两点边值问题与泊松方程数值解

Jiaxiang Li

2025 年 12 月 23 日

目录

1 两点边值问题 (Two-Point BVP)

1.1 数学模型

考虑二阶常微分方程：

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b] \tag{1}$$

1.2 边界条件分类

- **第一类 (Dirichlet)**: $y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta$.
- **第二类 (Neumann)**: $y'(a) = \alpha,\ y'(b) = \beta$.
- **第三类 (Robin)**: $y(a) - \alpha_0 y'(a) = \alpha,\ y(b) + \beta_0 y'(b) = \beta$.

1.3 解的存在唯一性定理

若 $f, \partial_y f, \partial_{y'} f$ 连续，且满足：

1. $\partial_y f > 0$ (严格单调);
2. $\partial_{y'} f$ 有界;

则第一类边值问题的解存在且唯一。

2 数值方法：有限差分法 (FDM)

2.1 线性方程的差分格式构造

考虑二阶线性方程（守恒型）：

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + r(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x) \tag{2}$$

网格: $x_i = a + ih,\ h = \frac{b-a}{N}$.
差分算子:

- 二阶中心差分: $\delta_x^2 u_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \approx u''(x_i)$.
- 一阶中心差分: $\delta_x u_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \approx u'(x_i)$.

离散格式: 在节点 x_i 处，令 $\tilde{p}_i = (p_{i+1/2} + p_{i-1/2})/2$，格式为：

$$L_h u_i = -\frac{p_{i+1/2}u_{i+1} - 2\tilde{p}_i u_i + p_{i-1/2}u_{i-1}}{h^2} + r_i \delta_x u_i + q_i u_i = f_i \tag{3}$$

2.2 线性代数方程组

上述格式结合边界条件 $u_0=\alpha, u_N=\beta$，可写成矩阵形式：

$$\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{f} \tag{4}$$

其中 $\mathbf{A}$ 是**三对角矩阵 (Tridiagonal Matrix)**。

- **求解算法**: 追赶法 (Thomas Algorithm)。
  对于前 $N-2$ 个方程，正向遍历时前一个变量总可以用后一个变量表示出来，到最后一个方程则可以把最后一个变量求解出来，再反向遍历求解出所有变量。

- **计算复杂度**: $O(N)$，非常高效。

3 数值分析基础

3.1 简化模型

差分格式:

$$\begin{cases} L_h v_i =: -\delta_x^2 v_i + q_i v_i = f_i, \quad 1<i<N-1, \\ \qquad v_0=\tilde{\alpha}, \quad v_L=\tilde{\beta}. \end{cases} \tag{5}$$

3.2 误差定义

- **局部截断误差 (R_i)**: 差分算子作用于真解与微分算子作用于真解的差。

$$R_i = L_h u(x_i) - (Lu)(x_i) = L_h u(x_i) - f_i$$

- **整体截断误差 (e_i)**: 真解与数值解的差。

$$e_i = u(x_i) - u_i$$

- **误差方程**: $L_h e_i = R_i$.

3.3 相容性、稳定性与收敛性

- **相容性**: 当 $h\to 0$ 时，$\|R\|\to 0$。上述中心差分格式是 $O(h^2)$ 相容的。

- **稳定性**: 差分格式的解对边界条件或右端项的扰动是有限的（Lipschitz 连续）。具体定义如下：

  记差分格式:

$$\begin{cases} L_h u_i = f_i, \\ u_0=\alpha, \\ u_N=\beta. \end{cases} \qquad \text{及其与扰动方程：} \qquad \begin{cases} L_h v_i = f_i + \delta_i, \\ v_0=\alpha+\delta_0, \\ v_N=\beta+\delta_N. \end{cases}$$

解向量分别为 $\boldsymbol{u} =: (u_0 \cdots, u_N)^T$ 与 $\boldsymbol{v} =: (v_0, \cdots, v_N)^T$。若存在正常数 h_0 以及 K_1、K_2（与步长 h 无关），使得对于任意的 $h < h_0$，有

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| \le K_1 \max\{|\delta_0|, |\delta_N|\} + K_2 \max_{1 \le i \le N-1} |\delta_i| \tag{6}$$

