

# Hochfrequenztechnik

## Teil 2 - Anwendungen

Ausgabe 0.3, 15.03.2016  
Autor: Stephan Rupp, Andreas Maier

T2ELN3001  
Elektrotechnik  
DHBW Stuttgart



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Charakterisierung von Hochfrequenzschaltungen</b>	<b>6</b>
1.1. Impedanz-, Admittanz- und Kettenmatrix . . . . .	6
1.2. Einführung von Wellengrößen . . . . .	11
1.3. Beschreibung eines Zweitors durch Streuparameter . . . . .	13
1.4. Streuparameter und Wirkleistung . . . . .	15
1.5. Eigenschaften von Zweitoren . . . . .	17
1.5.1. Verlustfreiheit . . . . .	17
1.5.2. Übertragungssymmetrie . . . . .	18
1.5.3. Vollständige Symmetrie . . . . .	18
1.5.4. Rückwirkungsfreiheit . . . . .	18
1.5.5. Reflexionsfreiheit . . . . .	18
1.6. Streuparameter berechnen . . . . .	19
1.6.1. Beispiel einer verlustlosen Leitung . . . . .	20
1.6.2. Berechnung mit Hilfe der Impedanzmatrix . . . . .	21
1.6.3. Berechnung mit Hilfe der Kettenmatrix . . . . .	21
1.6.4. Signalflussmethode . . . . .	22
1.6.5. Streuparameter eines RC-Gliedes . . . . .	26
1.6.6. Anschluss eines Zweitors mit Hilfe einer Leitung . . . . .	28
1.7. Mehrtore . . . . .	30
1.7.1. Verlustfreiheit . . . . .	31
1.7.2. Übertragungssymmetrie . . . . .	32
1.7.3. Vollständige Symmetrie . . . . .	32
1.7.4. Reflexionsfreiheit . . . . .	32
1.7.5. Spezielle Eigenschaften des Dreitors . . . . .	32
1.7.6. Dreitor aus Leitungen . . . . .	32
1.7.7. Zirkulator . . . . .	40
<b>2. Spezielle Netzwerke und Elemente</b>	<b>42</b>
2.1. Gleich- und Gegentaktbetrieb . . . . .	42
2.2. Streuparameter aus Gleich- und Gegentakt ermitteln . . . . .	43
2.3. Beispiel zum Gleich- und Gegentaktbetrieb . . . . .	47
2.4. Resistive Signalteiler . . . . .	51
2.5. Reaktive Signalteiler . . . . .	53
2.6. Wilkinson-Leistungsteiler . . . . .	57
2.7. Branchline-Koppler . . . . .	64
<b>3. Übungen</b>	<b>71</b>
3.1. Anpassnetzwerke . . . . .	71
3.2. Impedanz-, Admittanz- und Kettenmatrix . . . . .	73
3.3. Kettenmatrix einer verlustlosen Leitung . . . . .	74
3.4. Querimpedanz . . . . .	75
3.5. Leitung und Zweitor . . . . .	75
3.6. Passives Zweitor . . . . .	78

3.7. Dämpfungsglied . . . . .	80
3.8. Viertelwellentransformator . . . . .	81
3.9. Phasoren . . . . .	84
3.10. Rat-Race-Koppler . . . . .	87
<b>4. Klausuraufgaben</b>	<b>92</b>
<b>A. Phasoren</b>	<b>93</b>
<b>B. Smith-Diagramm</b>	<b>95</b>

## Symbolverzeichnis

Symbol	Einheit	Beschreibung
$[A]$	$1, \Omega, \frac{1}{\Omega}$	Kettenmatrix
$a$	$\sqrt{W}$	Wellengröße der hinlaufenden Welle
$[a]$	$\sqrt{W}$	Vektor der hinlaufenden Welle
$b$	$\sqrt{W}$	Wellengröße der rücklaufenden Welle
$[b]$	$\sqrt{W}$	Vektor der rücklaufenden Welle
$C$	$F$	Kapazität
dB	—	Dezibel
$e$	1	Eulersche Zahl
$[E]$	1	Einheitsmatrix
$I$	$A$	Strom
$I_h$	$A$	Strom der hinlaufenden Welle
$I_r$	$A$	Strom der rücklaufenden Welle
$l$	$m$	Länge
$L$	$H$	Induktivität
$P$	$W$	Leistung
$P_a$	$W$	Leistung der hinlaufenden Welle
$P_b$	$W$	Leistung der rücklaufenden Welle
$P_B$	$W$	Blindleistung
$R$	$\Omega$	reeller Widerstand
$R_W$	$\Omega$	reeller Wellenwiderstand
$[S]$	1	Streumatrix
$U$	$V$	Spannung
$U_h$	$V$	Spannung der hinlaufenden Welle
$U_r$	$V$	Spannung der rücklaufenden Welle
$[Y]$	$S$	Admittanzmatrix
$[Z]$	$\Omega$	Impedanzmatrix

# 1. Charakterisierung von Hochfrequenzschaltungen

In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften hochfrequenter Schaltungen mit mehreren Eingängen und Ausgängen hauptsächlich mit Hilfe der Streuung von Wellen beschrieben. Die sogenannten Streuparameter haben die Eigenschaft, dass sie sich messtechnisch leichter erfassen lassen als Impedanzen oder Admittanzen, weshalb sie in der Hochfrequenztechnik sehr gebräuchlich sind.

Die Beschreibung von Netzwerken durch Impedanzmatrizen und Admittanzmatrizen ist jedoch ebenfalls wichtig für das Verständnis der Zusammenhänge. Sie werden im Abschnitt 1.1 deshalb kurz beschrieben. Daneben existieren weitere speziellere Matrizen zur Beschreibung von Netzwerken. Ein gebräuchliches Beispiel hierzu ist die sogenannte Kettenmatrix.

In den folgenden Abschnitten werden die Bedeutung der Matrizen und deren Berechnungen zunächst an Zweitoren gezeigt. Anschließend werden die Verfahren auf Anordnungen mit mehr als zwei Toren übertragen. Abschnitt 1 schließt mit einigen Übungen zu verschiedenen Netzwerken mit zwei oder mehreren Toren ab.

Netzwerke mit zwei Toren (z.B. einem Eingangstor und einem Ausgangstor) bezeichnet man als Zweitor, wobei im Gegensatz zu den allgemeineren Vierpolen die Torbedingung erfüllt sein muss. Diese besagt, dass an einem Tor die Summe aller Ströme Null ist. Mathematisch bedeutet dies, dass  $I_1 = I'_1$  und  $I_2 = I'_2$  ist. Die Bedingung muss auch durch die äußere Beschaltung gewährleistet werden und hängt nicht zwangsläufig vom Zweitor selbst ab.



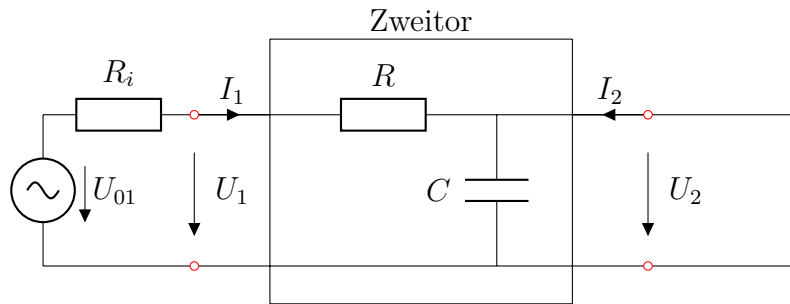
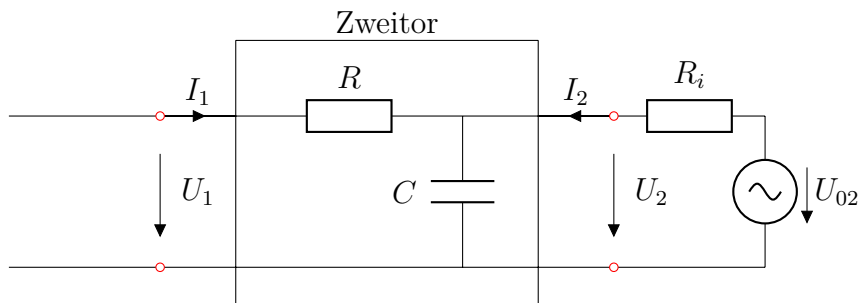
Abbildung 1.0.1: Zweitor

## 1.1. Impedanz-, Admittanz- und Kettenmatrix

Ist das Innenleben eines Zweitores unbekannt, lassen sich charakteristische Größen für das Zweitor messtechnisch ermitteln. Je nach hierfür vorgenommener äußerer Beschaltung des Zweitores unterscheidet man zunächst Impedanzparameter ( $Z$ -Parameter) und Admittanzparameter ( $Y$ -Parameter). Sehr häufig wird die **Impedanzmatrix** verwendet, die die Torspannungen in Abhängigkeit der Ströme an den Toren angibt.

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

In vektorieller Schreibweise gilt  $[U] = [Z][I]$ , wobei  $[Z]$  die Impedanzmatrix darstellt. Die einzelnen  $Z$ -Parameter  $Z_{ij}$  bilden dabei die Impedanzmatrix des Zweitores, die sich

Abbildung 1.1.1: Messbedingungen für die Z-Parameter  $Z_{11}$  und  $Z_{21}$ Abbildung 1.1.2: Messbedingungen für die Z-Parameter  $Z_{12}$  und  $Z_{22}$ 

über die in den Abbildungen 1.1.1 und 1.1.2 dargestellten Beschaltungen des Zweitors messtechnisch bestimmen lassen. Der Parameter  $Z_{21}$ , der auch als Leerlauf-Kernimpedanz bezeichnet wird, lässt sich beispielsweise über das Verhältnis von  $U_2$  zu  $I_1$  bestimmen, wobei die Bedingung  $I_2 = 0$  erfüllt sein muss. Die einzelnen Vorschriften zur Bestimmung der Z-Parameter lassen sich direkt aus Gleichung 1.1 ableiten.

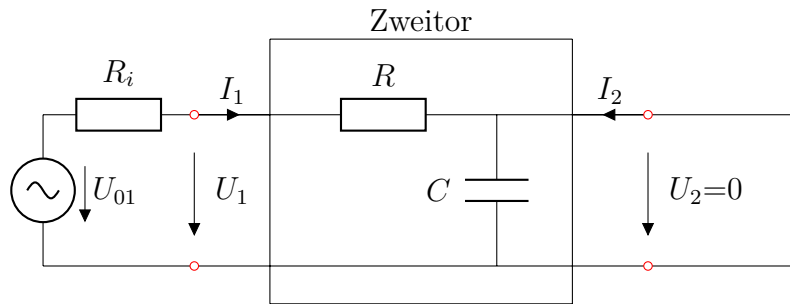
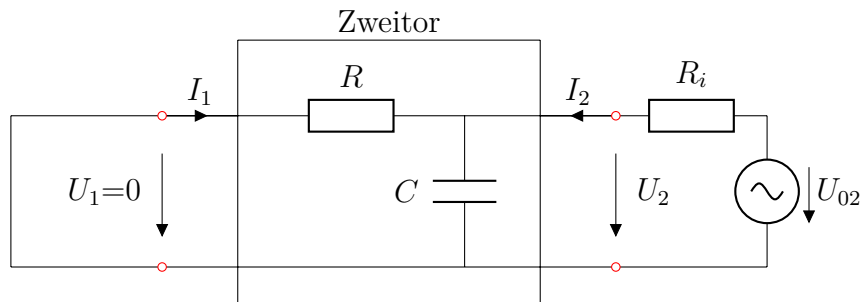
Die Elemente der Impedanzmatrix sind:

$Z_{11} = U_1/I_1 \Big _{I_2=0}$	Leerlauf-Eingangsimpedanz
$Z_{21} = U_2/I_1 \Big _{I_2=0}$	Leerlauf-Kernimpedanz vorwärts
$Z_{12} = U_1/I_2 \Big _{I_1=0}$	Leerlauf-Kernimpedanz rückwärts
$Z_{22} = U_2/I_2 \Big _{I_1=0}$	Leerlauf-Ausgangsimpedanz

Die Bedeutung dieser Bezeichnungen wird aus den hierfür erforderlichen Beschaltungen nach Abbildungen 1.1.1 und 1.1.2 ersichtlich.

In ähnlicher Weise erfolgt die Messung der **Admittanzmatrix**. Die Abbildungen 1.1.3 und 1.1.4 zeigen die Messbedingungen hierfür. Bei der Messung der Y-Parameter werden die Eingänge bzw. Ausgänge jedoch kurzgeschlossen.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Abbildung 1.1.3: Messbedingungen für die Y-Parameter  $Y_{11}$  und  $Y_{21}$ Abbildung 1.1.4: Messbedingungen für die Y-Parameter  $Y_{12}$  und  $Y_{22}$ 

In vektorieller Schreibweise gilt  $[I] = [Y][U]$ , wobei  $[Y]$  die Admittanzmatrix darstellt. Die Elemente der Admittanzmatrix sind:

$y_{11} = I_1/U_1 \Big _{U_2=0}$	Kurzschluss-Eingangsadmittanz
$y_{21} = I_2/U_1 \Big _{U_2=0}$	Kurzschluss-Kernadmittanz vorwärts
$y_{12} = I_1/U_2 \Big _{U_1=0}$	Kurzschluss-Kernadmittanz rückwärts
$y_{22} = I_2/U_2 \Big _{U_1=0}$	Kurzschluss-Ausgangsadmittanz

Die Bedeutung dieser Bezeichnungen wird wiederum aus den hierfür erforderlichen Beschaltungen ersichtlich.

Impedanzmatrix und Admittanzmatrix stehen in engem Zusammenhang zueinander, wobei  $[Y] = [Z]^{-1}$  gilt, d.h. die Admittanzmatrix ist die inverse Impedanzmatrix. Je nach Netzwerk und Anwendung kann die Beschreibung durch Impedanzen oder Admittanzen geschickter sein.

Daneben gibt es mit der **Kettenmatrix**  $[A]$  eine weitere sehr gebräuchliche Matrixform. Sie verknüpft die Ausgangsspannung sowie den Ausgangsstrom mit Eingangsstrom und Eingangsspannung. Zu beachten ist, dass der Strom  $I_2$  negativ eingeht. Der Grund hierfür wird bei der Hintereinschaltung bzw. Verkettung von Zweitoren deutlich.

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$



Die einzelnen Elemente der Kettenmatrix lassen sich ebenfalls messtechnisch ermitteln, wobei hier je nach zu messendem Matrixelement Tor 2 kurzgeschlossen wird ( $U_2 = 0$ ) oder sich im Leerlauf befindet ( $I_2 = 0$ ). Aus den unterschiedlichen Berechnungsvorschriften zur Ermittlung der Kettenmatrix geht auch hervor, dass die Elemente verschiedene Einheiten besitzen. So sind  $A_{11}$  und  $A_{22}$  dimensionslos, die Elemente  $A_{12}$  und  $A_{21}$  besitzen die Einheiten  $\Omega$  bzw.  $1/\Omega$ .

$A_{11} = U_1/U_2 \Big _{I_2=0}$	Leerlauf-Spannungsübersetzung
$A_{21} = I_1/U_2 \Big _{I_2=0}$	Leerlauf-Kernadmittanz vorwärts
$A_{12} = -U_1/I_2 \Big _{U_2=0}$	Kurzschluss-Kernimpedanz vorwärts
$A_{22} = -I_1/I_2 \Big _{U_2=0}$	Kurzschluss-Stromübersetzung

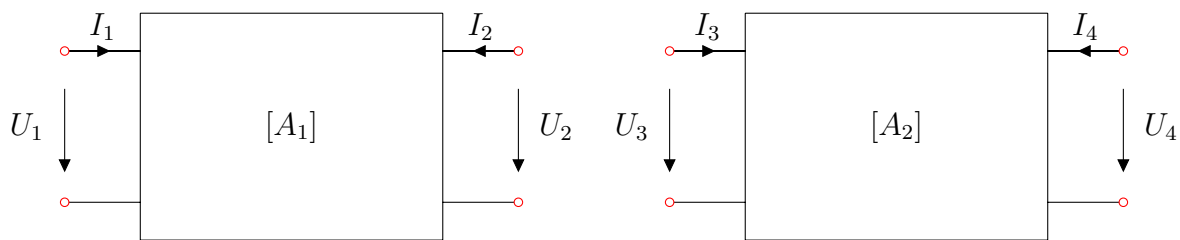


Abbildung 1.1.5: Verkettung von Zweitoren

Die Kettenmatrix wird zur Berechnung von hintereinandergeschalteten Zweitoren verwendet, wie in Abbildung 1.1.5 gegeben. Die entsprechenden Matrizen der einzelnen Zweitore sind mit  $[A_1]$  und  $[A_2]$  bereits bestimmt worden. Schließt man beide Zweitore zusammen (Tor 2 an Tor 3), so ergibt sich die Kettenmatrix des neuen verketteten Zweitors durch einfache Multiplikation von  $[A_1]$  und  $[A_2]$ . Dies ist möglich, da  $U_2 = U_3$  und  $-I_2 = I_3$  ist. Die Verkettung kann beliebig fortgesetzt werden, sodass gilt

$$[A_{\text{gesamt}}] = [A_1] \cdot [A_2] \cdots [A_N]. \quad (1.4)$$

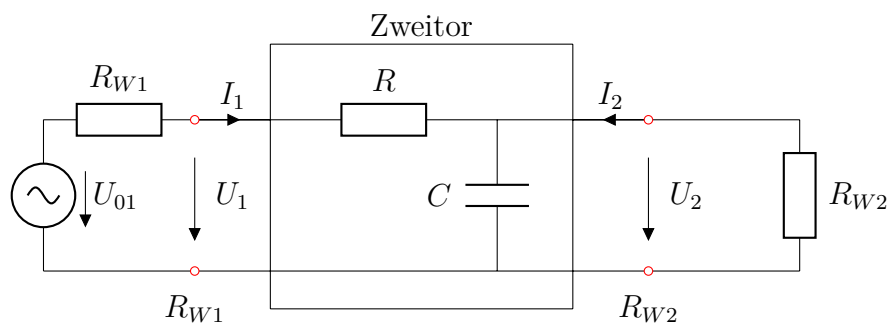
Die Kettenmatrix kann in die Impedanzmatrix oder auch in die Admittanzmatrix umgewandelt werden oder aus diesen berechnet werden. Ein Zusammenhang von Impedanzmatrix und Kettenmatrix lässt sich beispielsweise leicht herleiten, indem man das Gleichungssystem 1.1 auf die Form von 1.3 umstellt und einen Koeffizientenvergleich durchführt.

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{Z_{11}}{Z_{21}} \\
A_{12} &= \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}} \\
A_{21} &= \frac{1}{Z_{21}} \\
A_{22} &= \frac{Z_{22}}{Z_{21}}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Die Zusammenhänge lassen sich natürlich auch umgekehrt herleiten.

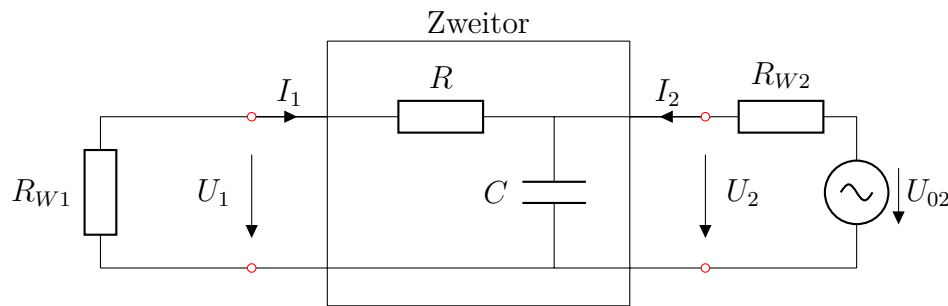
$$\begin{aligned}
Z_{11} &= \frac{A_{11}}{A_{21}} \\
Z_{12} &= \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}{A_{21}} \\
Z_{21} &= \frac{1}{A_{21}} \\
Z_{22} &= \frac{A_{22}}{A_{21}}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Frage 1.1.1: Leiten Sie die genannten Umrechnungsvorschriften zwischen Kettenmatrix und Impedanzmatrix her



**Abbildung 1.1.6:** Messbedingungen für die S-Parameter  $s_{11}$  und  $s_{21}$

In der Hochfrequenztechnik ist allerdings die Messung von Strömen in der Praxis oft schwer realisierbar. Zudem sind gut definierte Kurzschlüsse und Leerläufe - wie man sie für die Bestimmung der bisherigen Matrizen benötigt - in der Hochfrequenztechnik oftmals problematisch. Man erhält daher besser definierte Messbedingungen, wenn man die Eingänge bzw. Ausgänge des Zweitors mit dem jeweiligen Wellenwiderstand abschließt. In diesem Fall ist der Leitungsabschluss reflexionsfrei. Die Abbildungen 1.1.6 und 1.1.7 zeigen die Messbedingungen für die sogenannten Streuparameter.



**Abbildung 1.1.7:** Messbedingungen für die S-Parameter  $s_{12}$  und  $s_{22}$

Frage 1.1.2: Worin bestehen die Unterschiede dieser Messanordnung im Vergleich zu den Z-Parametern und Y-Parametern?

Frage 1.1.3: Welche Spannungen am Eingang ( $U_1$ ) und Ausgang ( $U_2$ ) des Zweitors misst man, wenn das Zweitor eine verlustlose Leitung mit Wellenwiderstand  $R_W$  ist?

Frage 1.1.4: Welchen Einfluss hat eine verlustlose Leitung mit Wellenwiderstand  $R_W$  auf Betrag und Phase der Spannung am jeweils anderen Ende des Zweitors im Verhältnis zur Eingangsspannung?

Frage 1.1.5: Welche Rolle spielen Reflexionen, wenn die Leitung als Zweitor einen anderen Wellenwiderstand als  $R_W$  besitzt?

## 1.2. Einführung von Wellengrößen

Mit Hilfe der Streuung von Wellen lassen sich die Eigenschaften von Schaltungen mit mehreren Eingängen oder Ausgängen sehr zweckmäßig beschreiben. Die sogenannten Streuparameter haben die Eigenschaft, dass sie sich messtechnisch leichter erfassen lassen als Impedanzen oder Admittanzen. Abbildung 1.2.1 zeigt ein Zweitor, das an jedem Tor mit einer Leitung beschaltet ist.

Die Eigenschaften des Zweitors lassen sich mit Hilfe der normierten Wellengrößen an jedem Tor beschreiben. Jedes Tor für sich betrachtet stellt einen Abschluss der jeweils angeschlossenen Leitung dar. Die beiden Tore sind mit 1 und 2 indiziert. Für die Beschreibung des Zweitors durch Streuparameter werden zunächst Wellengrößen als normierte Spannungswellen eingeführt.

Als Wellengrößen  $a$  und  $b$  werden folgende normierte Spannungswellen definiert, wobei  $i$  der Torindex ist.

$$a_i = \frac{U_{hi}}{\sqrt{R_{Wi}}} \quad \text{einlaufende Spannungswelle} \quad (1.7)$$

$$b_i = \frac{U_{ri}}{\sqrt{R_{Wi}}} \quad \text{reflektierte Spannungswelle} \quad (1.8)$$

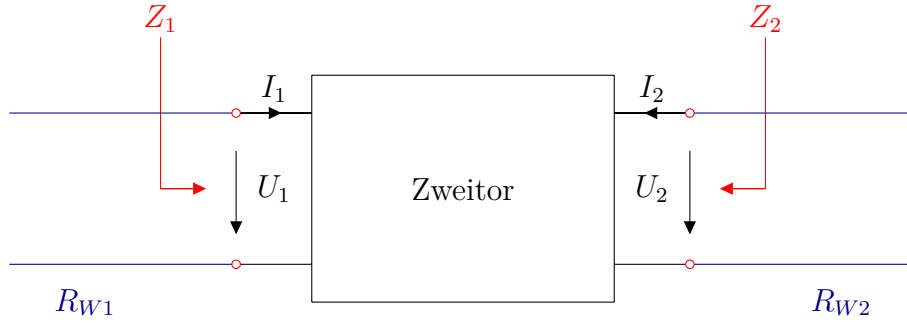


Abbildung 1.2.1: Zweitor mit Anschlussleitungen

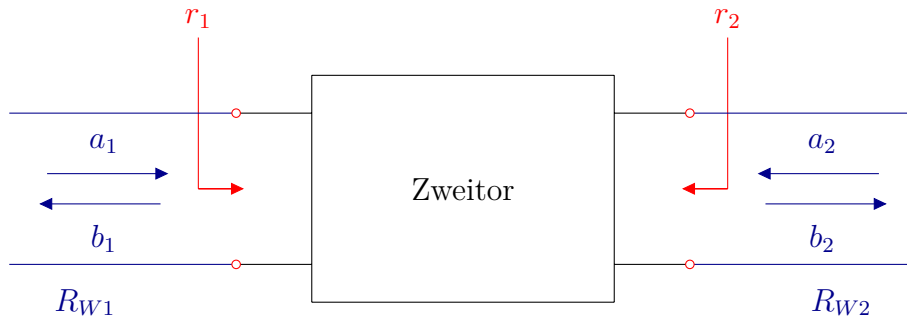


Abbildung 1.2.2: Zweitor mit Anschlussleitungen und Wellengrößen

Somit stellt  $a_1$  die am Tor 1 einlaufende normierte Spannungswelle dar,  $b_1$  die von Tor 1 reflektierte, zurücklaufende normierte Spannungswelle. Die Normierung erfolgt an jedem Tor auf den Wellenwiderstand der jeweiligen Anschlussleitungen, ist also für die beiden Tore im Allgemeinen unterschiedlich. Die jeweiligen Reflexionsfaktoren  $r_1$  bzw.  $r_2$  erhält man wie gewohnt aus dem Verhältnis der rücklaufenden zur hinlaufenden Spannungswelle, wobei sich hierzu auch die normierten Größen  $a_i$  und  $b_i$  verwenden lassen. Da Strom und Spannung von hinlaufender und rücklaufender Welle über den Wellenwiderstand  $R_{Wi}$  in einem festen Verhältnis stehen, können die Wellengrößen  $a_i$  und  $b_i$  auch über die Ströme bestimmt werden. Man könnte deshalb auch von Stromwellen sprechen. Üblicherweise spricht man nur von hinlaufender und rücklaufender Welle.

$$a_i = \frac{U_{hi}}{\sqrt{R_{Wi}}} = I_{hi} \cdot \sqrt{R_{Wi}} \quad (1.9)$$

$$b_i = \frac{U_{ri}}{\sqrt{R_{Wi}}} = I_{ri} \cdot \sqrt{R_{Wi}} \quad (1.10)$$

Die physikalische Einheit der Wellengrößen ist  $[V/\sqrt{\Omega}]$  oder  $[A\sqrt{\Omega}]$  und entspricht  $[\sqrt{W}]$ . Die Normierung auf die Wurzel der Wellenwiderstände verfolgt den Zweck, dass sich aus den Wellengrößen recht einfach die Leistung berechnen lässt. So ergeben sich für die auf das Tor  $i$  zulaufende Wirkleistung bzw. die vom Tor  $i$  reflektierte Wirkleistung auf der Anschlussleitung:

$$P_{ai} = \frac{1}{2} a_i a_i^* = \frac{1}{2} |a_i|^2 \quad (1.11)$$

$$P_{bi} = \frac{1}{2} b_i b_i^* = \frac{1}{2} |b_i|^2 \quad (1.12)$$

Hierbei bezeichnen  $a_i^*$  und  $b_i^*$  die konjugiert komplexen Größen zu  $a_i$  und  $b_i$  (der Imaginärteil der konjugiert komplexen Variable hat jeweils das umgekehrte Vorzeichen des Imaginärteils der Variable).

Frage 1.2.1: Prüfen Sie die Beziehungen 1.11 und 1.12 mit Hilfe der Spannungswellen und Stromwellen nach. Hinweis:  $U_h$  und  $U_r$  besitzen komplexe Amplituden, keine Effektivwerte.

Die Wellengrößen stellen nur eine normierte Schreibweise dar. Alle bisher mit Hilfe der Spannungswellen und Stromwellen hergeleiteten Zusammenhänge bleiben weiterhin gültig. Aus den Wellengrößen lassen sich unmittelbar die Spannungswellen und Stromwellen berechnen. Hierfür werden folgende Zusammenhänge benutzt:

$$U_i = U_{hi} + U_{ri} \quad (1.13)$$

$$I_i = \frac{1}{R_{Wi}} (U_{hi} - U_{ri}) \quad (1.14)$$

Durch Einsetzen der Beziehungen (1.7) und (1.8) erhält man hieraus die Spannungen und Ströme an den Toren:

$$U_i = \sqrt{R_{Wi}} (a_i + b_i) \quad (1.15)$$

$$I_i = \frac{a_i - b_i}{\sqrt{R_{Wi}}} \quad (1.16)$$

Frage 1.2.2: Zeigen Sie, dass sich umgekehrt die Wellengrößen aus den Spannungen und Strömen an den Toren mit folgendem Ergebnis berechnen lassen:

$$a_i = \frac{U_i + R_{Wi} I_i}{2\sqrt{R_{Wi}}} \quad (1.17)$$

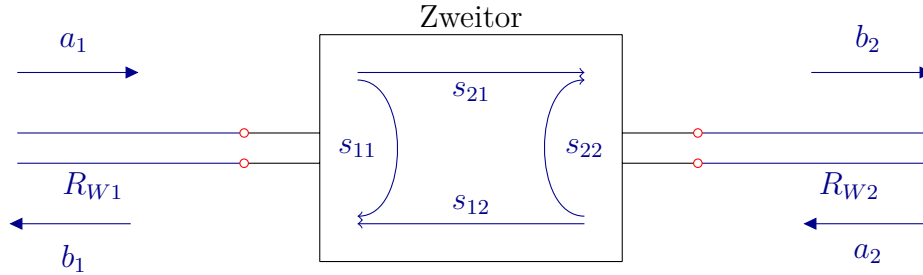
$$b_i = \frac{U_i - R_{Wi} I_i}{2\sqrt{R_{Wi}}} \quad (1.18)$$

### 1.3. Beschreibung eines Zweitors durch Streuparameter

Die Streuparameter geben das Verhalten des Zweitors bzgl. der Wellengrößen wieder, d.h. welche reflektierten Wellengrößen bzw. transmittierten Wellengrößen sich aus den einlaufenden Wellengrößen an beiden Toren ergeben. Die Wellengrößen werden durch die Streuparameter miteinander verknüpft. Für die Reflexionsfaktoren  $r_1$  und  $r_2$  an Tor 1

bzw. Tor 2 ist das nichts Neues. Jedoch zeigen die Streuparameter auch Abhängigkeiten zwischen beiden Toren, d.h. den jeweils transmittierten Teil.

Wie in Abbildung 1.3.1 gezeigt, ergibt sich die an Tor 1 zurücklaufende Wellengröße  $b_1$  aus dem an Tor 1 reflektierten Anteil von  $a_1$ , sowie aus dem an Tor 2 transmittierten Anteil von  $a_2$ . Ebenso ergibt sich die an Tor 2 zurücklaufende Wellengröße  $b_2$  aus dem an Tor 2 reflektierten Anteil von  $a_2$ , sowie dem an Tor 1 transmittierten Anteil von  $a_1$ .



**Abbildung 1.3.1:** Zweitor mit Anschlussleitungen und Wellengrößen

Es ergeben sich also die Gleichungen:

$$b_1 = (s_{11} a_1 + s_{12} a_2) \quad (1.19)$$

$$b_2 = (s_{21} a_1 + s_{22} a_2) \quad (1.20)$$

In Matrixform ergibt sich mit Hilfe der Streumatrix  $[S]$  der gleiche Zusammenhang in folgender Schreibweise:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Die einzelnen Streuparameter lassen sich mit Hilfe spezieller Randbedingungen für  $a_1$  bzw.  $a_2$  interpretieren. Diese Randbedingungen entsprechen den in Abbildungen 1.1.6 und 1.1.7 wiedergegebenen Beschaltungen bzw. Messbedingungen. Die Elemente der S-Matrix sind:

$$s_{11} = b_1/a_1 \Big|_{a_2=0} \quad \text{Eingangsreflexionsfaktor bei angepasstem Ausgang} \quad (1.22)$$

$$s_{12} = b_1/a_2 \Big|_{a_1=0} \quad \text{Rückwärtstransmissionsfaktor bei angepasstem Eingang} \quad (1.23)$$

$$s_{21} = b_2/a_1 \Big|_{a_2=0} \quad \text{Vorwärtstransmissionsfaktor bei angepasstem Ausgang} \quad (1.24)$$

$$s_{22} = b_2/a_2 \Big|_{a_1=0} \quad \text{Ausgangsreflexionsfaktor bei angepasstem Eingang} \quad (1.25)$$

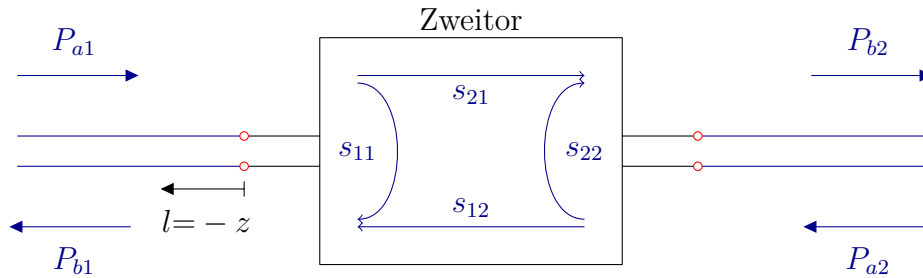
Dass  $s_{11}$  und  $s_{22}$  Reflexionsfaktoren am Eingang bzw. Ausgang darstellen, ergibt sich unmittelbar durch Einsetzen von 1.7 und 1.8 in die vier Gleichungen oben.

Da die speziellen Randbedingungen jeweils Anpassung an der gegenüberliegenden Seite bedeuten, sind die Streuparameter näher am gewünschten Arbeitspunkt und messtechnisch ebenfalls erfassbar. Bei Impedanzmatrizen bzw. Admittanzmatrizen hätte man als

Randbedingungen Kurzschlüsse bzw. Leerläufe. Solche Randbedingungen sind bei hochfrequenztechnischen Schaltungen oder bei Verstärkern wesentlich ungünstiger realisierbar.

Frage 1.3.1: Weisen Sie nach, dass  $s_{11}$  und  $s_{22}$  Reflexionsfaktoren am Eingang bzw. Ausgang darstellen.

## 1.4. Streuparameter und Wirkleistung



**Abbildung 1.4.1:** Zweitor mit Anschlussleitungen und Wirkleistungen

Zum genaueren Verständnis der hinlaufenden und reflektierten Wirkleistungen  $P_{a1}$  und  $P_{b1}$  auf einer verlustlosen Leitung, die beispielweise an Tor 1 angeschlossen ist, soll zunächst von der gesamten Scheinleistung  $S$  auf dieser Leitung ausgegangen werden. Allgemein ist die Scheinleistung an einer bestimmten Stelle  $z$  der Leitung:

$$S(z) = \frac{1}{2} U(z) I(z)^* \quad (1.26)$$

Aus der Leitungstheorie ist bekannt, dass sich die Spannungen der hinlaufenden und rücklaufenden Welle zur Gesamtspannung addieren und der Gesamtstrom sich aus der Differenz von hinlaufendem und rücklaufendem Strom berechnet. Die Scheinleistung auf der Leitung kann also auch wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{1}{2} (U_h(z) + U_r(z)) (I_h(z) - I_r(z))^* \\ &= \frac{U_h(z) I_h^*(z)}{2} - \frac{U_r(z) I_r^*(z)}{2} + \frac{U_r(z) I_h^*(z) - U_h(z) I_r^*(z)}{2} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Die Spannungen und Stöme von hinlaufender und reflektierter Welle stehen auf einer verlustlosen Leitung über den reellen Wellenwiderstand  $R_W$  miteinander in Beziehung, sodass gilt:

$$S(z) = \frac{U_h(z) U_h^*(z)}{2R_W} - \frac{U_r(z) U_r^*(z)}{2R_W} + \frac{U_r(z) U_h^*(z) - U_h(z) U_r^*(z)}{2R_W} \quad (1.28)$$

Mit den bekannten  $z$ -Abhängigkeiten der Spannungen  $U_h(z = -l) = U_h(0) \cdot e^{j\beta l}$  und  $U_r(z = -l) = U_r(0) \cdot e^{-j\beta l}$  sowie dem Zusammenhang  $s_{11} = U_r(0)/U_h(0)$  (gilt bei angepasstem Abschluss an Tor 2) lässt sich die Gleichung weiter vereinfachen.

$$\begin{aligned}
S(l) &= \frac{|U_h(0)|^2}{2R_W} - \frac{|U_r(0)|^2}{2R_W} + \frac{s_{11} U_h(0)U_h(0)^* e^{-j2\beta l} - (s_{11} U_h(0)U_h(0)^* e^{-j2\beta l})^*}{2R_W} \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}|a|^2}_{P_a} - \underbrace{\frac{1}{2}|b|^2}_{P_b} + j \underbrace{|a|^2 \operatorname{Im}(s_{11} e^{-j2\beta l})}_{P_B}
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Der Realteil der Scheinleistung auf der Leitung ist erwartungsgemäß die Differenz aus hinlaufender Wirkleistung  $P_a$  und rücklaufender Wirkleistung  $P_b$ . Auf der verlustlosen Leitung sind die Wirkleistungen zusätzlich unabhängig von  $l$ .

