) Sei $f: [0,1] \cup [2,3] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig monoton steigende Funktion. Dann nimmt f alle Werte zwischen f(0) und f(3) an.
$\Rightarrow FALSCH$
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x$. Sie ist stetig und monoton steigend, aber $f([0,1] \cup [2,3])$ nimmt nicht alle Werte zwischen f(0) und f(3) an.

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f Maximum und Minimum an.
$\Rightarrow FALSCH$
Gegenbeispiel: $tanh(x), x \geq 0$ dann erfüllt tanh(x) die Bedingung, aber der Wert 1 wird nie angenommen

Stetigkeit 3:

a) f_1, f_2 stetige Funktionen und g_1, g_2 unstetige Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind:

- $f_1 + f_2$ ist stetig
- $f_1 + g_1$ ist stetig
  Gegenbeispiel: $f_1 = 0 \Rightarrow f_1 + g_1 = g_1$ unstetig
- $g_1 + g_2$ ist unstetig
  Gegenbeispiel: $g_2 = -g_1 \Rightarrow g_1 + g_2 = 0$ stetig
- $f_2 + g_2$ ist unstetig
  O.B.d.A sei g_2 and der Stelle x_0 unstetig, d.h $\lim_{x\to x_0} g_2(x) \neq g_2(x_0)$ Dann gilt, dass $\lim_{x\to x_0} (f_2 + g_2)(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) + \lim_{x\to x_0} g_2(x) = f_2(x_0) + \lim_{x\to x_0} g_2(x) \neq f_2(x_0) + g_2(x_0)$ Somit hat die Funktion $f_2 + g_2$ die gleichen Unstetigkeitsstellen wie die Funktion g_2
- $f_1 + f_2 + g_1 + g_2$ ist stetig
  Gegenbeispiel: $f_1 = -f_2, g_1(x) = sgn(x), g_2(x) = sgn(|x|)$
  Dann ist $f_1 + f_2 + g_1 + g_2 = sgn(x) + sgn(|x|) =$
  $$\begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$
  für x = 0 unstetig

b) $f_n: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x^{\frac{1}{2}} + n^{-1})^2$

- $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
  Es gilt $\lim_{n\to\infty} (x^{\frac{1}{2}} + n^{-1})^2 = (\lim_{n\to\infty} (x^{\frac{1}{2}}) + n^{-1}))^2 = (x^{\frac{1}{2}})^2 = x$
- Die Funktionenfolge konvergiert gleichmässig
  Aus $|f_n(x) - x| = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{n} + \frac{1}{n^2}$ folgt, dass für $x > n^2$ auch $|f_n(x) - x| > 2$ ist. Also kann (f_n) nicht gleichmässig konvergieren.
- Für alle $M > 0$ gilt, dass die Funktionenfolge $f_n|_{[0,M]} : [0, M] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.
  Es gilt $|f_n(x) - x| = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2M^{\frac{1}{2}}}{n} + \frac{1}{n^2}$ für alle $x \in [0, M]$ Es folgt, dass $(f_m|_{[0,M]})$ gleichmässig konvergiert.

Stetig Differenzierbarkeit:

a) $x > 0, f(x) := \lim_{k\to\infty} inf(min\{x, x^{-1}\})^k$

- f ist stetig und differenzierbar
- f ist differenzierbar, aber nicht stetig
- f ist stetig, aber nicht differenzierbar
- f ist nicht stetig und nicht differenzierbar
  f(1) = 1 und f(x) = 0, wenn $x \neq 1$, eine nicht stetige Funktion ist nicht differenzierbar

b) Falls f differenzierbar ist, so ist $x \mapsto \frac{f(x)}{1+x^2}$ auch diff'bar
$\Rightarrow WAHR$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ ist diff'bar und die komposition von diff'bare funktionen ist wiederum diff'bar

c) Sei
$$f(x) = \begin{cases} xsin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
dann ist f im Nullpunkt x

- f ist stetig und differenzierbar
- f ist differenzierbar, aber nicht stetig
- f ist stetig, aber nicht differenzierbar
- f ist nicht stetig und nicht differenzierbar
  Wir berechnen:
  $$\lim_{x\to 0} inf \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} inf\ sin(\frac{1}{x}) = -1$$
  $$\lim_{x\to 0} sup \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} sup\ sin(\frac{1}{x}) = 1$$
  und der letzte Grenzwerte existiert nicht da die Funktion oszilliert. Also ist die Funktion im Punkt 0 nicht diff'bar. Nun die Stetigkeit; dafür sei ϵ und $|x - 0| < \delta$ wobei wir $\delta = \epsilon$ wählen. dann ist:
  $$|xsin(\frac{1}{x})| \leq |x| \leq \delta = \epsilon$$
  also ist die Funktion stetig im Punkt 0

Differenzierbarkeit:

a) $a < b$ reelle Zahlen, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt funktionen mit $f(a) < f(b)$:

