Chapter 1. Functions

Def: 若 A, B 都为 $\mathbb{R}$ 的子集，则称映射 f 为函数.

映射

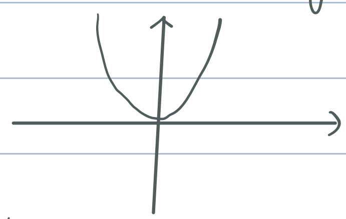
$$A \xrightarrow{f} B$$

任意 $a \in A$. 都有且仅有唯一的 $b \in B$, 使得 $f(a) = b$. 则称 f 为从 A 到 B 的映射.

函数的表示法:

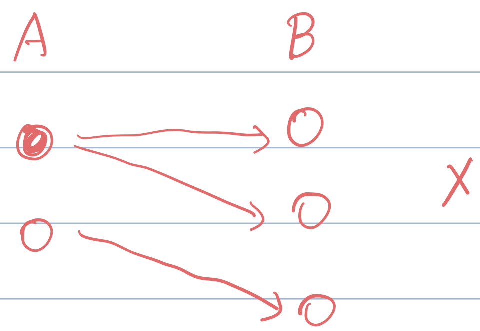
① $y = x^2$ $\quad x = -1 \quad y = (-1)^2 = 1$

② 图像

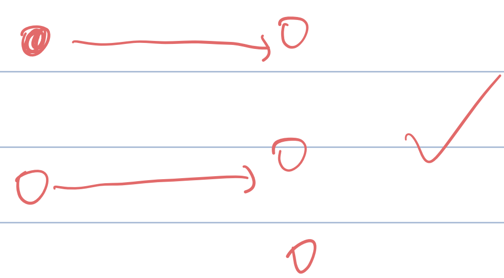


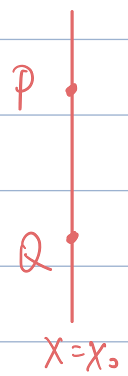
③ 表格

$x=$	-2	-1	0	1	2
$y=$	4	1	0	1	4



Remark: 任何一条垂直线与函数图像至多有一个交点





$f(x_0) = y_P$

$f(x_0) = y_Q$ $\quad y_P \neq y_Q$

Def: 上面的 A 称为 f 的定义域 (domain)

B 称为 f 的值域 (range)

注意 $A, B \subseteq \mathbb{R}$. 但是 A, B 不一定为 $\mathbb{R}$.

Example. $f(x) = \frac{4}{x-1}$ $\quad x-1 \neq 0 \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

Examp6. $g(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$ $x^2-9\neq 0$, $x\neq\pm 3$. $\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\pm 3\}$.

Example. $h(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{x}$ $\begin{cases}x\neq 0\\ 4-x\geq 0\end{cases}$ $\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 0,\ x\leq 4\}$.

四则运算. f, g

$(f+g)(x)\triangleq f(x)+g(x)$

$(f-g)(x)\triangleq f(x)-g(x)$

$(fg)(x)\triangleq f(x)\cdot g(x)$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)\triangleq\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$

函数的复合.

Def: 给定两个函数 f, g. 定义 f 与 g 的复合函数为

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

Example. $f(x)=2x-1$, $g(x)=x^2$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=2x^2-1$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)=(2x-1)^2=4x^2-4x+1$

一般地. $f\circ g\neq g\circ f$

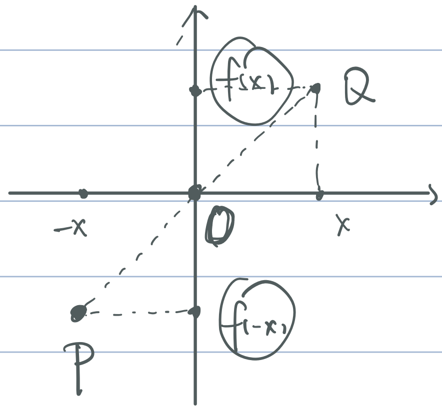
奇函数. 偶函数.

注意: 奇函数和偶函数的定义域都要关于原点对称

Def: 奇函数. $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in A$

偶函数 $f(-x)=f(x)$. $\forall x\in A$

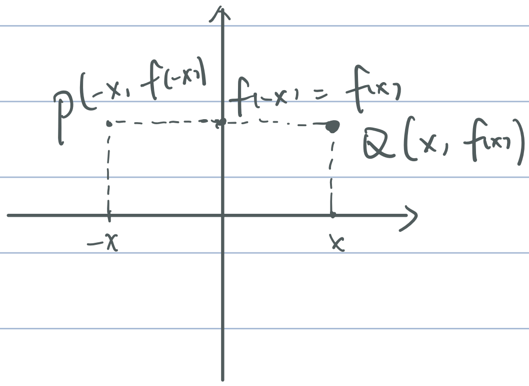
奇函数的图像关于原点对称



$f(-x) = -f(x)$

P, Q 关于 O点 对称

偶函数的图像关于 y 轴对称



P, Q

Example. $f(x) = \frac{1}{2}x^3$

$f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^3 = \frac{1}{2}(-x^3) = -\frac{1}{2}x^3 = -f(x)$

f 奇

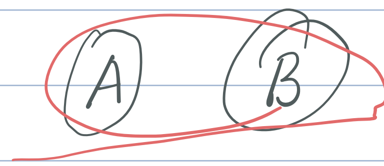
$g(x) = 3x^2 - 1$

$g(-x) = 3(-x)^2 - 1 = 3x^2 - 1 = g(x)$ g 偶函数.

injection

surjection

映射的三种特例：单射. 满射. 双射 → bijection, one-to-one



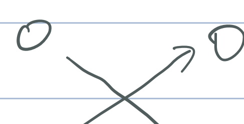
$\subset \mathbb{R}$

单射 (不存在"多对一")

$\forall a_1, a_2 \in A$ 且 $a_1 \neq a_2$, 有 $f(a_1) \neq f(a_2)$

满射 (映满了)

$\forall b \in B.\ \exists a \in A.$ 使得 $f(a) = b$.



双射：既单射又为满射的映射
又称为一一映射

逆映射

Def：假设 $f: A \to B$ 为 one-to-one，则存在 $f^{-1}: B \to A$ 使得

$f^{-1}(y_0)=x_0$ 当且仅当 $f(x_0)=y_0$.

称 f^{-1} 为 f 的逆映射 (inverse)，亦称为反函数.

$$A \xrightarrow[x_0 \xleftarrow{\ f^{-1}\ } y_0]{x_0 \xrightarrow{\ f\ } y_0} B$$

如何求逆映射：交换 x, y，得到新的方程后求解 y

Example. $f(x)=x^3-1$.

$$y=x^3-1$$
$$\Big\downarrow \text{交换 } x,y$$
$$x=y^3-1$$
$$\downarrow$$
$$y^3=x+1$$
$$\downarrow$$

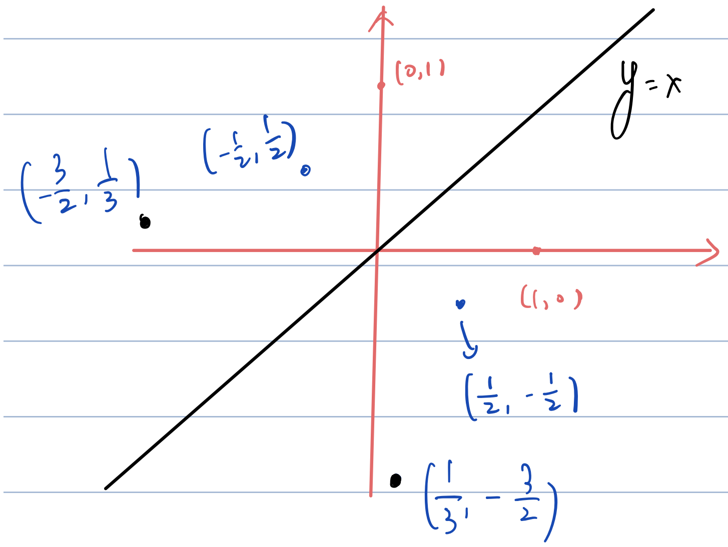
$y=\sqrt[3]{x+1}$ 即为 $y=x^3-1$ 的逆映射

问：f 和 f^{-1} 的图像有什么关系？

假设 $P(x_0,y_0)$ 在 f 的图像上. $y_0=f(x_0)$

则 $f^{-1}(y_0)=x_0$，这表示 $Q(y_0,x_0)$ 在 f^{-1} 的图像上.