Es existiert jedoch noch ein imaginärer Anteil  $P_B$ , der die Blindleistung auf der Leitung beschreibt und zusätzlich von  $l$  abhängt. Dieser ist etwas schwieriger zu interpretieren. Hierzu ist es hilfreich sich einige Extremfälle anzuschauen.

- **Reflexionsfaktor**  $r = 0$ : In diesem Fall existiert nur die hinlaufende Welle. Es gibt keine rücklaufende Welle und ebenfalls keine Blindleistung.
- **Reflexionsfaktor**  $r = -1$  (**Kurzschluss**): Die Wirkleistungen der hinlaufenden Welle sowie der rücklaufenden Welle sind identisch groß ( $P_{a1} = P_{b1}$ ). Es wird effektiv keine Leistung transportiert und die reelle Komponente der Scheinleistung  $S$  ist Null. Auch die Blindleistung  $P_B$  ist im Kurzschlusspunkt Null. Die Blindleistung ist jedoch abhängig vom Abstand  $l$  ausgehend vom Kurzschlusspunkt. Im Abstand von  $l = \lambda/8$  erreicht die Blindleistung  $P_B$  mit  $|a|^2$  ein Maximum (Reaktanz der Leitung ist hier genau  $X = R_W$ ).
- **Reflexionsfaktor**  $r = 1$  (**Leerlauf**): Die Wirkleistungen beider Wellen heben sich hier ebenfalls auf. Im Abstand von  $l = \lambda/8$  erreicht die Blindleistung  $Q$  mit  $-|a|^2$  ein Minimum (Reaktanz der Leitung ist hier genau  $X = -R_W$ ).

Im Zusammenhang mit den Streuparametern wird die Blindleistung weniger beachtet, sie ist jedoch zum Verständnis nützlich. Die folgenden Leistungsbetrachtungen beziehen sich allerdings immer auf die Wirkleistungen  $P_a$  und  $P_b$  der hinlaufenden und der rücklaufenden Welle, die in engem Zusammenhang mit den Wellengrößen  $a$  und  $b$  stehen.

Gemäß Definition der Wellengrößen erhält man für den Eingangsreflexionsfaktor unter der Bedingung  $a_2 = 0$ :

$$|s_{11}|^2 = \frac{|b_1|^2}{|a_1|^2} = \frac{P_{b1}}{P_{a1}} \tag{1.30}$$

Das Betragsquadrat des Eingangsreflexionsfaktors ist das Verhältnis der von Tor 1 reflektierten Wirkleistung zur auf Tor 1 zulaufenden Wirkleistung. Demnach lässt sich aus dem Vorwärtstransmissionsfaktor auf das Verhältnis der am Tor 2 auslaufenden Wirkleistung zur auf Tor 1 zulaufenden Wirkleistung schließen.

$$|s_{21}|^2 = \frac{|b_2|^2}{|a_1|^2} = \frac{P_{b2}}{P_{a1}} \tag{1.31}$$



Entsprechende Verhältnisse lassen sich natürlich auch für  $s_{22}$  und  $s_{12}$  finden.

Leistungsgrößen und damit auch die Streuparameter werden oft logarithmisch bzw. in der Pseudoeinheit dB dargestellt.

$$s_{ij}/dB = 20 \log_{10}(|s_{ij}|) \quad (1.32)$$

Ob Streuparameter  $s_{ij}$  linear oder logarithmisch angegeben werden, ist immer an der Pseudoeinheit dB ersichtlich. Dadurch kann ein spezieller Index zur Kennzeichnung für logarithmische Werte entfallen. Da die Streuparameter für passive Zwei- oder auch Mehr-tore immer kleiner als eins sind, sind die Werte auf dB-Skala immer kleiner als 0 dB. Negative dB-Werte bedeuten also eine Verstärkung kleiner eins.

Anstatt der Verstärkungen können auch Dämpfungswerte angegeben werden, die genau dem Kehrwert der Verstärkung entsprechen. Hier sind die Bezeichnungen Reflexionsdämpfung (engl. return loss) und Einfügedämpfung (engl. insertion loss) gebräuchlich.

$$RL_i/dB = 20 \log_{10} \left( \frac{1}{|s_{ii}|} \right) = -20 \log_{10}(|s_{ii}|) \quad \text{Reflexionsdämpfung}$$

$$IL_{ij}/dB = 20 \log_{10} \left( \frac{1}{|s_{ij}|} \right) = -20 \log_{10}(|s_{ij}|) \quad \text{Einfügedämpfung}$$

Für passive Mehr-tore sind Reflexionsdämpfung und Einfügedämpfung größer 0 dB, besitzen also positive Werte. Die Reflexionsdämpfung beschreibt, welche Leistung die reflektierte Welle im Vergleich zur hinlaufenden Welle besitzt. Der Begriff der Reflexionsdämpfung ist hierbei insofern etwas unglücklich gewählt, da genaugenommen keine Dämpfung stattfindet, sondern dieser Anteil durch Reflexion verloren geht. Reflexionsverlust wäre ein zutreffenderer Ausdruck (siehe englische Begriffswahl).

Die Einfügedämpfung ist allerdings ein naheliegender Begriff. Einfügedämpfung beschreibt die Dämpfung, die auftritt, wenn ein Zweitor in ein Leitungsstück eingefügt wird. Im Falle eines aktiven Zweitores ist  $s_{ij}$  ggf. größer Null. Dies bedeutet, dass das Signal verstärkt wird und die Einfügedämpfung dementsprechend kleiner als 0 dB ist.

Frage 1.4.1: Ein vollständig symmetrisches Zweitor hat einen Eingangsreflexionsfaktor von  $s_{11} = 0,1$  und einen Transmissionsfaktor von  $s_{21} = 0,9$ . Berechnen Sie die Reflexionsdämpfung und die Einfügedämpfung im logarithmischen Maßstab. Welcher Anteil der Wirkleistung wird reflektiert bzw. transmittiert (linear)?

Frage 1.4.2: Ist das Zweitor verlustfrei?

## 1.5. Eigenschaften von Zweitoren

### 1.5.1. Verlustfreiheit

Ein passives Zweitor ist verlustfrei, wenn in keinem Betriebszustand Energie verloren geht. Aufgenommene Leistung muss also wieder zum Vorschein kommen, bzw. die Summe der zulaufenden und ablaufenden Wirkleistung muss konstant sein.

Für ein mit  $a_1$  gespeistes Zweitor bedeutet das:  $P_{a1} = P_{b1} + P_{b2}$ . Für ein mit  $a_2$  gespeistes Zweitor gilt sinngemäß:  $P_{a2} = P_{b2} + P_{b1}$ . Für ein verlustfreies Zweitor ergibt sich hieraus für die Streuparameter:

$$|s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 = 1 \quad (1.33)$$

$$|s_{22}|^2 + |s_{12}|^2 = 1 \quad (1.34)$$

Frage 1.5.1: Weisen Sie Gleichung 1.33 nach. Hinweis: Verwenden Sie  $P_{a1} = P_{b1} + P_{b2}$ , sowie die Gleichungen 1.11 und 1.12

### 1.5.2. Übertragungssymmetrie

Sofern bei einem Zweitor  $s_{12} = s_{21}$  gilt, ist das Zweitor übertragungssymmetrisch (bzw. reziprok). In diesem Fall können die Orte von Ursache und Wirkung vertauscht werden, ohne dass sich die Beziehungen zwischen Ursache und Wirkung ändern. Mit anderen Worten spielt es keine Rolle, ob das Zweitor vorwärts oder rückwärts herum eingebaut wird, sofern seine Bezugswiderstände an beiden Toren gleich sind.

Übertragungssymmetrie (Reziprozität) ist bei Zweitoren gegeben, die aus Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten bestehen. In der Regel also dann, wenn passive und verlustlose Komponenten und Materialien verwendet werden, die keine richtungsabhängigen (anisotrope) Eigenschaften haben.

### 1.5.3. Vollständige Symmetrie

Eine vollständige Symmetrie ist dann gegeben, wenn nicht nur die Transmissionsfaktoren in beiden Richtungen gleich sind (Übertragungssymmetrie,  $s_{12} = s_{21}$ ), sondern zusätzlich die Reflexionsfaktoren, also  $s_{11} = s_{22}$ . Eine solche Symmetrie ist beispielsweise bei symmetrischem Schaltungsaufbau gegeben.

### 1.5.4. Rückwirkungsfreiheit

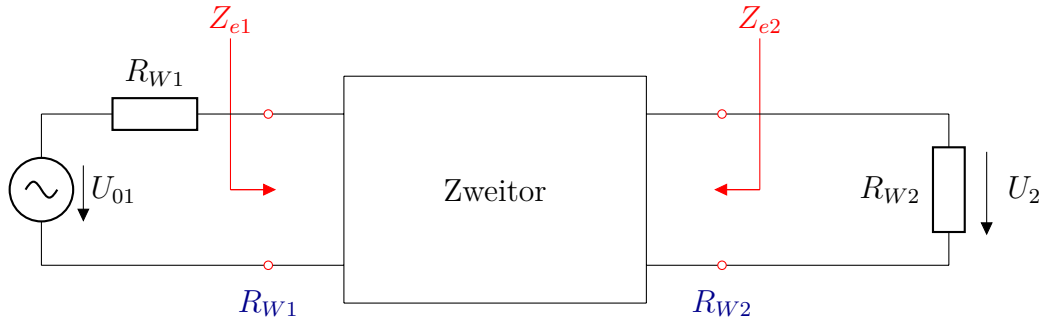
Ein Zweitor ist rückwirkungsfrei, wenn es Leistung nur in einer Richtung überträgt, in der umgekehrten Richtung jedoch nicht. Rückwirkungsfreiheit ist mit Symmetrie natürlich nicht vereinbar. Ein rückwirkungsfreies Verhalten besitzen beispielsweise Verstärker. Ein idealer Verstärker überträgt in Vorwärtsrichtung. In Rückwärtsrichtung besitzt er eine hohe Isolation (eine möglichst geringe Rückwärtsübertragung). Für die Streuparameter ergibt sich bei Rückwirkungsfreiheit dann  $s_{12} = 0$  (keine Rückwärtsübertragung) und  $s_{21} \neq 0$  (=1 bei idealer Vorwärtsübertragung).

### 1.5.5. Reflexionsfreiheit

Ein Zweitor ist reflexionsfrei bzw. allseitig angepasst, wenn die Reflexionsfaktoren  $s_{11}$  und  $s_{22}$  verschwinden. Die Hauptdiagonale der Streumatrix besitzt damit nur Nullen. Die Anpassung ist bei Hochfrequenzschaltungen sehr oft gewünscht, da dann keine Leistung an den Toren reflektiert wird und damit auch keine Leistung zurück zum Generator fließt.

## 1.6. Streuparameter berechnen

Die in der folgenden Abbildung gezeigte Schaltung zeigt ein Zweitor mit Eingangsimpedanzen  $Z_{e1}$  und  $Z_{e2}$  sowie mit den Bezugswiderständen  $R_{W1}$  und  $R_{W2}$ . Für die Bestimmung der Streuparameter ist das Zweitor definitionsgemäß an Tor 2 mit einer Last  $R_{W2}$  beschaltet sowie an Tor 1 mit einer Last  $R_{W1}$ .



**Abbildung 1.6.1:** Ermittlung der Reflexionsfaktoren und Transmissionsfaktoren am Zweitor

Die Reflexionsfaktoren ergeben sich unmittelbar aus den Eingangsimpedanzen  $Z_{ei}$  und den Bezugswiderständen  $R_{Wi}$ . Man erhält mit den Randbedingungen gemäß 1.22 und 1.25:

$$s_{11} = \frac{Z_{e1} - R_{W1}}{Z_{e1} + R_{W1}} \quad (1.35)$$

$$s_{22} = \frac{Z_{e2} - R_{W2}}{Z_{e2} + R_{W2}} \quad (1.36)$$

Die Transmissionsfaktoren erhält man aus der ans andere Tor transmittierten Spannung, indem man das Zweitor an einem Tor mit einer angepassten Spannungsquelle speist. Die Abbildung oben gibt die Anordnung zur Bestimmung von  $s_{21}$  wieder (Vorwärtstransmissionsfaktor bei angepasstem Ausgang). Man erhält für die Transmissionsfaktoren:

$$s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}} \cdot \sqrt{\frac{R_{W1}}{R_{W2}}} \quad (1.37)$$

$$s_{12} = \frac{2U_1}{U_{02}} \cdot \sqrt{\frac{R_{W2}}{R_{W1}}} \quad (1.38)$$

Für  $s_{12}$  ist die Anordnung aus Abbildung 1.6.1 sinngemäß mit Einspeisung  $U_{02}$  an Tor 2 umzuändern.

Frage 1.6.1: Weisen Sie die Berechnungsformel 1.37 nach. Verwenden Sie hierzu die Definitionen 1.24, 1.7 und 1.8 sowie die Beziehung 1.13 jeweils am Eingangstor und Ausgangstor in Bezug auf die Anordnung gemäß Abbildung 1.6.1

### 1.6.1. Beispiel einer verlustlosen Leitung

Als Beispiel seien die Streuparameter einer verlustlosen, angepassten Leitung berechnet. Die folgende Abbildung zeigt die Anordnung. Die Leitung der Länge  $l$  hat den Wellenwiderstand  $R_W$ . Die Reflexionsfaktoren sind in diesem Fall beide Null, da die Leitung eingangsseitig und ausgangsseitig angepasst ist (Innenwiderstand bzw. Abschlusswiderstand = Wellenwiderstand).

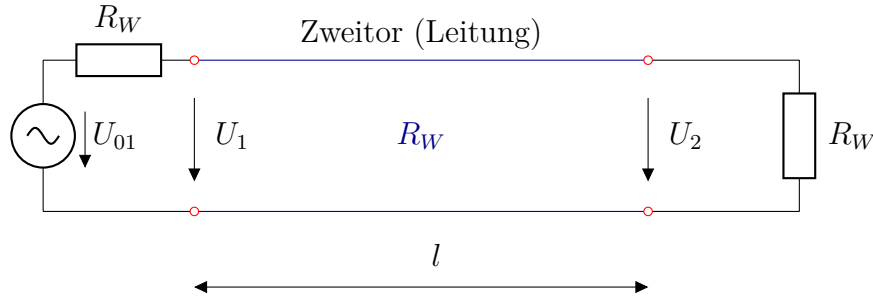


Abbildung 1.6.2: Verlustlose angepasste Leitung

$$s_{11} = s_{22} = 0 \quad (1.39)$$

Aus Gründen der Symmetrie sind auch die Transmissionsfaktoren gleich, d.h.  $s_{21} = s_{12}$ . Der Vorwärtstransmissionsfaktor ergibt sich gemäß Gleichung 1.37 zu

$$s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}} \quad (1.40)$$

Aus den Betrachtungen zur Leitungstransformation ist bekannt, dass es im angepassten Fall für die Anordnung nach Abbildung 1.6.2 nur eine fortschreitende Spannungswelle in Vorwärtsrichtung gibt. Wenn man die Leitung eingangsseitig durch ihren Wellenwiderstand ersetzt, ergibt sich die Spannung  $U_1$  am Eingang aus der Spannungsteilerregel zu  $U_1 = U_{01}/2$ , beziehungsweise umgekehrt  $U_{01} = 2U_1$ . Zwischen  $U_2$  und  $U_1$  bewirkt die Leitungstransformation über eine Länge  $l$  gemäß der Lösung der Wellengleichung (hinlaufende Welle) lediglich eine Phasenverschiebung.

$$U_2 = U_1 \cdot e^{-j\beta l} \quad (1.41)$$

Durch Einsetzen in Gleichung 1.40 erhält man  $s_{21} = U_2/U_1$ . Hieraus ergibt sich die Streumatrix zu

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\beta l} \\ e^{-j\beta l} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.42)$$

### 1.6.2. Berechnung mit Hilfe der Impedanzmatrix

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung der Streuparameter besteht über den Umweg der Impedanzmatrix. Dieser Weg bietet sich bei einfacheren Schaltungen an, die ausschließlich aus konzentrierten Bauelementen wie Widerständen, Kapazitäten oder Induktivitäten bestehen, für die die Impedanzmatrix sehr leicht gebildet werden kann. Der Zusammenhang der Impedanzmatrix  $[Z]$  mit der Streumatrix  $[S]$  ist im folgenden hergeleitet.

$$\begin{aligned}
 [U] &= [Z] [I] \\
 [U_h] + [U_r] &= [Z] ([I_h] - [I_r]) \\
 R_W ([a] + [b]) &= [Z] ([a] - [b]) \\
 [b] &= \underbrace{([Z] + [E] R_W)^{-1} ([Z] - [E] R_W)}_{[S]} [a]
 \end{aligned} \tag{1.43}$$

Hierin bezeichnet  $[E]$  die Einheitsmatrix und  $R_W$  den Bezugswellenwiderstand, der hier für alle Tore identisch gewählt wurde. Der hergeleitete Zusammenhang gilt deshalb nur, wenn alle Tore denselben Bezugswellenwiderstand  $R_W$  besitzen.

Da die Admittanzmatrix bekannterweise die Inverse der Impedanzmatrix ist, kann die Streumatrix auch sehr leicht aus der Admittanzmatrix berechnet werden. Hierzu wird in vorheriger Gleichung  $[Z]$  durch  $[Y]^{-1}$  ersetzt.

$$[S] = ([Y]^{-1} + [E] R_W)^{-1} ([Y]^{-1} - [E] R_W) \tag{1.44}$$

$$= ([E] + R_W [Y])^{-1} ([E] - R_W [Y]) \tag{1.45}$$

### 1.6.3. Berechnung mit Hilfe der Kettenmatrix

Da verkettete Zweitore sehr oft zunächst über die Kettenmatrix beschrieben werden, ist eine Umrechnungsvorschrift zwischen Kettenmatrix und  $S$ -Parametern sehr nützlich. Die Zusammenhänge zwischen Kettenmatrix und Impedanzmatrix sowie zwischen Impedanzmatrix und Streuparametern sind bereits bekannt. Mit einigem Aufwand kann damit auch ein direkter Zusammenhang zwischen Kettenmatrix und Streuparametern mit Bezugswellenwiderstand  $R_W$  hergeleitet werden. Auch hier wird von einem einheitlichen Bezugswellenwiderstand  $R_W$  an allen Toren ausgegangen.

$$s_{11} = \frac{A_{11} + A_{12}/R_W - A_{21}R_W - A_{22}}{A_{11} + A_{12}/R_W + A_{21}R_W + A_{22}} \tag{1.46}$$

$$s_{12} = \frac{2(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}{A_{11} + A_{12}/R_W + A_{21}R_W + A_{22}} \tag{1.47}$$

$$s_{21} = \frac{2}{A_{11} + A_{12}/R_W + A_{21}R_W + A_{22}} \tag{1.48}$$

$$s_{22} = \frac{-A_{11} + A_{12}/R_W - A_{21}R_W + A_{22}}{A_{11} + A_{12}/R_W + A_{21}R_W + A_{22}} \tag{1.49}$$

Mit diesem Satz von Gleichungen kann eine sehr nützliche Eigenschaft der Kettenmatrix hergeleitet werden: Für reziproke Zweitore ( $s_{12} = s_{21}$ ) ist die Determinante der Kettenmatrix gleich Eins.

$$s_{12} = s_{21} \quad (1.50)$$

$$\frac{2(A_{11}A_{12} - A_{12}A_{21})}{A_{11} + A_{12}/R_W + A_{21}R_W + A_{22}} = \frac{2}{A_{11} + A_{12}/R_W + A_{21}R_W + A_{22}} \quad (1.51)$$

$$A_{11}A_{12} - A_{12}A_{21} = 1 \quad (1.52)$$

Oft ist bekannt, dass ein Zweitor reziprok ist, da zum Beispiel keine Richtungsabhängigen Bauelemente verwendet wurden. Durch eine kurze Berechnung der Determinante kann die Kettenmatrix überprüft werden. Ist die Determinante ungleich Eins, muss die Kettenmatrix falsch sein. Umgekehrt kann so natürlich auch die Reziprozität eines Zweitores aus seiner Kettenmatrix festgestellt werden.

#### 1.6.4. Signalflussmethode

Zur Berechnung von verketteten Zweitoren kann auch die Signalflussmethode hilfreich sein. In vielen Fällen kann damit sehr schnell und einfach die Streumatrix eines zusammengesetzten Netzwerks gefunden werden, falls die Streuparameter der einzelnen Komponenten bekannt sind. Wie bereits in Abbildung 1.3.1 gezeigt, können die Signalwege durch Pfeile (gerichtete Kanten) angedeutet werden. Die Pfeile sind jeweils mit einem Streuparameter beschriftet, der die Transformation (Dämpfung, Phasenverschiebung) der Wellengröße entlang dieser Kante beschreibt. Ein Beispiel hierzu ist in Abbildung 1.6.3 gegeben. Die Knotenpunkte des Diagramms sind mit den jeweiligen Wellengrößen beschriftet.

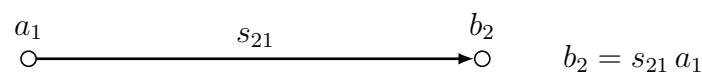


Abbildung 1.6.3: Signalfluss

Für jedes Netzwerk mit bekannten  $S$ -Parametern kann ein Signalflussdiagramm aufgestellt werden, in dem die einzelnen Signalpfade sehr gut sichtbar werden. Die Abbildung 1.6.4 zeigt das typische Signalflussdiagramm eines Zweitores.



Abbildung 1.6.4: Signalflussdiagramm eines Zweitores

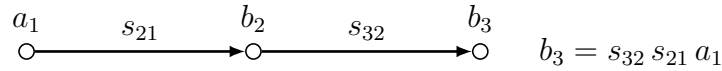


Abbildung 1.6.5: Signalwege in Reihe

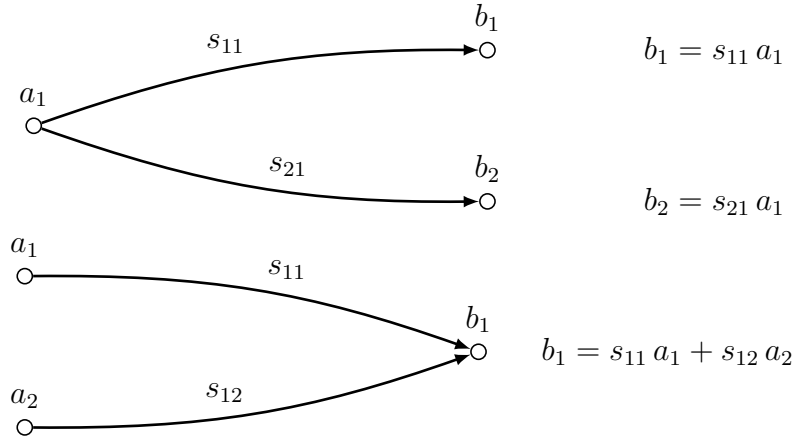


Abbildung 1.6.6: Verzweigung der Signalwege

Daraus lassen sich einige Zusammenhänge sehr leicht ablesen und sehr schnell in Gleichungen fassen. Einige Rechenregeln hierzu sind nachfolgend aufgeführt.

Sind zwei Kanten wie in Abbildung 1.6.5 hintereinandergeschaltet (Reihenschaltung), so multiplizieren sich die Streuparameter beider Teilpfade (Kanten). Für Pfade aus mehr als zwei Kanten multiplizieren sich entsprechend alle Streuparameter entlang des Pfades.

Es können auch zwei Wege von einem Knoten ausgehen, sodass zwei Gleichungen aufgestellt werden können. Falls sich zwei Pfade hingegen in einem Knoten wieder treffen, addieren sich die Wellen (siehe Abbildung 1.6.6). Diese beiden Fälle kommen auch im Zweitor aus Abbildung 1.6.3 vor. So ist beispielsweise die rücklaufende Welle an Tor 2  $b_2 = s_{21}a_1 + s_{22}a_2$  und die rücklaufende Welle an Tor 1  $b_1 = s_{12}a_2 + s_{11}a_1$ .

Etwas komplizierter ist eine Rückkopplung bzw. eine Schleife nach Abbildung 1.6.7 im Signalfuss in Gleichungen zu fassen. Die Schleife kann so interpretiert werden, dass in die obere Kante die Summe aus  $a_1$  und der rücklaufenden Welle  $s_{12}b_2$  eingespeist wird. Diese Summe ist im folgenden mit dem Platzhalter  $c$  beschrieben. Die rücklaufende Welle  $b_2$  entspricht dann der Multiplikation aus  $c$  mit  $s_{21}$ .

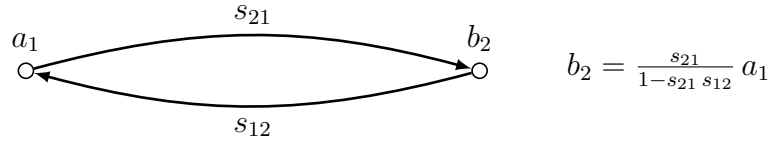
$$c = a + s_{12}b_2 \quad (1.53)$$

$$b_2 = s_{21}c \quad (1.54)$$

Durch Einsetzen und Umformen kann der gesuchte Zusammenhang zwischen  $a_1$  und  $b_2$  gefunden werden und die Schleife aufgelöst werden.

$$b_2 = s_{21}a + s_{21}s_{12}b_2 \quad (1.55)$$

$$b_2 = \frac{s_{21}}{1 - s_{21}s_{12}} a_1 \quad (1.56)$$

**Abbildung 1.6.7:** Schleife im Signalfluss

Generell gilt bei einer Schleife, dass der Signalweg durch  $(1 - s_{\text{Schleife}})$  geteilt werden muss, wobei  $s_{\text{Schleife}}$  die Multiplikation aller Teilwege der Schleife ist.

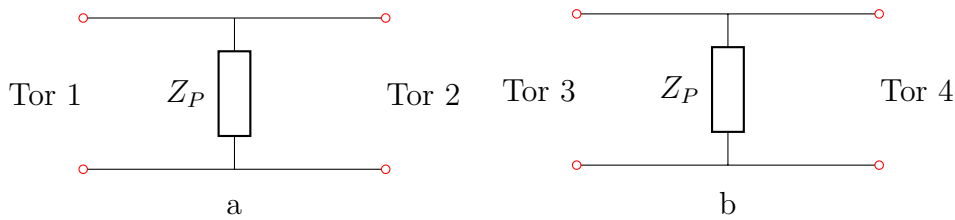
Die Anwendung des Signalflusses soll durch ein kurzes Beispiel veranschaulicht werden. Gegeben sind in Abbildung 1.6.8 zwei identische Zweitore mit jeweils einer Querimpedanz  $Z_p$ . Die Streuparameter der Zweitore können über die in den vorherigen Abschnitten beschriebenen Methoden bestimmt werden und errechnen sich zu:

$$[S_a] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_W}{2Z_p + R_W} & \frac{2Z_p}{2Z_p + R_W} \\ \frac{2Z_p}{2Z_p + R_W} & -\frac{R_W}{2Z_p + R_W} \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

$$[S_b] = \begin{bmatrix} s_{33} & s_{34} \\ s_{43} & s_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_W}{2Z_p + R_W} & \frac{2Z_p}{2Z_p + R_W} \\ \frac{2Z_p}{2Z_p + R_W} & -\frac{R_W}{2Z_p + R_W} \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

Gesucht ist nun die Streumatrix  $[S]_c$  der Kettenschaltung aus beiden Zweitoren, d.h. Tor 2 und Tor 3 werden verbunden. Es ist sehr leicht ersichtlich, dass die beiden Impedanzen  $Z_p$  dann parallel zueinander sind und durch eine Impedanz  $Z_p || Z_p = \frac{Z_p}{2}$  ersetzt werden können. Die Streumatrix der Kettenschaltung ist damit:

$$[S]_c = \begin{bmatrix} s_{c11} & s_{c14} \\ s_{c41} & s_{c44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_W}{Z_p + R_W} & \frac{Z_p}{Z_p + R_W} \\ \frac{Z_p}{Z_p + R_W} & -\frac{R_W}{Z_p + R_W} \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

**Abbildung 1.6.8:** Zweitore mit Querimpedanz  $Z_p$ 

Dies soll nun Anhand des Signalflussdiagramms nachvollzogen werden. Für die Kettenschaltung beider Zweitore ergibt sich das Signalflussdiagramm nach Abbildung 1.6.9.

Zunächst soll  $s_{c11} = \frac{b_1}{a_1}$  der Gesamtschaltung bestimmt werden. Bei näherer Betrachtung stellt man fest, dass ausgehend von  $a_1$  nach  $b_1$  zwei Signalpfade existieren. Der direkte Pfad verläuft über die Kante  $s_{11}$ , der längere Pfad verläuft über  $s_{21}$ ,  $s_{33}$  und  $s_{12}$ . Zu beachten ist hierbei, dass über die Kante  $s_{22}$  eine Rückkopplung (Schleife) besteht.



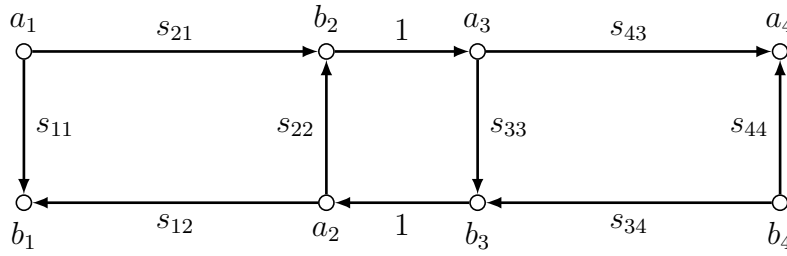


Abbildung 1.6.9: Signalfluss der Kettenschaltung

Der Reflexionsfaktor  $s_{c11}$  bestimmt sich aus der Summation beider Pfade. Die nacheinanderfolgenden Kanten des längeren Pfades - die in Reihe liegen - werden miteinander multipliziert. Die Schleife wird durch die Division mit eins minus der Schleifenverstärkung aus  $s_{33}$  und  $s_{22}$  berücksichtigt.

$$s_{c11} = s_{11} + s_{21} \frac{s_{33}}{1 - s_{33} s_{22}} s_{12} \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{R_W}{2Z_p + R_W} - \frac{2Z_p}{2Z_p + R_W} \cdot \frac{\frac{R_W}{2Z_p + R_W}}{1 - \left(\frac{R_W}{2Z_p + R_W}\right)^2} \cdot \frac{2Z_p}{2Z_p + R_W} \\ &= -\frac{R_W}{2Z_p + R_W} - \frac{2Z_p}{2Z_p + R_W} \cdot \frac{\frac{R_W(2Z_p + R_W)^2}{2Z_p + R_W}}{4Z_p(Z_p + R_W)} \cdot \frac{2Z_p}{2Z_p + R_W} \\ &= -\frac{R_W}{2Z_p + R_W} - \frac{Z_p}{2Z_p + R_W} \cdot \frac{R_W}{Z_p + R_W} \\ &= -\frac{R_W}{2Z_p + R_W} \left(1 + \frac{Z_p}{Z_p + R_W}\right) \\ &= -\frac{R_W}{2Z_p + R_W} \frac{2Z_p + R_W}{Z_p + R_W} \\ &= -\frac{R_W}{Z_p + R_W} \end{aligned} \quad (1.61)$$

Der Transmissionsfaktor  $s_{c41}$  lässt sich aus nur einem Pfad bestimmen, der jedoch ebenfalls eine Schleife beinhaltet.

$$\begin{aligned}
s_{c41} &= s_{21} \frac{1}{1 - s_{33} s_{22}} s_{43} & (1.62) \\
&= \frac{2 Z_p}{2 Z_p + R_W} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{R_W}{2 Z_p + R_W}\right)^2} \cdot \frac{2 Z_p}{2 Z_p + R_W} \\
&= \frac{2 Z_p}{2 Z_p + R_W} \cdot \frac{(2 Z_p + R_W)^2}{4 Z_p (Z_p + R_W)} \cdot \frac{2 Z_p}{2 Z_p + R_W} \\
&= \frac{Z_p}{Z_p + R_W} & (1.63)
\end{aligned}$$

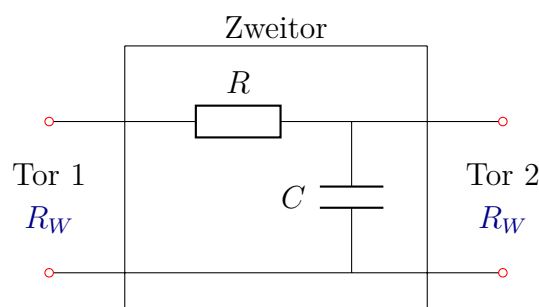
Da das Netzwerk symmetrisch ist, sind  $s_{c44} = s_{c11}$  und  $s_{c14} = s_{c41}$ . Die Streumatrix  $[S_c]$  des verketteten Netzwerks ist somit

$$[S]_b = \begin{bmatrix} s_{c11} & s_{c14} \\ s_{c41} & s_{c44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_W}{Z_p + R_W} & \frac{Z_p}{Z_p + R_W} \\ \frac{Z_p}{Z_p + R_W} & -\frac{R_W}{Z_p + R_W} \end{bmatrix}. \quad (1.64)$$

Wie erwartet, kommt man über die Signalflussmethode zum selben Ergebnis.

### 1.6.5. Streuparameter eines RC-Gliedes

Ein Zweitor aus konzentrierten Bauteilen (keine Leitungen und Leitungseffekte) besteht aus einem Widerstand und einem Kondensator, wie in Abbildung 1.6.10 gezeigt. Die Komponenten haben folgende Werte:  $R = 50 \Omega$ ,  $C = 40 \text{ pF}$ . Die Bezugsgröße  $R_W$  beträgt  $50 \Omega$ .



**Abbildung 1.6.10:** RC-Glied als Zweitor

Frage 1.6.1: Geben Sie die Beschaltung zur Ermittlung der Streuparameter an (Skizze).

Lösung: Siehe Abbildungen 1.1.6 und 1.1.7

Frage 1.6.2: Ist das Zweitor symmetrisch ( $s_{22} = s_{11}$ )? Geben Sie bitte eine qualitative Begründung an.

Lösung: Das Zweitor ist nicht symmetrisch, was an der Beschaltung zu erkennen ist. Für den Eingangsreflexionsfaktor ist C parallel zu  $R_W$ , für den Ausgangsreflexionsfaktor ist C parallel zu  $(R+R_W)$ . Hieraus ergeben sich unterschiedliche Reflexionsfaktoren.

Frage 1.6.3: Ist das Zweitor übertragungssymmetrisch (reziprok, d.h.  $s_{21} = s_{12}$ )? Geben Sie bitte eine qualitative Begründung an.

