常微分方程数值解 (II)：线性多步法

Jiaxiang Li

2025 年 12 月 24 日

目录

1 线性多步法的设计思想

1.1 Lagrange插值法

Lagrange插值法是通过已知的 m 个点 (t_j, u_j) 来构造一个多项式 $P_m(t)$，使得 $P_m(t_j) = u_j$。其形式为：

$$P_m(t) = \sum_{j=0}^{m-1} u_j \prod_{\substack{0 \le k \le m-1 \\ k \ne j}} \frac{t - t_k}{t_j - t_k} \tag{1}$$

1.2 基本形式

利用前 m 个点的信息 (t_j, u_j) 来计算 u_{n+1}。通式为：

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k u_{n-k} + h \sum_{k=-1}^{m-1} \beta_k f_{n-k} \tag{2}$$

- 若 $\beta_{-1} = 0$：**显式格式**（计算 u_{n+1} 不需要 f_{n+1}）。
- 若 $\beta_{-1} \neq 0$：**隐式格式**（需要迭代求解）。

1.3 Adams 类方法 (基于积分)

从积分方程出发：$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$。

1.3.1 1. Adams-Bashforth (AB) 方法 (显式)

利用 $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_{n-m+1}$ 处的 f 值构造 Lagrange 插值多项式逼近被积函数。

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{k=0}^{m-1} b_k f(t_{n-k}, y_{n-k}) \tag{3}$$

截断误差: $O(h^{m+1})$，即 m 阶精度。
特点: 显式，计算简单，但稳定性区间较小。

1.3.2 2. Adams-Moulton (AM) 方法 (隐式)

利用 $t_{n+1}, t_n, \ldots, t_{n-m+1}$ 处的 f 值构造 Lagrange 插值（多用了一个未知点）。

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{k=0}^{m} \tilde{b}_k f(t_{n+1-k}, y_{n+1-k}) \tag{4}$$

截断误差: $O(h^{m+2})$，即 $m+1$ 阶精度。
特点: 隐式，精度更高，稳定性更好，但需迭代求解。

1.4 BDF 方法 (向后差分公式)

思路: 利用 u_{n+1} 及前面 m 个点的 u 值构造插值多项式近似导数 $y'(t_{n+1})$。

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k u_{n-k} + h\beta_{-1} f_{n+1} = u_{n+1} \tag{5}$$

特点: 隐式方法，专门用于求解**刚性 (Stiff) 问题**。
稳定性限制: 只有当 $m \leq 6$ 时，BDF 格式才是零稳定的。

2 预估-校正方法 (Predictor-Corrector)

结合显式 AB 和隐式 AM 方法，避免非线性方程的求解。

2.1 P(EC)^{N}E 模式

1. **P (Predictor)**: 用 m 步 AB 格式预估初值 $u_{n+1}^{[0]}$。
2. **E (Evaluate)**: 计算 $f_{n+1}^{[l]} = f(t_{n+1}, u_{n+1}^{[l]})$。
3. **C (Corrector)**: 用 m 步 AM 格式校正 $u_{n+1}^{[l+1]}$。
4. 迭代校正 N 次，最后再计算一次 E。

收敛阶:

$$p = \min(\tilde{p} + N, p)$$

其中 $\tilde{p}$ 是预估阶数，p 是校正阶数。通常取 $\tilde{p} = p - 1$ 或相等。

3 线性多步法的理论分析

3.1 特征多项式

对于一般形式 $u_{n+1} - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k u_{n-k} = h \sum_{k=-1}^{m-1} \beta_k f_{n-k}$:

- **第一特征多项式**: $\rho(r) = r^m - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k r^{m-1-k}$
- **第二特征多项式**: $\sigma(r) = \beta_{-1} r^m + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k r^{m-1-k}$

3.2 相容性 (Consistency)

定义: 局部截断误差趋于 0。

充要条件:

$$\rho(1) = 0 \quad 且 \quad \rho'(1) = \sigma(1)$$

3.3 求相容阶数

一般线性 m 步法的局部截断误差为 $O(h^{m+1})$的充要条件是:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k = 1$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} (-k)^{\ell} \alpha_k + \sum_{k=-1}^{m-1} (-k)^{\ell-1} \ell \beta_k = 1, \quad \ell = 1, \cdots, p.$$

3.4 零稳定性 (Zero-Stability)

定义: 考虑 $h \to 0$ 时，差分方程对初值扰动的敏感性。

根条件 (Root Condition):
第一特征多项式 $\rho(r)$ 的所有根 r_j 满足 $|r_j| \leq 1$，且模为 1 的根必须是单根。

- **Adams 方法**: $\rho(r) = r^{m-1}(r-1)$，根为 $0, \ldots, 0, 1$。满足根条件，**总是零稳定**。
- **显式两步法**: 仅当 $|\alpha_1| \leq 1$ 且 $\alpha_1 \neq -1$ 时稳定。

3.5 收敛性 (Convergence)

Dahlquist 等价定理:
对于相容的线性多步法： **零稳定性** $\iff$ **收敛性**。

收敛阶: 若格式精度为 p，初值精度为 q，则整体收敛阶为 $\min(p, q)$。

4 绝对稳定性与 Dahlquist 障碍

4.1 绝对稳定性

考虑模型方程 $y' = \lambda y$ ($\mathrm{Re}(\lambda) < 0$)。稳定性由特征方程决定：

$$\pi(r) = \rho(r) - h\lambda\sigma(r) = 0$$

要求所有根 $|r_j| < 1$。

4.2 A-稳定性

如果一个数值方法的绝对稳定域包含整个左半复平面 $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$，则称该方法为 A-稳定的。

4.3 Dahlquist 障碍定理

1. **第一定理 (最大阶数)**: 零稳定的 m 步线性多步法，其最高阶数 p 满足：
   - $p \leq m+1$ (若 m 为奇数)
   - $p \leq m+2$ (若 m 为偶数)
2. **第二定理 (A-稳定性)**:
   - 所有的**显式**线性多步法都不是 A-稳定的。
   - A-稳定的线性多步法，其阶数 $p \leq 2$。
   - 二阶 A-稳定格式中，梯形公式 (Trapezoidal Rule) 误差常数最小（精度最高）。

5 计算实施与刚性问题

- **起步计算**: m 步法需要 m 个初值。通常使用同阶的单步法（如 Runge-Kutta）计算 $u_1, \ldots, u_{m-1}$。
- **刚性问题 (Stiff Problems)**: 应选用具有强绝对稳定性（A-稳定或大稳定域）的方法。
  - **推荐**: BDF 方法 (隐式) 或 A-稳定的低阶隐式方法。
  - **避免**: 显式方法（步长受限极严）、高阶显式多步法。

6 总结速查表

方法	类型	截断误差	零稳定性	适用场景
Adams-Bashforth	显式	$O(h^{m+1})$	总是稳定	非刚性，计算快
Adams-Moulton	隐式	$O(h^{m+2})$	总是稳定	精度要求高
Richardson (蛙跳)	显式(2步)	$O(h^2)$	**不稳定**	理论模型，不可用
BDF	隐式	$O(h^m)$	$m \leq 6$ 时稳定	**刚性问题**
Milne-Simpson	隐式(2步)	$O(h^4)$	条件稳定	高精度