双曲型偏微分方程数值格式与分析

Jiaxiang Li

2025 年 12 月 24 日

目录

1 基本概念与分类 **3**
1.1 双曲型方程定义 3
1.2 解耦（对角化） 3

2 线性对流方程 (Linear Advection Equation) **3**
2.1 显式格式 (Explicit Schemes) 3
2.1.1 1. 迎风格式 (Upwind Scheme) 3
2.1.2 2. 向前欧拉-中心差分 (FTCS) 4
2.1.3 3. Lax-Friedrichs (L-F) 格式 4
2.1.4 4. Lax-Wendroff (L-W) 格式 4
2.1.5 5. Beam-Warming 格式 4
2.1.6 6. Leap-Frog (蛙跳) 格式 4
2.2 隐式格式 (Implicit Schemes) 5
2.2.1 1. Crank-Nicolson (C-N) 格式 5
2.2.2 2. Wendroff 格式 5

3 稳定性分析 (Von Neumann Analysis) **5**
3.1 关键格式的增长因子 G 5

4 CFL条件与特征线法 **6**
4.1 CFL条件 (Courant-Friedrichs-Lewy) 6

5 一阶双曲型方程组推广 **6**
5.1 广义迎风 (Unified Upwind) 6

6 二阶波动方程 (Second-order Wave Equation) **6**
6.1 直接离散法 (Explicit Central Difference) 6
6.2 启动初值计算 (Start-up at $k = 1$) 7
6.3 三层格式的稳定性分析：降阶法 7

6.3.1 格式重写 7
6.3.2 构造向量系统 7
6.3.3 Fourier 模态分析 8
6.3.4 特征值分析 8

1 基本概念与分类

1.1 双曲型方程定义

考虑一阶线性偏微分方程组（PDE）：

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

其中 $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_m)^T$，矩阵 $A_{m\times m}$ 为常矩阵。

双曲性判定：

- **双曲型：**A 可对角化，即存在 m 个实特征值。
- **严格双曲型：**A 具有 m 个**互不相同**的实特征值。
- **对称双曲型：**A 是对称矩阵。

1.2 解耦（对角化）

令 $A = S^{-1}\Lambda S$，其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$。引入特征变量 $\vec{v} = S\vec{u}$（黎曼不变量），原方程解耦为特征形式：

$$\partial_t v_j + \lambda_j \partial_x v_j = 0, \quad j = 1, \ldots, m \tag{2}$$

这意味着波沿特征线 $\frac{dx}{dt} = \lambda_j$ 传播。

2 线性对流方程 (Linear Advection Equation)

模型方程：

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0, \quad u(x,0) = f(x) \tag{3}$$

定义 Courant 数 (CFL数) $r = \frac{\tau}{h}$。

2.1 显式格式 (Explicit Schemes)

2.1.1 1. 迎风格式 (Upwind Scheme)

物理意义：信息顺风传播，用(x_{j-1}^k, x_j^k)来线性插值解析解。

- 当 $a > 0$ (波向右)，用左偏心（后向）差分：

$$u_j^{k+1} = u_j^k - ar(u_j^k - u_{j-1}^k) = (1-ar)u_j^k + aru_{j-1}^k \tag{4}$$

- 当 $a < 0$ (波向左)，用右偏心（前向）差分：

$$u_j^{k+1} = u_j^k - ar(u_{j+1}^k - u_j^k) \tag{5}$$

稳定性: $0 \le ar \le 1$ (对于 $a > 0$)。
截断误差: $O(\tau + h)$，一阶精度。
特性: 具有数值耗散（Numerical Dissipation），会将尖峰抹平。

2.1.2 2. 向前欧拉-中心差分 (FTCS)

$$u_j^{k+1} = u_j^k - \frac{ar}{2}(u_{j+1}^k - u_{j-1}^k) \tag{6}$$

稳定性: 无条件不稳定 (对于任何 $a \neq 0$)。

2.1.3 3. Lax-Friedrichs (L-F) 格式

将 FTCS 中的 u_j^k 替换为平均值 $\frac{1}{2}(u_{j+1}^k + u_{j-1}^k)$:

$$u_j^{k+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^k + u_{j-1}^k) - \frac{ar}{2}(u_{j+1}^k - u_{j-1}^k) \tag{7}$$