Lösung: Das Zweitor ist reziprok, da nur konzentrierte Bauelemente in Form von Widerständen und Reaktanzen verwendet werden. Es gibt keine richtungsabhängigen Komponenten.

Frage 1.6.4: Berechnen Sie die Streumatrix für die Frequenz  $f = \frac{500}{2\pi}$  MHz mit den weiter oben angegebenen Werten für  $R$ ,  $C$  und  $R_W$ . Hinweis: Beschreiben Sie bitte kurz den Lösungsweg, z.B. durch eine Skizze oder Formel.

Lösung: Die Streumatrix wird nach dem üblichen Schema bestimmt. Folgende Schritte werden hierzu durchgeführt:

- Der Eingangsreflexionsfaktor  $s_{11}$  und der Ausgangsreflexionsfaktor  $s_{22}$  werden gemäß Formel  $r = \frac{Z-R_W}{Z+R_W}$  berechnet, wobei sich  $Z$  jeweils aus der Beschaltung ergibt.
- Der Vorwärtstransmissionsfaktor  $s_{21}$  und der Rückwärtstransmissionsfaktor  $s_{12}$  wird mittels der Formel  $s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}}$  bzw.  $s_{12} = \frac{2U_1}{U_{02}}$  bestimmt. Der Spannungsteiler wird aus den gegebenen Werten der Widerstände und der Reaktanz berechnet.
- Für die Berechnung gilt:  $R = R_W = 50\Omega$ ,  $Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{2\pi \frac{500 \cdot 10^6 \text{ Hz}}{2\pi} \cdot 40 \cdot 10^{-12} \text{ F}} = -j50\Omega$
- Reflexionsfaktor  $s_{11}$ :  $Z = R + R_W || Z_C = 75\Omega - j25\Omega \rightarrow s_{11} = \frac{3}{13} - \frac{2j}{13}$
- Reflexionsfaktor  $s_{22}$ :  $Z = (R + R_W) || Z_C = 20\Omega - j40\Omega \rightarrow s_{22} = \frac{-1}{13} - \frac{8j}{13}$
- Transmissionsfaktoren  $s_{21} = s_{12}$ : Aus dem Spannungsteiler  $\frac{U_2}{U_{01}} = \frac{R_W || Z_C}{R_W + R + R_W || Z_C} \rightarrow s_{12} = s_{21} = \frac{2}{13} \cdot (3 - 2j)$

Die Streumatrix ist damit  $[S] = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 3 - 2j & 6 - 4j \\ 6 - 4j & -1 - 8j \end{bmatrix}$ .

Frage 1.6.5: Bestimmen Sie die Z-Matrix des RC-Glieds bei Betriebsfrequenz und daraus die Streumatrix.

Lösung: Die Impedanzmatrix  $[Z]$  des gegebenen RC-Glieds ist:

$$[Z] = \begin{bmatrix} R + Z_C & Z_C \\ Z_C & Z_C \end{bmatrix} = 50\Omega \begin{bmatrix} 1 - j & -j \\ -j & -j \end{bmatrix}$$

Über die im Script hergeleitete Umrechnungsformel ergibt sich die Streumatrix.

$$\begin{aligned}
 [S] &= ([Z]/R_W + [E])^{-1} \cdot ([Z]/R_W + [E]) \\
 &= \begin{bmatrix} 2-j & -j \\ -j & 1-j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -j & -j \\ -j & -1-j \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2-3j} \begin{bmatrix} 1-j & j \\ j & 2-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j & -j \\ -j & -1-j \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 3-2j & 6-4j \\ 6-4j & -1-8j \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Der Lösungsweg über die Impedanz liefert erwartungsgemäß die gleiche Lösung.

Frage 1.6.6: Wie lautet die Streumatrix für folgende Fälle: Sehr niedrige Frequenzen ( $f$  gegen 0 Hz)? Sehr hohe Frequenzen ( $f$  gegen unendlich)? Prüfen Sie die Ergebnisse auf Plausibilität.

Lösung: Für niedrige Frequenzen: Die Kapazität kann ignoriert werden. Das Zweitor ist dann auch symmetrisch, d.h.  $s_{11} = s_{22}$ . Lösung:  $s_{11} = s_{22} = 1/3$ ,  $s_{12} = s_{21} = 2/3$ .

Für hohe Frequenzen: Die Kapazität kann als Kurzschluss betrachtet werden. In Vorwärtsrichtung ist die Schaltung von der Quelle aus betrachtet angepasst (da  $R$  vor dem Kurzschluss), d.h.  $s_{11} = 0$ . In Rückwärtsrichtung ist die Schaltung kurzgeschlossen, d.h.  $s_{22} = -1$ . Wegen des Kurzschlusses wird weder in Vorwärtsrichtung noch in Rückwärtsrichtung eine Spannung  $U_2$  bzw.  $U_1$  übertragen, d.h.  $s_{12} = s_{21} = 0$ .

Frage 1.6.7: Bei Einspeisung an Tor 1 und Betriebsfrequenz aus Frage 1.6.4: Welcher Anteil der Wirkleistung wird an Tor 1 reflektiert? Welcher Anteil der Wirkleistung läuft auf Tor 2 an? Welcher Anteil der Wirkleistung wird im Zweitor konsumiert?

Lösung: Die Leistungsanteile berechnen sich aus dem Betragsquadrat der Streuparameter. Bei Betrieb in Vorwärtsrichtung ergeben sich folgende Werte:

$$s_{11} = \frac{3-2j}{13}, \text{ somit ist } |s_{11}|^2 = \frac{9+4}{13^2} = \frac{1}{13} \text{ der Anteil der reflektierte Wirkleistung.}$$

$$s_{21} = \frac{6-4j}{13}, \text{ somit ist } |s_{21}|^2 = \frac{36+16}{13^2} = \frac{4}{13} \text{ der Anteil der übertragene Wirkleistung.}$$

Mit diesen Werten wird ein Anteil von  $\frac{13}{13} - \frac{1}{13} - \frac{4}{13} = \frac{8}{13}$  der Eingangsleistung an Tor 1 im Zweitor konsumiert.

### 1.6.6. Anschluss eines Zweitores mit Hilfe einer Leitung

Das Zweitor aus Aufgabe 1.6.5 (gleiche Werte und gleiche Betriebsfrequenz) wird mit Hilfe einer Leitung der Länge  $l$  und mit Wellenwiderstand  $R_W$  an eine Quelle mit Innenwiderstand  $R_W$  angeschlossen, wie in der folgenden Abbildung gezeigt.

Frage 1.6.8: Welchen Effekt hat die Leitung in Abhängigkeit ihrer Länge auf die Impedanz  $Z_b$ ? Stellen Sie den Zusammenhang im Smith-Diagramm dar.

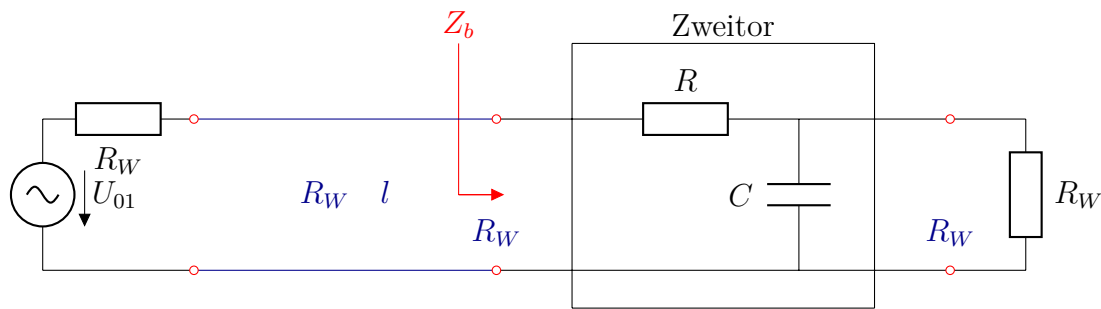


Abbildung 1.6.11: Anschluss des Zweitors mit einer Leitung

Lösung: Leitungstransformation, d.h. Drehung des Reflexionsfaktors abhängig von der Leitungslänge. Hierdurch auch Transformation der Impedanz  $Z_b$  gemäß der Werte auf dem Kreis (im Smith-Diagramm in normierter Schreibweise  $z_b = Z_b/R_W$ ). Die normierte Eingangsimpedanz beträgt  $z_b = 1,5 - j 0,5$ .

Frage 1.6.9: Ermitteln Sie den Eingangsreflexionsfaktor am Tor 1 rechnerisch aus dem Eingangswiderstand  $Z_b$ . Welcher Reflexionsfaktor ergibt sich in Abhängigkeit der Leitungslänge am Anfang der Leitung?

Lösung: Der Reflexionsfaktor ist  $r_b = s_{11} = (1/13) \cdot (3 - 2j)$ . In Abhängigkeit der Leitungslänge gilt:  $r(l) = r_b \cdot e^{-j2\beta l}$ , d.h. Änderung des Phasenwinkels.

Frage 1.6.10: Kann die Leitung die aufgenommene Wirkleistung verbessern? Welche Wirkleistung nimmt die Schaltung mit einem Viertelwellentransformator  $l = \lambda/4$  auf?

Lösung: Die Leitung ändert den Betrag des Reflexionsfaktors nicht, kann die Aufnahme der Wirkleistung also nicht verbessern. Reflektierte Wirkleistung:  $|s_{11}|^2 = 1/13$ . Somit werden  $1 - |s_{11}|^2 = 12/13$  der Wirkleistung aufgenommen.

Frage 1.6.11: Mit welcher Massnahme könnte eine Anpassung an den Innenwiderstand der Quelle erzielt werden? Beschreiben Sie eine mögliche Lösung (keine Berechnung, nur den Lösungsweg darstellen). Welche Verbesserung der Leistungsaufnahme könnte hierdurch erzielt werden?

Lösung: Kombination von Leitungstransformation und Kompensation. Die Leitung transformiert den Realteil von  $Z_b$  zu  $\text{Re}(Z'_b) = R_W$ . Dadurch ändert sich zwar der Betrag des Reflexionsfaktors nicht, jedoch liefert die Leitung eine Vorlage hierfür. Danach folgt die Kompensation des Imaginärteils der transformierten Impedanz  $\text{Im}(Z'_b) = X_s$  z.B. durch ein konzentriertes Bauelement der Größe  $-X_s$ . Verbesserung: Reflexionsfaktor = 0, die Wirkleistung wird komplett aufgenommen.

Smith-Diagramm

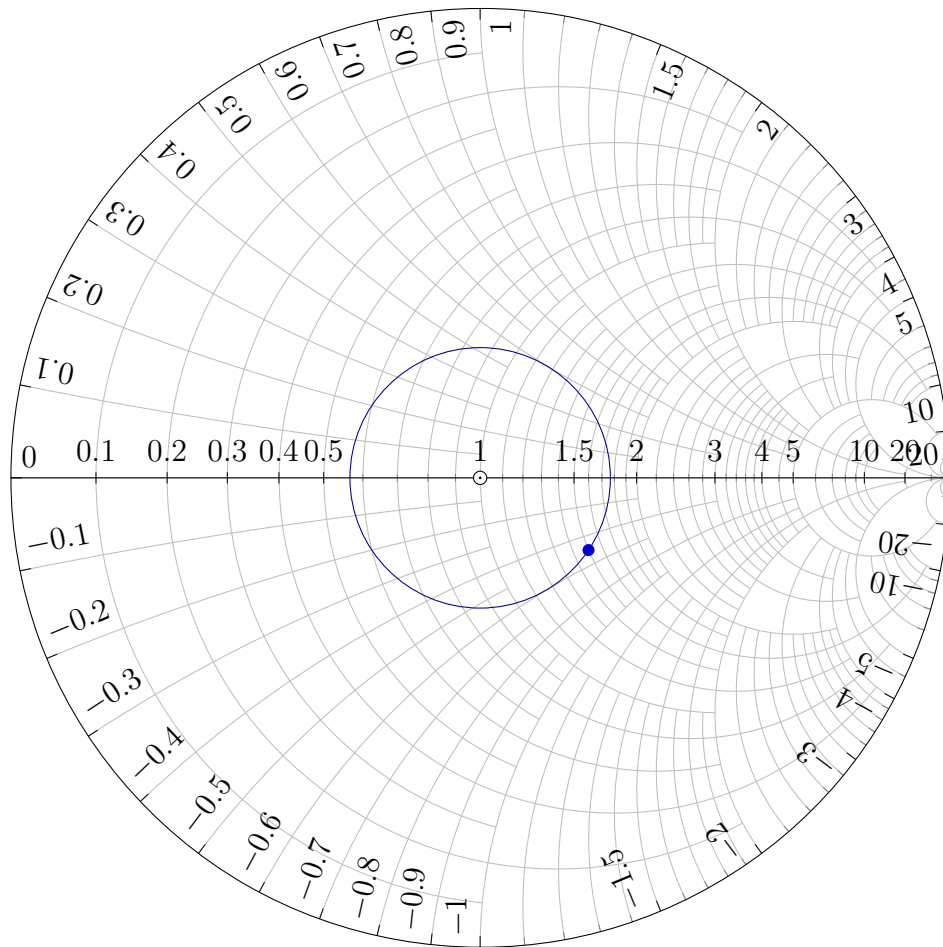


Abbildung 1.6.12: Transformation der Eingangsimpedanz durch die Leitung

## 1.7. Mehrtore

Unter einem Mehrtor wird eine Anordnung oder Schaltung mit mehr als zwei Eingängen oder Ausgängen bezeichnet. Beispiele hierfür sind Schaltungen zur Aufteilung eines Signals (Teiler), Richtkoppler oder Zirkulatoren (Schaltungen, die ein Signal an das jeweils nächste Tor weiter geben). Folgende Abbildung zeigt ein Mehrtor.

Im allgemeinen Fall hat jedes Tor einen eigenen Bezugswiderstand  $R_{Wi}$ . Im Folgenden Text gehen wir davon aus, dass ein einheitlicher Bezugswiderstand vorliegt, d.h.  $R_{Wi} = R_W$ . Für die S-Parameter eines Mehrtors erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

Aus dem Gleichungssystem geht hervor, wie man die S-Parameter messtechnisch ermit-

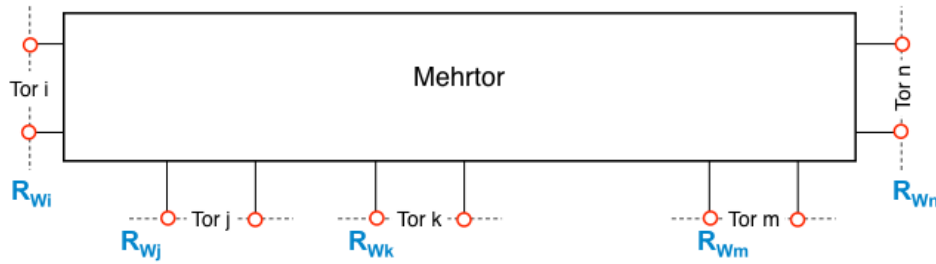


Abbildung 1.7.1: Mehrtor

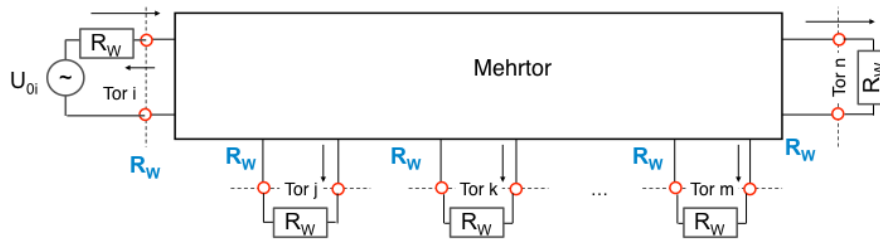
telt. Die Parameter  $s_{ji}$  erhält man, indem man an Port  $i$  einspeist und alle anderen Ports mit ihrem Wellenwiderstand bzw. ihrem Bezugswiderstand abschließt. In diesem Fall sind alle Beiträge  $a_j = 0$  für  $j \neq i$ . Für die Berechnung der S-Parameter gelten die gleichen Regeln wie beim Zweitor. Für die Elemente der Hauptdiagonalen  $s_{ii}$  gilt  $s_{ii} = b_i/a_i|_{a_j=0 \text{ für } j \neq i}$ . In diesem Fall ist  $s_{ii}$  gleich dem Eingangsreflexionsfaktor an Tor  $i$ :

$$s_{ii} = r_{ei} = \frac{Z_{ei} - R_{Wi}}{Z_{ei} + R_{Wi}} \quad (1.66)$$

Für die Berechnung der Transmissionsfaktoren  $s_{ji}$  mit  $j \neq i$  gilt wegen  $U_{ih} = U_{0i}/2$ :

$$s_{ji} = \frac{2U_j}{U_{0i}} \quad (1.67)$$

Folgendes Bild zeigt die Beschaltung zur Ermittlung der Parameter  $s_{ii}$  und  $s_{ji}$  mit Speisung an Tor  $i$ .

Abbildung 1.7.2: Beschaltung zur Ermittlung von  $s_{ii}$  und  $s_{ji}$ 

### 1.7.1. Verlustfreiheit

Für ein verlustfreies Mehrtor muss die Summe der eingespeisten Leistung gleich der Summe der an den Toren abgegebenen Leistung sein, d.h. es wird im Inneren keine Leistung konsumiert. In diesem Fall gilt:

$$\sum_{i=1}^n P_{ai} = \sum_{i=1}^n P_{bi} \quad (1.68)$$

Mit den eingangs erläuterten Beziehungen (siehe Gleichungen 1.11 und 1.11) gilt dann:

$$\sum_{i=1}^n a_i a_i^* = \sum_{i=1}^n b_i b_i^* \quad (1.69)$$

In Matrixschreibweise folgt hieraus nach einiger Umformung:  $[S]^T [S]^* = [E]$ .

### 1.7.2. Übertragungssymmetrie

Ein Mehrtor ist übertragungssymmetrisch (bzw. reziprok oder umkehrbar), wenn die Transmissionsfaktoren vorwärts und rückwärts gleich sind, d.h.  $s_{ij} = s_{ji}$ . In Matrixschreibweise entspricht also die transponierte Matrix der ursprünglichen Matrix:  $[S] = [S]^T$ . Für verlustlose übertragungssymmetrische Mehrtore folgt aus  $[S] = [S]^T$  und  $[S]^T [S]^* = [E]$  die Beziehung  $[S]^{-1} = [S]^*$ .

### 1.7.3. Vollständige Symmetrie

Ein Mehrtor ist vollständig symmetrisch, falls es übertragungssymmetrisch ist und zusätzlich alle Reflexionsfaktoren identisch sind  $s_{ii} = s_{jj}$ .

### 1.7.4. Reflexionsfreiheit

Wie das Zeittor wird auch das Mehrtor als reflexionsfrei bzw. allseitig angepasst bezeichnet, falls alle Reflexionsfaktoren  $s_{ii}$  verschwinden.

### 1.7.5. Spezielle Eigenschaften des Dreitors

Ein Dreitor kann nie gleichzeitig allseitig angepasst (reflexionsfrei), reziprok und zugleich verlustfrei sein. Diese Tatsache kann sehr leicht geprüft werden, indem die allgemeine Streumatrix eines angepassten und reziproken Dreitors auf Verlustfreiheit geprüft wird.

$$\begin{pmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & 0 & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & s_{12}^* & s_{13}^* \\ s_{12}^* & 0 & s_{23}^* \\ s_{13}^* & s_{23}^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |s_{12}|^2 + |s_{13}|^2 & s_{13} s_{23}^* & s_{12} s_{23}^* \\ s_{23} s_{13}^* & |s_{12}|^2 + |s_{23}|^2 & s_{12} s_{13}^* \\ s_{23} s_{12}^* & s_{13} s_{12}^* & |s_{13}|^2 + |s_{23}|^2 \end{pmatrix} \neq [E]$$

Es ist leicht ersichtlich, dass die Einheitsmatrix nicht erreicht werden kann.

### 1.7.6. Dreitor aus Leitungen

Das in folgender Abbildung gezeigte Dreitor besteht aus drei verlustlosen Leitungen der Länge  $\frac{\lambda}{4}$ . Die Wellenwiderstände sind  $R_{W1} = R_0$ ,  $R_{W2} = R_{W3} = 2 R_0$ . Die Streumatrix soll berechnet werden. Als Bezugswiderstand an allen Toren wird  $R_0$  gewählt.

Frage 1.7.1: Berechnen Sie den Eingangsreflexionsfaktor  $s_{11}$ .

Lösung: Zur Berechnung von  $s_{11}$  geht man von der Beschaltung nach Bild 1.7.4 aus. Die Schaltung lässt sich wegen der Symmetrie der parallel geschalteten Leitungen 2 und



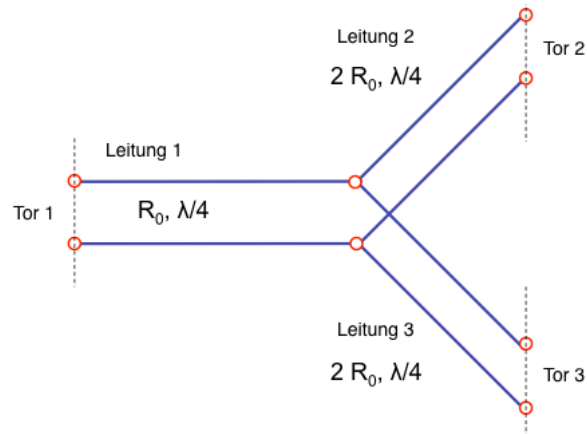
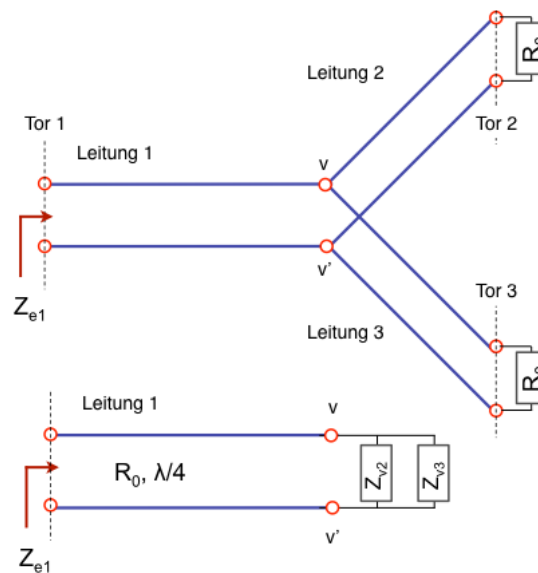


Abbildung 1.7.3: Dreitor

Abbildung 1.7.4: Ersatzschaltung zur Ermittlung von  $s_{11}$

3 vereinfachen. Die Ersatzimpedanzen der Leitungen 2 und 3 sind die Impedanzen am Verzweigungspunkt v-v'. Für einen Viertelwellentransformator berechnen sich diese zu  $Z_{v2} = Z_{v3} = (2R_0)^2/R_0 = 4R_0$ . Für die Parallelschaltung von  $Z_{v2}$  und  $Z_{v3}$  erhält man  $Z_{v2}||Z_{v3} = 2R_0$ . Somit errechnet sich die Eingangsimpedanz der Leitung 1 (ebenfalls ein Viertelwellentransformator) zu  $Z_{e1} = R_0^2/(Z_{v2}||Z_{v3}) = R_0/2$ . Für den Eingangsreflexionsfaktor am Tor 1 erhält man

$$s_{11} = \frac{Z_{e1} - R_0}{Z_{e1} + R_0} = \frac{R_0/2 - R_0}{R_0/2 + R_0} = -\frac{1}{3}. \quad (1.70)$$

Frage 1.7.2: Berechnen Sie die Eingangsreflexionsfaktoren  $s_{22}$  und  $s_{33}$ .

Lösung: Wegen der Symmetrie der Schaltung sind  $s_{22}$  und  $s_{33}$  gleich. Die Berechnung erfolgt wiederum über den Eingangswiderstand bei Einspeisung an Tor 2 bzw. an Tor 3. Folgende Abbildung zeigt die hierfür erforderliche Beschaltung. Die Leitungen 1 und 3

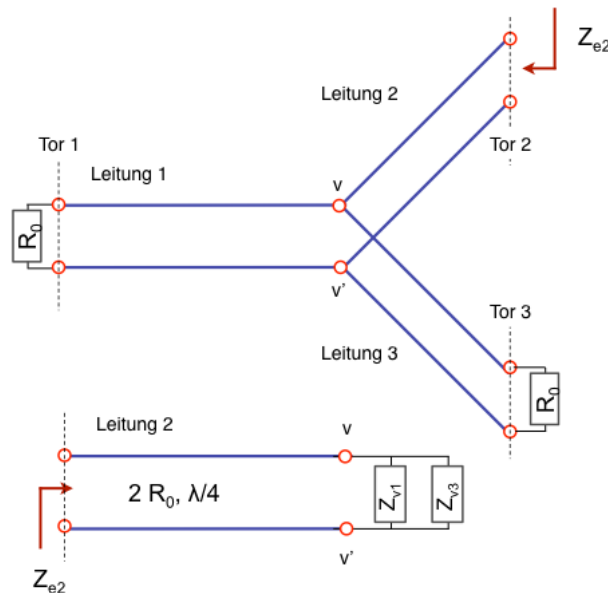


Abbildung 1.7.5: Ersatzschaltung für  $s_{22}$

sind Viertelwellentransformatoren mit Abschluss  $R_0$ . Der Wellenwiderstand von Leitung 1 ist  $R_0$ , der Wellenwiderstand von Leitung 3 ist  $2R_0$ . Für die Ersatzimpedanzen am Verzweigungspunkt v-v' erhält man  $Z_{v1} = R_0$  und  $Z_{v3} = 4R_0$ . Für den Eingangswiderstand  $Z_{e2}$  errechnet man:

$$Z_{e2} = \frac{(2R_0)^2}{(Z_{v1}||Z_{v3})} = \frac{4R_0^2}{\frac{4R_0R_0}{4R_0+R_0}} = 5R_0 \quad (1.71)$$

Hieraus errechnet sich  $s_{22}$  zu:

$$s_{22} = \frac{Z_{e2} - R_0}{Z_{e2} + R_0} = \frac{5R_0 - R_0}{5R_0 + R_0} = \frac{2}{3} \quad (1.72)$$

Wegen der gegebenen Symmetrie ist  $s_{33} = s_{22}$ .

Frage 1.7.3: Berechnen Sie die Transmissionsfaktoren  $s_{21}$  und  $s_{31}$ .

Lösung: Die Berechnung der Transmissionsfaktoren erfolgt ebenfalls aus der Beschaltung des Bildes 1.7.4, wobei dieses Mal jedoch die Spannung am Ausgang der Schaltung interessiert, um mittels Gleichung 1.67 das gewünschte Ergebnis zu erhalten. Die Beschaltung ist in folgendem Bild nochmals wiedergegeben. Leitung 3 wird durch ihre Erstatzschal-

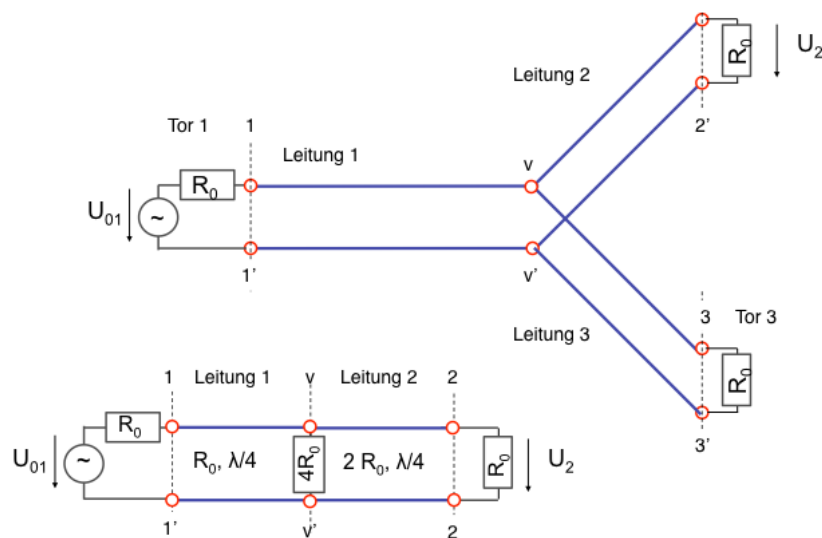


Abbildung 1.7.6: Ersatzschaltung zur Bestimmung von  $s_{21}$

ung am Verzweigungspunkt v-v' ersetzt, wie bereits bei der Berechnung von  $s_{11}$  geschehen. Die Ersatzimpedanz der Viertelwellenleitung 3 am Verzweigungspunkt berechnet sich zu  $Z_{v3} = (2R_0)^2/R_0 = 4R_0$ . Auf dem Weg zu Tor 2 folgt dann die Viertelwellenleitung 2, die mit  $R_0$  abgeschlossen ist.

Die weitere Berechnung erfolgt dadurch, dass die Spannungsquelle und Leitung 1 im Verzweigungspunkt v-v' durch eine Ersatzspannungsquelle ersetzt wird. Den Ersatzwider-

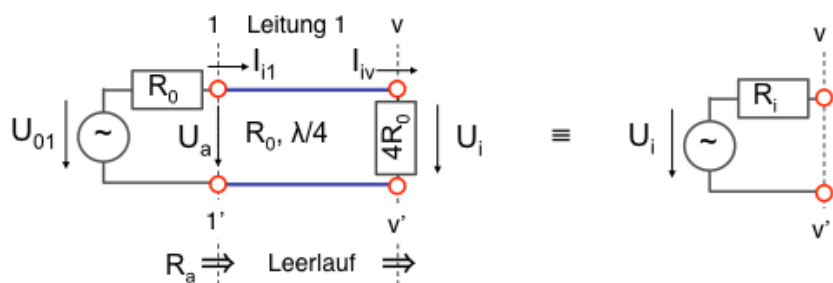


Abbildung 1.7.7: Ersatzschaltung für  $s_{21}$ , Quelle bis v-v'

stand  $R_i$  erhält man durch Kurzschluss aller unabhängigen Spannungsquellen innerhalb

der betrachteten Ersatzschaltung. Da der Viertelwellentransformator den Innenwiderstand  $R_0$  (= Wellenwiderstand) nicht transformiert, ist

$$R_i = R_0 || 4R_0 = \frac{4}{5}R_0. \quad (1.73)$$

Nun muss noch die Spannung  $U_i$  in Abhängigkeit von  $U_{01}$  bestimmt werden. Bei Leerlauf der Ersatzspannungsquelle liegt am Widerstand  $4R_0$  die Spannung  $U_i = 4R_0 I_{iv}$  an. Aus den Leitungsgleichungen ist der Zusammenhang  $U(l) = U_0 \cdot \cos(\beta l) + jI_0 Z_L \sin(\beta l)$  bekannt. Mit den Werten  $Z_L = R_0$ ,  $U_0 = U_i$ ,  $I_0 = I_{iv}$  und  $\beta l = \frac{\lambda}{4}$  kann die Spannung  $U_a = U(l = \frac{\lambda}{4})$  berechnet werden.

$$U_a = j I_{vi} R_W = j \frac{U_1}{4R_0} R_0 = j \frac{U_i}{4} \quad (1.74)$$

Ziel der Ersatzschaltung ist es, von der Spannung  $U_i$  am Verzweigungspunkt v-v' auf die Quellenspannung  $U_{01}$  am Eingang zurückzurechnen. Hierzu ist noch die Berechnung des Eingangswiderstands  $R_a$  erforderlich. Dieser ermittelt sich aus der Transformation des Abschlusswiderstands  $4R_0$  durch die Viertelwellenleitung:

$$R_a = \frac{R_0^2}{4R_0} = \frac{R_0}{4} \quad (1.75)$$

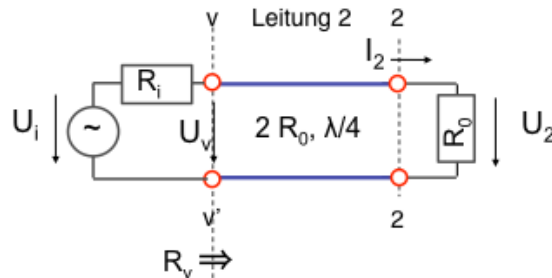
Für das Spannungsverhältnis gilt damit:

$$\frac{U_a}{U_{01}} = \frac{\frac{R_0}{4}}{\frac{R_0}{4} + R_0} = \frac{1}{5} \quad (1.76)$$

Somit erhält man für den gesuchten Zusammenhang zwischen der Spannung an der Stelle v-v' und der Quellenspannung:

$$U_i = -j4U_a = -j\frac{4}{5}U_{01} \quad (1.77)$$

Ersetzt man nun die Spannungsquelle durch die Ersatzspannungsquelle aus Bild 1.7.7 und verbindet sie an der Stelle v-v' mit der Leitung 2 aus Bild 1.7.6, so verbleibt die Ersatzschaltung nach Bild 1.7.8. Für den letzten Abschnitt der Schaltung ist nun der Weg



**Abbildung 1.7.8:** Ersatzschaltung für  $s_{21}$ , Stelle v-v' bis Abschluss Tor 2

von der Ersatzquelle  $U_i$  über  $U_v$  bis schließlich zur Spannung  $U_2$  an Tor 2 zu berechnen.

Für den Eingangswiderstand  $R_v$  berechnet man mit Hilfe des Viertelwellentransformators mit Wellenwiderstand  $2R_0$ :

$$R_v = \frac{(2R_0)^2}{R_0} = 4R_0 \quad (1.78)$$

Für das Spannungsverhältnis gilt somit

$$U_v = \frac{R_v}{R_v + R_i} U_i = -j \frac{4R_0}{4R_0 + \frac{4}{5}R_0} \frac{4}{5} U_{01} = -j \frac{2}{3} U_{01}. \quad (1.79)$$

Analog zu Gleichung 1.74 gilt:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_0} \quad (1.80)$$

$$U_v = j2R_0 I_2 = j2R_0 \frac{U_2}{R_0} = j2U_2 = -j \frac{2}{3} U_{01} \quad (1.81)$$

Die Vorwärtstransmission ist schliesslich

$$s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}} = -\frac{2}{3}. \quad (1.82)$$

Aus Symmetriegründen ist

$$s_{31} = s_{21}. \quad (1.83)$$

Frage 1.7.4: Berechnen Sie die Transmissionsfaktoren  $s_{13}$  und  $s_{12}$ .

