POLYTECH NANTES

École d'ingénieurs de l'université de Nantes

2022–2023

Département « Peip »

Algèbre linéaire

Hélène PÉRENNOU

— 2^e année —

Nantes Université

POLYTECH

Premier réseau national des écoles d'ingénieurs polytechniques des universités

Site de la Chantrerie
Rue Christian Pauc - BP 5060
44306 Nantes cedex 3
France
tél. +33 (0)2 40 68 32 00
fax. +33 (0)2 40 68 32 32

Site de Gavy
Gavy Océanis - BP 152
44603 Saint-Nazaire cedex
France
tél. +33 (0)2 40 90 50 30
fax. +33 (0)2 40 90 50 24

www.polytech.univ-nantes.fr

Table des matières

Présentation :

Ce module est la suite des enseignements d'algèbre de première année. Au programme : décomposition en somme directe, réduction de matrices et d'endomorphismes (spectre, polynôme caractéristique et critères de diagonalisation) et des applications : calcul de puissances de matrices ; études de suites récurrentes ; études de systèmes différentiels linéaires ; processus d'évolution.

Les enseignements du module sont répartis de la manière suivantes :

- 4 séances de cours (CM) ;
- 11 séances de cours-TD intégrés (CTDI) ;
- 4 séances de Travaux Pratiques (TP) sur ordinateur ;
- 4 séances de Micro-Projet.

Cette année, l'équipe enseignante qui encadrera les CTDI est constituée de :
- ARTHUR LEVY (arthur.levy@univ-nantes.fr),
- JOSÉ MARTINEZ (jose.martinez@polytech.univ-nantes.fr),
- PIERRE MARTINOD (pierre.martinod@univ-nantes.fr),
- HÉLÈNE PÉRENNOU (helene.perennou@univ-nantes.fr).

Lors des séances de Micro-Projet vous aborderez, le thème des espaces euclidiens, qui sont des espaces vectoriels dans lesquels on dispose d'une distance. On s'intéressera particulièrement aux isométries dans le plan ou l'espace. La dernière séance de cours sera également dédiée à ce thème.

Pour les séances de TP, l'objectif est double : maintenir vos compétences algorithmiques (tout en codant en Python) ; obtenir un algorithme permettant la résolution systématique de vos exercices relatifs à la diagonalisation des matrices (voire d'un endomorphisme). Vos séances de TP seront encadrées par PIERRE MARTINOD et HÉLÈNE PÉRENNOU

Les pré-requis sont, pour l'essentiel, vos apprentissages d'algèbre de première année : la résolution de systèmes linéaires ; le calcul matriciel (produit, inversion, déterminant) ; la notion d'espace vectoriel (sous-espace vectoriel, base, dimension) ; la notion d'application linéaire (noyau, rang, ...). Ces notions élémentaires sont rappeler dans la première partie de ce document mais ne seront pas développées pendant les cours de cette année.

Enfin, l'évaluation de ce module se fera par deux de contrôles continus ainsi que par vos rendus de Micro-Projets. Vous aurez donc trois notes et elles auront le même poids dans le calcul de votre moyenne.

Bon travail à tou.t.e.s,

H. PÉRENNOU

Notation 0.0.1. Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne un corps, généralement $\mathbb{R}$, le corps des nombres réels, ou $\mathbb{C}$, le corps des nombres complexes. Les espaces vectoriels considérés seront des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

I Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans cette première partie, vous trouverez des rappels de première année, que vous devez absolument maîtriser pour la suite. Vous devrez également être à l'aise avec le calcul matriciel (produit de matrices et inversion via l'algorithme du pivot de Gauss).

I. 1. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

La définition formelle d'un **espace vectoriel** est assez lourde et on ne la manipulera pas directement ce semestre (rien ne vous empêche de reprendre vos cours de 1re année pour la relire).

On retiendra qu'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, souvent noté E dans ce cours, est **stable par somme**, **stable par multiplication par scalaire** (un élément de $\mathbb{K}$) et qu'il existe un **vecteur nul** qu'on notera 0_E. Les règles de calculs sont assez naturelles.

Cela étant dit, il faut absolument avoir plusieurs **exemples** en tête.

Exemple 1.1.1.

1) *Les ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Plus généralement, pour tout n entier naturel non nul, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

2) *Les ensembles $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}^3$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. Plus généralement, pour tout n entier naturel non nul, $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.*

3) *$\mathbb{C}$ est également un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (on identifie $\mathbb{C}$ au plan), de même que $\mathbb{C}^n$*

4) *Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

5) *$\mathbb{R}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

6) *Pour tout n et p dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec n lignes et p colonnes, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

7) *Pour I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

8) *$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites numériques réelles, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Définition 1.1.2.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel de** E (s.e.v. en abrégé) si pour tout u et v dans F et tout α dans $\mathbb{K}$, les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $F \neq \emptyset$ (F est non vide),

2) $u + v$ est dans F,

3) αu est dans F.

Proposition 1.1.3.

Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel.

Remarque 1.1.4. En pratique, pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montrera que c'est un s.e.v d'un espace vectoriel classique, comme ceux mentionnés ci-dessus.

Exemple 1.1.5.

1) L'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y = 2z\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

2) L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_2[X]$.

3) L'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *:*

$$\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^t = A\},$$

où pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $A^t = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *avec* $b_{i,j} = a_{j,i}$, *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4) L'ensemble des fonctions dérivables sur I *est un sous-espace vectoriel des fonctions continues sur* I.

5) L'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *vérifiant la relation de récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *l'espace des suites numériques.*

I. 2. Familles libres, familles génératrices, bases

Définition 1.2.1.

Soit E un espace vectoriel et A une famille d'éléments de E (finie ou infinie). Le **sous-espace vectoriel engendré par** A, noté $\mathrm{Vect}(A)$, est l'ensemble des vecteurs de E qui peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire (finie) d'éléments de A :

$$\mathrm{Vect}(A) = \{u \in E \mid u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k, \; \alpha_i \in \mathbb{K}, \; e_i \in A\}.$$

Définition 1.2.2.

Soit A une famille d'éléments de E. La famille A est dite **génératrice** si $\mathrm{Vect}(A) = E$, autrement dit si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de A.

Exemple 1.2.3.

1) *La famille* $((1,1);(1,0);(1,2))$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$.

2) *La famille* $(1;X;X^2)$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}_2[X]$.

Définition 1.2.4.

On dit que E est de **dimension finie** s'il est engendré par une famille **finie** de vecteurs, c'est-à-dire s'il existe des vecteurs $e_1,\dots,e_n$ tel que $E = \mathrm{Vect}(e_1;\dots;e_n)$.

Exemple 1.2.5.

1) *Pour tout* n *entier naturel,* $\mathbb{R}^n$ *est de dimension finie sur* $\mathbb{R}$.

2) *Pour tout* n *entier naturel,* $\mathbb{C}^n$ *est de dimension finie sur* $\mathbb{C}$.

3) *L'ensemble* $\mathbb{C}$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace de dimension finie.*

4) *L'espace* $\mathbb{R}_n[X]$ *est de dimension finie sur* $\mathbb{R}$.

5) *L'espace* $\mathbb{R}[X]$*, n'est pas de dimension finie sur* $\mathbb{R}$.

6) *L'espace* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est de dimension finie sur* $\mathbb{K}$.

7) *L'espace* $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ *n'est pas de dimension finie sur* $\mathbb{R}$.

8) *L'espace vectoriel des suites numériques réelles n'est pas de dimension finie.*

9) *L'espace vectoriel formé des suites numérique réelles vérifiant la relation de récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

est de dimension finie.

Définition 1.2.6.

Soit $(e_1;\dots;e_n)$ une famille d'éléments de E.

1) La famille $(e_1;\dots;e_n)$ est dite **liée** s'il existe des coefficients $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ dans $\mathbb{K}$, non tous nuls et tels que $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0_E$.