则称（差分）格式依范数 $\|\cdot\|$ 是稳定的。

3.4 紧致差分格式

已知中心差分对于二阶微分的近似为:

$$\partial_x^2 u_i = \delta_x^2 u_i + \frac{h^2}{12} \partial_x^4 u_i + O(h^4)$$

由差分格式（5）可得：

$$\partial_x^4 u_i = \delta_x^2 [q_i u_i + f_i]$$

代入四阶导数可得：

$$-\delta_x^2 u_i + \frac{h^2}{12} \delta_x^2 (q_i u_i) + q_i u_i = (1 + \frac{h^2}{12} \delta_x^2) f_i$$

其截断误差为$o(h^4)$。

4 稳定性分析方法

4.1 1. 极值原理分析法 (Maximum Principle)

适用于 L^∞ 范数分析。

离散极值原理: 若 $L_h v_i \le 0$ (或$L_h v_i \ge 0$) 对所有 i 成立，则 v_i 的极大值(或极小值)必在边界取到。

Proof: 反证法，假设 v_i 的极大值不在边界取到，即 v_i 的极大值在 $i \in [1, N-1]$ 取到。然后利用中心差分以及$f_i \le 0$ (或$f_i \ge 0$) 得到矛盾。

最大模估计 (稳定性):

$$\|v\|_\infty \le \max\{|v_0|, |v_N|\} + C \max_{1 \le i \le N-1} |f_i| \tag{7}$$

Proof: 构造$g(x) = \frac{c}{2} x(x - L)$，然后利用极值原理证明。

收敛性结论:

若局部截断误差 $\|R\|_\infty = O(h^2)$，则整体误差 $\|E\|_\infty \le Ch^2$。
即格式在最大模意义下是 **二阶收敛** 的。

4.2 2. 能量方法 (Energy Method)

适用于 L^2 范数或 H^1 范数分析。基于分部求和公式。

内积与范数:

$$(u,v)=h\sum_{j=1}^{N-1}u_jv_j,\quad \|u\|_2=\sqrt{(u,u)},\quad |u|_1=\sqrt{(\delta_x u,\delta_x u)}$$

收敛性结论:

有限差分格式 (5) 在 L^2 范数下是 **二阶收敛** 的 ($O(h^2)$)。 在 H^1 半范数 ($\|u\|_1$) 下是 **一阶收敛** 的 ($O(h)$)。

5 二维泊松方程 (Poisson Equation)

5.1 模型与五点差分格式

方程：$-\Delta u=-(u_{xx}+u_{yy})=f(x,y)$，在矩形区域 Ω 上。
五点差分算子 (Five-point Stencil): 利用二阶中心差分近似 u_{xx} 和 u_{yy}：

$$L_h u_{i,j}=-\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h_x^2}-\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h_y^2}=f_{i,j} \tag{8}$$

5.2 误差分析

- **局部截断误差**:

$$R_{i,j}=O(h_x^2+h_y^2)$$

- **收敛性**: 利用类似的极值原理或能量法，可证明五点差分格式是二阶收敛的。

5.3 九点差分格式

类似于紧致差分格式，可以得到九点差分格式。截断误差：

$$O(h_x^4+h_y^4+h_x^2h_y^2)$$

5.4 极坐标变换

Possion方程的**极坐标变换**：

$$\partial_r^2 u+\frac{1}{r}\partial_r u+\partial_\theta^2 u=f(r,\theta) \tag{9}$$

边界条件：注意**法向**。

6 总结速查

概念	关键点
两点BVP	常微分方程 + 边界条件 (Dirichlet/Neumann/Robin)
打靶法	将BVP转化为IVP求解，需迭代找初值
有限差分法	$u'' \approx \delta_x^2 u$，导出三对角方程组，追赶法求解
极值原理	适用于 L^∞ 范数，证明稳定性与收敛性 ($O(h^2)$)
能量方法	适用于 L^2 范数，利用分部求和 ($O(h^2)$)
二维Poisson	五点差分格式，截断误差 $O(h_x^2 + h_y^2)$