Analysis I
Summary

April 7, 2020

Chapter 1

Reelle Zahlen,Euklidische Raume, Komplexe Zahlen

1.1 Der Körper der reellen Zahlen

Menge der naturlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Menge der rationalen Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

Satz 1.1.1 Lindemann:
Es gibt keine Gleichung der Form $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ mit $a_i \in \mathbb{Q}$, so dass x = π eine Lösung hat

Satz 1.1.2 $\mathbb{R}$ ist ein kommutativer,angeordneter Körper, der ordnungsvollständig ist. Es gilt:

1. Axiome der Addition
   - A1 Assoziativität x+(y+z) = (x+y) + z $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$
   - A2 Neutrales Element x+0 = x $\forall x, z \in \mathbb{R}$
   - A3 Inverses Element $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$ (eindeutig den. -x)
   - A4 Kommutativität x+z = z+x $\forall x, z \in \mathbb{R}$
2. Axiome der Multiplikation
   - M1 Assoziativität $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
   - M2 Neutrales Element $x \cdot 1 = x \forall x \in \mathbb{R}$
   - M3 Inverses Element $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$ (eindeutig den. x^{-1})
   - M4 Kommutativität $x \cdot z = z \cdot x \forall x, z \in \mathbb{R}$
3. Distributivität $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
4. Ordnungsaxiome
   - O1 Reflexivität $x \leq x \forall x \in \mathbb{R}$
   - O2 Transitivität $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
   - O3 Antisymmetrie $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$
   - O4 Total $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$
5. Kompatibilität
   - K1 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
   - K2 $\forall x \geq 0, \forall y \geq 0 : x \cdot y \geq 0$
6. Ordnungsvollständigkeit (Was R von Q unterscheidet) Seien A,B Teilmengen von R so dass:
   - $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$
   - $\forall a \in A$ und $\forall b \in B$ gilt: $a \leq b$

   Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$, so dass $\forall a \in A : a \leq c$ und $\forall b \in B : c \leq b$

Korollar 1.17 (Archimedisches Prinzip) Sei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq n \cdot x$.

Satz 1.1.8 Für jedes $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$ hat di Gleichung $x^2 = t$ eine Lösung in $\mathbb{R}$

Definition 1.1.9 seien $x, y \in \mathbb{R}$

1. $$max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases}$$

2. $$min\{x, y\} = \begin{cases} y & \text{falls } y \leq x \\ x & \text{falls } x \leq y \end{cases}$$

3. Der Absolutbetrag einer Zahl $x \in \mathbb{R} : |x| = max\{x, -x\}$

Satz 1.1.10 Für den Absolutbetrag gilt:

1. $|x| \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $|xy| = |x| \cdot |y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
3. $|x + y| \leq |x| + |y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
4. $|x + y| \geq ||x| - |y|| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Satz 1.1.11 (Young'sche Ungleichung) $\forall \epsilon > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:
$2|xy| \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2$.

Intervalle

1. für $a \leq b$ in $\mathbb{R}$
   - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
   - $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
   - $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
   - $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
2. für $a \in \mathbb{R}$
   - $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
   - $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
   - $] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : a \geq x\}$
   - $] - \infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : a > x\}$
3. $] - \infty, \infty[= \mathbb{R}$

Definition 1.1.12 Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

1. $c \in \mathbb{R}$ ist eine **obere Schranke** von A falls $\forall a \in A : a \leq c$. Die Menge A heisst nach oben beschränkt falls es eine obere Schranke von A gibt.
2. $c \in \mathbb{R}$ ist eine **untere Schranke** von A falls $\forall a \in A : c \leq a$. Die Menge A heisst nach unten beschränkt, falls es eine untere Schranke von A gibt
3. Ein Element $\in \mathbb{R}$ heisst ein **Maximum** von A falls $m \in A$ und m eine obere schranke von A ist.
4. Ein Element $m \in \mathbb{R}$ heisst ein **Minimum** von A falls $m \in A$ und m eine untere Schranke von A ist

Satz 1.1.15 Sei $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

1. Sei A nach oben beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere Schranke von A: c:=supA genannt das **Supremum** von A
2. Sei A nach unten beschränkt. Dann gibt es eine grösste untere Schranke von A: d:=infA genannt das **Infimum** von A

