

Mécanique du solide indéformable

Parcours des élèves ingénieurs Polytech
2ème année

Guy LOUARN - Guy.louarn@univ-nantes.fr



Session 2022-23

Table des matières

Introduction	5
1 Cinématique du solide	7
1.1 Définitions préliminaires	7
1.1.1 Postulats	7
1.1.2 Définitions	7
1.1.3 Paramétrage d'un système	9
1.2 Cinématique du point	11
1.2.1 Définitions	11
1.2.2 Changement de base de dérivation – Vecteur rotation – Base mobile .	12
1.3 Torseur cinématique	16
1.3.1 Définition d'un torseur	16
1.3.2 Caractérisation du torseur cinématique d'un solide	17
1.3.3 Composition de torseurs cinématiques	18
1.4 Analyse cinématique du glissement entre deux solides en contact	19
1.5 Champ des accélérations d'un solide	20
2 Analyse cinématique des mécanismes	22
2.1 Mouvements élémentaires entre deux solides	22
2.1.1 Translation	22
2.1.2 Rotation	23
2.2 Torseur des mouvements cinématiquement admissibles des liaisons	24
2.2.1 Analyse et représentation cinématique des liaisons	24
2.2.2 Tableaux des liaisons normalisées (cinématique)	26
2.3 Modélisation cinématique d'un mécanisme	29
2.4 Loi entrée-sortie des mécanismes transmetteurs de mouvement	32
3 Cinétique	34
3.1 Géométrie des masses	34
3.1.1 Masse d'un système matériel	34
3.1.2 Centre d'inertie d'un système matériel	35
3.1.3 Matrice d'inertie	37
3.2 Torseur cinétique	39
3.2.1 Définition	39
3.2.2 Calcul pratique du torseur cinétique d'un solide	39
3.2.3 Du solide au système matériel	41
3.3 Torseur dynamique	41
3.3.1 Définition	41
3.3.2 Calcul pratique du torseur dynamique d'un solide	42

3.3.3	Du solide au système matériel	43
4	Efforts	44
4.1	Torseur des efforts	44
4.1.1	Définitions	44
4.1.2	Expression caractéristique du torseur des efforts extérieurs	45
4.2	Torseur des actions mécaniques pour un contact ponctuel	47
4.3	Torseurs des efforts des liaisons élémentaires	49
4.3.1	Tableaux des liaisons normalisées (statique)	52
5	Principe Fondamental de la Dynamique	55
5.1	Principe Fondamental de la Dynamique	55
5.1.1	Enoncé du PFD	55
5.1.2	Théorèmes généraux de la dynamique	56
5.2	Cas particulier de la statique	57
5.2.1	Principe fondamental de la statique	57
5.2.2	Théorèmes généraux de la statique	57
5.3	Méthodologie de mise en équation d'un problème de statique	58
5.4	Méthodologie de mise en équation d'un problème de dynamique	59

Notations

- Vecteur : \vec{v}
- Produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- Produit vectoriel : $\vec{u} \wedge \vec{v}$
- Norme d'un vecteur : $\|\vec{v}\|$
- Base : $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
- Repère i : $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$
- Solide k : S_k
- Système matériel :

$$\mathcal{S} = \cup_{k=1}^N S_k$$

- Point lié à un solide : $A \in S_k$ ou A_k (pour les schémas notamment)
- Extérieur d'un système matériel : $\bar{\mathcal{S}}$
- Référentiel : $\mathfrak{R}(R_i, t)$
- Vitesse d'un point géométrique A dans son mouvement par rapport à R_i : $\vec{V}(A/R_i)$
- Vitesse d'un point A lié au solide S_k dans son mouvement par rapport à R_i : $\vec{V}(A \in S_k/R_i)$
- Dérivée dans R_i du vecteur \vec{v} : $\left(\frac{d}{dt}\vec{v}\right)_{R_i}$
- Torseur cinématique du solide S_k par rapport au repère R_i (lié au solide S_i) au point A, projeté dans la base \mathcal{B} :

$$\{\mathcal{V}(S_k/R_i)\} = \left\{ \vec{\Omega}(S_k/R_i); \vec{V}(A \in S_k/R_i) \right\}_{A \in S_k} = \left\{ \begin{matrix} \Omega_x & V_x \\ \Omega_y & V_y \\ \Omega_z & V_z \end{matrix} \right\}_{A \in S_k, \mathcal{B}}$$

- Accélération d'un point géométrique A dans son mouvement par rapport à R_i : $\vec{\Gamma}(A/R_i)$
- Accélération d'un point A lié au solide S_k dans son mouvement par rapport à R_i : $\vec{\Gamma}(A \in S_k/R_i)$
- Centre d'inertie d'un système matériel : G
- Centre d'inertie d'un solide S_k : $G \in S_k$
- Matrice d'inertie du solide S_k au point A exprimée dans la base \mathcal{B} : $\left[I(A, S_k) \right]_{\mathcal{B}}$
- Moment d'inertie du solide S_k par rapport à l'axe $\Delta(A, \vec{n})$: $I_{/\Delta}(S_k)$
- Torseur cinétique du solide S_k , dans son mouvement par rapport à R_i , exprimé au point A :

$$\{\mathcal{C}(S_k/R_i)\} = \left\{ \vec{p}(S_k/R_i); \vec{\sigma}(A, S_k/R_i) \right\}_A$$

- Torseur cinétique du système \mathcal{S} , dans son mouvement par rapport à R_i , exprimé au point A :

$$\{\mathcal{C}(\mathcal{S}/R_i)\} = \left\{ \vec{p}(\mathcal{S}/R_i); \vec{\sigma}(A, \mathcal{S}/R_i) \right\}_A = \sum_k \{\mathcal{C}(S_k/R_i)\}$$

- Torseur dynamique du solide S_k dans son mouvement par rapport à R_i , exprimé au point A :

$$\{\mathcal{D}(S_k/R_i)\} = \left\{ \vec{D}(S_k/R_i); \vec{\delta}(A, S_k/R_i) \right\}_A$$

- Torseur dynamique du système \mathcal{S} dans son mouvement par rapport à R_i , exprimé au point A :

$$\{\mathcal{D}(\mathcal{S}/R_i)\} = \left\{ \vec{D}(\mathcal{S}/R_i); \vec{\delta}(A, \mathcal{S}/R_i) \right\}_A = \sum_k \{\mathcal{D}(S_k/R_i)\}$$

- Torseur des efforts appliqués par S_1 sur S_2 , exprimé au point A et dans la base \mathcal{B} :

$$\{\mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \vec{R}(S_2 \rightarrow S_1); \vec{M}(A, S_1 \rightarrow S_2) \right\}_A = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{B}}$$

- Torseur des efforts extérieurs au système \mathcal{S} , exprimé au point A :

$$\{\mathcal{F}(\bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S})\} = \left\{ \vec{R}(\bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}); \vec{M}(A, \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}) \right\}_A$$

Introduction

La mécanique est une discipline scientifique consacrée à l'étude des mouvements ainsi que des causes qui les provoquent ou les entretiennent. Cette discipline comporte de nombreuses branches, comme par exemple la mécanique des solides indéformables, la mécanique des milieux continus, la mécanique des fluides... Chaque branche a un domaine de validité propre. L'utilisation d'une ou de plusieurs branches dépend des phénomènes que l'on observe et des choix réalisés pour les modéliser.

Ce cours porte sur un modèle particulier : le solide indéformable (aussi appelé solide rigide). Les systèmes étudiés seront alors modélisés par un ensemble discontinu de solides, assemblés ou liés entre eux. Nous verrons que cette modélisation, simple mais rigoureuse, permet l'étude du mouvement et de l'équilibre de bon nombre de systèmes industriels (machines, mécanismes) ou de structures (ponts, bâtiments...).

Le plan du cours est le suivant :

- le premier chapitre porte sur *la cinématique*. Il s'agit de l'étude du mouvement indépendamment des causes qui le produisent. Nous verrons que l'étude d'un mouvement nécessite toujours de définir un observateur. Nous introduirons ensuite les notions de trajectoire, vitesse, accélération, *torseur cinématique* et nous verrons comment les calculer en pratique.
- le deuxième chapitre est consacré à l'étude cinématique du contact et des liaisons entre plusieurs solides. Nous étudierons comment autoriser ou bloquer un mouvement entre deux solides. Dans le cadre de mini-projets, nous apprendrons à représenter synthétiquement des mécanismes industriels (schéma cinématique, graphe des liaisons). Puis, nous verrons comment déterminer la relation entre mouvement d'entrée et mouvement de sortie d'un mécanisme.
- le troisième chapitre traite de *la cinétique*. La cinétique combine les informations issues de la cinématique avec la notion de *masse*. Cette combinaison permet ainsi de quantifier l'inertie d'un solide, c'est-à-dire sa résistance à sa mise en mouvement. Nous définirons le *torseur cinétique* et le *torseur dynamique*, et nous verrons comment les calculer en pratique.
- le quatrième chapitre introduit les *efforts*, qui provoquent et maintiennent des mouvements. Après avoir défini le *torseur des efforts*, nous reviendrons sur les liaisons entre différents solides, en les analysant désormais du point de vue des efforts transmissibles d'un solide à un autre par l'intermédiaire des liaisons.
- le cinquième et dernier chapitre énonce le *Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)*, qui relie les mouvements de solides de masse non négligeable à leurs causes. Ce principe permet notamment d'obtenir les *équations du mouvement* d'un ensemble de solides. Un cas particulier du PFD est le *Principe Fondamental de la Statique (PFS)* qui permet d'étudier l'équilibre d'un ensemble de solides. Les énoncés du PFD et du PFS sont simples, mais la mise en équation d'un problème nécessite de la rigueur et de

la méthode. A partir d'exemples détaillés, nous consacrerons donc une part importante de ce chapitre à l'acquisition d'une méthodologie d'analyse et de mise en équation des problèmes.

Références

De nombreux ouvrages traitant de la mécanique des solides indéformables sont aujourd'hui disponibles et accessibles au sein des bibliothèques universitaires. A titre indicatif, la construction de ce polycopié s'est principalement appuyée sur les références suivantes :

- Steven Le Corre. Cours de Mécanique du Solide Indéformable (support pédagogique PeiP2, 2019-20). Université de Nantes.
- Brémont Yves, et Réocreux Paul. *Mécanique : 1 Mécanique Du Solide Indéformable Calcul Vectoriel, Cinématique Cours Et Exercices Résolus*. Paris : Ellipses, 1995.
- Brémont Yves, et Réocreux Paul. *Mécanique : 2 Mécanique Du Solide Indéformable Statique Cours Et Exercices Résolus*. Paris : Ellipses, 1996.
- Brémont Yves, et Réocreux Paul. *Mécanique Du Solide Indéformable : Cinétique, Dynamique Cours Et Exercices Résolus Classes Préparatoires Aux Grandes Ecoles, PSI, PSI*, MP, MP*, PT, PT*, Premier Cycle Universitaire*. Paris : Ellipses, 1998.
- Bouzidi Rabah, Le Van Anh, et Thomas Jean-Christophe. *Mécanique Des Solides Indéformables*. Paris : Lavoisier, 2014.
- Cours de Mécanique du solide rigide, de Catherine Potel (Professeure à l'Université du Mans) disponible en ligne sur <http://perso.univ-lemans.fr/~cpotel/enseig.htm>
- Cours de Mécanique de Stéphane Genouel (Professeur de Sciences Industrielles en CPGE au Lycée Chateaubriand de Rennes), disponible en ligne sur <http://stephane.genouel.free.fr/>

Auteurs

Ce polycopié a été rédigé sous L^AT_EX par **Matthieu Gallezot**, enseignant au département PeiP de Nantes (2020-21), puis modifié successivement par Raphaël Abdelhamid et Guy Louarn.

Chapitre 1

Cinématique du solide

1.1 Définitions préliminaires

1.1.1 Postulats

La cinématique repose sur deux postulats, c'est-à-dire deux principes non démontrés, portant sur les notions de temps et d'espace.

Postulat des dates

Il existe au moins un instrument physique, appelé horloge, dont la caractéristique physique est une grandeur appelée *temps*, notée t . Cette grandeur est une grandeur scalaire (le temps est modélisé mathématiquement par un espace affine de dimension 1). Le temps évolue toujours dans le même sens (pas de retour en arrière possible) et sans s'arrêter.

L'horloge permet :

- d'associer une valeur de t , appelée *date*, à chaque évènement,
- d'objectiver la durée d'un évènement comme différence entre deux dates,
- d'objectiver la simultanéité de deux évènements comme égalité de deux dates.

La plupart des grandeurs considérées dans la suite de ce cours ont une valeur qui dépend du temps.

Espace

Dans le cadre de ce cours, nous allons nous intéresser à des systèmes matériels dans l'espace qui nous entoure. L'espace physique est modélisé par un espace euclidien de dimension 3, ce qui nous permettra d'utiliser les outils usuels que sont les vecteurs, le produit scalaire, le produit vectoriel (voir le cours d'Accueil – Physique).

Dans cet espace, nous postulons que tout système matériel peut être représenté géométriquement par un ensemble de points matériels.

1.1.2 Définitions

Définition : solide indéformable

On appelle solide indéformable, ou solide rigide, un corps tel que la distance entre deux points quelconques de ce corps reste constante au cours du temps.

Définition : point lié à un solide

Soit un solide S_i (avec $i = 1, 2, 3, \dots$) et un point P . Le point P est un **point lié au solide** S_i si les distances de P aux différents points de S_i restent constantes au cours du temps. Le point P lié au solide S_i est noté : $P \in S_i$ ou P_i .

Remarques :

- les notations S_i (avec $i = 1, 2, 3, \dots$) et $P \in S_i$ seront très utiles lorsque nous nous intéresserons à des systèmes constitués de plusieurs solides.
- mathématiquement la définition du solide indéformable peut s'écrire de la façon suivante :

$$\forall P \in S_i, \forall Q \in S_i, \forall t, \|\overrightarrow{P_i Q_i(t)}\|^2 = \text{constante}. \quad (1.1)$$

- **Toute particule appartenant matériellement à un solide indéformable est naturellement un point lié à ce solide. Cependant, la notion de point lié est plus large et englobe tout point fixe par rapport au solide, même si le point n'appartient pas matériellement au solide !** Nous verrons des exemples en TD dans le cadre de la composition de mouvements.

Définition : mouvement

Un solide S_j est en mouvement par rapport à un solide S_i si les distances entre 3 points quelconques du solide S_j et trois points quelconques du solide S_i varient au cours du temps. Dans le cas contraire, le solide S_j est fixe (ou au repos) par rapport au solide S_i .

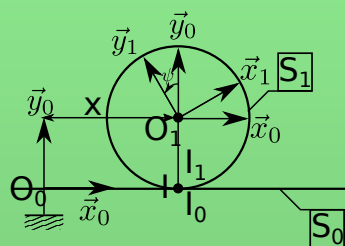
La notion de mouvement est donc une notion relative qui nécessite de définir un observateur.