Lösung: Da das gegebene 3-Tor nur aus Leitungen aufgebaut ist, ist es ein übertragungssymmetrisches Netzwerk. Für die S-Parameter müssen also folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$s_{13} = s_{31} \quad (1.84)$$

$$s_{12} = s_{21} \quad (1.85)$$

Die Beziehung nach Gleichung 1.84 soll mit Hilfe von Wirkleistungsbeziehungen und Phasenbeziehungen aus der Ersatzschaltung hergeleitet werden, die in Bild 1.7.9 gezeigt sind. Da das 3-Tor verlustfrei ist, muss die an Tor 3 zugeführte Wirkleistung  $P_{e3}$  an den Toren 1 und 2 abfließen, somit gilt für die Leistungsbilanz

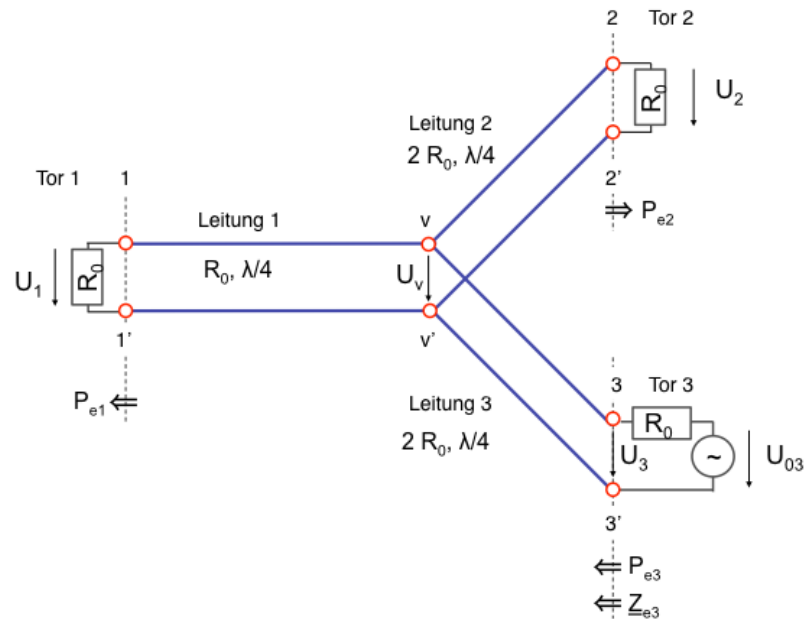
$$P_{e3} = P_1 + P_2 \quad (1.86)$$

Der Eingangswiderstand  $\underline{Z}_{e3}$  am Tor 3 berechnet sich zu

$$\underline{Z}_{e3} = R_{e3} = \frac{(2R_0)^2}{R_0 || 4R_0} = 5R_0 \quad (1.87)$$

Hiermit errechnet sich

$$\begin{aligned} P_{e3} &= \frac{|U_3|^2}{R_3} = \frac{1}{R_3} \left| \frac{R_3}{R_3 + R_0} \right|^2 |U_{03}|^2 = \\ &= \frac{R_3}{(R_3 + R_0)^2} |U_{03}|^2 = \frac{5R_0}{(5R_0 + R_0)^2} |U_{03}|^2 = \frac{5}{36} |U_{03}|^2 \end{aligned} \quad (1.88)$$

Abbildung 1.7.9: Ersatzschaltung zur Ermittlung von  $s_{13}$ 

Für die Wirkleistung  $P_1$  und  $P_3$  gilt

$$P_1 = \frac{|\underline{U}_1|^2}{R_0} = \frac{|\underline{U}_v|^2}{R_0} \quad (1.89)$$

$$P_2 = \frac{|\underline{U}_2|^2}{R_0} = \frac{|\underline{U}_v|^2}{4R_0} \quad (1.90)$$

Hieraus folgt

$$P_2 = \frac{P_1}{4} \quad (1.91)$$

Aus der Summe der Leistungen folgt

$$P_{e3} = \frac{5}{36} \frac{|\underline{U}_{03}|^2}{R_0} = P_1 + \frac{P_1}{4} = \frac{5}{4} \frac{|\underline{U}_1|^2}{R_0} \quad (1.92)$$

und somit

$$\frac{|\underline{U}_1|^2}{|\underline{U}_{03}|^2} = \frac{2}{3}. \quad (1.93)$$

Zur Ermittlung von

$$s_{13} = \frac{2\underline{U}_1}{\underline{U}_{03}} \quad (1.94)$$

genügen die Beträge nicht. Die Phasenbeziehung lässt sich jedoch aus der Ersatzschaltung ableiten: Beide Viertelwellenleitungen sind mit reellen Abchlusswiderständen versehen. Die Phasenverschiebung zwischen  $\underline{U}_1$  und  $\underline{U}_{03}$  beträgt insgesamt  $180^\circ$ . Damit erhält man

$$s_{13} = \frac{2\underline{U}_1}{\underline{U}_{03}} = -\frac{2}{3} \quad (1.95)$$

Frage 1.7.5: Berechnen Sie die Transmissionsfaktoren  $s_{23}$  und  $s_{32}$ .

Lösung: Zur Berechnung von  $s_{23}$  wird in der Beschaltung nach Abbildung 1.7.9 die Leitung 1 mit ihrem Abschluss durch eine Impedanz an der Stelle v-v' ersetzt, wie in der folgenden Abbildung gezeigt. Das Vorgehen entspricht Frage 1.7.3: Die Beziehung zwi-

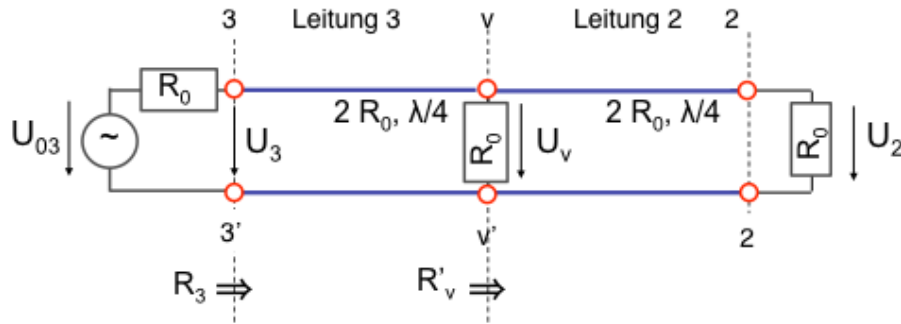


Abbildung 1.7.10: Ersatzschaltung für  $s_{23}$

schen den Spannungen am Ausgang und bei der Einspeisung wird über die Impedanzen der Ersatzschaltung berechnet. Man erhält

$$\begin{aligned} R'_v &= R_0 || 4R_0 = \frac{4}{5}R_0 \\ \underline{U}_v &= j2R_0 \frac{\underline{U}_2}{R_0} = j2\underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 &= j2R_0 \frac{\underline{U}_v}{R'_v} = j2R_0 \frac{\underline{U}_v}{4/5R_0} = j\frac{5}{2}\underline{U}_v = \frac{5}{2}2\underline{U}_2 = -5\underline{U}_2 \end{aligned} \quad (1.96)$$

Das Spannungsverhältnis  $\underline{U}_3/\underline{U}_{03}$  berechnet sich zu

$$\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_{03}} = \frac{R_3}{R_3 + R_0} = \frac{5R_0}{5R_0 + R_0} = \frac{5}{6} \quad (1.97)$$

Hiermit ergibt sich für  $s_{23}$  aus Gleichung (1.61) und (1.60)

$$s_{23} = \frac{2\underline{U}_2}{\underline{U}_{03}} = -\frac{2}{5} \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_{03}} = -\frac{1}{3} \quad (1.98)$$

Es gilt wegen der Übertragungssymmetrie des Netzwerks

$$s_{32} = s_{23}. \quad (1.99)$$

Frage 1.7.6: Ist das Dreitor verlustfrei? Weisen Sie die Verlustfreiheit mit Hilfe der Streumatrix nach.

Lösung: Aus den Ergebnissen der vorausgegangenen Fragen lässt sich für das Dreitor folgende Streumatrix angeben:

$$[\underline{S}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.100)$$

Wenn das Dreitor verlustfrei ist, so muss folgende Beziehung gelten:

$$[\underline{S}]^T [\underline{S}]^* = [E] \quad (1.101)$$

Das Produkt der transponierten Streumatrix mit der konjugiert komplexen Streumatrix sollte die Einheitsmatrix ergeben. Diese Beziehung lässt sich anhand der Streumatrix aus Gleichungen 1.100 nachprüfen.

$$\begin{aligned} [\underline{S}]^T [\underline{S}]^* &= [\underline{S}]^2 \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1+4+4 & 2-4+2 & 2+2-4 \\ 2-4+2 & 4+4+1 & 4-2-2 \\ 2+2-4 & 4-2-2 & 4+1+4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.102)$$

Das Dreitor ist verlustlos.

### 1.7.7. Zirkulator

Ein Zirkulator gibt ein Signal, das an einem Port eingespeist wird, an den jeweils nächsten Port bzw. zum nächsten Tor weiter. Die Streumatrix eines idealen Zirkulators lautet

$$[\underline{S}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.103)$$

Man erkennt die zyklischen Beziehungen zwischen den Toren: Tor 1 gibt weiter an Tor 2 (zweite Zeile der Streumatrix,  $s_{21}$ ), Tor 2 gibt weiter an Tor 3 (dritte Zeile,  $s_{32}$ ), und Tor 3 gibt weiter an Tor 1 (erste Zeile,  $s_{13}$ ).

Frage 1.7.7: Der Zirkulator soll verwendet werden, um einen Sender und einen Empfänger an einer gemeinsamen Antenne zu betreiben. An Tor 1 soll eingespeist werden. An welchen Port schalten Sie Antenne und Empfänger?

Lösung: Wenn an Tor 1 eingespeist werden soll (Sender), muss an Tor 2 die Antenne folgen. Die von der Antenne empfangenen Signale werden an Tor 3 weiter gegeben, wo man den Empfänger anschließt.



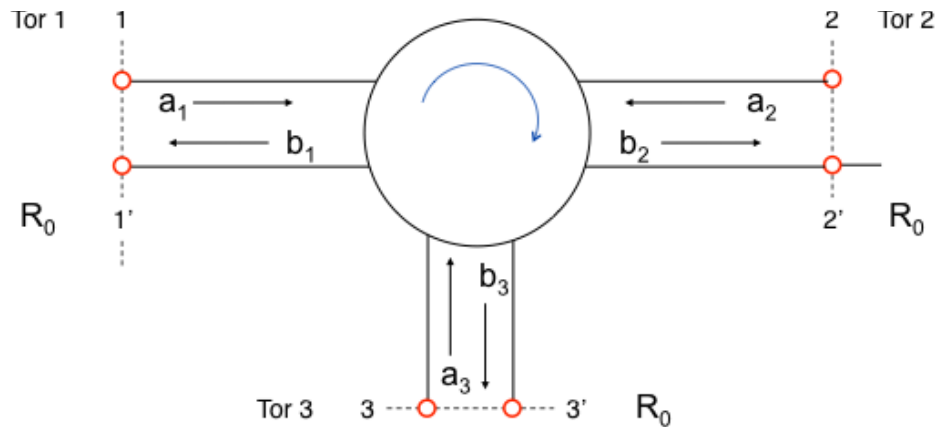


Abbildung 1.7.11: Zirkulator

Frage 1.7.8: Erläutern Sie die Funktionsweise des Zirkulators mit Hilfe der Streumatrix. Stellen Sie hierzu das Gleichungssystem  $\underline{b} = [\underline{S}] \underline{a}$  für die Wellen  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$  auf.

Lösung: In ausgeschriebener Form lautet das Gleichungssystem allgemein

$$\begin{aligned} \underline{b}_1 &= \underline{s}_{11} \underline{a}_1 + \underline{s}_{12} \underline{a}_2 + \underline{s}_{13} \underline{a}_3 \\ \underline{b}_2 &= \underline{s}_{21} \underline{a}_1 + \underline{s}_{22} \underline{a}_2 + \underline{s}_{23} \underline{a}_3 \\ \underline{b}_3 &= \underline{s}_{31} \underline{a}_1 + \underline{s}_{32} \underline{a}_2 + \underline{s}_{33} \underline{a}_3 \end{aligned} \quad (1.104)$$

Durch Einsetzen der Werte der Streumatrix erhält man hieraus für den Zirkulator

$$\begin{aligned} \underline{b}_1 &= \underline{a}_3 \\ \underline{b}_2 &= \underline{a}_1 \\ \underline{b}_3 &= \underline{a}_2 \end{aligned} \quad (1.105)$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich wie folgt interpretieren. Bei Einspeisung an Tor 1 werden Tor 2 und Tor 3 mit  $R_0$  reflexionsfrei abgeschlossen. Das an Tor 2 empfangene Signal  $\underline{b}_2$  ist somit gleich dem an Tor 1 gesendeten Signal  $\underline{a}_1$ . Es tritt nur eine Spannung an Tor 2 auf, da Tor 1 und Tor 3 reflexionsfrei abgeschlossen ist und somit  $\underline{a}_2 = \underline{a}_3 = 0$ . Aus  $\underline{a}_2 = 0$  folgt  $\underline{b}_3 = 0$  (kein Signal an Tor 3, d.h. Tor 3 ist von Tor 2 entkoppelt). Aus  $\underline{a}_3 = 0$  folgt  $\underline{b}_1 = 0$  (Entkopplung von Tor 2). Da die Anordnung symmetrisch ist, kann man auch an Tor 2 oder Tor 3 einspeisen. Die Funktionsweise folgt wiederum der Beschaltung und der Streumatrix.

## 2. Spezielle Netzwerke und Elemente

Im Abschnitt 2 werden Schaltungen bzgl. ihrer Übertragungseigenschaften berechnet. Charakteristisch in der Hochfrequenztechnik ist hierbei die Verwendung von Leitungsabschnitten in Kombination mit konzentrierten Bauelementen. Einige Schaltungen lassen sich durch Ausnutzen von Symmetrien berechnen (Gleich- und Gegentaktbetrieb). Dieses Vorgehen ist in den nachfolgenden Abschnitten näher erläutert.

### 2.1. Gleich- und Gegentaktbetrieb

Gegeben ist ein Netzwerk, das bezüglich einer Symmetrieebene achsensymmetrisch aufgebaut ist, was in Abbildung 2.1.1 durch die ungewöhnlich sechseckige Form des Zweitors angedeutet werden soll.

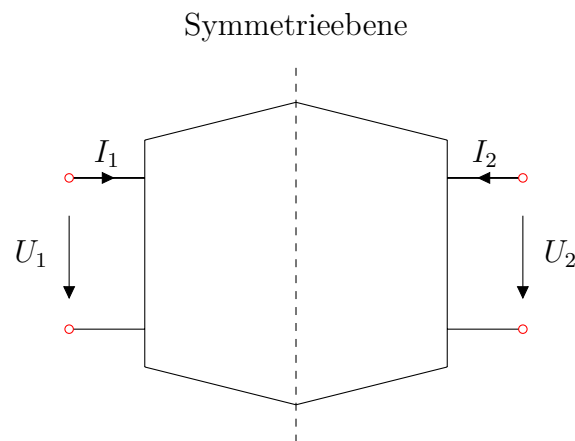


Abbildung 2.1.1: Symmetrisches Zweitor

Falls im Zweitor nur lineare Bauelemente verwendet wurden, gilt der Überlagerungssatz bzw. das Superpositionsprinzip. Dies bedeutet, dass zum Beispiel die Addition zweier Lösungen einer linearen Gleichung wieder eine Lösung der linearen Gleichung darstellt. Das kann für die Berechnung eines Netzwerks sehr hilfreich sein.

Angenommen man wählt  $U_e = \frac{U_1+U_2}{2}$  und  $U_o = \frac{U_1-U_2}{2}$  und betreibt das Netzwerk wie in Abbildung 2.1.2 dargestellt im sogenannten Gleichtakt (even mode, index e) und im Gegentakt (odd mode, index o), so ist die Überlagerung beider Fälle wieder die Ausgangssituation in Abbildung 2.1.1.

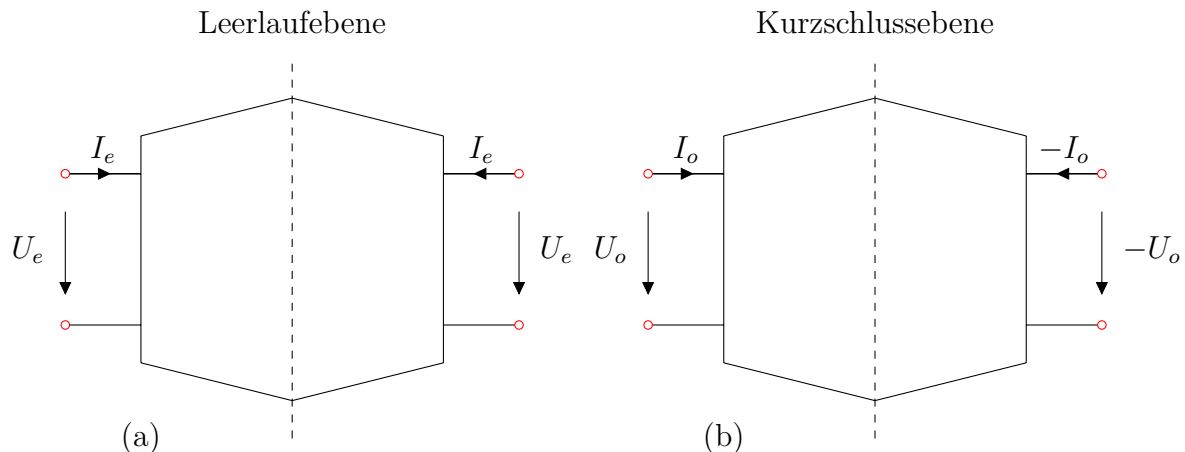
$$U_1 = U_e + U_o \quad (2.1)$$

$$U_2 = U_e - U_o \quad (2.2)$$

$$I_1 = I_e + I_o \quad (2.3)$$

$$I_2 = I_e - I_o \quad (2.4)$$

Gleichtaktfall und Gegentaktfall werden so natürlich nicht tatsächlich, sondern nur virtuell verwendet, um die Berechnung zu vereinfachen. Sind beispielsweise  $U_1$  und  $U_2$



**Abbildung 2.1.2:** Symmetrisches Zweitor im Gleichtakt- (a) und Gegentaktbetrieb (b)

gegeben und die Ströme  $I_1$  sowie  $I_2$  gesucht, so werden zunächst die Gleichtaktspannung  $U_e$  und die Gegentaktspannung  $U_o$  bestimmt, daraus die Ströme  $I_e$  und  $I_o$  und anschließend durch Überlagerung der Fälle  $I_1$  und  $I_2$  nach den Formeln 2.3 und 2.4 berechnet.

Obwohl hier zwei Fälle (Gleichtakt und Gegentakt) berechnet werden müssen, wird die Berechnung eines Netzwerks in vielen Fällen durch Ausnutzen der Symmetrieebenen vereinfacht. Im **Gleichtaktbetrieb** liegen an Tor 1 und Tor 2 identische Spannungen an. Auf Leitungen die innerhalb des Netzwerks durch die Symmetrieebene stoßen, fließt kein Strom, da auf beiden Seiten dieselbe Spannung anliegt. An der Symmetrieebene existiert also ein virtueller Leerlauf. Es genügt somit, nur die Hälfte des Netzwerks zu berechnen, wobei alle durch die Symmetrieebene getrennten Leitungen im Leerlauf sind.

Im **Gegentaktfall** wird an Tor 1 und Tor 2 die umgekehrte Spannung angelegt. Dadurch entsteht an der Symmetrieebene ein virtueller Kurzschluss aller durch die Symmetrieebene durchstoßenden Leitungen. Auch hier muss nur das halbe Netzwerk berechnet werden, allerdings mit kurzgeschlossenen Leitungen.

Zusammenfassend werden also statt des gesamten Netzwerks zwei halbe Netzwerke berechnet und anschließend überlagert.

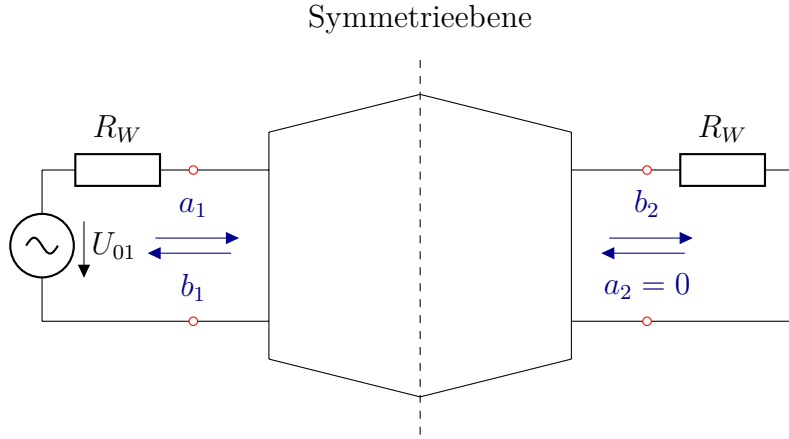
## 2.2. Streuparameter aus Gleich- und Gegentakt ermitteln

Das soeben für Spannungen und Ströme gezeigte Verfahren kann auch auf die Wellengrößen  $a$  und  $b$  angewendet werden, da diese nach Gleichungen 1.17 und 1.18 in linearer Weise mit den Spannungen und Strömen zusammenhängen.

Da die Streuparameter des symmetrischen Netzwerks aus Abbildung 2.2.1 bestimmt werden sollen, wird Tor 2 mit dem Bezugswellenwiderstand  $R_W$  abgeschlossen und Tor 1 mittels einer Spannungsquelle mit Innenwiderstand  $R_i = R_W$  gespeist. Durch den angepassten Abschluss an Tor 2 existiert keine einlaufende Welle an Tor 2. Die komplette Leistung der ausgehenden Welle  $b_2$  wird im Widerstand vernichtet.

Damit sind die Messbedingungen für die Streuparameter erfüllt und man könnte so die Elemente  $s_{11} = \frac{b_1}{a_1}$  und  $s_{21} = \frac{b_2}{a_1}$  der Streumatrix berechnen. Da das Netzwerk symmetrisch

ist, gilt zudem  $s_{22} = s_{11}$  und  $s_{12} = s_{21}$ , sodass alle Elemente bestimmt sind.



**Abbildung 2.2.1:** Symmetrisches Zweitor mit Wellengrößen

Es soll jedoch bei der Berechnung der Streumatrix die Symmetrie ausgenutzt werden, damit nicht das komplette Netzwerk berechnet werden muss, sondern lediglich zwei halbe Netzwerke, die an der Symmetrieebene einen Leerlauf bzw. einen Kurzschluss besitzen. Die Abbildung 2.2.2 zeigt die hierfür verwendete Beschaltung. Es gilt der Überlagerungssatz:

$$a_1 = a_e + a_o \quad (2.5)$$

$$a_2 = a_e - a_o \quad (2.6)$$

$$b_1 = b_e + b_o \quad (2.7)$$

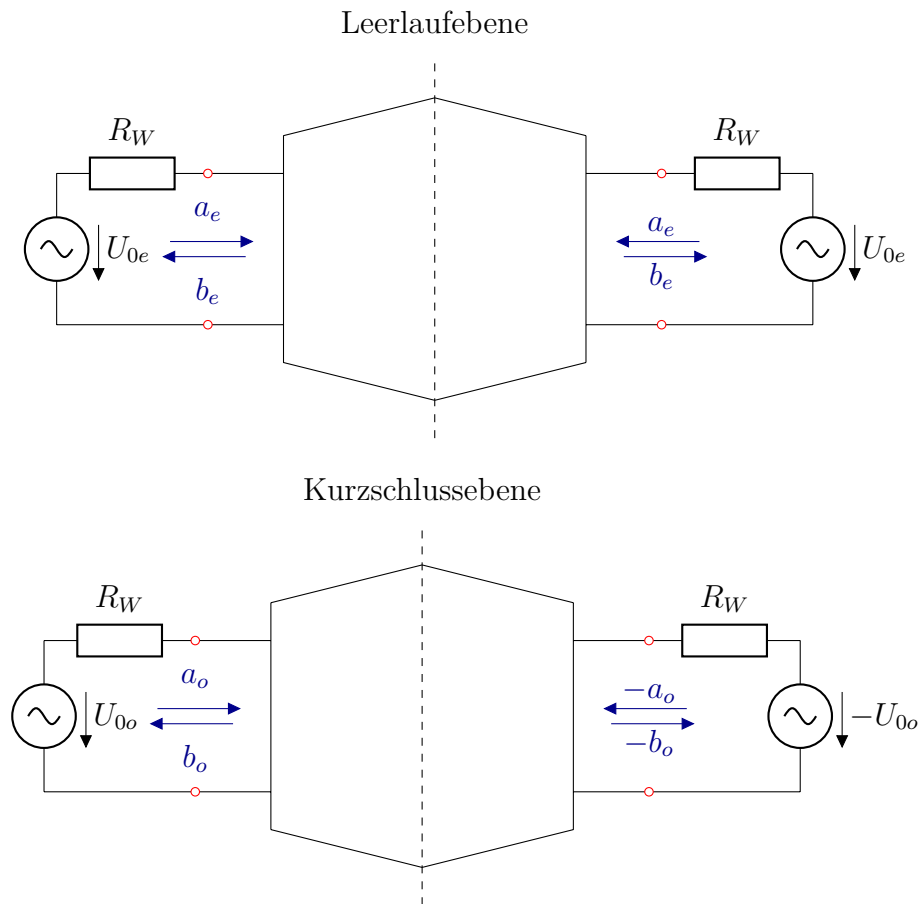
$$b_2 = b_e - b_o \quad (2.8)$$

Aufgrund des Abschlusses von Tor 2 mit dem Bezugswellenwiderstand  $R_W$  ist bekanntlich  $a_2 = 0$ . Daraus folgt mit Gleichung 2.6, dass  $a_e$  gleich  $a_o$  ist und  $a_1$  doppelt so groß ist wie die Gleichtaktwelle  $a_e$  bzw. die Gegentaktwelle  $a_o$ .

$$a_2 = 0 = a_e - a_o \rightarrow a_e = a_o \quad (2.9)$$

$$a_1 = a_e + a_o \rightarrow a_1 = 2a_e = 2a_o = 2a \quad (2.10)$$

Mit diesem Wissen kann  $s_{11}$  und  $s_{21}$  aus den Verhältnissen von entsprechender rücklaufender und hinlaufender Welle berechnet werden und ein Bezug zu den Streuparametern des Gleichtaktbetriebs und des Gegentaktbetriebs gefunden werden.



**Abbildung 2.2.2:** Symmetrisches Zweitor mit Wellengrößen im Gleichtaktbetrieb und Gegentaktbetrieb

$$s_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_e + b_o}{2a} = \frac{1}{2} \left( \underbrace{\frac{b_e}{a_e}}_{s_{11e}} + \underbrace{\frac{b_o}{a_o}}_{s_{11o}} \right) = \frac{1}{2} (s_{11e} + s_{11o}) \quad (2.11)$$

$$s_{21} = \frac{b_2}{a_1} = \frac{b_e - b_o}{2a} = \frac{1}{2} \left( \underbrace{\frac{b_e}{a_e}}_{s_{11e}} - \underbrace{\frac{b_o}{a_o}}_{s_{11o}} \right) = \frac{1}{2} (s_{11e} - s_{11o}) \quad (2.12)$$

Es ist also ausreichend,  $s_{11e}$  und  $s_{11o}$  zu bestimmen, um daraus relativ einfach die komplette Streumatrix zu erhalten. Es gilt zur Erinnerung aufgrund der Symmetrie:

$$s_{11} = s_{22} \quad (2.13)$$

$$s_{21} = s_{12} \quad (2.14)$$

Natürlich kann das Verfahren auch auf symmetrische Netzwerke mit mehr als zwei Toren ausgedehnt werden. Am Beispiel des Mehrtors in Abbildung 2.2.3 wird die Vorgehensweise hierzu kurz skizziert:

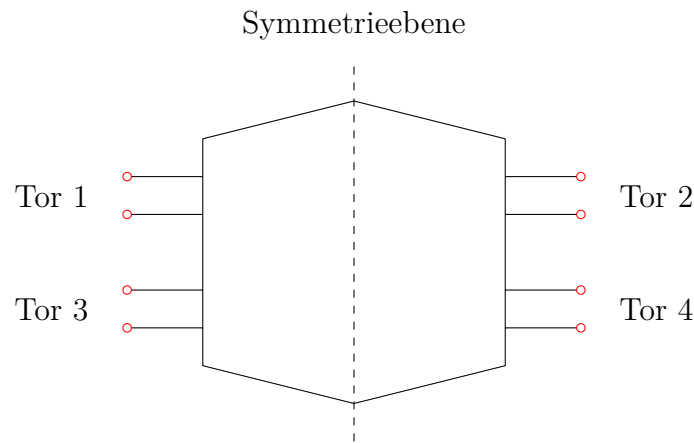


Abbildung 2.2.3: Symmetrisches Mehrtor

- **Even-Mode:**
  - Ersatzschaltbild für den Even-Mode zeichnen. Die Symmetrieebene ist eine Leerlaufebene.
  - Berechnen von  $s_{11e}$ ,  $s_{33e}$  und  $s_{13e}$ ,  $s_{31e}$  auf herkömmliche Weise. **Hinweis:** Falls die Schaltung reziprok ist, gilt  $s_{13e} = s_{31e}$ .
- **Odd-Mode:**
  - Ersatzschaltbild für den Odd-Mode zeichnen. Die Symmetrieebene ist eine Kurzschlussbene.
  - Berechnen von  $s_{11o}$ ,  $s_{33o}$  und  $s_{13o}$ ,  $s_{31o}$  auf herkömmliche Weise. **Hinweis:** Falls die Schaltung reziprok ist, gilt  $s_{13o} = s_{31o}$ .
- **Überlagerung:**
  - Die Reflexionsfaktoren der linken Tore 1 und 3 sind  $s_{11} = \frac{1}{2}(s_{11e} + s_{11o})$  und  $s_{33} = \frac{1}{2}(s_{33e} + s_{33o})$ .
  - Die Transmissionsfaktoren zwischen den Toren 1 und 3 sind  $s_{31} = \frac{1}{2}(s_{31e} + s_{31o})$  und  $s_{13} = \frac{1}{2}(s_{13e} + s_{13o})$ .
  - Durch Ausnutzen der Symmetrie erhält man  $s_{22} = s_{11}$  und  $s_{44} = s_{33}$  sowie  $s_{24} = s_{13}$  und  $s_{42} = s_{31}$ .
  - Berechnung der Transmissionsfaktoren  $s_{21} = s_{12} = \frac{1}{2}(s_{11e} - s_{11o})$  und  $s_{34} = s_{43} = \frac{1}{2}(s_{33e} - s_{33o})$ . **Achtung:** In diesen Fällen muss die Differenz der Streuparameter im Even- und Odd-Mode betrachtet werden. Dies liegt darin begründet, dass Tor 2 und Tor 4 im Vergleich zu Tor 1 und Tor 3 auf der anderen Seite der Symmetrieebene liegen und deshalb im Odd-Mode umgekehrt gespeist wurden.

- Berechnung der noch fehlenden Transmissionsfaktoren  $s_{23} = s_{14} = \frac{1}{2}(s_{13e} - s_{13o})$  und  $s_{32} = s_{41} = \frac{1}{2}(s_{31e} - s_{31o})$ . Auch hier muss die Differenz betrachtet werden. Die Begründung ist identisch zum vorherigen Punkt.

Bei Anwendung des Verfahrens für ein anderes Viertor oder sogar ein noch größeres Mehrtor ist sehr genau auf die Nummerierung der Tore zu achten, da diese zumeist willkürlich und damit unterschiedlich ist.

### 2.3. Beispiel zum Gleich- und Gegentaktbetrieb

In Abbildung 2.3.1 ist eine symmetrische Schaltung gezeigt, die mittels der Methode von Gleichtakt- und Gegentaktbetrieb berechnet werden soll.

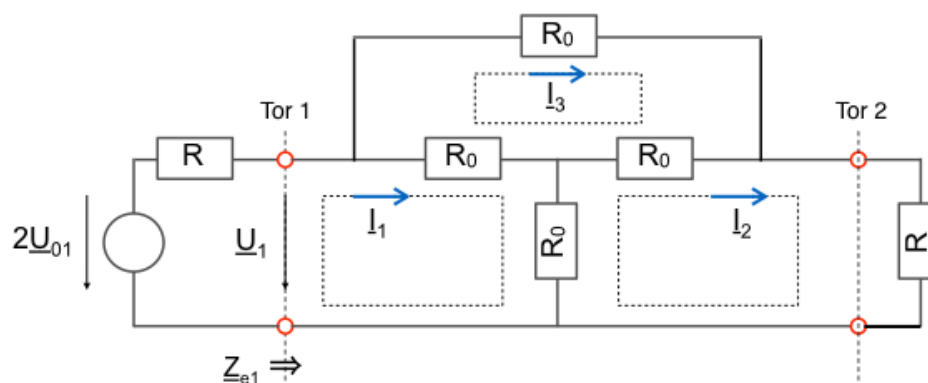


Abbildung 2.3.1: Symmetrisch aufgebautes Zweitor

Frage 2.3.1: Berechnen Sie die Eingangsimpedanz  $Z_{e1}$  für den Fall, dass der Bezugswiderstand  $R = R_0$  ist. Wie gehen Sie vor, um die Eingangsimpedanz  $Z_{e1}$  im allgemeinen Fall zu berechnen?

Lösung: Für  $R = R_0$  ist  $Z_{e1} = R_0$ , da hier zwei parallele Zweige mit jeweils zweimal  $R_0$  in Serie existieren sowie einmal  $R_0$  im Brückenzweig.

Allgemeiner Fall: Maschengleichungen und Knotengleichung führen zu einem algebraischen Gleichungssystem, das sich analytisch nach  $Z_{e1} = \frac{U_1}{I_1}$  lösen lässt.

Frage 2.3.2: In Abbildung 2.3.2 wurde das Zweitor umgeformt in eine Schaltung, die in der Ebene A - A' eine symmetrische Struktur besitzt. Ist das elektrische Verhalten der umgewandelten Struktur bzgl. der Tore 1 und 2 gleich?

Frage 2.3.3: Der eingangs gezeigte Betrieb wird nun durch die Überlagerung von vier Spannungsquellen nachgebildet (siehe Abbildung 2.3.3) dargestellt. Warum ist diese Betriebsart elektrisch äquivalent? Warum darf man sich den Betriebszustand aus der Überlagerung anderer Spannungsquellen vorstellen? Stichwort: Lineare Systeme.

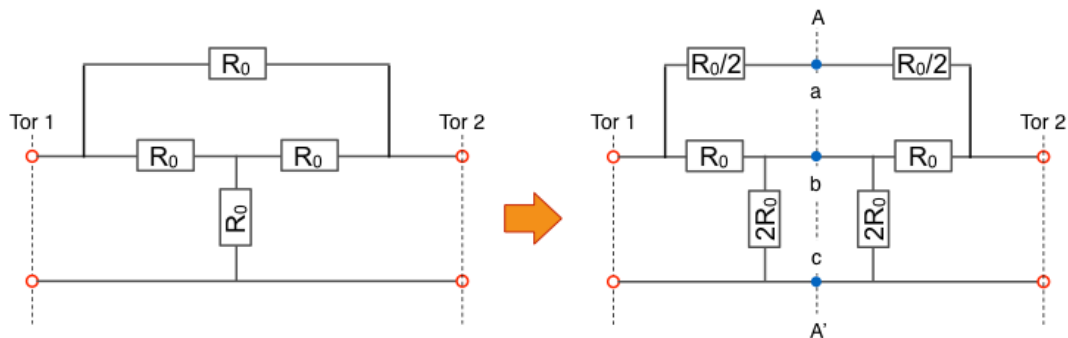


Abbildung 2.3.2: Einführung einer Symmetrieebene zur Vereinfachung

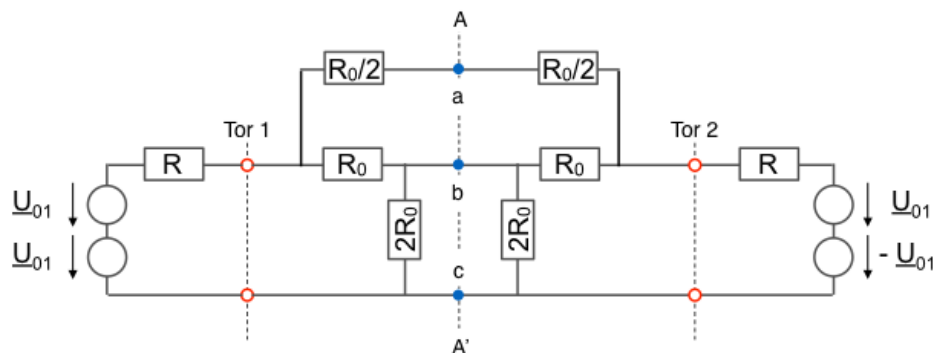


Abbildung 2.3.3: Betrieb mit vier voneinander abhängigen Leerlaufspannungen

Frage 2.3.4: Aus den vier Spannungsquellen zum Betrieb des Zweitores werden nun die zwei gleichphasigen Spannungsquellen an Eingang und Ausgang ausgewählt. Der Betrieb insgesamt stellt sich weiterhin als Überlagerung dieser beiden Spannungsquellen (Gleichtaktbetrieb) mit den beiden verbliebenen Spannungsquellen dar. Die verbliebenen Spannungsquellen sind gegenphasig orientiert (Gegentaktbetrieb). Welche Beziehungen

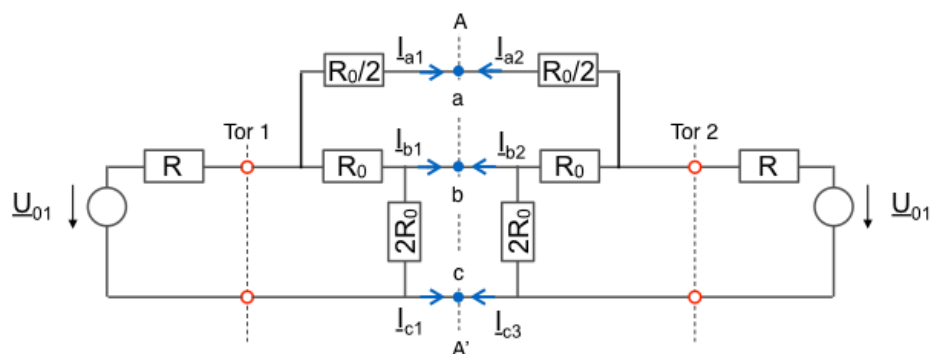


Abbildung 2.3.4: Gleichtaktbetrieb (gleichphasige Spannungen an den Toren 1 und 2)

für Spannungen und Ströme gelten im Gleichtaktbetrieb in der Symmetrieebene A - A'? Wie lässt sich das Netzwerk vereinfachen? Welche Eingangsspannung und welcher Eingangsstrom ergibt sich im Gleichtaktbetrieb?



