

Électromagnétisme 1

Parcours des élèves ingénieurs Polytech
2ème année

Thomas LEPETIT - thomas.lepetit@univ-nantes.fr



23 septembre 2021

Table des matières

1	Bases de l'électrostatique	5
1.1	Introduction	5
1.1.1	Le champ électromagnétique et ses sources	5
1.1.2	Constitution de la matière	6
1.1.3	Les interactions fondamentales	8
1.1.4	Modélisation des distributions de charges	9
1.1.5	Intégration des densités	12
1.2	Champ électrostatique	12
1.2.1	Loi de Coulomb et principe de superposition	12
1.2.2	Champ et densité de charges	15
1.2.3	Propriétés du champ électrostatique	17
1.2.4	Le théorème de Gauss	19
1.3	Potentiel électrostatique	21
1.4	Bilan et équations	22
1.4.1	L'équation de poisson	22
1.4.2	Bilan	23
2	Conducteurs en équilibres électrostatique	25
2.1	Modélisation	25
2.1.1	Modèle physique des conducteurs	25
2.1.2	Conducteurs en équilibres	25
2.2	Propriétés des conducteurs en équilibre	26
2.2.1	Champ et pression locale à la surface	26
2.2.2	Potentiel d'un conducteur en équilibre	26
2.2.3	Influence de conducteurs chargés	27
2.3	Applications	28
2.3.1	Effet de pointe	28
2.3.2	Cage de Faraday	28
2.3.3	Condensateurs	29
3	Énergie électrostatique	33
3.1	Énergie potentielle d'interaction	33
3.1.1	Énergie potentielle d'une charge	33
3.1.2	Énergie potentielle d'un système de charges	34
3.2	Énergie emmagasinée dans les conducteurs chargés	35
3.3	Localisation de l'énergie	36
3.4	Électrostatisme dans les milieux diélectriques (traité en TD)	37

4	Bases de la magnétostatique	39
4.1	Introduction	39
4.2	Champ magnétostatique	39
4.2.1	Force magnétique & champ magnétique	39
4.2.2	Loi de Biot et Savart	40
4.2.3	Propriétés du champ magnétique	41
4.3	Théorème d'Ampère	41
4.4	Bilan	43
4.4.1	Potentiel vecteur	43
4.4.2	Les équations magnétostatiques	43

Chapitre 1

Bases de l'électrostatique

1.1 Introduction

1.1.1 Le champ électromagnétique et ses sources

L'interaction entre des *charges fixes* dans un référentiel Galiléen donne lieu à l'étude des phénomènes *électrostatiques*. Si ces mêmes charges sont en mouvement mais de façon permanente (courants établis permanents), on parle de phénomènes magnétostatiques. Ces phénomènes dits statiques sont l'objet du cours EMG1 au semestre 3. Ils nous permettront de nous familiariser avec les notions de champs et d'énergie électromagnétique dans un cadre simple où il n'y a pas de dépendance temporelle.

Si la *position* des charges et/ou la répartition des courants *dépendent du temps*, il y a apparition d'un *champ électromagnétique*. Ce couple inextricable $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ constitue une *onde électromagnétique*. Elle se *propage* en transportant une certaine énergie, au même titre que le mouvement d'un caillou tombant dans l'eau induit une onde mécanique à sa surface (déformation du milieu, on parle d'onde mécanique) qui se propage loin du point d'impact. Ces vagues transportent bien de l'énergie puisque des usines houlomotrices existent et produisent de l'énergie¹. Ces phénomènes de propagation d'ondes seront vus au semestre 4, en EMG2.

L'électromagnétisme n'est pas seulement un problème d'interaction à distance entre des charges et/ou des courant. L'onde électromagnétique possède une certaine autonomie vis-à-vis de ses sources car elle se propage loin des sources. Si l'on reprend l'analogie avec le caillou, une fois que celui-ci est tombé au fond de l'eau, la vague continue de se propager loin du point d'impact. Dans le cas de l'onde électromagnétique, il n'y a pas d'absorption d'énergie par le vide et l'onde se propage à l'infini (et à la vitesse $c = 3.10^8 m.S^{-1}$) si elle ne rencontre pas de matière. Nous baignons donc en permanence dans un fond électromagnétique continu. L'interaction rayonnement-matière (ou onde-matière), qui traduit les phénomènes de dispersion, d'absorption, de rayonnement à l'équilibre thermodynamique (corps noir) ou de propagation dans les milieux amplificateurs (laser), ne sera pas (ou peu) abordée dans le cadre de nos cours. L'étude des ondes électromagnétiques permet de traiter avec un même cadre conceptuel l'étude des ondes radio ou micro-ondes, de la lumière infra-rouge, visible ou ultra-violettes ou encore des rayons X ou gamma.

Les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} sont liés entre eux et à leurs sources par les

1. Voir par exemple "Falcão *et al*, Wave energy utilization : A review of the technologies, *Renewable and Sustainable Energy Reviews* **14**, 899-918 (2010)"

équations de Maxwell, mettant bien en évidence le *couplage* entre \vec{E} et \vec{B} :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Maxwell-Gauss} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{Maxwell-Flux} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Maxwell-Faraday} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{Maxwell-Ampère} \end{cases}$$

Avec $\vec{\nabla}$ l'opérateur Nabla, et \vec{j} et ρ les densités de courant et de charge de la distribution (les sources), introduite section 1.1.4.

Moyennant quelques opérations sur ces équations (voir cours d'optique ondulatoire correspondant sur l'équation de d'Alembert), on peut démontrer que le couple $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ vérifient des équations dites de *propagation*, décrivant le phénomène de propagation de l'énergie de l'onde correspondante :

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

1.1.2 Constitution de la matière

Particules élémentaires

En physique des particules, on distingue des particules élémentaires et des particules composées (hadrons) comme les nucléons (protons ou neutrons, formés à partir de quarks).

Les particules sont classées en fonctions de leurs propriétés, ou observables quantiques (relié à un opérateur quantique), comme la masse, la charge électrique, le spin, l'énergie, ect...

La masse et la charge électrique ont des équivalents "classiques", à savoir que la propriété d'un système à l'échelle macroscopique représente la somme des propriétés élémentaires (ici masse ou charge) des particules qui composent le système étudié. Le spin n'a pas d'équivalent "classique". Il est toutefois souvent assimilé au moment cinétique ou à la rotation d'un astre sur lui-même, comme dans l'expression « résonance spin-orbite ». Enfin, le moment cinétique intrinsèque (de spin) et le moment magnétique intrinsèque (de spin) sont tous deux confondus sous le terme de « spin ». Comme d'autres observables quantiques, sa mesure donne des valeurs discrètes.

On peut classer toutes les particules en deux grandes familles :

- Les **fermions**, qui ont une valeur de spin demi-entière (1/2, 3/2 ou 5/2), obéissent à la statistique de Fermi-Dirac (et en particulier au principe d'exclusion de Pauli) et sont les *constituants de la matière*.
- Les **bosons**, qui ont une valeur de spin entière (0, 1 ou 2), obéissent à la statistique de Bose-Einstein et sont les *vecteurs des interactions fondamentales*.

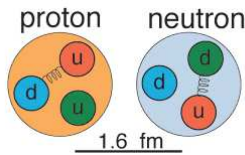
Le tableau 1.1 résume le classement des différentes particules élémentaires.

Particules élémentaires	Fermions	Leptons	Chargés (charge -1)	Electrons : e^-
				Muon : μ^-
				Tauon : τ^-
			Neutrinos (charge=0)	Electronique : ν_e
				Muonique : ν_μ
				Tauonique : ν_τ
		Quarks	Charge +2/3	up : u
				Charm : c
				Top : t
			Charge -1/3	down : d
				Strange : s
				Bottom : b
	Bosons	Bosons de jauge	Interaction électromagné- tique	Photon : γ
			Interaction faible	Boson Z^0
				Boson W^-
				Boson W^+
			Interaction forte	Gluon
		Autres bosons	Interaction gravitation- nelle	Graviton
			Interaction électro-faible	Boson de Higgs

TABLE 1.1 – Particulaires élémentaires

Notion de charge élémentaire

La charge élémentaire correspond à la charge électrique, au signe près, des constituants de l'atome. Les quarks sont censés posséder une charge électrique fractionnaire mais sont confinés à l'intérieur d'hadrons (ex : protons, neutrons), particules dont la charge est un multiple de la charge élémentaire, et n'ont pour l'instant jamais été détectés séparément. La constante de Faraday \mathcal{F} est définie comme le produit de la charge élémentaire e par le nombre d'Avogadro \mathcal{N}_a .



Charge électrique des constituants de l'atome :

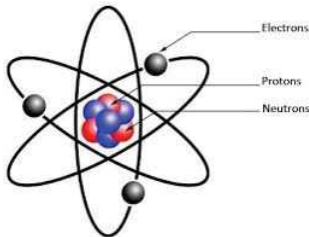
- Proton = $+e$
- Neutron = 0 (neutre)
- Electron = $-e$

Avec $e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$ la charge élémentaire

La valeur de cette charge élémentaire, dans le système SI, est donnée par :

$$e = \sqrt{\frac{2\hbar\alpha}{\mu_0 c}} \quad \left\{ \begin{array}{l} h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}, \text{ constante de Planck ;} \\ \alpha = 7,297 \times 10^{-3}, \text{ constante de structure fine ;} \\ \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}, \text{ perméabilité magnétique du vide ;} \\ c = 2,997 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ vitesse de la lumière dans le vide.} \end{array} \right.$$

Charge à l'échelle de l'atome



L'atome est constitué d'un noyau autour duquel "gravitent" des électrons. le noyau est constitué de nucléons, eux-mêmes constitués d'autres particules élémentaires, les quarks.

Comme nous le verrons par la suite, l'interaction électromagnétique interviendra sur les corps chargés électriquement. Les protons (hadrons), particules elles-mêmes composées de quarks (fermions), compose en partie le noyau des atomes et possèdent une charge électrique non nulle. Cependant à l'échelle de l'atome (stable et non ionisé) cette charge est exactement compensée par la charge des électrons (fermions). Afin qu'un atome possède une charge électrique non nulle, il faut donc qu'il perde ou gagne des électrons ou des protons. La cohésion du noyau est assurée par l'interaction forte qui, comme nous le verrons par la suite, est très importante et empêche, dans presque tous les cas, le gain ou la perte de proton. Une charge non nulle sera donc le fruit du gain ou de la perte d'électrons au niveau des atomes du système étudié.

Finalement la charge totale Q d'un atome sera donnée par la relation : $Q = e(N_p - N_e)$, avec e la charge élémentaire, et N_p et N_e le nombre de protons (fixe) et d'électrons (variable) de l'atome.

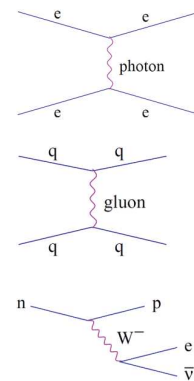
1.1.3 Les interactions fondamentales

Les quatre interactions fondamentales régissent les lois de la physique et se manifestent par des forces fondamentales. Les puissances de ces forces fondamentales sont normalement très différentes, mais si l'énergie cinétique des particules augmente, les puissances deviennent

du même ordre de grandeur. On pense que les quatre forces avaient la même puissance aux énergies extrêmement élevées qui étaient en jeu juste après le Big Bang.

En théorie quantique des champs, ces forces sont décrites par l'échange de bosons virtuels (voir les schémas ci-dessous) : le modèle standard décrit les interactions forte, faible et électromagnétique, mais une théorie quantique des champs n'a pas encore pu être élaborée pour la gravitation (bien que les ondes gravitationnelles aient été mise en évidence récemment, le boson virtuel serait alors un graviton).