Définition : point géométrique

Un point géométrique est un point qui n'est fixe par rapport à aucun solide. Un point géométrique est simplement noté par sa lettre, par exemple point I (pas d'indice).

Explication 1.1 (Exemple : points dans le contact roue/sol)

On considère une roue (solide S_1) qui roule sur le sol (solide S_0). Le contact est considéré comme ponctuel, au point I .



Le point I correspond à 3 points différents, coïncidants à l'instant t . Nous pouvons distinguer :

- le point $I \in S_0$ (ou I_0), qui est la particule du sol en contact avec la roue à l'instant t . A l'instant suivant, cette particule n'est plus en contact avec la roue.

- le point $I \in S_1$ (ou I_1), qui est la particule de la roue en contact avec le sol à l'instant t . A l'instant suivant, cette particule n'est plus en contact avec le sol.
- le point I , qui n'appartient à aucun solide et qui est le point de contact. La position du point de contact change également avec le temps.

Nous verrons en TD que, pour un repère d'observation fixé, chaque point a une vitesse différente, ce qui justifie ainsi de les distinguer les uns des autres.

Définition : repère lié à un solide

Soit un repère d'origine O associé à la base de vecteurs unitaires $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, et noté $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Par ailleurs, soit un solide S_i . Le repère R est lié au solide S_i si le solide S_i est fixe par rapport à ce repère. Le repère lié au solide S_i est alors noté $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$.

Conséquence : d'après les définitions du point lié à un solide et du repère lié à un solide, on en déduit que **le point $P \in S_i$ est fixe dans le repère R_i .**

Remarque : dans cadre de ce cours, nous supposons que tous les repères sont associés à des bases orthonormées directes.

D'après la définition d'un repère lié à solide, **il y a équivalence entre solide et repère. L'étude du mouvement de S_j par rapport à S_i est équivalente à l'étude du mouvement de R_j par rapport à R_i .**

1.1.3 Paramétrage d'un système

Afin d'étudier le mouvement de S_j par rapport à S_i , il est nécessaire de repérer dans l'espace le repère R_j par rapport au repère R_i . C'est ce que l'on appelle **paramétrer le système**. Le paramétrage du système fait intervenir des **paramètres du mouvement**, qui varient en fonction du temps.

Le paramétrage de R_j par rapport à R_i se fait en deux temps :

1. **Repérage de la position de R_j .** La position de l'origine O_j du repère R_j dans le repère R_i est repérée grâce au vecteur position $\overrightarrow{O_i O_j}$. Les trois composantes du vecteur $\overrightarrow{O_i O_j}$ définissent trois paramètres de position, quelque soit le système de coordonnées choisi (cartésien, cylindrique ou sphérique).
2. **Repérage de l'orientation de R_j .** L'orientation de R_j est liée à la notion de rotation des vecteurs de base de R_j par rapport aux vecteurs de base de R_i . Il existe plusieurs manières de repérer l'orientation d'un repère (voir par exemple les angles d'Euler, explication 1.2). Au final quelque soit le paramétrage choisi, l'orientation est décrite également par 3 paramètres indépendants.

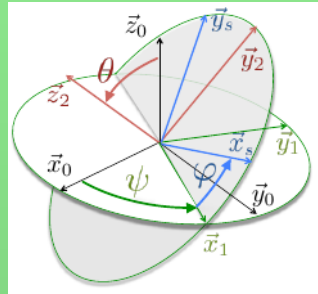
Bilan : 3 paramètres de positions + 3 paramètres d'orientation = 6 paramètres du mouvement.

La position et l'orientation d'un repère (\equiv d'un solide) dans l'espace sont complètement déterminées par au plus 6 paramètres indépendants appelés *degrés de liberté*.

Un solide a **au plus** 6 degrés de liberté. Suivant les situations, les degrés de liberté peuvent être des données du problème (mouvement imposé) ou des inconnues du problème, dont on cherche à déterminer l'évolution au cours du temps.

Explication 1.2 (Paramétrage d'orientation avec les angles d'Euler)

Le paramétrage de l'orientation d'un repère R_S par rapport à un repère R_0 peut être effectué à l'aide des angles d'Euler qui utilisent trois rotations successives (appelées précession, nutation, rotation propre) pour passer de R_0 à R_S .



1. Quels sont les degrés de liberté du repère R_S par rapport au repère R_0 ? Quelle est la position du repère R_S par rapport au repère R_0 ?
2. Tracer les figures de changement de base (figures de projection) pour chaque rotation.
3. Projetez les vecteurs de la première rotation intermédiaire (précession) dans le repère R_0 .
4. Combien de degrés de liberté sont ajoutés si l'origine O_S de R_S se déplace dans toutes les directions par rapport à l'origine O_0 de R_0 ?

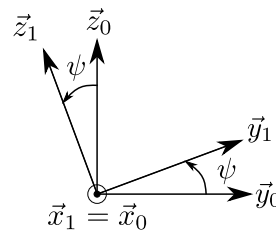
Dans la plupart des problèmes que nous résoudrons, le paramétrage du système sera déjà réalisé. Il sera néanmoins indispensable, **avant de commencer la résolution du problème**, de lister tous les repères et les paramètres du mouvement. Si des paramètres d'orientation (rotation) sont présents, il est fortement conseillé de tracer systématiquement les figures de changement de base associées aux rotations. Ces figures facilitent la réalisation des projections.

Pour éviter les erreurs de projection, lors de la réalisation des figures de projection :

- l'angle de rotation d'un repère vers un autre doit toujours être compris entre 0 et $\pi/2$ et être orienté positivement dans le sens trigonométrique positif (anti-horaire).
- l'axe de rotation doit toujours sortir de la feuille « vers le haut » tel que la base obtenue soit une base directe. Symboles : vecteur entrant \otimes ; vecteur sortant \odot

Exemple

Pour $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en rotation d'angle ψ et d'axe $(O_{0,1}, \vec{x}_{0,1})$ par rapport $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$:



L'angle de rotation ψ est orienté suivant le sens trigonométrique. Les vecteurs de base sont positionnés tel que l'axe de rotation $\vec{x}_1 = \vec{x}_0 = \vec{y}_1 \wedge \vec{z}_1 = \vec{y}_0 \wedge \vec{z}_0$ sort de la feuille (la base $(\vec{y}_1, \vec{z}_1, \vec{x}_1)$ est bien une base directe).

1.2 Cinématique du point

Cette section traite de la cinématique du point, préalable nécessaire à l'étude d'un solide qui, comme nous l'avons déjà défini, est un ensemble continu de points. Dans l'ensemble, il s'agit de rappels des cours de mécanique de licence 1, mais le formalisme utilisé est différent et adapté à celui utilisé dans le cadre de la mécanique du solide indéformable.

1.2.1 Définitions

Définition : vitesse d'un point

Soit un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Soit un point P dont la position est paramétrée par le vecteur position $\vec{OP}(t)$. La **vitesse du point P observée dans le repère R , à l'instant t , est la dérivée temporelle du vecteur position**. La vitesse est notée $\vec{V}(P/R)$, telle que :

$$\vec{V}(P/R) = \left(\frac{d\vec{OP}(t)}{dt} \right)_R \quad (1.2)$$

Les différentes positions que prend le point P dans le repère R au cours du temps correspondent à la **trajectoire** du point P observée dans le repère R . On peut montrer que le vecteur vitesse $\vec{V}(P/R)$ est un vecteur tangent à cette trajectoire.

Dimension : $[L \cdot T^{-1}]$; une vitesse s'exprime en $m \cdot s^{-1}$.

Remarque importante : en toute rigueur, la vitesse du point P devrait être notée $\vec{V}(P/R, t)$ car la **vitesse est une grandeur instantanée qui varie en fonction du temps**. Cependant, la dépendance par rapport au temps est généralement omise pour alléger les notations. Cette dépendance est donc implicite et doit être gardée à l'esprit.

Exemple

Soit $P(x_P(t), y_P(t), z_P(t))_R$. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned}\vec{V}(P/R) &= \left(\frac{d(x_P \vec{x})}{dt} \right)_R + \left(\frac{d(y_P \vec{y})}{dt} \right)_R + \left(\frac{d(z_P \vec{z})}{dt} \right)_R \\ &= \frac{dx_P}{dt} \vec{x} + x_P \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)_R + \frac{dy_P}{dt} \vec{y} + y_P \left(\frac{d\vec{y}}{dt} \right)_R + \frac{dz_P}{dt} \vec{z} + z_P \left(\frac{d\vec{z}}{dt} \right)_R.\end{aligned}$$

Par définition, les vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ sont fixes dans R , donc : $\left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{y}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{z}}{dt} \right)_R = \vec{0}$ (nous verrons dans l'explication 1.3 le cas où les dérivées des vecteurs de base ne sont plus nulles). On obtient alors :

$$\begin{aligned}\vec{V}(P/R) &= \frac{dx_P}{dt} \vec{x} + \frac{dy_P}{dt} \vec{y} + \frac{dz_P}{dt} \vec{z} \\ &= \dot{x}_P \vec{x} + \dot{y}_P \vec{y} + \dot{z}_P \vec{z}.\end{aligned}$$

Nous utiliserons par la suite toujours la notation « $\dot{}$ » pour exprimer la dérivée d'une grandeur par rapport au temps. De même, la notation « $\ddot{}$ » désignera la dérivée seconde par rapport au temps d'une grandeur.

Définition : accélération d'un point

Soit un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Soit un point P de vitesse $\vec{V}(P/R)$ à l'instant t . L'accélération du point P par rapport au repère R à l'instant t est la dérivée temporelle du vecteur vitesse. L'accélération est notée $\vec{\Gamma}(P/R)$, telle que :

$$\vec{\Gamma}(P/R) = \left(\frac{d\vec{V}(P/R)}{dt} \right)_R. \quad (1.3)$$

Dimension : $[L \cdot T^{-2}]$; une accélération s'exprime en $m \cdot s^{-2}$.

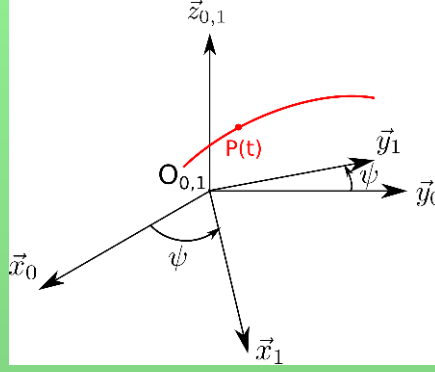
Pour que l'accélération soit correctement définie d'un point de vue mathématique, il faut supposer que les trajectoires des points sont de classe \mathcal{C}^2 , c'est-à-dire qu'elles sont deux fois continûment dérivables. Cette hypothèse exclut les problèmes incluant des chocs.

1.2.2 Changement de base de dérivation – Vecteur rotation – Base mobile



Explication 1.3 (Changement de base : cas d'une rotation)

On considère désormais un repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en rotation d'axe $(O_{0,1}, \vec{z}_{0,1})$ et d'angle $\psi(t)$ par rapport à un repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.



Soit un point P dont on connaît la position dans R_1 : $\overrightarrow{O_{0,1}P}(t) = x_P(t)\vec{x}_1 + y_P(t)\vec{y}_1 + z_P(t)\vec{z}_{0,1}$.

1. Donner le nombre de degrés de liberté de R_1 par rapport à R_0 . Tracer la figure de changement de base.
2. Exprimer la vitesse du point P par rapport au repère R_0 , $\vec{V}(P/R_0)$.

Formule de changement de base de dérivation

Soit un vecteur quelconque \vec{u} , un repère R_i et un repère R_j paramétré par rapport à R_i . La formule de changement de base de dérivation est donnée par :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_i} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_j} + \vec{\Omega}(R_j/R_i) \wedge \vec{u}. \quad (1.4)$$

où $\vec{\Omega}(R_j/R_i)$ est appelé vecteur rotation de R_j par rapport à R_i .

Dimension : $[T^{-1}]$; le vecteur rotation s'exprime en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Application

On en déduit les formules de calcul de la vitesse et de l'accélération d'un point en cas de changement de base d'observation :

$$\vec{V}(P/R_i) = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{dt}\right)_{R_i} = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{dt}\right)_{R_j} + \vec{\Omega}(R_j/R_i) \wedge \overrightarrow{OP}(t), \quad (1.5)$$

$$\vec{\Gamma}(P/R_i) = \left(\frac{d\vec{V}(P/R_i)}{dt}\right)_{R_i} = \left(\frac{d\vec{V}(P/R_i)}{dt}\right)_{R_j} + \vec{\Omega}(R_j/R_i) \wedge \vec{V}(P/R_i). \quad (1.6)$$

Formule de la base mobile

Considérons un vecteur lié à R_j , noté \vec{u}_j . Alors \vec{u}_j est fixe dans R_j . On déduit alors de l'Eq. (1.4) la formule dite de la « base mobile » :

$$\left(\frac{d\vec{u}_j}{dt} \right)_{R_i} = \vec{\Omega}(R_j/R_i) \wedge \vec{u}_j. \quad (1.7)$$

Propriétés du vecteur rotation

- *Inversion des repères de dérivation* : lorsque l'on inverse les repères de dérivation, il faut prendre garde au signe du vecteur rotation. Retenons que :

$$\vec{\Omega}(R_j/R_i) = -\vec{\Omega}(R_i/R_j). \quad (1.8)$$

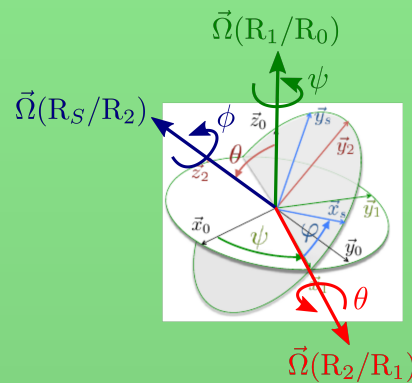
- *Composition de vecteurs rotation* : si l'on considère plusieurs repères en rotation les uns par rapport aux autres on admettra la formule suivante :

$$\vec{\Omega}(R_n/R_1) = \sum_{i=2}^n \vec{\Omega}(R_i/R_{i-1}). \quad (1.9)$$

Explication 1.4 (Construction du vecteur rotation)

Le vecteur rotation se construit facilement lorsque l'on connaît les paramètres de rotation et les axes de rotation. Par exemple dans le cas du paramétrage avec les angles d'Euler (voir explication 1.2), le repère R_S est obtenu à partir du repère R_0 grâce à trois rotations successives (voir aussi les figures de changement de repère) :

- R_1/R_0 : précession d'angle ψ autour de $\vec{z}_0 \Rightarrow \vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0$
- R_2/R_1 : nutation d'angle θ autour de $\vec{x}_1 \Rightarrow \vec{\Omega}(R_2/R_1) = \dot{\theta}\vec{x}_1$
- R_S/R_2 : rotation propre d'angle ϕ autour de $\vec{z}_2 \Rightarrow \vec{\Omega}(R_S/R_2) = \dot{\phi}\vec{z}_2$



D'après la propriété de composition des rotations (1.9), on en déduit le vecteur rotation $\vec{\Omega}(R_S/R_0) = \vec{\Omega}(R_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_S/R_2) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{x}_1 + \dot{\phi}\vec{z}_2$.