2) La famille $(e_1;\dots;e_n)$ est dite **libre** si elle n'est pas liée, c'est-à-dire si pour tout $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ dans $\mathbb{K}$, la relation :

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0_E$$

implique que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Exemple 1.2.7. *La famille d'éléments de* $\mathbb{R}^2$ *:* $((1,1);(1,0);(1,2))$ *est une famille liée. La famille* $((1,1);(1,2))$ *est libre.*

Définition 1.2.8.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1;\dots;e_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{B}$ est une **base** de E si c'est une famille libre et génératrice de E.

Théorème 1.2.9 : Existence d'une base

Tout espace vectoriel E de **dimension finie** et non réduit à $\{0_E\}$ admet une base et toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.

Définition 1.2.10.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Le nombre de vecteurs contenue dans une base de E est appelé **dimension** et noté $\dim(E)$.

Exemple 1.2.11.

1) *La famille* $((1,0);(0,1))$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$ *souvent appelée* **base canonique**. *La famille* $((1,1);(1,2))$ *est une autre base de* $\mathbb{R}^2$.

2) *La famille* $(e_1;\dots;e_n)$*, avec pour tout* i *dans* $[\![1,n]\!]$ *:*

$$e_i = (0,\dots,0,\underset{i^e \text{ coordonnée}}{1},0,\dots,0)$$

est la base canonique de $\mathbb{R}^n$*. En particulier,* $\mathbb{R}^n$ *est de dimension* n*.*

3) *La famille* $(1;i)$ *est une base de* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$*. En particulier,* $\mathbb{C}$ *est de dimension* 2 *en tant que* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

4) *La base canonique de* $\mathbb{R}_n[X]$ *est* $(1;X;X^2;\dots;X^n)$*. En particulier,* $\mathbb{R}_n[X]$ *est de dimension* $n+1$*.*

5) *La famille* $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *d'éléments de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, où tous les coefficients de* $E_{i,j}$ *sont nuls sauf celui sur la* i*-ème ligne,* j*-ème colonne qui est égal à* 1*, est une base de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*. En particulier,* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est de dimension* np*.*

Proposition 1.2.12.

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1) Toute famille libre formée de n vecteurs est une base de E.

2) Toute famille génératrice formée de n vecteurs est une base de E.

3) Toute famille formée de plus de n vecteurs n'est pas libre.

4) Toute famille formée de moins de n vecteurs n'est pas génératrice.

Théorème 1.2.13 : Base incomplète

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $(e_1; e_2; \ldots; e_p)$, une famille formée de p vecteurs de E linéairement indépendants avec $p < n$. Il existe $(n-p)$ vecteurs de E : $e_{p+1}, \ldots, e_n$, tels que $(e_1; \ldots; e_n)$ soit une base de E.

Notation 1.2.14. On désignera généralement une base par la lettre $\mathcal{B}$.

Proposition 1.2.15.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

Exemple 1.2.16. *L'ensemble* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y = 2z\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *de dimension* 2 *(on reconnaît l'équation d'un plan) et une base de* F *est :* $((2, 0, 3); (0, 2, -1))$. *En particulier,*

$$F = \mathrm{Vect}((2, 0, 3); (0, 2, -1)).$$

Représentations matricielles des vecteurs

Si on se **fixe** une base $\mathcal{B} = (e_1; \ldots; e_n)$ de E, pour connaître le vecteur $u = u_1e_1 + \ldots + u_ne_n$, il suffit de connaître ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Définition 1.2.17.

Soit $\mathcal{B} = (e_1; \ldots; e_n)$ une base de E et $u = u_1e_1 + \ldots + u_ne_n$ un vecteur de E. On appelle **matrice de u dans la base $\mathcal{B}$**, et on note $[u]_{\mathcal{B}}$, la matrice colonne formée des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$:

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.2.18. *Considérons* $\mathcal{B} = (e_1; e_2)$ *et* $\mathcal{B}' = (e'_1; e'_2)$ *deux bases de* $\mathbb{R}^2$, *avec* $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ *et* $e'_1 = (2, 1)$, $e'_2 = (1, 1)$. *Pour* $u = (3, 2)$, *on a :*

$$u = 3e_1 + 2e_2, \text{ donc } [u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

et

$$u = e'_1 + e'_2 \text{ donc } [u]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.2.19. **Dans ce cours**, on fera la distinction entre un vecteur de $\mathbb{R}^n$: $u = (u_1, \dots, u_n)$, noté par une ligne de nombres séparés par de points virgules, et sa représentation matricielle dans la base canonique $((1, 0, \dots, 0); (0, 1, \dots, 0); \dots; (0, 0, \dots, 1))$, notée par la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.

Définition 1.2.20.

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et on note $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, la matrice dont les colonnes sont formées des coefficients des vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque 1.2.21. On a : $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = Pass(\mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Proposition 1.2.22.

Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et u un vecteur de E. On a :

$$[u]_{\mathcal{B}} = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')[u]_{\mathcal{B}'}.$$

Exemple 1.2.23. *En reprenant les données de l'exemple précédent, on a :*

$$Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que :

$$[u]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} [u]_{\mathcal{B}}.$$

I. 3. Applications linéaires

Définition 1.3.1.

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si pour tout u et v dans E et tout α dans $\mathbb{K}$:

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$,

2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$.

Exemple 1.3.2.

1) *L'application définie pour tout* (x, y, z) *dans* $\mathbb{R}^3$ *par :*

$$f(x, y, z) = (x - 2y, x + y - 3z, y - z)$$

est une application linéaire.

2) *L'application*

$$\begin{array}{cccc} d & : & \mathbb{R}_4[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & & P & \mapsto & \underset{\text{(polynôme dérivée de } P\text{)}}{P'} \end{array}$$

est une application linéaire.

3) *L'application*

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{tr} & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & & A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots a_{n,n} \end{pmatrix} & \mapsto & \underset{\text{(somme des coefficients diagonaux)}}{a_{1,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{n,n}} \end{array}$$

est une application linéaire.
Pour A *une matrice dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, le nombre* $\mathrm{tr}(A)$ *s'appelle la* **trace** *de* A*.*

Notation 1.3.3. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Quand $E = F$, on note plus simplement $\mathcal{L}(E)$.

Définition 1.3.4.

1) Si f est dans $\mathcal{L}(E)$, on dit que f est un **endomorphisme**.

2) Si f dans $\mathcal{L}(E, F)$ est bijective, on dit que c'est un **isomorphisme**.

Exemple 1.3.5. *L'application* id_E *est un endomorphisme et un isomorphisme de* E*.*

Notation 1.3.6. On note $\mathrm{GL}(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F et $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans E.

Proposition 1.3.7.

Si f est dans $\mathrm{GL}(E, F)$, il existe un élément de $\mathrm{GL}(F, E)$, noté f^{-1} tel que :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E.$$

Définition 1.3.8.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f dans $\mathcal{L}(E,F)$.

1) On appelle **noyau** de f, noté $\operatorname{Ker}(f)$, le sous-espace vectoriel défini par :

$$\operatorname{Ker}(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}.$$

2) On appelle **image** de f, noté $\operatorname{Im}(f)$, le sous-espace vectoriel défini par :

$$\operatorname{Im}(f) = \{v \in F \mid \exists u \in E, f(u) = v\}.$$

Remarque 1.3.9. Un manière très efficace de montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel est de le faire apparaître comme le noyau d'une application linéaire.

Proposition 1.3.10.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1; \dots; e_n)$ une base de E et f dans $\mathcal{L}(E,F)$. On a :

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(f(e_1); \dots; f(e_n)\right).$$

Exemple 1.3.11.

1) Pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x-2y, x+y-3z, y-z)$*, on a :* $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((2,1,1))$ *et* $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}((1,1,0); (-2,1,1))$.

2) Pour $d : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P'$ *on a :* $\operatorname{Ker}(d) = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid \deg(p) < 1\}$ *(l'ensemble des polynômes constants) et* $\operatorname{Im}(d) = \mathbb{R}_3[X]$.

Théorème 1.3.12.

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et f dans $\mathcal{L}(E,F)$.

1) L'application f est injective si, et seulement si, $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.

2) L'application f est surjective si, et seulement si, $\operatorname{Im}(f) = F$.

Exemple 1.3.13. *L'application* d *définie dans l'exemple 1.3.11 ci-dessus est surjective mais pas injective.*

Remarque 1.3.14. L'application f est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de E.