Lösung: An beiden Toren ist die gleiche Spannung angelegt. Das Netzwerk ist spiegel-symmetrisch zur Symmetrieebene A-A'. Folglich sind in der Symmetrieebene die Ströme aus den jeweils gegenüberliegenden Zweigen gleich. Aus der Knotenregel folgt, dass die Summe dieser Ströme Null ist.

$$\begin{aligned}\underline{I}_a &= \underline{I}_{a1} - \underline{I}_{a2} = 0 \\ \underline{I}_b &= \underline{I}_{b1} - \underline{I}_{b2} = 0 \\ \underline{I}_c &= \underline{I}_{c1} - \underline{I}_{c2} = 0\end{aligned}\quad (2.15)$$

Die Symmetrieebene im Gleichtaktbetrieb befindet sich damit im Leerlauf. Es ergibt sich das in Abbildung 2.3.5 gezeigte Ersatzschaltbild. Für den Strom  $\underline{I}_{e1}$  berechnet man

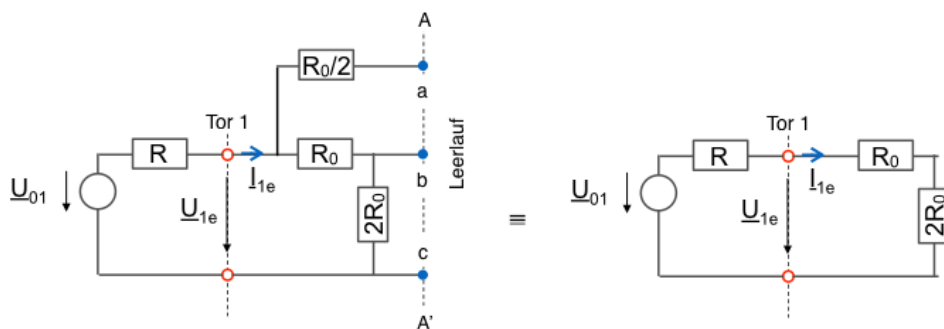


Abbildung 2.3.5: Ersatzschaltung im Gleichtaktbetrieb

$$\underline{I}_{1e} = \frac{\underline{U}_{01}}{R + 3R_0}. \quad (2.16)$$

Hierbei deutet der Index 1 auf das Tor 1 und der Index  $e$  auf den Gleichtaktbetrieb (Even-Mode) hin. Die Spannung  $\underline{U}_{1e}$  ergibt sich zu

$$\underline{U}_{1e} = \frac{3R_0}{R + 3R_0} \underline{U}_{01}. \quad (2.17)$$

Frage 2.3.5: Welche Bedingungen gelten in der Symmetrieebene A-A' im Gegentaktbetrieb? Welche Eingangsspannung und welcher Eingangsstrom ergeben sich im Gegentaktbetrieb?

Lösung: Folgende Abbildung 2.3.6 zeigt das Netzwerk im Gegentaktbetrieb. Die Spannungsquellen an den Toren 1 und 2 haben nun umgekehrtes Vorzeichen. Da das Netzwerk symmetrisch aufgebaut ist, folgt hieraus, dass auch die Spannungen in der Symmetrieebene A-A' umgekehrtes Vorzeichen haben. Es gilt also

$$\begin{aligned}\underline{U}_{1ab} &= -\underline{U}_{2ab} \\ \underline{U}_{1bc} &= -\underline{U}_{2bc}\end{aligned}\quad (2.18)$$

Somit ist die Summe der Spannungen in der Symmetrieebene gleich Null und es herrschen Kurzschlussbedingungen. Das Netzwerk lässt sich gemäß Abbildung 2.3.7 vereinfachen. Für

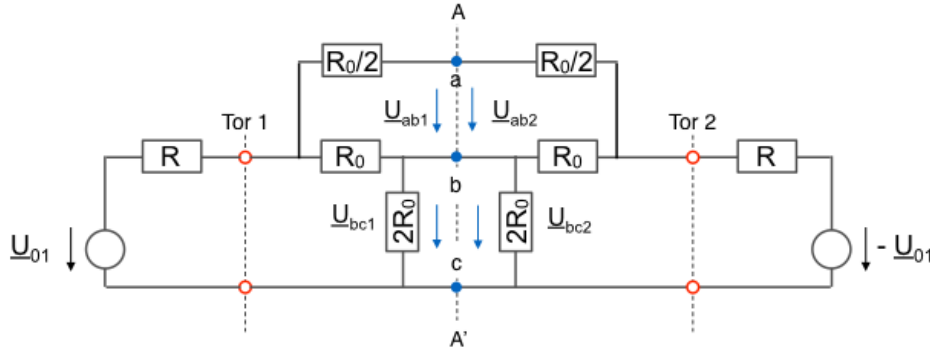


Abbildung 2.3.6: Gegentaktbetrieb

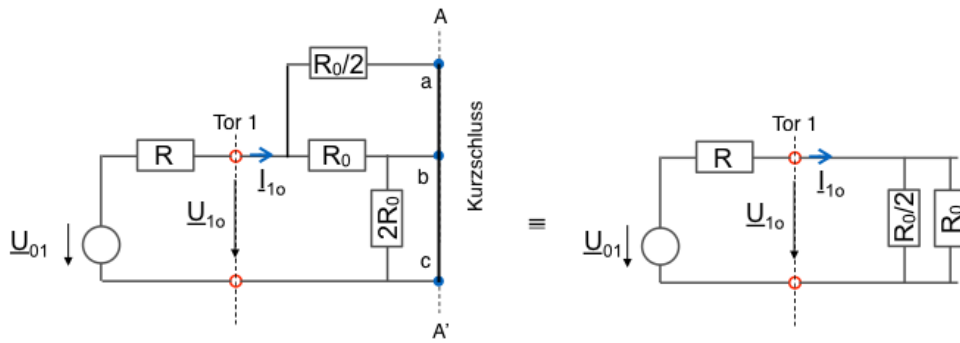


Abbildung 2.3.7: Ersatzschaltbild im Gegentaktbetrieb

den Strom  $I_{1o}$  ergibt sich

$$I_{1o} = \frac{U_{01}}{R + R_0 \parallel R_0/2} = \frac{U_{01}}{R + R_0/3} = \frac{3}{3R + R_0} U_{01}. \quad (2.19)$$

Hierbei deutet der Index 1 auf das Tor 1 und der Index  $o$  auf den Gegentaktbetrieb hin (Odd-Mode). Die Spannung  $U_{1o}$  ergibt sich zu

$$U_{1o} = \frac{R_0/3}{R + R_0/3} U_{01} = \frac{R_0}{3R + R_0} U_{01}. \quad (2.20)$$

Frage 2.3.6: Welcher Eingangsstrom und welche Eingangsspannung ergibt sich insgesamt durch die Überlagerung beider Betriebsfälle (Gleichtakt und Gegentakt)? Welche Eingangsimpedanz besitzt das Netzwerk? Überprüfen Sie Ihr Ergebnis auf Plausibilität für  $R = R_0$ .

Lösung: Für den gesamten Eingangsstrom erhält man durch Addition

$$I_1 = I_{1e} + I_{1o} = \left( \frac{1}{R + 3R_0} + \frac{3}{3R + R_0} \right) U_{01}. \quad (2.21)$$

Die Eingangsspannung ergibt sich ebenfalls durch Addition:

$$U_1 = U_{1e} + U_{1o} = \left( \frac{3R_0}{R + 3R_0} + \frac{R_0}{3R + R_0} \right) U_{01} \quad (2.22)$$

Die Eingangsimpedanz erhält man aus dem Verhältnis von Spannung und Strom.

$$\underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = R_0 \frac{5R + 3R_0}{3R + 5R_0} \quad (2.23)$$

Überprüfung der Plausibilität: Für  $R = R_0$  ist die Eingangsimpedanz  $\underline{Z}_{e1} = R_0$ .

## 2.4. Resistive Signalteiler

Folgende Abbildung zeigt einen aus diskreten Bauelementen aufgebauten resistiven Signalteiler. Zur besseren Übersicht ist die Masseführung nicht durchgehend eingezeichnet, sondern nur an den Toren als Bezugspunkt aufgeführt. Leitungseffekte sollen hier keine Rolle spielen.

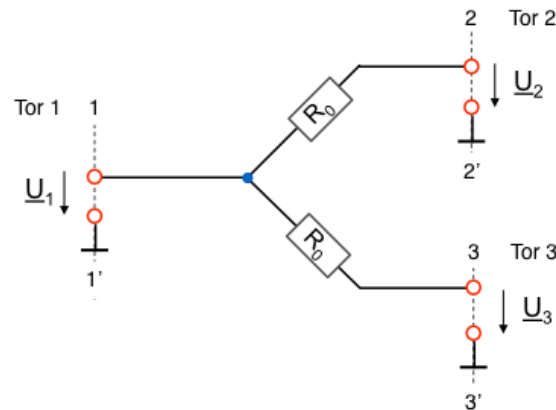


Abbildung 2.4.1: Resistiver Signalteiler

Frage 2.4.1: Berechnen Sie die Streumatrix des Signalteilers für die Bezugsimpedanz  $R_W = R_0$ .

Lösung: Zur Ermittlung der Streuparameter wird die in folgender Abbildung dargestellte Beschaltung verwendet. Den Eingangsreflexionsfaktor  $\underline{s}_{11}$  erhält man aus der Eingangsimpedanz  $\underline{Z}_{e1}$ .

$$\underline{Z}_{e1} = 2R_0 || 2R_0 = R_0 \quad (2.24)$$

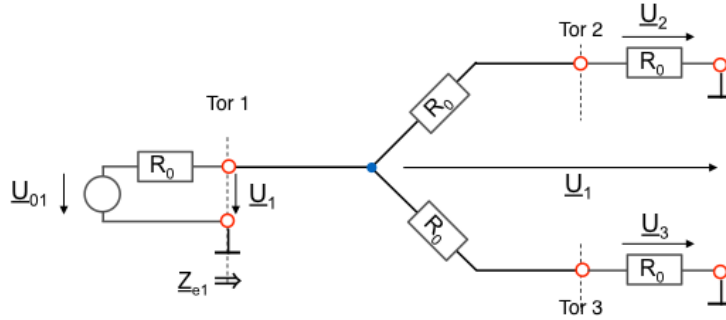
Der Eingang ist somit reflexionsfrei abgeschlossen und  $\underline{s}_{11} = 0$ . Den Vorwärtstransmissionsfaktor  $\underline{s}_{21}$  erhält man definitionsgemäß aus dem Spannungsverhältnis

$$\underline{s}_{21} = \frac{2 \underline{U}_2}{\underline{U}_{01}}. \quad (2.25)$$

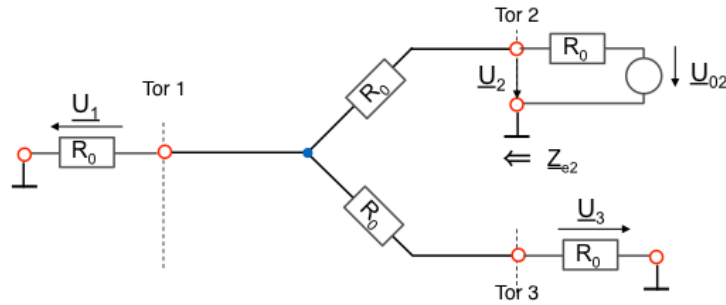
Der Beschaltung entnimmt man (1)  $\underline{U}_2 = \underline{U}_1/2$  und (2)  $\underline{U}_1 = \underline{U}_{01}/2$ . Somit ergibt sich

$$\underline{s}_{21} = \frac{2 \underline{U}_2}{\underline{U}_{01}} = \frac{1}{2}. \quad (2.26)$$

Aus Symmetriegründen sind  $\underline{s}_{21} = \underline{s}_{31}$ . Wegen der gegebenen Reziprozität sind  $\underline{s}_{12} = \underline{s}_{21}$  und  $\underline{s}_{13} = \underline{s}_{31}$ . Es fehlen somit noch die beiden Eingangsreflexionsfaktoren an Tor 2 und

Abbildung 2.4.2: Beschaltung für  $\underline{s}_{11}$  und  $\underline{s}_{21}$ 

Tor 3 sowie die Transmissionsfaktoren zwischen den Toren 2 und 3. Aus Symmetriegründen verhält sich Tor 2 wie Tor 3. Folgende Abbildung zeigt die Beschaltung zur Ermittlung von  $\underline{s}_{22}$  und  $\underline{s}_{32}$ . Den Eingangsreflexionsfaktor an Tor 2 erhält man aus der Eingangsimpedanz

Abbildung 2.4.3: Beschaltung für  $\underline{s}_{22}$  und  $\underline{s}_{32}$ 

an Tor 2.

$$\underline{Z}_{e2} = R_0 + 2R_0 || R_0 = R_0 + \frac{2}{3} R_0 = \frac{5}{3} R_0 \quad (2.27)$$

Somit beträgt der Eingangsreflexionsfaktor

$$\underline{s}_{22} = \frac{\underline{Z}_{e2} - R_0}{\underline{Z}_{e2} + R_0} = \frac{5/3 - 1}{5/3 + 1} = \frac{1}{4}. \quad (2.28)$$

Den Vorwärtstransmissionsfaktor  $\underline{s}_{32}$  erhält man wie üblich aus dem Spannungsverhältnis

$$\underline{s}_{32} = \frac{2\underline{U}_3}{\underline{U}_{02}}. \quad (2.29)$$

Mit Hilfe der Eingangsimpedanz  $\underline{Z}_{e2}$  erhält man die Spannungsverhältnisse (1)  $\underline{U}_2 = \underline{U}_{02} (\underline{Z}_{e2} / (R_0 + \underline{Z}_{e2})) = \frac{5}{8}$  und (2)  $\underline{U}_3 = \frac{1}{2} \underline{U}_2 ((2/3 R_0) / (R_0 + 2/3 R_0)) = \frac{2}{5}$ . Somit ergibt sich

$$\underline{s}_{32} = \frac{2\underline{U}_3}{\underline{U}_{02}} = \frac{1}{4} \quad (2.30)$$

Insgesamt erhält man also folgende Streumatrix

$$[\underline{S}] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Frage 2.4.2: Leistungsbilanz. Als resistives Netzwerk ist der Signalteiler nicht verlustfrei. Wie ist die Leistungsbilanz beim Vorwärtsbetrieb (d.h. Einspeisung an Port 1, welche Leistung gelangt an die Tore 2 und 3, welche Leistung geht verloren?). Wie gut ist die Trennung von Tor 2 und 3 gegeneinander?

Frage 2.4.3: Folgende Abbildung zeigt einen resistiven Signalteiler, der allseitig angepasst ist. Berechnen Sie die Streumatrix.

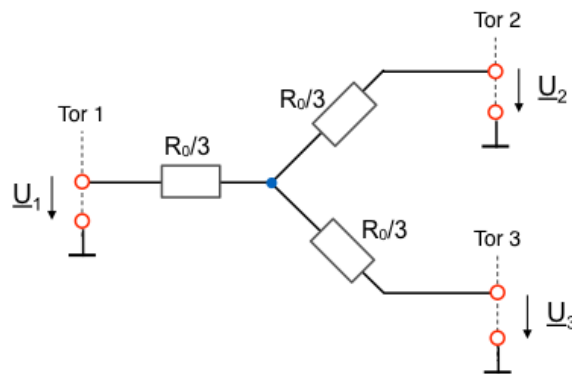


Abbildung 2.4.4: Allseitig angepasster Signalteiler

Lösung: Die Streumatrix ist:

$$[\underline{S}] = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

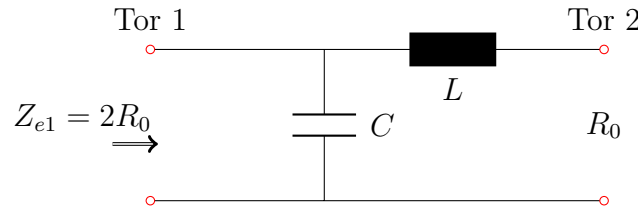
Frage 2.4.4: Leistungsbilanz. Als resistives Netzwerk ist der Signalteiler nicht verlustfrei. Wie ist die Leistungsbilanz beim Vorwärtsbetrieb (d.h. Einspeisung an Port 1, welche Leistung gelangt an die Tore 2 und 3, welche Leistung geht verloren?). Wie gut ist die Trennung von Tor 2 und 3 gegeneinander?

## 2.5. Reaktive Signalteiler

Reaktive Netzwerke bestehen aus verlustfreien passiven Bauteilen, d.h. Reaktanzen (Blindwiderstände) bzw. Suszeptanzen (Blindleitwerte). Sie sind aus diskreten Bauteilen aufgebaut (Spulen und Kondensatoren) oder enthalten Leitungselemente.

Frage 2.5.1: Das in Abbildung 2.5.1 gezeigte Zweitor soll die Impedanz  $R_0$  an Tor 2

in die Eingangsimpedanz  $Z_{e1} = 2R_0$  an Tor 1 transformieren. Bestimmen Sie hierfür die benötigte Induktivität  $L$  und die benötigte Kapazität  $C$ . Als Betriebsbedingungen sind vorgegeben:  $R_0 = 50 \Omega$ , Frequenz  $f = \frac{10^9}{2\pi}$  Hz. Zusatzfrage: Beschreiben Sie die Transformation im Smith-Diagramm.



**Abbildung 2.5.1:** Reaktives Netzwerk

Lösung: Die Vorgabe für die Eingangsimpedanz  $Z_{e1} = 2R_0$  an Tor 1 bei Abschluss mit  $R_0$  an Tor 2 führt unter den genannten Betriebsbedingungen zu den gefragten Werten für  $L$  und  $C$ . Schliesst man Tor 2 mit  $R_0$  ab, so erhält man für die Eingangsimpedanz

$$Z_{e1} = \frac{1}{j\omega C} \parallel (j\omega L + R_0) = \frac{j\omega L + R_0}{1 - \omega^2 LC + j\omega R_0 C} \stackrel{!}{=} 2R_0. \quad (2.33)$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner und Sortieren nach Realteil und Imaginärteil erhält man hieraus

$$R_0 + j\omega L = 2R_0 (1 - \omega^2 LC) + j\omega 2R_0^2 C. \quad (2.34)$$

Für den Realteil und den Imaginärteil ergeben sich folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} R_0 &= 2R_0 (1 - \omega^2 LC) \\ j\omega L &= j\omega 2R_0^2 C \end{aligned} \quad (2.35)$$

Daraus folgen wiederum:

$$\begin{aligned} \omega^2 LC &= \frac{1}{2} \\ L &= 2R_0^2 C \end{aligned} \quad (2.36)$$

Durch Einsetzen der zweiten in die erste Gleichung erhält man  $2\omega^2 R_0 C^2 = \frac{1}{2}$  und somit  $C = \frac{1}{\omega 2R_0}$ . Mit  $\omega = 10^9$  Hz und  $R_0 = 50 \Omega$  ergibt sich  $C = 10^{-11}$  F = 10 pF. Durch Einsetzen von  $C$  in die zweite Gleichung erhält man  $L = 50$  nH. Bemerkung: Für die Reaktanzen erhält man  $\omega L = 50 \Omega$  und  $\frac{1}{\omega C} = 100 \Omega$ .

Frage 2.5.2 Berechnen Sie die Streumatrix des Transformators aus der vorausgegangenen Aufgabe. Die Bezugswiderstände sind  $R_{W1} = 2R_0$  an Tor 1 und  $R_{W2} = R_0$  an Tor 2.

Lösung: Den Eingangsreflexionsfaktor an Tor 1 erhält man aus der bereits gegebenen Eingangsimpedanz  $Z_{e1} = 2R_0$ . Da der Eingang bezogen auf  $R_{W1} = 2R_0$  reflexionsfrei

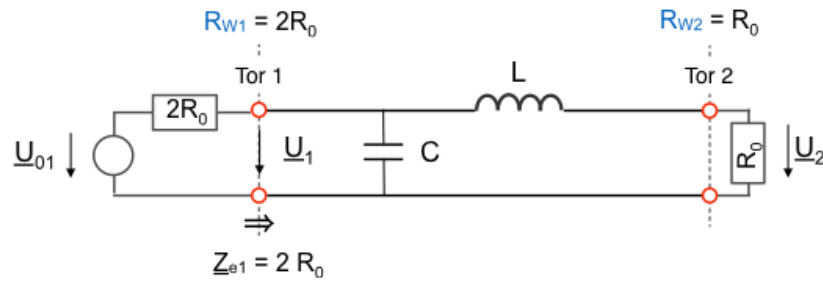


Abbildung 2.5.2: Beschaltung zur Ermittlung der Streuparameter

abgeschlossen ist, erhält man  $s_{11} = 0$ . Die Vorwärtstransmission  $s_{21}$  folgt dem Spannungsverhältnis von Ausgang zum Eingang.

$$s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}} \sqrt{\frac{R_{W1}}{R_{W2}}} \quad (2.37)$$

Wegen  $Z_{e1} = 2R_0$  gilt  $\frac{U_1}{U_{01}} = \frac{1}{2}$ . Das Verhältnis der Ausgangsspannung zur Eingangsspannung ist

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_0}{R_0 + j\omega L} = \frac{R_0 \cdot (R_0 - j\omega L)}{R_0^2 + (\omega L)^2} = \frac{1}{2} (1 - j). \quad (2.38)$$

Einsetzen in Gleichung 2.37 ergibt

$$s_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}}. \quad (2.39)$$

Da das Zweitor aus rein passiven, nicht richtungsabhängigen Bauelementen aufgebaut ist, ist es reziprok, d.h.  $s_{12} = s_{21}$ . Tor 2 ist ebenfalls reflexionsfrei, d.h.  $s_{22} = 0$ . Insgesamt erhält man folgende Streumatrix:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Frage 2.5.3: Wie ist die Leistungsbilanz des berechneten Zweitors? Prüfen Sie Ihre Aussage auf Plausibilität. Welche Phasenbeziehung existiert zwischen der Spannung an Tor 2 und der Spannung an Tor 1?

Lösung: Da das Zweitor verlustfrei ist, muss die Leistung entweder am Eingang reflektiert werden oder vollständig an den Ausgang gelangen. Die reflektierte und übertragene Wirkleistung ermittelt man aus den Betragsquadraten der Streuparameter. Die Phasenbeziehung zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung entnimmt man aus  $s_{21}$

Frage 2.5.4 Das Zweitor wird gemäß Abbildung 2.5.3 zu einem Dreitor erweitert. Berechnen Sie die Streumatrix des Dreitors. Die Bezugswiderstände werden identisch gewählt ( $R_{W1} = R_{W2} = R_{W3} = R_0 = 50\Omega$ ).

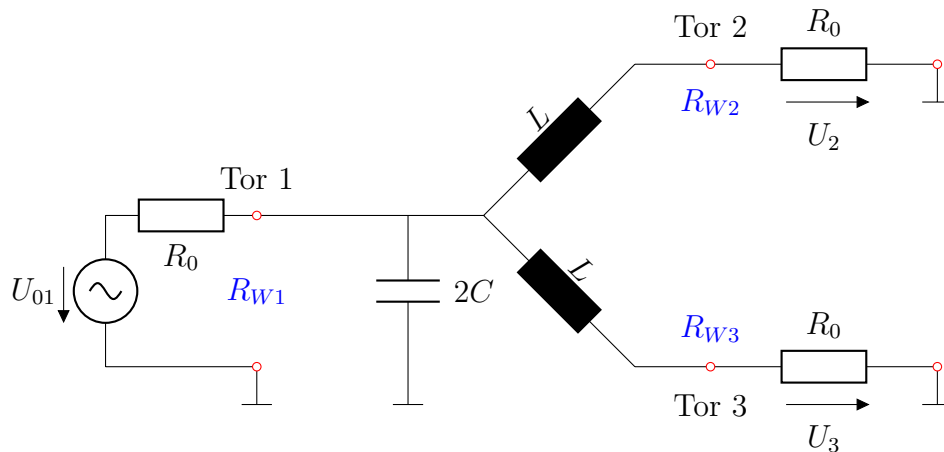


Abbildung 2.5.3: Reaktiver Signalteiler

Frage 2.5.5 Abbildung fig:RKST4 zeigt ein Dreitor, das ebenfalls als reaktiver Signalteiler eingesetzt werden soll ( $R_0 = 50\Omega$ ). Bei der Betriebsfrequenz  $f = \omega/(2\pi)$  gelten für die Reaktanzen:

$$\begin{aligned}\omega L_1 &= 100\ \Omega \\ 1/(\omega C_1) &= 100\ \Omega \\ \omega L_2 &= 50\ \Omega \\ 1/(\omega C_2) &= 50\ \Omega\end{aligned}\tag{2.41}$$

Berechnen Sie die Streumatrix des Dreitors.

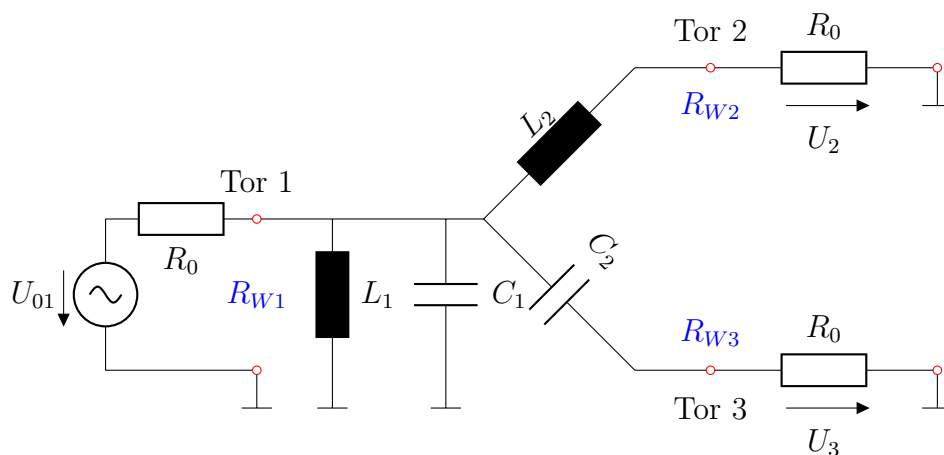


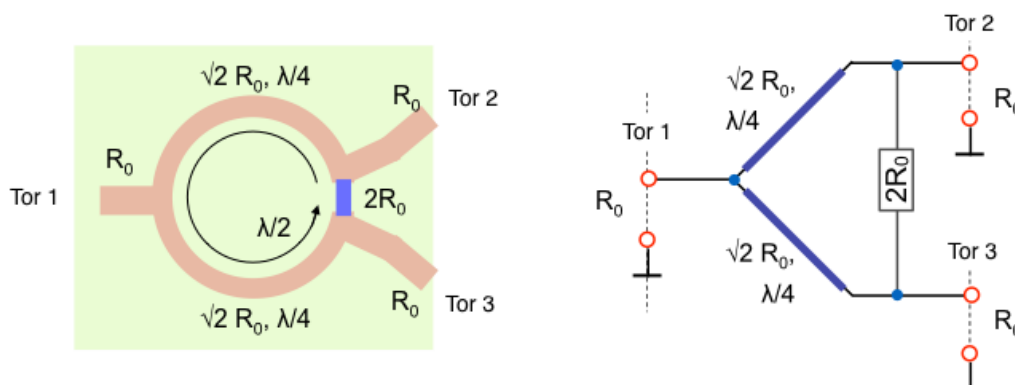
Abbildung 2.5.4: Reaktiver Signalteiler mit unterschiedlichen Zweigen für Tor 2 und 3

Frage 2.5.6: Wie ist die Leistungsbilanz des Dreitors aus vorheriger Aufgabe? Prüfen Sie Ihre Aussage auf Plausibilität. Welche Phasenbeziehung existiert zwischen der Spannung an den Toren 2, 3 und der Spannung an Tor 1, sowie zwischen den Spannungen an Tor 2 und Tor 3?



## 2.6. Wilkinson-Leistungsteiler

Folgende Abbildung zeigt den Aufbau eines Wilkinson-Teilers. Auf der linken Seite ist eine Realisierung als Mikrostreifenleiter dargestellt. Die rechte Seite zeigt das Ersatzschaltbild bestehend aus Leitungselementen und konzentrierten Bauteilen. Der Wilkinson-Teiler besteht aus zwei Viertelwellenleitungen zwischen Tor 1 und Tor 2 sowie zwischen Tor 1 und Tor 3. Zwischen den Toren 2 und 3 ist ein Widerstand als diskretes Bauelement eingebaut. Alle Tore haben die Bezugsimpedanz (= Wellenwiderstand)  $R_0$ . Die beiden Viertelwellenleitungen haben den Wellenwiderstand  $\sqrt{2} R_0$ . Der konzentrierte Widerstand hat den Wert  $2 R_0$ .



**Abbildung 2.6.1:** Wilkinson-Leistungsteiler - Mikrostreifenleiter und Ersatzschaltbild

Frage 2.6.1 Qualitative Betrachtung: Erläutern Sie das Funktionsprinzip des Leistungsteilers. Welche Streumatrix würden Sie erwarten?

Lösung: Bei Einspeisung an Tor 1 sollte sich das Signal wegen des symmetrischen Aufbaus zu gleichen Teilen auf die Tore 2 und 3 aufteilen. Die Impedanz  $2 R_0$  zwischen Tor 2 und 3 sollte in diesem Fall keine Rolle spielen. Die Eingangsimpedanz pro Zweig ergibt sich aus der Viertelwellentransformation zu  $\frac{(\sqrt{2} R_0)^2}{R_0} = 2 R_0$ . Insgesamt ist  $\underline{Z}_{e1} = R_0$ . Somit ist der Eingangsreflexionsfaktor an Tor 1

$$\underline{s}_{11} = 0. \quad (2.42)$$

Es gibt keine Reflexionen am Eingang.

Da die Impedanz  $2 R_0$  zwischen Tor 2 und 3 bei Einspeisung an Tor 1 keine Rolle spielen sollte, ist die Übertragung verlustfrei. Für die Vorwärtstransmission in beiden Zweigen sollte sich aus der Leistungsbilanz

$$|\underline{s}_{21}| = |\underline{s}_{31}| = 1/\sqrt{2} \quad (2.43)$$

ergeben. In diesem Fall teilt sich die Leistung (Quadrat der Transmissionsfaktoren) jeweils zur Hälfte zwischen den beiden Zweigen auf. Jeder Viertelwellentransformator verursacht eine Phasenverschiebung von  $-90$  Grad zwischen Tor 2 (bzw. Tor 3) und Tor 1.

$$\underline{s}_{21} = \underline{s}_{31} = -j/\sqrt{2} \quad (2.44)$$

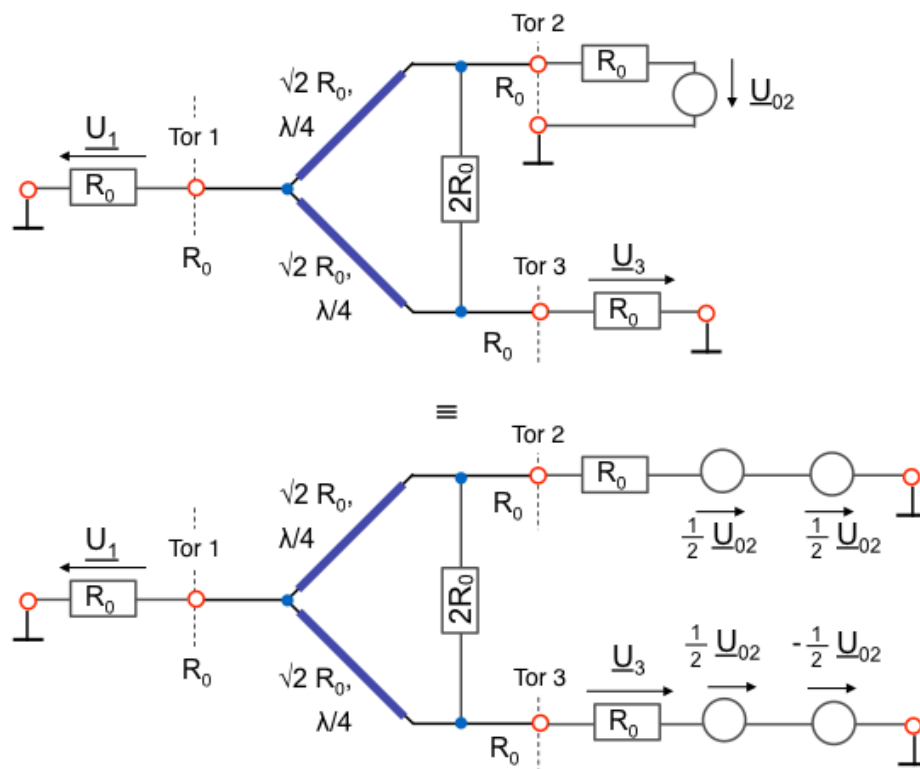
Bei Einspeisung an Tor 2 (bzw. Tor 3) zur Ermittlung von  $\underline{s}_{22}$  und  $\underline{s}_{32}$  (bzw.  $\underline{s}_{33}$  und  $\underline{s}_{23}$ ) fällt die qualitative Betrachtung wegen des konzentrierten Widerstandes zwischen den beiden Toren 2 und 3 etwas schwerer. Aus Symmetriegründen ist klar, dass

$$\begin{aligned}\underline{s}_{22} &= \underline{s}_{33} \\ \underline{s}_{32} &= \underline{s}_{23}\end{aligned}\quad (2.45)$$

gelten muss. Wünschenswert wären reflexionsfreie Einspeisungen an den Toren 2 und 3 sowie eine Entkopplung der Tore 2 und 3, d.h. alle verbleibenden Streuparameter sollten den Wert Null haben.

Frage 2.6.2 Verwenden Sie die Methode des Gleichtakt- und Gegentaktbetriebs zur Berechnung der Streumatrix des Wilkinson-Leistungsteilers.

Lösung: Da der Rückwärtsbetrieb etwas schwer zu durchschauen ist, wird dieser als Überlagerung eines Gleichtaktbetriebs und eines Gegentaktbetriebs dargestellt, wie in den folgenden Abbildungen gezeigt. Der obere Teil der Abbildung zeigt die Beschaltung



**Abbildung 2.6.2:** Wilkinson-Leistungsteiler - Einspeisung an Tor 2

zur Ermittlung der Streuparameter bei Einspeisung an Tor 2. Diese Beschaltung ist äquivalent zu der Beschaltung im unteren Teil der Abbildung. Der untere Teil der Abbildung wird nun interpretiert als Überlagerung einer Beschaltung mit gleichen Spannungsquellen an den Toren 2 und 3 (Gleichtaktbetrieb), sowie einer Beschaltung mit entgegengesetzt gepolten Spannungsquellen an den Toren 2 und 3. Diese Überlagerung lässt sich nun in

die beiden Betriebsarten auftrennen.