$\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ sont les vitesses angulaires. \vec{z}_0 , \vec{x}_1 , \vec{z}_2 sont les axes de rotation associés aux vitesses angulaires.

Comme le montre cet exemple, il n'est pas toujours nécessaire de projeter tous les vecteurs dans la même base.

Exemple 1 : Dérivée temporelle des vecteurs de base

Soit un repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en rotation d'axe $(O_{0,1}, \vec{z}_{0,1})$ et d'angle ψ par rapport à un repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Que vaut la dérivée temporelle des vecteurs de base de R_1 par rapport à R_0 ?

Le vecteur de rotation vaut $\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi} \vec{z}_1$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0} &= \dot{\psi} \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\psi} \vec{y}_1, \\ \left(\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0} &= \dot{\psi} \vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\psi} \vec{x}_1, \\ \left(\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0} &= \dot{\psi} \vec{z}_1 \wedge \vec{z}_1 = \vec{0}. \end{aligned}$$

On comprend ici l'intérêt de la formule pour dériver les vecteurs d'une base dans une autre base, d'où le nom de « formule de la base mobile ».

Exemple 2 : Vitesse d'un point lié dans un repère

Soit un repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en rotation d'axe $(O_{0,1}, \vec{z}_{0,1})$ et d'angle ψ par rapport à un repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Soit un point P lié à R_1 avec $\overrightarrow{O_{0,1}P_1} = l\vec{x}_1$. Quelle est la vitesse $\vec{V}(P \in R_1/R_0)$?

Puisque P est lié à R_1 , P est fixe dans ce repère et on note $P \in R_1$. On a donc $\vec{V}(P \in R_1/R_1) = \vec{0}$. En utilisant l'Eq. (1.7), on peut écrire :

$$\vec{V}(P \in R_1/R_0) = \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_{0,1}P_1},$$

Le vecteur rotation vaut $\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi} \vec{z}_1$. On en déduit que :

$$\vec{V}(P \in R_1/R_0) = \dot{\psi} l \vec{y}_1.$$

Remarque : par définition, on peut écrire que

$$\vec{V}(P \in R_1/R_0) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_{0,1}P_1}}{dt} \right)_{R_0} = \dot{\psi} l \vec{y}_1.$$

Remarquons que la vitesse est dérivée par rapport au repère R_0 (on dit que la vitesse du point est observée dans le repère R_0), mais qu'elle a une composante suivant \vec{y}_1 . Autrement dit, la vitesse est projetée dans la base de R_1 . Pour projeter la vitesse dans la base de R_0 , écrivons :

$$\vec{y}_1 = -\sin \psi \vec{x}_0 + \cos \psi \vec{y}_0,$$

d'où

$$\vec{V}(P \in R_1/R_0) = \dot{\psi} l (-\sin \psi \vec{x}_0 + \cos \psi \vec{y}_0).$$

L'expression de la vitesse est bien plus compliquée lorsqu'elle est projetée dans R_0 !

Attention à bien distinguer d'une part le repère d'observation et d'autre part le repère de projection.

Le repère d'observation est le repère dans lequel on dérive un vecteur.

Le repère de projection est le repère dans lequel on projette le vecteur. **On s'efforcera de choisir des repères de projection tels que les équations restent les plus simples possibles.**

1.3 Torseur cinématique

1.3.1 Définition d'un torseur

Pré-requis : revoir la partie « Champs et représentation » du cours Accueil - Physique.

Les torseurs sont des objets mathématiques que nous allons constamment utiliser par la suite. Cette section a pour objectif de les définir mathématiquement et de découvrir leurs propriétés essentielles.

Définition : torseur

Soit un espace affine \mathcal{E} et un espace vectoriel (E) . Un champ de vecteur (une *application*) $\mathcal{M} : \mathcal{E} \rightarrow (E)$ est un **torseur** s'il vérifie la relation

$$\forall A \in \mathcal{E} \xrightarrow{\mathcal{M}} \vec{M}(A) \in (E), \forall B \in \mathcal{E} \xrightarrow{\mathcal{M}} \vec{M}(B) \in (E), \quad \vec{M}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{M}(B) \cdot \overrightarrow{AB}. \quad (1.10)$$

On dit que le champ de vecteur \mathcal{M} est *équiprojectif*. Par ailleurs, $\forall A \in \mathcal{E}$, $\vec{M}(A)$ est appelé **moment du torseur \mathcal{M} au point A** .

Éléments de réduction d'un torseur

Si $\mathcal{M} : \mathcal{E} \rightarrow (E)$ est un torseur, alors il existe un vecteur $\vec{R} \in (E)$, appelé **résultante du torseur \mathcal{M}** , tel que :

$$\forall A, B \in \mathcal{E}, \vec{M}(B) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}. \quad (1.11)$$

Cette équation est appelée *formule de Varignon* ou *formule de transport des moments*.

Réciproquement, s'il existe un vecteur $\vec{R} \in (E)$ tel que \vec{M} vérifie (1.11), alors le champ de vecteur \mathcal{M} est un torseur.

La formule de Varignon montre que le torseur peut être calculé en n'importe quel point de l'espace si l'on connaît la résultante du torseur ainsi que le moment du torseur en un point. **La résultante \vec{R} du torseur ainsi que le moment $\vec{M}(A)$ du torseur au point A sont appelés éléments de réduction du torseur au point A** . On note :

$$\{\mathcal{M}\} = \left\{ \vec{R}; \vec{M}(A) \right\}_A.$$

Remarques :

1. les notions de résultante et de moment sont empruntées au vocabulaire de la statique. Nous verrons en effet au Chapitre 4 que les efforts appliqués à un solide peuvent être modélisés par un torseur, appelé torseur des efforts.
2. **la résultante est un invariant du torseur, son expression est la même en tout point de l'espace. Seul le moment du torseur dépend du point considéré.**
3. dans la notation $\{\mathcal{M}\} = \left\{ \vec{R}; \vec{M}(A) \right\}_A$ le point d'expression A du torseur apparaît à la fois dans la notation du moment et en indice du torseur. Cette notation est redondante, mais elle est fortement conseillée pour éviter des erreurs.

Opérations sur les torseurs

- *Egalité* : deux torseurs sont égaux si leurs éléments de réduction au même point sont égaux
- *Addition* : deux torseurs peuvent être additionnés s'ils sont exprimés au même point
- *Produit (Comoment)* : soit deux torseurs $\{\mathcal{M}_1\}$ et $\{\mathcal{M}_2\}$ au point A . Le produit (ou comoment) de $\{\mathcal{M}_1\}$ et $\{\mathcal{M}_2\}$ est une grandeur scalaire, notée :

$$\{\mathcal{M}_1\} \cdot \{\mathcal{M}_2\} = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_2(A) + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_1(A). \quad (1.12)$$

Moyen mnémotechnique pour la formule de Varignon

La formule de Varignon (1.11) peut s'écrire sous la forme :

$$\forall A, B \in \mathcal{E}, \vec{M}(B) = \vec{M}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}. \quad (1.13)$$

que l'on retient facilement comme formule de *BABAR*.

1.3.2 Caractérisation du torseur cinématique d'un solide

Définition : champ des vitesses d'un solide

On appelle champ des vitesses du solide S_j par rapport à R_i , le vecteur vitesse associé à chaque point P du solide S_j , tel que :

$$\vec{V}(P \in S_j/R_i) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_i P_j}}{dt} \right)_{R_i} \quad (1.14)$$

Explication 1.5 (Démonstration du torseur cinématique)

Soit un solide S_j en mouvement par rapport à R_i . Soit $A \in S_j$ et $B \in S_j$ deux points liés à S_j .

Démontrer que :

1. Le champ des vitesses du solide S_j est un champ de moments d'un torseur que l'on appellera torseur cinématique (utiliser la propriété d'équiprojectivité).
2. La résultante du torseur cinématique est le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S_j/R_i)$.

Torseur cinématique d'un solide

Le *torseur cinématique* ou *torseur distributeur des vitesses* du solide S_j dans son mouvement par rapport au repère R_i est noté $\{\mathcal{V}(S_j/R_i)\}$. Ses éléments de réduction au point $A \in S_j$ sont :

- résultante : le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S_j/R_i)$
- moment : le vecteur vitesse $\vec{V}(A \in S_j/R_i)$ qui satisfait la formule de Varignon appelée ici formule de transport des vitesses telle que

$$\vec{V}(B \in S_j/R_i) = \vec{V}(A \in S_j/R_i) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(S_j/R_i). \quad (1.15)$$

On note aussi : $\{\mathcal{V}(S_j/R_i)\} = \left\{ \vec{\Omega}(S_j/R_i); \vec{V}(A \in S_j/R_i) \right\}_{A \in S_j}$.

Equivalence solide et repère

Rappelons qu'il est équivalent d'étudier le mouvement relatif de deux solides et le mouvement relatif des référentiels liés à ces solides. Tous les torseurs suivants sont donc équivalents : $\{\mathcal{V}(S_j/R_i)\}$, $\{\mathcal{V}(R_j/S_i)\}$, $\{\mathcal{V}(R_j/R_i)\}$, $\{\mathcal{V}(S_j/S_i)\}$.

Coordonnées du torseur

Les vecteurs $\vec{\Omega}(S_j/R_i)$ et $\vec{V}(A \in S_j/R_i)$ sont appelés *coordonnées vectorielles* du torseur cinématique. La projection de ces vecteurs dans une base \mathcal{B} permet d'obtenir les *coordonnées scalaires* du torseur. On écrit alors :

$$\{\mathcal{V}(S_j/R_i)\} = \left\{ \vec{\Omega}(S_j/R_i); \vec{V}(A \in S_j/R_i) \right\}_{A \in S_j} = \left\{ \begin{pmatrix} \Omega_x & V_x \\ \Omega_y & V_y \\ \Omega_z & V_z \end{pmatrix} \right\}_{A \in S_j, \mathcal{B}}. \quad (1.16)$$

Dans cette expression on distingue :

- le repère d'observation : R_i
- le point d'expression du torseur : $A \in S_j$
- la base de projection des vecteurs : \mathcal{B}

Cette notation sera très utilisée pour caractériser cinématiquement les liaisons entre solides (voir chapitre 2).

1.3.3 Composition de torseurs cinématiques

Les formules de composition de mouvement sont utiles pour déterminer des vitesses à partir de repères intermédiaires judicieusement choisis, pour déterminer le mouvement d'ensemble de liaisons en série ou en parallèle ou pour étudier le contact entre deux solides.

Explication 1.6 (Démonstration : composition des vitesses)

Soit un repère $R_j(O_j, \vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j)$ en mouvement par rapport à $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$. Pour un point P en mouvement dans les deux repères, quelle est la relation entre $\vec{V}(P/R_j)$ et $\vec{V}(P/R_i)$?

Formule de composition des vitesses

L'explication 1.6 a permis de démontrer que la vitesse absolue d'un point est la somme de sa vitesse relative et de sa vitesse d'entraînement, tel que :

$$\vec{V}(P/R_i) = \vec{V}(P/R_j) + \vec{V}(P \in R_j/R_i), \quad (1.17)$$

avec

- $\vec{V}(P/R_i)$: **vitesse absolue** = vitesse du point géométrique P dans son mouvement par rapport au repère absolu R_i
- $\vec{V}(P/R_j)$: **vitesse relative** = vitesse du point géométrique P dans son mouvement par rapport au repère relatif R_j
- $\vec{V}(P \in R_j/R_i)$: **vitesse d'entraînement** = vitesse du $P \in R_j$ (point P lié au repère R_j) *coïncidant* à l'instant t avec le point géométrique P

Remarques :

- le choix du repère absolu et du repère relatif est arbitraire
- cette formule fait intervenir des vitesses qui sont toutes exprimées au même point : seul le repère d'observation change !

Antisymétrie

On peut déduire de la formule de composition des vitesses la propriété d'antisymétrie du champ des vitesses :

$$\vec{V}(P \in R_j/R_i) = -\vec{V}(P \in R_i/R_j). \quad (1.18)$$

Généralisation : composition des torseurs cinématiques

Soit n repères en mouvement les uns par rapport aux autres. A partir des propriétés de composition des vecteurs rotation (Eq. (1.9)) et de composition des vitesses (Eq. (1.17)), on peut généraliser pour obtenir la formule de compositions des torseurs cinématiques :

$$\{\mathcal{V}(R_n/R_1)\} = \sum_{i=2}^n \{\mathcal{V}(R_i/R_{i-1})\}, \quad (1.19)$$

avec

$$\{\mathcal{V}(R_i/R_{i-1})\} = \left\{ \vec{\Omega}(R_i/R_{i-1}); \vec{V}(P \in R_i/R_{i-1}) \right\}_{P \in R_i} \quad (1.20)$$

Attention, pour appliquer la formule il faut que tous les torseurs soient exprimés au même point (voir aussi : propriété d'addition des torseurs), c'est-à-dire pour chaque repère au point $P \in R_i$, coïncidant à l'instant t avec le point géométrique P .

1.4 Analyse cinématique du glissement entre deux solides en contact

Les outils de composition des vitesses introduits précédemment permettent d'étudier la cinématique du glissement entre deux solides en contact.

Définition : vitesse de glissement

Soit I le point de contact entre deux solides S_1 et S_2 , tous deux en mouvement par rapport à R_i . Le vecteur vitesse de glissement de S_2 par rapport à S_1 , au point I , est le vecteur vitesse d'entraînement du point I dans le mouvement de S_2 par rapport à S_1 .

Autrement dit :

$$\vec{v}_g = \vec{V}(I \in S_2/S_1). \quad (1.21)$$

Calcul de la vitesse de glissement

A partir de la loi de composition des torseurs (Eq. (1.19)), on peut écrire la vitesse de glissement en composant les vitesses connues par rapport au repère R_i , tel que :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/R_i) + \vec{V}(I \in R_i/S_1) \quad (1.22)$$

$$= \vec{V}(I \in S_2/R_i) - \vec{V}(I \in S_1/R_i). \quad (1.23)$$

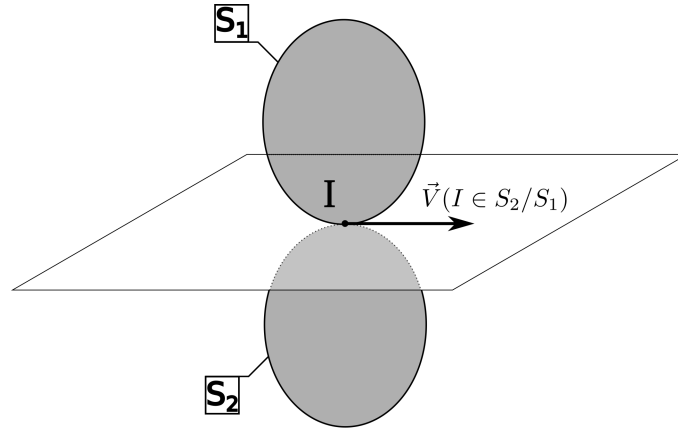


FIGURE 1.1 – La vitesse de glissement appartient au plan tangent aux deux solides S_2 et S_1 , en contact au point I . Si la vitesse avait une composante normale au plan, les solides se rentreraient dedans ou s'éloigneraient l'un de l'autre.