Définition 1.3.15.

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et f dans $\mathcal{L}(E,F)$. Le nombre $\dim(\operatorname{Im} f)$ est appelé **rang** de f et noté $\operatorname{rg}(f)$.

Théorème 1.3.16 : Théorème du rang

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et f dans $\mathcal{L}(E, F)$. On a :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E).$$

Corollaire 1.3.17.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et de **même** dimension. Si f est dans $\mathcal{L}(E, F)$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est un isomorphisme.

2) f est injective.

3) f est surjective.

I. 4. Représentations matricielles

Étant donnée $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F, on peut représenter l'application linéaire $f : E \to F$ par une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 1.4.1.

Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F et f dans $\mathcal{L}(E, F)$. La **matrice** de f dans la base $\mathcal{B}_E$ au départ et $\mathcal{B}_F$ à l'arrivée, notée $Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$, est la matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ telle que :

$$\begin{array}{ccc} f(e_1) & = & a_{1,1}f_1 + a_{2,1}f_2 + \ldots + a_{p,1}f_p \\ f(e_2) & = & a_{1,2}f_1 + a_{2,2}f_2 + \ldots + a_{p,2}f_p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(e_n) & = & a_{1,n}f_1 + a_{2,n}f_2 + \ldots + a_{p,n}f_p. \end{array}$$

Remarque 1.4.2. Pour déterminer la matrice $Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$, on commence par calculer l'image par f des vecteurs de $\mathcal{B}_E$: $f(e_1), \dots, f(e_n)$. Puis on détermine les coordonnées de ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}_F$. On place enfin ces coefficients en colonne dans une matrice.

Exemple 1.4.3. *Pour* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x - 2y, x + y - 3z, y - z)$, $\mathcal{B}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *:*

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.4.4.

Soit f dans $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}_E$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F et $A = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$. Pour tout u dans E, on a :

$$[f(u)]_{\mathcal{B}_F} = A.[u]_{\mathcal{B}_E}.$$

Proposition 1.4.5.

Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension, $\mathcal{B}_E$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F et f dans $\mathcal{L}(E,F)$. Si f est un isomorphisme, la matrice $Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ est inversible et :

$$Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)^{-1} = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f^{-1}).$$

Exemple 1.4.6. *L'endomorphisme f qui a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme. La matrice de f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notation 1.4.7. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices inversibles.

Proposition 1.4.8.

Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies, de bases respectives $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$, f dans $\mathcal{L}(E,F)$ et g dans $\mathcal{L}(F,G)$. On a :

$$Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g).Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f).$$

Exemple 1.4.9. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ avec $f(x,y,z) = (x+2y+z, -3x+y)$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, avec $g(x,y) = (-y, 2x+y)$. La matrice de $g \circ f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au départ, et celle de $\mathbb{R}^2$ à l'arrivée est :*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.4.10.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, F un espace vectoriel de dimension p, de bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. L'application :

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ & & f & \mapsto & Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f). \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème 1.4.11.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finie, $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E, $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F et $f : E \to F$ une application linéaire. $A = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$, $A' = Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f)$, $P = Pass(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E)$ et $Q = Pass(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F)$, alors :

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Exemple 1.4.12. *Soit f l'application linéaire définie pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ par :*

$$f(x, y, z) = (-2x + 3z, x + 7y - z).$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ avec

$$e_1 = (3, 1, 1), \quad e_2 = (0, 0, 2), \quad e_3 = (4, -1, -1),$$

et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ la base de $\mathbb{R}^2$ avec :

$$f_1 = (2, -1), \quad f_2 = (0, 1).$$

On a :

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 6 & 2 & -15 \end{pmatrix}.$$

Pour le cas des endomorphismes, on a le résultat complémentaire suivant.

Théorème 1.4.13.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. Si $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$ et $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, alors :

$$A' = P^{-1}AP.$$

Remarque 1.4.14. Si on a une relation du type $A' = P^{-1}AP$ on dit que les matrices A et A' sont **semblables**. Deux matrices sont semblables si elles représentent un même endomorphisme mais dans des bases différentes.

II Somme directe, symétries et projections vectorielles

II. 1. Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe

Pour toute cette section, on se donne E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1.1.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E, on définit leur somme par :

$$F + G = \{z \in E \mid \exists u \in F,\ \exists v \in G,\ z = u + v\}.$$

Proposition 2.1.2.

L'ensemble $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E et si E est de dimension finie on a :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Définition 2.1.3.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1) On dit que la somme $F + G$ est **directe** si $F \cap G = \{0_E\}$. Dans ce cas, la somme $F + G$ est notée $F \oplus G$.

2) On dit que E est **somme directe** de F et de G si :

   (i) $F + G = E$ et

   (ii) $F \cap G = \{0_E\}$.

   Dans ce cas on dit F et G sont **supplémentaires** dans E et on note $E = F \oplus G$.

Exemple 2.1.4. *Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, le plan*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$$

et la droite

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 0 \text{ et } x + y - z = 0\}$$

sont supplémentaires :

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G.$$

Remarque 2.1.5. Attention à ne pas confondre les termes *"supplémentaire"* et *"complémentaire"*.

Proposition 2.1.6.

Les espaces F et G sont en somme directe si, et seulement si, tout élément de $F + G$ s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Exemple 2.1.7. *En reprenant les espaces de l'exemple précédent, on a, pour tout* (x, y, z) *dans* $\mathbb{R}^3$ *:*

$$(x, y, z) = \underbrace{(x - 2z, y + z, 0)}_{\in F} + \underbrace{(2z, -z, z)}_{\in G}.$$

Remarque 2.1.8. Le supplémentaire d'un sous-espace vectoriel $F \neq \{0_E\}$ n'est pas unique.

Théorème 2.1.9.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $E = F \oplus G$,

2) $\left\{ \begin{array}{rcl} F \cap G & = & \{0_E\} \\ \dim(E) & = & \dim(F) + \dim(G) \end{array} \right.$

3) Pour $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G, la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de E.

Remarque 2.1.10. Les deux derniers points donnent une méthode pratique pour montrer que E est la somme directe de deux sous-espaces.

Ces définitions se généralisent à plusieurs sous-espaces

Définition 2.1.11.

Soit $E_1, \ldots, E_p$, p sous-espaces vectoriels de E.

1) La **somme** $E_1 + \ldots + E_p$ est le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$E_1 + \ldots + E_p = \{u_1 + \ldots + u_p \mid \forall i \in [\![1, p]\!],\ u_i \in E_i\}.$$

2) On dit que la somme $E_1 + \ldots + E_p$ est **directe** si pour tout i dans $[\![1, p]\!]$,

$$E_i \cap (E_1 + \ldots + E_{i-1} + E_{i+1} + \ldots + E_p) = \{0_E\}.$$

Dans ce cas la somme est notée $E_1 \oplus \ldots \oplus E_p$

3) On dit que E est **somme directe des** $E_1, \ldots, E_p$ si $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p$.

Remarque 2.1.12. Cas $\mathbf{p = 3}$.
La somme $E_1 + E_2 + E_3$ est directe si :

$$E_1 \cap (E_2 + E_3) = \{0_E\} \text{ et } E_2 \cap (E_1 + E_3) = \{0_E\}, \text{ et } E_3 \cap (E_1 + E_2) = \{0_E\}.$$

Proposition 2.1.13.

Les espaces $E_1, \ldots, E_p$ sont en somme directe si, et seulement si, tout élément z de $E_1 + \ldots + E_p$ **s'écrit de façon unique** :

$$u = u_1 + \ldots + u_p,$$

avec $u_1 \in E_1$, ..., $u_p \in E_p$.

Proposition 2.1.14.

Si E_1, ..., E_p sont en somme directe :

$$\dim(E_1 \oplus \ldots \oplus E_p) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i).$$

Théorème 2.1.15.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p$.

2) $\left\{ \begin{array}{rcl} \dim(E_1 \oplus \ldots \oplus E_p) & = & \dim(E) \\ E_1 + \ldots + E_p & = & E_1 \oplus \ldots \oplus E_p \end{array} \right.$

3) Si pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E.