- Gravitationnelle
 - Très longue portée
 - Agit sur tous types de corps
- Electromagnétique
 - Très longue portée
 - Agit sur tous les corps chargés
 - 10^{37} fois plus forte que l'interaction G
- Forte
 - Très courte portée (10^{-15} m)
 - Agit sur les quarks (cohésion du noyau)
 - 100 fois plus forte que l'interaction EM
- Faible
 - Très courte portée (10^{-17} m)
 - Agit entre quarks et leptons (radioactivité)
 - 105 fois plus faible que l'interaction forte



L'objet de ce cours est l'étude de l'interaction électromagnétique, s'appliquant à l'ensemble des corps chargés, se traduisant par une force électromagnétique. On introduira alors la notion de champ électromagnétique permettant de traduire en tout point de l'espace, l'effet de l'interaction électromagnétique sur un corps chargé.

1.1.4 Modélisation des distributions de charges

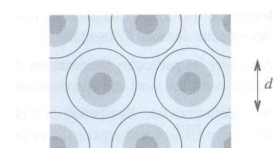
Problématique de l'échelle d'observation : On va chercher à modéliser par une fonction de l'espace la distribution de charge. Il s'agira d'un champ scalaire qui associera à tout point P de la distribution une information sur la charge *locale*.

Les charges étant discrètes (élémentaires), la charge locale sera alors la somme algébrique des charges élémentaires présentes dans un petit volume centré en P . Ce volume doit être suffisamment petit pour qu'à notre échelle (échelle dite *macroscopique*) nous puissions prendre en compte les variations éventuelles de la distribution de charge, mais suffisamment grand pour avoir suffisamment de charges discrètes pour en faire la somme.

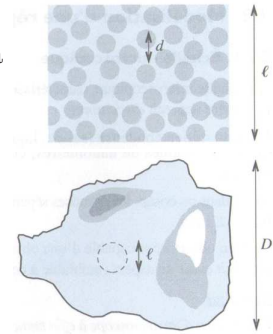
Le volume à considérer sera alors intermédiaire entre l'échelle *microscopique* (à l'échelle des charges élémentaires) et *macroscopique* (notre échelle). On appelle cette échelle intermédiaire l'échelle *mésoscopique*.

Ces échelles sont résumées ci-dessous :

- Microscopique - matière discontinue
 - $d \simeq 10\text{nm}$ (atome $0,1\text{nm}$)
 - échelle du "point"
 - étude des comportements d'ensemble difficile



- Mésoscopique
 - échelle intermédiaire (locale) permettant un lissage de la valeur d'une grandeur (ex la charge) variant continument
 - Description en terme de *milieux continus*
- Macroscopique
 - Inhomogénéités non prises en compte
 - adaptée à notre échelle

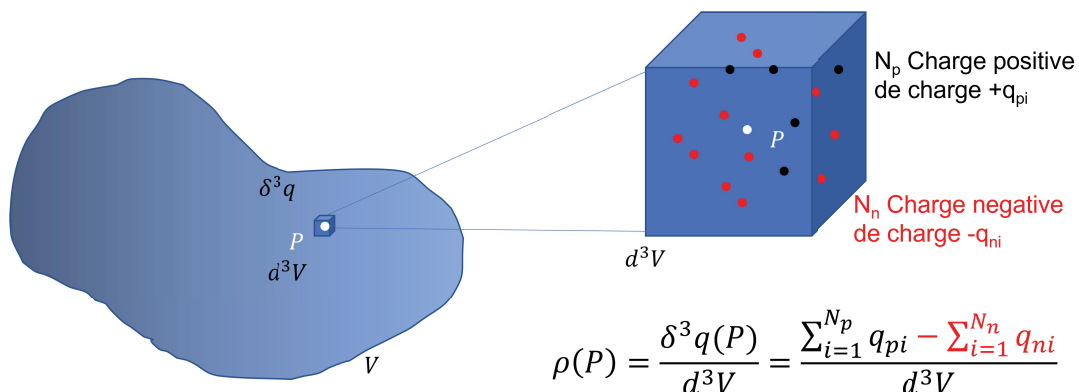


Notion de densité Si l'on cherche à décrire la répartition des charges dans un volume V (échelle macroscopique, non infinitésimale), nous allons utiliser un point P afin de pouvoir décrire les éventuelles inhomogénéités au sein du volume V , comme illustré sur la figure ci-dessous.

Si l'on regarde exactement au point P (échelle microscopique), il ne peut y avoir que trois cas. Soit il n'y a pas de charge (cas le plus probable), soit il y a une charge élémentaire positive $+e$, soit il y a une charge élémentaire négative $-e$. A l'échelle du point P il n'est donc pas possible de savoir si, *localement*, il a plus ou moins de charges qu'à un autre point P' du volume V .

Pour remédier à ce problème, nous allons prendre un *volume infinitésimal* d^3V (échelle mésoscopique) dans lequel nous allons faire la somme des charges élémentaires positives $+q_p$ et négatives q_n présentes au sein de ce volume. Il est à noter que toutes les charges positives (ou négatives) n'ont pas nécessairement la même valeur et dépendent de l'état de charge local de l'atome en question. Cette *quantité* de charges élémentaires présente au sein du volume infinitésimal d^3V se nomme la charge *infinitésimale* δ^3q .

Nous pourrions donc décrire la distribution de charge par un champ scalaire qui à tout point P renverrait la quantité de charge infinitésimale $\delta^3q(P)$. La plupart des physiciens préfèrent décrire la distribution de charge à l'aide d'un autre champ scalaire appelé *densité volumique de charge*, désignant la *teneur* en charges dans un volume infinitésimal centré au point considéré. Elle s'exprime en $[C.m^{-3}]$. Cette grandeur, comme nous le verrons par la suite, est très utile pour remonter à la charge totale contenue dans un volume V par simple *intégration* sur l'ensemble des points du volume V .



A retenir

A une échelle macroscopique les distributions de charges sont modélisées à l'aide d'une grandeur lissée (moyennée) à une échelle mésoscopique → la **densité de charge** ρ ,

permettant la description des charges en terme de milieux continus.

$$\rho(P) = \frac{\delta^3 q(P)}{d^3 V}$$

Point sur les notations :

- quantité : On représentera une quantité infinitésimale (issue d'éléments discrets/élémentaires) par la lettre grecque δ . Pour passer de l'échelle locale à macroscopique on utilise l'opérateur intégral comme la somme d'éléments discrets. Ex : $Q = \int_{\mathcal{D}} \delta q$ où \mathcal{D} représente la distribution de charges
- Différence/différentielle : On représentera une différence infinitésimale entre 2 états (pouvant être décrite par la différentielle d'une fonction d'état) par la lettre d . Pour passer de l'échelle locale à macroscopique on utilise l'opérateur intégral comme l'aire sous la courbe de la fonction décrivant la grandeur considérée et le calcul fera intervenir une primitive prise entre deux états.
- Le degré infinitésimal : La puissance 3 dans le volume infinitésimal $d^3 V$ implique qu'il résulte du produit de 3 distances infinitésimales prise à l'échelle mésoscopique. En cartésien on aura ainsi $d^3 V = dx.dy.dz$. On peut très bien avoir un volume infinitésimal de degré inférieur. Par exemple $d^2 V = A.dy.dz$ est de degré 2 si A est une distance prise à l'échelle macroscopique. Le degré infinitésimal donne le nombre de dimensions selon laquelle nous devons intégrer une grandeur locale pour obtenir une grandeur macroscopique. C'est très pratique !

Cas des distributions surfaciques ou linéïques : Dans certains cas, lorsque une ou deux des dimensions de la distributions deviennent négligeables (devant la ou les autres dimensions de l'espace) on pourra modéliser la distribution sous forme de densité surfacique ou linéïque. Cela permettra de simplifier certains calculs mais introduira également des divergences en certains points !

Modélisation de la distribution sous forme de densité (attention les notations sur les schémas sont moins rigoureuses que ce que nous utilisons) :

- Charges volumiques

$$\delta^3 q = \rho d^3 V$$

$$\rho [C.m^{-3}]$$

- Charges surfaciques

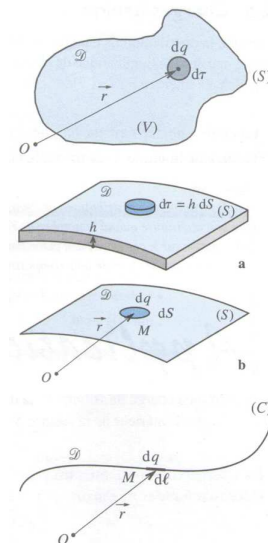
$$\delta^2 q = \sigma d^2 S$$

$$\sigma [C.m^{-2}]$$

- Charges linéïques

$$\delta q = \lambda dl$$

$$\lambda [C.m^{-1}]$$



1.1.5 Intégration des densités

Il est possible de passer de l'échelle locale (valable en un point P) à l'échelle macroscopique (pour un ensemble de points P contenus dans un volume V). Il faut alors intégrer. Retrouver la charge totale Q contenue dans un volume V revient à sommer les charges infinitésimales contenues dans tous les volumes infinitésimaux d^3V constituant le volume V . C'est comme si on avait "découpé" le volume V en petits volumes d^3V , et que l'on sommait les charges contenues dans chacun des petits volumes. On a alors :

$$Q = \int_{\mathcal{D}} \delta^3 q$$

Or, la charge infinitésimale est liée à la notion de densité par la relation $\rho(P) = \frac{\delta^3 q(P)}{d^3V}$, on a donc :

$$Q = \int_{\mathcal{D}} \delta^3 q = \iiint_{P \in V} \rho(P) \cdot d^3V$$

Exemple uniforme : Considérons un cylindre de rayon R et de hauteur H chargé uniformément avec une densité volumique de charge ρ_0 . La charge totale contenue dans le cylindre est de :

$$Q = \iiint_{V_{cyl}} \rho_0 r dr d\theta dz = \rho_0 \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz = \rho_0 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} [z]_0^H = \rho_0 \frac{R^2}{2} 2\pi H$$

Finalement on retrouve bien le produit de la densité uniforme par le volume du cylindre :

$$Q = \rho_0 \pi R^2 H$$

Exemple non uniforme : Retrouver la charge contenue dans le cylindre si la densité volumique de charge s'exprime à présent :

$$\rho(P) = \rho_0 \frac{r}{R} \frac{z}{H}$$

1.2 Champ électrostatique

1.2.1 Loi de Coulomb et principe de superposition

Charles-Augustin Coulomb, né le 14 juin 1736 à Angoulême et mort le 23 août 1806 à Paris, est un officier, ingénieur et physicien français ayant mis en évidence expérimentalement la force fondamentale d'interaction électrique entre deux charges.

Il utilisa une balance de torsion (voir Fig.1.1) pour modéliser cette force, l'angle de torsion entre les deux boules chargés étant proportionnel à l'intensité de la Force (en N).

Charles-Augustin Coulomb donne son nom à l'unité dérivée du SI pour la charge électrique. Le coulomb est la quantité d'électricité traversant une section d'un conducteur parcouru par un courant d'intensité de un ampère pendant une seconde, $1C = 1A.s$, et équivaut à $6,24.10^{18}$ charges élémentaires.

Expérimentalement la force est :

- inversement proportionnelle à la distance au carré entre les charges
- proportionnelle à q_1
- proportionnelle à q_2
- dirigée suivant la ligne définies par les 2 charges

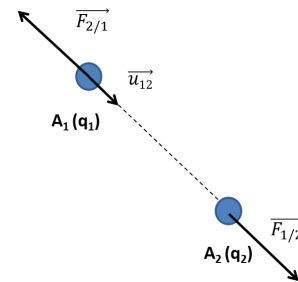


FIGURE 1.1 – Charles-Augustin Coulomb (à gauche), et sa balance de torsion lui ayant permis de mettre en évidence expérimentalement la force fondamentale d'interaction électrique entre deux charges

Modélisation mathématique :

$$\vec{F}_{1/2} = k \times \frac{q_1 q_2}{A_1 A_2^2} \times \vec{u}_{12}$$

- $\vec{F}_{1/2}$: force exercée par la charge 1 sur la charge 2 en Newton (N).
- $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 SI$: constante de Coulomb.
- ϵ_0 : permittivité du vide.
- q_1, q_2 : charge électrique en Coulomb (C).
- distance $A_1 A_2$ entre les charges en mètre (m).
- $\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}}{r}$: vecteur unitaire qui permet de donner la direction de la force d'interaction.

