(a) $P_1(u,v) := \{S \in \binom{[k]}{2} | \exists$ ein bunter u-v Pfad, welcher genau mit den Farben aus S gefärbt ist$\}$ d.h alle pfade der länge 1 die genau 2 farben aus [k] benutzen. $P_1(u,v) = \{\{\lambda(u), \lambda(v)\} | v \in N(u) \wedge \lambda(u) \neq \lambda(v)\}$ wobei:

- $\lambda(x) \in [k]$ der Farbe von der Knoten x ist
- $N(x)$ die Nachbarschaft der Knoten x ist

(b) $P_i(u,v) = \bigcup_{x \in N(v)} \{R \cup \{\lambda(v)\} | R \in P_{i-1}(u,x) \wedge \lambda(v) \notin R\}$
Wobei R ein Menge von Farben ist für ein bunten Pfad der Länge $|R| - 1$
Als Algorithmus machen wir folgendes:

- for all $x \in N(v)$ do
- for all $R \in P_{i-1}(u,x)$ mit $\lambda(v) \notin$ R do
- $P_i(u,v) \leftarrow P_i(u,v) \cup \{R \cup \{\lambda(v)\}\}$

Wir berechnen ausgehend von der Menge $P_1(u,v)$ sukzessive in i-1 Runden die Mengen $P_2(u,v)$ bis zu den Menge $P_i(u,v)$ berechnen (u,v $\in$ V und $u \neq v$).

(c) Die Zeit den wir brauchen um die P_i's aus den P_{i-1}'s zu berechnen ist:
$\mathcal{O}(deg(v) \cdot |P_{i-1}(u,v)| \cdot i) = \mathcal{O}(\binom{k}{i} \cdot i \cdot m)$
$(\mathcal{O}(deg(v)) \in \mathcal{O}(m),\ P_{i-1}(u,v) \subseteq \binom{[k]}{i} \rightarrow |P_{i-1}(u,v)| \leq \binom{k}{i})$ Um $P_i(u,v)$ für alle u,v in V $u \neq v$ zu berechnen: $\mathcal{O}(\binom{k}{i} \cdot i \cdot m \cdot n)$ (m die Anzahl Kanten, n die Anzahl Knoten)

(d) Es gibt einen bunten Kreis der Länge k falls die Menge $P_{k-1}(u,v)$ und $P_1(u,v)$ nicht leer sind, da wir einen kreis der Länge k aus der vereinigung zwei elementen dieser Mengen bauen können.

(e) Um $P_{k-1}(u,v)$ zu berechnen müssen wir k-1 erweiterungen der Pfad $P_1(u,v)$ machen:
$\Rightarrow \mathcal{O}(\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \cdot i \cdot m \cdot n) = \mathcal{O}(2^k \cdot k \cdot m \cdot n)$