

Методы решения избранных задач вычислительной физики

Панферова Вера Михайловна

2024

Содержание

1	Системы ОДУ	3
1.1	Задача Коши для систем ОДУ	3
1.1.1	Схема Эйлера	3
1.1.2	Явные методы Рунге-Кутты	4
1.1.3	Движение тела, брошенного под углом к горизонту	5
1.2	Жесткие системы ОДУ	6
1.2.1	Неявные методы Рунге-Кутты	6
1.2.2	Методы типа Розенброка	7
1.2.3	Модель химических реакций Робертсона .	10
2	Уравнения в частных производных	11
2.1	УЧП параболического типа	12
2.1.1	Разностные схемы	12
2.1.2	Метод прогонки	14
2.1.3	Уравнение теплопроводности	16
2.2	УЧП гиперболического типа	17
2.2.1	Разностные схемы	17
2.2.2	Распространение акустической волны в однородной среде	18
2.3	УЧП эллиптического типа	21
2.3.1	Разностная схема «крест»	21
2.3.2	Итерационные методы	22
2.3.3	Уравнение Лапласа	23

1 Системы ОДУ

1.1 Задача Коши для систем ОДУ

Задача Коши для ОДУ первого порядка формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Как известно, к такой форме можно привести обыкновенные уравнения порядка выше первого.

1.1.1 Схема Эйлера

Существует множество способов аппроксимировать значение производной функции в точке значениями функции в соседних узлах. Для этого достаточно учесть, что

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

Для перехода от непрерывного уравнения к сеточной аппроксимации, необходимо ввести сетку по переменной x с шагом h , на которой будем определять значения функции y . Пусть $x_n = nh$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда можно получить следующие способы аппроксимации дифференциального уравнения в задаче Коши разностными схемами:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n) \quad - \text{явная схема Эйлера}; \quad (1)$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad - \text{неявная схема Эйлера}; \quad (2)$$

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = f(x_n, y_n) \text{ — схема Эйлера с центральной точкой.} \quad (3)$$

Наиболее удобной из представленных схем является явная схема, потому что вычисления значений в узлах проводятся последовательно. Неявная же схема и схема с центральной точкой на каждом шаге требуют решения системы нелинейных уравнений.

1.1.2 Явные методы Рунге-Кутты

Описанный выше явный метод Эйлера является представителем класса методов, называемых s -стадийными явными методами Рунге-Кутты, где решение в общем случае имеет следующий вид:

$$k_i = f \left(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (4)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i.$$

Если коэффициентам метода присвоить следующие значения $a_{11} = 0, c_1 = 0, b_1 = 1$ получится явный метод Эйлера.

Для упрощения выкладок при выборе коэффициентов принято придерживаться необязательного условия Кутты: $c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$. Другие соотношения, накладываемые на коэффициенты для обеспечения определённого порядка аппроксимации, будут описаны в разделе 1.2.1.

1.1.3 Движение тела, брошенного под углом к горизонту

В качестве примера решим задачу о движении тела, брошенного под углом к горизонту. Для этого будем учитывать не только силу тяжести $F_{\text{тяж}} = mg$, но и силу сопротивления воздуха $F_{\text{сопр}} = -k|v|v$. В таком случае данная задача описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{r} = mg - k|v|v, \\ r(0) = (x_0, y_0)^T, \\ \dot{r}(0) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)^T, \end{cases}$$

Однако, в таком виде эту систему нельзя решить описанными выше методами. Тем не менее, если переписать уравнения для вектора $u = (x, y, v_x, v_y)^T$ мы получим систему ОДУ первого порядка, а именно:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (x, y, v_x, v_y)^T = \left(v_x, v_y, -\frac{k}{m} \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, -g - \frac{k}{m} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \right)^T, \\ (x, y, v_x, v_y)^T \Big|_{t=0} = (x_0, y_0, v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)^T. \end{cases}$$

Ноутбук с решением этой задачи явным методом Эйлера доступен по ссылке.

1.2 Жесткие системы ОДУ

Среди ОДУ есть особый класс задач называемых жесткими. Для таких задач свойственно наличие нескольких временных масштабов, когда одни процессы протекают сильно быстрее других. Попытки решить такие задачи явными методами Рунге-Кутты с использованием алгоритмов автоматического выбора шага приводили к следующим трудностям: для учета быстрых компонент выбирался очень маленький шаг, делая вычисления неэффективными и затратными по времени.

