

# 抛物型偏微分方程数值解与分析

Jiaxiang Li

2025 年 12 月 23 日

## 目录

<b>1 基本概念</b>	<b>2</b>
1.1 模型方程	2
1.2 网格与记号	2
1.3 差分格式的矩阵表达	2
1.3.1 按初值稳定	2
1.3.2 按右端稳定	2
1.3.3 按初值和右端稳定的充要条件	3
<b>2 一维差分格式的构造</b>	<b>3</b>
2.1 1. 向前欧拉格式 (Forward Euler / FTCS)	3
2.2 2. 向后欧拉格式 (Backward Euler)	3
2.3 3. Crank-Nicolson (C-N) 格式	4
2.4 4. $\theta$ -格式 (Theta Scheme)	4
2.5 5. Richardson 格式 (三层显式)	4
2.6 6. Du-Fort-Frankel 格式	4
2.7 7. Douglas 紧致差分格式 (高阶空间精度)	4
<b>3 边界条件处理 (Ghost Point)</b>	<b>5</b>
<b>4 稳定性分析 (重点)</b>	<b>5</b>
4.1 1. 矩阵分析法	5
4.2 2. Fourier (Von Neumann) 分析法	5
<b>5 二维热传导方程</b>	<b>6</b>
5.1 1. 二维显式格式	6
5.2 2. 二维隐式与 ADI	6
5.3 极坐标变化	6
<b>6 总结表 (考试速查)</b>	<b>7</b>

# 1 基本概念

## 1.1 模型方程

一维常系数热传导方程（抛物型）：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & (x, t) \in (x_L, x_R) \times (0, T] \\ u(x, 0) = \phi(x), & \text{初值} \\ u(x_L, t) = 0, \quad u(x_R, t) = 0 & \text{边值 (Dirichlet)} \end{cases} \quad (1)$$

## 1.2 网格与记号

- 空间步长： $h = \frac{x_R - x_L}{N}$ ,  $x_j = x_L + jh$ .
- 时间步长： $\tau = \frac{T}{M}$ ,  $t_k = k\tau$ .
- 网格比 (Mesh Ratio):  $r = \frac{a\tau}{h^2}$  (无量纲数，决定显式格式稳定性).
- 差分算子：
  - 时间向前:  $\delta_t^+ u_j^k = \frac{u_{j+1}^{k+1} - u_j^k}{\tau}$
  - 空间二阶中心:  $\delta_x^2 u_j^k = \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}$

## 1.3 差分格式的矩阵表达

$$U^{k+1} = CU^k + \tau DF \quad (2)$$

### 1.3.1 按初值稳定

对于两个初始值  $W^0$  和  $V^0$ , 分别按差分格式求的数值解序列  $W^k$  和  $V^k$ , 令误差序列  $E^k = W^k - V^k$ , 若存在正常数  $\tau_0$  和  $K$ , 使得对一切的

$$0 < \tau \leq \tau_0 \text{ 和 } 0 \leq k\tau \leq T$$

一致的有

$$\|E^k\| \leq K\|E^0\| \quad (3)$$

则称差分格式按初值稳定。

### 1.3.2 按右端稳定

对于两个右端  $F_1$  和  $F_2$ , 从同一个初值  $U^0$  出发, 分别按差分格式求的数值解序列  $W^k$  和  $V^k$ , 令误差序列  $E^k = W^k - V^k$  和  $F = F_1 - F_2$ , 若存在正常数  $\tau_0$  和  $K$ , 使得对一切的