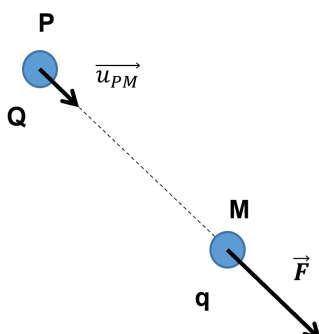


Cette force obéit au principe d'action et de réaction de Newton. Alors : $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$

Explication 1.1 (Ordre de grandeur)

Champ créé par une charge ponctuelle

On introduit la notion de **champ** électrique $\vec{E}(M)$. Cette grandeur, vectorielle, va permettre de traduire, là où elle est définie, la force que subirait une charge test q au point M considéré. Ce champ contient dans son expression, l'origine de la force subie par la charge test, ici la charge ponctuelle Q . On parle de source du champ (et de la force électrique associée).



$$\begin{cases} \vec{F}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{PM^2} \vec{u}_{PM} = q\vec{E}(M) \\ \vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} \quad [V/M] \end{cases}$$

Champ créé par une charge ponctuelle

Dans la mesure où $\vec{u}_{PM} = \frac{\vec{PM}}{PM}$ on peut écrire le champ en M créé par la charge ponctuelle en P de 2 manière :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

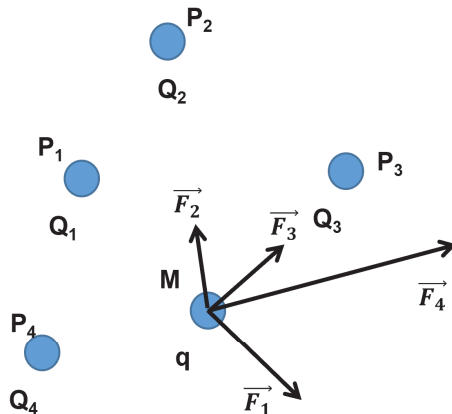
Si on place la charge ponctuelle au centre du repère sphérique (P=0) on a donc $PM = OM = r$ et $\vec{u}_{PM} = \vec{u}_r$ et finalement :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

Explication 1.2 (Notion de champ)

Champ créé par un ensemble discret de charges

Le champ électrique obéit au **principe de superposition linéaire**. Ce principe permet de traduire les phénomènes d'écrantage, ou d'augmentation de la force subie par la charge test lorsque s'accumulent des charges de même signe à proximité.

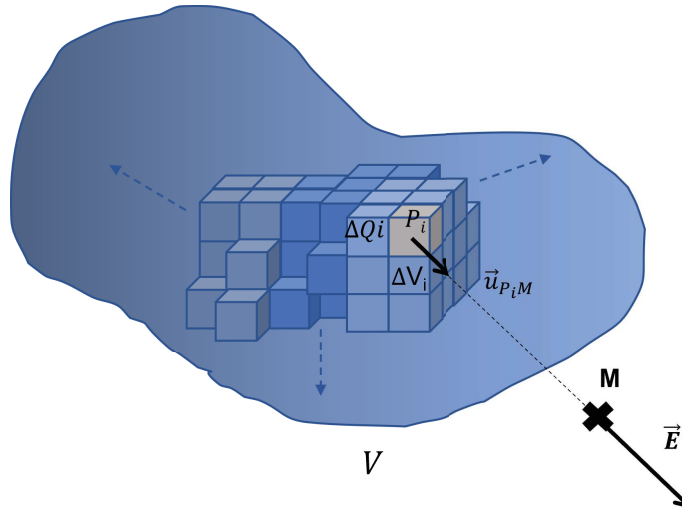


La Force sur M résultant de l'interaction avec n particules de charge Q_i est la somme des forces élémentaires :

$$\begin{cases} \vec{F}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i(M) = q \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = qE(\vec{M}) \\ \vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{P_iM}}{P_iM^2} \end{cases}$$

Champ créé par une distribution "continue" de charge

On reprend l'exemple de notre volume chargé contenant des charges positives et négatives. On divise alors cet espace en une somme discrète de petits volumes ΔV_i , contenant chacun un ensemble de charges ΔQ_i .



En réutilisant la formule du champ créé par une charge ponctuelle, chacun de ces ensembles de charges donnera lieu à un champ :

$$\vec{E}_i(M) = \frac{\Delta Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{P_i M}}{P_i M^2}$$

D'après le principe de superposition :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(M) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{P_i M}}{P_i M^2}$$

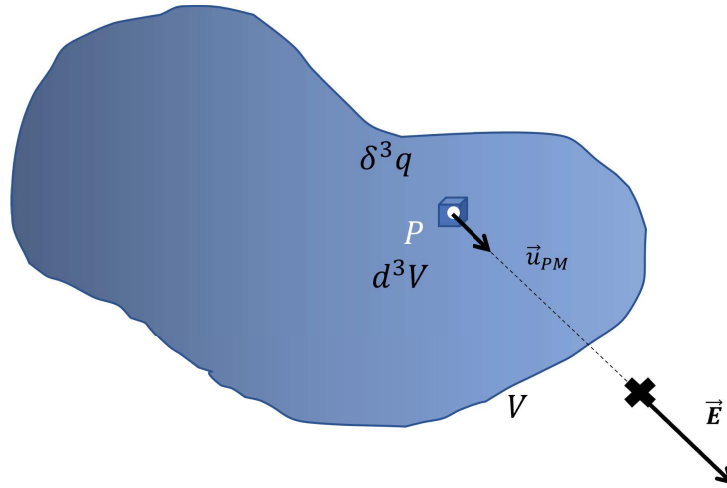
On comprend aisément que cette manière de procéder donnera des résultats "satisfaisant" si le volume ΔV_i centré sur le point P_i n'est pas trop grand, si bien que l'ensemble des charges contenues dans ce volume donneront lieu à un champ élémentaire porté par un vecteur unitaire "proche de $\vec{u}_{P_i M}$ ".

En réalité, si nous voulons être rigoureux, ce volume doit tendre vers un point à l'échelle macroscopique, et ce n'est qu'à l'échelle mésoscopique que ce point deviendra un petit volume (cas de la section suivante).

1.2.2 Champ et densité de charges

Distribution volumique des charges

Nous reprenons le cas précédent mais en faisant tendre les volumes ΔV_i vers des volumes infinitésimaux d^3V :



Attention! $\rho(P)$, PM et \vec{u}_{PM} s'expriment en fonction de coordonnées de l'espace (où se trouve le point P au cours de l'intégration).

Champ créé par une distribution volumique de charge

On peut introduire le champ infinitésimal $\delta^3 \vec{E}(M)$ créé au point M par la charge infinitésimale $\delta^3 q(P)$ en P :

$$\delta^3 \vec{E}(M) = \frac{\delta^3 q(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} = \frac{\delta^3 q(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

On peut également réutiliser la notion de densité volumique de charges :

$$\delta^3 q(P) = \rho(P) d^3V$$

Le champ total résulte de l'intégration de tous les champs infinitésimaux sur le volume (généralisation de la notion de somme), finalement :

$$\vec{E}(M) = \iiint_V \delta^3 \vec{E}(M) = \iiint_V \frac{\rho(P) d^3V}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} = \iiint_V \frac{\rho(P) d^3V}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Généralisation à tous les types de distributions

— Pour une distribution surfacique : $\delta^2 q = \sigma d^2S$, on a donc :

$$\vec{E}(M) = \iint_S \frac{\sigma(P) d^2S}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} = \iint_S \frac{\sigma(P) d^2S}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

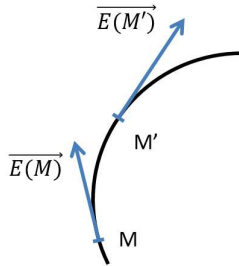
— Pour une distribution linéique : $\delta q = \lambda dl$, on a donc :

$$\vec{E}(M) = \int_L \frac{\lambda(P) dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} = \int_L \frac{\lambda(P) dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Attention le champ $\vec{E}(M)$ n'est pas défini en un point des sources si ces sources sont modélisées par une densité surfacique ou linéique de charge.

Explication 1.3 (Problématique des densités surfaciques ou linéïques)

1.2.3 Propriétés du champ électrostatique

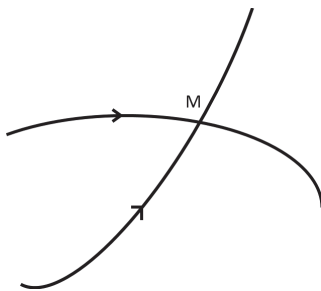


Le champ est continuellement tangent à des courbes appelées **lignes de champs**, orientées dans le sens du champ.

$$\text{Equation : } \overrightarrow{dOM} \wedge \overrightarrow{E(M)} = \vec{0}$$

Explication 1.4 (Calcul en coordonnées cartésienne)

Lignes de champs

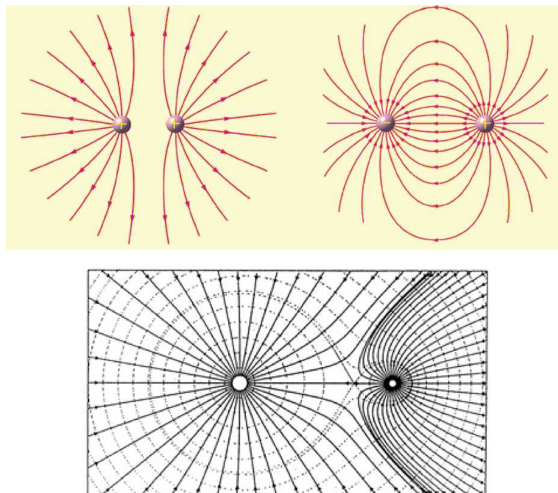


Deux lignes de champs ne se coupent pas en un point M où le champs $\overrightarrow{E_S(M)}$ est défini et non nul.

En M soit :

- Champ nul (point d'arrêt)
- Champ non défini (présence charge ponctuelle ou surface ou ligne chargée)

Exemples de lignes de champs



Principe de Curie

Le principe de Curie est un principe que l'on retrouve dans de nombreux domaines de la Physique et qui facilite l'étude de nombreux phénomènes.

Principe de Curie

Dans une expérience les effets présentent au moins les symétries des causes

Nous allons nous servir de ce principe afin de simplifier l'étude et la détermination du champ électrique créé par une distribution de charge donnée. En effet, dans le cas général (ex en coord. cartésienne), le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z)\vec{e}_x + E_y(x, y, z)\vec{e}_y + E_z(x, y, z)\vec{e}_z$$

Le calcul intégral, à partir des formules précédentes, peut vite devenir très pénible. L'enjeu est alors d'étudier les symétries et les invariances des sources, afin d'en tirer des informations et des simplifications dans l'expression du champ électrique induit par ces sources.

Explication 1.5 (Étude des symétries et des invariances)

Symétries élémentaires

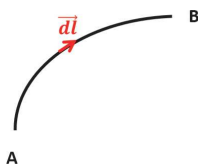
- **Plan de symétrie** : $\vec{E}(M)$ appartient à tout plan de symétrie de la distribution passant par M
- **Plan d'anti-symétrie** : $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire à tout plan d'anti-symétrie de la distribution passant par M

Invariances élémentaires

- **Invariance par translation suivant un axe \vec{Oz}** : Le champ (ses coord.) devient indépendant de la coord. z
- **Invariance par rotation autour d'un axe \vec{Oz}** : Le champ devient indépendant de la coord. angulaire θ (en cylindrique)
- **Invariance par rotation autour de tout axe passant par O** : Il s'agit de la symétrie sphérique, le champ devient alors indépendant des coord. angulaires θ et φ (en sphérique)

Circulation

Nous introduisons ici la circulation du champ électrostatique. Nous verrons par la suite que cette grandeur est étroitement liée à une autre grandeur physique bien connue : le potentiel électrique. Nous remarquerons que la circulation d'un vecteur, opération mathématique consistant à intégrer point par point le long d'un chemin le produit scalaire de ce vecteur par le vecteur déplacement élémentaire, a déjà été vu en mécanique. En effet la circulation d'un vecteur force se nomme *travail*.



