# 概率论与数理统计 第12次作业

**Name: 宋昊原　　Student ID: 2022010755**

December 5, 2023

## 1 指数分布假设检验

### 1.1 双边检验

设

$$H_0: \ \lambda = \lambda_0$$
$$H_1: \ \lambda \neq \lambda_0$$

规定拒绝域的形状为

$$|\bar{X} - \frac{1}{\lambda_0}| \geq c$$

根据中心极限定理，当$n$很大时，近似地有

$$\frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda_0}}{\frac{1}{\lambda_0\sqrt{n}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

于是，只需取

$$c = \frac{1}{\lambda_0\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

其中$Z_x$表示标准正态的上$x$分位数

故显著性水平为$\alpha$时，如果

$$|\bar{X} - \frac{1}{\lambda_0}| < \frac{1}{\lambda_0\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

则不拒绝$H_0$，否则拒绝之.

### 1.2 单边检验

设

$$H_0: \ \lambda \leq \lambda_0$$
$$H_1: \ \lambda > \lambda_0$$

规定拒绝域的形状为

$$\bar{X} \leq c$$

根据中心极限定理，当$n$很大时，近似地有

$$\frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda_0}}{\frac{1}{\lambda_0\sqrt{n}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

于是，只需取

$$c = \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_0\sqrt{n}} Z_{\alpha}$$

故显著性水平为$\alpha$时，如果

$$\bar{X} \geq \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_0\sqrt{n}} Z_{\alpha}$$

则不拒绝$H_0$.

# 2 均匀分布的假设检验

## 2.1 利用矩估计量

矩估计为

$$\theta = 2\bar{X}$$

故拒绝域应为

$$\bar{X} \geq c$$

根据中心极限定理，当$n$很大时，近似地有

$$\frac{\bar{X} - \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{\sqrt{12n}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

于是

$$c = \frac{\theta_0}{2} + \frac{\theta_0}{\sqrt{12n}} Z_\alpha$$

下面计算其功效

$$1 - \beta(R) = \mathrm{P}_{\theta > \theta_0}(R) = \frac{\theta - \theta_0(\frac{1}{2} + \frac{Z_\alpha}{\sqrt{12n}})}{\theta} = 1 - \frac{\theta_0}{\theta}(\frac{1}{2} + \frac{Z_\alpha}{\sqrt{12n}})$$

## 2.2 利用极大似然估计量

极大似然估计为

$$\theta^* = \max\{X_1, ..., X_n\} =: X_M$$

拒绝域为

$$X_M \geq c$$

且满足

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(X_M \geq c) = \alpha$$

由于$X_M$的CDF为

$$F_n(x) = (\frac{x}{\theta})^n$$

故

$$1 - (\frac{c}{\theta_0})^n = \alpha$$

$$c = \theta_0(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}$$

下面计算其功效

$$1 - \beta(R) = \mathrm{P}_{\theta > \theta_0}(R) = 1 - (\frac{c}{\theta})^n = 1 - (1-\alpha)(\frac{\theta_0}{\theta})^n$$

# 3 高危职业

设该公司雇员病假天数总体为$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$，现构造以下假设检验:

$$H_0: \ \mu = \mu_0$$

$$H_1: \ \mu > \mu_0$$

其中

$$\mu_0 = 5.1$$

$$\mu = 7$$

$$\sigma = 2.5$$

$$n = 49$$

现规定显著性水平

$$\alpha = 0.05$$

拒绝域形式为

$$\bar{X} \geq c$$

由于

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

有

$$c = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_\alpha$$

计算得

$$c = 5.687$$

故在$\alpha = 0.05$的显著性水平下可以拒绝$H_0$，该公司员工比常人更容易生病. 事实上即使显著性水平降至0.01，仍有充分的理由拒绝$H_0$.

# 4 灯泡合格

## 4.1

设寿命总体$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$，$\mu_0 = 1180$，则

$$H_0: \ \mu \geq \mu_0$$

$$H_1: \ \mu < \mu_0$$

设拒绝域形式为

$$\bar{X} \leq c$$

由于

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}(n-1)$$

有

$$c = \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha$$

以$\alpha = 0.05$为显著性水平，计算得

$$c = 1084.9$$

而

$$\bar{X} = 1160$$

故在0.05显著性水平下，不能拒绝$H_0$，灯泡合格.

## 4.2

互换原假设和备择假设，拒绝域形式将变为

$$X \geq c$$

而

$$c = \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha$$

此时

$$c = 1275.1$$

故在0.05显著性水平下，也不能拒绝$H_1$（此时仍用$H_1$表示新的原假设），也不能拒绝灯泡不合格的假设.

