

双曲型偏微分方程数值格式与分析

Jiaxiang Li

2025 年 12 月 23 日

目录

1	基本概念与分类	3
1.1	双曲型方程定义	3
1.2	解耦（对角化）	3
2	线性对流方程 (Linear Advection Equation)	3
2.1	显式格式 (Explicit Schemes)	3
2.1.1	1. 迎风格式 (Upwind Scheme)	3
2.1.2	2. 向前欧拉-中心差分 (FTCS)	4
2.1.3	3. Lax-Friedrichs (L-F) 格式	4
2.1.4	4. Lax-Wendroff (L-W) 格式	4
2.1.5	5. Beam-Warming 格式	4
2.1.6	6. Leap-Frog (蛙跳) 格式	4
2.2	隐式格式 (Implicit Schemes)	5
2.2.1	1. Crank-Nicolson (C-N) 格式	5
2.2.2	2. Wendroff 格式	5
3	稳定性分析 (Von Neumann Analysis)	5
3.1	关键格式的增长因子 G	5
4	CFL条件与特征线法	5
4.1	CFL条件 (Courant-Friedrichs-Lewy)	5
4.2	特征线插值重构	6
5	一阶双曲型方程组推广	6
5.1	广义迎风 (Unified Upwind)	6
6	二阶波动方程 (Second-order Wave Equation)	6
6.1	直接离散法 (Explicit Central Difference)	6
6.2	启动初值计算 (Start-up at $k = 1$)	7

6.3	三层格式的稳定性分析：降阶法	7
6.3.1	格式重写	7
6.3.2	构造向量系统	7
6.3.3	Fourier 模态分析	8
6.3.4	特征值分析	8

1 基本概念与分类

1.1 双曲型方程定义

考虑一阶线性偏微分方程组 (PDE):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

其中 $\vec{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$, 矩阵 $A_{m \times m}$ 为常矩阵。

双曲性判定:

- 双曲型: A 可对角化, 即存在 m 个实特征值。
- 严格双曲型: A 具有 m 个互不相同的实特征值。
- 对称双曲型: A 是对称矩阵。

1.2 解耦 (对角化)

令 $A = S^{-1}\Lambda S$, 其中 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ 。引入特征变量 $\vec{v} = S\vec{u}$ (黎曼不变量), 原方程解耦为特征形式:

$$\partial_t v_j + \lambda_j \partial_x v_j = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (2)$$

这意味着波沿特征线 $\frac{dx}{dt} = \lambda_j$ 传播。

2 线性对流方程 (Linear Advection Equation)

模型方程:

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0, \quad u(x, 0) = f(x) \quad (3)$$

定义 Courant 数 (CFL数) $r = \frac{\tau}{h}$ 。

2.1 显式格式 (Explicit Schemes)

2.1.1 1. 迎风格式 (Upwind Scheme)

物理意义: 信息顺风传播。

- 当 $a > 0$ (波向右), 用左偏心 (后向) 差分:

$$u_j^{k+1} = u_j^k - ar(u_j^k - u_{j-1}^k) = (1 - ar)u_j^k + ar u_{j-1}^k \quad (4)$$

- 当 $a < 0$ (波向左), 用右偏心 (前向) 差分:

$$u_j^{k+1} = u_j^k - ar(u_{j+1}^k - u_j^k) \quad (5)$$

稳定性: $0 \leq ar \leq 1$ (对于 $a > 0$)。

截断误差: $O(\tau + h)$, 一阶精度。

特性: 具有数值耗散 (Numerical Dissipation), 会将尖峰抹平。

2.1.2 2. 向前欧拉-中心差分 (FTCS)

$$u_j^{k+1} = u_j^k - \frac{ar}{2}(u_{j+1}^k - u_{j-1}^k) \quad (6)$$

稳定性: 无条件不稳定 (对于任何 $a \neq 0$)。

2.1.3 3. Lax-Friedrichs (L-F) 格式

将 FTCS 中的 u_j^k 替换为平均值 $\frac{1}{2}(u_{j+1}^k + u_{j-1}^k)$:

$$u_j^{k+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^k + u_{j-1}^k) - \frac{ar}{2}(u_{j+1}^k - u_{j-1}^k) \quad (7)$$