II. 2. Symétries et projections vectorielles

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. On a donc $E = F \oplus G$ et pour tout u de E, il existe un unique vecteur v dans F et un unique vecteur w dans G tel que : $u = v + w$.

Définition 2.2.1.

Dans le contexte décrit ci-dessus,

1) la **projection vectorielle sur** F **parallèlement à** G est l'application linéaire dans $\mathcal{L}(E)$ définie par :

$$p_{F//G} \; : \; \begin{array}{rcl} E = F \oplus G & \to & E \\ u = v + w & \mapsto & p(u) = v \end{array}.$$

2) la **symétrie vectorielle par rapport à** F **parallèlement à** G est l'application linéaire dans $\mathcal{L}(E)$ définie par :

$$s_{F//G} \; : \; \begin{array}{rcl} E = F \oplus G & \to & E \\ u = v + w & \mapsto & s(u) = v - w \end{array}.$$

Exemple 2.2.2. *Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, avec*

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$$

et la droite

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2z = 0 \text{ et } x + y - z = 0\}.$$

On a :

$$\begin{array}{rcccc} p_{F//G} & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x-2z, y+z, 0) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcccc} s_{F//G} & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x-4z, y+2z, -z). \end{array}$$

Proposition 2.2.3.

On a les propriétés suivantes :

1) $p^2_{F//G} := p_{F//G} \circ p_{F//G} = p_{F//G}$ (on dit que $p_{F//G}$ est **idempotent**) et $s^2_{F//G} := s_{F//G} \circ s_{F//G} = \mathrm{id}_E$ (on dit que $s_{F//G}$ est **involutif**),

2) $\mathrm{Im}(p_{F//G}) = F$ et $\mathrm{Ker}(p_{F//G}) = G$,

3) $F = \mathrm{Ker}(s_{F//G} - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s_{F//G} + \mathrm{id}_E)$,

4) $s_{F//G} = 2p_{F//G} - \mathrm{id}_E$.

Démonstration *On calcule.*

□

Théorème 2.2.4 : Caractérisation des projections vectorielles

Soit p un endomorphisme de E tel que $p^2 = p \circ p = p$. On a :

1) $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$,

2) p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Démonstration

1) On peut utiliser la deuxième caractérisation du théorème 2.1.9.

2) On utilise la décomposition $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$. Pour tout u dans E, $u = v + w$ avec v dans $\mathrm{Im}(p)$ et w dans $\mathrm{Ker}(p)$. On doit vérifier que $p(u) = v$.

□

Exemple 2.2.5. *Soit p est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a $A^2 = A.A = A$ donc $p \circ p = p$. D'après le théorème, p est projection sur $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}((1,1))$, *parallèlement à* $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}((1,2))$.

Théorème 2.2.6 : Caractérisation des symétries vectorielles

Soit s un endomorphisme de E tel que $s^2 = s \circ s = \mathrm{id}_E$. On a :

1) $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$,

2) s est la symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Démonstration

1) On peut utiliser que pour tout u dans E :

$$u = \frac{1}{2}(u + s(u)) + \frac{1}{2}(u - s(u)).$$

2) On utilise la décomposition précédente.

□

Exemple 2.2.7. *L'endomorphisme s qui a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:*

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

est une symétrie vectorielle.

III Déterminant

III. 1. Définition et propriétés calculatoires

Définition 3.1.1.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le **déterminant** de A, noté $\det(A)$ est le nombre défini par récurrence sur n de la manière suivante :

1) Si $A = (a)$ (c'est-à-dire si $n = 1$), $\det(A) = a$.

2) Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, avec $n \geqslant 2$,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1}),$$

où $A_{i,1}$ est dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ est la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la première colonne.

Notation 3.1.2. En général, on écrit le déterminant d'une matrice A en plaçant ses coefficients entre deux barres verticales :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{n,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ & \ddots & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Exemple 3.1.3. *Pour $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a :*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - c \times b.$$

Exemple 3.1.4. *Pour $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, on a :*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \times 3 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}. \\ &= 3 \times (-2) - 4 - 4 \\ &= -14 \end{aligned}$$

Remarque 3.1.5. Pour calculer le déterminant de A, on peut en fait utiliser des matrices extraites par rapport à n'importe quelle colonne, ou bien inverser le rôle des lignes et des colonnes.

Notation 3.1.6. Dans la suite, pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Théorème 3.1.7.

Pour tout j dans $[\![1;n]\!]$,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}).$$

Pour tout i dans $[\![1;n]\!]$,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}).$$

Exemple 3.1.8. *On reprend le calcul du déterminant précédent, mais cette fois en "développant" par rapport à la deuxième ligne :*

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{2+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \times 0 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \times 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}. \\
&= -1 \times 4 + 0 - 2 \times 5 \\
&= -14
\end{aligned}$$

Remarque 3.1.9. Si A est une matrice triangulaire, $\det(A)$ est le produit des coefficients diagonaux.

Exemple 3.1.10.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 24.$$

Proposition 3.1.11.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et α dans $\mathbb{K}$.

1) Si B est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue à partir de A en échangeant deux colonnes, alors :
$$\det(B) = -\det(A).$$

2) Si B est obtenue à partir de A en ajoutant à une colonne une combinaison linéaires des **autres** colonnes de A, alors :
$$\det(B) = \det(A).$$

3) Si B est obtenue à partir de A en multipliant les coefficients d'**une colonne** par α, alors :
$$\det(B) = \alpha \det(A).$$

Remarque 3.1.12. Autrement dit, si une colonne de A est combinaison linéaire des autres colonnes, alors $\det(A) = 0$. En particulier, on ne change pas la valeurs du déterminant si on ajoute à une colonne, une combinaison linéaire des **autres** colonnes. En pratique, ceci va permettre, par opérations successives, de faire apparaitre des zéros dans le déterminant pour faciliter son calcul. Toutes ces propriétés valent aussi pour les lignes.

Proposition 3.1.13.

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et α dans $\mathbb{K}$. On a :

1) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

2) $\det(AB) = \det(A).\det(B)$.

3) $\det(A^t) = \det(A)$.

Remarque 3.1.14. **Attention :** En général, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

III. 2. Comatrice et méthode des cofacteurs

Définition 3.2.1.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) On appelle **matrice mineure** associée au coefficient $a_{i,j}$, notée $A_{i,j}$, la matrice carrée d'ordre $(n-1)$ obtenue à partir de A en enlevant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

2) On appelle (déterminant) **mineur** associé au coefficient $a_{i,j}$ le scalaire $\det(A_{i,j})$.

3) On appelle **cofacteur** associé au coefficient $a_{i,j}$, noté $\mathrm{cof}(a_{i,j})$, le scalaire $(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$ et on appelle **comatrice** de A, noté $\mathrm{Com}(A)$, la matrice
$$\mathrm{Com}(A) = (\mathrm{cof}(a_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Exemple 3.2.2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. *On a :*

$$\operatorname{cof}(a_{1,1}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -3,\ \operatorname{cof}(a_{1,2}) = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5,\ \operatorname{cof}(a_{3,1}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6,\ \text{etc...}$$

D'où :

$$\operatorname{Com}(A) = \begin{pmatrix} +(-3) & -(-5) & +6 \\ -(-5) & +(-5) & -5 \\ +4 & -5 & +(-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 5 & -5 & -5 \\ 4 & -5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.2.3.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Com}(A)^t.$$

Remarque 3.2.4. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on retrouve la formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.2.5. *Toujours avec* $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, *on trouve :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Com}(A)^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 5 & -5 & -5 \\ 6 & -5 & -8 \end{pmatrix}.$$

III. 3. Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 3.3.1.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et $(e_1; \dots; e_n)$ une famille de vecteurs de E. Le **déterminant de la famille** $(e_1; \dots; e_n)$ **dans la base** $\mathcal{B}$, noté $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n)$ est le déterminant de la matrice obtenue en disposant en colonnes les coordonnées des vecteurs $e_1, \dots, e_n$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple 3.3.2. *Pour* $e_1 = (3, 1, -1)$, $e_2 = (2, 0, 1)$ *et* $e_3 = (2, 2, 3)$ *et* $\mathcal{B}$ *la base canonique :*

$$\det{}_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -14.$$

Remarque 3.3.3.