Korollar 1.1.16 Seien $A \subset B \subset \mathbb{R}$ Teilmengen von $\mathbb{R}$

- Falls B nach oben beschränkt ist, folgt $supA \leq supB$
- Falls B nach unten beschränkt ist, folgt $infB \leq infA$

Konvention: Falls A nicht nach oben beschränkt (bzw nicht nach unten beschränkt) definieren wir supA = ∞ (bzw infA = -∞)

Definition 1.1.18 Kardinalität

1. Zwei Mengen X,Y heissen **gleichmachtig**, falls es eine Bijektion $f : X \to Y$ gibt.
2. Eine Menge X ist **endlich**, falls entweder X=$\emptyset$ oder $\exists n \in \mathbb{N}$, sodass X und $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ gleichmächtig sind. Im ersten Fall ist die **Kardinalitat** von X, cardX = 0 und im zweiten Fall ist cardX = n.
3. Eine Menge X ist **abzahlbar**, falls sie endlich oder gleichmächtig wie $\mathbb{N}$ ist.

Satz 1.1.20 (Cantor) $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

1.2 Der Euklidische Raum

Das Skalarprodukt Das SP zweier Vektoren x,y $\in \mathbb{R}^n$ ist durch $\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ definiert. Es gilt:

1. Symmetrie $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. Bilinear $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle = \alpha_1 \langle x_1, y\rangle + \alpha_2 \langle x_2, y\rangle \; \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n$
3. Positiv Definit $\langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \geq 0$

Norm Die Norm des Vektors x ist $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Satz 1.2.1 (Cauchy-Schwarz) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Satz 1.2.2 Für die Norm gilt:

1. $\|x\| \geq 0$ mit Gleichheit genau dann wenn x = 0
2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Kreuzprodukt Das KP zwischen zwei Vektoren a,b $\in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch (a,b) $\mapsto a \times b$. a,b und $a \times b$ bilden ein Rechtssystem. $\|a \times b\|$ = Flächeninhalt des von a,b aufgespannten Parallelogramms. Es gilt:

1. Distributivität $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$
2. Antisymmetrie $a \times b = -b \times a$
3. Jacobi-Identität $a \times (b \times c) + c \times (a \times b) + b \times (c \times a) = 0$

Chapter 2

Folgen und Reihen

2.1 Grenzwert einer Folge

Folge: Eine Folge (reeller Zahlen) ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$
Wir Schreiben a_n statt a(n) und bezeichnen eine Folge mit $(a_n)_{n\geq 1}$

Lemma 2.1.3 Sei (a_n) eine Folge. Dann gibt es höchstens eine reelle Zahl $l \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft: $\forall \epsilon > 0$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin (l-\epsilon, l+\epsilon)\}$ endlich

Konvergent: Eine Folge (a_n) heisst konvergent, falls es $l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \notin (l-\epsilon, l+\epsilon)\}$ endlich ist. Jede Konvergente Folge ist beschränkt

Grenzwert/Limes einer Folge: Nach L2.1.3 ist l eindeutig bestimmt und wird mit $l := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Lemma 2.1.6 Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. (a_n) konvergiert gegen $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
2. $\forall \epsilon > 0 \exists \quad N \geq 1$, so dass $|a_n - l| < \epsilon \quad \forall n \geq N$

Satz 2.1.8 Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n,\ b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ dann gilt:

1. $(a_n + b_n)$ ist konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
2. $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. Nehmen wir zudem an, dass $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $b \neq 0$ Dann ist $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$.
4. Falls es ein $K \geq 1$ gibt mit $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq K$ dann folgt $a \leq b$

2.2 Der Satz von Weierstrass und Anwendungen

Monotonie

1. (a_n) ist monoton wachsend falls: $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$
2. (a_n) ist monoton fallend falls: $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq 1$

Satz von Weierstrass Eine wichtige Anwendung dieser Satzes ist, wie man mit jeder beschränkten Folge (a_n) zwei monotone Folgen (b_n) und c_n definieren kann, welche dann einen Grenzwert besitzen

- Sei (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert (a_n) mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = sup\{a_n : n \geq 1\}$
- Sei (a_n) monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert (a_n) mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = inf\{a_n : n \geq 1\}$