$P(x_0, y_0)$ 和 $Q(y_0, x_0)$ 关于 $y=x$ 对称.



因此 f 和 f^{-1} 的图像也关于 $y=x$ 对称

零点

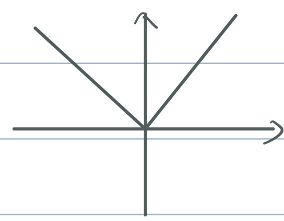
Def: 使得 $f(x)=0$ 的 x 值称为 f 的零点.

Eg: $f(x) = x^4 - 2x^2 = 0$ $\quad \underbrace{x^2}\underbrace{(x^2-2)} = 0$ $\quad x=0.\ x=\pm\sqrt{2}.$

故 f 的零点有3个. 分别为 $0, \pm\sqrt{2}$

B. Special Functions.

1. 绝对值函数 $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$



2. 取整函数 (greatest-integer function)

$f(x) = [x]$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数

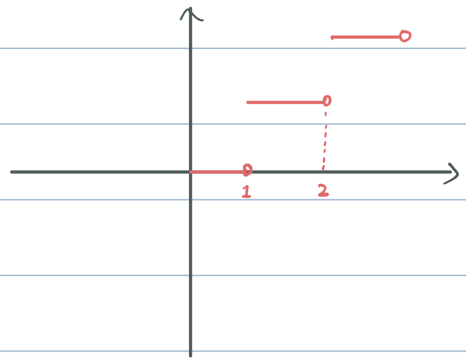
当 $x=1.$ $\quad [x]=1$

$x=1.5$ $\quad [x]=1$

$x=1.999$ $\quad [x]=1$

$1 \le x < 2, \quad [x] = 1$

$0 \le x < 1 \quad [x] = 0$

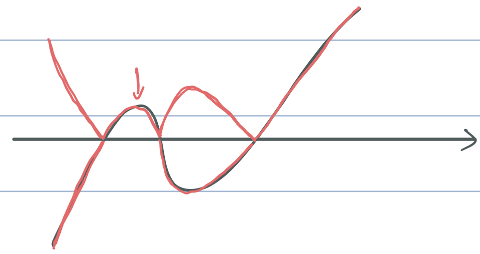


f

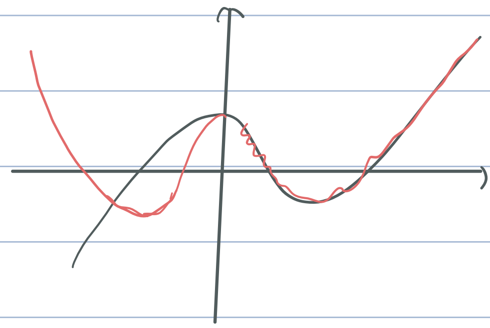
1. $f(x)$ 和 $|f(x)|$

将 x 轴下方的翻折

x 轴上方的不动



2. $f(x)$ 和 $f(|x|)$



$x>0, \quad f(|x|) = f(x)$

$x<0 \quad f(|x|) = f(-x)$

$f(|x|)$ 的图像是将 $f(x)$ 图像在 y 轴右侧的翻折过来形成的对称图形

3. $f(x)$ 和 $f(-x)$ 关于 y 轴对称

4. $f(x)$ 和 $-f(x)$ 关于 x 轴对称

多项式函数. polynomial function

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

其中 $n \in N^*$, $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ 都是常数. $a_n \ne 0$.

f 的阶数(度数)为 n

(i) 若 $n=0$. 则 $f = a_0$

(ii) 若 $n=1$. 则 $f=a_1x+a_0$ linear function

(iii) 若 $n=2$. 则 $f=a_2x^2+a_1x+a_0$ $(a_2\neq 0)$

二次函数，图像为抛物线，抛物线的对称轴为 $x=-\frac{a_1}{2a_2}$

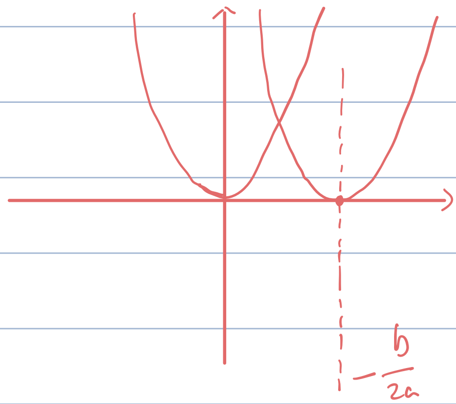
$$f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$$
$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$
$$=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

>0、<0.

$$g(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

$a>0$ 时. 开口向上

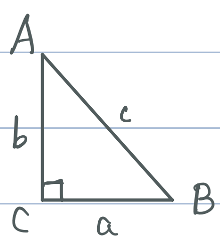
$a<0$ 时 开口向下



Rational Functions. $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为多项式.

Trigonometric Functions (三角函数)

sin cos tan



$\sin A=\frac{a}{c}$

$\cos A=\frac{b}{c}$

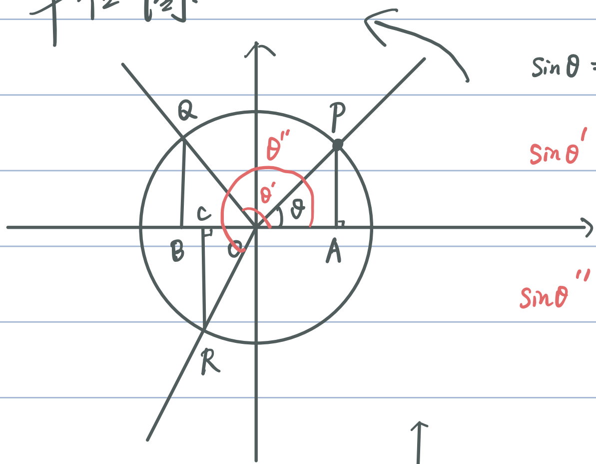
$\tan A=\frac{a}{b}$

$0<A<90^\circ$ $0<B<90^\circ$

$\sin(x)$ $\quad$ $0 < \hat{A} < 180^\circ$

$\sin 100^\circ$ $\quad$ $100^\circ = 90^\circ + 10^\circ$

单位圆.



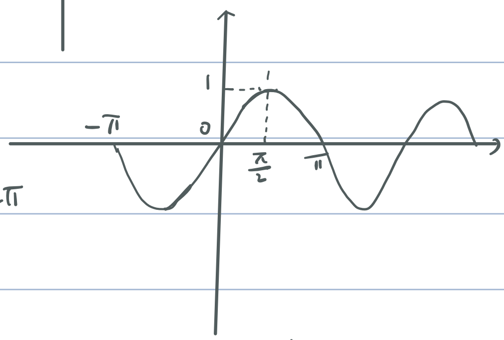
$\sin\theta = \dfrac{AP}{OP} = AP$

$\sin\theta' = BQ$

$\sin\theta'' = -CR$

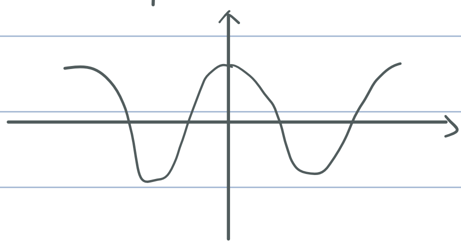
$\sin(x)$

奇. $T = 2\pi$



$\cos(x)$

偶. $T = 2\pi$

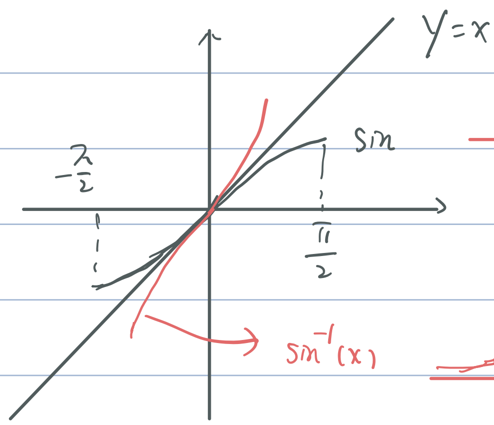


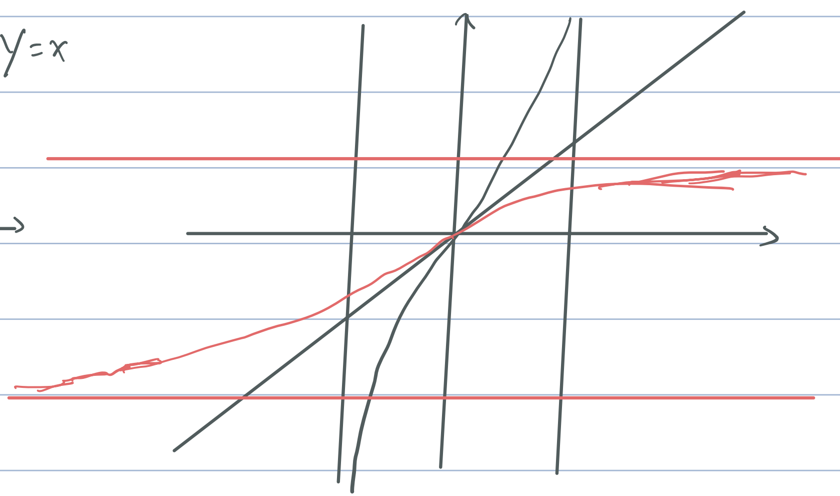
$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ 奇 $\quad$ domain: $\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$\sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$