1) Soit $(e_1; e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Le **parallélogramme** $\mathcal{P}$ porté par les vecteurs u et v est l'ensemble :

$$\mathcal{P} = \{\alpha_1 u + \alpha_2 v \mid 0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2 \leqslant 1\}.$$

L'aire de $\mathcal{P}$ vaut $\det(u, v)$.

2) On a également une relation entre le déterminant de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ et le volume de parallélépipède qu'ils portent.

Proposition 3.3.4.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $(e_1; \ldots; e_n)$ une famille de vecteurs de E. La famille $(e_1; \ldots; e_n)$ est une base de E si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n)$ est non nul.

Exemple 3.3.5. *La famille $(e_1; e_2; e_3)$ de l'exemple précédent est une base de $\mathbb{R}^3$.*

III. 4. Déterminant d'un endomorphisme

Définition 3.4.1.

Soit f un endomorphisme de E, $\mathcal{B}$ une base de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. On définit le **déterminant de** f, noté $\det(f)$, par :

$$\det(f) = \det(A).$$

Remarque 3.4.2. Puisque pour toute matrice P inversible, $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$, la définition précédente ne dépend pas du choix de la base de E (d'après la formule de changement de base).

Exemple 3.4.3. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ par :*

$$f(x, y, z) = (3x - 2y + z, x + 3z, -4x + 3y - z).$$

On a :

$$\det(f) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Proposition 3.4.4.

Un endomorphisme f est un isomorphisme si, et seulement si, $\det(f) \neq 0$.

IV Diagonalisation d'endomorphismes ou de matrices

Dans tout le chapitre, E est un espace vectoriel de **dimension finie** sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Le but de se chapitre est de comprendre comment et quand, à partir d'une matrice liée à un problème donné, on peut se ramener à l'étude d'une matrice diagonale. Une motivation est qu'il bien plus aisé d'effectuer des calculs avec une matrice diagonale (produits, déterminants, résolution de systèmes), il également plus aisé de comprendre son l'action du point du vu géométrique.

IV. 1. Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 4.1.1.

Soit f un endomorphisme de E.

1) On appelle **vecteur propre** de f, tout vecteur u **non nul** dans E tel qu'il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que :
$$f(u) = \lambda u.$$

2) On appelle **valeur propre** de f tout élément λ de $\mathbb{K}$ tel qu'il existe un vecteur u non nul dans E vérifiant $f(u) = \lambda u$.

3) L'ensemble des valeurs propres de f est appelé **spectre** de f et noté $\mathrm{Sp}(f)$.

Exemple 4.1.2.

1) Soit l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + 2y, 4x + 3y)$. *On a :*
$$f(-1, 1) = (1, -1) = -(-1, 1).$$
Donc un vecteur propre pour f *est* $(-1, 1)$ *et la valeur propre associée est* (-1).

2) L'application $f : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3[X],\ P \mapsto XP'$ *admet comme vecteur propre* X^2 *et la valeur propre associée est* 2.

3) Juste pour l'exemple, résoudre une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 revient à chercher des valeurs propres. Dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée continue (qui n'est pas de dimension finie), l'application* $d : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f \mapsto f'$ *est une application linéaire. Pour tout réel* λ*, la fonction* $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$ *est un vecteur propre pour la valeur propre* λ *:*
$$d(e_\lambda) = \frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}.$$

Remarque 4.1.3. Les définitions sont également compatibles avec les matrices, en passant par un représentation matricielle de f :

Définition 4.1.4.

Précisément, si A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit qu'une matrice colonne X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, non nulle, est un **vecteur propre** de A s'il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que :

$$AX = \lambda X.$$

Le scalaire λ est la **valeur propre** associée à X et l'ensemble des valeurs propres de A est le **spectre** de A, noté $\mathrm{Sp}(A)$.

Exemple 4.1.5. *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

admet comme vecteur propre $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Définition 4.1.6.

1) Soit f un endomorphisme de E. On dit que f est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres pour f. Dans ce cas, la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

2) Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** s'il existe une matrice P inversible telle que la matrice $D = P^{-1}AP$.

Exemple 4.1.7. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + 2y, 4x + 3y)$$

- $(-1, 1)$ *est un vecteur propre pour la valeur propre* (-1).
- $(1, 2)$ *est un vecteur propre pour la valeur propre* 5.

La famille $\mathcal{B} = ((-1, 1); (1, 2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres pour f et dans cette base :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

IV. 2. Polynôme caractéristique

Définition 4.2.1.

1) Soit f un endomorphisme de E. On appelle **polynôme caractéristique** de f, noté χ_f, le polynôme défini pour tout λ dans $\mathbb{K}$ par :

$$\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda \mathrm{id}_E).$$

2) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique** de A, noté χ_A, le polynôme défini pour tout λ dans $\mathbb{K}$ par :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Remarque 4.2.2. χ_f est un polynôme de degré $n = \dim(E)$ et de coefficient de plus haut degré égal à $(-1)^n$.

Proposition 4.2.3.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) On a : $\chi_A(0) = \det(A)$.

2) Si $n = 2$, $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A)$.

Remarque 4.2.4. Il est aussi courant de définir le polynôme caractéristique de f par la formule :

$$\det(\lambda \mathrm{id}_E - f).$$

L'avantage cette variante est que le polynôme caractéristique est alors un polynôme unitaire. En revanche on ne retrouve pas le déterminant de f en évaluant en 0, on trouve son opposé.
Quelque soit la définition choisie, les informations portées par cette objets sont les mêmes puisque :

$$\chi_f(\lambda) = (-1)^n \det(\lambda \mathrm{id}_E - f)$$

et l'utilisation est quasiment identique.

Proposition 4.2.5.

Soit f un endomorphisme de E et λ un élément de $\mathbb{K}$. Le scalaire λ est une valeur propre de f si, et seulement si, $\chi_f(\lambda) = 0$.

Démonstration *On traduit ce que signifie $\chi_f(\lambda) = 0$, pour l'endomorphisme f.*

□

On a donc un méthode calculatoire pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme : elles sont exactement les racines du polynôme caractéristique.

Rappel 4.2.6. Soit P un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{K}$. On dit que P est scindé s'il est produit de polynômes de degré 1. C'est-à-dire si pour tout λ dans $\mathbb{K}$,

$$P = \prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)^{k_i},$$

avec $\deg P = k_1 + \ldots + k_d$.

Notation 4.2.7. On note $\mathrm{mult}(P, \lambda_i)$ le nombre k_i

Remarque 4.2.8. Si P est un polynôme de degré n, unitaire, scindé et de racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors son coefficient constant est $(-1)^n \times \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et le coefficient devant X^{n-1} est $\left(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Proposition 4.2.9.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si χ_A est scindé et $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, alors :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{k} \lambda_k^{m_k} \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{k} m_k \lambda_k.$$

où $m_k = \mathrm{mult}(\chi_f, \lambda_k)$. En particulier, pour tout λ dans $\mathbb{K}$:

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{(n-1)} \mathrm{tr}(A) \lambda^{n-1} + \ldots + \det(A).$$

Remarque 4.2.10. Ce résultat s'obtient très facilement grâce à la remarque précédente, en n'oubliant pas que χ_A n'est pas unitaire mais que $(-1)^n \chi_A$ l'est.

IV. 3. Sous-espaces propres

On sait maintenant comment déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme, il reste comprendre comment déterminer les vecteurs propres.

Définition 4.3.1.

Le **sous-espace propre** associé à une valeur propre λ, noté $SEP(f, \lambda)$ est le sous-espace vectoriel défini par :

$$SEP(f, \lambda) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) = \{u \in E \mid (f - \lambda \mathrm{id}_E)(u) = 0_E\} = \{u \in E \mid f(u) = \lambda u\}.$$

Remarque 4.3.2.

1) On a : $SEP(f, \lambda) = \{0_E\} \cup \{$ vecteurs propres de f associés à $\lambda\}$.

