TD Théorie de l'Information

1) Logarithme décimal

On peut définir b^x même si l'exposant *x* n'est pas un rationnel. Tout nombre réel *a* > 0 donné peut s'écrire sous la forme d'une puissance de *b* (avec $b>0$ *et* $b \neq 1$). En particulier : tout réel *a* > 0 peut s'écrire sous la forme $10=a^x$. Le réel *x* est appelé logarithme de base 10 de *a*, ou encore logarithme décimal de *a*, et est noté:

$a>0, a=10^x <=> x=\log_{10}(a)$ exemples :

$a=1, 1=10^x <=> x=\log_{10}(1)=0$ car $10^0=1$

$a=10, 10=10^x <=> x=\log_{10}(10)=1$ car $10^1=10$

$a=0,1 \quad 0,1=10^x <=> x=\log_{10}(10^{-1})=-1 \text{car } 10^{-1}=0,1$

Valeurs particulières

$\log_{10}(1)=0, \log_{10}(10)=1, \log_{10}(100)=2, \log_{10}(10^n)=n, 10^{\log_{10}(a)}=a$

Log d'un produit = somme des Log

$a>0, a=10^x <=> x=\log_{10}(a), b>0, b=10^y <=> y=\log_{10}(b)$ donc

$a \times b=10^x \times 10^y=10^{x+y} <=> x+y=\log_{10}(a \times b)$ soit $\log_{10}(a)+\log_{10}(b)=\log_{10}(a \times b)$

Log d'un inverse= opposé du Log

$\log_{10}(a)+\log_{10}(1/a)=\log_{10}(a \times 1/a)=\log_{10}(1)=0 \, soit \, \log_{10}(1/a)=-\log_{10}(a)$

Log d'un quotient= différence des Log : $\log_{10}(\frac{a}{b})=\log_{10}(a \times 1/b)=\log_{10}(a)-\log_{10}(b)$

Log d'une puissance :

$x=\log_{10}(a) <=> a=10^x, \log_{10}(a^p)=\log_{10}((10^x)^p)=\log_{10}(10^{px})=px=p\log_{10}(a)$

2) Logarithme népérien $x=\ln(a)=\log_e(a)$

Le nombre d'Euler est : $e=\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \approx 2,71828$

$a>0, a=e^x <=> x=\ln(a)$ et $\ln(e)=1, e^{\ln(a)}=a=e^x, \ln(e^x)=x=\ln(a)$ et on a aussi :

$\ln(a)+\ln(b)=\ln(a \times b)$ et $\ln(\frac{1}{a})=-\ln(a)$. Enfin: $\ln(\frac{a}{b})=\ln(a \times \frac{1}{b})=\ln(a)-\ln(b)$

$x=\ln(a) <=> a=e^x$ et $\ln(a^p)=\ln((e^x)^p)=\ln(e^{px})=px=p\ln(a)$

dérivée $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$ et $(\ln(u(x)))'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

3) Logarithme binaire

$a>0, a=2^x <=> x=log2(a)$ si $a=1, 1=2^x <=> x=\log_2(1)=0$ car $2^0=1$

si $a=2, 2=2^x <=> x=\log_2(2)=1$ car $2^1=2$ $\log_2(2)=1, \log_2(2^2)=2, \log_2(2^n)=n$

$\log_2(a)+\log_2(b)=\log_2(a \times b) \, log2(\frac{a}{b})=\log_2(a \times \frac{1}{b})=\log_2(a)-\log_2(b)$

4) Passage logarithme binaire à népérien

$$log2(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$ avec $\ln(2)\simeq 0{,}693142$

Exercice 0 : Etude de la fonction f(x)=x.log2(1/x)

Après avoir fait le graphique des fonctions
$\log_e(x)=\ln(x)$, $\log_{10}(x)$, et : $\log_2(x)$, $x\in[0,+\infty]$

étudier la fonction $f(x)=x.\log_2(\frac{1}{x})$, $x\in[0,1]$ (limites, dérivée, valeurs particulières).