1.2.1 Неявные методы Рунге-Кутты

Рассмотрим дифференциальные уравнения следующего вида:

$$y' = f(x, y).$$

Такие уравнения можно решать с помощью неявных методов Рунге-Кутты, которые отличаются от явных тем, что требуют решения нелинейных систем уравнений на каждом шаге интегрирования. Благодаря этому они обеспечивают более высокую устойчивость, что делает их особенно полезными для решения жестких систем. Общий вид неявного s -стадийного метода Рунге-Кутты следующий:

$$\begin{aligned} k_i &= f \left(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, s, \\ y_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i. \end{aligned} \tag{5}$$

Коэффициенты a_{ij}, b_i, c_i определяют устойчивость и порядок аппроксимации метода. Напомним, что в явных методах

Рунге-Кутты матрица коэффициентов a_{ij} обладает следующим свойством $a_{ij} = 0$ при $j \geq i$.

На эти коэффициенты можно наложить следующие условия:

$\sum_{j=1}^s a_{ij} = c_i$ – необязательное условие Кутты, которое позволяет упростить вывод условий на порядок аппроксимации;

$\sum_{i=1}^s b_i = 1$ – необходимое условие первого порядка аппроксимации;

$\sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2}$ – необходимое условие второго порядка аппроксимации;

$\sum_{i=1}^s b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$, $\sum_{i=1}^s b_i \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$ – необходимые условия третьего порядка аппроксимации.

В общем случае для интегрирования системы из n ОДУ на каждом шаге приходится решать ns нелинейных уравнений. Количество вычислений можно сократить, если задать матрицу a_{ij} нижнетреугольной, то есть $a_{ij} = 0$ при $j > i$. Методы, в основе которых лежит этот принцип называются диагонально-неяными.

1.2.2 Методы типа Розенброка

Среди методов, показывающих хорошие результаты при решении жестких задач, наиболее простыми в реализации являются методы типа Розенброка.

Применим диагонально-неявный метод Рунге-Кутты к автономному дифференциальному уравнению следующего вида:

$$y' = f(y);$$

В результате возникнут следующие выражения:

$$k_i = f \left(y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j + h a_{ii} k_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k_i.$$

Для упрощения k_i умножим на h и линеаризуя уравнение для этой величины получим:

$$k_i = h f \left(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right) + h f' \left(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right) a_{ii} k_i.$$

Чтобы сократить количество вычислений, будем считать, что $f' \left(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right) \approx f'(y_0)$. Обозначим эту величину за J . Также опыт показывает, что метод работает лучше, если $a_{ii} k_i$ заменить на линейную комбинацию $\sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j$. Полученные таким образом методы принято называть s -стадийными методами Розенброка. Итоговое выражение для них принимает вид:

$$k_i = h f \left(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right) + h J \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k_i. \tag{6}$$

Уравнение на k_i можно записать следующим образом:

$$(E - hJ\gamma_{ii})k_i = hf \left(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j \right) + hJ \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij}k_j.$$

Тогда становится очевидным, что если выполнено соотношение $\gamma_{11} = \gamma_{22} = \dots = \gamma_{ss} = \gamma$, то работу программы можно ускорить, поскольку в таком случае нужно будет решить несколько СЛАУ отличающихся только векторами правых частей.

Следующие условия на коэффициенты необходимы для обеспечения нужного порядка аппроксимации:

$\sum_{i=1}^s b_i = 1$ – необходимое условие первого порядка аппроксимации;

$\sum_{i=1}^s b_i \sum_{k=1}^s (a_{ik} + \gamma_{ik}) = \frac{1}{2}$ – необходимое условие второго порядка аппроксимации;

$$\sum_{i=1}^s b_i \sum_{k=1}^s a_{ik} \sum_{l=1}^s a_{il} = \frac{1}{3},$$

$\sum_{i=1}^s b_i \sum_{k=1}^s (a_{ik} + \gamma_{ik}) \sum_{l=1}^s (a_{il} + \gamma_{il}) = \frac{1}{6}$ – необходимые условия третьего порядка аппроксимации.