稳定性: $|ar| \leq 1$。
截断误差: $O(\tau + h^2 + \frac{h^2}{\tau})$。若 r 固定，则为 $O(h)$。
注: 耗散性很大。

2.1.4 4. Lax-Wendroff (L-W) 格式

二次线性插值（利用 x_{j+1}, x_j, x_{j-1}）:

$$u_j^{k+1} = u_j^k - \frac{ar}{2}(u_{j+1}^k - u_{j-1}^k) + \frac{a^2r^2}{2}(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) \tag{8}$$

稳定性: $|ar| \leq 1$。
截断误差: $O(\tau^2 + h^2)$，二阶精度。
特性: 主要是相位误差（色散），数值耗散较小，解在剧烈变化处可能有振荡。

2.1.5 5. Beam-Warming 格式

二阶迎风格式（利用 x_j, x_{j-1}, x_{j-2}）:

$$u_j^{k+1} = u_j^k - \frac{ar}{2}(3u_j^k - 4u_{j-1}^k + u_{j-2}^k) + \frac{a^2r^2}{2}(u_j^k - 2u_{j-1}^k + u_{j-2}^k) \tag{9}$$

稳定性: $0 \leq ar \leq 2$ (对于 $a > 0$)。

2.1.6 6. Leap-Frog (蛙跳) 格式

三层格式，中心对时间，中心对空间:

$$u_j^{k+1} = u_j^{k-1} - ar(u_{j+1}^k - u_{j-1}^k) \tag{10}$$

稳定性: $|ar| \leq 1$。
特性: 无耗散 ($|G| = 1$)，但有色散误差。需注意计算模式波（Computational Mode）。

2.2 隐式格式 (Implicit Schemes)

2.2.1 1. Crank-Nicolson (C-N) 格式

时间方向梯形公式（平均）：

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}+\frac{a}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{k+1}-u_{j-1}^{k+1}}{2h}+\frac{u_{j+1}^{k}-u_{j-1}^{k}}{2h}\right)=0 \tag{11}$$

稳定性: 无条件稳定 ($|G|=1$)。精度 $O(\tau^2+h^2)$。

2.2.2 2. Wendroff 格式

在网格中心 $(j+1/2,k+1/2)$ 展开：

$$\frac{u_{j+1}^{k+1}-u_{j+1}^{k}+u_j^{k+1}-u_j^k}{2\tau}+a\frac{u_{j+1}^{k+1}-u_j^{k+1}+u_{j+1}^{k}-u_j^k}{2h}=0 \tag{12}$$

整理后：

$$u_j^{k+1}+u_{j+1}^{k}=u_{j+1}^{k+1}+u_j^k \quad (\text{当 } r=1 \text{ 时，精确解}) \tag{13}$$

稳定性: 无条件稳定 ($|G|=1$)。

3 稳定性分析 (Von Neumann Analysis)

假设 $u_j^k=\hat{u}_k e^{i\xi jh}$，增长因子 $G(\xi)=\frac{u^{k+1}}{u^k}$。

3.1 关键格式的增长因子 G

格式	增长因子 $G(\theta)$ $(\theta=\xi h)$	稳定条件 $\lvert G\rvert\le 1$
FTCS	$1-iar\sin\theta$	不稳定 ($\lvert G\rvert\ge 1$)
Upwind	$1-ar(1-\cos\theta)-iar\sin\theta$	$0\le ar\le 1$
Lax-Friedrichs	$\cos\theta-iar\sin\theta$	$\lvert ar\rvert\le 1$
Lax-Wendroff	$1-2a^2r^2\sin^2(\frac{\theta}{2})-iar\sin\theta$	$\lvert ar\rvert\le 1$
Leap-Frog	$G-G^{-1}=-2iar\sin\theta\Rightarrow G=-i\lambda\pm\sqrt{1-\lambda^2}$	$\lvert ar\rvert\le 1$
Crank-Nicolson	$\frac{1-i(ar/2)\sin\theta}{1+i(ar/2)\sin\theta}$	无条件稳定
Wendroff	$\frac{1+ar+(1-ar)e^{i\theta}}{(1+ar)e^{i\theta}+(1-ar)}$	无条件稳定