Définition

$$\text{Circulation : } C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Explication 1.6 (Circulation du champ d'une charge ponctuelle)

La circulation du champ *électrostatique* (noté ici \vec{E}_S pour ne pas le confondre avec le champ électrique variable dans le temps pour lequel cette propriété n'est plus valable) est **conservative** (indép. du chemin suivi).

$$\forall \text{ contour fermé } \Gamma, \oint_{\Gamma} \vec{E}_S \cdot d\vec{l} = 0$$

Discontinuité à la traversée d'une surface chargée

Nous avons vu précédemment que le champ électrique n'était pas défini au niveau des surfaces portant des charges modélisées par une densité surfacique σ . Une conséquence est que de part et d'autre de cette surface chargée, le champ électrique est différent. On parle de discontinuité à la traversée d'une surface chargée, le champ est bien non défini sur la surface.

Explication 1.7 (Champ créé par un disque uniformément chargé)

Voici le théorème général, duquel découlera plus tard le théorème de Coulomb :

Appelons \vec{E}_2 et \vec{E}_1 les champs électrostatiques de part et d'autre d'une surface chargée (modélisée par une densité surfacique de charge σ), au voisinage de cette surface, alors :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

1.2.4 Le théorème de Gauss

Le théorème de Gauss est une technique analytique permettant de calculer

Expression intégrale du théorème de Gauss :

Le flux de \vec{E} sortant d'une surface fermée S_G entourant un volume V_{S_G} est égal à la somme des charges à l'intérieur de ce volume divisée par ϵ_0 .

$$\Phi = \oint_{S_G} \vec{E}(M) \cdot d^2\vec{S} = \iiint_{V_{S_G}} \frac{\rho(P)}{\epsilon_0} d^3V = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

- Les charges extérieures à la surface n'interviennent pas dans l'expression du flux de \vec{E} sortant de S_G , cela ne signifie pas qu'elles n'interviennent pas sur le champ lui-même.
- Le théorème de Gauss est une méthode classique pour le calcul du champ électrostatique, mais il faut faire des choix judicieux de surfaces S_G dans un **système de coordonnées adéquat** avec au préalable une **étude des symétries et des invariances**.
- Le théorème de Gauss n'est utilisable facilement que pour des distributions-sources présentant un **haut degré de symétrie**.

- Le théorème de Gauss permet de déterminer le champ électrique créé par une distribution source. Le champ électrique est donc l'inconnue et il n'est donc pas possible de déterminer une primitive de la fonction le décrivant. **La fonction $M \rightarrow \vec{E}(M)$ décrivant le champ électrique ne doit donc nécessairement dépendre que d'une variable spatiale au maximum** afin de pouvoir la sortir de l'intégrale double (flux).

Méthodologie pour appliquer le théorème de Gauss

1. Étude des symétries de la distribution source pour déterminer le vecteur directeur de \vec{E} .
2. Étude des invariances de la distribution source pour déterminer de quelle variable dépend le champ électrique.
3. Choix de la surface de Gauss S_G et de la ou les surfaces élémentaires d^2S_i associées. Le vecteur directeur permet de choisir la surface de Gauss à utiliser car les surfaces élémentaires ne peuvent être que colinéaires ou orthogonales à ce vecteur directeur afin que le calcul du flux élémentaire soit possible, soit $\delta^2\Phi = \vec{E} \cdot d^2\vec{S} = E \cdot d^2S$ ou $\delta^2\Phi = 0$, respectivement. La surface élémentaire ne peut pas contenir la différentielle de la variable dont dépend le champ électrique.
4. Calcul du flux total du champ électrique à travers la surface de Gauss : $\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E}(M) \cdot d^2\vec{S}$. Le résultat doit faire apparaître l'inconnue cherchée, c'est à dire la partie scalaire du champ électrique $E(M)$ lui même !
5. Calcul de la charge totale Q_{int} contenue dans le volume V_{S_G} s'appuyant sur la surface de Gauss S_G par intégration spatiale de la densité de charge. Les bornes d'intégration sont toujours de 0 à l'endroit où se trouve la surface de Gauss, mais peuvent se réduire à un sous domaine spatial s'il n'y a pas de charges partout dans le volume V_{S_G} .
6. Application du théorème avec l'égalité $\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ et établissement de l'expression de $E(M)$. On connaît déjà le vecteur directeur donc on a bien $\vec{E}(M)$.

Expression locale du théorème de Gauss : L'expression locale du théorème de Gauss et l'utilisation du théorème d'Ostrogradski permettent de trouver l'équation de Maxwell-Gauss.

Le théorème d'Ostrogradski nous dit que quel que soit le vecteur \vec{A} :

$$\oiint_{P \in S} \vec{A}(P) \cdot d^2\vec{S} = \iiint_{P \in V} \text{div} \vec{A}(P) d^3V$$

On a alors :

$$\oiint_{P \in S} \vec{E} d^2\vec{S} = \iiint_{P \in V} \text{div}(\vec{E}(P)) d^3V = \iiint_{P \in V} \frac{\rho(P)}{\epsilon_0} d^3V$$

Par identification il vient $\forall M$ de l'espace (ou P ou tout autre lettre bien sûr !) :

Équation de Maxwell-Gauss : $\boxed{\text{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}}$

Explication 1.8 (TD-cours : Calcul du champ créé par un fil infini)

1.3 Potentiel électrostatique

Rappel : la circulation C_{AB} de \vec{E} est conservative donc ne dépend pas du chemin suivi entre A et B. En conséquence, on peut définir une fonction $M \rightarrow V(M)$ de l'espace, appelée *Potentiel Électrostatique*, définie à une constante près, afin de quantifier la circulation du champ entre ces deux points :

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Écriture sous forme différentielle :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Le champ électrique \vec{E} est ainsi un champ de gradient, on dit qu'il dérive du potentiel :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V(M))$$

Explication 1.9 (Cas de la charge ponctuelle)

Remarques :

- Le potentiel V est une fonction scalaire : elle permet donc l'utilisation d'additions et de soustractions.
- Sa valeur n'est définie qu'à une constante près qui dépend du choix du point de référence. Par contre, les différences de potentiel sont, elles, parfaitement définies, la référence n'intervenant plus.
- La plupart du temps, on choisit $V_\infty = 0$ s'il n'y a pas de charges à l'infini, alors :

$$V(M) = - \int_\infty^M \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Explication 1.10 (Lien avec l'énergie (travail de la force d'interaction))

Potentiel d'une distribution de charges :

- Distribution linéique de charges λ :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in L} \frac{\lambda dl}{PM}$$

- Distribution surfacique de charges σ :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{P \in S} \frac{\sigma d^2S}{PM}$$

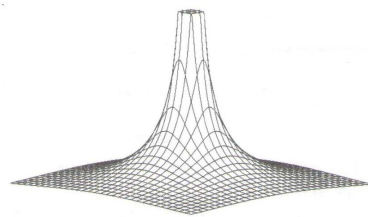
— Distribution volumique de charges ρ :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{P \in V} \frac{\rho d^3V}{PM}$$

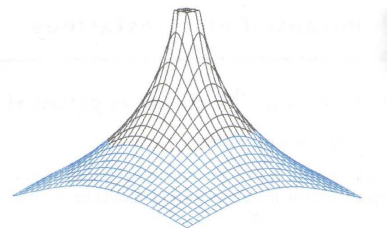
Explication 1.11 (Retour sur le disque uniformément chargé)

Propriétés :

- Le potentiel est continu quand il est défini.
- Le champ est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles.
- Les lignes de champs sont orientées dans le sens des potentiels décroissants



Doc. 4. Potentiel d'une charge ponctuelle :
 $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ à l'infini, $V = 0$.



Doc. 5. Potentiel d'un fil infini $V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left[\frac{r}{R}\right]$.
 Nous visualisons l'équipotentielle 0 à distance finie R du fil. À l'infini, V est infini.

Explication 1.12 (Surface équipotentielles et lignes de champs)

1.4 Bilan et équations

1.4.1 L'équation de poisson

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.2)$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad (1.3)$$

$$(2) \rightarrow (1) \Rightarrow \text{div} \left(-\overrightarrow{\text{grad}} V \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{or } \text{div} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \Phi \right) = \nabla \cdot (\nabla \Phi) = \Delta \Phi$$

Ce qui permet d'écrire l'équation de Poisson :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Remarque : L'équation de Poisson est une expression locale sous forme différentielle du potentiel électrostatique.

En coordonnées cartésiennes l'équation de Poisson donne :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

S'il n'y a pas de charge localement ($\rho = 0$), alors l'équation de Poisson est une équation de Laplace :

$$\Delta V = 0$$

Pour résoudre ces équations, les conditions aux limites doivent être connues.

1.4.2 Bilan

Équations locales		Équations intégrales
$\begin{cases} \vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M) \\ dV = -\vec{E}(M) \cdot \vec{dl} \end{cases}$	\Rightarrow	$\left\{ V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}(M) \cdot \vec{dl} \right.$
$\text{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$	\Rightarrow	$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{d^2S} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} d^3V$
$\nabla^2 V(M) = -\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$		

Chapitre 2

Conducteurs en équilibres électrostatique

2.1 Modélisation

2.1.1 Modèle physique des conducteurs

Définition

Les conducteurs (parfaits) sont des milieux où existent des charges **libres**, c'est à dire pouvant être mise en mouvement sous l'action d'un champ électrique.

Les isolants (parfaits) sont des milieux dans lesquels les charges sont **fixes**.

En réalité :

- Bons conducteurs (métaux, électrolytes)
- Mauvais conducteurs (diamant, plastique, verre, air, eau pure)
- Semi-conducteurs (silicium, germanium)

Dans le cadre de ce cours : Conducteur = conducteur parfait et isolant = isolant parfait

2.1.2 Conducteurs en équilibres

Explication 2.1 (Réalisation d'un équilibre)

- Un conducteur est dit en équilibre électrostatique quand la **répartition de charges est stationnaire** (indépendante du temps). On a quand même des mouvements aléatoires, mais tel que $\rho(M)$ reste constant.
- Le **champ électrique** à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est forcément **nul**.
- Le **potentiel** à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est **constant**.
- Il n'y a **pas de charges à l'intérieur d'un conducteur** en équilibre
- la distribution de charge est superficielle, on utilise des **distributions surfaciques**.

2.2 Propriétés des conducteurs en équilibre

2.2.1 Champ et pression locale à la surface

Théorème de Coulomb

Nous avons vu qu'à la traversée d'une surface chargée : $E_{t1} = E_{t2}$

Puisque $\vec{E}_{int} = \vec{0}$ on obtient $E_{t ext} = 0$

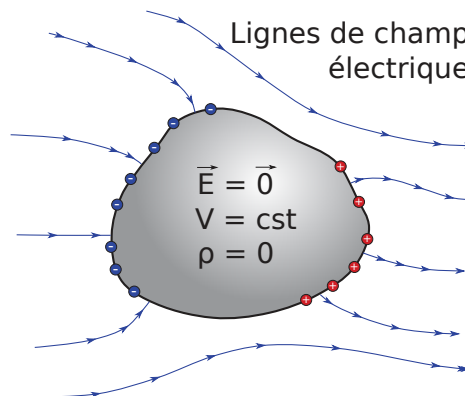
Nous avons également vu que : $\vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Ces deux propriétés permettent de conclure que \vec{E} à la surface d'un conducteur répond au critère suivant :

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_S$$

Explication 2.2 (Démonstration détaillée)

Pression électrostatique



On peut définir une pression électrostatique p s'exerçant localement en tout point de la surface du conducteur chargé. Elle est liée à la force générée par le champ extérieur à dS (c'est à dire le champ créé par la surface du conducteur hormis dS)

$$p = \frac{\vec{dF} \cdot \vec{n}_s}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

$$p = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

Explication 2.3 (TD-cours : Démonstration détaillée)

2.2.2 Potentiel d'un conducteur en équilibre

On a vu que le **potentiel était continu à la traversée d'une surface chargée.**

De plus, $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ et $\vec{E}_{int} = \vec{0}$.