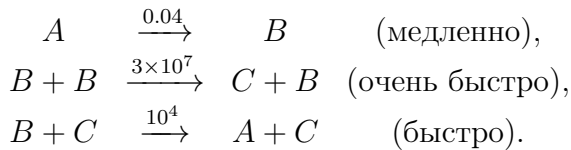
Удивительный результат можно получить, если считать коэффициенты γ_{ij} комплексными. В таком случае для одностадийного метода справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (E - hJ\gamma)k &= hf(y_0). \\ y_1 &= y_0 + h\mathbf{Re}(k). \end{aligned} \tag{7}$$

При выборе параметра $\gamma = (1 \pm i)/2$ схема становится монотонной, L_2 -устойчивой и при этом имеет второй порядок аппроксимации.

1.2.3 Модель химических реакций Робертсона

Примером жесткой системы является модель химических реакций Робертсона, она описывает кинетику химических реакций с тремя компонентами:



Эти реакции приводят к следующей системе уравнений для концентраций y_1, y_2, y_3 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dy_1}{dt} = -0.04y_1 + 10^4 y_2 y_3, & y_1(0) = y_{1,0}, \\ \frac{dy_2}{dt} = 0.04y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3 \times 10^7 y_2^2, & y_2(0) = y_{2,0}, \\ \frac{dy_3}{dt} = 3 \times 10^7 y_2^2, & y_3(0) = y_{3,0}. \end{array} \right.$$

Ноутбук с решением этой задачи одностадийным методом CROS доступен по ссылке.

2 Уравнения в частных производных

Линейное уравнение в частных производных от двух переменных имеет следующий вид:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y)u + G(x, y) = 0$$

Относительно $A(x, y)$, $B(x, y)$ и $C(x, y)$ можно подвести следующую классификацию УЧП:

<i>Тип</i>	<i>Условие</i>	<i>Пример</i>
Параболический	$B^2 - 4AC = 0$	Уравнение диффузии
Гиперболический	$B^2 - 4AC > 0$	Волновое уравнение
Эллиптический	$B^2 - 4AC < 0$	Уравнение Лапласа

Общий вид УЧП случае большего числа переменных:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u + F(x) = 0.$$

Поскольку тип уравнения определяется свойствами матрицы коэффициентов при вторых производных A , классификация обобщается следующим образом:

- Параболический тип: одно из собственных чисел A нулевое, остальные – одного знака;
- Гиперболический тип: собственные числа A принимают как положительные, так и отрицательные значения;
- Эллиптический тип: все собственные числа A одного знака.

2.1 УЧП параболического типа

В этом разделе рассмотрим какими методами можно численно решать уравнение параболического типа с постоянным коэффициентом a :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + f(t, x), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, X],$$

для которого заданы начальные и граничные условия:

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u(t, 0) = \mu_1(t), \quad u(t, X) = \mu_2(t).$$

2.1.1 Разностные схемы

Используя формулы численного дифференцирования по аналогии с 1.1.1 можно построить разностное уравнение, соответствующее исходному.

В простейшем случае при $\tau, h \rightarrow 0$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_0, x=x_0} \approx \frac{u(t_0 + \tau, x_0) - u(t_0, x_0)}{\tau} \approx \frac{u(t_0, x_0) - u(t_0 - \tau, x_0)}{\tau},$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{t=t_0, x=x_0} \approx \frac{u(t_0, x - h) - 2u(t_0, x) + u(t_0, x + h)}{h^2}.$$

Тем самым получаем два способа аппроксимации исходного уравнения разностным:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a \cdot \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} + f_m^n \quad (8)$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} + f_m^n \quad (9)$$

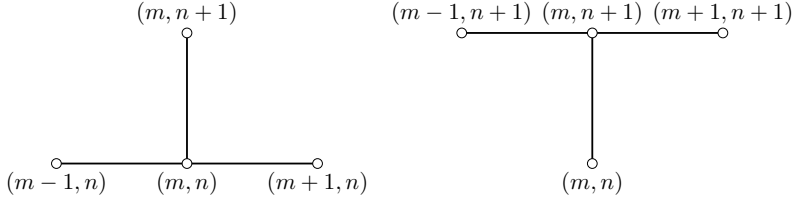


Рис. 1: Шаблоны для разностных схем 8 и 9.

Не забываем про аппроксимацию начальных и граничных условий:

$$u_m^0 = u_0(mh), \quad u_0^n = \mu_1(n\tau), \quad u_M^n = \mu_2(n\tau) \quad (10)$$

Обе схемы имеют порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$.

