抛物型偏微分方程数值解与分析

Jiaxiang Li

2025 年 12 月 23 日

目录

1 基本概念

1.1 模型方程

一维常系数热传导方程（抛物型）：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & (x,t) \in (x_L, x_R) \times (0,T] \\ u(x,0) = \phi(x), & \text{初值} \\ u(x_L,t) = 0,\ u(x_R,t) = 0 & \text{边值 (Dirichlet)} \end{cases} \tag{1}$$

1.2 网格与记号

- **空间步长**: $h = \frac{x_R - x_L}{N}$, $x_j = x_L + jh$.
- **时间步长**: $\tau = \frac{T}{M}$, $t_k = k\tau$.
- **网格比 (Mesh Ratio)**: $r = \frac{a\tau}{h^2}$ (无量纲数，决定显式格式稳定性).
- **差分算子**:
  - 时间向前: $\delta_t^+ u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau}$
  - 空间二阶中心: $\delta_x^2 u_j^k = \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}$

1.3 差分格式的矩阵表达

$$U^{k+1} = CU^k + \tau DF \tag{2}$$

1.3.1 按初值稳定

对于两个初始值 W^0 和 V^0，分别按差分格式球的数值解序列 W^k 和 V^k，令误差序列 $E^k = W^k - V^k$，若存在正常数 τ_0 和 K，使得对一切的

$$0 < \tau \le \tau_0 \text{ 和 } 0 \le k\tau \le T$$

一致的有

$$\|E^k\| \le K\|E^0\| \tag{3}$$

则称差分格式按初值稳定。

1.3.2 按右端稳定

对于两个右端 F_1 和 F_2，从同一个初值U^0出发，分别按差分格式球的数值解序列 W^k 和 V^k，令误差序列 $E^k = W^k - V^k$ 和$F = F_1 - F_2$，若存在正常数 τ_0 和 K，使得对一切的

$$0 < \tau \le \tau_0 \text{ 和 } 0 \le k\tau \le T$$

一致的有

$$\|E^k\| \le K\|F\| \tag{4}$$

则称差分格式按右端稳定。

1.3.3 按初值和右端稳定的充要条件

由差分格式(2)式，有

$$\|C^k\| \le K$$

更进一步，若还有

$$\|D\| \le K$$

则称差分格式按初值和右端稳定。

2 一维差分格式的构造

2.1 1. 向前欧拉格式 (Forward Euler / FTCS)

构造: 时间向前差分，空间中心差分（在点 (x_j, t_k) 展开）。

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + f_j^k \tag{5}$$

迭代式 (显式):

$$u_j^{k+1} = ru_{j-1}^k + (1-2r)u_j^k + ru_{j+1}^k + \tau f_j^k \tag{6}$$

截断误差: $O(\tau + h^2)$
稳定性: 条件稳定，需满足 $r \le \frac{1}{2}$。

2.2 2. 向后欧拉格式 (Backward Euler)

构造: 时间向后差分，空间中心差分（在点 (x_j, t_{k+1}) 展开）。

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a\frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + f_j^{k+1} \tag{7}$$

迭代式 (隐式): 需解三对角方程组。

$$-ru_{j-1}^{k+1} + (1+2r)u_j^{k+1} - ru_{j+1}^{k+1} = u_j^k + \tau f_j^{k+1} \tag{8}$$

三对角方程组：

截断误差: $O(\tau + h^2)$
稳定性: **无条件稳定** (A-stable)。

2.3 3. Crank-Nicolson (C-N) 格式

构造: 向前和向后格式的平均（$\theta = 1/2$），在 $(x_j, t_{k+1/2})$ 处展开。

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \frac{a}{2}\left[\delta_x^2 u_j^k + \delta_x^2 u_j^{k+1}\right] + f_j \tag{9}$$

截断误差: $O(\tau^2 + h^2)$ (二阶时间精度)
稳定性: **无条件稳定**。
注: 计算量同向后欧拉，需解三对角矩阵，但精度更高。

2.4 4. θ-格式 (Theta Scheme)

通式：$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} = a[\theta\delta_x^2 u^{k+1} + (1-\theta)\delta_x^2 u^k]$。

- $\theta = 0$: 向前欧拉 (条件稳定)。
- $\theta = 1$: 向后欧拉 (无条件稳定)。
- $\theta = 1/2$: Crank-Nicolson (无条件稳定)。

2.5 5. Richardson 格式 (三层显式)

构造: 时间中心差分 (t_k 处)，空间中心差分。

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} = a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + f_j \tag{10}$$

截断误差: $O(\tau^2 + h^2)$
稳定性: **绝对不稳定** (对于任何 $r > 0$)。

2.6 6. Du-Fort-Frankel 格式

构造: 对 Richardson 格式中的 u_j^k 进行平均修正：$u_j^k \approx \frac{u_j^{k+1} + u_j^{k-1}}{2}$。

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} = a\frac{u_{j+1}^k - (u_j^{k+1} + u_j^{k-1}) + u_{j-1}^k}{h^2} \tag{11}$$

截断误差: $O(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{h^2})$ (条件相容: 需 $\tau/h \to 0$)
稳定性: 无条件稳定 (显式)。

2.7 7. Douglas 紧致差分格式 (高阶空间精度)

