

抛物型偏微分方程数值解与分析

Jiaxiang Li

2025 年 12 月 27 日

目录

1	基本概念	2
1.1	模型方程	2
1.2	网格与记号	2
1.3	差分格式的矩阵表达	2
1.3.1	按初值稳定	2
1.3.2	按右端稳定	2
1.3.3	按初值和右端稳定的充要条件	3
2	一维差分格式的构造	3
2.1	1. 向前欧拉格式 (Forward Euler / FTCS)	3
2.2	2. 向后欧拉格式 (Backward Euler)	3
2.3	3. Crank-Nicolson (C-N) 格式	4
2.4	4. θ -格式 (Theta Scheme)	4
2.5	5. Richardson 格式 (三层显式)	4
2.6	6. Du-Fort-Frankel 格式	4
2.7	7. Douglas 紧致差分格式 (高阶空间精度)	5
3	边界条件处理 (Ghost Point)	5
4	稳定性分析 (重点)	5
4.1	1. 矩阵分析法	5
4.2	2. Fourier (Von Neumann) 分析法	5
5	二维热传导方程	6
5.1	1. 二维显式格式	6
5.2	2. 二维隐式与 ADI	6
5.3	极坐标变化	7
6	总结表 (考试速查)	7

1 基本概念

1.1 模型方程

一维常系数热传导方程（抛物型）：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & (x, t) \in (x_L, x_R) \times (0, T] \\ u(x, 0) = \phi(x), & \text{初值} \\ u(x_L, t) = 0, u(x_R, t) = 0 & \text{边值 (Dirichlet)} \end{cases} \quad (1)$$

1.2 网格与记号

- 空间步长: $h = \frac{x_R - x_L}{N}$, $x_j = x_L + jh$.
- 时间步长: $\tau = \frac{T}{M}$, $t_k = k\tau$.
- 网格比 (Mesh Ratio): $r = \frac{a\tau}{h^2}$ (无量纲数, 决定显式格式稳定性).
- 差分算子:

- 时间向前: $\delta_t^+ u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau}$
- 空间二阶中心: $\delta_x^2 u_j^k = \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}$

1.3 差分格式的矩阵表达

$$U^{k+1} = CU^k + \tau DF \quad (2)$$

1.3.1 按初值稳定

对于两个初始值 W^0 和 V^0 , 分别按差分格式求的数值解序列 W^k 和 V^k , 令误差序列 $E^k = W^k - V^k$, 若存在正常数 τ_0 和 K , 使得对一切的

$$0 < \tau \leq \tau_0 \text{ 和 } 0 \leq k\tau \leq T$$

一致的有

$$\|E^k\| \leq K\|E^0\| \quad (3)$$

则称差分格式按初值稳定。

1.3.2 按右端稳定

对于两个右端 F_1 和 F_2 , 从同一个初值 U^0 出发, 分别按差分格式求的数值解序列 W^k 和 V^k , 令误差序列 $E^k = W^k - V^k$ 和 $F = F_1 - F_2$, 若存在正常数 τ_0 和 K , 使得对一切的

$$0 < \tau \leq \tau_0 \text{ 和 } 0 \leq k\tau \leq T$$

一致的有

$$\|E^k\| \leq K\|F\| \quad (4)$$

则称差分格式按右端稳定。

1.3.3 按初值和右端稳定的充要条件

由差分格式(2)式, 有

$$\|C^k\| \leq K$$

更进一步, 若还有

$$\|D\| \leq K$$

则称差分格式按初值和右端稳定。

2 一维差分格式的构造

2.1 1. 向前欧拉格式 (Forward Euler / FTCS)

构造: 时间向前差分, 空间中心差分 (在点 (x_j, t_k) 展开)。

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + f_j^k \quad (5)$$

迭代式 (显式):

$$u_j^{k+1} = ru_{j-1}^k + (1 - 2r)u_j^k + ru_{j+1}^k + \tau f_j^k \quad (6)$$

截断误差: $O(\tau + h^2)$

稳定性: 条件稳定, 需满足 $r \leq \frac{1}{2}$ 。

2.2 2. 向后欧拉格式 (Backward Euler)