Vitesse de glissement et plan tangent

La vitesse de glissement entre deux solides en contact ponctuel est nécessairement comprise dans le plan tangent aux deux solides (voir figure 1.1). La vitesse dans la direction normale au plan est nulle. En effet, dans le cas contraire, il y aurait interpénétration ou éloignement des solides, ce qui n'est pas compatible avec la condition de contact.

Condition de non glissement

On appelle condition de non glissement l'équation :

$$\vec{v}_g = \vec{0}. \quad (1.24)$$

Cette condition, nous le verrons plus tard, peut souvent être utilisée pour obtenir des relations entre certains paramètres du mouvement.

Il y a non-glissement lorsque les deux solides adhèrent l'un à l'autre. Nous verrons au chapitre 4 que l'adhérence est liée à la notion d'effort de frottement.

Remarque : pivotement, roulement

Le contact peut aussi mettre en jeu d'autres mouvements (pivotement, roulement), qui sont négligés dans le cadre de ce cours.

1.5 Champ des accélérations d'un solide

Le calcul des accélérations sera nécessaire pour le calcul du torseur dynamique (Chap. 3) et l'application du principe fondamental de la dynamique (Chap. 5).

Expression du champ des accélérations d'un solide

Soit un solide S_j en mouvement par rapport à R_i . Pour deux points $A \in S_j$ et $B \in S_j$, le champ des accélérations de S_j dans son mouvement par rapport R_i est donné par :

$$\vec{\Gamma}(B \in S_j/R_i) = \vec{\Gamma}(A \in S_j/R_i) + \left(\frac{d\vec{\Omega}(S_j/R_i)}{dt} \right)_{R_i} \wedge \overrightarrow{A_j B_j} + \vec{\Omega}(S_j/R_i) \wedge (\vec{\Omega}(S_j/R_i) \wedge \overrightarrow{A_j B_j}) \quad (1.25)$$

Idée de la démonstration : on démarre de la définition de l'accélération (Eq. (1.3)), dans laquelle on injecte formule de transport des vitesses dans un solide (Eq. (1.15)). Pour obtenir les différentes dérivées, il faut ensuite utiliser la formule de changement de base de dérivation (Eq. (1.4)).

L'équation (1.25) montre que le champ des accélérations d'un solide n'est pas un tenseur. En effet, le champ des accélérations ne vérifie pas la formule de Varignon.

Composition des accélérations d'un solide

On admettra que l'accélération absolue $\vec{\Gamma}(P/R_i)$ d'un point est la somme de son accélération relative $\vec{\Gamma}(P/R_j)$, de son accélération d'entraînement $\vec{\Gamma}(P \in R_j/R_i)$ et de l'accélération de Coriolis (terme supplémentaire par rapport à la composition des vitesses), telle que :

$$\vec{\Gamma}(P/R_i) = \vec{\Gamma}(P/R_j) + \vec{\Gamma}(P \in R_j/R_i) + 2\vec{\Omega}(R_j/R_i) \wedge \vec{V}(P/R_j) \quad (1.26)$$

La composition des accélérations d'un solide joue un rôle important dès lors que l'on applique le Principe Fondamental de la Dynamique dans des référentiels non galiléens (hors programme).

Chapitre 2

Analyse cinématique des mécanismes

Dans ce chapitre, les outils de la cinématique sont appliqués à l'étude des mécanismes. Nous définissons tout d'abord deux mouvements élémentaires qui permettent d'étudier les mouvements autorisés par les liaisons entre solides. Dans le cadre de micro-projets, nous verrons comment réaliser le schéma cinématique d'un mécanisme puis comment déterminer les relations entre son mouvement d'entrée et son mouvement de sortie.

2.1 Mouvements élémentaires entre deux solides

Un mouvement quelconque est la combinaison de deux mouvements élémentaires : la translation et la rotation.

2.1.1 Translation

Définition : mouvement élémentaire de translation

Un solide S_j est en translation par rapport au solide S_i si et seulement si tout segment reliant deux points liés à S_j reste parallèle à lui même lors du mouvement.

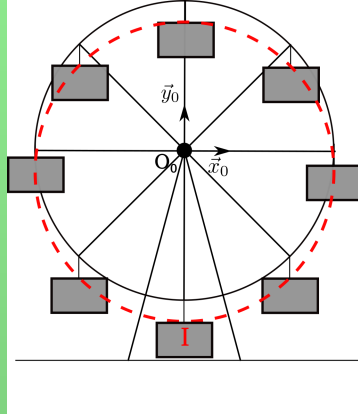
Trajectoires de translation

Translation n'est pas synonyme d'« aller tout droit ». On dit que la translation de S_j par rapport à R_i est :

- *rectiligne* si la trajectoire de S_j par rapport à R_i est une droite ;
- *curviligne* si la trajectoire de S_j par rapport à R_i est une courbe. C'est le cas par exemple de la trajectoire dessinée par les essuie-glaces sur un pare-brise de voiture ou encore de la trajectoire de la nacelle d'une grande roue par rapport au sol (voir explication 2.1).

Si de plus la vitesse de S_j par rapport à R_i est constante au cours du temps, on parle de translation *uniforme*.

Explication 2.1 (Translation circulaire des nacelles d'une grande roue)



Bien que la grande roue soit en rotation par rapport au sol, le fond des nacelles reste parallèle au sol à tout instant. Les trajectoires des points des nacelles sont des cercles (exemple en pointillé rouge du point I). Il y a donc translation circulaire dans le repère R_0 lié au sol.

Torseur cinématique d'une translation

Le torseur cinématique pour un mouvement de translation entre S_j et S_i s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(S_j/S_i)\} = \left\{ \vec{0}; \vec{V}(A \in S_j/S_i) \right\}_{\forall A \in S_j}.$$

Tous les points de S_j ont la même vitesse instantanée car le vecteur rotation est nul : $\forall A_j, B_j, \vec{V}(A \in S_j/R_i) = \vec{V}(B \in S_j/R_i)$.

2.1.2 Rotation

Définition : mouvement élémentaire de rotation

Un solide S_j est en rotation par rapport au solide S_i si et seulement il existe une droite de S_j (appelée axe de rotation) immobile par rapport à S_i , pour tout instant.

Torseur cinématique d'une rotation

Pour tout point situé sur l'axe de rotation (Δ) ,

$$\{\mathcal{V}(S_j/R_i)\} = \left\{ \vec{\Omega}(S_j/R_i); \vec{0} \right\}_{A \in (\Delta)}.$$

Le vecteur vitesse est nul pour tout point du solide appartenant à l'axe de rotation. Plus on s'éloigne de l'axe de rotation, plus la norme du vecteur vitesse est grande. Le vecteur vitesse est en effet non nul pour tout point du solide n'appartenant pas à l'axe de rotation (en raison de la formule de transport des vitesses (1.15)).

2.2 Torseur des mouvements cinématiquement admissibles des liaisons

2.2.1 Analyse et représentation cinématique des liaisons

Nous avons vu qu'un solide a au maximum 6 degrés de liberté (ddl) dans l'espace. Ces ddl correspondent aux mouvements élémentaires de translation et de rotation, tel que :

- trois ddl de position = trois mouvements de translation indépendants possibles dans l'espace,
- trois ddl d'orientation = trois mouvements de rotation indépendants possibles dans l'espace.

Il y a une **liaison** entre deux solides lorsque ces solides sont mis en contact. **Le contact (la liaison) entre deux solides contraint le mouvement. La liaison diminue le nombre de mouvements indépendants possibles, c'est-à-dire restreint les degrés de liberté entre les deux solides.**

Il y a de multiples façons de réaliser technologiquement un contact, et donc des liaisons. Cependant dans la plupart des cas, la liaison obtenue se réduit (du point de vue cinématique) à une liaison élémentaire. Il y a onze liaisons élémentaires. Ces liaisons sont issues de l'analyse des mouvements et des surfaces de contact entre des solides élémentaires (sphère sur plan, plan sur plan etc.), ou de la combinaison de plusieurs liaisons.

Caractérisation géométrique des liaisons

Une liaison est caractérisée par son nom (exemple : liaison pivot) associé à des informations géométriques **qui sont indispensables** (exemple : liaison pivot d'axe (O, \vec{x})).

Schématisation des liaisons

Les schématisations 3D et 2D (planes) des liaisons sont normalisées. Le schéma est indépendant de la solution technologique permettant de réaliser la liaison. La géométrie réelle des solides n'est pas représentée. Les solides sont représentés par des traits ou des géométries élémentaires (cylindre, sphère...) de couleurs différentes (dans les tableaux ci-après, en noir et en gris clair ; voir le polycopié en pdf en ligne si besoin pour plus de lisibilité).

Caractérisation cinématique des liaisons

Pour chaque liaison, on définit le torseur des mouvements cinématiquement admissibles. Pour une liaison donnée, le torseur des mouvements admissibles de S_2 par rapport à S_1 est noté $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$, et est :

- présenté sous la forme de ses coordonnées scalaires :
$$\begin{Bmatrix} \Omega_x & V_x \\ \Omega_y & V_y \\ \Omega_z & V_z \end{Bmatrix}$$
- défini dans le repère local associé à la liaison
- exprimé en un point de son domaine de validité (domaine de validité : ensemble des points où la forme du torseur reste la même).

Le nombre de ddl de la liaison (le nombre de paramètres du mouvement) correspond aux coordonnées scalaires non nulles du torseur cinématique.

Chaque coordonnée scalaire est rattachée à un mouvement élémentaire dans le repère local de la liaison.

- Ω_x : ddl de rotation autour de l'axe (O, \vec{x}) ,
- Ω_y : ddl de rotation autour de l'axe (O, \vec{y}) ,
- Ω_z : ddl de rotation autour de l'axe (O, \vec{z}) ,
- V_x : ddl de translation suivant la direction \vec{x} ,
- V_y : ddl de translation suivant la direction \vec{y} ,
- V_z : ddl de translation suivant la direction \vec{z} .

L'évolution de ces mouvements élémentaires au cours du temps est a priori inconnue (ce sont des paramètres du mouvement, à déterminer lors de la résolution).

Dans le cadre de ce cours, il est principalement nécessaire de comprendre quels sont les mouvements autorisés par chaque liaison, en 3D et en problème plan¹. La schématisation des liaisons sera exploitée pour élaborer des schémas cinématiques dans le cadre de mini-projets. Nous reviendrons au chapitre 4 sur les actions mécaniques transmises par l'intermédiaire des liaisons.

Réduction du nombre de degrés de liberté dans un problème plan

Lorsque l'étude du mouvement dans l'espace se réduit à l'étude du mouvement dans un plan, le nombre de degrés de libertés est réduit à :

- deux ddl de translation dans les directions des vecteurs directeurs du plan
- un ddl de rotation autour de la normale au plan

soit un total d'**au plus 3** ddl.



Explication 2.2 (Analyse cinématique de la liaison pivot)

Les tableaux dans les pages suivantes regroupent : la caractérisation géométrique des liaisons, la caractérisation cinématique des liaisons et leur schématisation².

1. Quelques ressources en ligne supplémentaires (non exhaustives) pour visualiser les mouvements autorisés par chaque liaison : <http://chris.duporge.free.fr/ressources/liaisons/Model/Modlisationdesliaisons.htm>; <https://www.youtube.com/watch?v=ZkKc6yqOMN4>.

2. Figures des liaisons modifiées à partir de https://fr.wikiversity.org/wiki/M%C3%A9canique_pour_l'enseignement_technique_industriel/Mod%C3%A9lisation_-_Les_liaisons_m%C3%A9caniques.

2.2.2 Tableaux des liaisons normalisées (cinématique)

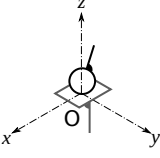

Désignation	Schéma 3D	Schéma plan	Torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$	Domaine validité torseur
Liaison ponctuelle, au point O , de normale \vec{z}			$\begin{Bmatrix} \Omega_x & V_x \\ \Omega_y & V_y \\ \Omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	Tout point appartenant à l'axe (O, \vec{z})

TABLE 2.1 – Liaisons normalisées à 5 degrés de liberté. Légende des couleurs : S_1 (gris clair) ; S_2 (noir).

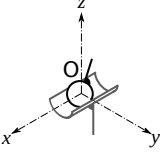
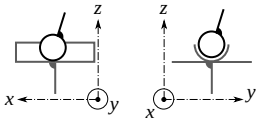
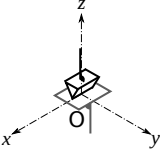
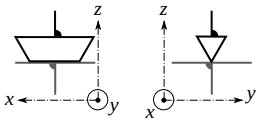
Désignation	Schéma 3D	Schéma plan	Torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$	Domaine validité torseur
Liaison linéaire annulaire, de centre O , de direction \vec{x}			$\begin{Bmatrix} \Omega_x & V_x \\ \Omega_y & 0 \\ \Omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	Au point O
Liaison linéaire rectiligne, de normale \vec{z} , d'axe (O, \vec{x})			$\begin{Bmatrix} \Omega_x & V_x \\ 0 & V_y \\ \Omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point du plan (\vec{z}, \vec{x})

TABLE 2.2 – Liaisons normalisées à 4 degrés de liberté. Légende des couleurs : S_1 (gris clair) ; S_2 (noir).

Désignation	Schéma 3D	Schéma plan	Torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$	Domaine validité torseur
Liaison rotule de centre O			$\begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 \\ \Omega_y & 0 \\ \Omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	Au point O
Liaison appui plan de normale \vec{z}			$\begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \Omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point

TABLE 2.3 – Liaisons normalisées à 3 degrés de liberté. Légende des couleurs : S_1 (gris clair) ; S_2 (noir).

Désignation	Schéma 3D	Schéma plan	Torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$	Domaine validité torseur
Liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{x})			$\begin{Bmatrix} \Omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point de (O, \vec{x})
Liaison sphérique à doigts d'axes (O, \vec{x}) et (O, \vec{y})			$\begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 \\ \Omega_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	Au point O

TABLE 2.4 – Liaisons normalisées à 2 degrés de liberté. Légende des couleurs : S_1 (gris clair) ; S_2 (noir).

