

常微分方程数值解 (I)：单步法

Jiaxiang Li

2025 年 12 月 26 日

目录

1 基本理论：柯西问题	2
1.1 数学模型	2
1.2 解的存在唯一性与适定性	2
2 基本单步法的构造	2
2.1 1. 向前欧拉法 (Forward Euler)	2
2.2 2. 向后欧拉法 (Backward Euler)	2
2.3 3. 梯形公式 / Crank-Nicolson	3
2.4 4. 改进欧拉法 (Heun 方法)	3
3 Runge-Kutta (RK) 方法	3
3.1 构造思想	3
3.2 经典 RK 格式	3
3.2.1 1. 二级二阶 RK (RK2)	3
3.2.2 2. 经典四级四阶 RK (RK4)	4
3.2.3 Butcher Array	4
4 单步法的数值分析	4
4.1 1. 局部截断误差与相容性	5
4.2 2. 零稳定性 (Zero-Stability)	5
4.3 3. 收敛性 (Convergence)	5
5 绝对稳定性 (Absolute Stability)	5
5.1 模型方程与稳定域	5
5.2 例：四阶 RK 方法的稳定域求解	6
5.3 常见格式的稳定性	6

1 基本理论：柯西问题

1.1 数学模型

考虑一阶常微分方程（ODE）初值问题（Cauchy Problem）：

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

1.2 解的存在唯一性与适定性

- **Lipschitz 条件**: 若存在常数 $L > 0$ ，使得对任意 $t \in [t_0, t_0 + T]$ ，有：

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|$$

则称 f 关于 y 满足 Lipschitz 条件。

- **存在唯一性**: 若 f 连续且满足 Lipschitz 条件，则初值问题存在唯一解 $y(t) \in C^1$ 。
- **适定性 (Well-posedness)**: 如果解存在、唯一，且连续依赖于初始数据（即对初值扰动是 Lyapunov 稳定的，两个解之差 $\leq K\epsilon$ ），则称问题是适定的。

适定性定理: 如果函数 $f(t, y)$ 满足 Lipschitz 条件，则初值问题对任何初始值 y_0 都是适定的。

2 基本单步法的构造

基于积分形式 $y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, y(\tau)) d\tau$ 。

2.1 1. 向前欧拉法 (Forward Euler)

利用左矩形公式近似积分：

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) \quad (2)$$

类型: 显式格式。

精度: 1 阶 ($O(h)$)。

特点: 计算简单，但条件稳定（步长受限）。

2.2 2. 向后欧拉法 (Backward Euler)

利用右矩形公式近似积分：

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}) \quad (3)$$

类型: 隐式格式（需迭代求解非线性方程）。

精度: 1 阶 ($O(h)$)。

特点: 无条件稳定 (A-stable)，适合刚性问题。

2.3 3. 梯形公式 / Crank-Nicolson

利用梯形公式近似积分：

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})] \quad (4)$$

类型: 隐式格式。

精度: 2 阶 ($O(h^2)$)。

特点: 无条件稳定, 精度高于欧拉法。

2.4 4. 改进欧拉法 (Heun 方法)

预估-校正 (Predictor-Corrector) 策略: 先用向前欧拉预估, 再用梯形公式校正。

$$\begin{cases} \tilde{u}_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) & \text{(预估)} \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1})] & \text{(校正)} \end{cases} \quad (5)$$

类型: 显式格式。

精度: 2 阶。

3 Runge-Kutta (RK) 方法

3.1 构造思想

在区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 内多取几个点, 用这些点上斜率的加权平均来逼近平均曲率, 以提高精度。通用显式 s -级 RK 方法:

$$\begin{cases} K_1 = f(t_n, u_n) \\ K_i = f(t_n + c_i h, u_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j), \quad i = 2, \dots, s \\ u_{n+1} = u_n + h \sum_{i=1}^s b_i K_i \end{cases} \quad (6)$$

需满足条件: $\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i$ 和 $\sum_{i=1}^s b_i = 1$ 。

3.2 经典 RK 格式

3.2.1 1. 二级二阶 RK (RK2)

包括 Heun 方法和中点公式。通式满足 $b_1 + b_2 = 1, b_2 c_2 = 1/2$ 。

3.2.2 2. 经典四级四阶 RK (RK4)

最常用的高阶单步法:

$$\begin{cases} K_1 = f(t_n, u_n) \\ K_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(t_n + h, u_n + hK_3) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{cases} \quad (7)$$

精度: 4 阶 ($O(h^4)$)。

级数与阶数: 对于 $s \leq 4$, 级数 s 等于最高阶数 p 。当 $s \geq 5$ 时, $s > p$ (例如 $s = 5$ 时只能达到 4 阶)。