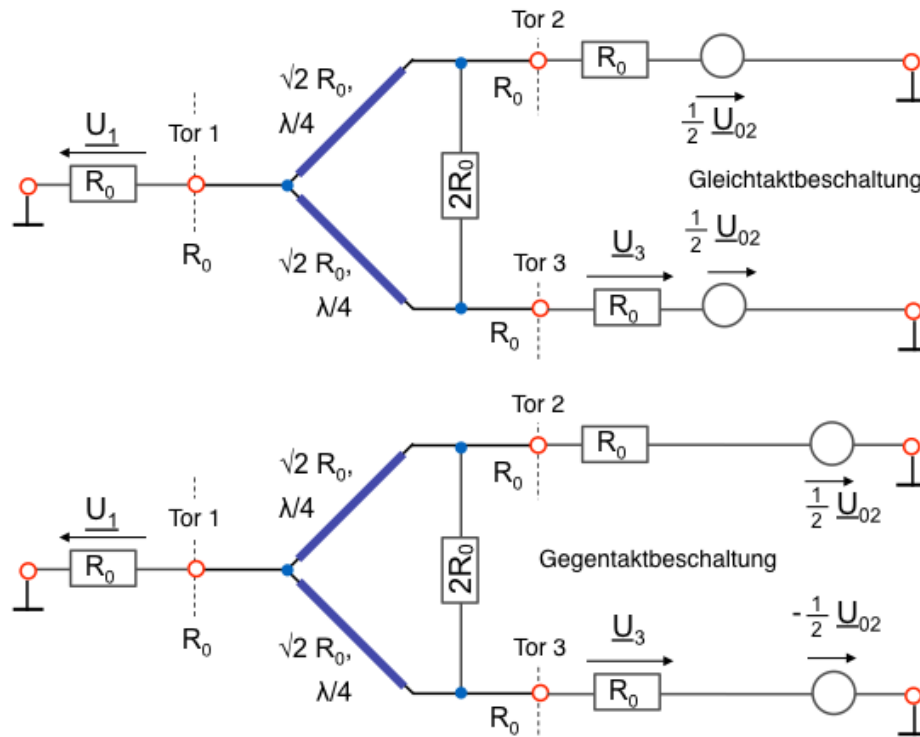


Abbildung 2.6.3: Gleich- und Gegentaktbetrieb

Lösung: Zunächst wird der Gegentaktbetrieb betrachtet. Wegen der Symmetrie der Schaltung befinden sich Tor 1 sowie die Mitte des konzentrierten Widerstandes  $2R_0$  auf Massepotential, wie in der folgenden Abbildung gezeigt. An Tor 1 findet sich somit jeweils

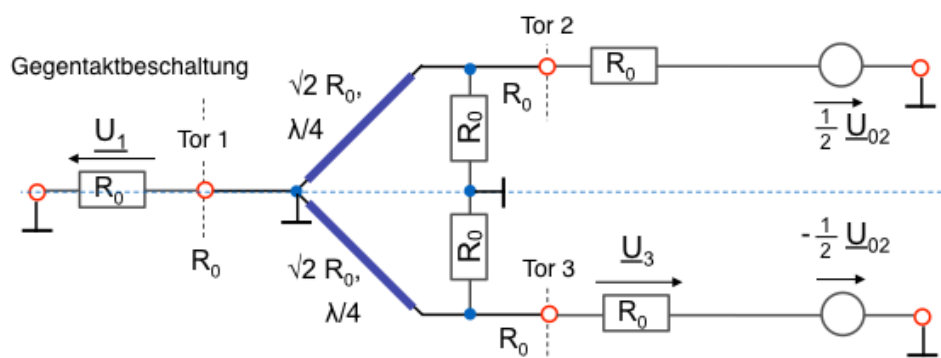


Abbildung 2.6.4: Symmetrieebene im Gegentaktbetrieb

eine kurzgeschlossene Viertelwellenleitung. Diese transformiert den Kurzschluss am anderen Ende in eine offene Leitung. Es verbleiben somit zwei einfache Spannungsteiler an den Toren 2 und 3.

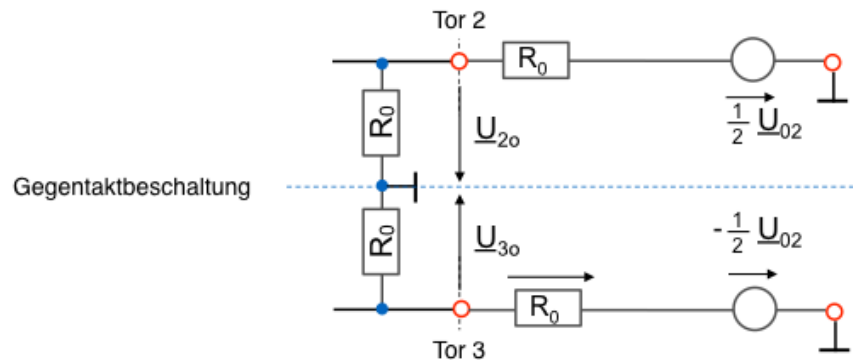


Abbildung 2.6.5: Verbleibende Schaltung im Gegentaktbetrieb

Lösung: Aus den Spannungsteilern errechnet man für die Gegentaktspannungen  $\underline{U}_{2o}$  und  $\underline{U}_{3o}$  mit dem Index 'o' wie 'odd'

$$\begin{aligned}\underline{U}_{2o} &= \frac{\underline{U}_{02}}{4} \\ \underline{U}_{3o} &= -\frac{\underline{U}_{02}}{4}\end{aligned}\quad (2.46)$$

Für die Gleichtaktbeschriftung findet sich die gleiche Symmetrieebene, jedoch sind die Verbindungen in der Symmetrieebene offen (d.h. stromlos). Folgende Abbildung zeigt die Ersatzschaltung, wobei an Tor 1 die Schaltung für die beiden symmetrischen Zweige ergänzt wurde.

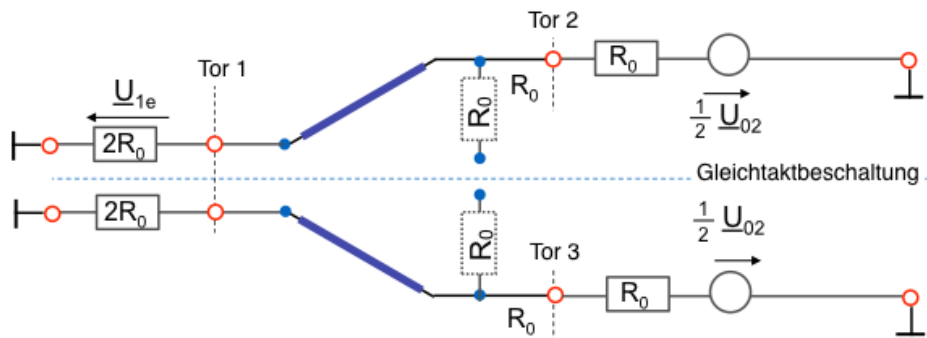


Abbildung 2.6.6: Symmetrieebene im Gleichtaktbetrieb

Lösung: Der konzentrierte Widerstand  $2R_0$  ist im Gleichtaktbetrieb ohne Belang. Die Beschaltung an Tor 1 wurde für die beiden Zweige dupliziert. Die beiden parallel geschalteten Impedanzen  $2R_0$  ergeben hierbei wieder die ursprüngliche Impedanz  $R_0$ .

Von Tor 1 nach Tor 2 (bzw. nach Tor 3) transformieren die beiden Viertelwellenleitungen die jeweilige Zweigimpedanz  $2R_0$  an Tor 1 in die Impedanz  $R_0$ . Es verbleibt die in der folgenden Abbildung gezeigte Ersatzschaltung.

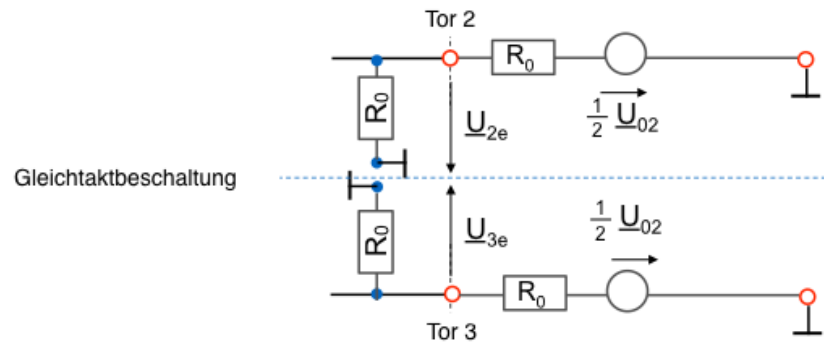


Abbildung 2.6.7: Verbleibende Schaltung im Gleichtaktbetrieb

Lösung: Aus den Spannungsteilern errechnet man für die Gleichtaktspannungen  $\underline{U}_{2e}$  und  $\underline{U}_{3e}$  mit dem Index 'e' wie 'even'

$$\begin{aligned}\underline{U}_{2e} &= \frac{\underline{U}_{02}}{4} \\ \underline{U}_{3e} &= \frac{\underline{U}_{02}}{4}\end{aligned}\quad (2.47)$$

Es bleibt die Berechnung der Gleichtaktspannung  $\underline{U}_{1e}$ . Diese ermittelt man aus der unten gezeigten Ersatzschaltung mit Hilfe des Viertelwellentransformators mit Wellenwiderstand  $R_W = \sqrt{2} R_0$  zu

$$\underline{U}_{1e} = \frac{-j \underline{U}_{02}}{2 \sqrt{2}} \quad (2.48)$$

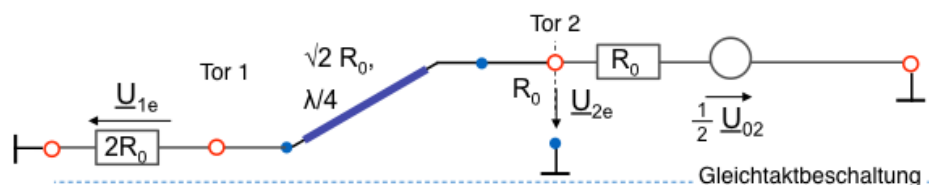
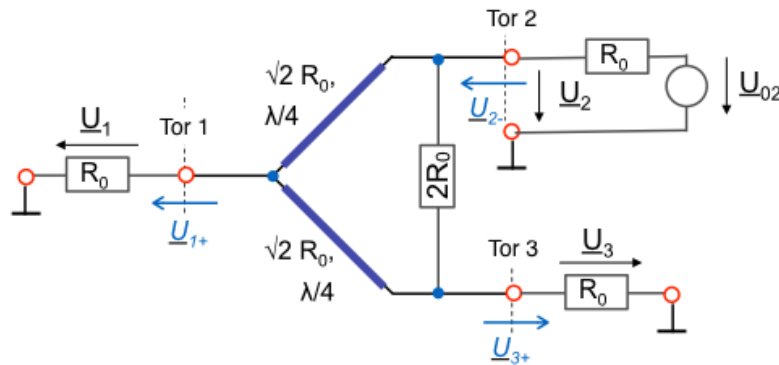


Abbildung 2.6.8: Ermittlung der im Gleichtaktspannung an Tor 1

Lösung: Nun lassen sich aus den überlagerten Gleichtaktspannungen und Gegentaktspannungen die Spannungen aus der Beschaltung mit Einspeisung an Tor 1 gemäß Abbildung 2.4.2 ermitteln. Man erhält

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{U}_{1o} + \underline{U}_{1e} = 0 + \frac{-j \underline{U}_{02}}{2 \sqrt{2}} = \frac{-j \underline{U}_{02}}{2 \sqrt{2}} \\ \underline{U}_2 &= \underline{U}_{2o} + \underline{U}_{2e} = \frac{\underline{U}_{02}}{4} + \frac{\underline{U}_{02}}{4} = \frac{\underline{U}_{02}}{2} \\ \underline{U}_3 &= \underline{U}_{3o} + \underline{U}_{3e} = -\frac{\underline{U}_{02}}{4} + \frac{\underline{U}_{02}}{4} = 0\end{aligned}\quad (2.49)$$

Die Streuparameter ermittelt man aus diesen Spannungen direkt gemäß ihrer Definition aus dem Verhältnis der aus dem jeweiligen Tor  $n$  auslaufenden Spannungswelle  $\underline{U}_{n+}$  zur einlaufenden Spannungswelle  $\underline{U}_{m-}$  am Bezugstor  $m$ . Allerdings stellen die oben berechneten Spannungen die Summen aus einlaufender und auslaufender Spannungswellen am jeweiligen Tor dar. Der Übersichtlichkeit halber ist die Beschaltung nochmals in der folgenden Abbildung gezeigt.



**Abbildung 2.6.9:** Spannungen bei Einspeisung an Tor 2

Lösung: Aus den Abschlussbedingungen an den Toren geht hervor, dass es wegen der reflexionsfreien Abschlüsse nur auslaufende Spannungswellen an den Toren 1 und 3 gibt. Tor 2 mit der Einspeisung ist ebenfalls angepasst, hier gibt nur eine einlaufende Spannungswelle. Es gilt also

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{U}_{1+} = \frac{-j \underline{U}_{02}}{2 \sqrt{2}} \\ \underline{U}_2 &= \underline{U}_{2-} = \frac{\underline{U}_{02}}{2} \\ \underline{U}_3 &= \underline{U}_{3+} = 0\end{aligned}\tag{2.50}$$

Die Streuparameter lassen sich nun unmittelbar ermitteln.

$$\begin{aligned}s_{12} &= \frac{\underline{U}_{1+}}{\underline{U}_{2-}} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ s_{22} &= \frac{\underline{U}_{2+}}{\underline{U}_{2-}} = 0 \\ s_{32} &= \frac{\underline{U}_{3+}}{\underline{U}_{2-}} = 0\end{aligned}\tag{2.51}$$

Bei Einspeisung an Tor 3 würde sich die Schaltung aus Symmetriegründen genau so verhalten. Es gelten also

$$\begin{aligned}s_{13} &= s_{12} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ s_{33} &= s_{22} = 0 \\ s_{23} &= s_{32} = 0\end{aligned}\tag{2.52}$$

Da die Schaltung aus rein passiven, richtungsunabhängigen Elementen besteht, ist die Schaltung reziprok. Es gilt somit

$$\begin{aligned}\underline{s}_{21} &= \underline{s}_{12} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ \underline{s}_{31} &= \underline{s}_{13} = \frac{-j}{\sqrt{2}}\end{aligned}\quad (2.53)$$

Insgesamt erhält man also die Streumatrix

$$[\underline{S}] = \begin{bmatrix} 0 & -j/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} \\ -j/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -j/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Frage 2.6.3 Bisher wurde der Eingangsreflexionsfaktor  $\underline{s}_{11}$  nur qualitativ abgeschätzt, nicht formal berechnet. Berechnen Sie den Eingangsreflexionsfaktor  $\underline{s}_{11}$ . Gehen Sie hierfür von der erforderlichen Beschaltung aus und nutzen Sie die Symmetrie der Schaltung.

Lösung: Folgende Abbildung zeigt die Beschaltung zur Ermittlung des Eingangsreflexionsfaktors  $\underline{s}_{11}$ .

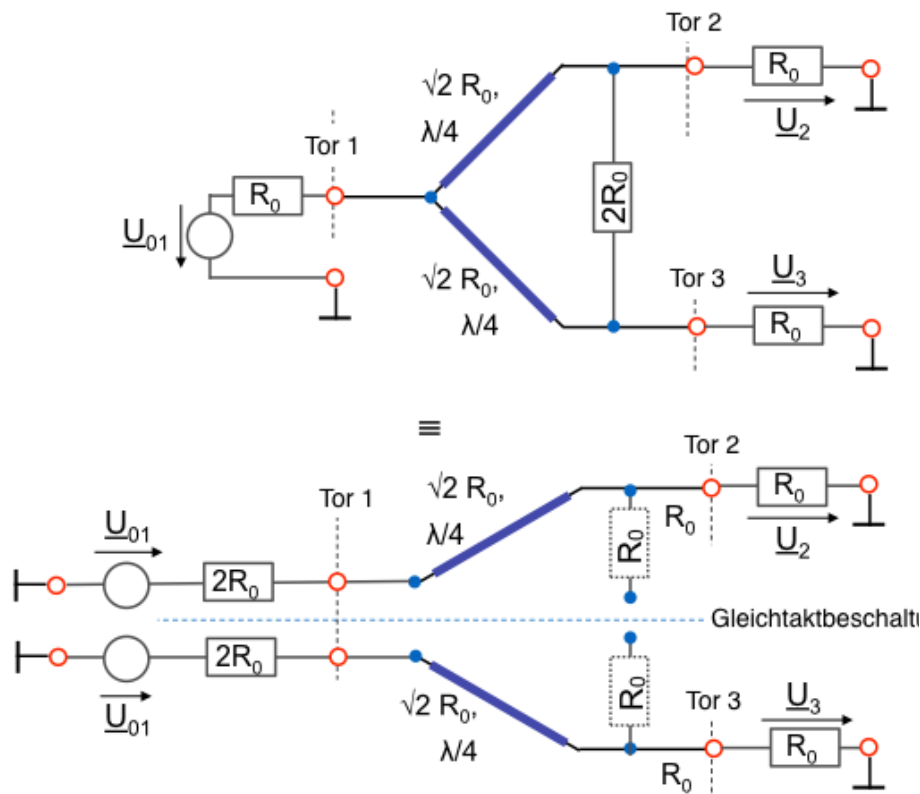


Abbildung 2.6.10: Einspeisung an Tor 1

Lösung: Aus Symmetriegründen folgt, dass diese Einspeisung einem Gleichtaktbetrieb an

Tor 1 mit der Spannung  $U_{01}$  entspricht. Die Schaltung lässt sich so in zwei völlig symmetrische Zweige aufteilen. Wie bereits in der qualitativen Abschätzung vermutet, liefert der konzentrierte Widerstand  $2R_0$  in dieser Betriebsart keinen Beitrag. In jedem Zweig sorgt der Viertelwellentransformator mit Wellenwiderstand  $R_W = \sqrt{2}R_0$  für Anpassung zwischen der Eingangsimpedanz  $2R_0$  und der Ausgangsimpedanz  $R_0$ . Die Schaltung ist somit eingangsseitig angepasst und der Eingangsreflexionsfaktor  $\underline{s}_{11} = 0$ .

Frage 2.6.4 Leistungsbilanz. Wie lautet die Leistungsbilanz des Wilkinson-Teilers bei Einspeisung an den Toren 1, 2 oder 3? In welcher Betriebsart ist der Teiler verlustfrei? Welche Tore sind voneinander entkoppelt? Welche Phasenbeziehungen ergeben sich für die Spannungen an den Toren? Analysieren Sie hierzu die Streumatrix.

## 2.7. Branchline-Koppler

Folgende Abbildung zeigt einen Branchline-Koppler schematisch in Mikrostreifenleiter-technik mit dem zugehörigen Ersatzschaltbild. Der Aufbau ist symmetrisch bzgl. der Ebenen A-A' und B-B'.

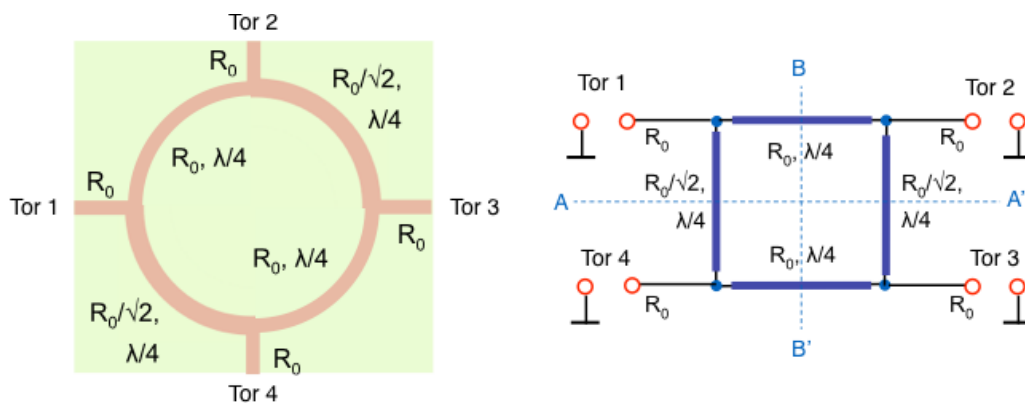


Abbildung 2.7.1: Branchline-Koppler

Frage 2.7.1 Am Tor 1 des Branchline-Koppler wird wie in der folgenden Abbildung gezeigt ein Signal eingespeist. Berechnen Sie die zugehörigen Streuparameter.

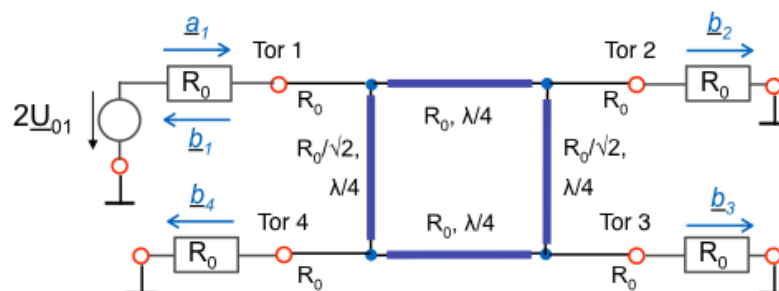


Abbildung 2.7.2: Einspeisung an Tor 1



Lösung: Mit der Einspeisung an Tor 1 lassen sich die Streuparameter  $\underline{s}_{11}$ ,  $\underline{s}_{21}$ ,  $\underline{s}_{31}$  und  $\underline{s}_{41}$  berechnen. Wegen des symmetrischen Aufbaus und der Reziprozität ist diese Beschaltung zur Berechnung aller Streuparameter ausreichend. Mit den in der Abbildung gezeigten einlaufenden und auslaufenden Wellen ergeben sich für die Streuparameter folgende Gleichungen.

$$\underline{a}_2 = \underline{a}_3 = \underline{a}_4 = 0 \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \underline{b}_1 &= \underline{s}_{11} \underline{a}_1 \\ \underline{b}_2 &= \underline{s}_{21} \underline{a}_1 \\ \underline{b}_3 &= \underline{s}_{31} \underline{a}_1 \\ \underline{b}_4 &= \underline{s}_{41} \underline{a}_1 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Die Streuparameter werden aus der Überlagerung von Gleichtaktbetrieb und Gegentaktbetrieb ermittelt. Zunächst wird der Gleichtaktbetrieb betrachtet. Die beiden Quellen

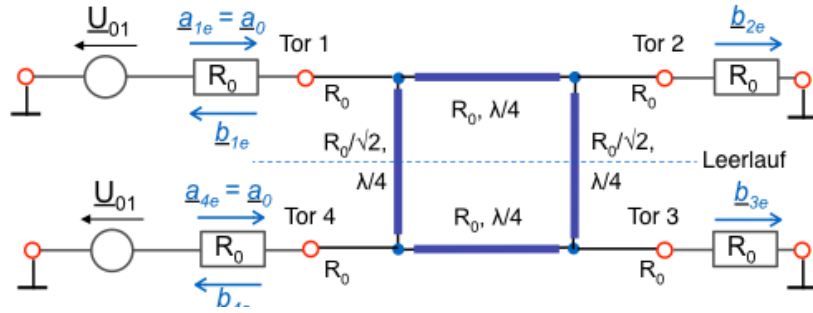


Abbildung 2.7.3: Gleichtaktbetrieb

sind abhängig voneinander, somit sind auch die einlaufenden Wellen identisch:  $\underline{a}_{1e} \equiv \underline{a}_{4e} = \underline{a}_0$ . Die Tore 2 und 3 sind reflexionsfrei abgeschlossen, d.h.  $\underline{a}_{2e} = 0$  und  $\underline{a}_{3e} = 0$ . Entlang der Symmetrieebene herrschen Leerlaufbedingungen. Die Schaltung lässt sich in zwei Teilnetzwerke aufteilen. Das Teilnetzwerk bildet nun ein Zweitor mit den zu berech-

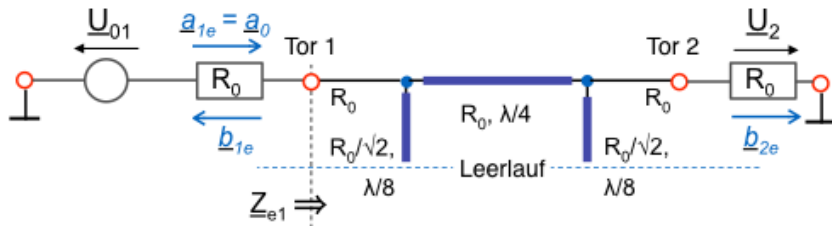


Abbildung 2.7.4: Teilnetzwerk im Gleichtaktbetrieb

nenden Streuparametern

$$\begin{aligned} \underline{b}_{1e} &= \underline{s}_{11e} \underline{a}_{1e} \\ \underline{b}_{2e} &= \underline{s}_{21e} \underline{a}_{1e} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Die beiden leerlaufenden Leitungen werden nun durch ihre Ersatzimpedanzen ersetzt. Eine leerlaufende Leitung der Länge  $\lambda/8$  verschiebt den Reflexionsfaktor im Leerlauf in

einen Reflexionsfaktor  $r_0 = 1$  nach  $r_{0,\lambda/8} = -j$ . Aus dieser Beziehung lässt sich gemäß

$$r = \frac{\underline{Z} - \underline{R}_W}{\underline{Z} + \underline{R}_W} \quad (2.58)$$

die Ersatzimpedanz  $\underline{Z}_{0,\lambda/8}$  berechnen. Man erhält durch Einsetzen des Wellenwiderstandes der  $\lambda/8$ -Leitung  $\underline{R}_W = R_0/\sqrt{2}$  für die Ersatzimpedanz

$$\underline{Z}_{0,\lambda/8} = -j \underline{R}_W = -j R_0/\sqrt{2} \quad (2.59)$$

Die Berechnung des Eingangsreflexionsfaktors  $\underline{s}_{11e}$  erfolgt nun mit Hilfe der Eingangsimpedanz  $\underline{Z}_{e1}$  aus der Ersatzschaltung von Tor 2 nach Tor 1. Hierzu wird zunächst die Ersatzimpedanz an Tor 2 berechnet, diese dann durch die Viertelwellenleitung nach Tor 1 transformiert, und dort schliesslich mit der Ersatzimpedanz der verbliebenen Achtwellenleitung verrechnet. Das Ergebnis ist

$$\underline{s}_{11e} = -j/\sqrt{2}. \quad (2.60)$$

Die Vorwärtstransmission  $\underline{s}_{21e}$  ermittelt man aus dem Spannungsverhältnis

$$\underline{s}_{21e} = 2 \underline{U}_2 / \underline{U}_{01} \quad (2.61)$$

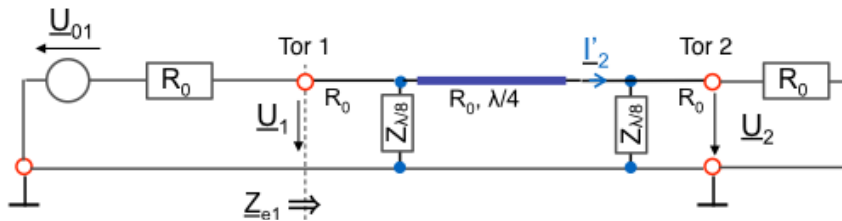
Diese Berechnung ist allerdings sehr aufwändig und wird auch durch Verwendung anderer Konstrukte wie z.B. Kettenparameter nicht weniger aufwändig. Daher soll hier  $\underline{s}_{21e}$  aus einer qualitativen Betrachtung nach Betrag und Phase ermittelt werden. Da das Zweitorverlustfrei ist, gilt für die Leistungsbilanz

$$|\underline{s}_{11e}|^2 + |\underline{s}_{21e}|^2 = 1 \quad (2.62)$$

Somit folgt für den Betrag der Vorwärtstransmission durch Einsetzen von  $\underline{s}_{11e}$

$$|\underline{s}_{21e}| = 1/\sqrt{2} \quad (2.63)$$

Die Phasenlage kann aus der Ersatzschaltung mit Hilfe eines Zeigerdiagramms ermittelt werden. Die Betrachtung beginnt an Tor 2 mit der Phasenbeziehung zwischen  $\underline{U}_2$  und dem Strom  $\underline{I}'_2$  aus dem Viertelwellentransformator



**Abbildung 2.7.5:** Berechnung der Vorwärtstransmission

Lösung: Aus der Beziehung  $\underline{U}_2 = \underline{Z}_a \underline{I}'_2$  mit  $\underline{Z}_a = \underline{Z}_{0,\lambda/8} || \underline{R}_0$  folgt

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_a \underline{I}'_2 = \frac{R_0}{3} (1 - j\sqrt{2}) \underline{I}'_2 \quad (2.64)$$

Somit beträgt der Winkel zwischen  $\underline{I}'_2$  und  $\underline{U}_2$

$$\tan(\phi_1) = -\sqrt{2} \quad (2.65)$$

Beim Viertelwellentransformator gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= j R_0 \underline{I}'_2 \\ \phi_2 &= \pi/2 \end{aligned} \quad (2.66)$$

Die Phasenlage zwischen  $\underline{U}_{01}$  und  $\underline{U}_1$  ermittelt man schlieslich aus

$$\begin{aligned} \underline{U}_{01} &= \underline{U}_1 \frac{R_0 + \underline{Z}_{e1}}{\underline{Z}_{e1}} = \frac{4}{3} \underline{U}_1 (1 + j/\sqrt{2}) \\ \tan(\phi_3) &= 1/\sqrt{2} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Hierbei lässt sich  $\underline{Z}_{e1}$  aus dem bereits berechneten  $\underline{s}_{11e}$  ermitteln. Der Phasenwinkel zwischen  $\underline{U}_2$  und  $\underline{U}_{01}$  beträgt somit insgesamt

$$\phi_{ges} = -\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \pi \quad (2.68)$$

Somit beträgt

$$\underline{s}_{21e} = -1/\sqrt{2} \quad (2.69)$$

Für die Streumatrix der Teilschaltung ergibt sich also

$$[\underline{S}]_e = \begin{bmatrix} -j/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Es folgt die Berechnung der Streuparameter im Gegentaktbetrieb.

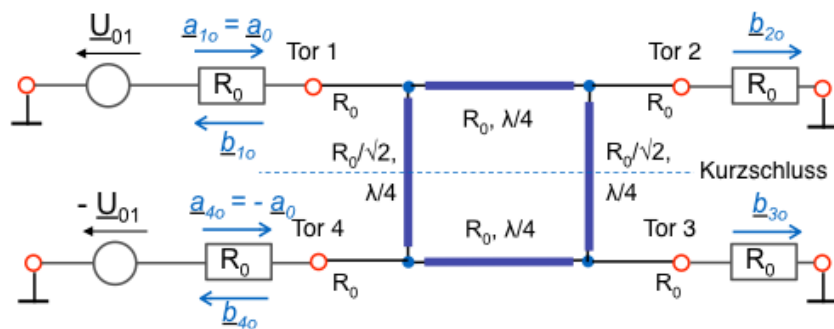
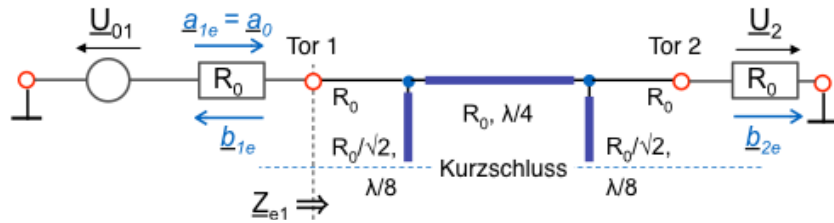


Abbildung 2.7.6: Gegentaktbetrieb

Lösung: In diesem Fall finden sich in der Symmetrieebene Kurzschlussbedingungen. Die Schaltung lässt sich wiederum in Teilschaltungen zerlegen, die kurzgeschlossene Achtelwellenleitungen enthalten.

Lösung: Für die kurzgeschlossene Achtelwellenleitung errechnet man

$$\underline{Z}_{k,\lambda/8} = j \underline{R}_W = j R_0/\sqrt{2} \quad (2.71)$$



**Abbildung 2.7.7:** Teilnetzwerk im Gegentaktbetrieb

Der Verlauf der Berechnung folgt dem der Teilschaltung im Gleichtaktbetrieb. Man erhält die Streumatrix

$$[S]_o = \begin{bmatrix} j/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & j/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Aus den Streuparametern der Teilschaltungen im Gleichtaktbetrieb und Gegentaktbetrieb werden nun durch Überlagerung der Gleichtaktwellen und Gegentaktwellen die Streuparameter des Branchline-Kopplers errechnet. An Tor 1 gilt

$$\begin{aligned}\underline{a}_{1e} &= \underline{a}_{1o} \equiv \underline{a}_0 \\ \underline{b}_1 &= \underline{b}_{1e} + \underline{b}_{1o} \\ &= \underline{s}_{11e} \underline{a}_{1e} + \underline{s}_{11o} \underline{a}_{1o} \\ &= (\underline{s}_{11e} + \underline{s}_{11o}) \underline{a}_0\end{aligned}\tag{2.73}$$

Außerdem gilt

$$\underline{b}_1 = \underline{s}_{11} \underline{a}_1 = \underline{s}_{11} (\underline{a}_{1e} + \underline{a}_{1o}) = 2 \underline{s}_{11} \underline{a}_0 \quad (2.74)$$

Somit ergibt sich

$$\underline{s}_{11} = \frac{\underline{s}_{11e} + \underline{s}_{11o}}{2} \quad (2.75)$$

Sinngemäß erhält man für die die Welle am Tor 2

$$\underline{b}_2 = \underline{b}_{2e} + \underline{b}_{2o} = s_{21e} \underline{a}_{1e} + s_{21o} \underline{a}_{1o} = (s_{21e} + s_{21o}) \underline{a}_0 \quad (2.76)$$

Mit

$$\underline{b}_2 = s_{21} \underline{a}_1 = s_{21} (\underline{a}_{1e} + \underline{a}_{1o}) = 2 s_{21} \underline{a}_0 \quad (2.77)$$

Somit ergibt sich

$$\underline{s}_{21} = \frac{s_{21e} + s_{21o}}{2} \quad (2.78)$$

Den Streuparameter  $s_{41}$  erhält man aus folgender Überlegung im Gegentaktfall

$$\begin{aligned}
\underline{a}_{4o} &= -\underline{a}_{1o} \equiv -\underline{a}_0 \\
\underline{b}_4 &= \underline{b}_{4e} + \underline{b}_{4o} \\
&= \underline{s}_{11e} \underline{a}_{4e} + \underline{s}_{11o} \underline{a}_{4o} \\
&\stackrel{!}{=} \underline{s}_{11e} \underline{a}_{1e} - \underline{s}_{11o} \underline{a}_{1o} \\
&= (\underline{s}_{11e} - \underline{s}_{11o}) \underline{a}_0
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Mit

$$\underline{b}_4 = \underline{s}_{41} \underline{a}_1 = \underline{s}_{41} (\underline{a}_{1e} + \underline{a}_{1o}) = 2 \underline{s}_{41} \underline{a}_0 \quad (2.80)$$

Somit ergibt sich

$$\underline{s}_{41} = \frac{\underline{s}_{11e} - \underline{s}_{11o}}{2} \quad (2.81)$$

Schließlich ermittelt man den letzten Streuparameter  $\underline{s}_{31}$  mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{aligned} \underline{b}_3 &= \underline{b}_{3e} + \underline{b}_{3o} \\ &= \underline{s}_{34e} \underline{a}_{4e} + \underline{s}_{34o} \underline{a}_{4o} \\ &= \underline{s}_{21e} \underline{a}_{4e} + \underline{s}_{21o} \underline{a}_{4o} \\ &\stackrel{!}{=} \underline{s}_{21e} \underline{a}_{1e} - \underline{s}_{21o} \underline{a}_{1o} \\ &= (\underline{s}_{21e} - \underline{s}_{21o}) \underline{a}_0 \end{aligned} \quad (2.82)$$

Mit

$$\underline{b}_3 = \underline{s}_{31} \underline{a}_1 = \underline{s}_{31} (\underline{a}_{1e} + \underline{a}_{1o}) = 2 \underline{s}_{31} \underline{a}_0 \quad (2.83)$$

Somit ergibt sich

$$\underline{s}_{31} = \frac{\underline{s}_{21e} - \underline{s}_{21o}}{2} \quad (2.84)$$

Mit den oben errechneten Werten ergeben sich für die Streuparameter

$$\begin{aligned} \underline{s}_{11} &= 0 \\ \underline{s}_{21} &= 0 \\ \underline{s}_{31} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \underline{s}_{41} &= -j\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (2.85)$$

Insgesamt erhält man folgende Streumatrix:

$$[\underline{S}] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & j \\ 0 & 0 & j & 1 \\ 1 & j & 0 & 0 \\ j & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

Frage 2.7.2 In vorausgegangenem Teil wurden die Parameter zur Vorwärtstransmission aus einer Betrachtung der Leistung und Phasen ermittelt. Berechnen Sie diese Parameter aus der Ersatzschaltung. Hinweis: Wegen der Verkettung der Ersatzelemente besteht die Möglichkeit der Verwendung von Kettenparametern. Die resultierende Kettenmatrix lässt sich mit Hilfe einer Transformationstabelle in die Streumatrix übersetzen.