Désignation	Schéma 3D	Schéma plan	Torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$	Domaine validité torseur
Liaison hélicoïdale d'axe (O, \vec{x}) ; rotation et translation proportionnelles			$\begin{Bmatrix} \Omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point de (O, \vec{x})
Liaison pivot d'axe (O, \vec{x})			$\begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point de (O, \vec{x})
Liaison glissière de direction \vec{x}			$\begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point

TABLE 2.5 – Liaisons normalisées à 1 degré de liberté. Légende des couleurs : S_1 (gris clair) ; S_2 (noir).

Désignation	Schéma 3D	Schéma plan	Torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$	Domaine validité torseur
Liaison encastrement			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point

TABLE 2.6 – Liaisons normalisées à 0 degré de liberté. Légende des couleurs : S_1 (gris clair) ; S_2 (noir).

2.3 Modélisation cinématique d'un mécanisme

Cette section du cours sera abordée dans le cadre d'une séance de projet et complétée par un devoir-maison à réaliser par petits groupes.

L'étude cinématique d'un mécanisme nécessite d'élaborer un modèle cinématique de ce mécanisme.

La première étape de la modélisation consiste à analyser le dessin technique du mécanisme. À partir du dessin technique, on effectue un recensement des différentes pièces en présence et de leurs mouvements relatifs. Les pièces qui ne sont pas en mouvement les unes par rapport aux autres sont regroupées dans ce que l'on appelle des classes d'équivalences. Les classes d'équivalences sont les solides que nous allons étudier. L'objectif final est d'obtenir un modèle global, à la fois simplifié (on ne veut pas représenter tous les détails ni toutes les pièces du mécanisme), à la fois suffisant pour étudier la cinématique du mécanisme.

Cet aspect de la modélisation ne sera pas traité dans ce cours : les dessins techniques, les classes d'équivalences et les liaisons entre solides seront fournies directement.

Le modèle cinématique d'un mécanisme peut être représenté de deux manières différentes : le graphe des liaisons et le schéma cinématique. Ces deux outils fournissent deux représentations complémentaires des mêmes informations.

Graphe des liaisons

Dans un graphe des liaisons :

- les solides (= les classes d'équivalences = les ensembles de pièces sans mouvement relatif entre elles) sont représentés par des cercles
- les solides sont reliés par des traits représentant les liaisons entre ces solides
- le long des traits, on indique le nom des liaisons et leurs informations géométriques

Schéma cinématique

Dans un schéma cinématique :

- les liaisons sont représentées à l'aide de leur schématisation normalisée
- les solides sont représentés par des traits reliant les différentes liaisons

Il n'est pas nécessaire de représenter fidèlement la géométrie du mécanisme. Par contre les points et les axes de différentes liaisons doivent être parfaitement positionnés.

Une fois le schéma cinématique établi, on passe à l'étape de paramétrage. Des repères sont associés à chaque solide. Ces repères sont ensuite positionnés et repérés dans l'espace grâce aux paramètres du mouvement (revoir chapitre 1). Pour chaque liaison, il y a autant de paramètres du mouvement que de degrés de liberté. Les informations géométriques (longueur connues etc.) sont également précisées.

Les calculs de cinématique ne pourront commencer qu'une fois toutes ces étapes rigoureusement réalisées.

**Explication 2.3 (Projet 1 – Cours : Bielle-manivelle)**

On étudie le mécanisme de bielle-manivelle d'un micro-moteur d'un avion modèle réduit. La bielle-manivelle se retrouve dans de nombreux moteurs, dans des pompes, et permet de transformer un mouvement de translation (dans le cas du moteur : translation du piston générée par combustion) en mouvement de rotation (dans le cas du moteur : pour faire tourner l'hélice de l'avion). Le dessin technique du micro-moteur est représenté Fig. 2.1, où les couleurs indiquent les différentes classes d'équivalence.

On définit le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ associé au carter (pièce **41**) du moteur.

Les classes d'équivalence (solides) suivantes ont été repérées sur le dessin :

- carter S_0 (en rouge) : regroupement des pièces **13** et **41** qui sont encastrées entre elles,
- manivelle (ou vilebrequin) S_1 (en jaune) : correspond à la pièce **15** (arbre relié à l'hélice de l'avion),
- bielle S_2 (en violet) : correspond à la pièce **9**,
- piston S_3 (en vert) : correspond à la pièce **5**.

Les liaisons mécaniques entre ces différents solides sont ^a :

- entre le carter S_0 et le piston S_3 : liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{x}) ,
- entre le piston S_3 et la bielle S_2 : liaison linéaire annulaire de centre I et de direction \vec{z} (cette liaison est déterminée par le choix technologique pour réaliser la liaison entre les deux pièces ; ici par un roulement à aiguille qui autorise un jeu axial suivant \vec{z} et des débattements angulaires),
- entre la bielle S_2 et la manivelle S_1 : liaison pivot glissant d'axe (J, \vec{z}) ,
- entre la manivelle S_1 et le carter S_0 : liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) (liaison réalisée par deux roulements à billes).

1. Réaliser le graphe des liaisons de la bielle-manivelle
2. Réaliser le schéma cinématique de la bielle-manivelle

^a. Pour visualiser en 3D le mouvement d'une bielle-manivelle, voir par exemple l'animation https://www.youtube.com/watch?v=b95UexTQ_EY. Attention : les liaisons mécaniques utilisées pour l'animation 3D ne correspondent pas exactement à celles utilisées dans l'exemple de ce cours.

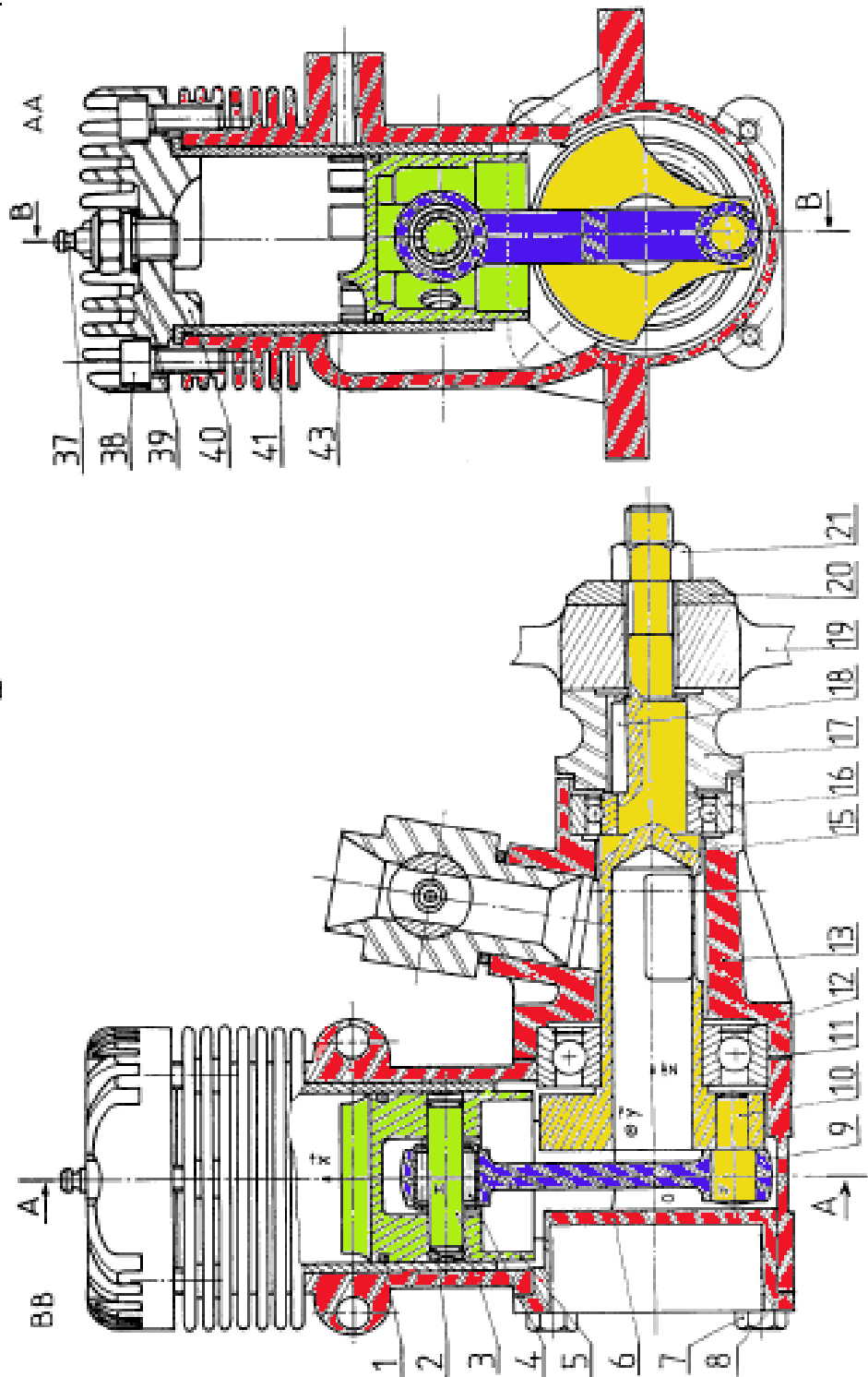


FIGURE 2.1 – Dessin technique d'un micro-moteur d'avion modèle réduit. Dessin issu et modifié de Brémont Yves, et Réocreux Paul. *Mécanique : 1 Mécanique Du Solide Indéformable Calcul Vectoriel, Cinématique Cours Et Exercices Résolus*. Paris : Ellipses, 1995.

2.4 Loi entrée-sortie des mécanismes transmetteurs de mouvement

Cette section du cours sera abordée dans le cadre d'une séance de projet et complétée par un devoir-maison à réaliser par petits groupes.

Mécanisme à chaîne fermée

Un mécanisme à chaîne fermée est un mécanisme dont le graphe des liaisons forme une boucle fermée (le premier et le dernier solide sont reliés entre eux).

Définition : loi entrée - sortie

On appelle loi entrée - sortie d'un mécanisme la relation entre les paramètres du mouvement du solide de sortie du mécanisme et les paramètres de mouvement du solide d'entrée du mécanisme.

Exemples

La loi entrée - sortie est une caractéristique essentielle des mécanismes transmetteurs de mouvement.

Certains mécanismes transmettent un mouvement sans le transformer. C'est le cas par exemple des réducteurs ou multiplicateurs de vitesses (roues de friction, transmetteurs à engrenages), où le mouvement transmis est une rotation. Seule la vitesse de rotation varie. la loi d'entrée-sortie est alors appelée *rapport de transmission* (voir par exemple le TD sur les roues de friction). Le rapport de transmission est le rapport entre la vitesse de rotation de sortie et la vitesse de rotation d'entrée.

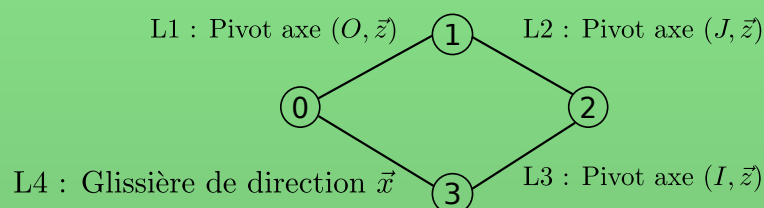
D'autres mécanismes transmettent un mouvement et le transforment (transmission et transformation d'un mouvement de rotation en translation et vice-versa). C'est le cas par exemple de la bielle-manivelle, des liaisons pignon-chaîne ou pignon-crémaillère...

Explication 2.4 (Projet 2 – Cours : loi entrée-sortie bielle-manivelle)

Nous montrons dans cet exemple comment déterminer la loi entrée-sortie par *fermeture géométrique* de chaîne.

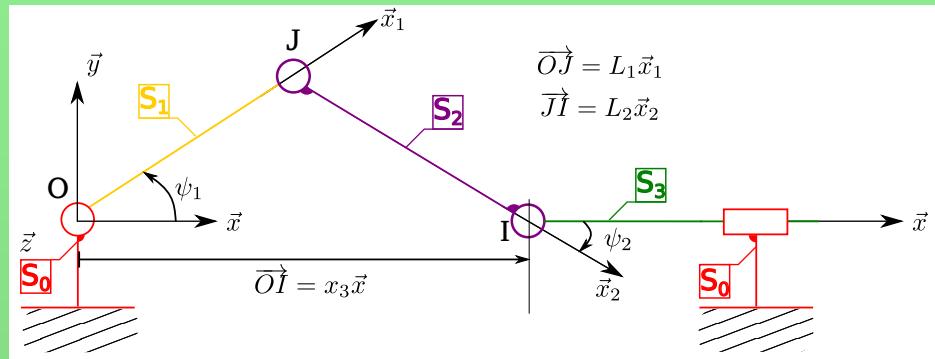
Repartons de la bielle-manivelle d'un micro-moteur d'avion modèle réduit présenté dans l'explication 2.3.

1. Le problème est désormais réduit à un problème plan. Justifier que dans ce cas, le graphe de liaison du mécanisme est le suivant :



Le graphe de liaison forme une boucle, on a bien un mécanisme à chaîne fermée.

2. Le schéma cinématique paramétré du mécanisme réduit à un problème plan est donné ci dessous.



Trois paramètres du mouvement ont été introduits :

- $x_3(t)$: paramètre du mouvement de translation du piston S_3
- $\psi_1(t)$: paramètre du mouvement de rotation de la manivelle S_1
- $\psi_2(t)$: paramètre du mouvement de rotation de la bielle S_2

Les repères R_1 et R_2 sont liés aux solides S_1 et S_2 , en rotation par rapport au repère du carter $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

- (a) Exprimer la loi entrée-sortie du mécanisme en écrivant la condition de fermeture de chaîne cinématique : $\vec{O_0O_0} = \vec{0}$.
- (b) Traduire en équation la condition : « la bielle garde une longueur L_2 constante » et montrer que l'on retrouve la même loi entrée - sortie.
- (c) Représenter graphiquement (à l'aide d'un tableur ou de MATLAB) la loi entrée-sortie, c.à.d. $x=f(\psi_1(t))$, pour $L_1 = 1$ cm et $L_2 = 3$ cm.

Chapitre 3

Cinétique

La cinétique permet de faire le lien entre la répartition des masses dans un solide et les champs cinématiques (vitesses, accélérations).

Définition : système matériel

Une partie des grandeurs que nous allons définir dans ce chapitre sont valables pour des **systèmes matériels**. Un système matériel, noté \mathcal{S} est un ensemble invariant de matière. En particulier, un système matériel peut être un ensemble de solides rigides, et on note : $\mathcal{S} = \cup_{i=1}^N S_i$.

3.1 Géométrie des masses

Dans cette section, nous nous intéressons aux caractéristiques d'**inertie** des solides. **L'inertie caractérise la résistance opposée par un solide à sa mise en mouvement.**

Nous revenons tout d'abord sur la notion de masse. La masse est une caractéristique d'inertie rencontrée à la fois en mécanique du point et en mécanique du solide. Elle représente la résistance opposée à un mouvement de translation.