注：对于 FTCS，$|G|^2=1+a^2r^2\sin^2\theta>1$，所以无条件不稳定。

4 CFL条件与特征线法

4.1 CFL条件 (Courant-Friedrichs-Lewy)

几何解释：数值依赖域（Numerical Domain of Dependence）必须包含物理依赖域。

$$\left|\frac{a\tau}{h}\right| \leq C \quad (\text{通常 } C = 1) \tag{14}$$

CFL条件是显式格式稳定的**必要条件**。若违反CFL，数值解无法获得真解的信息，必发散。

5 一阶双曲型方程组推广

对于方程组 $\partial_t \vec{u} + A\partial_x \vec{u} = 0$，将标量格式中的 a 替换为 A。

5.1 广义迎风 (Unified Upwind)

引入矩阵的绝对值 $|A| = S^{-1}|\Lambda|S$，其中 $|\Lambda| = \mathrm{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_m|)$。

$$\vec{u}_j^{k+1} = \vec{u}_j^k - \frac{r}{2}A(\vec{u}_{j+1}^k - \vec{u}_{j-1}^k) + \frac{r}{2}|A|(\vec{u}_{j+1}^k - 2\vec{u}_j^k + \vec{u}_{j-1}^k) \tag{15}$$

这相当于在中心差分基础上添加了人工粘性项 $\frac{h}{2\tau}|A|$。

方程组 CFL 条件:

$$\max_i |\lambda_i|\frac{\tau}{h} \leq 1 \iff \rho(A)\cdot r \leq 1$$

其中 $\rho(A)$ 为矩阵 A 的谱半径。

6 二阶波动方程 (Second-order Wave Equation)

$$\begin{cases} \partial_{tt}u = a^2\partial_{xx}u \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = \varphi_1(x) \end{cases} \tag{16}$$

6.1 直接离散法 (Explicit Central Difference)

利用 $\delta_t^2 u = a^2\delta_x^2 u$：

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} \tag{17}$$

推导公式：

$$u_j^{k+1} = 2u_j^k - u_j^{k-1} + a^2r^2(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) \tag{18}$$

稳定性: $|ar| \leq 1$。

6.2 启动初值计算 (Start-up at $k = 1$)

中心离散：由于是三层格式，计算 u_j^1 需要 u_j^0 和 u_j^{-1} (虚点)，或利用泰勒展开：

$$u(x,\tau) \approx u(x,0) + \tau\partial_t u(x,0) + \frac{\tau^2}{2}\partial_{tt}u(x,0)$$

代入方程条件 $\partial_{tt}u = a^2\partial_{xx}u$：

$$u_j^1 = \varphi_0(x_j) + \tau\varphi_1(x_j) + \frac{\tau^2 a^2}{2}\frac{\varphi_0(x_{j+1}) - 2\varphi_0(x_j) + \varphi_0(x_{j-1})}{h^2} \tag{19}$$

注意：这是考试常见考点，必须消除 u_j^{-1} 才能启动计算。若直接使用中心差分 $\partial_t u \approx \frac{u^1 - u^{-1}}{2\tau} = \varphi_1$，也能得到相同的二阶精度结果。

偏心离散:

$$\varphi_1(x_j) = \frac{u_j^2 + 4u_j^1 - 3u_j^0}{2\Delta t}$$

6.3 三层格式的稳定性分析：降阶法

对于二阶波动方程的显式中心差分格式，涉及时间层 $k+1, k, k-1$，属于**三层格式**。直接应用 Von Neumann 分析较为困难，标准做法是将其转化为等价的**两层向量系统**。