构造: 时间向后差分, 空间中心差分 (在点 (x_j, t_{k+1}) 展开)。

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + f_j^{k+1} \quad (7)$$

迭代式 (隐式): 需解三对角方程组。

$$-ru_{j-1}^{k+1} + (1 + 2r)u_j^{k+1} - ru_{j+1}^{k+1} = u_j^k + \tau f_j^{k+1} \quad (8)$$

三对角方程组:

截断误差: $O(\tau + h^2)$

稳定性: 无条件稳定 (A-stable)。

2.3 3. Crank-Nicolson (C-N) 格式

构造: 向前和向后格式的平均 ($\theta = 1/2$), 在 $(x_j, t_{k+1/2})$ 处展开。

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \frac{a}{2} [\delta_x^2 u_j^k + \delta_x^2 u_j^{k+1}] + f_j \quad (9)$$

截断误差: $O(\tau^2 + h^2)$ (二阶时间精度)

稳定性: 无条件稳定。

注: 计算量同向后欧拉, 需解三对角矩阵, 但精度更高。

2.4 4. θ -格式 (Theta Scheme)

通式:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a[\theta \delta_x^2 u_j^{k+1} + (1 - \theta) \delta_x^2 u_j^k] + f_j$$

。

- $\theta = 0$: 向前欧拉 (条件稳定)。
- $\theta = 1$: 向后欧拉 (无条件稳定)。
- $\theta = 1/2$: Crank-Nicolson (无条件稳定)。

2.5 5. Richardson 格式 (三层显式)

构造: 时间中心差分 (t_k 处), 空间中心差分。

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} = a \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + f_j \quad (10)$$

截断误差: $O(\tau^2 + h^2)$

稳定性: 绝对不稳定 (对于任何 $r > 0$)。

2.6 6. Du-Fort-Frankel 格式

构造: 对 Richardson 格式中的 u_j^k 进行平均修正: $u_j^k \approx \frac{u_j^{k+1} + u_j^{k-1}}{2}$ 。

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} = a \frac{u_{j+1}^k - (u_j^{k+1} + u_j^{k-1}) + u_{j-1}^k}{h^2} \quad (11)$$

截断误差: $O(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{h^2})$ (条件相容: 需 $\tau/h \rightarrow 0$)

稳定性: 无条件稳定 (显式)。

2.7 7. Douglas 紧致差分格式 (高阶空间精度)

利用 $1 + \frac{h^2}{12}\delta_x^2$ 算子提高空间精度。(先紧致差分, 再Crank-Nicolson):

$$\left(I + \frac{ah^2}{12}\delta_x^2\right) \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \frac{a}{2}\delta_x^2(u_j^{k+1} + u_j^k) + \left(1 + \frac{ah^2}{12}\delta_x^2\right)f_j \quad (12)$$

截断误差: $O(\tau^2 + h^4)$ (四阶空间精度)

性质: 紧致格式, 三对角矩阵求解, 高精度。

3 边界条件处理 (Ghost Point)

对于 Neumann 边界 $\frac{\partial u}{\partial x} = g(t)$ 或 Robin 边界:

- **中心差分法**: 引入虚拟点 (Ghost point) u_{-1}^k 或 u_{N+1}^k 。
- 利用边界方程 $\frac{u_1^k - u_{-1}^k}{2h} = g(t)$ 消去虚拟点。
- 保持了 $O(h^2)$ 的空间精度。

4 稳定性分析 (重点)

注: 两种方法最终得到的方程应该是一样的。

4.1 1. 矩阵分析法

将差分格式写成矩阵形式: $\mathbf{U}^{k+1} = C\mathbf{U}^k + \tau\mathbf{F}$ 。

- 稳定条件: 矩阵 C 的谱半径 $\rho(C) \leq 1$ (或 $1 + M\tau$)。
- 对于向前欧拉, $C = I - 2r(I - S)$, 要求 $|1 - 2r + 2r \cos \theta| \leq 1 \Rightarrow r \leq 1/2$ 。
- 其中, S 的特征值为 $\lambda_j = 2\cos(\frac{j\theta}{N})$ 。