这是因为这些灯泡寿命的均值与临界值1180较接近，同时其样本标准差较大，因此两种原假设的拒绝域都很极端，非拒绝域则有很大的重叠，因此两种假设都不能拒绝.

### 4.3

假设选择$\alpha = 0.95$，这实际上与之前得到完全相反的结论，即

$$\bar{X} \leq 1275.1$$

时拒绝$H_0$，

$$\bar{X} \geq 1084.9$$

时拒绝$H_1$.

这导致两种假设实际上都被拒绝.

## 5 元件寿命

$$H_0: \ \mu \leq \mu_0$$

$$H_1: \ \mu > \mu_0$$

拒绝域为

$$\bar{X} \geq c$$

其中

$$c = \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha$$

计算得

$$c = 268.27$$

$$\bar{X} = 241.5$$

故没有理由拒绝$H_0$，即没有充分的理由认为$\mu > 225$.

## 6 Poisson分布大样本检验

当$n$很大时，近似地有

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}(\lambda, \frac{\lambda}{n})$$

于是，拒绝域形式为

$$|\bar{X} - \lambda_0| \geq c$$

其中

$$c = \sqrt{\frac{\lambda_0}{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

## 7 错误比例

### 7.1

原假设为真的情况下第一类错误的比例为

$$\frac{200}{4000} = \frac{1}{20}$$

### 7.2

拒绝了原假设的情况下第一类错误的比例为

$$\frac{200}{700} = \frac{2}{7}$$

显著性水平为0.05并不代表平均每20次拒绝原假设只有1次发生错误.

### 7.3

原假设为假的情况下第二类错误的比例为

$$\frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$$

### 7.4

检验的功效为

$$1 - \beta = \frac{1}{2}$$

## 8　治愈癌症

### 8.1

上述判断不科学，应使用假设检验的方法.

设化学疗法总体符合Bernoulli分布$\mathrm{B}(p)$，$p_0 = 0.02$，设

$$H_0:\ p \le p_0$$

$$H_1:\ p > p_0$$

拒绝域形式为

$$\bar{X} \ge c$$

由于

$$n\bar{X} \sim \mathrm{B}(n, p)$$

令显著性水平$\alpha = 0.05$，只需要找到二项分布$\mathrm{B}(n, p_0)$的上$\alpha$分位数，并与$n\bar{X}$比较即可.

### 8.2

代入数据，计算机计算得，$\alpha = 0.05$对应的拒绝域为

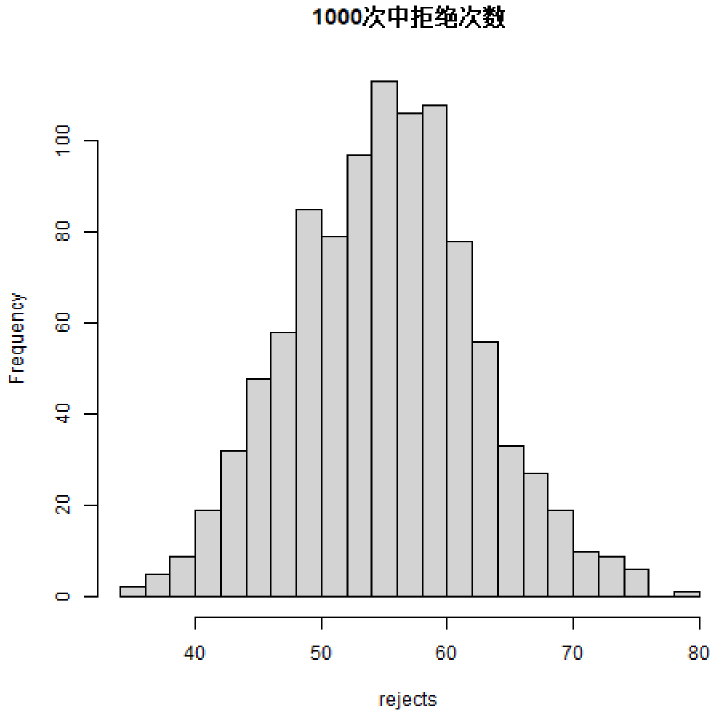
$$n\bar{X} \ge 8$$

而

$$n\bar{X} = 6$$

故没有理由拒绝$H_0$，不能说明化学疗法比外科疗法治愈率高.

# 9 计算机实验：Poisson分布的假设检验




可见，拒绝次数比较接近50，但实际集中在比50略高一些位置，这可能是由于$n = 20$时中心极限定理的近似不是很好导致的.

当我将$n = 20$改为$n = 1000$时，拒绝次数的均值、中位数都更接近50.