$\cos^{-1}(x) = \arccos(x)$

$\tan^{-1}(x) = \sec(x)$





$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

15. $f(x) = 1-3^x$ 关于 y 轴的镜像.

$f(-x) = 1-3^{-x}$ (A)

$$f(x) \to \begin{cases} f(|x|) \\ |f(x)| \\ f(-x) \\ -f(x) \end{cases}$$

17. $f(x) = 2x^3 + x - 5$

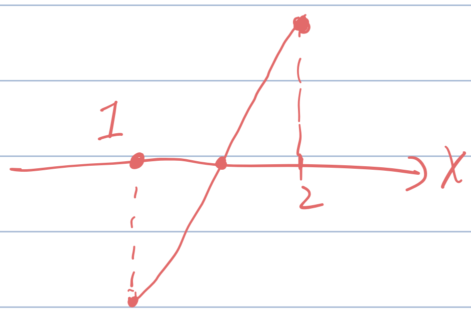
$f(-1) = -2-1-5 = -8 < 0$

$f(0) = -5 < 0$

$f(1) = -2 < 0$

$f(2) = 16+2-5 = 13 > 0$

$f(3) > 0$.



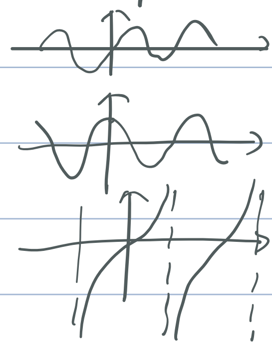
18. $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$

$f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$. $\omega = \frac{2\pi}{3}$. $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$

4. $g(x) = 2$ 常值函数 $g(f(x)) = 2$.

三角函数

名称	周期	奇偶性	domain	range	graph
$\sin(x)$	2π	奇	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	
$\cos(x)$	2π	偶	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	
$\tan(x)$	π	奇	$\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	



$A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$

$A\cos(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$

$A\tan(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $\frac{\pi}{\omega}$.

Eg: $f(x)=3-\sin\frac{\pi x}{3}$

(a) 周期为 $2\pi\div\frac{\pi}{3}=6$.

(b) $f_{max}=4$. $f_{min}=2$.

x 取何值时 f 取最大值？

$\sin\frac{\pi x}{3}=-1 \Rightarrow \frac{\pi x}{3}=\frac{-\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow x=-\frac{3}{2}+6k.$

指对数函数

指数函数. 形如 a^x $(a>0, a\neq1)$ 的函数

$a^0=1$, $a^1=a$. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ $a^m\div a^n=a^{m-n}$

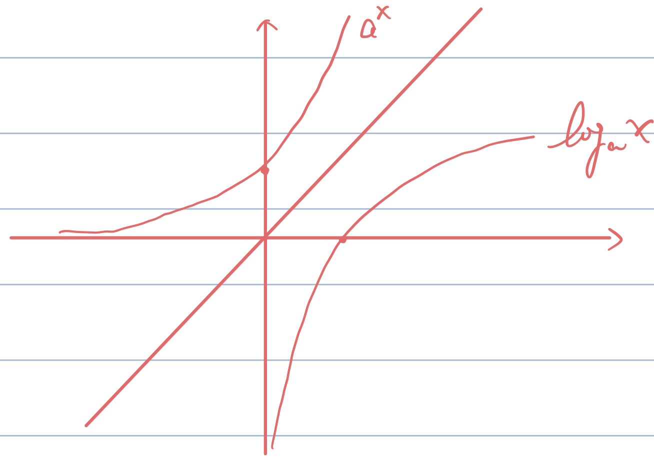
$(a^m)^n=a^{mn}$ $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$

e^x e 称为自然对数的底数. $(e^x)'=e^x$

对数函数. 形如 $y=\log_a x$ 的函数称为对数函数.

$y=a^x \xrightarrow{\text{交换}x,y} x=a^y \longrightarrow y=\log_a x$

故 $y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 互为反函数 其图像关于 $y=x$ 对称.



对数函数的运算规则：

① $\log_a 1 = 0$ $\qquad a^0=1$

② $\log_a a = 1$

③ $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$ $\longrightarrow$ $\log_a m = p.\quad \log_a n = q$

$\Leftrightarrow a^p = m.\quad a^q = n$

$\Rightarrow a^p \cdot a^q = mn$

$\Rightarrow a^{p+q} = mn$

$\Leftrightarrow p+q = \log_a mn$

$\Leftrightarrow \log_a m + \log_a n = \log_a mn$

④ $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

⑤ $\log_a x^n = n\log_a x$

特别地. $\log_e x = \ln x$ 自然对数. $\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

Parametrically Defined Functions.

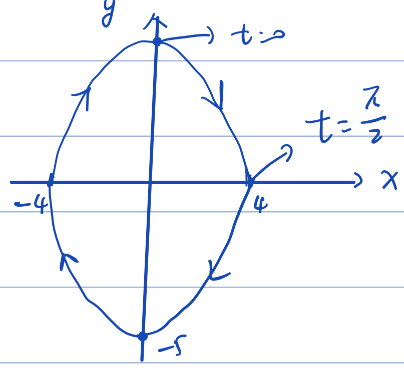
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

t: parameter 参数

$x.y$ 坐标.

Eg: $\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 5\cos t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$ 就是轨迹方程（椭圆）



长轴 $= 2\times 5 = 10$

短轴 $= 2\times 4 = 8$

$t=0.$ $(x,y) = (0,5)$

$t=\frac{\pi}{2}$ $(x,y) = (4,0)$

Eg: $\begin{cases} x = 1-t \\ y = \sqrt{t} \geq 0 \end{cases}$

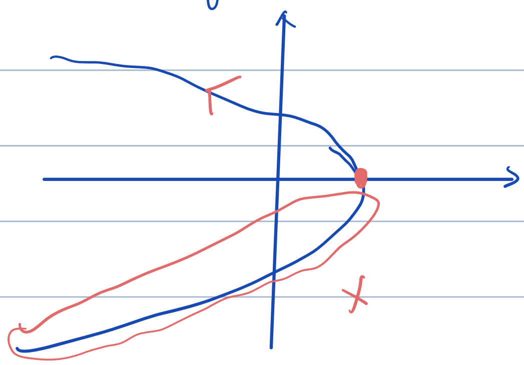
消去 t. $y^2 = t = 1-x$

$x = 1-y^2$ $-y$ 代 y. (x,y) $(x,-y)$

$y \to +\infty, -\infty$ $x \to -\infty$

$x=1.$ $y=0$

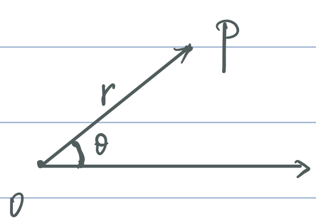
$t=0$ $(x,y) = (1,0)$



整个抛物线就是轨迹吗？

Polar Functions.

Polar Coordinate 极坐标



θ: 极角. r: 极径

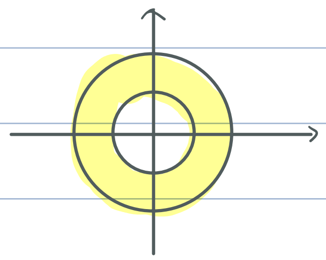
P点的位置可以由 θ 和 r 唯一确定.