Limits Examples

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^a q^n = 0$ mit $a \in \mathbb{Z} \quad 0 \leq q < 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \quad n \geq 1$

Bernoulli Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$

2.3 Limes superior und Limes inferior

Limes Inferior/Limes Superior (a_n) ein beschränkter Folge. Sei für jedes $n \geq 1$:
$b_n = inf\{a_k : k \geq n\}$ und $c_n = sup\{a_k : k \geq n\}$
Aus Korollar 1.1.16 folgt: $b_n \leq b_{n+1} \quad c_{n+1} \leq c_n \quad \forall n \geq 1$ und beide Folgen sind beschränkt. Nach Weierstrass sind beide Folgen konvergent und wir definieren:
$\lim\limits_{n\to\infty} inf\ a_n := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (Limes inferior)
$\lim\limits_{n\to\infty} sup\ a_n := \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ (Limes Superior)
Aus $b_n \leq c_n$ folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} inf\ a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} sup\ a_n$

2.4 Das Cauchy Kriterium:

Bestimmen ob ein Folge konvergiert ohne sein Grenzwert zu kennen.

Lemma 2.4.1 (a_n) konvergiert genau dann, falls (a_n) beschränkt ist und $\lim\limits_{n\to\infty} inf\ a_n = \lim\limits_{n\to\infty} sup\ a_n$

Satz 2.4.2 (Cauchy Kriterium) Die Folge (a_n) ist genau dann konvergent, falls
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$ so dass $|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N$

2.5 Der Satz von Bolzano-Weierstrass

Definition 2.5.1 Ein abgeschlossenes Intervall ist eine Teilmenge I $\subset \mathbb{R}$ der Form (L(I) ist definiert als die Länge eines Intervalls):

1. $[a, b], \quad a \leq b \quad a, b \in \mathbb{R} \qquad L(I) = b - a$
2. $[a, +\infty[, \quad a \in \mathbb{R} \qquad L(I) = +\infty$
3. $[-\infty, a[, \quad a \in \mathbb{R} \qquad L(I) = +\infty$
4. $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R} \qquad L(I) = +\infty$

$\Rightarrow$ Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ genau dann abgeschlossen, falls für jede konvergente Folge (a_n) aus Elementen in I, der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ auch in I ist

Cauchy-Cantor Sei $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \ldots$ eine Folge abgeschlossener Intervalle mit $L(I_1) < +\infty$ Dann gilt:

$$\bigcap_{n\geq 1} I_n \neq \emptyset$$

Falls zudem $\lim\limits_{n\to\infty} L(I_n) = 0$ enthält $\bigcap\limits_{n\geq 1} I_n$ genau ein Punkt.

Satz 2.5.6 $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Definition 2.5.7 Eine Teilfolge einer Folge (a_n) ist eine Folge (b_n) wobei

$$b_n = a_{l(n)}$$

und $l : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ eine Abbildung bezeichnet mit der Eigenschaft

$$l(n) < l(n+1) \quad \forall n \geq 1$$

Bolzano-Weierstrass: Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge $\Rightarrow$ Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Dann gilt für jede konvergente Teilfolge (b_n):

$$\lim_{n\to\infty} inf\ a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} sup\ a_n$$

2.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

D2.6.1 Abbildung Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^d$$

Wir schreiben a_n statt a(n) und bezeichnen die Folge mit (a_n)

Konvergenz einer Folge Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}^d$ heisst konvergent, falls es $a \in \mathbb{R}^d$ gibt so dass:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1 \text{ mit } \| a_n - a \| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

Falls solch ein a existiert, ist es eindeutig und heisst Grenzwert der Folge:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Eine koinvergente Folge (a_n) in $\mathbb{R}^d$ ist beschränkt

Satz 2.6.6

1. Eine Folge (a_n) konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy Folge ist
2. Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge

2.7 Reihen

Konvergenz: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent, falls die Folge (S_n) der Partialsummen konvergiert. Wir definieren:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$$

