概率论与数理统计 第14次作业

Name: 宋昊原　　Student ID: 2022010755

December 20, 2023

1　正态分布似然比检验

似然函数

$$L(\mu) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma^2)^n} \exp(-\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2})$$

极大似然估计值

$$\mu^* = \bar{X}$$

故似然比

$$\begin{aligned}\Lambda &= \exp(\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{2\sigma^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu_0)^2}{2\sigma^2}) \\ &= \exp(\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}^2 - \mu_0^2 - 2X_i\bar{X} + 2X_i\mu_0)}{2\sigma^2}) \\ &= \exp(-\frac{(\bar{X} - \mu_0)^2}{2\sigma^2})\end{aligned}$$

于是，n很大时，近似地有

$$-2\ln\Lambda = \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$$

即

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

拒绝域形状为

$$\Lambda \le \lambda_0$$

这等价于

$$|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}| \ge c$$

其中

$$c = Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025}$$

与Z检验得到同样的结果.

2　Mendel似然比检验

似然比为

$$\Lambda = \frac{\prod_{i=1}^{4} p_i^{O_i}}{\prod_{i=1}^{4} (\frac{O_i}{n})^{O_i}} = \prod_{i=1}^{4} (\frac{E_i}{O_i})^{O_i}$$

故

$$-2\ln\Lambda = 2\sum_{i=1}^{4} O_i \ln\frac{O_i}{E_i}$$

其中O_i与E_i较接近，在E_i处作Taylor展开，得

$$-2\ln\Lambda = 2\sum_{i=1}^{4}(O_i - E_i + \frac{(O_i-E_i)^2}{2E_i}) = \sigma_{i=1}^{4}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i} = \chi^2$$

近似地有

$$\chi^2 \sim \chi^2(3)$$

这与Pearson的χ^2检验吻合.

代入计算，P值为0.9254，没有理由拒绝Mendel理论.

3 图像制作

假设两总体都是正态分布，则若方差相等，有

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{(n_2-1)S_2^2} \sim \mathrm{F}(n_1-1, n_2-1)$$

拒绝域为

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{(n_2-1)S_2^2} \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) \ \vee \ \frac{(n_1-1)S_1^2}{(n_2-1)S_2^2} \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$$

计算得

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{(n_2-1)S_2^2} = 0.0575 < F_{0.025}(6,4) = 0.1087$$

故可以拒绝原假设，两总体方差不等.

4 机床加工

4.1

$$H_0:\ \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1:\ \mu_1 \neq \mu_2$$

H_0成立时

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

而

$$\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1+n_2-2)$$

于是

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})((n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2)}} \sim \mathrm{t}(n_1+n_2-2)$$

左边的统计量计算得

$$0.7845$$

而t(18)分布的0.975分位数为

$$2.1009$$

故不能拒绝原假设，生产稳定.

4.2

$$H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1: \ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

H_0成立时有

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{(n_2-1)S_2^2} \sim \mathrm{F}(n_1-1, n_2-1)$$

左边统计量计算得

$$1.955$$

而F(9,9)分布的(0.025, 0.975)分位数区间为

$$(0.248, \ 4.026)$$

故没有理由拒绝H_0，支持方差相同的假设.

5 地理是数学老师教的

设

$$(X,Y) \sim \mathrm{N}(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$$

则假设

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \ \mu_1 > \mu_2$$

由于X和Y不一定独立，考察$X-Y$，当H_0成立时，其服从均值为0，方差未知的正态分布，于是

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}(n-1)$$

其中S为$X-Y$的样本标准差.

左边的统计量计算得3.559，而t(9)分布的0.95分位数为1.833，故有理由拒绝H_0，两组成绩有显著差异.

6 Bayes假设检验

6.1

后验概率之比

$$\frac{\mathrm{P}(H_0|x)}{\mathrm{P}(H_1|x)} = 1 \times \frac{0.5^x 0.5^{10-x}}{0.7^x 0.3^{10-x}} = (\frac{5}{7})^x (\frac{5}{3})^{10-x} = (\frac{3}{7})^x (\frac{5}{3})^{10}$$

于是，拒绝H_0等价于上式小于1，即

$$X > 10 \log_{\frac{3}{7}}(\frac{3}{5}) = 10 \frac{\ln 3 - \ln 5}{\ln 3 - \ln 7} = 6.03$$

即

$$X \geq 7$$

接受H_0等价于上式大于1，即

$$X \leq 6$$

于是第一类错误的概率为

$$\mathrm{P}(X \geq 7 \mid p = 0.5) = 0.376$$

第二类错误的概率为

$$\mathrm{P}(X \leq 6 \mid p = 0.7) = 0.150$$

6.2

后验概率之比

$$\frac{\mathrm{P}(H_0|x)}{\mathrm{P}(H_1|x)} = 10 \times \frac{0.5^x 0.5^{10-x}}{0.7^x 0.3^{10-x}} = 10(\frac{5}{7})^x(\frac{5}{3})^{10-x} = 10(\frac{3}{7})^x(\frac{5}{3})^{10}$$

于是，拒绝H_0等价于上式小于1，即

$$X > \log_{\frac{3}{7}}(\frac{1}{10}(\frac{3}{5})^{10}) = \frac{10\ln 3 - 11\ln 5 - \ln 2}{\ln 3 - \ln 7} = 8.75$$

即

$$X \geq 9$$

接受H_0等价于上式大于1，即

$$X \leq 8$$

于是第一类错误的概率为

$$\mathrm{P}(X \geq 9 \mid p = 0.5) = 0.054$$

第二类错误的概率为

$$\mathrm{P}(X \leq 8 \mid p = 0.7) = 0.617$$

7 单尾t分布假设检验

7.1 检验结果

设X是任意一个总体，当H_0成立时

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}(n-1)$$

故拒绝H_0的条件为

$$\bar{X} < \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha$$

对总体A，计算得

$$\bar{A} = 99.6$$

$$\mu_0 - \frac{S_A}{\sqrt{n_A}} t_\alpha = 99.7$$

故对总体A拒绝原假设.

对总体B，计算得

$$\bar{B} = -150$$

$$\mu_0 - \frac{S_B}{\sqrt{n_B}} t_\alpha = -215.7$$

故对总体B不拒绝原假设.

7.2 看法

统计显著和事实显著有很大区别．统计显著性如何受到样本本身的波动情况和样本容量影响很大，样本容量越小，样本的标准差越大，拒绝的临界值就会越极端，从而统计显著会包容一些主观感受上非常极端的样本，例如上面的B.