将 (θ, r) 标作 P 点的极坐标

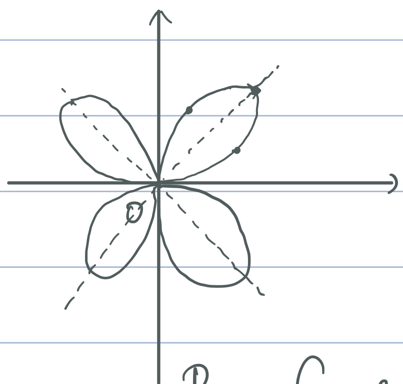
Eg: $r=1$ 表示以 O 为圆心, 以 1 为半径的圆

$r=1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 表示第一象限中的单位圆.

$1 \le r \le 2$ 表示半径为 1 和 2 的圆所包围的环形区域



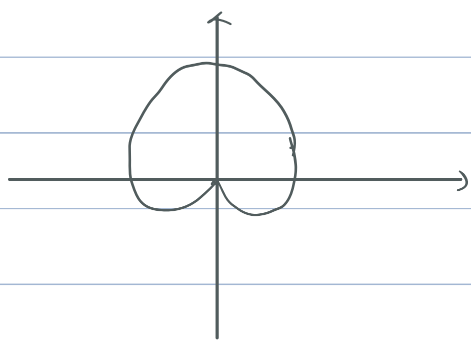
$r = 4\sin(2\theta)$



θ	r
0	0
$\frac{\pi}{8}$	$4\sin(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$4 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 4 \times 1 = 4$ (max)
$\frac{3\pi}{8}$	$2\sqrt{2}$

Rose Curve

笛卡尔心形线 $r = 2(1+\sin\theta)$



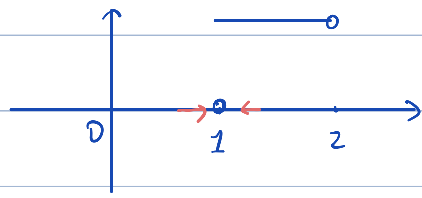
Chapter 2. Limits and Continuity

Def: (left-hand limit) 当 x 从 c 的左侧趋近于 c 时, $f(x)$ 的值趋近于(或等于) L, 则称 $f(x)$ 在 c 处的左极限存在, 且等于 L. 记作 $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L$

(right-hand limit) 类似定义. $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$

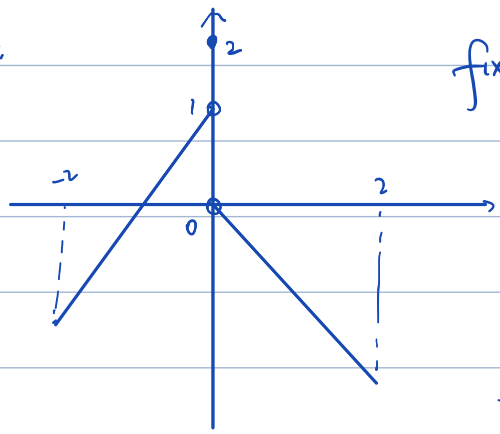
(limit) 如果 $f(x)$ 在 c 处的左右极限都存在且相等(值为 L) 则称 $f(x)$ 在 c 处的极限存在. 记作 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$.

Eg: $f(x) = [x]$



$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$.

Eg:



$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -2 \le x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ -x, & 0 < x \le 2 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

Def: 当 x 趋近于 c 时, $f(x)$ 的值可以任意大(小), 则称 $f(x)$ 在 c 处趋向于正无穷(负无穷). 记作

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ $\quad \left(\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty\right)$

注意：这里尽管用了极限符号 lim，但不能说极限存在。

Eg. $f(x)=\frac{1}{x}$

$x\to 0+$，$f(x)\to +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$

$x\to 0-$，$f(x)\to -\infty$. $\qquad \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\infty$

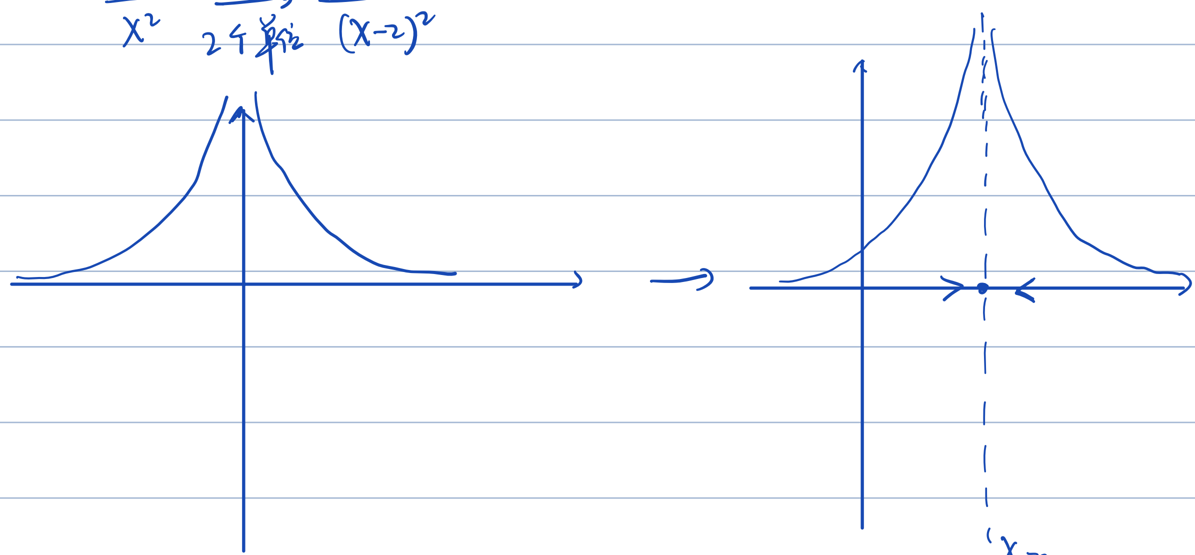
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ 不存在.

Eg: $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$

$x\to 2-$ $\quad x-2\to 0-$ $\quad (x-2)^2\to 0+$ $\quad \frac{1}{(x-2)^2}\to +\infty$

$x\to 2+$ $\quad x-2\to 0+$ $\quad (x-2)^2\to 0+$ $\quad \frac{1}{(x-2)^2}\to +\infty$

$$\frac{1}{x^2}\xrightarrow[\text{2个单位}]{\text{向右移}}\frac{1}{(x-2)^2}$$



$x=2$

$\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to 2+} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$.

Def: 当 x 充分大（小）时，$f(x)$ 趋近于 L，则称当 $x\to+\infty$ $(-\infty)$ 时 $f(x)$ 的极限存在，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = L\right)$$

Eg: $f(x)=\frac{1}{x}$

x 充分大时，$\frac{1}{x}$ 趋近于 0. $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

x 充分小时 $\frac{1}{x}$ 趋近于 0，$\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

x	$\frac{1}{x}$
-10	-0.1
-100	-0.01
-1000	-0.001

$\downarrow$ 0

Eg: $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=1.$

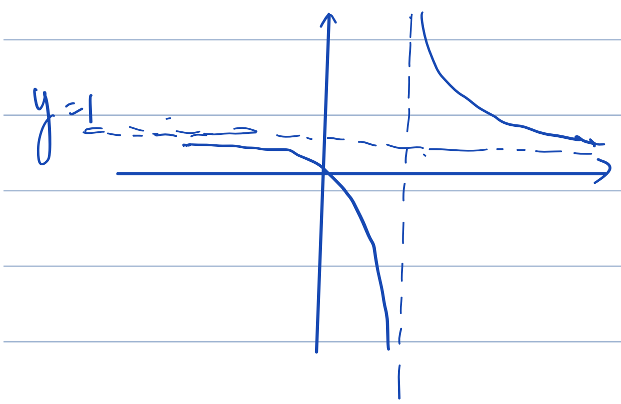
$=\frac{x-2+3}{x-2}$

$=1+\frac{3}{x-2}$

$x\to+\infty.\quad x-2\to+\infty.\quad \frac{3}{x-2}\to 0.\quad 1+\frac{3}{x-2}\to 1$