Проведя несложные преобразования из 8 можно получить:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{a\tau}{h^2}(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \tau f_m^{n+1}.$$

То есть зная решение на предыдущем временном слое, можно отыскать решение на следующем. В силу этого схема 8 называется явной. Данная схема устойчива при значениях параболического числа Куранта $\sigma = \frac{a\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$.

Из уравнения 9 следует:

$$-\frac{a\tau}{h^2}u_{m-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{2a\tau}{h^2}\right)u_m^{n+1} - \frac{a\tau}{h^2}u_{m+1}^{n+1} = u_m^n + \tau f_m^{n+1}.$$

Что при известных u_m^n по сути является системой линейных уравнений относительно вектора $(u_1^{n+1}, \dots, u_{M-1}^{n+1})^T$ с трёхдиагональной матрицей коэффициентов. Такие системы можно решать методом прогонки 2.1.2. Неявная схема устойчива безусловно.

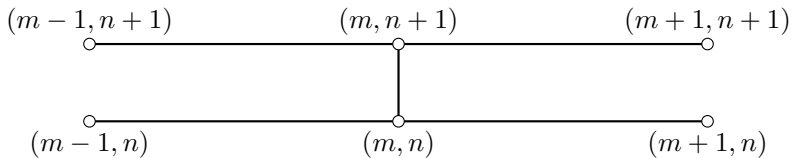


Рис. 2: Шаблон для разностной схемы 11.

Другим примером схемы, часто используемой при решении УЧП параболического типа, служит схема Кранка-Николсона, которая является безусловно устойчивой и имеет порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$. В этом случае разностное уравнение имеет вид:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = f_m^n + \frac{a}{2} \left(\frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} + \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} \right). \quad (11)$$

2.1.2 Метод прогонки

Для разностных уравнений вида

$$a_n x_{n-1} - b_n x_n + c_n x_{n+1} = d_n$$

с учётом граничных условий можно получить следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -b_0 x_0 + c_0 x_1 = d_0, \\ a_n x_{n-1} - b_n x_n + c_n x_{n+1} = d_n, & n = 1, 2, \dots, N-1, \\ a_N x_{N-1} - b_N x_N = d_N, \end{cases}$$

Эта система уравнений задаётся трёхдиагональной матрицей:

$$\begin{pmatrix} -b_0 & c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & -b_1 & c_1 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & -b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_N & -b_N \end{pmatrix}$$

Системы такого вида можно решать эффективней используя метод прогонки. В таком случае решение ищется в форме прогоночного соотношения:

$$x_{n-1} = P_n x_n + Q_n, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

где P_n и Q_n — прогоночные коэффициенты.

Алгоритм начинается с прямой прогонки, значения P_1 и Q_1 определяются из левого граничного условия: $P_1 = \frac{c_0}{b_0}$, $Q_1 = -\frac{d_0}{b_0}$. А затем из них по рекуррентным формулам вычисляются значения прогоночных коэффициентов вплоть до P_N и Q_N :

$$P_{n+1} = \frac{c_n}{b_n - a_n P_n}, \quad Q_{n+1} = \frac{a_n Q_n - d_n}{b_n - a_n P_n}.$$

После следует процесс обратной прогонки. Для этого из правого граничного условия и прогоночного соотношения находится x_N :

$$x_N = \frac{a_N Q_N - d_N}{b_N - a_N P_N},$$

и потом по прогоночному соотношению вычисляются остальные значения x_n :

$$x_{n-1} = P_n x_n + Q_n, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

2.1.3 Уравнение теплопроводности

В отсутствии источников и стоков тепла уравнение теплопроводности для тонкого стержня имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

Для решения этого уравнения необходимо задать начальные и граничные условия:

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u(t, 0) = \mu_1(t), \quad u(t, X) = \mu_2(t).$$

Решим уравнение используя схему Кранка-Николсона и метод прогонки. Для этого придется для $n = 1, 2, \dots, N - 1$ решать систему линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} u_0^{n+1} = \mu_{1,n+1}, \\ -ru_{m-1}^{n+1} + (1 + 2r)u_m^{n+1} - ru_{m+1}^{n+1} = ru_{m-1}^n + (1 - 2r)u_m^n + ru_{m+1}^n, \\ u_{M-1}^{n+1} = \mu_{2,n+1}, \end{cases}$$

где $r = \frac{\alpha\tau}{2h^2}$ – число Куранта.