Représenter cette fonction sur son intervalle de définition.

Exercice 1 : Entropie du dé

On considère un dé à 6 faces.

1) quelle est la quantité d'information apportée par une face ?
2) que se passe t'il lorsque le dé est pipé sur une face? (on prendra la face 1 de proba p et les autres faces de proba (1-p)/5)
3) Quelle est l'entropie associé au chiffre tiré d'un dé à 6 faces selon la valeur de p?

Exercice 2 : jeu du nombre gagnant

On considère le jeu suivant : un nombre secret est choisi par un joueur entre 0 et 59 de manière équiprobable. L'autre joueur doit le retrouver en proposant à chaque étape un nouveau nombre. Le premier joueur lui répond si le nombre proposé est inférieur ou supérieur ou égal au nombre secret.

Quelle est la stratégie à adopter pour maximiser l'information obtenue à chaque étape ?

Exercice 3 : Entropie d'une source

une source d'information produit 8 symboles avec les probabilités :

si	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1/64	1/32	1/16	1/4	17/32	1/16	1/32	1/64

1) Déterminer l'entropie de la source
2) comparer avec une source de densité uniforme
3) construire les codes à virgule, de Shannon-Fano, de Huffman correspondant à cette source
4) calculer pour chacun des codes précédents la longueur moyenne du code obtenu et comparez la à l'entropie de la source

Exercice 4 : Entropie d'une source (tiré de DS2010)

une source originelle (notée SO) de 8 symboles notés s_i . dont les probabilités sont indiquées dans le tableau suivant :

si	0	1	2	3	4	5	6	7
P(si)	p1	p2	p1/2	p2/2	p1/4	p2/4	1/2 - 7p1/4	1/2 -7p2/4

1) Déterminer les contraintes sur p1 et p2 pour avoir une probabilité

2) Déterminer l'entropie de cette source H(p1,p2) dans le cas général.
Comparez le résultat donné par une source équiprobable à l'application numérique où p1= 2p2=1/16 .

3) Comment choisir (p1,p2) pour avoir l'entropie maximale ?

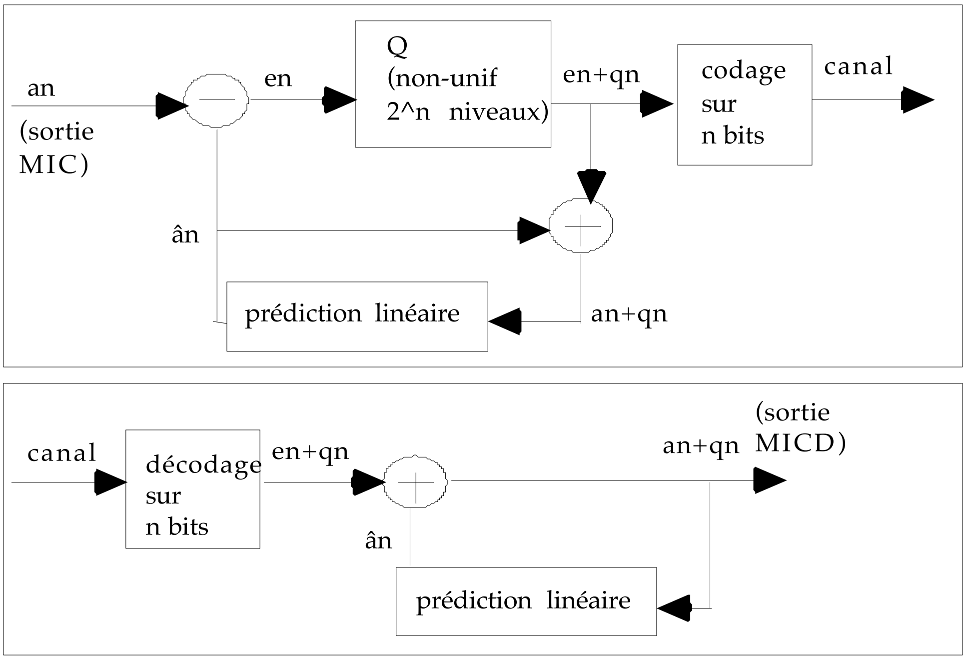
4) On reprend maintenant p1= 2p2=1/16, déterminer le code de Huffman de la source ainsi que la longueur moyenne du code.