Ensuite, nous introduisons une caractéristique d'inertie spécifique du solide et de sa mise en rotation : le moment d'inertie, et sa généralisation, la matrice d'inertie.

3.1.1 Masse d'un système matériel

Conservation et additivité de la masse

A un système matériel \mathcal{S} , on peut faire correspondre un nombre m , positif ($m > 0$), appelé masse. La masse est invariante au cours du temps (*conservation de la masse*). La masse est additive : la masse totale d'un système matériel est la somme des masses des éléments constituant ce système matériel.

Dimension : $[M]$; la masse s'exprime en kg.

En raison de la propriété d'additivité, la masse peut s'écrire :

— pour un système matériel constitué d'un ensemble discrets de N points :

$$m = \sum_{i=1}^N m_i, \quad (3.1)$$

où m_i est la masse du i -ème point.

- pour un système matériel constitué d'un ensemble continu de points (par-exemple, un solide ou un ensemble de solides) :

$$m = \int_{P \in \mathcal{S}} \delta m. \quad (3.2)$$

δm représente la mesure de la masse au voisinage du point $P \in \mathcal{S}$ (aussi appelée masse élémentaire).

En chaque point P d'un système matériel, on définit **une densité de masse**, en particulier :

- la densité volumique $\rho_V(P)$ (unité : $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$) si le système est un volume ; alors

$$\delta m = \rho_V(P) d^3V,$$

où d^3V est un élément de volume. La masse est obtenue par intégration volumique.

- la densité surfacique $\rho_S(P)$ (unité : $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$) si le système matériel est une surface ; alors

$$\delta m = \rho_S(P) d^2S,$$

où d^2S est un élément de surface. La masse est obtenue par intégration surfacique.

- la densité linéique $\rho_L(P)$ (unité : $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$) si le système matériel est une ligne. alors

$$\delta m = \rho_L(P) dL,$$

où dL est un élément de longueur. La masse est obtenue par intégration linéique .

Si la densité de masse est la même en tout point du système matériel, alors le système matériel est *homogène*. Alors, le calcul de la masse se réduit à :

$$m = \rho_V V \text{ si le système est un volume,}$$

$$m = \rho_S S \text{ si le système est une surface,}$$

$$m = \rho_L L \text{ si le système est une ligne.}$$

3.1.2 Centre d'inertie d'un système matériel

Définition : centre d'inertie d'un système matériel

Le centre d'inertie d'un système matériel est noté G et est défini par :

$$\int_{P \in \mathcal{S}} \overrightarrow{GP} \delta m = \vec{0}. \quad (3.3)$$

Détermination de la position du centre d'inertie

On démontre facilement que la position du centre d'inertie G par rapport à un point O arbitraire est donnée par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} \delta m. \quad (3.4)$$

En particulier, si le système matériel est découpé en plusieurs solides S_i de centre d'inertie G_i et de masse m_i , on démontre que :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i \overrightarrow{OG_i}. \quad (3.5)$$

Cette relation signifie que le centre d'inertie G du système est le barycentre des points G_i affectés des coefficients massiques m_i .

L'équation (3.5) montre que pour obtenir le centre d'inertie d'un ensemble de solides, nous procéderons de la façon suivante :

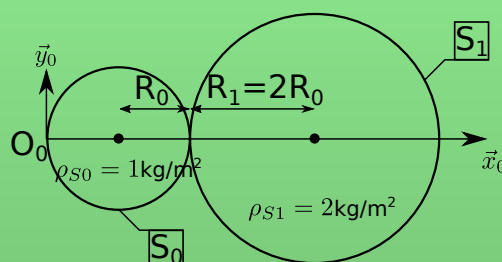
1. dans un premier temps, déterminer la masse et le centre d'inertie de chaque solide ;
2. dans un deuxième temps, déterminer le centre d'inertie du système matériel en utilisant l'eq. (3.5).

Retenons également les propriétés suivantes :

- si le système matériel admet un élément de symétrie (point, axe ou plan), alors le point G en fait partie ;
- si le système matériel considéré est un solide rigide S_i , alors le centre d'inertie G_i du solide est un point lié au solide. C'est-à-dire que $\vec{V}(G/S_i) = \vec{V}(G \in S_i/S_i) = \vec{0}$. Attention : ce n'est plus vrai lorsque l'on considère le centre d'inertie d'un ensemble de solides !!

Explication 3.1 (Détermination de la position du centre d'inertie)

Dans le repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, quelle est la position du centre d'inertie du système matériel schématisé ci-dessous ?



Remarque : centre d'inertie et centre de gravité

Le centre de gravité est le point d'application du poids du solide. Le centre de gravité coïncide avec le centre d'inertie si et seulement si le champ de pesanteur est un champ uniforme. Ce sera le cas dans l'ensemble des applications traitées dans ce cours.

3.1.3 Matrice d'inertie

Définition : Moment d'inertie

Soit un système matériel \mathcal{S} et un axe Δ lié à ce système. On appelle moment d'inertie d'un système matériel \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ la quantité scalaire suivante :

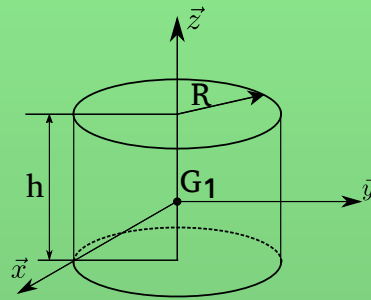
$$I(\mathcal{S}/\Delta) = \int_{P \in \mathcal{S}} d^2 \delta m, \quad (3.6)$$

où d est la distance entre un point $P \in \mathcal{S}$ et l'axe Δ .

Dimension : $[M.L^2]$; un moment d'inertie s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Explication 3.2 (Moment d'inertie par rapport à un axe)

Soit un cylindre plein, noté S_1 , de centre d'inertie G_1 et de masse volumique constante ρ_V , représenté dans la figure ci-dessous.



1. Que vaut la distance entre un point quelconque du cylindre et l'axe (G_1, \vec{z}) ?
2. Calculer le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe (G_1, \vec{z}) .

Définition : Matrice d'inertie

On appelle matrice d'inertie du système \mathcal{S} , au point Q , et dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, la matrice suivante :

$$\begin{aligned} [I(Q, \mathcal{S})]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} \int_{P \in \mathcal{S}} (y^2 + z^2) \delta m & - \int_{P \in \mathcal{S}} (xy) \delta m & - \int_{P \in \mathcal{S}} (zx) \delta m \\ - \int_{P \in \mathcal{S}} (xy) \delta m & \int_{P \in \mathcal{S}} (x^2 + z^2) \delta m & - \int_{P \in \mathcal{S}} (yz) \delta m \\ - \int_{P \in \mathcal{S}} (zx) \delta m & - \int_{P \in \mathcal{S}} (yz) \delta m & \int_{P \in \mathcal{S}} (x^2 + y^2) \delta m \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \\ &= \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \end{aligned} \quad (3.7)$$

La matrice d'inertie caractérise d'une manière générale l'inertie en rotation du système. **Il faut toujours préciser la base et le point d'expression de la matrice d'inertie.** La forme que prend la matrice d'inertie dépend du point considéré. Si on connaît la matrice en un point, on peut l'obtenir en un autre point en utilisant le Théorème de Huyghens (hors programme).

Signification des coefficients diagonaux de la matrice

Les coefficients diagonaux A, B, C, de la matrice correspondent aux moments d'inertie du système \mathcal{S} par rapport aux trois axes de la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On identifie en effet :

- $A = \int_{P \in \mathcal{S}} (y^2 + z^2) \delta m$, moment d'inertie de \mathcal{S} par rapport à l'axe (Q, \vec{x}) .
- $B = \int_{P \in \mathcal{S}} (x^2 + z^2) \delta m$, moment d'inertie de \mathcal{S} par rapport à l'axe (Q, \vec{y}) .
- $C = \int_{P \in \mathcal{S}} (x^2 + y^2) \delta m$, moment d'inertie de \mathcal{S} par rapport à l'axe (Q, \vec{z}) .

Les moments d'inertie traduisent les effets de la répartition de la masse sur la mise en rotation du système. Plus un moment d'inertie est grand, plus la mise en rotation du système autour de l'axe du moment d'inertie est difficile.

Signification des coefficients extra-diagonaux de la matrice

Remarquons tout d'abord que *la matrice d'inertie est symétrique* : on retrouve des coefficients hors-diagonale égaux de part et d'autre. Les coefficients D, E, F sont appelés *produits d'inertie*. On identifie :

- $D = \int_{P \in \mathcal{S}} (yz) \delta m$, produit d'inertie \mathcal{S} par rapport aux axes (Q, \vec{y}) , (Q, \vec{z}) .
- $E = \int_{P \in \mathcal{S}} (zx) \delta m$, produit d'inertie \mathcal{S} par rapport aux axes (Q, \vec{z}) , (Q, \vec{x}) .
- $F = \int_{P \in \mathcal{S}} (xy) \delta m$, produit d'inertie \mathcal{S} par rapport aux axes (Q, \vec{x}) , (Q, \vec{y}) .

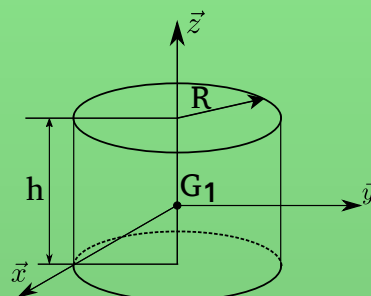
Les produits d'inertie sont non nuls lorsque la répartition de la masse du système n'est pas équilibrée (rupture de symétrie, effet de balourd). Il est toujours possible de trouver une base telle que les produits d'inertie s'annulent : dans cette base, la matrice d'inertie est diagonale.

Dans le cadre de ce cours, il ne sera pas nécessaire de savoir calculer une matrice d'inertie. Celle-ci sera systématiquement donnée dans les énoncés. Il est néanmoins nécessaire de comprendre comment la matrice d'inertie est construite et ce que représentent ses différentes composantes.

Explication 3.3 (Manipulation de la matrice d'inertie)

La matrice d'inertie d'un cylindre plein S_1 et de masse m_1 (figure ci-dessous) est donnée dans le repère lié au centre d'inertie du cylindre $R(G_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par :

$$\left[I(G_1, S_1) \right]_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(3R^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3R^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



1. A quoi correspondent les termes suivants :
- $\vec{x} \cdot \left[I(G_1, S_1) \right] \vec{x}$, $\vec{y} \cdot \left[I(G_1, S_1) \right] \vec{y}$, $\vec{z} \cdot \left[I(G_1, S_1) \right] \vec{z}$?

2. Quel est le moment d'inertie par rapport à l'axe (G_1, \vec{u}) avec $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$?
3. Pour quelles valeurs du rayon est-il plus facile de mettre en rotation le cylindre autour de l'axe (G_1, \vec{z}) par rapport aux autres axes du repère?

Origine de la matrice d'inertie (hors programme)

La matrice d'inertie est la représentation matricielle d'une application linéaire appelée opérateur d'inertie, tel que :

$$\vec{\mathcal{J}}(Q, \mathcal{S}, \vec{u}) = [I(Q, \mathcal{S})] \vec{u} = \int_{P \in \mathcal{S}} \overrightarrow{QP} \wedge (\overrightarrow{QP} \wedge \vec{u}) \delta m. \quad (3.8)$$

3.2 Torseur cinétique

Le torseur cinétique fait le lien entre les caractéristiques d'inertie et le champ de vitesses d'un système matériel.

3.2.1 Définition

Définition : torseur cinétique d'un système matériel

Le *torseur cinétique* ou *torseur des quantités de mouvement* d'un système matériel \mathcal{S} en mouvement par rapport à un repère R_i est défini par :

- sa résultante cinétique, aussi appelée **quantité de mouvement**, telle que :

$$\vec{p}(\mathcal{S}/R_i) = \int_{P \in \mathcal{S}} \vec{V}(P/R_i) \delta m, \quad (3.9)$$

- son **moment cinétique** exprimé au point Q tel que :

$$\vec{\sigma}(Q, \mathcal{S}/R_i) = \int_{P \in \mathcal{S}} \overrightarrow{QP} \wedge \vec{V}(P/R_i) \delta m. \quad (3.10)$$

On note le torseur cinétique : $\{\mathcal{C}(\mathcal{S}/R_i)\} = \{\vec{p}(\mathcal{S}/R_i); \vec{\sigma}(Q, \mathcal{S}/R_i)\}_Q$.

Dimension :

- la quantité de mouvement s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; dimension $[M.L.T^{-1}]$.
- le moment cinétique s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$; dimension $[M.L^2.T^{-1}]$.

3.2.2 Calcul pratique du torseur cinétique d'un solide

Voyons désormais à partir des définitions (3.9) et (3.10), comment calculer simplement les éléments de réduction du torseur cinétique dans le cas d'un solide. Le cas d'un ensemble de solides est traité à la section suivante.

Explication 3.4 (Expression de la résultante cinétique)

Montrer que la résultante cinétique d'un solide S_j dans son mouvement par rapport à R_i est égale à la quantité de mouvement du centre d'inertie de ce solide.

Calcul pratique de la résultante cinétique

On a montré que la résultante cinétique du solide S_j dans son mouvement par rapport à R_i est donnée simplement par :

$$\vec{p}(S_j/R_i) = m_j \vec{V}(G \in S_j/R_i). \quad (3.11)$$

où m_j est la masse du solide S_j et $G \in S_j$ est le centre d'inertie du solide S_j .

L'équation (3.11) montre que la quantité de mouvement peut être comprise comme l'« élan en translation » du solide. Plus cette quantité est grande, plus le mouvement de translation est difficile à arrêter (exemple : distance de freinage d'une voiture qui s'accroît avec la vitesse et la masse de la voiture).

Calcul pratique du moment cinétique

On admet que le moment cinétique, en un point $Q \in S_j$, d'un solide S_j dans son mouvement par rapport à R_i est donné par :

$$\vec{\sigma}(Q \in S_j/R_i) = [I(Q_j, S_j)] \vec{\Omega}(S_j/R_i) + \overrightarrow{Q_j G_j} \wedge (m_j \vec{V}(Q \in S_j/R_i)). \quad (3.12)$$

où $[I(Q_j, S_j)]$ est la matrice d'inertie du solide S_j au point $Q \in S_j$.

Le moment cinétique correspond à l'« élan en rotation » du solide.

On déduit de l'Eq. (3.12) que si le point $Q \in S_j$ est confondu avec le centre d'inertie G_j du solide, alors :

$$\vec{\sigma}(Q \equiv G \in S_j/R_i) = [I(G_j, S_j)] \vec{\Omega}(S_j/R_i). \quad (3.13)$$

Attention la matrice d'inertie et le vecteur rotation doivent être projetés dans la même base avant toute opération !