- Falls es für jedes $c \in [f(a), f(b)]$, ein $x \in [a,b]$ gibt mit f(x) = c, so folgt dass f stetig ist
  a = -1, b= 1,

  $$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ -x-1 & x \in [-1,0[\end{cases}$$

  dann ist f unstetig
- Falls $g \circ f$ und g diff'bar sind, so folgt dass f diff'bar ist
  $g(x) = 0, x \in [-1,1]$ Dann $g \circ f$ und g sind diff'bar
- Falls f diff'bar ist, gibt es $x_0 \in [a,b]$ so dass $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

b) $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Falls für jede in $]a,b[$ konvergierende Folge (x_n) die $(f(x_n))$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$ gilt, dann ist f stetig in $]a,b[$
$\Rightarrow WAHR$

(b) Falls $|f|$ stetig ist, so ist auch f stetig $\Rightarrow FALSCH$

(c) Falls f^2, f^3 in $]a,b[$ diff'bar sind und $f(x) \neq 0 \forall x \in]a,b[$ so folgt dass f in $]a,b[$ diff'bar ist
$\Rightarrow WAHR$
falls $f(x) \neq 0$, so $f^2 > 0$. Dann $f = \frac{f^3}{f^2}$ diff'bar

(d) Falls f in $]a,b[$ zweimal diff'bar ist und $f''(x) > 0 \forall x \in]a,b[$ dann ist f streng konvex
$\Rightarrow WAHR$

(e) Falls f in $x_0 \in]a,b[$ diff'bar und $f'(x_0) = 0$, dann besitzt f ein lokales extremum in x_0
$\Rightarrow FALSCH$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0,1] \\ -x^2 & x \in [-1,0[\end{cases}$$

dann ist f diff'bar, besitzt aber kein lokales Extremum in x_0

Integrierbarkeit:

a) f ist diff'bar $\Rightarrow$ f ist stetig $\Rightarrow$ f ist integrierbar

b) Welche der Funktionen sind für $x > 0$ monoton wachsend?

- $x \mapsto \int_0^x t\ dt$
- $x \mapsto \int_0^x t^2\ dt$
- $x \mapsto \int_0^x sin(t)\ dt$
- $x \mapsto \int_0^x sin^2(t)\ dt$

Nach dem Hauptsatz ist die Ableitung der Funktionen jeweils die Integrandenfunktion. Diese sind bis auf sin(t) alle ≥ 0. Ist die Ableitung einer Funktion nicht negativ, ist die Funktion monoton wachsend.

c) Welche der Implikationsketten für eine Funktion f sind richtig?

- f ist beschränkt und stetig auf $[0,1] \Rightarrow g(x) := f(x^2)$ ist integrierbar auf $[0,1]$
- g ist integrierbar und stetig auf $[0,1] \Rightarrow f(x) := g(\sqrt{x})$ ist integrierbar und stetig auf $[0,1]$
- f ist beschränkt und stetig auf $[0,1] \Rightarrow g(x) := exp(f(x))$ ist integrierbar auf $[0,1]$

Integral Rechnung:

a) Für $f \in C^0(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$ mit $-\infty < a < b + \infty$ lautet die Substitutionsregel:

- $\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(x))g'(x)dx = \int_a^b f(t)dt$
- $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$
- $\int_a^b f(\frac{x^2}{2})xdx = \int_{\frac{a^2}{2}}^{\frac{b^2}{2}} f(t)dt$
  Man nimmt $g(x) = \frac{x^2}{2}$ mit $g'(x) = x$
- $\int_a^b f(\frac{x^2}{2})dx = \int_{a^2}^{b^2} t\ f(t)\ dt$

b) Die Ableitung nach x von $g(x) = \int_{x^2}^1 sin^2(t)cos^2(t)dt$ ist

- $g'(x) = \int_{2x}^0 sin^2(t)cos^2(t)\ dt$
- $g'(x) = -sin^2(x^2)cos^2(x^2)$
- $g'(x) = -2xsin^2(x^2)cos^2(x^2)$
  F(t) eine Stammfunktikon von $sin^2(t)cos^2(t)$ d.h $F'(t) = sin^2(t)cos^2(t)$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

  $$g(x) = \int_{x^2}^1 sin^2(t)cos^2(t)\ dt = F(1) - F(x^2)$$

  mit der Kettenregel folgt:

  $$g'(x) = -F'(x^2)2x = -2xsin^2(x^2)cos^2(x^2)$$

c) p,q≥ 0, $I(p,q) := \int_0^1 x^p(1-x)^q\ dx$ I(p,q) ist gegeben durch:

- $\frac{p!}{(p+q+1)!}$
- $\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$
  Partiellen Integration verwenden.
- $\frac{p!q!}{(p+q)!}$
- $\frac{1}{(p+q+1)}$
- $\frac{pq}{p+q+1}$

Uneigentliche Integral:

a) Eine Nullfolge ist eine Folge, die gegen 0 konvergiert. Sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\ dx$ existiere:

- Die Folge $(f(n))_n$ ist eine Nullfolge
  Gegenbeispiel: es existiert $\int_1^\infty f(x)\ dx$für f gegeben durch

  $$f(x) = \begin{cases} 1 & n \leq x \leq n + 2^{-n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

  aber $(f(n) = 1)_n$ ist keine Nullfolge
- Falls die Folge $(f(n))_n$ monoton fällt, ist sie eine Nullfolge
- Falls die Folge $(f(n))_n$ monoton fällt, konvergiert $\sum_{n=1}^\infty f(n)$
- Alles sind falsch