4.2 2. Fourier (Von Neumann) 分析法

步骤:

1. 设误差或解的形式为 $u_j^k = \hat{u}_k e^{i\xi jh}$ (单模态)。

注: 若空间域为二维 (索引为 j, l), 形式扩展为 $u_{j,l}^k = \hat{u}_k e^{i(\xi jh_x + \eta lh_y)}$ 。

2. 将上述形式代入差分方程, 消去公因式 $e^{i\xi jh}$, 从而求得增长因子 $G(\xi, \tau) = \frac{\hat{u}_{k+1}}{\hat{u}_k}$ 。
3. 稳定判据: 要求对于所有的 ξ , 满足 $|G| \leq 1$ (或严格稳定性 $1 + M\tau$)。

常见格式的增长因子:

- 向前欧拉: $G = 1 - 4r \sin^2 \frac{\xi h}{2}$ 。
 - 稳定 $\iff -1 \leq 1 - 4r \leq 1 \Rightarrow r \leq \frac{1}{2}$ 。
- 向后欧拉: $G = \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \frac{\xi h}{2}}$ 。
 - 显然 $|G| \leq 1$, 无条件稳定。
- Crank-Nicolson: $G = \frac{1 - 2r \sin^2 \frac{\xi h}{2}}{1 + 2r \sin^2 \frac{\xi h}{2}}$ 。
 - 分母大于分子绝对值, 无条件稳定。
- Richardson: $G - G^{-1} = -8r \sin^2 \frac{\xi h}{2}$ 。
 - 二次方程必有一根模长大于1, 绝对不稳定。

5 二维热传导方程

方程: $\partial_t u = a(\partial_{xx} u + \partial_{yy} u)$ 。定义 $r_x = \frac{a\tau}{h_x^2}, r_y = \frac{a\tau}{h_y^2}$ 。

5.1 1. 二维显式格式

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + r_x \delta_x^2 u_{i,j}^k + r_y \delta_y^2 u_{i,j}^k \quad (13)$$

Von Neumann 分析:

$$G = 1 - 4r_x \sin^2 \frac{\xi_x h_x}{2} - 4r_y \sin^2 \frac{\xi_y h_y}{2}$$

稳定条件:

$r_x + r_y \leq \frac{1}{2}$

若 $h_x = h_y = h$, 则 $r \leq 1/4$ 。比一维情况 ($r \leq 1/2$) 更严格。

5.2 2. 二维隐式与 ADI

- 全隐式: 无条件稳定, 但需解大型稀疏矩阵 (非三对角), 计算量大。
- ADI (交替方向隐式): 将一步 τ 分为两步 $\tau/2$ 。
 - 第一步: x 方向隐式, y 方向显式。
 - 第二步: x 方向显式, y 方向隐式。

优点: 每一步只需解三对角矩阵, 且无条件稳定。

5.3 极坐标变化

二维热传导方程经过极坐标变换后的形式:

$$\partial_t u = a(\partial_{rr} u + \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} u) \quad (14)$$

注:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

同样适用于波动方程。

6 总结表 (考试速查)

格式名称	类型	截断误差	稳定性条件	特点
向前欧拉 (FTCS)	显式	$O(\tau + h^2)$	$r \leq 1/2$ (1D)	简单, 步长受限
向后欧拉	隐式	$O(\tau + h^2)$	无条件稳定	耗散强, 需解方程
Crank-Nicolson	隐式	$O(\tau^2 + h^2)$	无条件稳定	精度高, 常用
Richardson	显式(3层)	$O(\tau^2 + h^2)$	不稳定	理论模型, 不可用
Du-Fort-Frankel	显式(3层)	$O(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{h^2})$	无条件稳定	相容性有条件
Douglas	隐式(紧致)	$O(\tau^2 + h^4)$	无条件稳定	空间高精度
二维显式	显式	$O(\tau + h^2)$	$r_x + r_y \leq 1/2$	稳定性条件更严苛