6.3.1 格式重写

根据笔记中的推导，考虑方程（注：此处笔记中符号为 $\delta_t^2 + a^2\delta_x^2 = 0$，与标准波动方程 $\partial_{tt} = a^2\partial_{xx}$ 符号相反，此处严格遵循笔记推导）：

$$\delta_t^2 u_j^k + a^2\delta_x^2 u_j^k = 0 \tag{20}$$

展开差分算子：

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} + a^2\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} = 0 \tag{21}$$

令网格比 $r = \tau/h$，整理得到显式迭代式：

$$u_j^{k+1} = -a^2r^2(u_{j+1}^k + u_{j-1}^k) + 2(1 + a^2r^2)u_j^k - u_j^{k-1} \tag{22}$$

6.3.2 构造向量系统

引入辅助向量 $\vec{W}_j^k$，包含当前层和上一层的信息：

$$\vec{W}_j^k = \begin{pmatrix} u_j^k \\ u_j^{k-1} \end{pmatrix} \tag{23}$$

则时间步进可以写成矩阵形式 $\vec{W}_j^{k+1} = \mathbf{L}\vec{W}_j^k$。对于第一分量 u_j^{k+1}，利用迭代式；对于第二分量，利用恒等式 $u_j^k = u_j^k$。

$$\begin{pmatrix} u_j^{k+1} \\ u_j^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2a^2r^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_j^k \\ u_j^{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{j+1}^k \\ u_{j+1}^{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{j-1}^k \\ u_{j-1}^{k-1} \end{pmatrix} \tag{24}$$

6.3.3 Fourier 模态分析

设解具有形式 $\vec{W}_j^k = \hat{V}_k e^{i\xi x_j} = \hat{V}_k e^{i\xi jh}$。代入上式消去 $e^{i\xi jh}$：

$$\hat{V}_{k+1} = \left[\begin{pmatrix} 2+2a^2r^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\xi h} + \begin{pmatrix} -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi h}\right] \hat{V}_k \tag{25}$$

利用欧拉公式 $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$，合并矩阵项：

$$\hat{V}_{k+1} = \begin{pmatrix} 2+2a^2r^2 - 2a^2r^2\cos(\xi h) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{V}_k \tag{26}$$

利用半角公式 $1-\cos(\xi h) = 2\sin^2(\frac{\xi h}{2})$，得到**增长矩阵** (Amplification Matrix) $G(\xi)$：

$$G(\xi) = \begin{pmatrix} 2+4a^2r^2\sin^2(\frac{\xi h}{2}) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

6.3.4 特征值分析

系统的稳定性取决于矩阵 G 的特征值 λ。计算特征方程 $|G-\lambda I| = 0$：

$$\det\begin{pmatrix} 2+4a^2r^2\sin^2(\frac{\xi h}{2}) - \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{28}$$

$$-\lambda\left(2+4a^2r^2\sin^2\frac{\xi h}{2} - \lambda\right) - (-1)(1) = 0 \tag{29}$$

$$\lambda^2 - \left(2+4a^2r^2\sin^2\frac{\xi h}{2}\right)\lambda + 1 = 0 \tag{30}$$

这是一个关于 λ 的一元二次方程。

- 根据韦达定理，两根之积 $\lambda_1\lambda_2 = 1$。
- 两根之和 $\mathrm{Trace}(G) = 2+4a^2r^2\sin^2\frac{\xi h}{2} \geq 2$。

由于两根之和大于 2 且两根之积为 1，必有一个实根的模长大于 1（除非 $\sin(\dots) = 0$）。**结论**：该格式（$\delta_t^2 + a^2\delta_x^2 = 0$）是**无条件不稳定**的。

注：关于符号的说明

如果原方程是标准的波动方程 $\partial_{tt}u = a^2\partial_{xx}u$，即 $\delta_t^2 u - a^2\delta_x^2 u = 0$，则特征方程中的迹会变为：

$$\mathrm{Trace}(G) = 2 - 4a^2r^2\sin^2\frac{\xi h}{2}$$

此时若满足 $|2-4a^2r^2| \leq 2$，即 CFL 条件 $ar \leq 1$，则特征值是一对共轭复数且模长为 1，格式才是**稳定**的。笔记中的推导展示了如何通过降阶法证明某一特定形式的不稳定性。