2) Si λ est une valeur propre de f, $\dim(SEP(f, \lambda)) \geqslant 1$.

Remarque 4.3.3. Pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ dans $\mathbb{K}$, $SEP(A, \lambda)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exemple 4.3.4. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (3x - z, 2x + 4y + 2z, -x + 3z).$$

En sachant que 4 est une valeur propre de f (vérifier-le), on a :
$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{rcl} (x, y, z) \in SEP(f, 4) & \Leftrightarrow & (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{id}_E) \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} -x - z & = & 0 \\ 2x + 2z & = & 0 \\ -x - z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \ldots & \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & y \\ x & = & -z \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & (x, y, z) \in \mathrm{Vect}((0, 1, 0); (-1, 0, 1)) \end{array}$$

Donc $SEP(f, 4) = \mathrm{Vect}((0, 1, 0); (-1, 0, 1))$.

Proposition 4.3.5.

Soit f un endomorphisme de E. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont des valeurs propres de E, deux à deux distinctes, alors :

$$SEP(f, \lambda_1) + \ldots + SEP(f, \lambda_k) = SEP(f, \lambda_1) \oplus \ldots \oplus SEP(f, \lambda_k).$$

En particulier,

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(f)) \leqslant \dim(E).$$

Démonstration *Voir exercice 21*

□

Proposition 4.3.6.

Soit f un endomorphisme de E et λ une valeur propre pour f. On a :

$$1 \leqslant \dim\left(SEP(f, \lambda)\right) \leqslant \mathrm{mult}(\chi_f, \lambda).$$

Démonstration *Voir l'exercice 22*

□

IV. 4. Diagonalisation

On rappelle la définition donnée au début du chapitre :

Définition 4.4.1.

1) Soi f un endomorphisme de E. On dit que f est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres pour f. Dans ce cas, la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

2) Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** s'il existe une matrice P inversible telle que la matrice $D = P^{-1}AP$.

Il nous reste à comprendre quand on peut diagonaliser un endomorphisme ou une matrice.

Remarque 4.4.2. Soit f un endomorphisme de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, où $\mathcal{B}$ désigne une base de E. On a :

$$f \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow A \text{ est diagonalisable.}$$

Proposition 4.4.3.

Soit f un endomorphisme de E avec $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. L'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, $E = SEP(f, \lambda_1) \oplus \ldots \oplus SEP(f, \lambda_k)$.

Démonstration *Il suffit de traduire la définition.*

□

Théorème 4.4.4 : Premier critère de diagonalisation

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. Si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

Démonstration *On combine la proposition 4.4.5 et la proposition 4.4.3.*

□

Théorème 4.4.5 : Deuxième critère de diagonalisation

Soit f un endomorphisme de E. Il est diagonalisable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$,

2) Pour chaque valeur propre λ de f :

$$\mathrm{mult}(\chi_f, \lambda) = \dim\left(SEP(f, \lambda)\right).$$

Démonstration

$\boxed{\Leftarrow}$ *Si* χ_f *est scindé et que pour chaque valeur propre* $\mathrm{mult}(\chi_f, \lambda) = \dim(SEP(f, \lambda))$. *On peut conclure en utilisant le théorème 4.1.5 et la proposition 4.2.3.*

$\boxed{\Rightarrow}$ *Si* f *est diagonalisable que ses valeurs propres distinctes sont :* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, *d'après 4.2.3 :*

$$E = SEP(f, \lambda_1) \oplus \ldots \oplus SEP(f, \lambda_k).$$

Les relations

$$\dim(SEP(f, \lambda_1)) + \ldots + \dim(SEP(f, \lambda_k)) = n,$$
$$\mathrm{mult}(\chi_f, \lambda_1) + \ldots + \mathrm{mult}(\chi_f, \lambda_k) \leqslant n,$$

et pour tout i *dans* $[\![1, k]\!]$,

$$\dim(SEP(f, \lambda)) \leqslant \mathrm{mult}(\chi_f, \lambda)$$

permettent de conclure.

□

Méthode 4.4.6. On donne la méthode générale pour diagonaliser un endomorphisme f. Elle s'adapte directement pour une matrice A, en introduisant un endomorphisme f, de matrice A dans une certaine base.

1) On détermine le polynôme caractéristique χ_f. S'il n'est pas scindé, f n'est pas diagonalisable.

2) Si χ_f est scindé dans $\mathbb{K}$. Si f est à racines simples on sait que f est diagonalisable. On calcule pour chaque valeur propre λ, le sous-espace propre $SEP(f, \lambda)$.

3) Si pour chaque valeur propre λ, on a $\mathrm{mult}(\chi_f, \lambda) = \dim(SEP(f, \lambda))$, alors f est diagonalisable.

4) On obtient une base formée de vecteurs propres en concaténant les bases de chacun des sous-espaces propres.

Remarque 4.4.7. Il peut être utile de repérer des valeurs propres ou des vecteurs propres évidents, soit pour se passer du calcul du polynôme caractéristique par les déterminants, soit pour le faciliter.

IV. 5. Applications de la diagonalisation

Puissances de matrices

Proposition 4.5.1.

Soit A, B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$B = P^{-1}AP.$$

On a :

1) pour tout k dans $\mathbb{N}$,
$$B^k = P^{-1}A^kP.$$

2) Si A est inversible, alors B est également inversible et pour tout k dans $\mathbb{Z}$,

$$B^k = P^{-1}A^kP.$$

Remarque 4.5.2. Si f est dans $\mathcal{L}(E)$, on note $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Si $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ alors $A^k = Mat_{\mathcal{B}}(f^k)$.

Exemple 4.5.3. *On veut calculer, pour tout n dans $\mathbb{N}$, A^n avec :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En diagonalisant, on obtient $P =$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ telles que

$$D = P^{-1}AP.$$

Puisque D est diagonale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Donc pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^n + 3^n & -2^{n+1} + 2 \times 3^n \\ 2^{n+1} - 3^n - 1 & -2^n + 3^n + 1 & -2^{n+1} + 2 \times 3^n \\ \frac{1}{2}(1 - 3^n) & \frac{1}{2}(3^n - 1) & 3^n \end{pmatrix}.$$

Théorème 4.5.4 : Théorème de Cayley-Hamilton

oit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\chi_A(A) = (-1)^n A^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) A^{n-1} + \ldots + \det(A) I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

On dit que le polynôme caractéristique de A **annule** A.

Exemple 4.5.5. *Pour*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

on a :

$$\chi_A = -X^3 + X^2 - 16X + 5.$$

On a bien :

$$-A^3 + A^2 - 16A + 5I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

En particulier,

$$A^3 = A^2 - 16A + 5I_3.$$

Remarque 4.5.6. Si on cherche à calculer A^n, on peut déterminer le reste R de la division euclidienne de X^n par χ_A. En appliquant le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient :

$$A^n = Q(A)\chi_A(A) + R(A) = R(A).$$

Suites récurrentes

On s'intéresse à trois suites de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} &= a_{1,1}u_n + a_{1,2}v_n + a_{1,3}w_n \\ v_{n+1} &= a_{2,1}u_n + a_{2,2}v_n + a_{2,3}w_n \\ w_{n+1} &= a_{3,1}u_n + a_{3,2}v_n + a_{3,3}w_n \end{cases}.$$

Pour trouver la définition explicite de ces trois suites, on procède de la manière suivante :

Méthode 4.5.7.

1) On réécrit la relation de récurrence sous forme matricielle :
On note $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Une récurrence sur n donne :

$$X_n = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

2) On calcule, pour tout n dans $\mathbb{N}$, A^n (*cf* section précédente).

3) On obtient la définition explicite des trois suites en combinant les deux étapes précédentes.

Remarque 4.5.8. Évidemment, cette méthode s'adapte à un nombre quelconque de suites.