稳定性: $|ar| \leq 1$ 。

截断误差: $O(\tau + h^2 + \frac{h^2}{\tau})$ 。若 r 固定, 则为 $O(h)$ 。

注: 耗散性很大。

2.1.4 4. Lax-Wendroff (L-W) 格式

基于泰勒展开保留到 $O(\tau^2)$, 利用 $\partial_{tt}u = a^2\partial_{xx}u$ 替换时间导数:

$$u_j^{k+1} = u_j^k - \frac{ar}{2}(u_{j+1}^k - u_{j-1}^k) + \frac{a^2r^2}{2}(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) \quad (8)$$

稳定性: $|ar| \leq 1$ 。

截断误差: $O(\tau^2 + h^2)$, 二阶精度。

特性: 主要是相位误差 (色散), 数值耗散较小, 解在剧烈变化处可能有振荡。

2.1.5 5. Beam-Warming 格式

二阶迎风格式 (利用 x_j, x_{j-1}, x_{j-2}):

$$u_j^{k+1} = u_j^k - \frac{ar}{2}(3u_j^k - 4u_{j-1}^k + u_{j-2}^k) + \frac{a^2r^2}{2}(u_j^k - 2u_{j-1}^k + u_{j-2}^k) \quad (9)$$

稳定性: $0 \leq ar \leq 2$ (对于 $a > 0$)。

2.1.6 6. Leap-Frog (蛙跳) 格式

三层格式, 中心对时间, 中心对空间:

$$u_j^{k+1} = u_j^{k-1} - ar(u_{j+1}^k - u_{j-1}^k) \quad (10)$$

稳定性: $|ar| \leq 1$ 。

特性: 无耗散 ($|G| = 1$), 但有色散误差。需注意计算模式波 (Computational Mode)。

2.2 隐式格式 (Implicit Schemes)

2.2.1 1. Crank-Nicolson (C-N) 格式

时间方向梯形公式（平均）：

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} + a \frac{1}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{k+1} - u_{j-1}^{k+1}}{2h} + \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h} \right) = 0 \quad (11)$$

稳定性: 无条件稳定 ($|G| = 1$)。精度 $O(\tau^2 + h^2)$ 。

2.2.2 2. Wendroff 格式

在网格中心 $(j + 1/2, k + 1/2)$ 展开：

$$\frac{u_{j+1}^{k+1} - u_{j+1}^k + u_j^{k+1} - u_j^k}{2\tau} + a \frac{u_{j+1}^{k+1} - u_j^{k+1} + u_{j+1}^k - u_j^k}{2h} = 0 \quad (12)$$

整理后：

$$u_j^{k+1} + u_{j+1}^k = u_{j+1}^{k+1} + u_j^k \quad (\text{当 } r = 1 \text{ 时, 精确解}) \quad (13)$$

稳定性: 无条件稳定 ($|G| = 1$)。

3 稳定性分析 (Von Neumann Analysis)

假设 $u_j^k = G^k e^{i\xi jh}$ ，增长因子 $G(\xi) = \frac{u^{k+1}}{u^k}$ 。

3.1 关键格式的增长因子 G

格式	增长因子 $G(\theta)$ ($\theta = \xi h$)	稳定条件 $ G \leq 1$
FTCS	$1 - iar \sin \theta$	不稳定 ($ G \geq 1$)
Upwind	$1 - ar(1 - \cos \theta) - iar \sin \theta$	$0 \leq ar \leq 1$
Lax-Friedrichs	$\cos \theta - iar \sin \theta$	$ ar \leq 1$
Lax-Wendroff	$1 - 2a^2 r^2 \sin^2(\frac{\theta}{2}) - iar \sin \theta$	$ ar \leq 1$
Leap-Frog	$G - G^{-1} = -2iar \sin \theta \Rightarrow G = -i\lambda \pm \sqrt{1 - \lambda^2}$	$ ar \leq 1$
Crank-Nicolson	$\frac{1 - i(ar/2) \sin \theta}{1 + i(ar/2) \sin \theta}$	无条件稳定