5) On partage les 4 symboles qui dépendent de la probabilité p1 des 4 autres qui dépendent de p2. Faire le code de Huffman de chacun de ces codes et calculer la longueur moyenne.

Exercice 5 : MICD

On considère une source qui produit an={1,2,2,2,2,3,4,4,3,4,4,4,1,1,2,2,2,...}

1) donner la réponse du codeur MICD sans quantificateur



2) on utilise le quantificateur suivant :
en ∈)-10,-3/2) Q(en) = -2 , en ∈)-3/2, -1/2) Q(en) = -1
en ∈)-1/2, 1/2) Q(en) = 0 , en ∈)1/2, 3/2) Q(en) = 1
et enfin en ∈ (3/2, 10) Q(en) = 2

Exercice 6 : Code de Hamming

1) On a vu en cours le mécanisme du code de Hamming H(4,7).
Vérifier son comportement lorsque :
- il n'y a pas d'erreur
- il y a une erreur simple
- il y a une erreur double

2) Le code de Hamming suivant est le Hamming(11,15)
Ecrire les équations de ce code
Vérifier ce qui se passe en cas d'erreur simple ou double

3)On rajoute un bit de parité au code de Hamming H(4,7) pour en faire un code H(4,8). Quel est l'intérêt ?

Exercice 7 : Code linéaire Mojette

On considère le code M(4,7) suivant : à partir de 4 bits d'information (o1,o2,o3,o4) on génère tx = (o1+o2, o3+o4, o1+o4, o2+o3, o4, o1+o3, o2).

1) écrire la matrice G1 qui représente ce code linéaire
2) mettre G1 sous forme systématique G et calculer la matrice de décodage associée H.
3) Vérifier qu'une erreur simple peut être détectée en regardant les 3 sous vecteurs (x1, x2) (x3,x4) (x5, x6, x7)
4) On a une erreur. Peux t'on corriger dans tous les cas ?
5) A partir de (o1,o2,o3,o4) on génère ty = (o1,o2+o4, o3, o1+o4, o2+o3, o4, o1+o3, o2). Montrer comment corriger une erreur.
6) Qu'est que ca change de faire les sommes modulo 2 ou pas ?

Exercice 8 : Calcul CRC

On considère le polynôme générateur $g(x)=x^5+x^4+x^2+1$ (de degré m=5). On fixe n=15 (longueur 10+5). Soit U le mot à coder représenté par le polynome $U(x)=x^8+x^6+x^3+x+1$. Calculer le CRC correspondant.

Exercice 9 : Calcul polynome générateur

On considère le polynome $U(x)=x^3-1$. Trouver ses diviseurs dans le corps de Galois à 2 éléments après avoir factorisé la solution évidente.
Prendre le plus petit facteur de la décomposition . Calculer le CRC correspondant au polynôme $F(x)=x^4+x^2+x+1$.

Exercice 9 : Algorithmes

Ecrire l'algorithme du code linéaire détaillé dans l'exercice 7.
Ecrire l'algorithme du code CRC détaillé dans l'exercice 8.
Dans chaque cas, faire l 'analyse de la complexité.

Exercice 10 : Génération de séquences pseudo aléatoires binaires

On considère le polynôme suivant :

$P(x)=x^{16}+x^{12}+x^5+x^0$ et sa représentation machine avec chacune des cases initialisée par une valeur binaire (e.g. 1 sur cases 0,1,4,8,16 et 0 ailleurs). Donnez le début de la suite binaire qui sort .