Ноутбук с решением этой задачи с применением метода прогонки доступен по ссылке.

2.2 УЧП гиперболического типа

2.2.1 Разностные схемы

Одним из примеров УЧП гиперболического типа является линейное однородное уравнение переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, X].$$

Добавим начальные и граничные условия:

$$u(0, x) = g(x), \quad u(t, 0) = f_1(t), \quad u(t, X) = f_2(t).$$

Аппроксимировать это уравнение можно используя схемы «явный левый уголок» и «явный правый уголок»:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + c \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + c \frac{y_{m+1}^n - y_m^n}{h} = 0. \quad (13)$$

Обе схемы имеют порядок аппроксимации $O(\tau + h)$.

Запишем разложение в ряд Тейлора:

$$u(t + \tau, x) \approx u(t, x) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} \tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x).$$

Из исходного уравнения следует:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Подставляя это в разложение Тейлора получим:

$$u(t + \tau, x) \approx u(t, x) - c\tau \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} (c\tau)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x).$$

Для производных по координате используем формулы численного дифференцирования второго порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \approx \frac{u(t, x + h) - u(t, x - h)}{h},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \approx \frac{u(t, x - h) - 2u(t, x) + u(t, x + h)}{h^2}.$$

В результате получаем схему Лакса-Вендроффа:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{c\tau}{2h} (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) \quad (14)$$

По построению понятно, что схема имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$.

2.2.2 Распространение акустической волны в однородной среде

Часто задачи на распространение волн удобно формулировать в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка. Так распространение одномерной акустической волны в однородной среде описывается следующей системой:

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, X],$$

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ \rho c^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

здесь u – скорость частиц среды, p – давление, ρ – плотность и c – скорость звука.

В таком случае аппроксимация по схеме Лакса-Вендроффа имеет вид:

$$\mathbf{s}_m^{n+1} = \mathbf{s}_m^n - \frac{\tau}{2h} \mathbf{A} (\mathbf{s}_{m+1}^n - \mathbf{s}_{m-1}^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \mathbf{A}^2 (\mathbf{s}_{m+1}^n - 2\mathbf{s}_m^n + \mathbf{s}_{m-1}^n) \quad (15)$$

Покомпонентно с учетом $r = \frac{c\tau}{h}$ получаем:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{r}{2c\rho} (p_{m+1}^n - p_{m-1}^n) + \frac{1}{2}r^2 (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n), \quad (16)$$

$$p_m^{n+1} = p_m^n - \frac{\rho cr}{2} (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{1}{2}r^2 (p_{m+1}^n - 2p_m^n + p_{m-1}^n). \quad (17)$$

Решим эту систему при нулевых начальных условиях и граничных условиях следующего вида:

$$u(0, t) = f(t) = f_0 t(1-t)^n \quad \text{где} \quad f_0 = (1+n) \left(\frac{1+n}{n} \right)^n, \quad n = 10,$$

$$u(X, t) = g(t) = 0.$$

Разностная аппроксимаций таких граничных условий следующая:

$$u_0^{k+1} = f(t_{k+1}), \quad u_N^{k+1} = 0.$$

Однако для решения задачи нужно получить аппроксимацию второго порядка для граничных условий на давление. Воспользуемся для этого методом фиктивных областей. Вводится фиктивный слой с координатами (x_{-1}, t_k) . Тогда справедливо следующее соотношение:

$$p_0^{k+1} = p_0^k - \frac{rc\rho}{2} (u_1^k - u_{-1}^k) + \frac{1}{2}r^2 (p_1^k - 2p_0^k + p_{-1}^k)$$

Для исключения фиктивных значений u_{-1}^k и p_{-1}^k используется приближение:

$$0.5 (u_1^k + u_{-1}^k) = u_0^k = f(t_k)$$

Тогда из уравнения 15 следует:

$$\frac{r}{2\rho c} (p_1^k - p_{-1}^k) = u_0^k - u_0^{k-1} = f(t_k) - f(t_{k+1})$$

В результате получаем формулу для граничного условия:

$$p_0^{k+1} = p_0^k - \rho c \cdot r (u_1^k - f(t_{k+1})) + r^2 (p_1^k - p_0^k)$$

Аналогично можно получить выражение для правой границы:

$$p_N^{k+1} = p_N^k - \rho c \cdot r (g(t_{k+1}) - u_{N-1}^k) + r^2 (p_{N-1}^k - p_N^k)$$

В случае, когда на границе задано давление, аналогичная процедура применяется для определения скорости в граничной точке.