3.2.3 Butcher Array

	$t_n + c_i h$	预报: $\tilde{u}_i = u_n + h \sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij} h) K_j$	关系
K_1	c_1	a_{11}	$c_1 = a_{11} = 0$
K_2	c_2	$a_{21} \quad 0$	$a_{21} = c_2$
K_3	c_3	$a_{31} \quad a_{32} \quad 0$	$\sum_{j=1}^2 a_{3j} = c_3$
\vdots	\vdots	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots$	\vdots
K_i	c_i	$a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{i,i-1} \quad 0$	$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i$
\vdots	\vdots	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \ddots$	\vdots
K_s	c_s	$a_{s1} \quad a_{s2} \quad \cdots \quad \cdots \quad a_{s,s-1} \quad 0$	$\sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} = c_s$
$\sum_{j=1}^s (b_j h) K_j$		$b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad b_{s-1} \quad b_s$	$\sum_{j=1}^s b_s = 1$

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{i=1}^s b_i K_i$$

$$K_i = f(t_n + c_i h, u_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j)$$

4 单步法的数值分析

将单步法统一写为: $u_{n+1} = u_n + h\Phi(t_n, u_n, f, h)$, 其中 Φ 为增量函数。

4.1 1. 局部截断误差与相容性

- 局部截断误差 (τ_{n+1}): 假设 $u_n = y(t_n)$ (上一步是精确的), 这一步产生的误差。

$$\tau_{n+1}(h) = y(t_{n+1}) - [y(t_n) + h\Phi(t_n, y(t_n), f, h)]$$

- 相容性 (Consistency):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau_{n+1}(h)}{h} = 0 \iff \lim_{h \rightarrow 0} \Phi = f$$

- 精度阶: 若 $\tau_{n+1}(h) = O(h^{p+1})$, 则称格式具有 p 阶精度。

4.2 2. 零稳定性 (Zero-Stability)

定义: 考察当 $h \rightarrow 0$ 时, 格式对初值扰动的敏感性。

- 只要增量函数 Φ 关于 u 满足 Lipschitz 条件, 单步法就是零稳定的。
- 常见的单步法 (欧拉、RK) 都是零稳定的。

4.3 3. 收敛性 (Convergence)

整体截断误差: $e_n = y(t_n) - u_n$ 。

Lax 等价定理: 对于单步法,
相容性 + 零稳定性 \iff 收敛性

误差估计: 若局部误差为 $O(h^{p+1})$, 则整体误差为 $O(h^p)$ 。

5 绝对稳定性 (Absolute Stability)

背景: 实际计算中 h 是固定的, 且不能无限小。对于刚性问题, 需要考察误差是否会随步数增长。

5.1 模型方程与稳定域

考虑试验方程: $y' = \lambda y, \operatorname{Re}(\lambda) < 0$ 。代入数值格式得到:

$$u_{n+1} = E(h\lambda)u_n \tag{8}$$

其中 $E(z)$ 称为稳定函数 ($z = h\lambda$)。

- 绝对稳定条件: $|E(h\lambda)| < 1$ (注意是 $<$, 而不是 \leq)。
- 绝对稳定域: 复平面上满足 $|E(z)| < 1$ 的区域 \mathcal{A} 。
- 绝对稳定区间: 稳定域与负实轴的交集。

5.2 例：四阶 RK 方法的稳定域求解

考虑线性模型方程 $u' = \lambda u$ ，令 $z = \lambda h$ 。根据四阶 Runge-Kutta 方法的定义：

$$\begin{cases} K_1 = \lambda u_n \\ K_2 = \lambda(u_n + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = \lambda(u_n + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = \lambda(u_n + hK_3) \end{cases} \quad (9)$$

将上述公式依次迭代代入 $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$ ，可得放大因子（Stability Function）：

$$E(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} = \sum_{k=0}^4 \frac{z^k}{k!} \quad (10)$$

5.3 常见格式的稳定性

格式	稳定函数 $E(z)$	绝对稳定区间
向前欧拉	$1 + z$	$(-2, 0)$ (条件稳定)
向后欧拉	$\frac{1}{1-z}$	$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ (A-稳定)
Crank-Nicolson	$\frac{1+z/2}{1-z/2}$	$(-\infty, 0)$ (A-稳定)
RK2	$1 + z + \frac{z^2}{2}$	$(-2, 0)$
RK4	$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}$	$\approx (-2.78, 0)$

注意： 显式 RK 方法的稳定域总是有限的，不适合刚性问题。