$x-2\to-\infty \quad \frac{3}{x-2}\to 0.$

$1+\frac{3}{x-2} \xleftarrow{\text{上}1} \frac{3}{x-2} \xleftarrow{\text{右}2} \frac{3}{x}$



$y=1$ 称作 $f(x)$ 的水平渐近线

多项式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$

$x\to+\infty$ $\begin{cases} x+1 \to +\infty \\ -x+1 \to -\infty \\ x^2-x+2 \to +\infty \\ -x^2+3 \to -\infty \end{cases}$

最高次项的系数 >0 $\quad +\infty$

<0 $\quad -\infty$

$x\to-\infty$ $\begin{cases} x+1 \to -\infty \checkmark \\ -x+1 \to +\infty \\ x^2-x+2 \to +\infty \checkmark \\ -x^2+3 \to -\infty \end{cases}$

最高次项的系数 >0 <0

阶数的奇偶性. 奇 偶

	奇	偶
>0	$-\infty$	$+\infty$
<0	$+\infty$	$-\infty$

渐近线

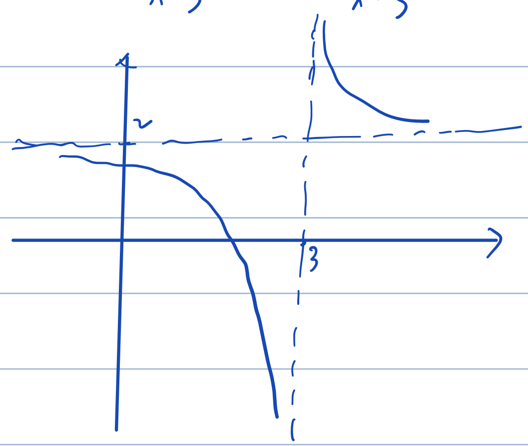
Def: 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ 或者 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ 则称直线 $y = L$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线 (horizontal asymptote)

Def: 如果下列四种情形至少有一个成立:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty & \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty & \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty \end{array}}$$

则称 $x = a$ 为 $f(x)$ 的垂直渐近线 (vertical asymptote)

Eg: $f(x) = \dfrac{2x-4}{x-3} = \dfrac{2x-6+2}{x-3} = 2 + \dfrac{2}{x-3}$ $\qquad \dfrac{2}{x}$



$y = 2$ 水平

$x = 3$ 垂直.

Theorems on Limits.

Let B, D, c, k be real numbers. 若 f 和 g 在 $x = c$ 处的极限都存在且 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = B$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = D$ 则

(1) $\lim\limits_{x\to c} k = k$

x 趋近 c 时 k 的值趋近于(或等于) k

(2) $\lim\limits_{x\to c} k\cdot f(x) = k\lim\limits_{x\to c} f(x) = kB$

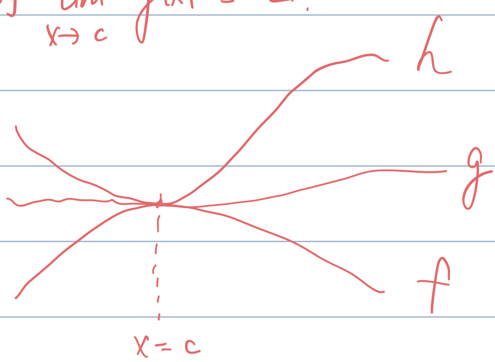
(3) $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x)\pm g(x)\right) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x) = B \pm D$

(4) $\lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to c} g(x) = B\cdot D$

(5) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} = \dfrac{B}{D}$ $(D \neq 0)$

(6) 如果 $g(x)$ 在 c 处的极限存在且 $\lim\limits_{x\to c} g(x) = D$.
$f(x)$ 在 $x=D$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to c} f(g(x)) = f(D)$

(7) (Sandwich Theorem) If $f(x) \le g(x) \le h(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = L$.
则 $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$.



Eg: $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2-3x+1) = \lim\limits_{x\to 2} 5x^2 - \lim\limits_{x\to 2} 3x + \lim\limits_{x\to 2} 1$

$= 5\lim\limits_{x\to 2} x^2 - 3\lim\limits_{x\to 2} x + 1$

$= 5\cdot 4 - 3\cdot 2 + 1 = 15$

Eg: $\lim_{x\to -1} \frac{3x^2-2x-1}{x^2+1} = \frac{\lim_{x\to -1} 3x^2-2x-1}{\lim_{x\to -1} x^2+1} = \frac{3\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)-1}{(-1)^2+1} = \frac{4}{2} = 2$

Eg: $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)}$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x^2-2x+4}{x-2}$$

$$= \frac{\lim_{x\to -2}(x^2-2x+4)}{\lim_{x\to -2}(x-2)} = \frac{(-2)^2-2(-2)+4}{-2-2} = \frac{12}{-4} = -3.$$

Eg: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-9}{x^2-1} \neq \lim_{x\to 1} 1$

多项式商的极限.

$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ 方法: 分子分母除以 x 的最高阶

Eg: $\lim_{x\to\infty} \frac{3-x}{4+x+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}}{\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x}+1} = \frac{0-0}{0+0+1} = 0$

Eg: $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^4+5x+1}{37x^3-9} = \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{\frac{37}{x}-\frac{9}{x^4}} = \frac{4+0+0}{0-0} = \infty$ (极限不存在)

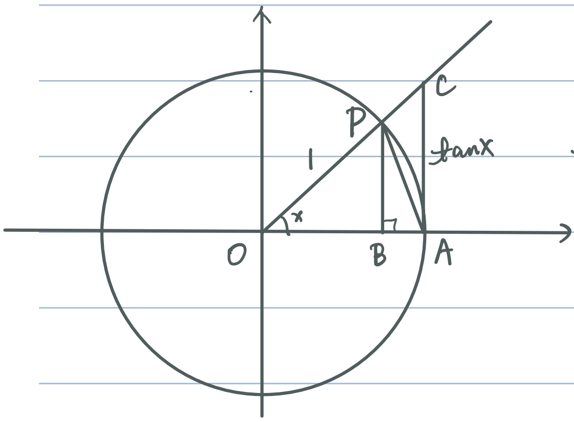
Eg: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4x^2+7}{3-6x-2x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{4}{x}+\frac{7}{x^3}}{\frac{3}{x^3}-\frac{6}{x^2}-2} = \frac{1-0+0}{0-0-2} = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0} = \begin{cases} \infty, & n>m \\ 0, & n<m \end{cases}$$

$$\frac{a_n}{b_n}, \quad n=m$$

两个重要的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \frac{0}{0}$

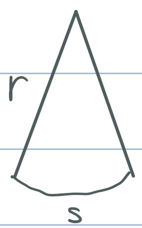


$OP=1. \quad OB=\cos x \quad PB=\sin x$

$S_{\triangle POB}=OB\cdot BP\div 2=\frac{\sin x\cos x}{2}$

$S_{\triangle POA}=\frac{1}{2}\sin x$

$S_{扇形POA}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \overset{\frown}{AP}=\frac{1}{2}x$



$S=\frac{1}{2}\cdot r\cdot s$

$S_{\triangle POA}<S_{扇形POA}$

$\Rightarrow \sin x<x$

$S_{\triangle POB}<S_{\triangle POA}$

$\frac{1}{2}\sin x\cos x<\frac{1}{2}\sin x$

$\cos x<1$

$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\tan x>S_{扇形POA}=\frac{1}{2}x$

$\tan x>x$

$\frac{\sin x}{\cos x}>x$

$\frac{\sin x}{x}>\cos x$

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

$f \qquad g \qquad h$

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1. \qquad \lim\limits_{x\to 0}1=1$

由 Sandwich Theorem 知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Eg: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\overset{t=3x}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

(2) 自然对数的底数 e.

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

函数的连续性.

Def: 若函数 $y=f(x)$ 满足:

(1) $f(c)$ 存在 (换言之, c 在 f 的定义域内)

(2) $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 存在

(3) $\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$

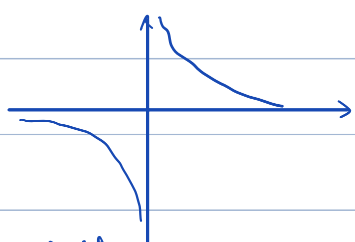
则称 $f(x)$ 在 $x=c$ 处连续.