Frage 2.7.3 Leistungsbilanz. Wie lautet die Leistungsbilanz des Branchline-Kopplers bei Einspeisung an den Toren 1, 2, 3 oder 4? In welcher Betriebsart ist die Schaltung verlustfrei? Welche Tore sind voneinander entkoppelt? Welche Phasenbeziehungen ergeben sich für die Spannungen an den Toren? Analysieren Sie hierzu die Streumatrix.

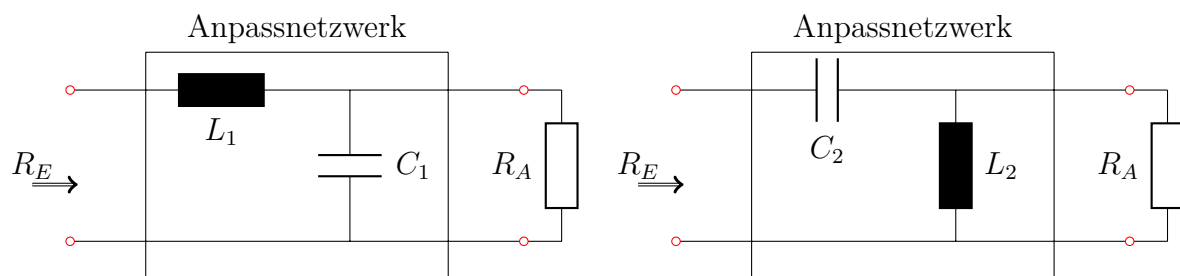
Frage 2.7.4 Der Branchline-Koppler wird auf folgende Weise betrieben: An den Toren 1 und 2 werden Signale eingekoppelt, die gegeneinander um 90 Grad phasenverschoben sind. Welches Signal erhält man an den Toren 3 und 4?

### 3. Übungen

In Abschnitt 3 finden sich Übungen zu den vorausgegangenen Abschnitten. Zweck der Übungen ist die Vertiefung und die Anwendung der erworbenen Grundlagen und Methoden. Der Lösungsweg folgt den direkt in den vorausgegangenen Abschnitten enthaltenen Übungsaufgaben. Aufgaben aus Klausuren finden sich im folgenden Kapitel.

#### 3.1. Anpassnetzwerke

Es sind zwei Anpassnetzwerke gegeben, die jeweils aus einer Induktivität und einer Kapazität aufgebaut sind. Der Verbraucher  $R_A = 100\Omega$  soll in beiden Schaltungen so angepasst werden, dass am Eingang des Zweitors  $R_E = 50\Omega$  sichtbar sind.



**Abbildung 3.1.1:** Anpassnetzwerk in Tiefpass- und Hochpassform

Frage 3.1.1: Berechnen Sie  $C_1$  und  $L_1$  bei Frequenz  $\frac{500}{2\pi}$  MHz.

Lösung: Es kann folgende Gleichung aufgestellt werden:

$$R_E = X_{L1} + R_A || jX_{C1} = jX_{L1} + \frac{jR_A X_{C1}}{R_A + jX_{C1}} \quad (3.1)$$

Multiplizieren mit  $R_A + jX_{C1}$  auf beiden Seiten und Sortieren nach Real- und Imaginärteilen ergibt zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten.

$$\begin{aligned} R_E R_A &= -X_{L1} X_{C1} \\ R_E X_{C1} &= X_{L1} R_A + X_{C1} R_A \end{aligned} \quad (3.2)$$

Auflösen des Gleichungssystems ergibt:

$$\begin{aligned} X_{C1} &= \pm R_A \sqrt{\frac{R_E}{R_E - R_A}} \\ X_{L1} &= -\frac{R_E R_A}{X_{C1}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Der Wert für  $X_{C1}$  muss negativ sein (Kapazität). Es sind nach Einsetzen der gegebenen Werte  $X_{C1} = -100\Omega$ ,  $X_{L1} = 50\Omega$  und damit  $C_1 = 20\text{pF}$  und  $L_1 = 100\text{nH}$

Frage 3.1.2: Berechnen Sie  $C_2$  und  $L_2$  bei der gleichen Frequenz.

Lösung: Es sind  $X_{C2} = -50\Omega$ ,  $X_{L2} = 100\Omega$  und damit  $C_2 = 40pF$  und  $L_2 = 200nH$ . Die Herleitung ist äquivalent zur vorherigen Aufgabe

Frage 3.1.3: Zeichnen Sie die Transformationswege in ein Smith-Chart ein.

Lösung: Der Bezugswiderstand des Smithchart ist  $50\Omega$ . Der normierte Lastwiderstand ist  $z_L = \frac{Z_L}{50\Omega} = 2$  und kann damit ins Smith-Diagramm eingetragen werden. Zur Berücksichtigung der Parallelschaltung wird ein Kreis konstanten Leitwerts in das Smithchart gezeichnet, dessen Punkte durch  $R = 2$  und  $R = 0$  (Kurzschlusspunkt) gehen. Ausgehend von  $z_L = 2$  ergeben sich die Transformationswege der beiden Schaltungen.

- Die erste Schaltung transformiert durch den parallelgeschalteten Kondensator auf dem eingezeichneten Kreis nach unten bis zum Punkt  $(-1,1)$ . Anschließend transformiert die in Reihe geschaltete Spule bis in den Anpasspunkt (roter Weg), der den gewünschten  $50\Omega$  entspricht.
- Die zweite Schaltung transformiert durch die parallelgeschaltete Spule auf dem eingezeichneten Kreis nach oben bis zum Punkt  $(1,1)$ . Anschließend transformiert der in Reihe geschaltete Kondensator bis in den Anpasspunkt (blaue Linie).

Welche der beiden äquivalenten Schaltungen angewendet wird, hängt von den verfügbaren Bauteilen oder ggf. von den erreichbaren Bandbreiten der beiden Schaltungen ab

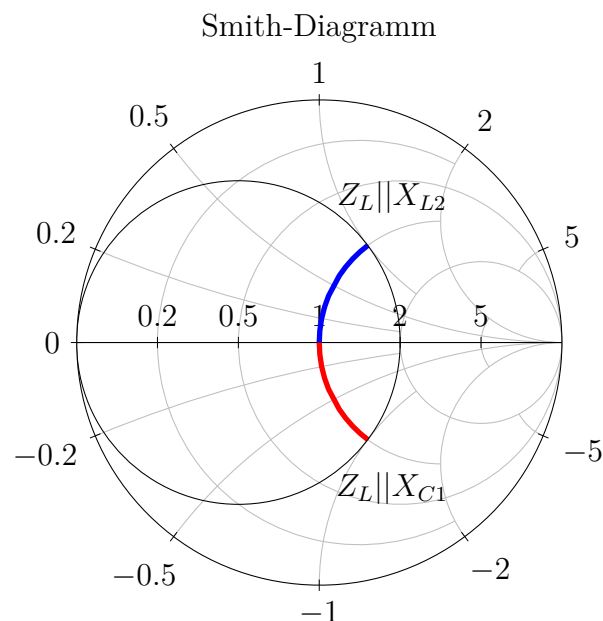


Abbildung 3.1.2: Transformationspfad



### 3.2. Impedanz-, Admittanz- und Kettenmatrix

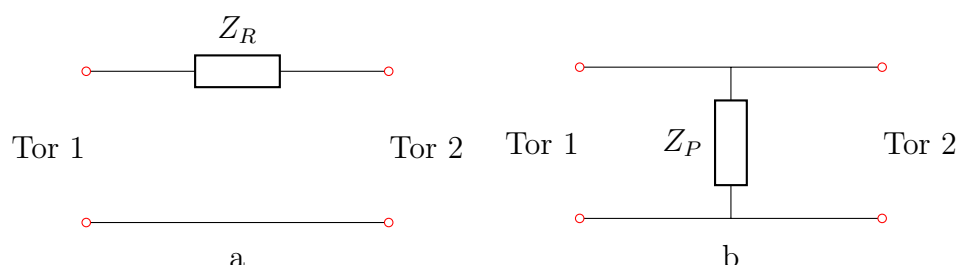


Abbildung 3.2.1: Reihenschaltung (a) und Parallelschaltung (b)

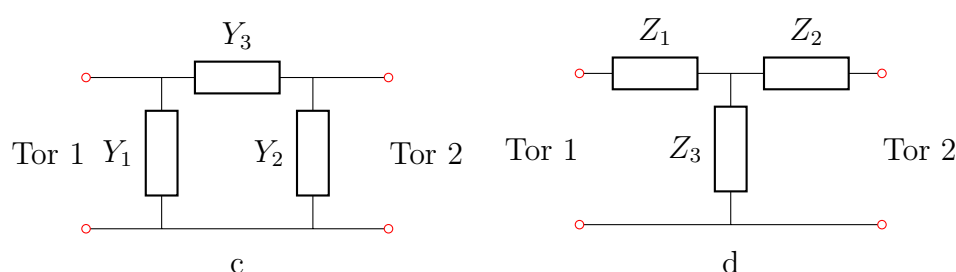


Abbildung 3.2.2:  $\pi$ -Schaltung (c) und T-Schaltung (d)

Es sind mehrere Netzwerke mit Serien- und/oder Parallelimpedanzen gegeben.

Frage 3.2.1: Berechnen Sie die Impedanzmatrizen  $[Z]$  und die Admittanzmatrizen  $[Y]$  der dargestellten Netzwerke (Reihenschaltung, Parallelschaltung,  $\pi$  und T-Schaltung). Ist die Bestimmung beider Matrizen immer möglich?

Lösung:

$$[Z_R] \text{ existiert nicht} \quad [Y_R] = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_R} & -\frac{1}{Z_R} \\ -\frac{1}{Z_R} & \frac{1}{Z_R} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$[Z_P] = \begin{bmatrix} Z_P & Z_P \\ Z_P & Z_P \end{bmatrix} \quad [Y_P] \text{ existiert nicht} \quad (3.5)$$

$$[Z_\pi] = \frac{1}{\det([Y_\pi])} \begin{bmatrix} Y_2 + Y_3 & Y_3 \\ Y_3 & Y_1 + Y_3 \end{bmatrix} \quad [Y_\pi] = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$[Z_T] = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \quad [Y_T] = \frac{1}{\det([Z_T])} \begin{bmatrix} Z_2 + Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_1 + Z_3 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Frage 3.2.2: Geben Sie die Kettenmatrizen der Netzwerke an. Verwenden Sie hierzu die Messvorschriften der Kettenmatrixelemente.

Lösung:

$$\begin{aligned}
 [A_R] &= \begin{bmatrix} 1 & Z_R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & [A_P] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_P} & 1 \end{bmatrix} \\
 [A_\pi] &= \frac{1}{Y_3} \begin{bmatrix} Y_2 + Y_3 & 1 \\ \det([Y_\pi]) & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} & [A_T] &= \frac{1}{Z_3} \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & \det([Z_T]) \\ 1 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Frage 3.2.3: Verketteten Sie Reihen- und Parallelschaltung und nochmals Reihenschaltung und prüfen Sie, ob Ihr Ergebnis der Kettenmatrix der  $T$ -Schaltung entspricht.

Lösung: Die Verkettung wird mittels Multiplikation durchgeführt. Hier ist unbedingt auf die Reihenfolge der Multiplikationen zu beachten!

$$\begin{aligned}
 [A_T] &= \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_3} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_3} & \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}{Z_3} \\ \frac{1}{Z_3} & \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_3} \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & \det([Z_T]) \\ 1 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Wie erwartet ist  $[A_T]$  identisch zur Lösung aus der vorherigen Teilaufgabe.

### 3.3. Kettenmatrix einer verlustlosen Leitung

Aus der Leitungstheorie sind folgende Gleichungen bekannt, die Spannung und Strom auf einer verlustlosen Leitung ausgehend von  $U_0$  und  $I_0$  am Leitungsabschluss angeben.

$$\begin{aligned}
 U(l) &= U_0 \cos(\beta l) + j I_0 R_W \sin(\beta l) \\
 I(l) &= I_0 \cos(\beta l) + j \frac{U_0}{R_W} \sin(\beta l)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Frage 3.3.1: Stellen Sie mit Hilfe dieser Leitungsgleichungen allgemein die Kettenmatrix  $[A_l]$  eines Leitungsstücks der Länge  $l$  auf.

Lösung:

$$[A_l] = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & j R_W \sin(\beta l) \\ j \frac{1}{R_W} \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Frage 3.3.2: Wie lautet die Kettenmatrix einer verlustlosen Leitung der Länge  $l = \frac{\lambda}{4}$  ?

Lösung:

$$[A_{\frac{\lambda}{4}}] = \begin{bmatrix} 0 & j R_W \\ j \frac{1}{R_W} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

### 3.4. Querimpedanz

Ein Zweitor aus konzentrierten Bauteilen (keine Leitungen und Leitungseffekte) besteht aus einer Impedanz  $Z$  wie in der Abbildung gezeigt.

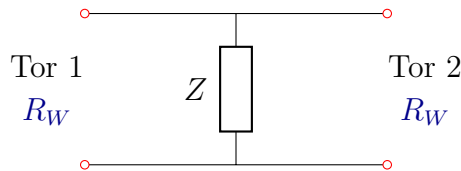


Abbildung 3.4.1: Zweitor mit Querimpedanz

Frage 3.4.1: Berechnen Sie die S-Parameter des Zweitors mit der Bezugsgröße  $R_W$  an beiden Toren.

Lösung:

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{(Z \parallel R_W) - R_W}{(Z \parallel R_W) + R_W} = \frac{R_W^2}{2R_W Z + R_W^2} \\ s_{21} &= \frac{2U_2}{U_{01}} = \frac{2(R_W \parallel Z)}{R_W + (R_W \parallel Z)} = \frac{2R_W Z}{2R_W Z + R_W^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Aus Symmetriegründen ist  $s_{22} = s_{11}$  und  $s_{12} = s_{21}$ .

Frage 3.4.2: Überprüfen Sie die Plausibilität Ihres Ergebnisses mit Hilfe folgender Grenzfälle: Kurzschluss ( $Z = 0$ ), Leerlauf ( $Z \rightarrow \infty$ ).

Lösung: Für  $Z = 0$  herrscht auf beiden Seiten ein Kurzschluss. Es gilt  $s_{11} = s_{22} = -1$  und  $s_{12} = s_{21} = 0$ . Für  $Z \rightarrow \infty$  entspricht Tor 1 exakt Tor 2. Es gilt  $s_{11} = s_{22} = 0$  und  $s_{12} = s_{21} = 1$ .

### 3.5. Leitung und Zweitor

Ein Zweitor aus konzentrierten Bauelementen (Zweitor A mit Serienimpedanz  $Z$ ) wird mit einem Zweitor bestehend aus einer verlustlosen Leitung mit Wellenwiderstand  $R_W$  und Leitungslänge  $l$  verkettet.

Frage 3.5.1: Berechnen Sie die Streuparameter für Zweitor A mit der Bezugsgröße  $R_W$  an beiden Toren.

Lösung: Die allgemeinen Vierpolgleichungen einer verlustlosen Leitung der Länge  $l$  sind:

$$\begin{aligned} U(l) &= U_0 \cos(\beta l) + jR_W I_0 \sin(\beta l) \\ I(l) &= I_0 \cos(\beta l) + j\frac{U_0}{R_W} \sin(\beta l) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Angewandt auf das Zweitor entspricht  $U_0 = U_2$  und  $I_0 = I_2$  (Tor 2) bzw.  $U(l) = U_1$  und  $I(l) = I_1$  (Tor 1). Bei der Bestimmung der Streuparameter ist die Leitung mit

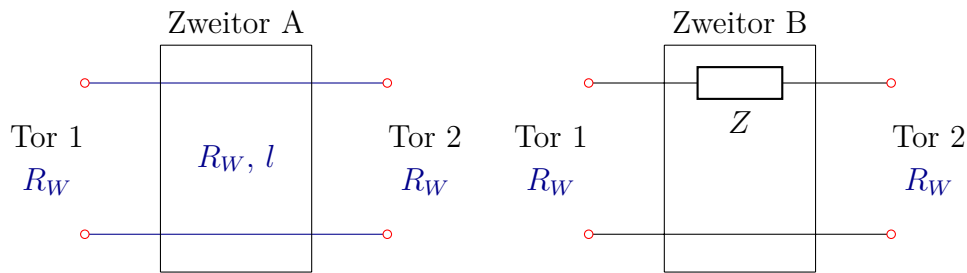


Abbildung 3.5.1: Zweitore A und B

dem Bezugswiderstand  $R_W$  abgeschlossen. Damit gilt am Ausgang  $U_2 = I_2 R_W$  und am Eingang der Leitung (Tor 1):

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 \cos(\beta l) + jU_2 \sin(\beta l) = U_2 e^{j\beta l} \\ I_1 &= I_2 \cos(\beta l) + jI_2 \sin(\beta l) = I_2 e^{j\beta l} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Der Eingangswiderstand an Tor 1 ist  $Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = R_W$ . Demzufolge ist der Reflexionsfaktor  $s_{11} = \frac{R_W - R_W}{R_W + R_W} = 0$ . Mithilfe des Spannungsteilers  $\frac{2R_W}{R_W} = \frac{U_{01}}{U_1}$  kann der Transmissionsfaktor  $s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}}$  bestimmt werden.  $s_{12} = \frac{2U_2}{2U_{01}} = e^{-j\beta l}$ . Da die Leitung symmetrisch ist, gilt  $s_{22} = s_{11}$  und  $s_{12} = s_{21}$ .

$$[S_A] = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\beta l} \\ e^{-j\beta l} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Frage 3.5.2: Berechnen Sie die Streuparameter für Zweitor B mit der Bezugsgröße  $R_W$  an beiden Toren.

Lösung: Das Zweitor ist symmetrisch. Es müssen deshalb nur zwei Parameter tatsächlich berechnet werden. Die Reflexionsfaktoren ergeben sich zu

$$s_{11} = s_{22} = \frac{(Z + R_W) - R_W}{(Z + R_W) + R_W} = \frac{Z}{Z + 2R_W}. \quad (3.17)$$

Die Transmissionsfaktoren lassen sich hier sehr leicht über den Spannungsteiler bestimmen.

$$s_{12} = s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}} = \frac{2R_W}{Z + 2R_W} \quad (3.18)$$

Die Streumatrix ist damit:

$$[S_B] = \begin{bmatrix} \frac{Z}{Z+2R_W} & \frac{2R_W}{Z+2R_W} \\ \frac{2R_W}{Z+2R_W} & \frac{Z}{Z+2R_W} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Frage 3.5.3: Prüfen Sie die Plausibilität Ihrer Berechnung für die Grenzfälle:  $Z = 0$ ,  $Z$  gegen unendlich.

Lösung: Für  $Z = 0$  ist die Streumatrix die Einheitsmatrix. Die gesamte Leistung wird transmittiert.

$$[S_{B,Z=0}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Für  $Z \rightarrow \infty$  ist die Streumatrix

$$[S_{B,Z \rightarrow \infty}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

An beiden Toren ist ein Leerlauf sichtbar. Die Wellen werden vollständig reflektiert.

Frage 3.5.4: Es seien  $Z = R_W$  und  $l = \lambda/4$ . Wie lauten die Streumatrizen der Zweitore A und B? Wie sind die Leistungsbilanzen von Zweitor A bzw. Zweitor B?

Lösung: Die Streumatrizen sind:

$$[S_A] = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{bmatrix} \quad [S_B] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Die Leitung (Zweitor A) ist verlustlos. Es wird die komplette Leistung transmittiert. In Zweitor B wird der Anteil  $|s_{11}|^2 = |s_{22}|^2 = \frac{1}{9}$  reflektiert und der Anteil  $|s_{21}|^2 = |s_{12}|^2 = \frac{4}{9}$  transmittiert. Der Anteil  $1 - \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$  geht im Zweitor B verloren.

Frage 3.5.5: Kette von A und B für den Fall  $Z = R_W$  und  $l = \lambda/4$ : Berechnen Sie die Streuparameter der Kette bestehend aus Zweitor A und Zweitor B.

Lösung: Die Kette aus Zweitor A und Zweitor B wird im folgenden als Zweitor C bezeichnet. Am einfachsten können die Streuparameter von C über den Signalfuss ermittelt werden.

$$\begin{aligned} s_{C11} &= s_{A21} s_{B11} s_{A12} = -j \cdot \frac{1}{3} \cdot -j = -\frac{1}{3} \\ s_{C22} &= s_{B22} = \frac{1}{3} \\ s_{C21} &= s_{A21} s_{B21} = -j \cdot \frac{2}{3} = \frac{-j2}{3} \\ s_{C12} &= s_{B12} s_{A12} = \frac{2}{3} \cdot -j = \frac{-j2}{3} \\ [S_C] &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -j2 \\ -j2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Frage 3.5.6: Berechnen die Streumatrix der Kette von A und B über die entsprechenden Kettenmatrizen der Zweitore A und B, die bereits aus den Aufgaben 3.2 und 3.3 bekannt sind.

Lösung: Die Kettenmatrizen der Zweitore A und B sind:

$$[A_A] = \begin{bmatrix} 0 & jR_W \\ \frac{j}{R_W} & 0 \end{bmatrix} \quad [A_B] = \begin{bmatrix} 1 & R_W \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Durch Multiplikation in der richtigen Reihenfolge ergibt sich die Kettenmatrix des Gesamtnetzwerks.

$$[A_C] = \begin{bmatrix} 0 & jR_W \\ \frac{j}{R_W} & j \end{bmatrix}$$

Die Kettenmatrix muss nun mit den bekannten Formeln in die Streumatrix umgewandelt werden.

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{A_{11} + A_{12}/R_W - A_{21}R_W - A_{22}}{A_{11} + A_{12}/R_W + A_{21}R_W + A_{22}} = \frac{0 + j - j - j}{0 + j + j + j} = -\frac{1}{3} \\ s_{12} &= \frac{2(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}{A_{11} + A_{12}/R_W + A_{21}R_W + A_{22}} = \frac{2(0 - j \cdot j)}{0 + j + j + j} = \frac{-j^2}{3} \\ s_{21} &= \frac{2}{A_{11} + A_{12}/R_W + A_{21}R_W + A_{22}} = \frac{2}{0 + j + j + j} = \frac{-j^2}{3} \\ s_{22} &= \frac{-A_{11} + A_{12}/R_W - A_{21}R_W + A_{22}}{A_{11} + A_{12}/R_W + A_{21}R_W + A_{22}} = \frac{0 + j - j + j}{0 + j + j + j} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Das Ergebnis entspricht erwartungsgemäß genau dem der vorherigen Aufgabe.

### 3.6. Passives Zweitor

Ein Zweitor aus konzentrierten Bauteilen (keine Leitungen und Leitungseffekte) besteht aus einem Widerstand und einer Induktivität. Die Komponenten haben folgende Werte:  $R = 50 \Omega$ ,  $L = 125 \text{ nH}$ . Die Bezugsgröße  $R_W$  beträgt  $50 \Omega$ .

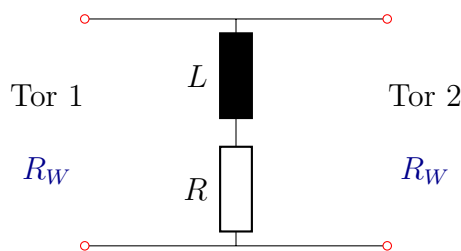


Abbildung 3.6.1: Zweitor mit Querimpedanz

Frage 3.6.1: Geben Sie die Beschaltung zur Ermittlung der Streuparameter an (Skizze).

Lösung: Die Beschaltung erfolgt wie in Abbildung 1.1.6.

Frage 3.6.2: Ist das Zweitor übertragungssymmetrisch (reziprok, d.h.  $s_{21} = s_{12}$ )? Geben Sie bitte eine qualitative Begründung an. Ist das Zweitor verlustfrei?

Lösung: Das Zweitor ist reziprok, da keine richtungsabhängigen Bauelemente verwendet wurden.

Frage 3.6.3: Ist das Zweitor symmetrisch ( $s_{22} = s_{11}$ )? Geben Sie bitte eine qualitative Begründung an.

Lösung: Das Zweitor ist symmetrisch, da es symmetrisch aufgebaut ist. Es ist aufgrund des Widerstands nicht verlustfrei

Frage 3.6.4: Berechnen Sie die Streumatrix für die Frequenz  $f = 400/2\pi$  MHz mit den angegebenen Werten für R, L und  $R_W$ . Hinweis: Beschreiben Sie bitte auch kurz den Lösungsweg, z.B. durch eine Skizze bzw. Formel.

Lösung: Die Reaktanz ist  $X_L = 2\pi fL = 2\pi \frac{400\text{MHz}}{2\pi} 125\text{nH} = 50\Omega$ . Die Reflexions- und Transmissionsfaktoren sind damit:

$$\begin{aligned} s_{11} &= s_{22} = \frac{(R_W || (R_W + jX_L)) - R_W}{(R_W || (R_W + jX_L)) + R_W} = \frac{-3R_W^2 + j2R_W X_L}{9R_W^2 + 4X_L^2} = \frac{-3 + 2j}{13} \\ s_{21} &= s_{12} = \frac{2 \cdot (R_W || (R_W + jX_L))}{(R_W || (R_W + jX_L)) + R_W} = \frac{6R_W^2 + 4X_L^2 + j2X_L R_W}{9R_W^2 + 4X_L^2} = \frac{10 + j2}{13} \end{aligned}$$

Frage 3.6.5: Wie lautet die Streumatrix für folgende Fälle: Frequenz  $f = 0$  Hz, sehr hohe Frequenzen ( $f$  gegen unendlich). Prüfen Sie die Ergebnisse auf Plausibilität.

Lösung: Für  $f = 0$  sind  $s_{11} = s_{22} = \frac{-1}{3}$  und  $s_{21} = s_{12} = \frac{2}{3}$ . Für  $f \rightarrow \infty$  sind  $s_{11} = s_{22} = 0$  und  $s_{21} = s_{12} = 1$ .

Frage 3.6.6: Einspeisung an Tor 1 und Betriebsfrequenz aus Frage 3.6.4: Welcher Anteil der Wirkleistung wird an Tor 1 reflektiert? Welcher Anteil der Wirkleistung kommt am Tor 2 an? Welcher Anteil der Wirkleistung wird im Zweitor konsumiert? Wie lautet die Leistungsbilanz bei den Spezialfällen aus Frage 3.6.5, d.h. für niedrige Frequenzen ( $f$  gegen 0 Hz), bzw. für sehr hohe Frequenzen ( $f$  gegen unendlich).

Lösung: Es wird der Anteil  $|s_{11}|^2 = \frac{1}{13}$  der Wirkleistung am Tor 1 reflektiert und der Anteil  $|s_{21}|^2 = \frac{104}{169}$  wird an Tor 2 transmittiert. Der Anteil  $1 - \frac{1}{13} - \frac{104}{169} = \frac{52}{169}$  wird im Zweitor konsumiert.

Bei  $f = 0$  wird  $\frac{1}{9}$  reflektiert,  $\frac{4}{9}$  transmittiert und ebenfalls  $\frac{4}{9}$  im Zweitor konsumiert. Für  $f \rightarrow \infty$  wird die komplette Leistung transmittiert.

### 3.7. Dämpfungsglied

Dämpfungsglieder sind oftmals aus drei Widerständen als  $T$  oder  $\pi$ -Netzwerk aufgebaut. Hier wird ein  $T$ -Netzwerk berechnet. Das Dämpfungsglied soll die Anforderung der Reflexionsfreiheit erfüllen und eine Einfügedämpfung von 6 dB besitzen.

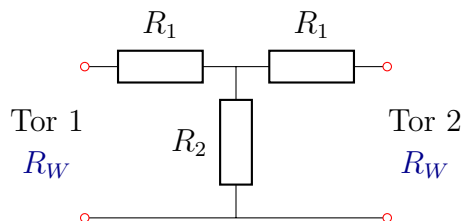


Abbildung 3.7.1:  $T$ -Dämpfungsglied

Frage 3.7.1: Bestimmen die Streumatrix des Dämpfungsglieds aus den gegebenen Anforderungen.

Lösung: Da das Dämpfungsglied reflexionsfrei sein soll, ist  $s_{11} = s_{22} = 0$ . Die Transmissionsfaktoren ergeben sich aus der geforderten Einfügedämpfung.

$$IL_{21} = -20 \log_{10}(|s_{21}|) \rightarrow |s_{21}| = 10^{-\frac{IL/dB}{20}} = \frac{1}{2}$$

Da nur Widerstände und keine Reaktanzen verwendet wurden, ist die Phase des Transmissionsfaktors Null, sodass  $s_{21} = \frac{1}{2}$ . Aufgrund der Symmetrie gilt  $s_{12} = s_{21}$ .

$$[S_{6dB}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Frage 3.7.2: Berechnen Sie die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$ . Der Bezugswiderstand an beiden Toren ist  $R_W = 50 \Omega$ . Hinweis: Es kann die Kettenmatrix verwendet werden.

Lösung: Die Kettenmatrix des Dämpfungsglieds entsteht durch Multiplikation der Kettenmatrizen der einzelnen Teilelemente des Netzwerks.

$$[A_T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_1+R_2}{R_2} & \frac{R_1^2+R_2R_1}{R_2} \\ \frac{1}{R_2} & \frac{R_1+R_2}{R_2} \end{bmatrix}$$

Mit den bekannten Formeln zur Umrechnung der Kettenmatrix in die Elemente der Streumatrix können Bedingungen für  $R_1$  und  $R_2$  gefunden werden. Die Reflexionsfaktoren werden wie folgt aus den Kettenmatrixelementen bestimmt dies

$$\begin{aligned} s_{11} = 0 &= \frac{A_{11} + A_{12}/R_W - A_{21}R_W - A_{22}}{A_{11} + A_{12}/R_W + A_{21}R_W + A_{22}} \\ s_{22} = 0 &= \frac{-A_{11} + A_{12}/R_W - A_{21}R_W + A_{22}}{A_{11} + A_{12}/R_W + A_{21}R_W + A_{22}}. \end{aligned}$$



Hieraus kann abgelesen werden, dass  $A_{11} = A_{22}$  und  $A_{12}R_W = \frac{A_{21}}{R_W}$  gelten muss. Für die Transmissionsfaktoren gilt damit:

$$\begin{aligned} s_{12} = \frac{1}{2} &= \frac{2(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}{A_{11} + A_{12}/R_W + A_{21}R_W + A_{22}} = \frac{A_{11}^2 - A_{21}^2 R_W^2}{A_{11} + A_{21}R_W} \\ s_{21} = \frac{1}{2} &= \frac{2}{A_{11} + A_{12}/R_W + A_{21}R_W + A_{22}} = \frac{1}{A_{11} + A_{21}R_W} \end{aligned}$$

Aus der Gleichung für  $s_{21}$  kann die erste Bedingung abgeleitet werden:

$$A_{11} + A_{21}R_W = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{R_1 + R_2}{R_2} + \frac{R_W}{R_2} = 2 \quad \rightarrow \quad R_1 + R_W = R_2$$

Die Gleichung für  $s_{12}$  liefert die zweite Bedingung.

$$A_{11}^2 - A_{21}^2 R_W^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_2^2} + \frac{R_W^2}{R_2^2} = 1 \quad \rightarrow \quad R_1^2 + 2R_1R_2 = R_W^2$$

Beide Bedingungen ineinander eingesetzt, ergibt eine quadratische Gleichung für  $R_1$

$$3R_1^2 + 2R_W R_1 - R_W^2 = 0$$

Die Lösung einer quadratischen Gleichung der Form  $x^2 + px + q = 0$  ist mit  $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2 - 4q}$  gegeben. Angewandt auf die Gleichung für  $R_1$  ergibt:

$$\begin{aligned} R_1 &= -\frac{1}{3}R_W \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}R_W\right)^2 - \frac{R_W^2}{3}} \\ R_1 &= -\frac{1}{3}R_W \pm \frac{2}{3}R_W \end{aligned}$$

Da  $R_1$  positiv sein muss, kann nur eine Lösung verwendet werden und es gilt  $R_1 = \frac{R_W}{3}$ . Der Widerstand  $R_2$  kann über die zuvor aufgestellte erste Bedingung ermittelt werden ( $R_2 = R_W + R_1$ ). Für den gegebenen Wert des Bezugswiderstands  $R_W = 50 \Omega$  sind die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$ :

$$\begin{aligned} R_1 &= 16\frac{2}{3} \Omega \\ R_2 &= 66\frac{2}{3} \Omega \end{aligned}$$

### 3.8. Viertelwellentransformator

Folgende Abbildung zeigt einen Viertelwellenleitung, d.h. eine Leitung mit Wellenwiderstand  $R_W = R_0$  der Länge  $l = \lambda/4$ .

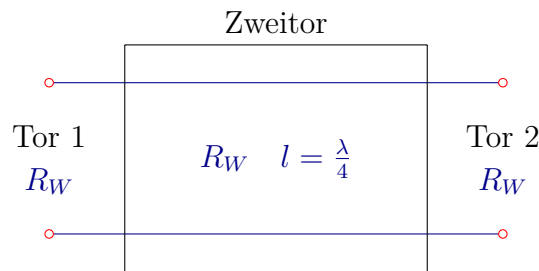
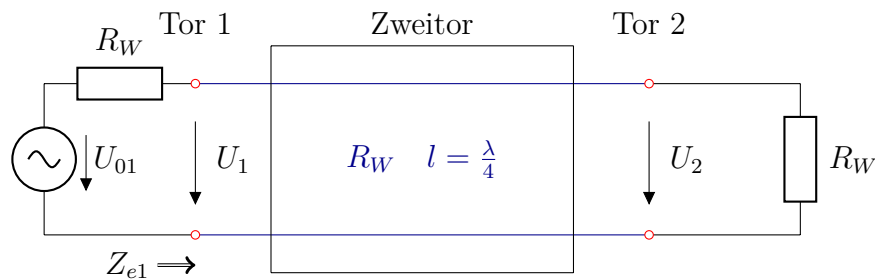


Abbildung 3.8.1: Viertelwellentransformator

Abbildung 3.8.2: Viertelwellentransformator mit Beschaltung für  $s_{11}$  und  $s_{21}$ 

Frage 3.8.1: Skizzieren Sie die Beschaltung zur Ermittlung der Streuparameter. Berechnen Sie die Streuparameter des Zweitors mit Bezugsimpedanz  $R_W = R_0$ . Zeigen Sie mit Hilfe der Streumatrix, dass das Zweitor verlustfrei ist.