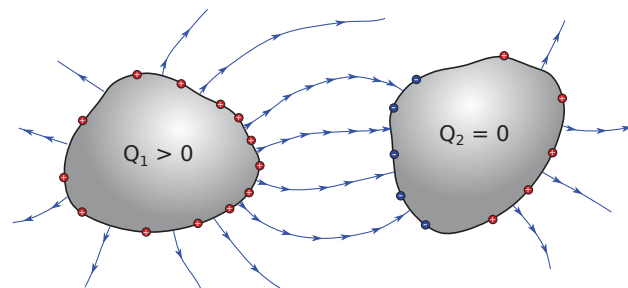
Alors $V_{int} = V_0$ dans le conducteur et $V_{surf} = V_0$ à la surface par continuité.

La surface d'un conducteur est une surface équipotentielle.

⇒ Deux conducteurs reliés entre eux par un fil seront donc au même potentiel.

2.2.3 Influence de conducteurs chargés

Influence partielle entre deux conducteurs



Définition :

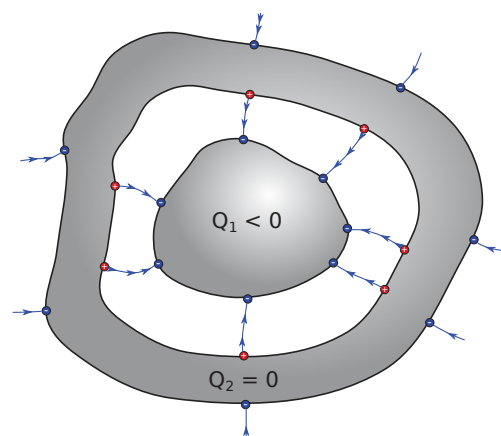
On nomme **tube de champ** l'espace délimité par deux lignes de champ

Le flux sortant d'un tube de champ est nul ($\vec{E} \perp S_{lat}$ et $\vec{E}_{int} = \vec{0}$). Le théorème de Gauss permet de conclure que les charges contenues de part et d'autre d'un tube de champ sont égales et opposées.

Explication 2.4 (Théorème des éléments correspondants)

Ici l'influence est dite **partielle** car seule une partie des lignes de champ issues du solide 1 aboutit au solide 2.

Influence totale Si un conducteur entoure totalement un autre, il y a correspondance totale entre les charges des surfaces en vis à vis. On parle alors d'**influence totale**.



2.3 Applications

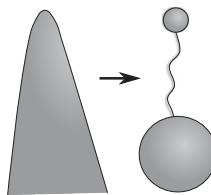
2.3.1 Effet de pointe

Quel est le principe du paratonnerre ?



Il y a-t-il d'autres applications à l'effet de pointe ?

Modélisons un pointe par deux boules de rayons différents ($R_1 \gg R_2$) reliées par un fil conducteur :



Pour simplifier le problème on néglige l'influence entre les boules et ce qui se passe dans le conducteur.

On a $V_1 = V_2 = V$.

A la surface des sphères de rayon R_i , le champ vaut : $E_i = \frac{V}{R_i}$

 **Explication 2.5 (Démonstration détaillée du champ lié à l'effet de pointe)**

Si le rayon de courbure de la pointe (ici R_2) est très petit le champ à la surface de la pointe peut devenir très grand !

2.3.2 Cage de Faraday

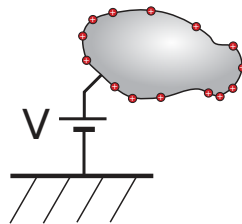


Cage de Faraday au palais de la découverte (Paris)

Explication 2.6 (Champ/potentiel à l'intérieur d'une cavité de conducteur)

2.3.3 Condensateurs

Capacité d'un conducteur isolé



Si un conducteur est porté au potentiel V , il apparaît alors à sa surface une charge q définie par : $q = \iint_S \sigma dS$

On observe une relation de linéarité entre la charge portée et le potentiel du conducteur (ce qui peut être démontré à partir de l'équation locale $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$).

On nomme le coefficient de proportionnalité, noté C , **la capacité** du corps conducteur. Il se mesure en farad.

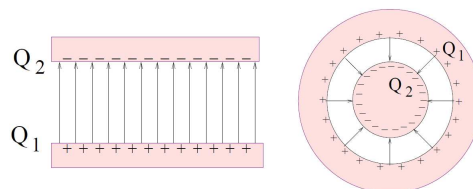
$$C = \frac{q}{V}$$

Cette capacité dépend de la géométrie du conducteur (ce qui entraîne que seuls quelques cas simple peuvent être résolus analytiquement)

Explication 2.7 (TD-cours : capacité de la boule chargée)

Définition :

On nomme **condensateur** l'assemblage de deux conducteurs en influence totale.



Assemblage de deux conducteurs en influence totale formant un condensateur (plan à gauche et sphérique à droite)

Capacité d'un condensateur

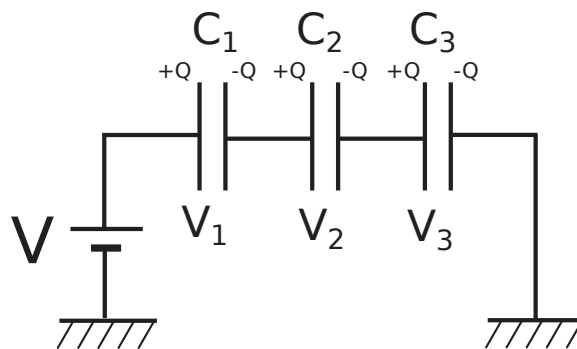
Un condensateur est un dispositif pour emmagasiner des charges.

On a $Q_1 = -Q_2$ donc $\|Q_1\| = \|Q_2\| = Q$

Pour une différence de potentiel ΔV entre les deux conducteurs (armatures) on définit :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} [F]$$

Association série de condensateurs



Soit 3 condensateurs, C_1 , C_2 et C_3 , disposés en série et V une ddp appliquée aux bornes du circuit.

La charge se conserve d'un condensateur à l'autre. Chaque condensateur aura une armature avec une charge $+Q$ et l'autre avec une charge $-Q$.

$\Rightarrow Q = C_1 V_1 = C_2 V_2 = C_3 V_3$ où $V_1 V_2 V_3$ sont respectivement les ddp aux bornes de C_1 , C_2 et C_3 .

$$\Rightarrow V_1 + V_2 + V_3 = V$$

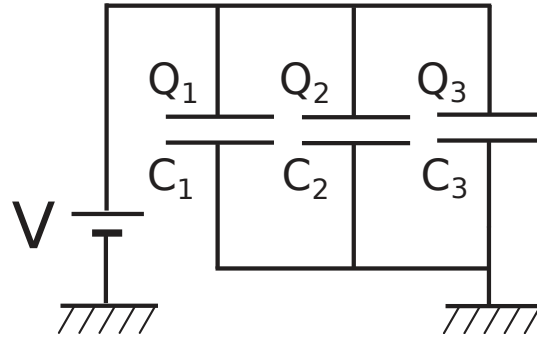
$$\text{On en déduit que } \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = V = \frac{Q}{C}$$

$$\text{d'où } \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

En généralisant le raisonnement précédent on obtient la formulation suivante :

$$\text{Assemblage en série : } \frac{1}{C} = \sum_i^n \frac{1}{C_i}$$

Association parallèle de condensateurs



Soit 3 condensateurs, C_1 , C_2 et C_3 , disposés en parallèle et V une ddp appliquée aux bornes du circuit.

Chaque condensateur possède une charge qui lui est propre.

$$Q_1 = C_1 V_1 \quad Q_2 = C_2 V_2 \quad Q_3 = C_3 V_3$$

$$\Rightarrow Q = C_1 V + C_2 V + C_3 V$$

On en déduit que $C = C_1 + C_2 + C_3$

En généralisant le raisonnement précédent on obtient la formulation suivante :

$$\text{Assemblage en parallèle : } C = \sum_i C_i$$

Chapitre 3

Énergie électrostatique

3.1 Énergie potentielle d'interaction

3.1.1 Énergie potentielle d'une charge

un peu de sémantique ...

Définition : énergie potentielle

L'énergie potentielle d'un système physique est l'énergie liée à l'interaction d'une force conservative, qui a le potentiel (d'où le nom) de se transformer en énergie cinétique.

Définition : force conservative

Une force est dite conservative lorsque le travail produit par cette force est indépendant du chemin suivi par son point d'action.

Une charge isolée ne peut pas avoir d'énergie potentielle. Il lui faut nécessairement une autre charge avec laquelle interagir.

Dans le cas de deux charges, l'énergie potentielle du système correspond à :

- L'énergie de q' dans le champ de q
- L'énergie de q dans le champ de q'
- L'énergie du système isolé q - q'

$$\xi = \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r}$$

ξ [Joule], l'énergie potentiel du système q - q'

L'énergie nécessaire pour placer une charge q en M dans un champ de potentiel vaut :

$$\xi_q(M) = \int_{\infty}^M -\vec{F}_q \cdot d\vec{l}$$

$$\xi_q(M) = \int_{\infty}^M -q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\xi_q(M) = q \int_{\infty}^M dV$$

énergie électrique d'une charge ponctuelle

$$\xi_q(M) = qV(M)$$

3.1.2 Énergie potentielle d'un système de charges

Distribution de charges ponctuelles Soit un système de charges ponctuelles décrites par leur position M_i et leur charge q_i . Calculons le travail pour réaliser ce système à partir de rien :

Plaçons q_1 en M_1 : $W_1 = 0$

Plaçons q_2 en M_2 : $W_2 = k \frac{q_1 q_2}{M_1 M_2}$ avec $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

Plaçons à présent q_3 en M_3 : $W_3 = k(\frac{q_1 q_2}{M_1 M_3} + \frac{q_2 q_3}{M_2 M_3})$

Arrêtons nous là et regardons l'expression de l'énergie :

$$W_{tot} = \xi = W_1 + W_2 + W_3$$

$$\text{Ce qui peut s'écrire } 2\xi = k[q_1(\frac{q_2}{M_1 M_2} + \frac{q_3}{M_1 M_3}) + q_2(\frac{q_1}{M_1 M_2} + \frac{q_3}{M_2 M_3}) + q_3(\frac{q_1}{M_1 M_3} + \frac{q_2}{M_2 M_3})]$$

$$\text{ou encore } \xi = \frac{1}{2}(q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3)$$

En généralisant on obtient :

Énergie d'un système de charges ponctuelles

$$\xi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$$

Distribution continue de charges En exploitant ce qui vient d'être trouvé et en l'adaptant à des distributions continues, on obtient la formulation suivante :

Energie d'une distribution de charges

$$\xi = \frac{1}{2} \int_{\text{espace charge}} V dq$$

Ce qui se traduit

$$\text{En linéaire (} dq = \lambda dl \text{) par } \xi = \frac{1}{2} \int_L V \lambda dl$$

$$\text{En surfacique (} dq = \sigma d^2 S \text{) par } \xi = \frac{1}{2} \iint_S V \sigma d^2 S$$

$$\text{En volumique (} dq = \rho d^3 V \text{) par } \xi = \frac{1}{2} \iiint_V V \rho d^3 V$$

Exercice d'application : Énergie d'une boule chargée Soit \mathcal{B}_1 une boule uniformément chargée.

$$\xi_{\mathcal{B}_1} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_1} \rho V d^3V$$

$$\text{Le potentiel à l'intérieur de la sphère est : } V = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{r^2}{3R^2} \right]$$

$$\text{en prenant } d^3V = 4\pi r^2 dr$$

$$\xi_{\mathcal{B}_1} = \frac{1}{2} \frac{\rho^2 R^2}{2\varepsilon_0} 4\pi \int_0^R r^2 \left[1 - \frac{r^2}{3R^2} \right] dr$$

$$\text{d'où} \quad \xi_{\mathcal{B}_1} = \frac{4\pi}{15\varepsilon_0} \rho^2 R^5$$

Explication 3.1 (Démonstration détaillée)

3.2 Énergie emmagasinée dans les conducteurs chargés

Cas d'un conducteur isolé On cherche à déterminer l'énergie emmagasinée lorsque le potentiel d'un conducteur passe de 0 à la valeur V_1 , sa charge passant de 0 à q_1 .

$$d\xi = V dq$$

Mais q et V sont liés par $q = CV$

$$\text{donc } dq = C dV$$

$$d\xi = CV dV$$

$$\xi = \int_0^{V_1} CV dV$$

Énergie électrique d'un conducteur

$$\xi = \frac{1}{2} CV_1^2 = \frac{1}{2} q_1 V_1 = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C}$$

Cas de n conducteurs Dans le cas où plusieurs conducteurs sont présents, il suffit de faire la somme de l'énergie contenue dans chaque conducteur.