Def: 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内每一点处都连续,
则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

Eg: $f(x)=\frac{1}{x}$

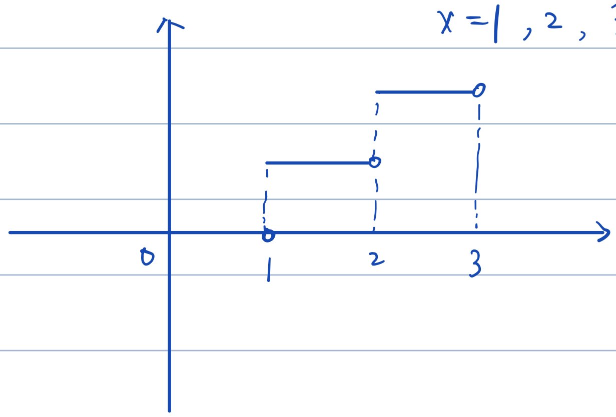
$\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 0\}$

$\frac{1}{x}$ 在其定义域上连续



Eg: $f(x) = [x]$ 定义域: $\mathbb{R}$

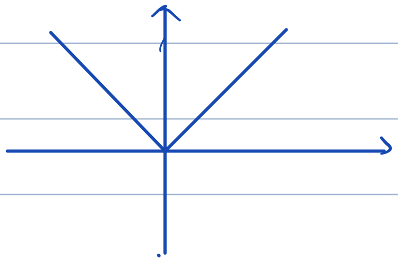
$x = 1, 2, 3$ $x \in \mathbb{Z}$



$f(x)$ 在整点以外的地方都连续

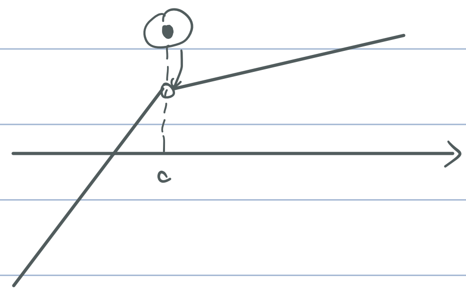
但是在整点处不连续

Eg: $f(x) = |x|$ 定义域: $\mathbb{R}$ $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续



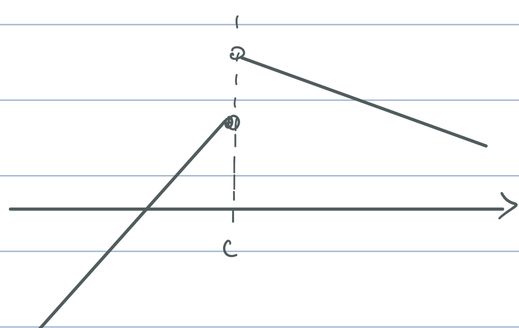
不连续点的分类 (间断点)

(1) 左右极限都存在且相等 $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) \neq f(c)$



可去间断点: 可以重新定义 f 在 $x=c$ 处的值使得 f 在 $x=c$ 处连续

(2) 左右极限都存在但不相等 $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$



跳跃间断点

(3) 左右极限至少有一个不存在 (infinite discontinuity)

连续函数定理

Theorem 1（最值定理）

若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 必能在 $[a,b]$ 上取到最大最小值.

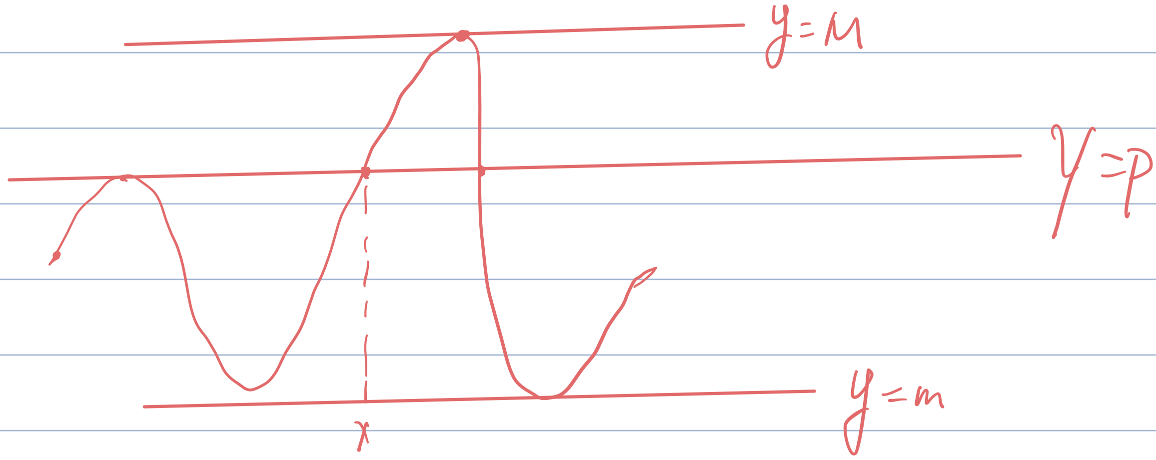
问：能否将 $[a,b]$ 换成 (a,b)？

答：否　例如 $(0,1)$．$f(x)=x$

f 的值域为 $(0,1)$，但是 $(0,1)$ 不存在最大最小值.

Theorem 2（中间值定理）

假设 f 在 $[a,b]$ 上连续，且最大最小值分别为 M, m.
则对于 $\forall\, p \in [m, M]$，都存在 x，使得 $f(x)=p$. 换言之，
f 能够取到最大最小值之间的所有值



$f(x)=p$

Eg：$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x}$　定义域：$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0,\ x \neq -1\}$

$f(x)$ 在定义域内连续.

Theorem：若 f 和 g 都在 $x=c$ 处连续，则下列函数也在 $x=c$ 处连续：

(1) $k\cdot f(x)$

(2) $f\pm g$

(3) $f\cdot g$

(4) $\dfrac{f}{g}$ $(g(c)\neq 0)$

多项式函数 $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

多项式函数之商 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 在 $Q(x)$ 不等于0的地方连续

Eg：$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 在 $x=2$ 处连续吗？

f 的定义域为 $\{x\neq 2\}$. 不连续.

Eg：$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\leq 1 \\ 4 & x>1 \end{cases}$ $x=1$ 处是否连续？

(1) $f(1)$ 存在 $f(1)=1^2+2=3$

(2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+2)=3$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 4=4$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续.

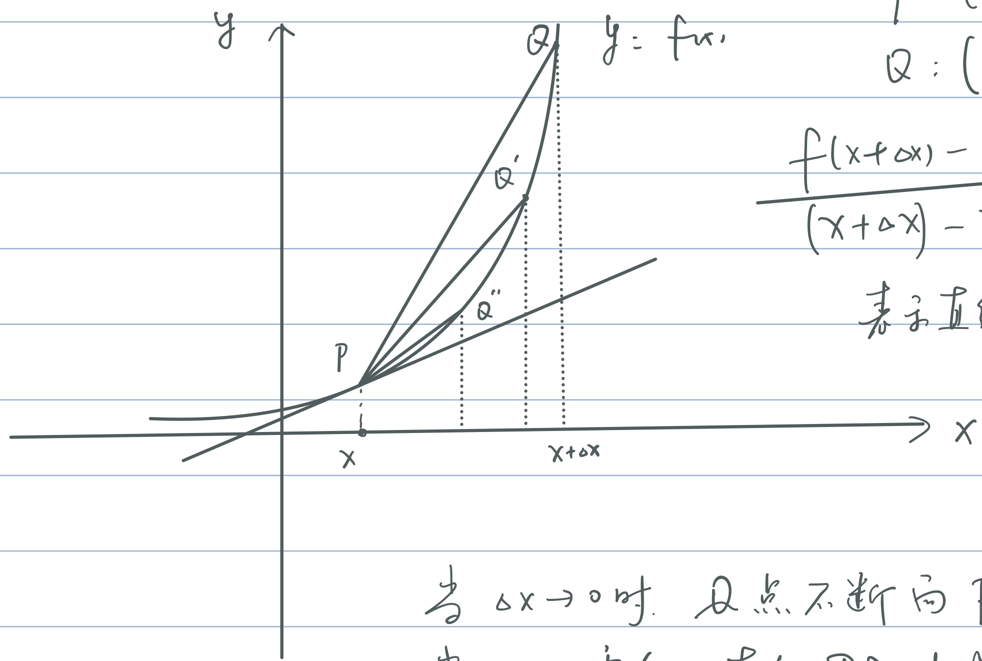
Chapter 3. Differentiation 微分

导数定义：给定函数 $y=f(x)$，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$ 存在.