Численное решение системы доступно по ссылке.

2.3 УЧП эллиптического типа

Рассмотрим уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f_1(x), & u(x, 1) &= f_2(x), \\ u(0, y) &= g_1(y), & u(1, y) &= g_2(y). \end{aligned}$$

2.3.1 Разностная схема «крест»

Если для уравнения Пуассона приблизить производные формулами второго порядка аппроксимации, получится следующее выражение:

$$\frac{u_{m-1,l} - 2u_{m,l} + u_{m+1,l}}{h^2} + \frac{u_{m,l-1} - 2u_{m,l} + u_{m,l+1}}{h^2} = f_{m,l} \quad (18)$$

Из него можно получить выражение для значения в центральной точке «креста»:

$$u_{m,l} = \frac{1}{4} (u_{m+1,l} + u_{m-1,l} + u_{m,l+1} + u_{m,l-1} - h^2 f(x_i, y_j)) \quad (19)$$

Такой вид записи уравнения называется каноническим. По построению схема обладает порядком аппроксимации $O(h^2)$.

Для подобной разностой задачи справедлив сеточный принцип максимума, а именно: каждое решение разностного уравнения Лапласа 18 достигает своего минимального и максимального значения на границе сеточной области.

В таком случае уравнение Лапласа с нулевыми граничными условиями имеет лишь тривиальное решение. А если система с нулевым вектором правых частей имеет лишь тривиальное решение, то она однозначно разрешима при любой правой части. В таком случае поставленная нами разностная задача однозначно разрешима.

2.3.2 Итерационные методы

Метод простых итераций (МПИ) записывается для системы сеточных уравнений в следующем виде:

$$u_{m,l}^{i+1} = u_{m,l}^i + \tau(\Lambda u_{m,l}^i - f_{m,l}) \quad (20)$$

$$\Lambda u_{m,l}^i = \frac{u_{m-1,l}^i - 2u_{m,l}^i + u_{m+1,l}^i}{h^2} + \frac{u_{m,l-1}^i - 2u_{m,l}^i + u_{m,l+1}^i}{h^2};$$

Правильный выбор параметра τ имеет ключевое значение для сходимости МПИ. Условие сходимости метода требует, чтобы τ удовлетворяло неравенству:

$$0 < \tau < \frac{2}{\lambda_{\max}},$$

где λ_{\max} — максимальное собственное число разностного оператора Лапласа. Оптимальное значение параметра τ можно выбрать исходя из спектральных свойств матрицы Λ . Например, если λ_{\min} и λ_{\max} — минимальное и максимальное собственные числа оператора Λ , то оптимальное значение τ определяется формулой:

$$\tau_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}.$$

При таком выборе параметра достигается наибольшая скорость сходимости.

Для ускорения сходимости МПИ можно на каждой итерации использовать определённое значение параметра τ :

$$u_{m,l}^{i+1} = u_{m,l}^i + \tau_{i+1}(\Lambda u_{m,l}^i - f_{m,l}) \quad (21)$$

Минимизируя норму невязки на i -ой итерации можно получить, что оптимальней всего использовать

$$\tau_j = \left[\frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{2} + \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{2} \cos \left(\frac{\pi(2j-1)}{2k} \right) \right]^{-1}, \quad (22)$$

где $j = 1, 2, \dots, i$. Представленный метод называется двухслойным чебышевским итерационным методом.

Метод верхней релаксации тоже улучшает сходимость по сравнению с МПИ. Формула для метода верхней релаксации:

$$u_{m,l}^{i+1} = (1 - \omega)u_{m,l}^i + \frac{\omega}{4}(u_{m-1,l}^{i+1} + u_{m+1,l}^i + u_{m,l-1}^{i+1} + u_{m,l+1}^i - h^2 f_{m,l}) \quad (23)$$

где ω — параметр релаксации, оптимальное значение которого подбирается эмпирически.

2.3.3 Уравнение Лапласа

Рассмотрим уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

с граничными условиями:

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, 1) = f_2(x),$$

$$u(0, y) = g_1(y), \quad u(1, y) = g_2(y).$$

Численное решение системы методом простых итераций доступно по ссылке.