Par ailleurs, on déduit également que si $Q \in S_j$ est fixe dans R_i , alors :

$$\vec{\sigma}(Q, S_j/R_i) = [I(Q, S_j)] \vec{\Omega}(S_j/R_i). \quad (3.14)$$

Pour réaliser des calculs simples, il est donc pertinent de calculer le moment cinétique soit au centre d'inertie du solide (Eq. (3.13)), soit en un point du solide fixe par rapport au repère d'observation (Eq. (3.14)).

Transport du moment cinétique

Le moment cinétique étant un champ de moment de torseur, il vérifie également la relation de Varignon écrite ici sous la forme :

$$\vec{\sigma}(B, S_j/R_i) = \vec{\sigma}(A, S_j/R_i) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{p}(S_j/R_i). \quad (3.15)$$

Cette relation est très pratique pour calculer le moment cinétique en un point B quelconque de l'espace en ayant préalablement déterminé le moment cinétique en un point A (généralement, ce point est un point où le calcul est simple : point fixe dans R_i ou centre d'inertie du solide).



Explication 3.5 (Torseur cinétique d'un cylindre plein en rotation)

On reconsidère le cylindre plein S_1 et de masse m_1 (voir explication 3.3). Le cylindre est désormais en rotation d'angle ψ_1 autour de l'axe (G_1, \vec{z}) .

1. Exprimer le torseur cinétique dans le mouvement du cylindre par rapport à $R(G_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ au point G_1 .
2. Exprimer le torseur cinétique dans le mouvement du cylindre par rapport à $R(G_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ au point A_1 avec $\overrightarrow{G_1 A_1} = \frac{-h}{2} \vec{z}$.

3.2.3 Du solide au système matériel

La définition du torseur cinétique est valable pour un système matériel. Pour un système matériel constitué de plusieurs solides, la propriété d'additivité des masses permet d'obtenir l'additivité des torseurs cinétiques :

$$\{\mathcal{C}(\mathcal{S}/R_i)\} = \sum_{j=1}^N \{\mathcal{C}(S_j/R_i)\}. \quad (3.16)$$

La marche à suivre sera donc toujours la suivante :

1. Calculer, au point pour lequel le calcul est le plus pratique, les éléments de réduction du torseur cinétique de chaque solide.
2. Utiliser la formule de Varignon pour transporter les moments cinétiques de chaque solide au même point.
3. Additionner les torseurs cinétiques (les moments doivent être additionnés **au même point**) pour obtenir le torseur cinétique du système matériel.

3.3 Torseur dynamique

Le torseur dynamique est construit de façon similaire au torseur cinétique. Le torseur dynamique fait le lien entre les caractéristiques d'inertie et le champ des accélérations d'un solide.

3.3.1 Définition

Définition : torseur dynamique d'un système matériel

Le *torseur dynamique* ou *torseur des quantités d'accélération* d'un système matériel \mathcal{S} en mouvement par rapport à un repère R_i est défini par :

- sa résultante dynamique, aussi appelée **quantité d'accélération**, telle que :

$$\vec{D}(\mathcal{S}/R_i) = \int_{P \in \mathcal{S}} \vec{\Gamma}(P/R_i) \delta m, \quad (3.17)$$

- son **moment dynamique** exprimé au point Q tel que :

$$\vec{\delta}(Q, \mathcal{S}/R_i) = \int_{P \in \mathcal{S}} \overrightarrow{QP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R_i) \delta m. \quad (3.18)$$

On note le torseur dynamique : $\{\mathcal{D}(\mathcal{S}/R_i)\} = \{\vec{D}(\mathcal{S}/R_i); \vec{\delta}(Q, \mathcal{S}/R_i)\}_Q$.

Dimension :

- la quantité d'accélération s'exprime en N ; dimension $[M.L.T^{-2}]$.
- le moment dynamique s'exprime en N · m ; dimension $[M.L^2.T^{-2}]$.

Nous verrons dans le dernier chapitre grâce au PFD que la résultante dynamique est homogène à un effort (effort nécessaire pour modifier le mouvement de translation du système), et que le moment dynamique est homogène à un moment de force (moment nécessaire pour modifier la rotation du système).

3.3.2 Calcul pratique du torseur dynamique d'un solide

Voyons désormais à partir des définitions (3.17) et (3.18), comment calculer simplement les éléments de réduction du torseur dynamique dans le cas d'un solide. Le cas d'un ensemble de solides est traité à la section suivante.

Calcul pratique de la résultante dynamique

Suivant un raisonnement similaire à celui utilisé dans l'explication 3.4, la résultante dynamique du solide S_j dans son mouvement par rapport à R_i est donnée simplement par :

$$\vec{D}(S_j/R_i) = m_j \vec{\Gamma}(G \in S_j/R_i). \quad (3.19)$$

où m_j est la masse du solide S_j et $G \in S_j$ est le centre d'inertie du solide S_j .

Explication 3.6 (Relation entre moments dynamique et cinétique)

Pour un solide S_j en mouvement par rapport à un repère R_i , exprimer la relation entre les moments dynamique et cinétique en dérivant par rapport au temps la définition du moment cinétique (3.10).

Calcul pratique du moment dynamique

On a démontré que le moment dynamique, en un point Q quelconque, de solide S_j dans son mouvement par rapport à R_i est donné par :

$$\vec{\delta}(Q, S_j/R_i) = \left(\frac{d\vec{\sigma}(Q, S_j/R_i)}{dt} \right)_{R_i} + \vec{V}(Q/R_i) \wedge (m_j \vec{V}(G \in S_j/R_i)). \quad (3.20)$$

Attention : $\vec{V}(Q/R_i)$ est la vitesse du point géométrique Q !

On déduit de l'Eq. (3.20) que

$$\vec{\delta}(Q, S_j/R_i) = \left(\frac{d\vec{\sigma}(Q, S_j/R_i)}{dt} \right)_{R_i},$$

si :

- le point *géométrique* Q est fixe dans le repère R_i ,
- le point géométrique Q est confondu avec le centre d'inertie G_j du solide S_j ,
- les vitesses $\vec{V}(Q/R_i)$ et $\vec{V}(G \in S_j/R_i)$ sont colinéaires.

Transport du moment dynamique

Le moment dynamique étant un champ de moment de torseur, il vérifie la relation de Varignon écrite ici sous la forme :

$$\vec{\delta}(B, S_j/R_i) = \vec{\delta}(A, S_j/R_i) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{D}(S_j/R_i). \quad (3.21)$$



Explication 3.7 (Torseur dynamique d'un cylindre plein en rotation)

On reconsidère le cylindre plein S_1 et de masse m_1 (voir explication 3.5).

1. Exprimer le torseur dynamique dans le mouvement du cylindre par rapport à $R(G_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ au point G_1 .
2. Exprimer le torseur dynamique dans le mouvement du cylindre par rapport à $R(G_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ au point A_1 avec $\overrightarrow{G_1A_1} = \frac{-h}{2}\vec{z}$.

3.3.3 Du solide au système matériel

La définition du torseur dynamique est valable pour un système matériel. Pour un système matériel constitué de plusieurs solides, la propriété d'additivité des masses permet d'obtenir l'additivité des torseurs dynamique :

$$\{\mathcal{D}(S/R_i)\} = \sum_{j=1}^N \{\mathcal{D}(S_j/R_i)\}. \quad (3.22)$$

La marche à suivre sera donc toujours la suivante :

1. Calculer, au point pour lequel le calcul est le plus pratique, les éléments de réduction du torseur dynamique de chaque solide.
2. Utiliser la formule de Varignon pour transporter les moments dynamiques de chaque solide au même point.
3. Additionner les torseurs dynamiques (les moments doivent être additionnés **au même point**) pour obtenir le torseur dynamique du système matériel.

Chapitre 4

Efforts

4.1 Torseur des efforts

4.1.1 Définitions

Définition : action mécanique

On appelle action mécanique, ou effort, toute cause capable de maintenir un système matériel au repos, de générer ou de modifier son mouvement, ou encore de déformer un solide.

Type d'actions mécaniques

Les actions mécaniques peuvent être réparties en deux grandes catégories :

- les actions mécaniques *à distance* : cette catégorie regroupe les actions mécaniques gravitationnelles ou électromagnétiques. Ces actions mécaniques sont également appelées actions volumiques, car elles s'exercent en chaque point du système matériel.
- les actions mécaniques *de contact*. Le contact peut être réparti sur une surface, une ligne ou un point. L'action mécanique est alors appelée action surfacique, linéique ou ponctuelle.

Les actions mécaniques peuvent être intérieures au système matériel (voir par exemple le cours de mécanique des milieux déformables), ou extérieures au système matériel. **Dans le cadre de ce cours, nous nous intéressons uniquement aux actions mécaniques extérieures.** L'extérieur d'un système matériel \mathcal{S} est noté $\bar{\mathcal{S}}$.

Description locale d'une action mécanique

Comme dans bien d'autres domaines de la physique, les actions mécaniques peuvent être modélisées à une échelle locale ou à une échelle globale. Au niveau local, la description des efforts est effectuée en définissant :

- un volume, une surface, une longueur élémentaire autour du point $P \in \mathcal{S}$: d^3V , d^2S , ou dL .
- une densité (volumique, surfacique, linéique) du champ de forces exercées par $\bar{\mathcal{S}}$ sur \mathcal{S} au point P , notée : $\vec{f}_V(P, \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S})$, $\vec{f}_S(P, \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S})$ ou $\vec{f}_L(P, \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S})$.
- la force élémentaire appliquée par $\bar{\mathcal{S}}$ sur \mathcal{S} :
pour un volume élémentaire,

$$d\vec{F}(P, \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}) = \vec{f}_V(P, \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S})d^3V,$$

pour une surface élémentaire,

$$d\vec{F}(P, \bar{S} \rightarrow S) = \vec{f}_S(P, \bar{S} \rightarrow S) d^2S,$$

pour une longueur élémentaire

$$d\vec{F}(P, \bar{S} \rightarrow S) = \vec{f}_L(P, \bar{S} \rightarrow S) dL.$$

Explication 4.1 (Description locale de la pesanteur)

Le champ de pesanteur, exercé par la Terre (assimilée à un solide S_2) sur un point P d'un solide S_1 est caractérisé par la force élémentaire (poids du volume élémentaire autour de P) :

$$d\vec{F}(P, S_2 \rightarrow S_1) = \rho_V(P) \vec{g} d^3V \quad (4.1)$$

où $\rho_V(P)$ est la densité volumique au point P du solide S_1 , \vec{g} est le vecteur accélération de la pesanteur, tels que $\vec{f}_V(P, S_2 \rightarrow S_1) = \rho_V(P) \vec{g}$ représente la densité volumique du champ de pesanteur.

Le torseur des efforts, défini dans la section suivante, permet de passer de cette représentation locale à une représentation globale.

4.1.2 Expression caractéristique du torseur des efforts extérieurs

Définition : torseur des efforts extérieurs

Le *torseur des efforts extérieurs* ou *torseur des actions mécaniques* exercées sur le système matériel S par son extérieur \bar{S} est défini par :

— la **résultante** des efforts élémentaires exercés par \bar{S} sur le système S , telle que :

$$\vec{R}(\bar{S} \rightarrow S) = \int_{P \in S} d\vec{F}(P, \bar{S} \rightarrow S), \quad (4.2)$$

— le **moment** des efforts élémentaires exercés par \bar{S} sur le système S , exprimé au point Q tel que :

$$\vec{M}(Q, \bar{S} \rightarrow S) = \int_{P \in S} \overrightarrow{QP} \wedge d\vec{F}(P, \bar{S} \rightarrow S). \quad (4.3)$$

On note le torseur des efforts extérieurs :

$$\{\mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S)\} = \left\{ \vec{R}(\bar{S} \rightarrow S); \vec{M}(Q, \bar{S} \rightarrow S) \right\}_Q.$$

Dimensions :

- la résultante s'exprime en Newton (symbole N) ; dimension $[M.L.T^{-2}]$
- le moment s'exprime en N · m ; dimension $[M.L^2.T^{-2}]$.

Remarque : contrairement aux torseurs cinématique, cinétique et dynamique étudiés dans les précédents chapitres, la définition du torseur des efforts extérieurs ne dépend pas du repère d'observation choisi. On dit que les actions mécaniques sont des grandeurs objectives, indépendantes de tout observateur. Attention néanmoins, il sera toujours nécessaire de réaliser correctement les projections dans les repères adéquats...



Explication 4.2 (Description globale de la pesanteur)

A partir de l'expression locale du champ de pesanteur exercé par la Terre assimilée à un solide S_2 sur un solide S_1 (voir explication 4.1), montrer que lorsque le champ de pesanteur est uniforme, ce dernier peut être modélisé à l'échelle globale par une force s'appliquant au centre d'inertie du solide S_1 , de direction \vec{g} .

Transport du moment

Par définition, les moments du torseur des efforts vérifient la formule de Varignon, tel que :

$$\vec{M}(B, \bar{S} \rightarrow S) = \vec{M}(A, \bar{S} \rightarrow S) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}(\bar{S} \rightarrow S). \quad (4.4)$$

Forces ponctuelles

Dans le cas où l'action mécanique de l'extérieur \bar{S} sur S est modélisée par des efforts $\vec{F}_k(P_k, \bar{S} \rightarrow S)$ localisés en différents points matériels P_k , le torseur des efforts extérieurs est donné par :

$$\vec{R}(\bar{S} \rightarrow S) = \sum_k \vec{F}_k(P_k, \bar{S} \rightarrow S), \quad (4.5)$$

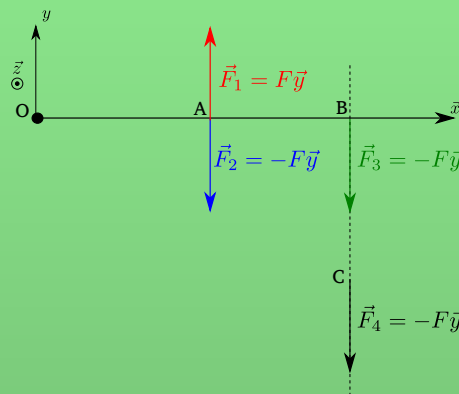
$$\vec{M}(Q, \bar{S} \rightarrow S) = \sum_k \overrightarrow{QP_k} \wedge \vec{F}_k(P_k, \bar{S} \rightarrow S). \quad (4.6)$$

Dans le cas où des efforts ponctuels sont combinés avec des efforts répartis (linéique, surfacique, volumique), il faut combiner les sommes discrètes de forces ponctuelles et les intégrales de forces élémentaires.



Explication 4.3 (Modélisation d'une force)

Calculer le moment en O des 4 forces suivantes, de même norme, schématisées ci-dessous avec $OA = L$ et $OB = 2L$.



L'exemple ci-dessus montre que le moment d'une force \vec{F} en un point O dépend de la distance entre ce point O et la droite d'action de la force \vec{F} . Mathématiquement, la force \vec{F} est modélisée par un *vecteur glissant* (tout vecteur force qui glisse sur la droite d'action a le même moment au point O).