则称 $y=f(x)$ 在 x 处可导. 并且上面的极限值叫做 f 在 x 处的导数值. 记作 $f'(x)$, $y'(x)$, $\frac{dy}{dx}(x)$

几何解释：



$P: (x, f(x))$

$Q: (x+\Delta x, f(x+\Delta x))$

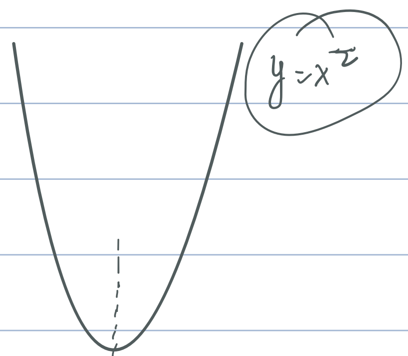
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}=\frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}$$

表示直线 PQ 的斜率.

当 $\Delta x\to 0$ 时. Q 点不断向 P 点靠近.

当 P, Q 重合时. 直线 PQ 叫做 $y=f(x)$ 在 x 处的切线. 上面的极限 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 就是切线的斜率.

切线的斜率越大，说明函数图像越陡.



$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$$

$$= 2x + 0 = 2x$$

当 $x=0$. $y'(0) = 2\times 0 = 0$

当x越来越大. 2x越来越大. 图像越来越陡.

定义: $y=f'(x)$ 的导函数 称作 $y=f(x)$ 的二阶导数. 记作 $f''(x)$ 或者 $y''(x)$
或者 $\frac{d^2y}{dx^2}$

导数公式(需记忆)

① $a' = 0$ (常值函数的导数为0)

② $(kf)' = kf'$ k为常数

③ $(f \pm g)' = f' \pm g'$

④ $(fg)' = f'g + fg'$

⑤ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

基本初等函数的导函数.

$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

$(a^x)' = a^x \ln a.$ $(e^x)' = e^x$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

注 $\sec x$ 叫做正割函数. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

链式法则：给两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，则

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

例：求 $y=e^{x^2+1}$ 的导数

解：构造 $f(u)=e^u$ 和 $g(x)=x^2+1$，则

$$f\circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2+1) = e^{x^2+1}$$

$$f'(u)=e^u,\quad g'(x)=2x$$

$$y' = f'(g(x))\cdot g'(x) = e^{g(x)}\cdot 2x = e^{x^2+1}\cdot 2x$$

例：求 $(x^3+1)^{10}$ 的导函数

$$f(u)=u^{10},\quad g(x)=x^3+1$$

$$f\circ g(x) = (x^3+1)^{10}$$

$$f'(u)=10u^9,\quad g'(x)=3x^2$$

$$\left[(x^3+1)^{10}\right]' = f'(g(x))\cdot g'(x) = 10(x^3+1)^9\cdot 3x^2 = 30x^2(x^3+1)^9$$

例：$\cos^3 2x$

$$f(u)=u^3 \qquad g(x)=\cos 2x \qquad f\circ g(x) = \cos^3 2x$$

$$f'(u)=3u^2 \qquad g'(x) = -2\sin 2x$$

$$(\cos^3 2x)' = f'(g(x))\cdot g'(x) = 3\cos^2 2x\cdot(-2)\sin 2x = -6\cos^2 2x\,\sin 2x$$

例：$f(x)=e^{2x}\sin 3x$. 求 $f'(0)$

$$f'(x) = (e^{2x})'\sin 3x + e^{2x}(\sin 3x)'$$

$$= 2e^{2x}\sin 3x + e^{2x}\cdot 3\cos 3x = e^{2x}(2\sin 3x + 3\cos 3x)$$

$$f'(0) = 3$$

定理：若 f 在 $x=c$ 处可导，则 f 在 $x=c$ 处连续。但反之不成立。

证明：若 f 在 $x=c$ 处可导，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=\alpha$$

由极限的定义知对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|\Delta x|<\delta$ 时，

$$\alpha-\varepsilon<\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}<\alpha+\varepsilon$$

若 $\Delta x>0$

$$(\alpha-\varepsilon)\Delta x<f(c+\Delta x)-f(c)<(\alpha+\varepsilon)\Delta x$$

令 $\Delta x\to 0$，$(\alpha-\varepsilon)\Delta x\to 0$　$(\alpha+\varepsilon)\Delta x\to 0$

$$\Rightarrow f(c+\Delta x)-f(c)\to 0.$$

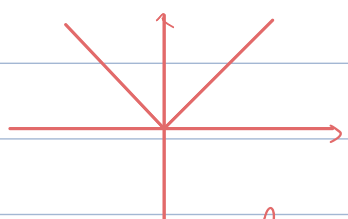
$$\Rightarrow f(c+\Delta x)\to f(c)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to c+}f(x)=f(c)\qquad (*)$$

若 $\Delta x<0$，同理可得 $\lim_{x\to c-}f(x)=f(c)$　$(**)$

结合 $(*)$ $(**)$ 说明 f 在 $x=c$ 处连续。

连续但不可导的例子：$f(x)=|x|$



$f(x)$ 连续

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导吗？ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}$ 存在吗？

不可导　　不存在

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$$

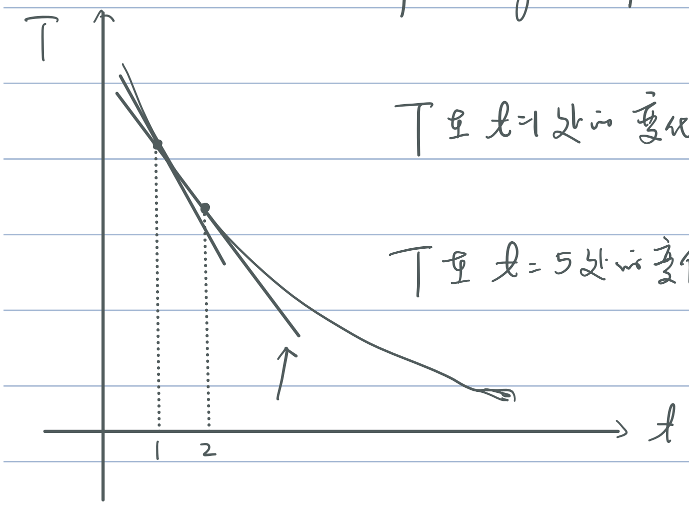
估计导数值. 数值方法

Example 22.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
T	98	94.95	93.06	91.9	91.17	90.73	90.45	90.28	90.17

表格表示北极熊的体温随时间的变化情况.

t = minutes. T = degrees Fahrenheit 华氏温度



T 在 $t=1$ 处的变化率 $\approx \dfrac{T(2)-T(1)}{2-1} = \dfrac{93.06-94.95}{1} = -1.89^\circ/\text{min}.$

T 在 $t=5$ 处的变化率 $\approx \dfrac{T(6)-T(5)}{6-5}$

思想: 用割线替代切线

对称差商: $f'(a) \approx \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

$$= \frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{2h}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f(a)-f(a-h)}{h}\right]$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \approx f'(a) \qquad \frac{f(a)-f(a-h)}{h} \approx f'(a)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a)-f(a-h)}{h} \overset{t=-h}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(a)-f(a+t)}{-t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a)$$

Derivatives of Parametrically Defined Functions.

$x = x(t)$. $y = y(t)$ $\Rightarrow$ 可求 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$

求 y 关于 x 的导数.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

Eg: $x = 2\sin\theta$. $y = \cos 2\theta$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-2\sin 2\theta}{2\cos\theta} = \frac{-2\cdot 2\sin\theta\cos\theta}{2\cos\theta} = -2\sin\theta$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{d}{d\theta}(-2\sin\theta)}{2\cos\theta} = \frac{-2\cos\theta}{2\cos\theta} = -1$$

求当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时曲线的切线方程. (点斜式)

点: 当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时 $x = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$, $y = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\quad (1, \frac{1}{2})$

斜率: $\frac{dy}{dx} = -2\sin\frac{\pi}{6} = -1$.

故切线方程为 $y - \frac{1}{2} = -1\cdot(x-1)$, 即 $y = -x + \frac{3}{2}$

直线的表示方法：

① 点斜式 (x_0, y_0). k.　　$y - y_0 = k(x - x_0)$

② 两点式 (x_1, y_1). (x_2, y_2)　　$\dfrac{y - y_2}{x - x_2} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

③ 斜截式：k. b.　　$y = kx + b$

④ 一般式：$Ax + By + C = 0$

Implicit Functions and Implicit Differentiation.