Énergie électrique d'un système de n conducteurs

$$\xi = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

Cas d'un condensateur En exploitant la somme précédente on obtient :

$$\xi = \frac{1}{2}(q_1 V_1 + q_2 V_2)$$

Mais dans un condensateur la charge sur une armature est l'exacte opposée de celle sur l'autre armature :

$$q_1 = -q_2$$

soit

Énergie électrique d'un condensateur

$$\xi = \frac{1}{2}q_1(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C}$$

Exercice d'application : Charge d'un condensateur

Regardons d'un point de vue énergétique ce qui se déroule lors de la charge d'un condensateur dont l'une des armatures est mise à la terre. A chaque instant, la charge et le potentiel du condensateur augmentent.

$$q = CV \quad \Rightarrow \quad dq = CdV$$

la variation d'énergie vaut alors

$$d\xi = Vdq = CVdV$$

$$\xi = C \int_0^{V_f} VdV = \frac{1}{2}CV_f^2$$

On retrouve la formulation présentée précédemment.

Mais est-ce bien l'énergie qu'a fournie la source ?

D'un point de vue de la source, le potentiel à fournir reste constant et égale à V_f .

donc

$$d\xi' = V_f dq$$

$$\xi' = V_f \int_0^{q_f} dq = CV_f^2 = 2\xi$$

Les anges prendraient-ils aussi une part de l'énergie électrique ?

Explication 3.2 (Bilan énergétique)

3.3 Localisation de l'énergie

Tentons de déterminer, par l'étude d'un cas simple, où se "localise" l'énergie électrique.

Dans le cas d'un condensateur plan :

$$\xi = \frac{1}{2}CV^2 \text{ et } C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

on a donc

$$\xi = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2e}$$

Le champ électrique entre les armatures est $E = \frac{V}{e}$

$$\xi = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S e$$

Le volume du condensateur est $V = S e$.

Il est possible d'exprimer la **densité volumique d'énergie**, ω , entre les deux armatures.

Densité volumique d'énergie

$$\omega = \frac{d\xi}{d^3V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Ce résultat, établi ici pour un cas particulier, est vrai dans le cas général. On peut donc associer une densité volumique d'énergie à tout point de l'espace.

3.4 Électrostatisme dans les milieux diélectriques (traité en TD)

voir TD-cours correspondant.

Chapitre 4

Bases de la magnétostatique

4.1 Introduction

Un peu d'histoire : Les propriétés magnétiques de certains matériaux (**aimant**) sont connues depuis au moins Thalès de Millet (600 av. J-C) :

La magnétite (oxyde de fer), est une pierre "abondante" près de la ville de Magnésie, en Grèce antique.

On ne fait pas grand chose de ces aimants jusqu'en 1044 où la **boussole** (de navigation) est inventée (Chine).

Ce n'est qu'en 1819 que **Oersted** (Danois) découvre un lien entre le magnétisme et l'électricité.

Définition : Magnétostatique

Étude des phénomènes magnétiques stationnaires (indépendant du temps)
Ce que l'on verra ici restera valable dans le cas des **régimes lentement variables**

Explication 4.1 (Approximation des régimes quasi-statiques)

Nous nous limiterons à l'étude des champs magnétiques créés par des courants

4.2 Champ magnétostatique

4.2.1 Force magnétique & champ magnétique

Force de Lorentz : On s'aperçoit que la force électrostatique ne permet pas à elle seule de comprendre les interactions entre les charges électriques.

Force de Lorentz

$$\vec{F}_q = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

$\vec{F}_e = q\vec{E}$, la force électrique et \vec{E} le champ électrique.

$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, la force magnétique et \vec{B} le champ magnétique.

L'ensemble (\vec{E}, \vec{B}) forme le **champ électromagnétique**.

Travail de la force magnétique : Le travail de \vec{F}_m vaut

$$W_m = \vec{F}_m \cdot \vec{v} dt = q \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \vec{v} dt$$

$$W_m = 0$$

La force magnétique ne modifie pas l'énergie cinétique d'une charge :

$$||\vec{v}|| = cst$$

Force de Laplace : Autre manifestation du champ \vec{B} :

Force de Laplace

Force que subit un élément de circuit $d\vec{l}$ parcouru par un courant I et plongé dans un champ \vec{B} :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Unité et ordre de grandeur : Le champ magnétique \vec{B} se mesure en Tesla [T] ou en volt-seconde par mètre carré $[V.s.m^{-2}]$.

On peut également utiliser le Gauss [G] ($1G = 10^{-4}T$).

Corps humain	$\approx 10^{-15}T$
Champ magnétique terrestre (France)	$\approx 10^{-5}T$
Aimant permanent	$\approx 1T$
Electro-aimants les plus puissants	$\approx 50T$

4.2.2 Loi de Biot et Savart

Explication 4.2 (Notion d'élément de courant)

Nous *postulons* que l'expression de la contribution d'un **élément de courant** $d\vec{C}$, situé au point P, au champ total $\vec{B}(\vec{M})$ créé en M par une distribution de courants est donnée par la loi de **Biot et Savart** :

$$\delta \vec{B}(\vec{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{C} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

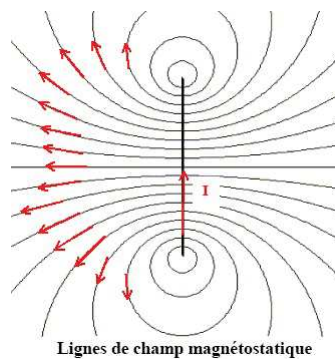
Le coefficient μ_0 , appelé perméabilité du vide, vaut exactement $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}H.m^{-1}$

Expression de \vec{B} créé par une distribution de courant

- Distribution volumique : $\vec{B}(\vec{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \vec{j}(\vec{P}) d^3V \wedge \frac{\vec{u}_{P \rightarrow M}}{PM^2}$
- Distribution surfacique : $\vec{B}(\vec{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_D \vec{j}(\vec{P}) d^2S \wedge \frac{\vec{u}_{P \rightarrow M}}{PM^2}$
- Distribution filiforme : $\vec{B}(\vec{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_D I d\vec{l} \wedge \frac{\vec{u}_{P \rightarrow M}}{PM^2}$

4.2.3 Propriétés du champ magnétique

Topographie du champ magnétique



Equation des lignes de champ : $d\vec{OM} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

Symétries & Invariances

- \vec{B} est **perpendiculaire** à tout plan-miroir π de la distribution de courant
- Au point M' symétrique de M par rapport à π , $\vec{B}(M')$ est l'opposé du symétrique de $\vec{B}(M)$
- \vec{B} est **contenu** dans tout plan-antimiroir π^* de la distribution de courant
- Au point M' symétrique de M par rapport à π^* , $\vec{B}(M')$ est le symétrique de $\vec{B}(M)$
- Concernant les invariances, on raisonnera comme pour le champ électrostatique

4.3 Théorème d'Ampère

Le **théorème d'Ampère** (dont la démonstration est fastidieuse) est à la magnétostatique ce qu'est le théorème de Gauss à l'électrostatique.

Théorème d'Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d^2\vec{S}$$

Ce théorème relie la circulation de \vec{B} , le long d'un contour fermé, aux sources de courant traversant la surface définie par ce contour.

Tout comme le théorème de Gauss, ce théorème est exploitable que dans les problèmes comportant un haut niveau de symétrie et d'invariance qu'il faudra étudier préalablement.

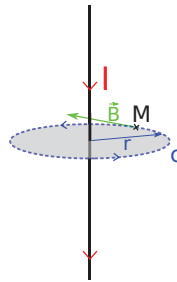
Le théorème d'Ampère peut être écrit sous sa forme locale en exploitant le théorème de Stokes.

Théorème d'Ampère - forme locale

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Exercice d'application : Fil infini

Calcul du champ magnétique généré par un fil circulaire infini en utilisant le théorème d'Ampère.

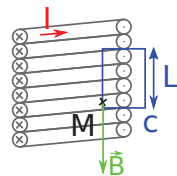


1. Choix du repère \Rightarrow cylindrique
2. Étude des invariances $\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(r)$
3. Étude des symétries et antisymétries $\Rightarrow \vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$
4. Choix d'un contour \Rightarrow Cercle centré sur le fil passant par M (de rayon r)
5. $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B2\pi r$
6. $\mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\mu_0 I$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Exercice d'application : Boucle de courant

Calcul du champ magnétique généré un solénoïde infini.



1. Choix du repère \Rightarrow cylindrique
2. Étude des invariances $\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(r)$
3. Étude des symétries et antisymétries $\Rightarrow \vec{B} = -B(r)\vec{e}_z$
4. choix d'un contour \Rightarrow Rectangle passant par M
5. $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL$

$$6. \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 IN$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 IN}{L} \vec{e}_z$$

Conservation du flux magnétique : Le calcul de la divergence de \vec{B} à partir de sa formulation permet de montrer que

Conservation du flux - forme locale

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Sa forme intégrale (Th. Green-Ostrogradsky) s'écrit

Conservation du flux - forme intégrale

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

4.4 Bilan

4.4.1 Potentiel vecteur

En électrostatique, on observe l'intérêt de définir le potentiel électrique :

$$\begin{aligned} \text{Équation locale} \quad & \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \\ \text{Équation intégrale} \quad & \oint_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B \end{aligned}$$

Ce concept est transposable au champ magnétique, à ceci près que \vec{B} est un pseudo vecteur. On exploite alors la propriété $\text{div} \vec{B} = 0$ pour construire un champ de vecteur, appelé **potentiel vecteur**, noté A : $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} A$

On peut démontrer que l'équation suivante permet de calculer A .

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P)}{PM} d^3V$$

Cette équation est comparable à celle permettant de calculer V .

4.4.2 Les équations magnétostatiques

Électrostatique	Magnétostatique
$\oint_S \vec{E} \cdot d^2\vec{S} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d^3V$ $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \mu_0 \vec{j} d^2\vec{S}$ $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$	$\oint_S \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = 0$ $\text{div} \vec{B} = 0$
$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B$ $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$	$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} A$

1 Bases de l'électrostatique

1.1 Calculs directs

Exo 1.1. Force de gravitation et force électrostatique

- 1) Calculer la norme de la force gravitationnelle dans le système électron-proton d'un atome d'hydrogène.
- 2) Calculer la norme de la force électrostatique dans le système électron-proton d'un atome d'hydrogène.
- 3) Comparer et conclure.

Données :

Charge élémentaire, $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{C}$

Masse du proton, $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{kg}$

Masse de l'électron, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{kg}$

Rayon de Bohr, $a_0 = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{m}$

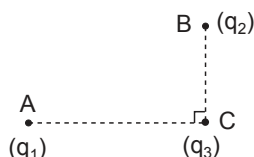
Constante gravitationnelle, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$

Permittivité du vide, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^2$

Formule de la force gravitationnelle, $||\vec{F}_g|| = Gm_1m_2/d^2$

Exo 1.2. Cas de 3 charges ponctuelles

Trois charges ponctuelles, q_1 , q_2 , q_3 sont disposées comme indiqué ci-dessous :



On pose : $q_1 = 5\text{C}$, $q_2 = -1\text{C}$, $q_3 = 3\text{C}$, $AC = 2\text{m}$ et $BC = 1\text{m}$.

- 1) Trouver la force résultante $\vec{F}(C)$ qui agit sur q_3 .
- 2) Comment peut-on représenter les propriétés électriques de l'espace au point C.