$$0 < \tau \leq \tau_0 \text{ 和 } 0 \leq k\tau \leq T$$

一致的有

$$\|E^k\| \leq K \|F\| \quad (4)$$

则称差分格式按右端稳定。

### 1.3.3 按初值和右端稳定的充要条件

由差分格式(2)式，有

$$\|C^k\| \leq K$$

更进一步，若还有

$$\|D\| \leq K$$

则称差分格式按初值和右端稳定。

## 2 一维差分格式的构造

### 2.1 1. 向前欧拉格式 (Forward Euler / FTCS)

构造：时间向前差分，空间中心差分（在点  $(x_j, t_k)$  展开）。

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + f_j^k \quad (5)$$

迭代式（显式）：

$$u_j^{k+1} = ru_{j-1}^k + (1 - 2r)u_j^k + ru_{j+1}^k + \tau f_j^k \quad (6)$$

截断误差： $O(\tau + h^2)$

稳定性：条件稳定，需满足  $r \leq \frac{1}{2}$ 。

### 2.2 2. 向后欧拉格式 (Backward Euler)

构造：时间向后差分，空间中心差分（在点  $(x_j, t_{k+1})$  展开）。

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + f_j^{k+1} \quad (7)$$

迭代式（隐式）：需解三对角方程组。

$$-ru_{j-1}^{k+1} + (1 + 2r)u_j^{k+1} - ru_{j+1}^{k+1} = u_j^k + \tau f_j^{k+1} \quad (8)$$

三对角方程组：

截断误差： $O(\tau + h^2)$

稳定性：无条件稳定 (A-stable)。

### 2.3 3. Crank-Nicolson (C-N) 格式

构造: 向前和向后格式的平均 ( $\theta = 1/2$ ), 在  $(x_j, t_{k+1/2})$  处展开。

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \frac{a}{2} [\delta_x^2 u_j^k + \delta_x^2 u_j^{k+1}] + f_j \quad (9)$$

截断误差:  $O(\tau^2 + h^2)$  (二阶时间精度)

稳定性: 无条件稳定。

注: 计算量同向后欧拉, 需解三对角矩阵, 但精度更高。

### 2.4 4. $\theta$ -格式 (Theta Scheme)

通式:  $\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} = a[\theta \delta_x^2 u^{k+1} + (1 - \theta) \delta_x^2 u^k]$ 。

- $\theta = 0$ : 向前欧拉 (条件稳定)。
- $\theta = 1$ : 向后欧拉 (无条件稳定)。
- $\theta = 1/2$ : Crank-Nicolson (无条件稳定)。

### 2.5 5. Richardson 格式 (三层显式)

构造: 时间中心差分 ( $t_k$  处), 空间中心差分。

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} = a \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + f_j \quad (10)$$

截断误差:  $O(\tau^2 + h^2)$

稳定性: 绝对不稳定 (对于任何  $r > 0$ )。

### 2.6 6. Du-Fort-Frankel 格式

构造: 对 Richardson 格式中的  $u_j^k$  进行平均修正:  $u_j^k \approx \frac{u_j^{k+1} + u_j^{k-1}}{2}$ 。

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} = a \frac{u_{j+1}^k - (u_j^{k+1} + u_j^{k-1}) + u_{j-1}^k}{h^2} \quad (11)$$

截断误差:  $O(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{h^2})$  (条件相容: 需  $\tau/h \rightarrow 0$ )

稳定性: 无条件稳定 (显式)。

### 2.7 7. Douglas 紧致差分格式 (高阶空间精度)

利用  $1 + \frac{h^2}{12} \delta_x^2$  算子提高空间精度。

$$\left( I + \frac{ah^2}{12} \delta_x^2 \right) \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \frac{a}{2} \delta_x^2 (u_j^{k+1} + u_j^k) + \dots \quad (12)$$

截断误差:  $O(\tau^2 + h^4)$  (四阶空间精度)

性质: 紧致格式, 三对角矩阵求解, 高精度。

### 3 边界条件处理 (Ghost Point)

对于 Neumann 边界  $\frac{\partial u}{\partial x} = g(t)$  或 Robin 边界:

- \*\*中心差分法\*\*: 引入虚拟点 (Ghost point)  $u_{-1}^k$  或  $u_{N+1}^k$ 。
- 利用边界方程  $\frac{u_1^k - u_{-1}^k}{2h} = g(t)$  消去虚拟点。
- 保持了  $O(h^2)$  的空间精度。

### 4 稳定性分析 (重点)

#### 4.1 1. 矩阵分析法

将差分格式写成矩阵形式:  $\mathbf{U}^{k+1} = C\mathbf{U}^k + \tau\mathbf{F}$ 。

- 稳定条件: 矩阵  $C$  的谱半径  $\rho(C) \leq 1$  (或  $1 + M\tau$ )。
- 对于向前欧拉,  $C = I - 2r(I - S)$ , 要求  $|1 - 2r + 2r \cos \theta| \leq 1 \Rightarrow r \leq 1/2$ 。