注：对于 FTCS， $|G|^2 = 1 + a^2 r^2 \sin^2 \theta > 1$ ，所以无条件不稳定。

4 CFL条件与特征线法

4.1 CFL条件 (Courant-Friedrichs-Lewy)

几何解释：数值依赖域（Numerical Domain of Dependence）必须包含物理依赖域。

$$\left| \frac{a\tau}{h} \right| \leq C \quad (\text{通常 } C = 1) \quad (14)$$

CFL条件是显式格式稳定的必要条件。若违反CFL，数值解无法获得真解的信息，必发散。

4.2 特征线插值重构

利用 $u(x_j, t_{k+1}) = u(x_j - a\tau, t_k)$ 。令 $x_Q = x_j - a\tau$ 。

- 线性插值 $(x_{j-1}, x_j) \Rightarrow$ 一阶迎风格式。
- 二次插值 $(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) \Rightarrow$ Lax-Wendroff 格式。
- 二次插值 $(x_{j-2}, x_{j-1}, x_j) \Rightarrow$ Beam-Warming 格式。

5 一阶双曲型方程组推广

对于方程组 $\partial_t \vec{u} + A \partial_x \vec{u} = 0$ ，将标量格式中的 a 替换为 A 。

5.1 广义迎风 (Unified Upwind)

引入矩阵的绝对值 $|A| = S^{-1}|\Lambda|S$ ，其中 $|\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_m|)$ 。

$$\vec{u}_j^{k+1} = \vec{u}_j^k - \frac{r}{2}A(\vec{u}_{j+1}^k - \vec{u}_{j-1}^k) + \frac{r}{2}|A|(\vec{u}_{j+1}^k - 2\vec{u}_j^k + \vec{u}_{j-1}^k) \quad (15)$$

这相当于在中心差分基础上添加了人工粘性项 $\frac{h}{2\tau}|A|$ 。

方程组 CFL 条件:

$$\max_i |\lambda_i| \frac{\tau}{h} \leq 1 \iff \rho(A) \cdot r \leq 1$$

其中 $\rho(A)$ 为矩阵 A 的谱半径。

6 二阶波动方程 (Second-order Wave Equation)

$$\begin{cases} \partial_{tt}u = a^2 \partial_{xx}u \\ u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = \varphi_1(x) \end{cases} \quad (16)$$

6.1 直接离散法 (Explicit Central Difference)

利用 $\delta_t^2 u = a^2 \delta_x^2 u$:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} \quad (17)$$

推导公式:

$$u_j^{k+1} = 2u_j^k - u_j^{k-1} + a^2 r^2 (u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) \quad (18)$$

稳定性: $|ar| \leq 1$ 。

6.2 启动初值计算 (Start-up at $k = 1$)

中心离散：由于是三层格式，计算 u_j^1 需要 u_j^0 和 u_j^{-1} (虚点)，或利用泰勒展开：

$$u(x, \tau) \approx u(x, 0) + \tau \partial_t u(x, 0) + \frac{\tau^2}{2} \partial_{tt} u(x, 0)$$

代入方程条件 $\partial_{tt} u = a^2 \partial_{xx} u$ ：

$$u_j^1 = \varphi_0(x_j) + \tau \varphi_1(x_j) + \frac{\tau^2 a^2}{2} \frac{\varphi_0(x_{j+1}) - 2\varphi_0(x_j) + \varphi_0(x_{j-1}))}{h^2} \quad (19)$$

注意：这是考试常见考点，必须消除 u_j^{-1} 才能启动计算。若直接使用中心差分 $\partial_t u \approx \frac{u^1 - u^{-1}}{2\tau} = \varphi_1$ ，也能得到相同的二阶精度结果。

偏心离散：

$$\varphi_1(x_j) = \frac{u_j^2 + 4u_j^1 - 3u_j^0}{2\Delta t}$$

6.3 三层格式的稳定性分析：降阶法

对于二阶波动方程的显式中心差分格式，涉及时间层 $k+1, k, k-1$ ，属于**三层格式**。直接应用 Von Neumann 分析较为困难，标准做法是将其转化为等价的**两层向量系统**。