$\begin{cases} \text{Implicit 隐} & x^2 + y^2 = 1 \\ \text{Explicit 显} & y = x^2 + x \end{cases}$

如何对隐函数求导？在方程两边同时对 x 求导，得到关于 x, y, y' 的方程，再根据此方程求解 y'.

Eg: $x^2 + y^2 = 1$

在方程两边同时对 x 求导，得

$2x + 2y \cdot y' = 0$

变形得 $y' = -\dfrac{x}{y}$

Eg: $x \sin y = \cos(x+y)$.

$(x \sin y)' = x' \sin y + x (\sin y)'$

$= \sin y + x \cos y \cdot y'$

$\left(\cos(x+y)\right)' = -\sin(x+y) \cdot (x+y)'$

$= -\sin(x+y) \cdot (x' + y')$

$= -\sin(x+y) \cdot (1 + y')$

$\sin y + x \cos y \cdot y' = -\sin(x+y)(1+y')$

$[x \cos y + \sin(x+y)]\, y' = -\sin y - \sin(x+y)$

$$y' = \frac{-\sin y - \sin(x+y)}{x\cos y + \sin(x+y)}.$$

Eg：用隐函数求导的方法验证 $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \sin^{-1}x = \arcsin x$. 定义域：$[-1,1]$、值域：$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$x = \sin y$

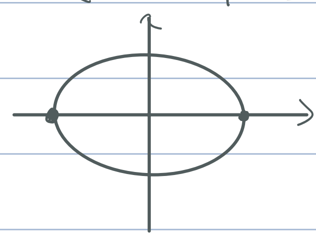
$x' = (\sin y)'$

$1 = \cos y \cdot y'$

$y' = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 验证完毕

Eg: 曲线 $4x^2+9y^2=36$ 在哪些点处的切线是垂直的？

$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ (椭圆)

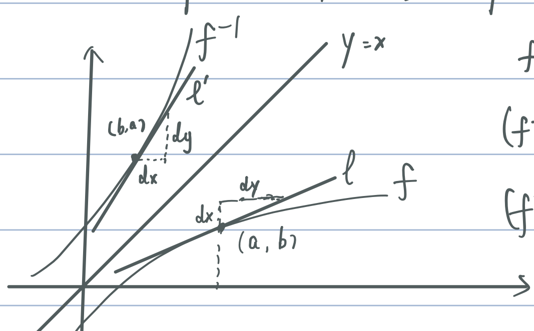


$(4x^2)' + (9y^2)' = 36'$

$8x + 18y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{4x}{9y}$

切线垂直 $\Leftrightarrow$ y' 不存在(无意义) $\Leftrightarrow$ $y = 0$

Derivative of the inverse of a function (反函数的导数)



$f'(a) = k_l = \dfrac{dx}{dy}$

$(f^{-1})'(b) = k_{l'} = \dfrac{dy}{dx}$

$(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

$a = f^{-1}(b)$ $b = f(a)$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

反函数 f^{-1} 在x处的导数值等于函数 f 在 $f^{-1}(x)$ 处的导数值的倒数

Eg: $f(3)=8$、$f'(3)=5$. 关于 f^{-1} 我们知道什么?

f^{-1} 在8处的导数 = f 在3处的导数的倒数 $= \frac{1}{5}$

$$(f^{-1})'(8) = \frac{1}{5}$$

$$f^{-1}(x) \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} x$$

$f'(f^{-1}(x))$ 和 $(f^{-1})'(x)$ 互为倒数

Ex:

x	$f(x)$	$f'(x)$
2	6	$\frac{1}{3}$
6	8	$\frac{3}{2}$

设 g 为 f 的反函数. 求 $g'(6) = \cancel{\frac{1}{3}}$. 3.

$$2 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} 6$$

$f'(2)$ 和 $g'(6)$ 互为倒数 $\Rightarrow g'(6) = 3$

$$6 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} 8$$

$f'(6)$ 和 $g'(8)$ 互为倒数. $\Rightarrow g'(8) = \frac{2}{3}$

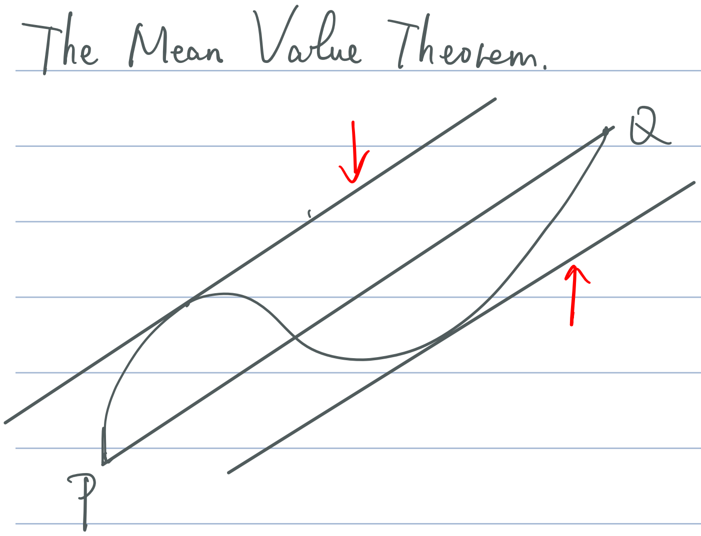
Ex. $y=f(x)=x^3+x-2$，g为f的反函数，求 $g'(0)$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "f"] & 0 \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

$f'(1)$和$g'(0)$互为倒数

$f'(x)=(x^3+x-2)'=3x^2+1.$ $f'(1)=3\cdot 1^2+1=4.$ $g'(0)=\frac{1}{4}$

The Mean Value Theorem.

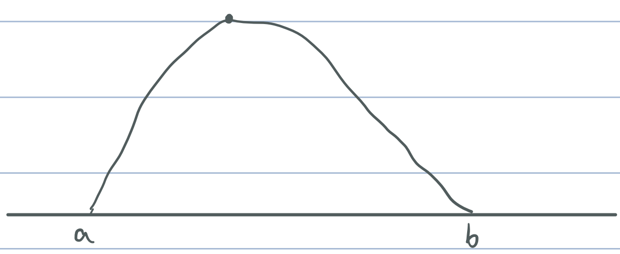


是否一定存在某点，使得该点处的切线与PQ平行？

定理：假设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导，则至少存在一个点 $c\in(a,b)$，使得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Rolle定理：在上一定理的条件下，假设$f(a)=f(b)$，则至少存在一个 $c\in(a,b)$ 使得 $f'(c)=0$.



Indeterminate Forms and L'Hospital's Rule.

待定式：$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，0^0，1^∞，∞^0

洛必达法则

(a) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. 且 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

(b) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. 则 (a) 中结论仍适用.

(c) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

(d) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$，则 (c) 中结论仍适用.

Eg: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 3} x^2-9 = 0$. $\lim\limits_{x\to 3} x-3 = 0$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)'}{(x-3)'} = \lim_{x\to 3}\frac{2x}{1} = 6.$$

由洛必达法则知 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = 6$.

法二：$\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x+3) = 3+3 = 6$

Eg: 请问可以用洛必达求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 吗？

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$

似乎可以. 但实际不行. 在推导过程中用了

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \qquad x+\Delta x - x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2} \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \cos x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \quad (令\ t = \frac{\Delta x}{2})$$

$\frac{\Delta x}{2} \to 0$

$$= \cos x \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}$$

$x + \frac{\Delta x}{2} \to 0 + x = x$

1

$$= \cos x$$

逻辑错误. 在计算 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ 而过程中用了 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

这当然不行 所以不能用洛必达法则求 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Eg: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-4x^2+7}{3-6x-2x^3} \qquad \frac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-8x}{-6-6x^2} \qquad \frac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x-8}{-12x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6-\frac{8}{x}}{-12} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$

Eg: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$ $x\to\infty$. $\ln x\to+\infty$. $\frac{\infty}{\infty}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. 故 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

Eg: $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$ $\infty\cdot 0$ 型.

∞ 0

$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=\cos 0=1$

法二：变量替换. 令 $t=\frac{1}{x}$, 当 $x\to\infty$ 时. $t\to 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\sin t=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$