2.7.1 Beispiele

- Geometrische Reihe : $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ konvergiert für $|q| < 1$
- Harmonische Reihe : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert
- Alternierende Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^n$ konvergiert aber nicht absolut
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert
- $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ konvergiert für $s > 1$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$ konvergiert
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konvergiert, ist aber nicht absolut konvergent
- Exponentialfunktion: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergiert für all $z \in \mathbb{C}$
- Eulersche Zahl: $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$
- $\sin(\mathrm{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ für $z \in \mathbb{C}$ konvergiert absolut
- $\cos(\mathrm{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ für $z \in \mathbb{C}$ konvergiert absolut

Satz 2.7.4 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent, sowie $\alpha \in \mathbb{C}$

1. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) + \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j \right)$
2. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Cauchy Kriterium: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, falls:

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists N \geq 1 \text{ mit } \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N$$

Satz 2.7.6 Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \geq 0 \quad \forall k \ \in \mathbb{N}^*$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, falls die Folge $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

Vergleichssatz: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit:

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq K \quad (K \geq 1)$$

dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

Absolut Konvergenz: Falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent und es gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Leibniz: (a_n) monoton fallend mit $a \geq 0 \quad \forall n \geq 1 und \lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt: $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$

Umordnung: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n^{'}$ ist eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$, falls es eine bijektive Abbildung

$$\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$$

gibt, sodass $a_n^{'} = a_{\phi(n)}$

Dirichlet: Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat denselben Grenzwert.

Quotientenkriterium: Sei (a_n) mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$ Falls

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ absolut. Falls

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$$

divergiert die Reihe. Das Quotientenkriterium versagt, wenn z.B unendlich viele Glieder a_n der Reihe verschwinden.

Wurzelkriterium:

1. Falls

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut

2. Falls

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

dann divergieren $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Nullfolgenkriterium: Verwendet um zu zeigen dass eine Reihe divergiert

$$\sum^{\infty} a_n \text{ existiert} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

$$\Rightarrow |a_n| \text{ keine Nullfolge} \Rightarrow \sum^{\infty} |a_n| \text{ nicht konvergent}$$

Wenn es 0 ist kann man noch keine Aussage machen.

Majorantenkriterium: zu zeigen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert

$$\text{Finde } (b_n) \text{ s.d } |a_n| \leq b_n (\forall n \geq n_0) \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergiert} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert (absolut!)}$$

Lineare Anordnung: $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine lineare Anordnung der Doppelreihe $\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}$, falls es eine Bijektion

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

gibt, mit $b_k = a_{\sigma(k)}$

SATZ 2.7.23 (Cauchy 1821). *Wir nehmen an, dass es* $B \geqslant 0$ *gibt, so dass*

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}|a_{ij}| \leqslant B \qquad \forall m \geqslant 0.$$

Dann konvergieren die folgenden Reihen absolut:

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \qquad \forall i \geqslant 0 \quad \text{und} \quad U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \qquad \forall j \geqslant 0$$

sowie

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

und es gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

Zudem konvergiert jede lineare Anordnung der Doppelreihe absolut, mit selbem Grenzwert.

Figure 2.1:

Potenz Reihe: Eine Reihe der Form:

$$p(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$$

wobei a_n eine beliebige folge ist und $x \in \mathbb{R}$ eine parameter.

Konvergenz Radius: Der konvergenz radius einer Potenzreihe ist gegeben durch:

$$\rho := sup\{|x| : p(x) converges\} \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| & \text{(i) Quotientenkriterium} \\ \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |\sqrt[n]{a_n}|} & \text{(ii) Wurzelkriterium} \end{cases}$$

$$|x| := \begin{cases} < \rho \Rightarrow konvergiert \\ > \rho \Rightarrow divergiert \\ = \rho \Rightarrow keine\ Aussage \quad (*) \end{cases}$$

$(*)$: in diesem Fall müssen wir kontrollieren ob es konvergiert oder divergiert

Cauchy-Produkt: der Reihen

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$

ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j\right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots$$

Falls die Reihen absolut konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$$

Satz 2.7.28: Sei $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge. Wir nehmen an, dass:

1. f(j):= $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(j)$ existiert $\forall j \in \mathbb{N}$
2. Es gibt eine Funktion $g : \mathbb{N} \to [0, \infty[$, so dass:
   (a) $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0, \forall n \geq 0$
   (b) $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert

Dann folgt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$$

Chapter 3

Stetige Funktionen

3.1 Reelwertige Funktionen

Die Menge $\mathbb{R}^D$: Sei D eine beliebige Menge. Die Menge $\mathbb{R}^D$ aller Funktionen

$$f_D \to \mathbb{R}$$

bildet ein VR über $\mathbb{R}$ mit:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$
$$(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$
$$\mathit{0}(x) = 0 \quad \forall x \in D$$
$$\mathit{1}(x) = 1 \quad \forall x \in D$$
$$f + \mathit{0} = f, \quad g \cdot \mathit{1} = g \quad \forall f, g \in \mathbb{R}^D$$

Falls $|D| \geq 2$ gibt es immer ein $f \neq \mathit{0}$ das kein multiplikatives Inverses besitzt

$f \leq g$ falls $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in D$

f ist nicht negativ falls $0 \leq f$

Beschränktheit: Sei $f \in \mathbb{R}^D$

1. f ist **nach oben beschränkt**, falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist
2. f ist **nach unten beschränkt**, falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt ist
3. f ist **beschränkt**, falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist.

Monotonie: $f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subset \mathbb{R} falls\ \forall x, y \in D$

1. **monoton wachsend** $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
2. **streng monoton wachsend** $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
3. **monoton fallend** $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
4. **streng monoton fallend** $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
5. **monoton** falls f monoton wachsend oder monoton fallend ist
6. **steng monoton** falls f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist

Beispiel: Sei $n \in \mathbb{N} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^n$. f ist genau dann (streng) monoton wachsend, falls n ungerade ist.

3.2 Stetigkeit

Stetigkeit in x_0: Sei $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in x_0 stetig, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so dass für alle $x \in D$ die Implikation:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

gilt.

Stetigkeit: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig, falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Satz 3.2.4: Sei $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f ist genau dann in x_0 stetig, falls für jede Folge (a_n) in D folgende Implikation gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

Korollar 3.2.5: Sei $x_0 \in D \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}, g : D \to \mathbb{R}$ beide stetig in x_0:

1. Dann sind $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g$ stetig in x_0
2. Falls $g(x_0) \neq 0$ dann ist

$$\frac{f}{g} : D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

   stetig in x_0

polynomiale Funktion: $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

wobei: $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. Falls $a_n \neq 0$ ist n der **Grad** von P.
Polynomiale Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.
Seien P,Q polynomiale Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit Q $\neq 0$. Seien $x_1, \ldots, x_m$ die Nullstellen von Q. Dann ist:

$$\frac{P}{Q} : \mathbb{R}\ \{x_1, \ldots x_m\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig.

3.3 Der Zwischenwertsatz

Satz 3.3.1 Bolzano: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Für jedes c zwischen f(a) und f(b) gibt es ein z zwischen a und b mit f(z) = c.

Korollar 3.3.2: Sei $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$ und n ungerade. Dann besitzt P mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$
Für c> 0 besitzt $Q(x) = x^2 + c$ keine Nullstelle in $\mathbb{R}$

3.4 Der Min-Max Satz

Kompakt: Ein intervall $\subset \mathbb{R}$ falls es von der Form

$$I = [a, b], \quad a \leq b$$

Definitionen:

- $|f|(x) := |f(x)| \quad \forall x \in D$
- $max(f, g)(x) := max(f(x), g(x)) \quad \forall x \in D$
- $min(f, g)(x) := min(f(x), g(x)) \quad \forall x \in D$

Lemma 3.4.3 Sei $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 Dann sind

$$|f|, max(f, g), min(f, g)$$

stetig in x_0

Lemma 3.4.4: Sei (x_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$.
Sei $a \leq b$. Falls $\{x_n : n \geq 1\} \subset [a, b]$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in [a, b]$

Satz 3.4.5: Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I. Dann gibt es $u \in I$ und $v \in I$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$$

insbesondere ist f beschränkt.

3.5 Der Satz über die Umkehrabbildung

Satz 3.5.1: Seien $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ zwei Teilmengen, $f : D_1 \to D_2, g : D_2 \to \mathbb{R}$ Funktionen, sowie $x_0 \in D_1$. Falls f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind, so ist

$$g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$$

Falls f auf D_1 und g auf D_2 stetig sind, so ist $g \circ f$ auf D_1 stetig.