Exemple 4.5.9. *On considère les suites numériques réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et la relation de récurrence :*

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \begin{cases} u_n &= u_{n-1} + v_{n-1} + 2w_{n-1} \\ v_n &= 2v_{n-1} + 2w_{n-1} \\ w_n &= -u_{n-1} + v_{n-1} + 3w_{n-1} \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_n &= -2^n + 2 \times 3^n \\ v_n &= -2^n + 2 \times 3^n \\ w_n &= 3^n \end{cases}$$

Systèmes différentielles linéaires

Soit x, y et z trois fonctions dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On souhaite résoudre un système différentiel linéaire de la forme :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & a_{1,1}x(t) + a_{1,2}y(t) + a_{1,3}z(t) \\ y'(t) & = & a_{2,1}x(t) + a_{2,2}y(t) + a_{2,3}z(t) \\ z'(t) & = & a_{3,1}x(t) + a_{3,2}y(t) + a_{3,3}z(t) \end{array}\right.$$

Méthode 4.5.10.

1) On commence par réécrire le système sous forme matricielle :
Pour tout t dans $\mathbb{R}$, on note
$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$
On a alors,
$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$
et le système se réécrit :
$$X'(t) = AX(t),$$
avec $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$.

2) On cherche à diagonaliser A. Si c'est possible on trouve P inversible et D telle que :
$$D = P^{-1}AP$$
avec
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

3) On a alors :
$$X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow U'(t) = DU(t),$$
avec $U(t) = P^{-1}X(t)$. En notant $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, on obtient le système :
$$\left\{\begin{array}{lcl} u'(t) & = & \lambda_1 u(t) \\ v'(t) & = & \lambda_2 v(t) \\ w'(t) & = & \lambda_3 w(t) \end{array}\right.$$
où les équations ne sont plus corrélées et qui est donc immédiat à résoudre.

4) L'ensemble des solutions du système initial s'obtient en calculant :
$$P\begin{pmatrix} Ae^{\lambda_1 t} \\ Be^{\lambda_2 t} \\ Ce^{\lambda_3 t} \end{pmatrix},\ A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4.5.11. *Les fonctions x, y et z dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, solutions du système d'équations différentielles :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t)+y(t)+2z(t) \\ y'(t) & = & 2y(t)+2z(t) \\ z'(t) & = & -x(t)+y(t)+3z(t) \end{array}\right.$$

sont :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & Be^{2t}+2Ce^{3t} \\ y'(t) & = & -2Ae^{t}+Be^{2t}+2Ce^{3t} \\ z'(t) & = & Ae^{t}+Ce^{3t} \end{array}\right. ,\quad A,B,C\in\mathbb{R}.$$

Remarque 4.5.12. Pour appliquer cette méthode, à aucun moment on a besoin de calculer P^{-1}.

Processus d'évolution

Définition 4.5.13.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_{i,j}^{(n)})_{i,j}$ une suite de matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On dit (ici) que la suite de matrice $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers la matrice** $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ si pour tout i et j :

$$\lim_{n\to+\infty} a_{i,j}^{(n)} = a_{i,j}.$$

On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$.

Proposition 4.5.14.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$ et si B est dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} A_nB = AB$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$ et si B est dans $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} BA_n = BA$.

Exemple 4.5.15. *On suppose que la migration de population entre deux régions, disons Nord et Sud, suit le processus suivant : chaque année 50% de la population du Nord migre vers le Sud, tandis que 25% de la population du Sud migre vers le Nord.*
En supposant que ce processus se poursuit, que se passe-t-il à long terme ?

Exercices

Somme directe, projections et symétries

Exercice 1. *On considère F et G deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par :*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer une base de F et une base de G.

3) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

4) Soit $u = (u_1, u_2, u_3)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $v = (v_1, v_2, v_3)$ dans F et $w = (w_1, w_2, w_3)$ dans G tel que $u = v + w$.

5) Donner l'expression de s_F et de p_F.

Exercice 2. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ définie pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x, y) = \frac{1}{3}(x - y, -2x + 2y).$$

1) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2) Déterminer si f est une symétrie ou une projection.

3) Déterminer F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ tels que f soit la projection sur F parallèlement à G ou bien la symétrie par rapport à F parallèlement à G (selon la réponse à la question précédente).

4) Déterminer deux vecteurs v et w tel que $F = \mathrm{Vect}(v)$ et $G = \mathrm{Vect}(w)$.

5) Justifier que $\mathcal{B}' = (v; w)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3. *On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$,*
$P \mapsto \big(P + (1 - X)P' + (X^2 - 1)P''\big)$.

1) Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$.

2) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

3) Déterminer le noyau et l'image de f. On donnera une base de ces espaces.

4) Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

5) Soit P un élément de $\mathrm{Im}(f)$, calculer $f(P)$. Que peut-on en déduire sur f ?

Exercice 4. *On se place dans $\mathbb{R}^2$. Donner l'expression de s_F, la symétrie par rapport à $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\}$ parallèlement à $G = \mathrm{Vect}((1, 1))$.*

Exercice 5.* *On note $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est continue sur $\mathbb{R}$ (on dit "de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$").*

1) E est-il de dimension finie ? Si oui, donner sa dimension.

2) Soit

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$$

et

$$G = \{f \in E \mid \exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b\}.$$

Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils de dimensions finies ? Si oui, donner leur dimension.

3) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Déterminant

Exercice 6. *Calculer le déterminants des matrices suivantes :*

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *3)* $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ *5)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *4)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *6)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 7. *Calculer le déterminant des matrices suivantes :*

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *2)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *3)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$

Exercice 8. *Soit a, b, c et d quatre réels. Calculer le déterminant :*

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & -d \\ a & b & -c & -d \\ a & -b & -c & -d \end{vmatrix}.$$

Exercice 9.* *Soit* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n *nombres réels avec* n *un entier,* $n \geqslant 2$*. Calculer le déterminant de Vandermonde :*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Exercice 10. *Calculer l'inverse des matrices des exercices 6 et 7 lorsque c'est possible.*

Exercice 11.

1) *La famille* (f_1, f_2, f_2) *avec*

$$f_1 = (2, 3, 1), \quad f_2 = (0, -4, -2), \quad f_3 = (4, 12, 5).$$

est-elle une base de $\mathbb{R}^3$ *?*

2) *Montrer* $F = \operatorname{Vect}((2, 0, 4, 2); (3, -4, 12, 0))$ *et* $G = \operatorname{Vect}((1, -2, 5, 0); (1, 1, 1, 1))$ *sont en somme directe dans* $\mathbb{R}^4$*.*

Exercice 12.
Montrer que la famille $(X^2 - X; 3X^2 + 2X + 3; X^2 + X + 1)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$*.*

Vecteurs propres et valeurs propres

Exercice 13. *On note* $u = (1, 1)$ *et* $v = (3, 2)$ *et on considère* f *un endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *tel que* $f(u) = 2u$ *et* $f(v) = -v$.

1) *Quelle est la matrice de* f *dans la base* $(u; v)$ *?*

2) *Quelle est la matrice de* f *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *?*

Exercice 14. *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *défini pour tout* (x, y, z) *dans* $\mathbb{R}^3$ *par :*

$$f(x, y, z) = (2x + 2y + z, x + 3y + z, x + 2y + 2z).$$

1) *Déterminer* A *la matrice de* f *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

2) *Montrer que* $\mathcal{B}' = (b_1, b_2, b_3)$ *avec*

$$b_1 = (1, 1, 1),\ b_2 = (-1, 0, 1),\ b_3 = (-2, 1, 0)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) *Déterminer la matrice de* f *dans la base* $\mathcal{B}'$.

4) *Soit* n *un entier naturel et* $u = (1, 1, 1)$. *Que vaut* $A^n[u]_{\mathcal{B}}$ *?*

Exercice 15. *Pour chacune des matrices suivantes déterminer une valeur propre et/ou un vecteur propre évident :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & -7 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 2 & 7 \\ -7 & -2 & -7 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.

1) *Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés des endomorphismes du plan vectoriel* $\mathbb{R}^2$ *suivants.*

   a) *la rotation vectorielle d'angle* θ *avec* θ *dans* $[0; 2\pi[$.

   b) *la symétrie vectorielle par rapport à une droite* D *parallèlement à une autre droite* D'.

   c) *la projection vectorielle sur une droite* D *parallèlement à une autre droite* D'.

   Ces applications sont-elles diagonalisables ?

