6.1 Reihen reellen Zahlen

(a) $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right| = 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0]$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n e^{2nx} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (2e^{2x})^n \rightarrow$ Die geometrische Reihe konvergiert für $|q| < 1$
$\Rightarrow 2e^{2x} < 1$
$\Rightarrow e^{2x} < \frac{1}{2}$
$\Rightarrow 2x < ln\left(\frac{1}{2}\right)$
$\Rightarrow x < \frac{1}{2} ln\left(\frac{1}{2}\right) = ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow$ Die Reihe konvergiert für $x \in (-\infty, ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right))$

(c) Wir benutzen den WK um den konvergenz radius zu berechnen.
$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \left|\frac{x^n}{(1-x)^{2n}}\right|^{\frac{1}{n}} = \frac{|x|}{|(1-x)^2|} = \frac{|x|}{(1-x)^2} = \frac{|x|}{(x^2-2x+1)} < 1$
$\Rightarrow x < x^2 - 2x + 1 \rightarrow 0 < x^2 - 3x + 1 \rightarrow x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
$\Rightarrow$ für $x \in (-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty)$ konvergiert die Reihe

6.2 MC Fragen

(a) unstetig, wenn man den umgebung von 2 betrachtet gibt es ein sprung da $2 < x < 3$ zu 3 aufgerundet wird

(b) erste und zweite bedingung

6.3 Stetigkeit I (Please Correct) $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$ finde ein ρ für jedes ϵ sodass $|x-y| < \rho \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$:

$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{y^2+4}\right| = \frac{|y^2+4-x^2-4|}{|(x^2+4)(y^2+4)|} = \frac{|y^2-x^2|}{|(x^2+4)(y^2+4)|} = \frac{|x+y||x-y|}{|(x^2+4)(y^2+4)|}$
$\leq \frac{|x+y|}{|(x^2+4)(y^2+4)|}\rho = \frac{|x-y+y+y|}{|(x^2+4)(y^2+4)|}\rho \leq \frac{|x-y|+|2y|}{|(x^2+4)(y^2+4)|}\rho \leq \frac{(\rho+|2y|)}{|(x^2+4)(y^2+4)|}\rho \leq (\rho + |2y|)\rho$
$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < (\rho + 2|y|)\rho$
$\Rightarrow \rho^2 - 2|y|\rho = \epsilon$
$\Rightarrow \rho^2 - 2|y|\rho - \epsilon = 0$
$\Rightarrow \rho = \frac{2|y|\pm\sqrt{4y^2+4\epsilon}}{2} = |y|\sqrt{y^2+\epsilon}$

6.4 Zwischenwertsatz

(a) Wir betrachten eine zweite stetige funktion g(x) = f(x)-x mit g(0) = 0 und g(1) = f(1)-1
$\Rightarrow g(0) \geq 0$ und $g(1) \leq 0$
$\Rightarrow$ Aus dem Zwischenwertsatz folgt dass es ein $x \in [0, 1]$ mit $g(x) = 0$
$\Rightarrow g(x) = f(x) - x = 0 \rightarrow f(x) = x$
$\Rightarrow$ f hat ein Fixpunkt

(b) Wir betrachten eine zweite stetige funktion $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$
$\Rightarrow g(0) = f(0) - f(0 + \frac{1}{n}) = -f(\frac{1}{n})$
$\Rightarrow g(\frac{n-1}{n}) = f(\frac{n-1}{n}) - f(\frac{n-1}{n}) + f(\frac{1}{n}) = f(\frac{n-1}{n}) - f(\frac{n}{n}) = f(\frac{n-1}{n})$