Exo 1.3. Champ électrique d'un corps chargé

Considérons un petit élément de volume $d\tau$ d'un corps. Cet élément porte une charge δq . On suppose que $d\tau$ est suffisamment petit pour être considéré comme ponctuelle. Soit $\vec{u} = \vec{r}/||\vec{r}||$, $\vec{r} = \vec{PM}$, où P est la position de l'élément $d\tau$ et M un point quelconque dans l'espace.

- 1) Représenter schématiquement le problème.
- 2) Quel est le champ électrique $d\vec{E}$ créé par $d\tau$ en M (exprimé en fonction de \vec{u} , r et δq) ?
- 3) Exprimer $d\vec{E}$ en M en fonction de la densité volumique de charge ρ et de \vec{u} , r et $d\tau$.
- 4) A partir de ce résultat, trouver l'expression générale du champ électrique \vec{E} d'un corps chargé suivant la densité de charge ρ .

Exo 1.4. Cas de 4 charges ponctuelles

Quatre protons sont placés aux sommets d'un carré de côté a . Un point M , situé sur l'axe perpendiculaire au plan du carré passant par son centre O , est repéré par son abscisse $x = \overline{OM}$

- 1) Représenter schématiquement le problème.
- 2) Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en fonction de x .
- 3) Représenter les variations de ce champ en fonction de x .

Exo 1.5. Champ créé par un fil circulaire uniformément chargé

Un fil **circulaire**, d'épaisseur négligeable, de centre O et de rayon R , compris dans le plan xOy , porte une densité linéique de charge uniforme λ .

- 1) Représenter schématiquement le problème.
- 2) Par un raisonnement simple, montrer que le champ \vec{E} créé en un point M de l'axe (Oz) par cette distribution de charge circulaire est forcément porté par le vecteur \vec{e}_z , vecteur unitaire de l'axe (Oz)
- 3) Calculer directement le champ \vec{E} au point M compris sur l'axe Oz .
- 4) Calculer directement le potentiel électrostatique V au point M .
- 5) Calculer à partir du potentiel électrostatique le champ \vec{E} au point M .

Exo 1.6. Champ créé par un fil droit uniformément chargé

Un fil **droit**, de longueur $2L$ et centré en O , porté par le vecteur unitaire \vec{e}_x , porte une densité linéique de charge uniforme λ .

- 1) Représenter schématiquement le problème.
- 2) Calculer directement le champ $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution en un point M de l'axe (Ox) , pour $OM > L$. (Vu en CM)
- 3) Pourquoi ne peut-on pas calculer le champ $\vec{E}(M)$ en $M = L$? (Vu en CM)
- 4) Par un raisonnement simple, montrer que le champ $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution de charge en un point M de l'axe (Oz) (et $M \neq O$) est forcément porté par le vecteur \vec{e}_z , vecteur unitaire de l'axe (Oz)
- 5) Calculer directement le champ \vec{E} au point M compris sur l'axe Oz (et $M \neq O$).
- 6) Que devient cette expression pour un fil de longueur infinie ?
- 7) En déduire l'expression du champ $\vec{E}(M)$ créé par la distribution en tout point extérieur à cette distribution.

Exo 1.7. Champ créé par un fil droit non uniformément chargé

Un fil **droit**, de longueur $2L$ et centré en O est porté par le vecteur unitaire \vec{e}_x , porte une densité linéique de charge $\lambda = \alpha x$ (il n'y a pas de charges en dehors du fil).

- 1) Représenter l'allure de la distribution de charge
- 2) Tracer la représentation de la fonction densité de charge en fonction de x
- 3) Calculer directement le champ $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution en un point M de l'axe (Ox) , pour $OM > L$.

1.2 Gauss et Potentiel**Exo 1.8. Flux du vecteur champ électrique**

Une charge ponctuelle q , positive, placée en O crée en tout point M de l'espace un champ électrostatique.

- 1) Calculer le flux de \vec{E} à travers une sphère centrée en O .
- 2) Pourquoi le calcul du flux de \vec{E} à travers un cylindre de rayon R , centré en O et de hauteur H est-il compliqué ? On pourrait montrer par le calcul que ce flux est égal à $\frac{q}{\epsilon_0}$.
- 3) Commenter les résultats de la question 1 et 2.

Exo 1.9. Champ créé par une sphère uniformément chargée

Une sphère de centre O et de rayon R est uniformément chargée avec une densité volumique de charges ρ_0 .

- 1) Représenter schématiquement le problème.
- 2) Pourquoi le calcul, par méthode intégrale, de la valeur du champ \vec{E} en tout point de l'espace est-il difficile ?
- 3) Exploiter le théorème de Gauss pour retrouver calculer la valeur du champ \vec{E} en tout point de l'espace.

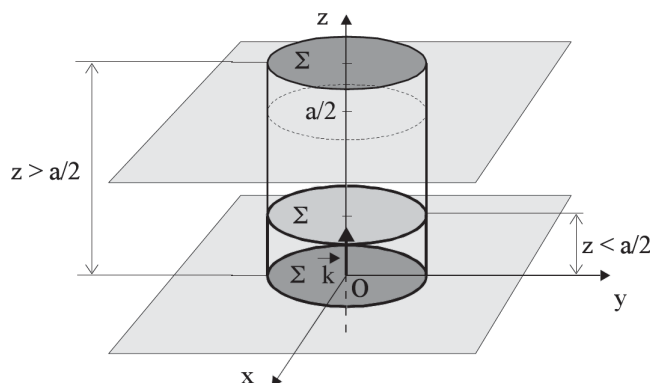
Exo 1.10. Utilisation du théorème de Gauss

Parmi les distributions de charges suivantes, quelles sont celles pour lesquelles on peut appliquer le théorème de Gauss pour le calcul du champ électrique ? Exprimer alors ce champ en précisant sa direction et son sens :

- 1) fil de longueur l de densité linéique de charge λ .
- 2) Fil infini de densité linéique de charge λ .
- 3) Circonférence de densité linéique de charge λ .
- 4) Disque de rayon R de densité surfacique σ .
- 5) Plan infini de densité surfacique σ .
- 6) Boule de rayon R de densité volumique ρ .

Exo 1.11. Couche infinie

On considère dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une distribution de charges électriques de densité volumique uniforme ρ , répartie entre deux plans infinis parallèles au plan (xOy) et situés respectivement aux cotes $z = -\frac{a}{2}$ et $z = +\frac{a}{2}$.



- 1) En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ \vec{E} en tout point de l'espace
- 2) En déduire le potentiel en tout point de l'espace ; on prendra le potentiel nul dans le plan (xOy)
- 3) Représenter graphiquement les variations de ces deux grandeurs

Exo 1.12. Potentiel de Yukawa

On se propose de déterminer la distribution de charge qui est à l'origine du potentiel électrostatique :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon r} e^{-\frac{r}{a}}, \quad q > 0$$

où q est homogène à une charge, a à une distance et r est la coordonnée radiale en coordonnées sphériques.

- 1) Redémontrer l'équation de Poisson
- 2) Donner les symétries et invariances vérifiées par $V(r)$. En déduire la dépendance spatiale de la densité volumique de charge en tout point
- 3) Quelle est l'expression du champ électrique ?
- 4) Déterminer la charge Q_{int} contenue par une sphère de centre O et rayon R
- 5) À partir de l'équation de Poisson, déterminer la densité volumique de charge à l'origine du potentiel de Yukawa
- 6) Que se passe-t-il en $r = 0$?

1.3 Théorème de Superposition**Exo 1.13. Superposition de champ**

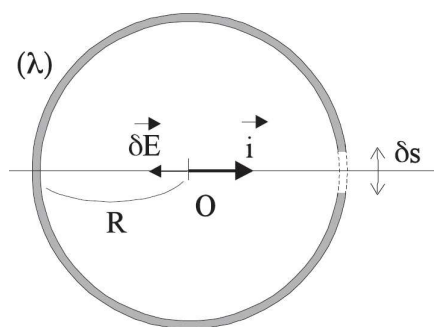
Soit B , une boule de centre O , de rayon R , de charge uniforme ρ et S une boule de même centre et même rayon, de charge uniforme λ .

- 1) Représenter schématiquement le problème.
- 2) Calculer le champ électrostatique et le potentiel électrique généré par B .
- 3) Calculer le champ électrostatique et le potentiel électrique généré par S .
- 4) Déterminer le champ électrostatique et le potentiel électrique généré par B et S .

Exo 1.14. Cavité sphérique

Une boule de rayon a et de centre O_1 porte la charge volumique uniforme ρ . Cette boule présente une cavité sphérique de rayon $b < a$ et de centre $O_2 \neq O_1$.

- 1) Faire un schéma de la distribution de charges.
- 2) Déterminer le champ dans la cavité

Exo 1.15. Extrait CC1-2017

Un fil isolant est courbé suivant un cercle de rayon $R = 50\text{cm}$ et de centre O . Entre les extrémités du fil subsiste un espace de 2mm assimilable à un élément infinitésimal de longueur δs . Une charge électrique de 10^{-9}C est répartie uniformément sur la longueur du fil. Calculer le champ électrique créé en O par ce fil.

2 Conducteurs en équilibre et énergie**2.1 Théorème de Coulomb et pression électrostatique****Exo 2.1. Densité de charge - CC1(2017)**

Un cylindre de rayon R et de hauteur L porte une charge totale Q .

- 1) Exprimer la densité de charge σ de cette distribution, en fonction de Q , R et L , si les charges se répartissent uniformément en surface. Exprimer également la densité de charge ρ de cette distribution, en fonction de Q , R et L , si les charges se répartissent uniformément en volume.
- 2) Si le cylindre est un conducteur parfait en équilibre électrostatique (les charges sont immobiles), démontrer que le champ interne au conducteur E_{int} est nul.

- 3) Déterminer alors complètement et sans démonstration le champ E_{ext} à l'extérieur du cylindre au voisinage de la surface latérale (portant la densité surfacique de charge σ).

On suppose à présent que les charges se répartissent en volume mais avec la densité volumique $\rho = \rho_0 \frac{r}{2R} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

- 4) Exprimer la charge totale Q portée par le cylindre.

Exo 2.2. Au voisinage d'une surface conductrice

Le champ électrostatique en un point M_0 , voisin d'une surface conductrice fermée, a pour expression, en unité SI : $\vec{E}(M_0) = 4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$.

- 1) Écrire l'équation du plan tangent à la surface en M_0 .
- 2) Quelle est la charge surfacique en M_0 ? En déduire la pression électrostatique.

Exo 2.3. Éclateur sphérique

- 1) Quelle est la charge surfacique d'une sphère conductrice, de rayon $R = 1\text{cm}$, portée au potentiel $V = 100\text{V}$?
- 2) A quel potentiel doit-on porter cette sphère pour que le champ à sa surface atteigne la valeur disruptive de 10^6V/m ?

Exo 2.4. Répartition des charges entre deux sphères conductrices

Deux sphères métalliques, de rayon $R_1 = 10\text{cm}$ et $R_2 = 1\text{cm}$, distantes de $D \gg R_1 + R_2$, portent les charges $Q_0 = 10^{-10}\text{C}$ et 0 . Trouver leurs charges à l'équilibre ainsi que les champs électrostatiques qu'elles produisent dans leur voisinage, lorsqu'on les relie par un fil métallique.

Exo 2.5. Répulsion de deux hémisphères chargées

Une sphère métallique pleine de centre O et de rayon $R = 5\text{cm}$ est portée au potentiel $V = 50\text{kV}$.

- 1) Calculer la pression électrostatique à la surface de ce conducteur.
- 2) Calculer la résultante des forces s'exerçant sur une calotte sphérique de rayon de base $r = R \sin \alpha$. AN : $\alpha = 45^\circ$.

La sphère métallique est constituée de deux hémisphères accolés au niveau de son plan équatorial horizontal. L'hémisphère inférieur est fixe, et le supérieur est libre de se déplacer. Pour quelle valeur du potentiel V , l'hémisphère supérieure se détachera-t-il de l'inférieure, sachant que la masse volumique du matériau de la sphère est $\mu = 2,7\text{g.cm}^{-3}$?