6.3.1 格式重写

根据笔记中的推导，考虑方程（注：此处笔记中符号为 $\delta_t^2 + a^2 \delta_x^2 = 0$ ，与标准波动方程 $\partial_{tt} = a^2 \partial_{xx}$ 符号相反，此处严格遵循笔记推导）：

$$\delta_t^2 u_j^k + a^2 \delta_x^2 u_j^k = 0 \quad (20)$$

展开差分算子：

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} + a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} = 0 \quad (21)$$

令网格比 $r = \tau/h$ ，整理得到显式迭代式：

$$u_j^{k+1} = -a^2 r^2 (u_{j+1}^k + u_{j-1}^k) + 2(1 + a^2 r^2) u_j^k - u_j^{k-1} \quad (22)$$

6.3.2 构造向量系统

引入辅助向量 \vec{W}_j^k ，包含当前层和上一层的信息：

$$\vec{W}_j^k = \begin{pmatrix} u_j^k \\ u_j^{k-1} \end{pmatrix} \quad (23)$$

则时间步进可以写成矩阵形式 $\vec{W}_j^{k+1} = \mathbf{L} \vec{W}_j^k$ 。对于第一分量 u_j^{k+1} ，利用迭代式；对于第二分量，利用恒等式 $u_j^k = u_j^k$ 。

$$\begin{pmatrix} u_j^{k+1} \\ u_j^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2a^2 r^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j^k \\ u_j^{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{j+1}^k \\ u_{j+1}^{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{j-1}^k \\ u_{j-1}^{k-1} \end{pmatrix} \quad (24)$$

6.3.3 Fourier 模态分析

设解具有形式 $\vec{W}_j^k = \hat{V}_k e^{i\xi x_j} = \hat{V}_k e^{i\xi jh}$ 。代入上式消去 $e^{i\xi jh}$ ：

$$\hat{V}_{k+1} = \left[\begin{pmatrix} 2 + 2a^2 r^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\xi h} + \begin{pmatrix} -a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi h} \right] \hat{V}_k \quad (25)$$

利用欧拉公式 $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ ，合并矩阵项：

$$\hat{V}_{k+1} = \begin{pmatrix} 2 + 2a^2 r^2 - 2a^2 r^2 \cos(\xi h) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{V}_k \quad (26)$$

利用半角公式 $1 - \cos(\xi h) = 2\sin^2(\frac{\xi h}{2})$ ，得到**增长矩阵** (Amplification Matrix) $G(\xi)$ ：

$$G(\xi) = \begin{pmatrix} 2 + 4a^2 r^2 \sin^2(\frac{\xi h}{2}) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

6.3.4 特征值分析

系统的稳定性取决于矩阵 G 的特征值 λ 。计算特征方程 $|G - \lambda I| = 0$ ：

$$\det \begin{pmatrix} 2 + 4a^2 r^2 \sin^2(\frac{\xi h}{2}) - \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (28)$$

$$-\lambda \left(2 + 4a^2 r^2 \sin^2 \frac{\xi h}{2} - \lambda \right) - (-1)(1) = 0 \quad (29)$$

$$\lambda^2 - \left(2 + 4a^2 r^2 \sin^2 \frac{\xi h}{2} \right) \lambda + 1 = 0 \quad (30)$$

这是一个关于 λ 的一元二次方程。

- 根据韦达定理，两根之积 $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ 。
- 两根之和 $\text{Trace}(G) = 2 + 4a^2 r^2 \sin^2 \frac{\xi h}{2} \geq 2$ 。

由于两根之和大于 2 且两根之积为 1，必有一个实根的模长大于 1（除非 $\sin(\dots) = 0$ ）。**结论：**该格式（ $\delta_t^2 + a^2 \delta_x^2 = 0$ ）是**无条件不稳定的**。

注：关于符号的说明

如果原方程是标准的波动方程 $\partial_{tt} u = a^2 \partial_{xx} u$ ，即 $\delta_t^2 u - a^2 \delta_x^2 u = 0$ ，则特征方程中的迹会变为：

$$\text{Trace}(G) = 2 - 4a^2 r^2 \sin^2 \frac{\xi h}{2}$$

此时若满足 $|2 - 4a^2 r^2| \leq 2$ ，即 CFL 条件 $ar \leq 1$ ，则特征值是一对共轭复数且模长为 1，格式才是**稳定的**。笔记中的推导展示了如何通过降阶法证明某一特定形式的不稳定性。