#### 4.2 2. Fourier (Von Neumann) 分析法

步骤:

1. 设误差或解的形式为  $u_j^k = \hat{u}_k e^{i\xi j h}$  (单模态)。

注: 若空间域为二维 (索引为  $j, l$ ), 形式扩展为  $u_{j,l}^k = \hat{u}_k e^{i(\xi j h_x + \eta l h_y)}$ 。

2. 将上述形式代入差分方程, 消去公因式  $e^{i\xi j h}$ , 从而求得增长因子  $G(\xi, \tau) = \frac{\hat{u}_{k+1}}{\hat{u}_k}$ 。
3. 稳定判据: 要求对于所有的  $\xi$ , 满足  $|G| \leq 1$  (或严格稳定性  $1 + M\tau$ )。

常见格式的增长因子:

- 向前欧拉:  $G = 1 - 4r \sin^2 \frac{\xi h}{2}$ 。
  - 稳定  $\iff -1 \leq 1 - 4r \leq 1 \Rightarrow r \leq \frac{1}{2}$ 。
- 向后欧拉:  $G = \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \frac{\xi h}{2}}$ 。
  - 显然  $|G| \leq 1$ , 无条件稳定。
- Crank-Nicolson:  $G = \frac{1 - 2r \sin^2 \frac{\xi h}{2}}{1 + 2r \sin^2 \frac{\xi h}{2}}$ 。
  - 分母大于分子绝对值, 无条件稳定。
- Richardson:  $G - G^{-1} = -8r \sin^2 \frac{\xi h}{2}$ 。
  - 二次方程必有一根模长大于1, 绝对不稳定。

## 5 二维热传导方程

方程:  $\partial_t u = a(\partial_{xx} u + \partial_{yy} u)$ 。定义  $r_x = \frac{a\tau}{h_x^2}, r_y = \frac{a\tau}{h_y^2}$ 。

### 5.1 1. 二维显式格式

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + r_x \delta_x^2 u_{i,j}^k + r_y \delta_y^2 u_{i,j}^k \quad (13)$$

Von Neumann 分析:

$$G = 1 - 4r_x \sin^2 \frac{\xi_x h_x}{2} - 4r_y \sin^2 \frac{\xi_y h_y}{2}$$

稳定条件:

$$r_x + r_y \leq \frac{1}{2}$$

若  $h_x = h_y = h$ , 则  $r \leq 1/4$ 。比一维情况 ( $r \leq 1/2$ ) 更严格。

### 5.2 2. 二维隐式与 ADI

- 全隐式: 无条件稳定, 但需解大型稀疏矩阵 (非三对角), 计算量大。
- ADI (交替方向隐式): 将一步  $\tau$  分为两步  $\tau/2$ 。
  - 第一步:  $x$  方向隐式,  $y$  方向显式。
  - 第二步:  $x$  方向显式,  $y$  方向隐式。

优点: 每一步只需解三对角矩阵, 且无条件稳定。

### 5.3 极坐标变化

二维热传导方程经过极坐标变换后的形式:

$$\partial_t u = a \left( \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} u \right) \quad (14)$$

## 6 总结表 (考试速查)

格式名称	类型	截断误差	稳定性条件	特点
向前欧拉 (FTCS)	显式	$O(\tau + h^2)$	$r \leq 1/2$ (1D)	简单, 步长受限
向后欧拉	隐式	$O(\tau + h^2)$	无条件稳定	耗散强, 需解方程
Crank-Nicolson	隐式	$O(\tau^2 + h^2)$	无条件稳定	精度高, 常用
Richardson	显式(3层)	$O(\tau^2 + h^2)$	不稳定	理论模型, 不可用
Du-Fort-Frankel	显式(3层)	$O(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{h^2})$	无条件稳定	相容性有条件
Douglas	隐式(紧致)	$O(\tau^2 + h^4)$	无条件稳定	空间高精度
二维显式	显式	$O(\tau + h^2)$	$r_x + r_y \leq 1/2$	稳定性条件更严苛