利用 $1 + \frac{h^2}{12}\delta_x^2$ 算子提高空间精度。

$$\left(I + \frac{ah^2}{12}\delta_x^2\right)\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \frac{a}{2}\delta_x^2(u_j^{k+1} + u_j^k) + \dots \tag{12}$$

截断误差: $O(\tau^2 + h^4)$ (四阶空间精度)
性质: 紧致格式，三对角矩阵求解，高精度。

3 边界条件处理 (Ghost Point)

对于 Neumann 边界 $\frac{\partial u}{\partial x} = g(t)$ 或 Robin 边界：

- **中心差分法**: 引入虚拟点 (Ghost point) u_{-1}^k 或 u_{N+1}^k。
- 利用边界方程 $\frac{u_1^k - u_{-1}^k}{2h} = g(t)$ 消去虚拟点。
- 保持了 $O(h^2)$ 的空间精度。

4 稳定性分析 (重点)

4.1 1. 矩阵分析法

将差分格式写成矩阵形式：$\mathbf{U}^{k+1} = C\mathbf{U}^k + \tau\mathbf{F}$。

- **稳定条件**: 矩阵 C 的谱半径 $\rho(C) \leq 1$ (或 $1 + M\tau$)。
- 对于向前欧拉，$C = I - 2r(I - S)$，要求 $|1 - 2r + 2r\cos\theta| \leq 1 \Rightarrow r \leq 1/2$。

4.2 2. Fourier (Von Neumann) 分析法

步骤：

1. 设误差或解的形式为 $u_j^k = \hat{u}_k e^{i\xi jh}$ (单模态)。

   注：若空间域为二维（索引为 j, l），形式扩展为 $u_{j,l}^k = \hat{u}_k e^{i(\xi j h_x + \eta l h_y)}$。

2. 将上述形式代入差分方程，消去公因式 $e^{i\xi jh}$，从而求得增长因子 $G(\xi, \tau) = \frac{\hat{u}_{k+1}}{\hat{u}_k}$。
3. **稳定判据：**要求对于所有的 ξ，满足 $|G| \leq 1$ (或严格稳定性 $1 + M\tau$)。

常见格式的增长因子:

- **向前欧拉**: $G = 1 - 4r\sin^2\frac{\xi h}{2}$。
  - 稳定 $\iff -1 \leq 1 - 4r \leq 1 \Rightarrow r \leq \frac{1}{2}$。
- **向后欧拉**: $G = \frac{1}{1+4r\sin^2\frac{\xi h}{2}}$。
  - 显然 $|G| \leq 1$，无条件稳定。
- **Crank-Nicolson**: $G = \frac{1-2r\sin^2\frac{\xi h}{2}}{1+2r\sin^2\frac{\xi h}{2}}$。
  - 分母大于分子绝对值，无条件稳定。
- **Richardson**: $G - G^{-1} = -8r\sin^2\frac{\xi h}{2}$。
  - 二次方程必有一根模长大于1，绝对不稳定。

5 二维热传导方程

方程: $\partial_t u = a(\partial_{xx}u + \partial_{yy}u)$。定义 $r_x = \frac{a\tau}{h_x^2}, r_y = \frac{a\tau}{h_y^2}$。

5.1 1. 二维显式格式

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + r_x\delta_x^2 u_{i,j}^k + r_y\delta_y^2 u_{i,j}^k \tag{13}$$

Von Neumann 分析:

$$G = 1 - 4r_x \sin^2\frac{\xi_x h_x}{2} - 4r_y \sin^2\frac{\xi_y h_y}{2}$$

稳定条件:

$\boxed{r_x + r_y \leq \frac{1}{2}}$

若 $h_x = h_y = h$，则 $r \leq 1/4$。比一维情况 $(r \leq 1/2)$ 更严格。

5.2 2. 二维隐式与 ADI

- **全隐式**: 无条件稳定，但需解大型稀疏矩阵（非三对角），计算量大。
- **ADI (交替方向隐式)**: 将一步 τ 分为两步 $\tau/2$。
  - 第一步：x 方向隐式，y 方向显式。
  - 第二步：x 方向显式，y 方向隐式。

  优点: 每一步只需解三对角矩阵，且**无条件稳定**。

5.3 极坐标变化

二维热传导方程经过极坐标变换后的形式：

$$\partial_t u = a(\partial_{rr}u + \frac{1}{r}\partial_r u + farc1r^2\partial_{\theta\theta}u) \tag{14}$$

6 总结表 (考试速查)

格式名称	类型	截断误差	稳定性条件	特点
向前欧拉 (FTCS)	显式	$O(\tau + h^2)$	$r \le 1/2$ (1D)	简单，步长受限
向后欧拉	隐式	$O(\tau + h^2)$	无条件稳定	耗散强，需解方程
Crank-Nicolson	隐式	$O(\tau^2 + h^2)$	无条件稳定	精度高，常用
Richardson	显式(3层)	$O(\tau^2 + h^2)$	**不稳定**	理论模型，不可用
Du-Fort-Frankel	显式(3层)	$O(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{h^2})$	无条件稳定	相容性有条件
Douglas	隐式(紧致)	$O(\tau^2 + h^4)$	无条件稳定	空间高精度
二维显式	显式	$O(\tau + h^2)$	$r_x + r_y \le 1/2$	稳定性条件更严苛