2) *Mêmes questions pour les endomorphismes de* $\mathbb{R}^3$ *suivants :*

   a) *la symétrie vectorielle par rapport à un plan* P *parallèlement à une droite* D *non incluse dans* P.

   b) *la projection sur un plan* P *parallèlement à une droite* D *non incluse dans* P.

Polynôme caractéristique

Exercice 17. *Soit la matrice de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Donner une valeur propre évidente de A.

2) Calculer $\mathrm{tr}(A)$ *et* $\det(A)$.

3) Déterminer le polynôme caractéristique de A *et donner son spectre.*

4) La matrice A *est-elle inversible ?*

5) Trouver B *ayant le même polynôme caractéristique que* A.

Exercice 18. *Pour chacune des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer leur polynôme caractéristique.

2) Déterminer leur spectre et dire si elles sont inversibles ou non.

Exercice 19. *Soit* A *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Que peut-on dire sur le spectre de* A *si :*

1) $\det(A) = 0$ *?*

2) Il existe k *dans* $\mathbb{N}$ *tel que* $A^k = I_n$ *?*

3) $A^3 = A$ *?*

Exercice 20. *Soit* A *dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ *telle que pour tout* λ *dans* $\mathbb{K}$,

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1.$$

La matrice A *est-elle diagonalisable sur* $\mathbb{K}$ *?*

Sous-espaces propres

Exercice 21. *Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.*

1) *Soit λ et μ deux valeurs propres distinctes de f. Montrer que $SEP(f, \lambda)$ et $SEP(f, \mu)$ sont en somme directe.*

2) *Soit λ, μ et γ trois valeurs propres distinctes de f. Montrer que $SEP(f, \lambda)$, $SEP(f, \mu)$ et $SEP(f, \gamma)$.*

On peut montrer par récurrence (pas tout à fait immédiate) que les sous-espaces propres sont toujours en somme directe.

Exercice 22. *Soit E un espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f. Dans cet exercice, on cherche à montrer que :*

$$1 \leqslant \dim(SEP(f, \lambda)) \leqslant \operatorname{mult}(\chi_f, \lambda).$$

Pour simplifier, on note $k = \dim(SEP(f, \lambda))$.

1) *Montrer $1 \leqslant \dim(SEP(f, \lambda))$.*

2) *Rappeler pourquoi (et comment), on peut obtenir une base $\mathcal{B} = (e_1; \ldots; e_k; e_{k+1}; \ldots; e_n)$ de E dont les k premiers vecteurs sont des vecteurs propres pour f associé à λ.*

3) *À quoi ressemble la matrice de f dans cette base ?*

4) *En déduire que $(X - \lambda)^k$ divise χ_f puis que $\dim(SEP(f, \lambda)) \leqslant \operatorname{mult}(\chi_f, \lambda)$.*

Diagonalisation

Exercice 23. *Parmi les matrices suivantes, déterminer lesquelles sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24.

1) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (-11x - 40y + 10z, 5x + 19y - 5z, 5x + 20y - 6z).$$

(i) Déterminer A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Calculer le polynôme caractéristique de f et déterminer le spectre de f. Peut-on affirmer que f est diagonalisable ?

(iii) Calculer les sous-espaces propres de f.

(iv) Déterminer une base $\mathcal{B}$ formée de vecteurs propres pour f.

(v) Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $D = P^{-1}AP$.

(vi) Donner la matrice de f dans cette nouvelle base.

2) Reprendre les questions précédentes avec l'application g définie pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$g(x, y, z) = (-x + 2y - 3z, x - 2y + 3z, -4x + 2y).$$

Exercice 25.

1) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ?

2) La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 26. *Soit A une matrice quelconque dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.*

1) Lister tous les cas de figures possibles pour le spectre de A et ses sous-espaces propres.

2) Que peut-on dire si A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \, ?$$

Exercice 27. *Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie pour tout P dans $\mathbb{R}_3[X]$:*

$$f(P) = P - (X+1)P'.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2) Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

3) Montrer que f est diagonalisable. On donnera une base de $\mathbb{R}_3[X]$ formée de vecteurs propres pour f.

Exercice 28. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application :*

$$\begin{array}{rccc} m_A & : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & & M & \mapsto & A.M \end{array}$$

1) Vérifier que m_A est linéaire.

2) Donner la matrice de m_A dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3) L'application m_A est-elle un isomorphisme ?

4) Est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base formée de vecteurs propres.

Exercice 29.* *Pour A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on note :*

$$\begin{array}{rccc} m_A & : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & & M & \mapsto & A.M \end{array}$$

1) À quelle(s) condition(s) sur A, l'application m_A est un isomorphisme ?

2) À quelle(s) condition(s) sur A, l'application m_A est diagonalisable ?

Exercice 30.* *Soit A une matrice d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est diagonalisable et décrire P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

Applications

Exercice 31. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer le spectre de A.

2) Déterminer $R = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 tel que :

$$X^n = \chi_A.Q + R.$$

3) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 32. *Soit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et la relation de récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + v_n - w_n \\ v_{n+1} &= -u_n + v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

Déterminer l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 33. *On veut étudier l'évolution d'une population de mammifères. On modélise cette évolution en faisant les hypothèses qui suivent. La population est structurée en trois classes d'âge : les jeunes qui ont moins de* 10 *ans, les adultes entre* 10 *et* 20 *ans et les individus âgés de plus de* 20 *ans. Jusqu'à* 30 *ans la mortalité est négligeable, puis une fois l'âge de* 30 *ans atteint, tous les individus meurent rapidement. Seuls les adultes se reproduisent : entre* 10 *et* 20 *ans, on estime que chaque individu femelle donne naissance à* 8 *jeunes (on suppose le nombre de femelle égale au nombre de mâle). On observe la population sur des intervalles de* 10 *ans. Pour tout* n *dans* $\mathbb{N}^*$*, on note* x_n*,* y_n *et* z_n *les effectifs respectifs des jeunes, des adultes et des individus âgés à l'année* $10n$*. Par exemple,* y_3 *est égal au nombre d'individus adultes après* 30 *années.*

1) Justifier le fait que la matrice qui modélise l'évolution est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Calculer le polynôme caractéristique de A *et donner son spectre.*

3) Pour chaque valeur propre, déterminer le sous-espace propre associé.

4) En déduire une matrice P *inversible tel que* $P^{-1}AP$ *soit une matrice diagonale.*

5) En déduire une expression explicite des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en fonction de* x_0*,* y_0*,* z_0 *et* n*.*

Exercice 34. *Résoudre le système différentiel suivant :*

$$\left\{\begin{array}{rcc} x'(t) & = & x(t)+z(t) \\ y'(t) & = & x(t)+z(t) \\ z'(t) & = & x(t)+y(t)+2z(t) \end{array}\right.$$

où x*,* y *et* z *sont des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

Exercice 35. *Une question importante en médecine ou en biologie est celle de savoir comment les composés chimiques passent d'une cellule à l'autre par diffusions à travers les parois de la cellule.*
Considérons deux cellules A et B toutes deux dépourvues d'un certain composé. Une quantité unitaire de ce composé est injectée dans la cellule A au temps $t = 0$ et au fur et à mesure que le temps passe, ce composé diffuse suivant le principe suivant : à tout instant, le taux (quantité par seconde) de diffusion d'une cellule à l'autre est proportionnel à la concentration (quantité par unité de volume) du composé dans la cellule diffusant le composé. Disons que le taux de diffusion de la cellule A à la cellule B est α fois le taux de concentration dans la cellule A et le taux de diffusion de B à A est β fois la concentration dans B (α et β étant des réels strictement positifs).

1) *On note $x_1(t)$ la concentration du composé dans la cellule A à l'instant t et $x_2(t)$ celle dans la cellule B. Traduire les données de l'énoncé en un système différentiel linéaire en $(x_1(t), x_2(t))$ avec conditions initiales.*

2) *Déterminer la concentration du composé dans chaque cellule à l'instant t.*

3) *Montrer qu'à long terme, les concentrations tendent à se stabiliser et déterminer les concentrations stabilisées.*

Exercice 36.* *Répondre à la question de l'exemple 4.3.15.*