

两点边值问题与泊松方程数值解

Jiaxiang Li

2025 年 12 月 29 日

目录

1	两点边值问题 (Two-Point BVP)	2
1.1	数学模型	2
1.2	边界条件分类	2
1.3	解的存在唯一性定理	2
2	数值方法：有限差分法 (FDM)	2
2.1	线性方程的差分格式构造	2
2.2	线性代数方程组	3
3	数值分析基础	3
3.1	简化模型	3
3.2	误差定义	3
3.3	相容性、稳定性与收敛性	3
3.4	紧致差分格式	4
4	稳定性分析方法	4
4.1	1. 极值原理分析法 (Maximum Principle)	4
4.2	2. 能量方法 (Energy Method)	4
5	二维泊松方程 (Poisson Equation)	5
5.1	模型与五点差分格式	5
5.2	误差分析	5
5.3	九点差分格式	5
5.4	极坐标变换	5
6	总结速查	6

1 两点边值问题 (Two-Point BVP)

1.1 数学模型

考虑二阶常微分方程:

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b] \quad (1)$$

1.2 边界条件分类

- 第一类 (Dirichlet): $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$.
- 第二类 (Neumann): $y'(a) = \alpha, y'(b) = \beta$.
- 第三类 (Robin): $y(a) - \alpha_0 y'(a) = \alpha, y(b) + \beta_0 y'(b) = \beta$.

1.3 解的存在唯一性定理

若 $f, \partial_y f, \partial_{y'} f$ 连续, 且满足:

1. $\partial_y f > 0$ (严格单调);
2. $\partial_{y'} f$ 有界;

则第一类边值问题的解存在且唯一。

2 数值方法: 有限差分法 (FDM)

2.1 线性方程的差分格式构造

考虑二阶线性方程 (守恒型):

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + r(x) \frac{du}{dx} + q(x)u = f(x) \quad (2)$$

网格: $x_i = a + ih, h = \frac{b-a}{N}$.

差分算子:

- 二阶中心差分: $\delta_x^2 u_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \approx u''(x_i)$.
- 一阶中心差分: $\delta_x u_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \approx u'(x_i)$.

离散格式: 在节点 x_i 处, 令 $\tilde{p}_i = (p_{i+1/2} + p_{i-1/2})/2$, 格式为:

$$L_h u_i = -\frac{p_{i+1/2} u_{i+1} - 2\tilde{p}_i u_i + p_{i-1/2} u_{i-1}}{h^2} + r_i \delta_x u_i + q_i u_i = f_i \quad (3)$$

2.2 线性代数方程组

上述格式结合边界条件 $u_0 = \alpha, u_N = \beta$, 可写成矩阵形式:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4)$$

其中 \mathbf{A} 是**三对角矩阵 (Tridiagonal Matrix)**。

- 求解算法: 追赶法 (Thomas Algorithm)。

对于前 $N - 2$ 个方程, 正向遍历时前一个变量总可以用后一个变量表示出来, 到最后
一个方程则可以把最后一个变量求解出来, 再反向遍历求解出所有变量。

- 计算复杂度: $O(N)$, 非常高效。

3 数值分析基础

3.1 简化模型

差分格式:

$$\begin{cases} L_h v_i =: -\delta_x^2 v_i + q_i v_i = f_i, & 1 < i < N - 1, \\ v_0 = \tilde{\alpha}, & v_L = \tilde{\beta}. \end{cases} \quad (5)$$

3.2 误差定义

- 局部截断误差 (R_i): 差分算子作用于真解与微分算子作用于真解的差。

$$R_i = L_h u(x_i) - (Lu)(x_i) = L_h u(x_i) - f_i$$

- 整体截断误差 (e_i): 真解与数值解的差。

$$e_i = u(x_i) - u_i$$

- 误差方程: $L_h e_i = R_i$.

3.3 相容性、稳定性与收敛性

- 相容性: 当 $h \rightarrow 0$ 时, $\|R\| \rightarrow 0$ 。上述中心差分格式是 $O(h^2)$ 相容的。
- 稳定性: 差分格式的解对边界条件或右端项的扰动是有限的 (Lipschitz 连续)。具体定义如下:

记差分格式:

$$\begin{cases} L_h u_i = f_i, \\ u_0 = \alpha, \\ u_N = \beta. \end{cases} \quad \text{及其与扰动方程:} \quad \begin{cases} L_h v_i = f_i + \delta_i, \\ v_0 = \alpha + \delta_0, \\ v_N = \beta + \delta_N. \end{cases}$$

