函数逼近与数值积分

Jiaxiang Li

2025 年 12 月 26 日

目录

1 多项式插值逼近

1.1 基本概念

- **逼近类型**:
  - **局部逼近**: 如 Taylor 展开，只利用某点附近的信息，远离该点误差大。
  - **整体逼近**: 利用整个区间的信息（如插值），要求逼近函数 $\phi(x)$ 通过所有样本点 (x_i, y_i)。
- **Weierstrass 逼近定理**: 闭区间上的连续函数可以用多项式一致逼近。

1.2 Lagrange 插值

给定 $n+1$ 个互异节点 $x_0, \ldots, x_n$，寻找 n 次多项式 $P_n(x)$ 满足 $P_n(x_j) = f(x_j)$。
构造公式:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\ell_k(x), \quad \ell_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \tag{1}$$

截断误差定理:
若 $f \in C^{n+1}[a, b]$，则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得：

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中 $\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$。

1.3 Newton 插值

为了避免 Lagrange 插值在增加节点时需重新计算所有基函数的缺点，引入 Newton 形式。

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j) \tag{2}$$

其中 $f[x_0, \ldots, x_k]$ 为**差商**。

1.4 高次插值的缺陷与改进

- **Runge 现象**: 对于某些函数（如 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$），在等距节点下，随着多项式次数 n 增加，区间边缘的误差反而急剧增大，不收敛。
- **数值稳定性**: 高阶插值对舍入误差敏感。
- **解决方案**: 采用**分段低次插值**（如分段线性插值、样条插值）。

1.5 分段低次插值

将区间 $[a,b]$ 剖分为 n 个子区间，在每个子区间上作 k 次插值。

误差估计:

$$\|f(x)-P_{n,k}(x)\|_\infty \le Ch^{k+1}\|f^{(k+1)}\|_\infty$$

其中 h 为最大步长。当 $h\to 0$ 时收敛。

2 数值积分 (Numerical Integration)

目标：计算 $I[f]=\int_a^b f(x)dx$。基本思想：用插值多项式 $P_n(x)$ 代替 $f(x)$ 积分，即**插值型求积公式**。

2.1 代数精度

若求积公式对所有次数 $\le m$ 的多项式精确成立，但对 $m+1$ 次多项式不精确，则称其具有 m 次代数精度。

2.2 基本求积公式 (低阶)

- **梯形公式** ($n=1$):

  $$I\approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)],\quad \text{代数精度}=1$$

  误差 $E_1=-\frac{h^3}{12}f''(\eta)$。

- **Simpson 公式** ($n=2$):

  $$I\approx \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)],\quad \text{代数精度}=3$$

  误差 $E_2=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta)$。

2.3 梯形公式截断误差的求法

1. 构造辅助函数

设 $L_1(t)$ 是 $f(t)$ 在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的线性插值多项式。对任一固定的 $x\in(x_i,x_{i+1})$，构造辅助函数：

$$\varphi(t)=f(t)-L_1(t)-K(t-x_i)(t-x_{i+1}) \tag{3}$$

其中 K 为待定常数。选取 K 使得 $\varphi(x)=0$。

2. 利用 Rolle 定理推导

- 在端点处：由于 $L_1(x_i)=f(x_i)$ 且 $L_1(x_{i+1})=f(x_{i+1})$，故 $\varphi(x_i)=\varphi(x_{i+1})=0$。
- 在插值点处：根据 K 的选取，有 $\varphi(x)=0$。

因此，$\varphi(t)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上至少有三个互异零点。根据 **Rolle 定理**：

1. 存在 $\xi_1, \xi_2 \in (x_i, x_{i+1})$，使得 $\varphi'(\xi_1) = 0$ 且 $\varphi'(\xi_2) = 0$。
2. 进而存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$，使得 $\varphi''(\xi) = 0$。

3. 得出结论

对 $\varphi(t)$ 求二阶导数：$\varphi''(t) = f''(t) - 2K$。代入 ξ 得：

$$f''(\xi) - 2K = 0 \implies K = \frac{f''(\xi)}{2} \tag{4}$$

由此得到线性插值的余项表达式（即梯形公式的函数误差）：

$$f(x) - L_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1}) \tag{5}$$

再带入积分公式，得到梯形公式的截断误差：

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_1(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1})dx \tag{6}$$

2.4 复化求积公式 (Composite Rules)

为了提高精度，将区间 $[a, b]$ 等分为 n 段，在每一段上应用低阶公式。令 $h = \frac{b-a}{n}$。

2.4.1 1. 复化梯形公式 T_n

$$T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] \tag{7}$$

截断误差:

$$|I - T_n| \le \frac{b-a}{12}h^2 \max|f''(x)| = O(h^2)$$

2.4.2 2. 复化 Simpson 公式 S_n

需将区间分划为 $2m$ 段（$n = 2m$），节点为 $x_0, \ldots, x_{2m}$。

$$S_n = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1}) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + f(b)\right] \tag{8}$$

截断误差:

$$|I - S_n| \le \frac{b-a}{180}h^4 \max|f^{(4)}(x)| = O(h^4)$$

2.5 周期函数的超收敛性

若 $f(x) \in C^\infty$ 且是周期函数（周期为区间长度），复化梯形公式的收敛速度极快（**谱收敛**），优于任意代数次幂。

3 高精度求积算法

3.1 Richardson 外推法

利用误差展开式消除低阶误差项。已知复化梯形公式误差展开：$T_n = I + \tau_1 h^2 + \tau_2 h^4 + \dots$。

- 计算 T_n 和 T_{2n}（步长减半）。
- 线性组合消除 h^2 项：
$$S_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{3} = I + O(h^4)$$
  这实际上得到了**Simpson 公式**。

同理，对 S_n 外推可得 **Cotes 公式** ($O(h^6)$)。

3.2 Romberg 求积法

基于 Richardson 外推的递归算法。

1. 计算复化梯形序列 $T_1, T_2, T_4, \dots$ (记为 $R_{k,0}$)。
2. 利用递推公式生成高精度序列：
$$R_{k,m} = \frac{4^m R_{k,m-1} - R_{k-1,m-1}}{4^m - 1} \tag{9}$$

优点: 计算简单，收敛快，易于编程实现自动控制精度。

4 特殊积分与数值微分

4.1 奇异积分 (Singular Integrals)

处理积分区间无穷或被积函数无界的情况。

- **变量代换**: 消除奇点或将无穷区间变为有限区间。
- **分部积分**: 降低奇异性。
- **区间截断**: $\int_a^\infty \approx \int_a^R$，忽略尾部误差。

4.2 数值微分

- **插值型**: 对 $f(x)$ 作插值多项式 $P(x)$，用 $P'(x)$ 近似 $f'(x)$。
- **Richardson 外推**: 利用 Taylor 展开消除微分差商的截断误差。