Satz 3.5.3: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton. Dann ist $J := f(I) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1} : J \to I$ ist stetig, streng monoton

3.6 Die Reelle Exponentialfunktion:

Satz 3.6.1: $exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv. Wichtige Eigenschaften:

$$exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ i.e } (exp(\mathbb{R} \subset]0, +\infty[)$$
$$exp(z) > exp(y) \quad \forall z > y \text{ i.e (exp ist streng monoton wachsend)}$$
$$exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Aus der Potenzreihendarstellung von exp folgt:

$$exp(x) > 1 \quad \forall x > 0$$

natürlichen Logarithmus: Die Umkehrabbildung der bijektiven Abbildung $exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$

$$ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

ist eine streng monoton wachsende, stetige, bijektive Funktion. Es gilt:

$$ln(a \cdot b) = ln(a) + ln(b) \quad \forall a, b \in]0, +\infty[$$

Korollar 3.6.6:

(1) Für $a > 0$ ist

$$]0, \infty[\to]0, \infty[\quad x \mapsto x^a$$

eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion

(2) Für $a < 0$ ist

$$]0, \infty[\to]0, \infty[\quad x \mapsto x^a$$

(3) $ln(x^a) = a \cdot ln(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0$

(4) $x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$

(5) $(x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$

3.7 Konvergenz von Funktionenfolgen

Funktionenfolge: Eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^D \quad n \mapsto f(n)$
Wie im Fall der Folgen bezeichnen wir f(n) mit f_n und die Funktionenfolge mit $(f_n)_{n\geq 0}$.
Für jedes $x \in D$ erhält man eine Folge $(f_n(x))_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}$

Punktweise Konvergenz: Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Gleichmässiges Konvergenz: Die Folge $f_n : D \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmässig in D gegen

$$f : D \to \mathbb{R}$$

falls gilt: $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \geq 1$, so dass:

$$\forall n \geq N, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Satz 3.7.4: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge bestehend aus (in D) stetigen Funktionen die (in D) gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f (in D) stetig.

Def 3.7.5 Gleichmässig konvergent: Eine Funktionenfolge $f_n : D \to \mathbb{R}$ ist gleichmässig konvergent, falls für alle $x \in D$ der Grenzwert

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existiert und die Folge (f_n) gleichmässig gegen f konvergiert

Korollar 3.7.6: Die Funktionenfolge $f_n : D \to \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmässig in D, falls:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1, \text{ so dass } \forall n, m \geq N \text{ und } \forall x \in D : \; |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Korollar 3.7.7: Sei $D \subset \mathbb{R}$ Falls $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen ist, dann ist die Funktion

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

stetig.

Def 3.7.8: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig (in D), falls die durch

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert

Satz 3.7.9: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an, dass $|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D$ und dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmässig in D und deren Grenzwert

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in D stetige Funktion

Def 3.7.10: Konvergenzradius Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ (c_k eine Folge in $\mathbb{R}$) hat positivien Konvergenzradius, falls $\lim_{k\to\infty} sup \sqrt[k]{|c_k|}$ existiert. Der Konvergenzradius ist dann definiert als:

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \lim_{k\to\infty} sup \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\lim_{k\to\infty} sup \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \lim_{k\to\infty} sup \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

Satz 3.7.11: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$ und sei

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad |x| < \rho$$

Dann gilt: $\forall 0 \leq r < \rho$ konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

gleichmässig auf $[-r, r]$, insbesondere ist $f :]-\rho, \rho[\to \mathbb{R}$ stetig

3.8 Trigonometrische Funktionen

Satz 3.8.1: sin: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetige Funktionen

Satz 3.8.2:

(1) $e^{iz} = cos(z) + i \cdot sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(2) cos(z) = cos(-z) und sin(-z) = -sin(z) $\forall z \in \mathbb{C}$

(3) $sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad cos(z) \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

(4) sin(z + w) = sin(z)cos(w) + cos(z)sin(w)
cos(z+w) = cos(z)cos(w) - sin(z)sin(w)

(5) $cos(z)^2 + sin(z)^2 = 1 \forall z \in \mathbb{C}$

(6) sin(2z) = 2sin(z)cos(z)
$cos(2z) = cos(z)^2 - sin(z)^2$