2.2 Condensateurs**Exo 2.6. Calcul de capacités**

Calculez la capacité des condensateurs suivant :

- 1) Condensateur composé d'une boule conductrice de rayon R_1 et d'une sphère concentrique de rayon R_2 et d'épaisseur négligeable.
- 2) Condensateur composé d'un cylindre plein de rayon R_1 et d'un cylindre concentrique creux de rayon R_2 et d'épaisseur négligeable.

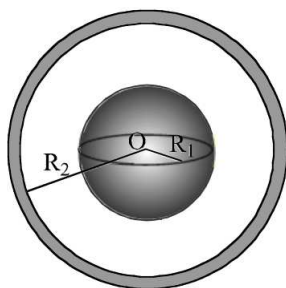
Exo 2.7. Condensateur cylindrique - CC2(2017)

Soit un condensateur cylindrique composé d'un cylindre creux C_1 de rayon R_1 , d'épaisseur négligeable et de hauteur H . Ce cylindre C_1 porte la charge $+Q$. Il est entouré par un autre cylindre creux C_2 de rayon R_2 et de hauteur H . Par la suite on négligera les effets de bords et on considèrera que H est très grande devant les dimensions caractéristiques du problème.

- 1) Quelle est la charge portée par C_2 ? Justifiez votre réponse.
- 2) Expliciter la densité de charge surfacique uniforme portée par C_1 puis celle portée par C_2 .

L'étude des symétries et des invariances a permis d'établir que le champ entre les armatures est de la forme $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$.

- 3) En appliquant le théorème de Gauss, calculez le champ \vec{E} entre les armatures ($R_1 < r < R_2$) en fonction de Q , H et r .
- 4) En déduire alors le potentiel V dans cette région.
- 5) Exprimer la capacité du condensateur cylindrique en fonction de H , R_1 et R_2 .

Exo 2.8. Condensateur sphérique - CC1(2016)

Soit B_1 une boule conductrice de rayon R_1 entourée d'une coquille sphérique d'épaisseur négligeable et de rayon R_2 , telle que représentée sur la figure ci-dessus. Il n'y a pas de charges entre R_1 et R_2 . Une répartition réaliste des charges dans la boule B_1 est de la forme ($0 \leq r \leq R_1$ et avec $\delta \ll R_1$) :

$$\rho(r) = \rho_0 e^{\frac{r - R_1}{\delta}} \quad (1)$$

- 1) Tracez l'allure de la répartition de charge pour $0 \leq r \leq R_1$.
- 2) Calculez la charge totale Q portée par la boule B_1 en fonction de ρ_0 et α .

Indication : On ne cherchera pas à calculer l'intégrale (double intégration par partie) et on posera directement :

$$\alpha = \int_0^R r^2 e^{\frac{r-R}{\delta}} dr$$

- 3) Sachant que $\delta \ll R_1$, comment peut-on modéliser la distribution de charge pour ce conducteur ? Proposez alors une densité de charge plus simple en fonction de Q et R_1 .
- 4) Si la boule B_1 et la coquille de rayon R_2 sont en influence totale, quelle est alors la charge portée par la coquille ? Quelle est la densité surfacique (uniforme) de charge associée ?
- 5) Appliquez le théorème de Gauss et déterminez complètement le champ électrique \vec{E} dans les domaines de l'espace suivants :
 - a) pour $R_1 < r < R_2$.
 - b) pour $r > R_2$.
- 6) A partir de l'expression du champ \vec{E} entre les armatures du condensateur (entre la boule B_1 et la coquille de rayon R_2), calculez la différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ entre ces deux armatures.
- 7) Déduisez-en la valeur de la capacité C du condensateur sphérique en fonction de ϵ_0 , R_1 et R_2 .
- 8) Quelle est la forme des surfaces équipotentielles entre les armatures ? Justifiez votre réponse à l'aide de la forme du champ \vec{E} dans cette région.

Exo 2.9. Condensateurs en série

Deux condensateurs en série, de capacités $C_1 = 40 \mu F$ et $C_2 = 80 \mu F$, sont connectés aux bornes d'un générateur qui impose une ddp $U = 120 V$. Calculer les différences de potentiel aux bornes de chacun d'eux et les énergies stockées.

Exo 2.10. Variation d'épaisseur d'un condensateur plan

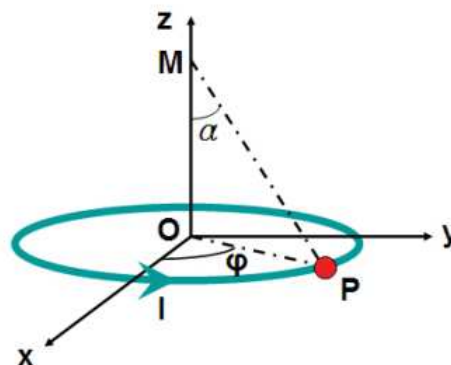
Un condensateur plan est constitué par deux plaques métalliques de surface $S = 30 \text{ cm}^2$ distantes de $x = 5 \text{ cm}$. Il est chargé sous une ddp $U = 500 V$ puis isolé.

- 1) Quelles est sa capacité C , sa charge Q , son énergie potentielle ξ ?
- 2) On écarte les armatures de façon à porter leur distance à $x = 10 \text{ cm}$.

- a) Quelle est sa capacité C' , sa charge Q' , sa tension finale U' , son énergie potentielle ξ' ? En déduire la variation d'énergie du système.
- b) On suppose que l'écartement des plaques est réalisé par un opérateur de façon quasi statique. Quel est le travail W' fourni par l'opérateur?
- 3) On effectue la même opération mais en maintenant constante la ddp à 500V grâce à une liaison avec un générateur de tension.
- a) Quelle est sa capacité C'' , sa charge Q'' , sa tension finale U'' , son énergie potentielle ξ'' ? En déduire la variation d'énergie du système.
- b) Quel est le travail W'' fourni par l'opérateur?
- 2) Que devient ce champ si le segment a une longueur infinie?

Exo 3.2. Spire

On considère la spire représentée ci-dessous, parcourue par un courant I . Quel sera le champ $B(\vec{M})$ créé par cette circulation de courant, en un point M de l'axe de la spire?

**2.3 Énergie****Exo 2.11. Localisation de l'énergie**

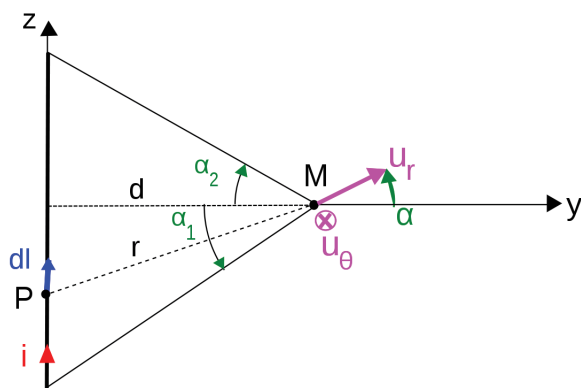
Soit une sphère conductrice chargée de rayon R , quelle est la variation de son énergie suite à une légère variation de son rayon? (dilatation $R > 0$, ou contraction $R < 0$).

Exo 2.12. Énergie potentielle d'une molécule La molécule de dioxyde de carbone CO_2 peut être représentée, de part l'électronégativité des atomes qui la composent, par la succession de charges suivantes : $(-q)(+2q)(-q)$. Avec q une charge égale à $e/4$, on connaît aussi la longueur de la liaison $(-q)(+2q)$: $d = 116\text{pm}$. Trouver l'expression de l'énergie potentielle électrostatique de cette molécule, donner sa valeur en Joule (J) et en électron-volt (eV) et interpréter son signe.

Le potentiel est pris nul à l'infini. On rappelle la valeur de la charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

3 Magnétostatique**3.1 Calculs directs (Biot et Savart)****Exo 3.1. Segment**

Soit un fil de longueur L tel que représenté ci-dessous, et parcouru par un courant i .



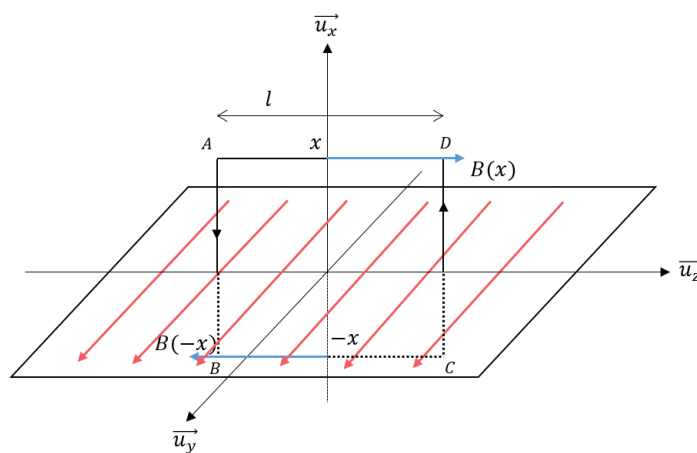
- 1) Calculer le champ \vec{B} créé à une distance d du fil.

3.2 Théorème d'Ampère**Exo 3.3. Fil infini**

Retrouver le résultat de la question 2 de l'exercice ?? en utilisant le théorème d'Ampère. On étudiera tout d'abord les symétries et les invariances de la distribution.

Exo 3.4. Nappe de courant

Soit une distribution surfacique de courants uniformes $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_y$ circulant dans le plan (yOz) telle que représentée sur la Figure ci-dessous. Cette distribution peut être considérée comme la superposition d'une infinité de fils infinis parallèles les uns aux autres. Les coordonnées adaptées à ce problème sont les coordonnées cartésiennes. Calculer le champ \vec{B} en tout point de l'espace extérieur à la distribution.

**Exo 3.5. Câble coaxial**

On considère un câble coaxial infiniment long. Le conducteur central, de rayon R_1 est parcouru par un courant de densité uniforme et d'intensité I . Le retour de ce courant est assuré par le « tube » cylindrique de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$). Dans le « tube », la densité de courant est aussi uniforme. On souhaite exprimer le champ magnétique en tout point de l'espace.

- 1) Quelles sont les symétries et invariances de cette distribution de courant ? En déduire la direction du champ magnétique et les variables dont il dépend.
- 2) Exprimer les densités de courant dans les espaces définis par les cylindres.
- 3) En appliquant la forme locale du théorème d'Ampère, exprimer le champ en tout point de l'espace.

Exo 3.6. Coaxial réel - CC2(2016)

Soit un câble coaxial formé d'un cylindre conducteur plein de rayon R_1 et d'un cylindre conducteur d'épaisseur négligeable et de rayon R_2 .

Le premier cylindre est parcouru par un courant I avec la densité volumique de courant \vec{j}_v non uniforme telle que $\vec{j}_v = j_v(r) \cdot \vec{e}_z$ et $j_v(r) = j_0 \left(\frac{r}{R_1}\right)^2$. On suppose $j_0 > 0$.

- 1) Tracez l'allure de la courbe $j_v(r)$ pour $0 < r < R_1$.
- 2) Exprimez le courant total I en fonction de j_0 et R_1 .

On souhaite modéliser la distribution de courant sur le second cylindre (de rayon R_2) par une densité surfacique $\vec{j}_S = -j_S \cdot \vec{e}_z$ uniforme ($j_S > 0$).

- 3) Quel doit être le rayon R_2 (à exprimer en fonction de j_0 , j_S et R_1) de façon à ce que le second cylindre (de rayon R_2) soit parcouru par le courant I (aller du courant I assuré par le premier cylindre et retour assuré par le second) ?
- 4) Faites un schéma du problème en faisant apparaître les deux cylindres, les vecteurs densité de courant (et le sens des courants circulant dans ou sur les cylindres), un point M en dehors des deux armatures et le repère adapté à la géométrie du problème.

On suppose que les deux cylindres sont infinis.

- 5) Par des considérations de symétries et d'invariances (que l'on détaillera), quelle est la forme du champ \vec{B} (coordonnées, vecteur directeur) ?
- 6) Quel contour d'Ampère allez-vous choisir ? Calculez alors la circulation de \vec{B} sur ce contour.
- 7) Que vaut \vec{B} :
 - pour $r < R_1$?
 - pour $R_1 < r < R_2$?
 - pour $r > R_2$?