Lösung: Den Eingangsreflexionsfaktor  $s_{11}$  erhält man mit Hilfe der Eingangsimpedanz  $Z_{e1}$ .

$$\underline{s}_{11} = \frac{Z_{e1} - R_0}{Z_{e1} + R_0}$$

Die Eingangsimpedanz  $Z_{e1}$  berechnet sich mit Hilfe der Transformationsgleichung des Viertelwellentransformators.

$$Z_{e1} = \frac{(R_0)^2}{R_0} = R_0$$

Hieraus erhält man

$$\underline{s}_{11} = \frac{R_0 - R_0}{R_0 + R_0} = 0.$$

Das Zweitor ist mit dem Wellenwiderstand  $R_0$  des Viertelwellentransformators reflexionsfrei abgeschlossen. Die Viertelwellenleitung ist verlustfrei. Somit ist auch der Eingangsreflexionsfaktor erwartungsgemäß Null.

Die Vorwärtstransmission  $s_{21}$  berechnet man aus dem Spannungsverhältnis

$$\underline{s}_{21} = \frac{2 U_2}{U_{01}}$$

Da die Leitung reflexionsfrei abgeschlossen ist, ergibt sich die Spannung  $U_1$  aus dem Spannungsteiler aus der Impedanz  $R_0$  der Quelle und der oben berechneten Eingangsimpedanz

$\underline{Z}_{e1} = R_0$ . Somit gilt  $\underline{U}_{01} = 2 \underline{U}_1$ .

$$\underline{s}_{21} = \frac{2 \underline{U}_2}{\underline{U}_{01}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$$

Zwischen Tor 2 und Tor 1 bewirkt die Viertelwellenleitung nur eine Phasenverschiebung zwischen den Spannungen  $\underline{U}_2$  und  $\underline{U}_1$ , bedingt durch die Ausbreitung der Spannungswellen. Die Phasenverschiebung beträgt

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 e^{-j\beta l} = \underline{U}_1 e^{-j2\pi \frac{l}{\lambda}}$$

Durch Einsetzen von  $l = \lambda/4$  erhält man

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \underline{U}_1$$

Somit erhält man für  $\underline{s}_{21} = \frac{2 \underline{U}_2}{\underline{U}_{01}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = -j$ . Da das Zweitor symmetrisch ist, erhält man folgende die Streumatrix:

$$[\underline{S}] = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{bmatrix}$$

Verlustfreiheit: Die an Tor 2 übertragene Leistung sollte der an Tor 1 eingespeisten Leistung minus der an Tor 1 reflektierten Leistung entsprechen. In diesem Fall wird die Leistung, die durch Tor 1 in das Zweitor gelangt, vollständig an Tor 2 übertragen. Es gilt dann

$$|\underline{s}_{21}|^2 = 1 - |\underline{s}_{11}|^2$$

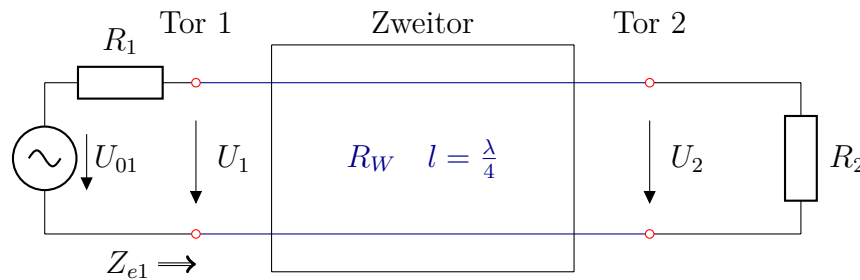
Wegen  $|\underline{s}_{21}| = 1$  und  $|\underline{s}_{11}| = 0$  geht dies unmittelbar aus der Streumatrix hervor. Betreibt man das Zweitor in Rückwärtsrichtung, ist dieser Zusammenhang sinngemäß gleich.

Frage 3.8.2: Allgemeiner Fall: Berechnen Sie die Streumatrix eines verlustfreien Leiters der Länge  $l$  mit Wellenwiderstand  $R_W = R_0$ . Ermitteln Sie hieraus die Streumatrizen für Viertelwellentransformatoren und Halbwellentransformatoren.

Frage 3.8.3: Anpassung einer gegebenen Lastimpedanz  $R_2$  an eine gegebene Quellimpedanz  $R_1$  durch Wahl eines geeigneten Wellenwiderstandes  $R_W$  des Viertelwellentransformators. Eine Antenne mit Lastimpedanz  $R_2$  soll an einen Sender mit Quellimpedanz  $R_1$  angepasst werden, wie in folgender Abbildung gezeigt. Hierzu soll ein Viertelwellentransformator eingesetzt werden. Der Wellenwiderstand  $R_W$  des Viertelwellentransformators kann durch geeignete Wahl der Geometrie als Variable gewählt werden (beispielsweise als Mikrostreifenleiter). Welcher Wellenwiderstand  $R_W$  des Leiters ist für die Anpassung erforderlich? Überprüfen Sie Ihr Ergebniss mit folgenden Werten:  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $R_1 = 50 \Omega$ .

Lösung: Die Transformationsgleichung des Viertelwellentransformators lautet mit der Beschaltung aus der gezeigten Abbildung wie folgt.

$$\underline{Z}_{e1} = \frac{(R_W)^2}{R_2}$$



**Abbildung 3.8.3:** Viertelwellentransformator mit Beschaltung für  $s_{11}$  und  $s_{21}$

Anpassung an die Quelle liegt vor, wenn diese Eingangsimpedanz  $\underline{Z}_{e1}$  der Impedanz der Quelle  $R_1$  entspricht, also

$$\underline{Z}_{e1} = \frac{(R_W)^2}{R_2} = R_1$$

Der Wellenwiderstand  $R_W$  des Viertelwellentransformators wird also so gewählt, dass

$$R_W = \sqrt{R_1 R_2}.$$

Zahlenbeispiel:  $R_2 = 100 \, \Omega$ ,  $R_1 = 50 \, \Omega$ . Hieraus berechnet man aus der letzten Gleichung  $R_W = 70,7 \, \Omega$

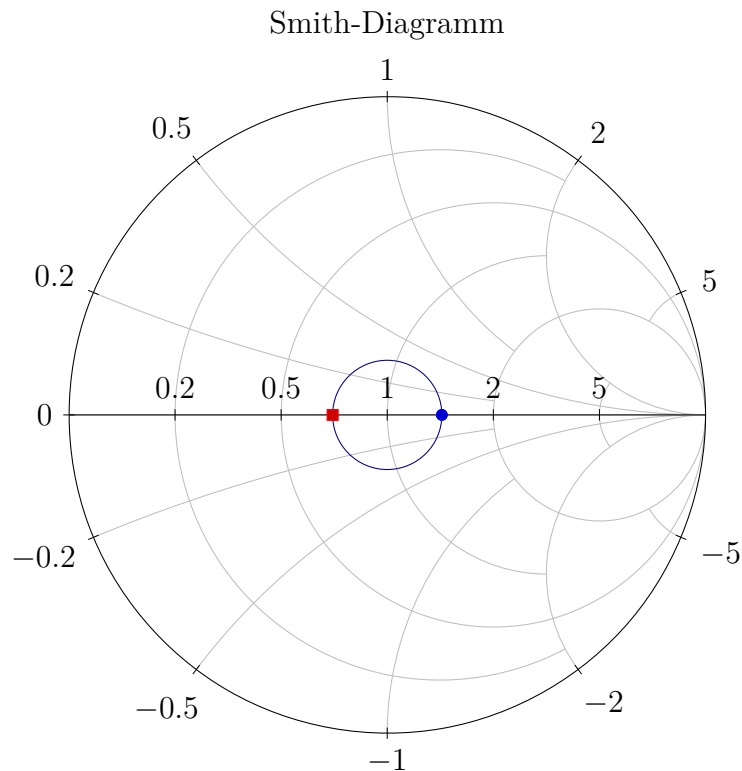
Frage 3.8.4: Stellen Sie die Transformation zur Leistungsanpassung aus der vorausgegangenen Aufgabe in einem Smith-Diagramm dar. Hinweis: Verwenden Sie als Bezugsgröße den Wellenwiderstand des Viertelwellenleiters, d.h.  $R_0 = R_W$ . Welche Transformation würde ein Halbwellentransformator leisten? Gibt es andere Leitungslängen, die zur Anpassung ebenfalls funktionieren?

Lösung: Der Viertelwellenleiter transformiert die Impedanz der Antenne (blauer Punkt) auf einem Halbkreis im Uhrzeigersinn zur Impedanz der Quelle (rotes Viereck). Ein Halbwellenleiter würde eine ganze Drehung auf dem eingezeichneten Kreis bewirken und die Eingangsimpedanz nicht transformieren. Eine andere mögliche Leitungslänge zur Transformation ist  $l = \frac{3\lambda}{4}$  (eineinhalb Drehungen).

### 3.9. Phasoren

Folgende Abbildung zeigt eine Impedanz bestehend aus einem ohmschen Widerstand  $R$  und einer Induktivität  $L$ , die über einen Schalter mit einer Spannungsquelle mit Innenwiderstand  $R_1$  verbunden ist. Untersucht werden soll das Zeitverhalten der Schaltung bei Einschalten und Ausschalten mit einer Gleichspannungsquelle, sowie das Verhalten im eingeschwungenen Zustand bei Versorgung mit einer Wechselspannungsquelle fester Frequenz.

Frage 3.9.1: Differenzialgleichung. Ergänzen Sie die Spannungen und Ströme in der Schaltung durch Wahl geeigneter Zählpfeile. Erstellen Sie die Differenzialgleichung der Schaltung.



**Abbildung 3.8.4:** Transformation der Eingangsimpedanz durch die Leitung mit  $R_W = 70.71 \Omega$

Lösung: Die Wahl der Zählpeile ist willkürlich. Mit der in der Abbildung unten gezeigten Wahl ergeben sich folgende Gleichungen.

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= u_{R1}(t) + u_S(t) + u_R(t) + u_L(t) \quad (\text{Maschenregel}) \\
 u_{R1}(t) &= R_1 i(t) \\
 u_S(t) &= 0 \quad (\text{Schalter geschlossen}) \text{ oder} \\
 u_S(t) &= u_S(t) \quad (\text{Schalter geöffnet}) \\
 u_R(t) &= R i(t) \\
 u_L(t) &= L \frac{di(t)}{dt}
 \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man folgende Differenzialgleichung.

$$u_1(t) = R_1 i(t) + u_S(t) + R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (3.23)$$

Frage 3.9.2: Verhalten beim Einschalten. Es wird eine Gleichspannungsquelle verwendet, d.h. die Spannung  $u_1 = \hat{u}_1 = \text{const.}$  Zum Zeitpunkt  $t=0$  wird der Schalter geschlossen. Skizzieren Sie den Verlauf des Stromes und der Spannungen nach dem Einschalten.

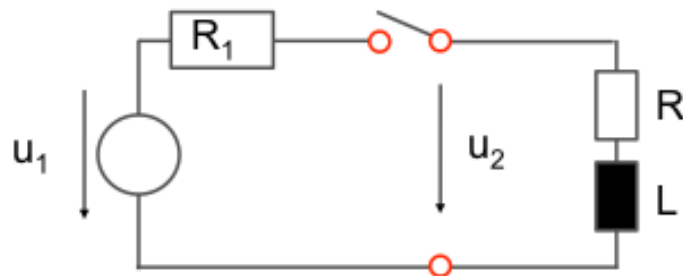


Abbildung 3.9.1: Last an einer Spannungsquelle

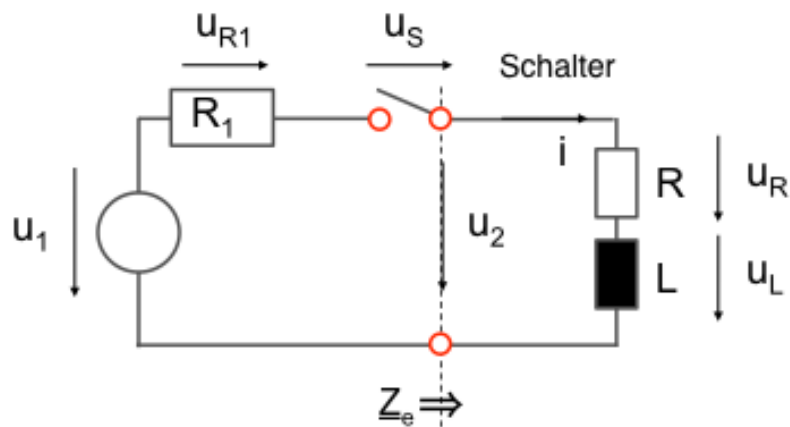


Abbildung 3.9.2: Last an einer Spannungsquelle mit Zählpfeilen

Frage 3.9.3: Verhalten beim Ausschalten. Es wird eine Gleichspannungsquelle verwendet, d.h. die Spannung  $u_1 = \hat{u}_1 = \text{const.}$  Der Schalter ist seit einiger Zeit geschlossen, die Schaltung befindet sich im eingeschwungenen Zustand. Zum Zeitpunkt  $t = t_1$  wird der Schalter geöffnet. Skizzieren Sie den Verlauf des Stromes und der Spannungen nach dem Einschalten.

Frage 3.9.4: Eingeschwungener Zustand mit Wechselspannung fester Frequenz. Die Schaltung wird mit Wechselspannung fester Frequenz betrieben. Der Schalter ist geschlossen, die Schaltung bereits im eingeschwungenen Zustand. Wie lautet die Differenzialgleichung in Phasorenschreibweise? Hinweis: Für den Strom gilt  $i(t) = \hat{i} \cos(\omega t + \phi_i)$ .

Lösung: Erweitert man den Strom um einen Imaginärteil, so erhält man in komplexer Schreibweise

$$\underline{i}(t) = \hat{i} \cos(\omega t + \phi_i) + j \hat{i} \sin(\omega t + \phi_i) = \hat{i} e^{j\phi_i} e^{j\omega t} = \underline{I} e^{j\omega t} \quad (3.24)$$

Ebenso beschreibt man die Quellspannung in komplexer Schreibweise.

$$\underline{u}_1(t) = \hat{u}_1 e^{j\phi_{u1}} e^{j\omega t} = \underline{U}_1 e^{j\omega t} \quad (3.25)$$

Einsetzen in die Differenzialgleichung ergibt

$$\underline{U}_1 e^{j\omega t} = R_1 \underline{I} e^{j\omega t} + R \underline{I} e^{j\omega t} + j \omega L \underline{I} e^{j\omega t} \quad (3.26)$$

Durch Elimination der zeitabhängigen Ausdrücke erhält man schließlich die gewohnte Form.

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I} + R \underline{I} + j \omega L \underline{I} \quad (3.27)$$

Ergebnis ist eine algebraische Gleichung, die sich mit Hilfe algebraischer Operationen lösen lässt.

Frage 3.9.5: Zeigerdiagramm. Erstellen Sie das Zeigerdiagramm für die Spannung  $\underline{U}_2 = R \underline{I} + j \omega L \underline{I}$ . Hinweis: Verwenden Sie einen Stromzeiger zur Orientierung (Serienschaltung). Welcher Phasenwinkel ergibt sich zwischen Strom und Spannung, wenn  $R = 50 \Omega$  und  $\omega L = 50 \Omega$  betragen?

Frage 3.9.6: Eingangsimpedanz. Berechnen Sie die Eingangsimpedanz  $\underline{Z}_e$  der Schaltung. Welcher Wert ergibt sich für die Eingangsimpedanz, wenn  $R = 50 \Omega$  und  $\omega L = 50 \Omega$  betragen? Stellen Sie die Eingangsimpedanz  $\underline{Z}_e$  nach Betrag und Phase dar.

### 3.10. Rat-Race-Koppler

Gegeben ist ein sogenannter Rat-Race-Koppler nach Abbildung 3.10.1. Die Wellenwiderstand der Ringleitung beträgt  $\sqrt{2}R_W$ . Der Bezugswiderstand der Tore sei  $R_W$ . Die Leitungslängen der Anschlussleitungen sind zu vernachlässigen bzw. besitzen die Länge Null.

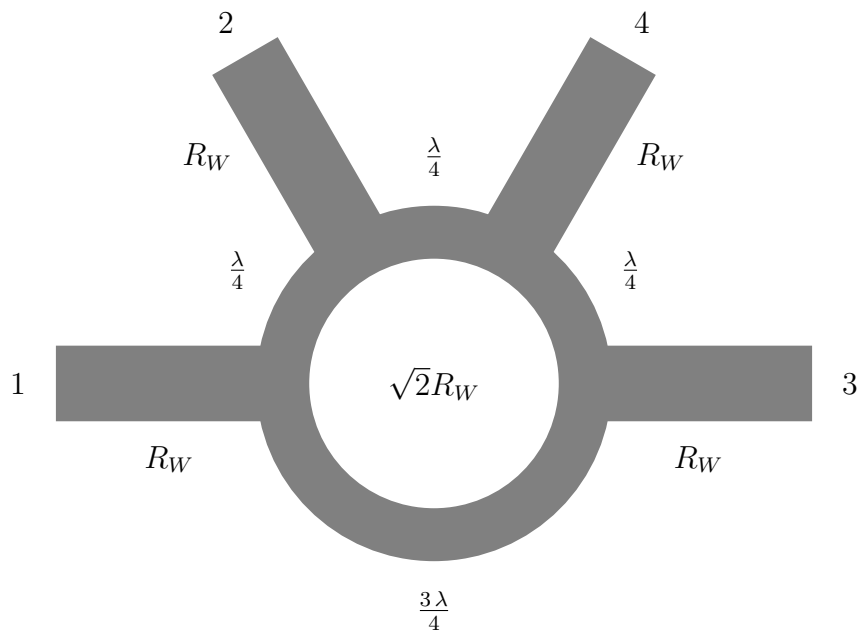


Abbildung 3.10.1: Rat-Race-Koppler

Frage 3.10.1: Bestimmen Sie die Symmetrieebene und zeichnen die Ersatzschaltbilder im Gleichaktbetrieb und Gegentaktbetrieb.

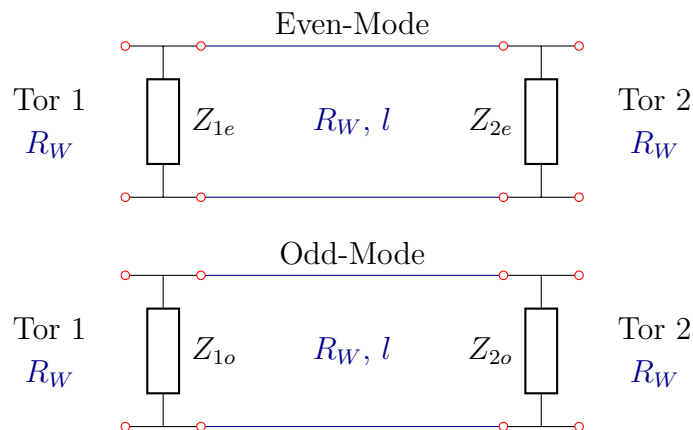


Abbildung 3.10.2: Ersatzschaltbild im Even-Mode und Odd-Mode

Lösung: Die Symmetrieebene verläuft senkrecht durch die Mitte des Rings, sodass die  $\frac{\lambda}{4}$ -Leitung oben und die  $\frac{3\lambda}{4}$ -Leitung unten jeweils in der Hälfte durchtrennt werden. Im Even-Mode entstehen an diesen Trennstellen Leerläufe, im Odd-Mode hingegen Kurzschlüsse.

- $Z_{1e}$ : Leerlaufende  $\frac{3\lambda}{8}$ -Leitung



- $Z_{2e}$ : Leerlaufende  $\frac{\lambda}{8}$ -Leitung
- $Z_{1o}$ : Kurzgeschlossene  $\frac{3\lambda}{8}$ -Leitung
- $Z_{2o}$ : Kurzgeschlossene  $\frac{\lambda}{8}$ -Leitung

Diese leerlaufenden bzw. kurzgeschlossenen Leitungsstücke werden in den Ersatzschaltbildern durch die Impedanzen  $Z_{1e}$  und  $Z_{2e}$  bzw.  $Z_{1o}$  und  $Z_{2o}$  ersetzt.

Frage 3.10.2: Berechnen Sie die Streumatrix für den Gleichtaktfall mit Hilfe der Kettenmatrizen.

Lösung: Die Impedanzen der beiden Stichleitungen im Leerlauf sind:

$$\begin{aligned} Z_{1e} &= -j\sqrt{2}R_W \underbrace{\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{3\lambda}{8}\right)}_{-1} = j\sqrt{2}R_W \\ Z_{2e} &= -j\sqrt{2}R_W \underbrace{\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{1\lambda}{8}\right)}_1 = -j\sqrt{2}R_W \end{aligned} \quad (3.28)$$

Die Kettenmatrizen können damit angegeben werden.

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-j}{\sqrt{2}R_W} & 1 \end{bmatrix} \quad [A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{j}{\sqrt{2}R_W} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Die Kettenmatrix der  $\frac{\lambda}{4}$ -Leitung ist mit

$$[A_{\frac{\lambda}{4}}] = \begin{bmatrix} 0 & j\sqrt{2}R_W \\ \frac{j}{\sqrt{2}R_W} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

bekannt. Die Kettenmatrix des gesamten Ersatzschaltbilds des Even-Modes ergibt sich aus Multiplikation der Einzelmatrizen.

$$[A_e] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-j}{\sqrt{2}R_W} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & j\sqrt{2}R_W \\ \frac{j}{\sqrt{2}R_W} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{j}{\sqrt{2}R_W} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & j\sqrt{1}R_W \\ \frac{j\sqrt{2}}{R_W} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Mit den im Script gegebenen Formeln zur Umrechnung der Kettenmatrix in S-Parameter erhält man:

$$\begin{aligned} s_{11e} &= \frac{-1 + j\sqrt{2} - j\sqrt{2} - 1}{-1 + j\sqrt{2} + j\sqrt{2} + 1} = \frac{j}{\sqrt{2}} \\ s_{12e} &= \frac{2(-1 \cdot 1 + 2)}{-1 + j\sqrt{2} + j\sqrt{2} + 1} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ s_{21e} &= \frac{2}{-1 + j\sqrt{2} + j\sqrt{2} + 1} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ s_{22e} &= \frac{1 + j\sqrt{2} - j\sqrt{2} + 1}{-1 + j\sqrt{2} + j\sqrt{2} + 1} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Frage 3.10.3: Bestimmen Sie die Streumatrix für den Gegentaktfall. Können Sie die Ergebnisse aus Frage 3.10.2 hierzu nutzen?

Lösung: Das Ersatzschaltbild des Odd-Mode ist gespiegelt, da eine leerlaufende  $\frac{\lambda}{8}$ -Leitung die gleiche Impedanz besitzt wie die eine kurzgeschlossene  $\frac{3\lambda}{8}$ -Leitung. Die zusätzliche Länge von  $\frac{\lambda}{4}$  transformiert einen Kurzschluss in einen Leerlauf. Es gilt deshalb  $Z_{1o} = Z_{2e}$  und  $Z_{2o} = Z_{1e}$ . Damit lassen sich auch die S-Parameter sehr leicht angeben.

$$\begin{aligned} s_{11o} &= s_{22e} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ s_{12o} &= s_{21e} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ s_{21o} &= s_{12e} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ s_{22o} &= s_{11e} = \frac{j}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Frage 3.10.4: Berechnen Sie die Streumatrix des Rat-Race-Kopplers.

Lösung: Es wird Even- und Odd-Mode überlagert.

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{2} (s_{11e} + s_{11o}) = 0 \\ s_{12} &= \frac{1}{2} (s_{12e} + s_{12o}) = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ s_{21} &= \frac{1}{2} (s_{21e} + s_{21o}) = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ s_{22} &= \frac{1}{2} (s_{22e} + s_{22o}) = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Aufgrund der Symmetrie besitzt Tor 3 denselben Reflexionsfaktor wie Tor 1 und Tor 4 denselben wie Tor 2. Außerdem verhält sich Tor 3 gegenüber Tor 4 genauso wie Tor 1 gegenüber Tor 2.

$$\begin{aligned} s_{33} &= s_{11} = 0 \\ s_{34} &= s_{12} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ s_{43} &= s_{21} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ s_{44} &= s_{22} = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Die restlichen S-Parameter sind mit Ausnutzung der Reziprozität:

$$\begin{aligned} s_{24} = s_{42} &= \frac{1}{2} (s_{22e} - s_{22o}) = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ s_{13} = s_{31} &= \frac{1}{2} (s_{11e} - s_{11o}) = \frac{j}{\sqrt{2}} \\ s_{14} = s_{41} = s_{23} = s_{32} &= \frac{1}{2} (s_{12e} - s_{12o}) = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Die gesamte Streumatrix des Rat-Race-Kopplers kann damit ausgefüllt werden.

$$[S_{Ratrace}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-j}{\sqrt{2}} & \frac{j}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-j}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ \frac{j}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-j}{\sqrt{2}} & \frac{-j}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Frage 3.10.5: Ist der Koppler verlustfrei und reziprok? Ist er reflexionsfrei?

Lösung: Er ist verlustfrei, da kleine resistiven Elemente vorhanden sind. Er ist reziprok, da keine richtungsabhängigen Elemente verwendet sind. Der Koppler ist reflexionsfrei (angepasst), da alle  $s_{ii}$  verschwinden.

Frage 3.10.6: Tor 1 wird als Eingang verwendet. Wie groß ist die Phasendifferenz an den Ausgängen Tor 2 und Tor 3.

Lösung: Einspeisung von  $a_1 = 1$ . Daraus folgt  $b_2 = s_{21}a_1 = \frac{-j}{\sqrt{2}}$  und  $b_3 = s_{31}a_1 = \frac{j}{\sqrt{2}}$ . Die Phasendifferenz zwischen Tor 2 und Tor 3 ist  $180^\circ$ . Der Rat-Race-Koppler wird deshalb oft auch als  $180^\circ$ -Koppler bezeichnet

## **4. Klausuraufgaben**

In Abschnitt 4 werden die Klausuraufgaben aus den jeweils vorausgegangenen Kursen zur zielstrebigen Vorbereitung gesammelt. Die Aufgabensammlung wird hierzu fortlaufend ergänzt. Da der Kurs in 2016 neu aufgelegt wird, startet diese Sammlung erst ab Ende dieses Semesters. Eine Sammlung von Klausuraufgaben aus den vergangenen Jahren findet sich im Skriptenserver der Nachrichtentechnik.

## A. Phasoren

Unter Phasoren bzw. komplexen Zeigern werden komplexe Zahlen verstanden, die bei Wechselstromkreisen mit sinusförmigen Signalen fester Frequenz die Phasenlage der Spannungen, Ströme bzw. Impedanzen oder Admittanzen darstellen. Diese Interpretation vereinfacht die Berechnung von Schaltungen, die mit konstanter Frequenz betrieben werden, im eingeschwungenen Zustand. An dieser Stelle seien die Grundlagen dieser Methode noch einmal zusammengefasst.

Elektrische Schaltungen werden durch Differenzialgleichungen beschrieben. Beim Betrieb mit sinusförmigen Signalen fester Frequenz (harmonische Schwingung, erzwungene Schwingung) ist die Lösung der Differenzialgleichung ebenfalls ein sinusförmiges Signal. Für die Lösung der Differenzialgleichung kann man somit folgende Annahme treffen:

$$u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \phi_u)$$

Hierbei bedeuten  $\hat{u}$  die Amplitude des Signals  $u(t)$  und  $\phi_u$  den Phasenwinkel des Signals mit Kreisfrequenz  $\omega$ . Für die Phasorenschreibweise wird das Signal mit Hilfe eines Imaginärteils zu einer komplexen Funktion ergänzt.

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \phi_u) + j\hat{u} \sin(\omega t + \phi_u)$$

Diese Konstruktion dient der Vereinfachung der Berechnung. Das ursprüngliche Signal  $u(t)$  im Zeitbereich erhält man aus dem Realteil der komplexen Funktion, d.h.  $u(t) = \operatorname{Re}\{\underline{u}(t)\}$ . Die komplexe Schreibweise lässt sich nun mit Hilfe der Eulerschen Beziehung  $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$  wie folgt umwandeln.

$$\underline{u}(t) = \hat{u} e^{j\omega t} e^{j\phi_u} = \hat{u} e^{j\phi_u} e^{j\omega t}$$

Letzterer Ausdruck  $e^{j\omega t}$  beschreibt als Zeitfaktor eine Kreisbewegung mit der Frequenz  $\omega$  im Einheitskreis (wegen  $|e^{j\omega t}| = 1$ ). Ersterer Ausdruck beschreibt die Amplitude und Phasenlage des Signals, somit den komplexen Zeiger (bzw. Phasor)  $\underline{U}$ .

$$\underline{u}(t) = \hat{u} e^{j\phi_u} e^{j\omega t} = \underline{U} e^{j\omega t}$$

Der komplexe Zeiger  $\underline{U}$  enthält keinerlei Zeitabhängigkeit mehr, sondern beschreibt Amplitude und Phasenlage des Signals als komplexe Amplitude.

$$\underline{U} = \hat{u} e^{j\phi_u}$$

Setzt man die Schreibweise

$$\underline{u}(t) = \underline{U} e^{j\omega t}$$

in eine Differenzialgleichung ein, so lässt sich die Zeitabhängigkeit eliminieren, da diese einheitlich der Beziehung  $e^{j\omega t}$  entspricht. Die Differenzialgleichung reduziert sich dann auf eine algebraische Gleichung, die sich mit algebraischen Mitteln lösen lässt (d.h. Umformungen, komplexe Bruchrechnung).

Im Falle von Wellengleichungen, d.h. partiellen Differentialgleichungen nach Ort und Zeit, eliminiert der komplexe Ansatz ebenfalls die Zeitabhängigkeit. Die partiellen Differenzialgleichungen reduzieren sich dann auf gewöhnliche, ortsabhängige Differenzialgleichungen.

Da diese bei harmonischer Anregung (sinusförmige Signale) in homogenen Medien auch eine harmonische Ortsabhängigkeit aufweisen, lassen sich die Lösungen ebenfalls in ortsabhängiger komplexer Schreibweise darstellen. Es finden sich dann Ausdrücke wie  $e^{j\beta z}$  für die periodischen Ortsabhängigkeiten. Eine Phasenverschiebung in Abhängigkeit des Ortes deutet hierbei auf eine Laufzeit hin.

Bemerkung: In der Physik findet sich statt

$$\underline{u}(t) = \underline{U} e^{j\omega t}$$

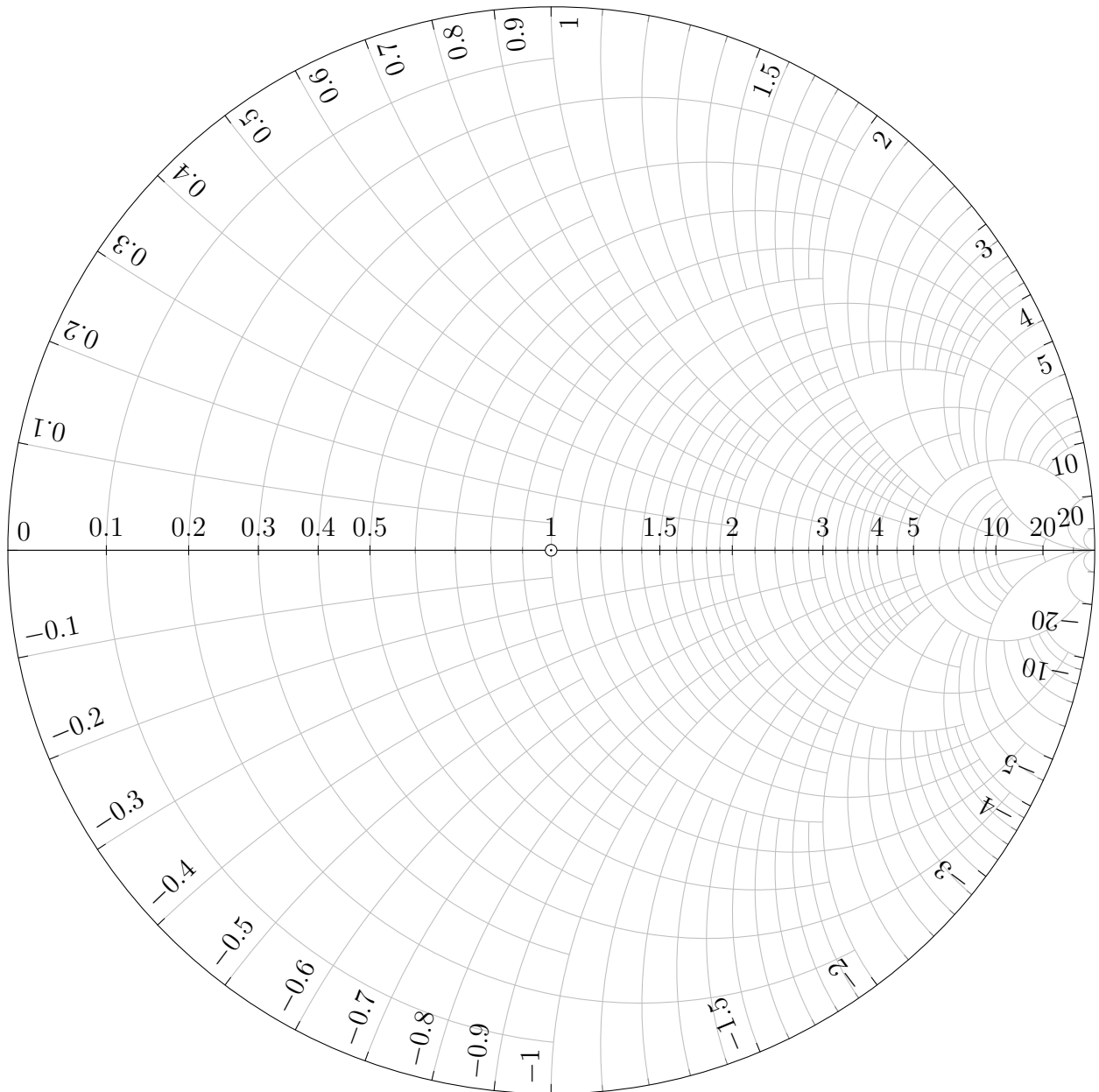
häufig der Ansatz

$$\underline{u}(t) = \underline{U} e^{-j\omega t}$$

Dieser Ansatz hat auf den Realteil des Zeigers und somit auf das zeitliche Signal keinen Einfluss. Hier wurde lediglich mit negativem Imaginärteil erweitert, statt mit positivem Imaginärteil, wie oben gezeigt. Da in der Elektrotechnik meist mit komplexen Werten bzw. Phasoren gerechnet wird, werden die Unterstriche der Übersichtlichkeit wegen oft nicht verwendet. Der Phasor  $\underline{U}$  wird also nur als  $U$  beschrieben. Auch in diesem Script wird aktuell nicht jeder Phasor gekennzeichnet. Meist geht aus dem Zusammenhang jedoch sehr leicht hervor, dass es sich um eine komplexe Größe handelt.

## B. Smith-Diagramm

Smith-Diagramm



## Literatur

- [1] Bronstein, Semendjajew, Musiol, and Mühling. *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch Verlag, 2008.
- [2] Frank Gustrau. *Hochfrequenztechnik: Grundlagen der mobilen Kommunikationstechnik*. Carl Hanser Verlag, 2011.
- [3] Holger Heuermann. *Hochfrequenztechnik: Komponenten für High-Speed- und Hochfrequenzschaltungen*. Vieweg Teubner, 2009.
- [4] Horst Kuchling. *Taschenbuch der Physik*, volume 20. Hanser Verlag GmbH und Co KG, 2010.
- [5] Ernst Müller. *Hochfrequenztechnik, Manuskript mit Übungen zur Vorlesung an der DHBW Stuttgart*. DHBW Stuttgart, Elektrotechnik, Nachrichtentechnik, 2014.