解向量分别为 $\mathbf{u} =: (u_0, \dots, u_N)^T$ 与 $\mathbf{v} =: (v_0, \dots, v_N)^T$ 。若存在正常数 h_0 以及 K_1 、 K_2 （与步长 h 无关），使得对于任意的 $h < h_0$ ，有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq K_1 \max\{|\delta_0|, |\delta_N|\} + K_2 \max_{1 \leq i \leq N-1} |\delta_i| \quad (6)$$

则称（差分）格式依范数 $\|\cdot\|$ 是稳定的。

3.4 紧致差分格式

已知中心差分对于二阶微分的近似为:

$$\partial_x^2 u_i = \delta_x^2 u_i + \frac{h^2}{12} \partial_x^4 u_i + O(h^4)$$

由差分格式（5）可得:

$$\partial_x^4 u_i = \delta_x^2 [q_i u_i + f_i]$$

代入四阶导数可得:

$$-\delta_x^2 u_i + \frac{h^2}{12} \delta_x^2 (q_i u_i) + q_i u_i = (1 + \frac{h^2}{12} \delta_x^2) f_i$$

其截断误差为 $o(h^4)$ 。

4 稳定性分析方法

4.1 1. 极值原理分析法 (Maximum Principle)

适用于 L^∞ 范数分析。

离散极值原理: 若 $L_h v_i \leq 0$ (或 $L_h v_i \geq 0$) 对所有 i 成立, 则 v_i 的极大值(或极小值)必在边界取到。

Proof: 反证法, 假设 v_i 的极大值不在边界取到, 即 v_i 的极大值在 $i \in [1, N-1]$ 取到。然后利用中心差分以及 $f_i \leq 0$ (或 $f_i \geq 0$) 得到矛盾。

最大模估计 (稳定性):

$$\|v\|_\infty \leq \max\{|v_0|, |v_N|\} + C \max_{1 \leq i \leq N-1} |f_i| \quad (7)$$

Proof: 构造 $g(x) = \frac{c}{2}x(x-L)$, 然后利用极值原理证明。

收敛性结论: 对差分格式, 收敛阶数与截断误差阶数一致 (由最大模原理可得)。

若局部截断误差 $\|R\|_\infty = O(h^2)$, 则整体误差 $\|E\|_\infty \leq Ch^2$ 。
即格式在最大模意义下是 **二阶收敛** 的。

4.2 2. 能量方法 (Energy Method)

适用于 L^2 范数或 H^1 范数分析。基于分部求和公式。

内积与范数:

$$(u, v) = h \sum_{j=1}^{N-1} u_j v_j, \quad \|u\|_2 = \sqrt{(u, u)}, \quad |u|_1 = \sqrt{(\delta_x u, \delta_x u)}$$

收敛性结论:

有限差分格式 (5) 在 L^2 范数下是 **二阶收敛** 的 ($O(h^2)$)。
在 H^1 半范数 ($|u|_1$) 下是 **一阶收敛** 的 ($O(h)$)。

5 二维泊松方程 (Poisson Equation)

5.1 模型与五点差分格式

方程: $-\Delta u = -(u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y)$, 在矩形区域 Ω 上。

五点差分算子 (Five-point Stencil): 利用二阶中心差分近似 u_{xx} 和 u_{yy} :

$$L_h u_{i,j} = -\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} = f_{i,j} \quad (8)$$

5.2 误差分析

- 局部截断误差:

$$R_{i,j} = O(h_x^2 + h_y^2)$$

- 收敛性: 利用类似的极值原理或能量法, 可证明五点差分格式是二阶收敛的。

5.3 九点差分格式

类似于紧致差分格式, 可以得到九点差分格式。截断误差:

$$O(h_x^4 + h_y^4 + h_x^2 h_y^2)$$

其中九点主要体现在 $\delta_x^2 \delta_y^2$ 项上(先对y作中心差分再对x作中心差分)。

5.4 极坐标变换

Poisson方程的极坐标变换:

$$\partial_r^2 u + \frac{1}{r} \partial_r u + \partial_\theta^2 u = f(r, \theta) \quad (9)$$

边界条件: 注意法向。

6 总结速查

概念	关键点
两点BVP	常微分方程 + 边界条件 (Dirichlet/Neumann/Robin)
打靶法	将BVP转化为IVP求解, 需迭代找初值
有限差分法	$u'' \approx \delta_x^2 u$, 导出三对角方程组, 追赶法求解
极值原理	适用于 L^∞ 范数, 证明稳定性与收敛性 ($O(h^2)$)
能量方法	适用于 L^2 范数, 利用分部求和 ($O(h^2)$)
二维Poisson	五点差分格式, 截断误差 $O(h_x^2 + h_y^2)$