Coordonnées scalaires du torseur des efforts

On définit les coordonnées scalaires du torseur des efforts extérieurs, en projetant ses éléments de réduction dans une base \mathcal{B} . On note :

$$\{\mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{Q,\mathcal{B}}. \quad (4.7)$$

où X, Y, Z , sont les composantes de la résultante et L, M, N sont les composantes du moment au point Q dans la base \mathcal{B} .

4.2 Torseur des actions mécaniques pour un contact ponctuel

Dans cette section, nous nous intéressons à la modélisation globale des efforts de contact entre un solide S_1 et un solide S_2 .

Torseur des efforts pour un contact ponctuel

Soit deux solides S_1 et S_2 en contact ponctuel en un point I . L'action mécanique du solide S_2 sur le solide S_1 est représentée par le torseur :

$$\{F(S_2 \rightarrow S_1)\} = \{\vec{R}(S_2 \rightarrow S_1); \vec{0}\}_I, \quad (4.8)$$

c'est-à-dire que le contact peut être modélisé par une force ponctuelle $\vec{R}(S_2 \rightarrow S_1)$ s'exerçant au point I (voir Fig. 4.1). Cette force ponctuelle est appelée **force de réaction**. On définit :

$$\vec{R}(S_2 \rightarrow S_1) = \vec{N}(S_2 \rightarrow S_1) + \vec{T}(S_2 \rightarrow S_1), \quad (4.9)$$

où $\vec{N}(S_2 \rightarrow S_1)$ est la **réaction normale** et $\vec{T}(S_2 \rightarrow S_1)$ est la **réaction tangentielle de frottement**.

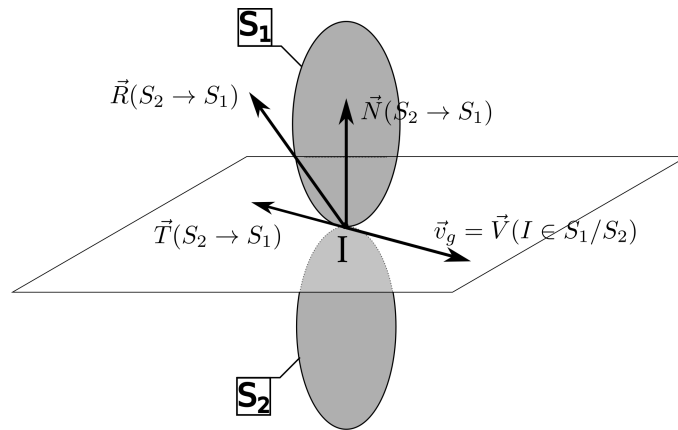


FIGURE 4.1 – Représentation du torseur des efforts $\{F(S_2 \rightarrow S_1)\}$ pour un contact ponctuel glissant (2ème loi de Coulomb).

Le torseur des efforts pour un contact ponctuel fournit une description globale simple du contact entre deux solides. Si le contact n'est plus ponctuel, alors le torseur des efforts de

contact comprend également des moments de roulement et de pivotement (nuls en cas de contact rigoureusement ponctuel). De plus, si l'on souhaite décrire le contact de manière plus précise, il faut se tourner vers d'autres modèles locaux plus complexes. Par exemple, dans le cas où les solides sont déformables, le contact peut être modélisé avec le modèle de Hertz.

Approche empirique

Empiriquement, le contact entre deux solides peut-être ressenti de la manière suivante :

1. d'une part, il est nécessaire que le contact entre les deux solides soit maintenu. On « sent » que le contact engendre une pression réciproque de chaque solide sur l'autre solide (exemple : lorsque l'on marche, on sent sous notre semelle la pression (la réaction) qu'exerce le sol sur notre pied lors du contact). Cette pression disparaît lorsque le contact est brisé.
2. D'autre part, l'expérience empirique d'une glissade (sur un sol mouillé, sur des feuilles mortes) permet de sentir que d'un seul coup nos pieds n'adhèrent plus au sol, c'est-à-dire que les conditions de contact changent soudainement.

Cette approche permet ainsi d'établir que l'analyse du contact fait intervenir les notions de pression, d'adhérence, et qu'il y a un effet de seuil (glissade soudaine).

Réaction normale au contact

La réaction normale $\vec{N}(S_2 \rightarrow S_1)$ est orientée du solide S_2 vers le solide S_1 . Elle est normale (orthogonale) au plan tangent aux deux solides au point de contact I . Cette force est :

- indépendante de la nature des surfaces de contact,
- indépendante de la vitesse de glissement entre les deux solides.

Dans l'hypothèse de solides indéformables, cette réaction normale représente les efforts réciproques des solides tels qu'ils ne se rentrent pas l'un dans l'autre et tels qu'ils ne s'éloignent pas l'un de l'autre.

Réaction tangentielle de frottement : lois de Coulomb

Pour la réaction tangentielle, deux cas peuvent être distingués :

- il y a *adhérence* (non-glissement) entre les deux solides au point I ($\vec{v}_g = \vec{0}$) :

$$\|\vec{T}(S_2 \rightarrow S_1)\| \leq f_s \|\vec{N}(S_2 \rightarrow S_1)\|, \quad (4.10)$$

où f_s est le coefficient de frottement statique.

- il y a *glissement* entre les deux solides au point I ($\vec{v}_g \neq \vec{0}$) :

$$\|\vec{T}(S_2 \rightarrow S_1)\| = f \|\vec{N}(S_2 \rightarrow S_1)\|, \quad (4.11)$$

où f est le coefficient de frottement dynamique. **De plus, la force tangentielle de frottement s'oppose au mouvement : elle est de sens opposé à la vitesse de glissement du point I lié à S_1 , ($\vec{v}_g = \vec{V}(I \in S_1/S_2)$).**

Attention : dans les deux cas, il y a **toujours** une force tangentielle de frottement. La force $\vec{T}(S_2 \rightarrow S_1)$ est nulle seulement en l'absence de frottement ($f_s = 0$, hypothèse de *contact parfait*).

Les lois de Coulomb sont issues d'expériences réalisées il y a plusieurs siècles. Elles fournissent un modèle simple de la force de frottement.

Coefficients de frottement

Les équations (4.10) et (4.11) font intervenir deux coefficients de frottement différents. Le coefficient de frottement statique f_s est toujours supérieur au coefficient de frottement dynamique f .

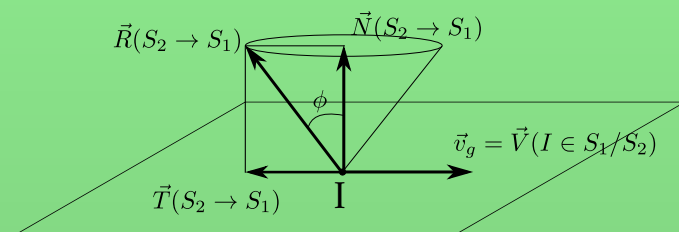
Ceci peut s'observer dans des cas simples du quotidien. Par exemple, prenons le cas d'une armoire que l'on souhaite déplacer en la faisant glisser sur le sol. Il faut un effort plus important pour mettre en mouvement l'armoire (initier le glissement) que pour maintenir le glissement. Pour mettre en mouvement l'armoire, il faut vaincre le coefficient de frottement statique (il faut rompre l'équilibre).

Par ailleurs, la détermination expérimentale des coefficients de frottement est très complexe. En effet, le coefficient de frottement dépend de la nature des surfaces en contact (exemple : acier sur acier, $f_s \approx 0.1$; pneu sur chaussée $f_s \approx 0.6$), de l'état de la surface (rugosités...), de la pression de contact, de la température, de la vitesse de glissement (entre autres)...

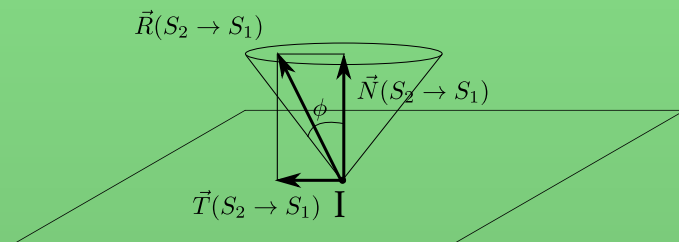
Explication 4.4 (Cône de frottement)

Montrons que les lois de Coulomb peuvent être représentées de la manière suivante :

- glissement : la réaction $\vec{R}(S_2 \rightarrow S_1)$ est sur le cône de frottement, de demi-angle ϕ avec $\tan \phi = f$.



- adhérence : la réaction $\vec{R}(S_2 \rightarrow S_1)$ est dans le cône de frottement.



4.3 Torseurs des efforts des liaisons élémentaires

Nous avons vu dans le chapitre 2 que les liaisons mécaniques permettaient d'autoriser ou de bloquer certains degrés de liberté entre deux solides. Nous avons également défini le torseur cinématique associé aux liaisons.

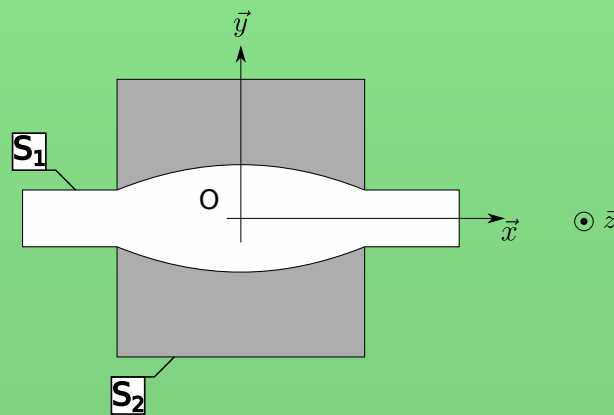
Nous allons désormais nous intéresser aux efforts transmis d'un solide à un autre par l'intermédiaire de ces liaisons. Les efforts transmis sont issus du contact entre les deux so-

lides. Le contact est nécessaire pour que la liaison existe, on ne peut pas l'éviter (dans le cas contraire, sans contact, il n'y a pas de liaison).

Explication 4.5 (Torseur des efforts transmissibles par la liaison pivot)

Rappelons que les liaisons élémentaires sont modélisées par des solides élémentaires. La réalisation technologique de la liaison peut être bien différente, mais il s'agit alors d'un problème de conception !

Pour une liaison pivot, la liaison élémentaire est modélisée par deux solides de révolution, telle que seule une rotation autour de l'axe de révolution soit possible (voir schéma ci-dessous).



1. Déterminer la surface de contact entre les deux solides.
2. En supposant un contact parfait, quelle est la force élémentaire ?
3. En déduire la forme du torseur des efforts au point O . Comparer avec la forme du torseur cinématique de la même liaison.

L'explication 4.5 montre qu'à l'échelle globale, les efforts transmis par l'intermédiaire d'une liaison peuvent être modélisés à l'aide d'un torseur appelé **torseur des efforts transmissibles**.

Torseur des efforts transmissibles

Pour chaque liaison, on définit le torseur des efforts transmissibles.

Le torseur des efforts exercés sur le solide S_2 par le solide S_1 par l'intermédiaire de la liaison est noté $\{\mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1)\}$, et est :

- présenté sous la forme de ses coordonnées scalaires : $\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$
- défini dans le repère local associé à la liaison
- exprimé en un point de son domaine de validité (domaine de validité : ensemble des points où la forme du torseur reste la même).

Chaque coordonnée scalaire est une *inconnue de liaison*. Dans le cadre d'un travail de conception, ces inconnues doivent être déterminées pour correctement dimensionner d'une

part les pièces constituant la liaison, d'autre part les actionneurs du mouvement.

Dans le repère local de la liaison, les coordonnées scalaires correspondent :

- X : réaction de S_2 sur S_1 suivant \vec{x}
- Y : réaction de S_2 sur S_1 suivant \vec{y}
- Z : réaction de S_2 sur S_1 suivant \vec{z}
- L : moment de S_2 sur S_1 au point O par rapport à \vec{x}
- M : moment de S_2 sur S_1 au point O par rapport à \vec{y}
- N : moment de S_2 sur S_1 au point O par rapport à \vec{z}

Les tableaux dans les pages suivantes regroupent les torseurs des efforts transmissibles des onzes liaisons élémentaires.

Lien entre torseur des efforts transmissibles et torseur cinématique des liaisons élémentaires

Si l'on compare le torseur des mouvements cinématiquement admissibles et le torseur des efforts transmissibles d'une même liaison, on peut constater que :

- les inconnues de réaction sont nulles lorsque les degrés de liberté en translation sont non nuls ;
- les inconnues en moment sont nulles lorsque les degrés de liberté en rotation sont non nuls.

Ceci fait apparaître une relation entre les notions de moment et de rotation, de force et de translation.

Par ailleurs, pour une liaison élémentaire, on a toujours :

$$\text{nombre de ddl non nuls} + \text{nombre d'inconnues de liaison non nulles} = 6.$$

On admettra également le résultat suivant issu de la dynamique. Dans une liaison sans frottement, la puissance des interefforts entre les deux solides est nulle :

$$\{\mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1)\} \cdot \{\mathcal{V}(S_1/S_2)\} = 0, \quad (4.12)$$

c'est-à-dire que le co-moment des deux torseurs est nul. Cette relation permet de retrouver facilement le torseur des efforts transmissibles connaissant le torseur cinématiquement admissible (et vice-versa).

Réduction du nombre d'inconnues de liaison dans un problème plan

Lorsque le problème est réduit à un problème plan, le nombre d'inconnues de liaison est réduit à :

- deux efforts inconnus de réaction dans les directions des vecteurs directeurs du plan
 - un moment inconnu par rapport à la normale au plan
- soit un total d'**au plus 3** inconnues de liaison.

4.3.1 Tableaux des liaisons normalisées (statique)

Désignation	Schéma 3D	Schéma plan	Torseur des efforts $\{\mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1)\}$	Domaine validité torseur
Liaison ponctuelle, au point O , de normale \vec{z}			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	Tout point appartenant à l'axe (O, \vec{z})

TABLE 4.1 – Liaisons normalisées à 5 degrés de liberté (1 inconnue de liaison). Légende des couleurs : S_1 (gris clair) ; S_2 (noir).

Désignation	Schéma 3D	Schéma plan	Torseur des efforts $\{\mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1)\}$	Domaine validité torseur
Liaison linéaire annulaire, de centre O , de direction \vec{x}			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	Au point O
Liaison linéaire rectiligne, de normale \vec{z} , d'axe (O, \vec{x})			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point du plan (\vec{z}, \vec{x})

TABLE 4.2 – Liaisons normalisées à 4 degrés de liberté (2 inconnues de liaison). Légende des couleurs : S_1 (gris clair) ; S_2 (noir).

Désignation	Schéma 3D	Schéma plan	Torseur des efforts $\{\mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1)\}$	Domaine validité torseur
Liaison rotule de centre O			$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	Au point O
Liaison appui plan de normale \vec{z}			$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point

TABLE 4.3 – Liaisons normalisées à 3 degrés de liberté (3 inconnues de liaison). Légende des couleurs : S_1 (gris clair) ; S_2 (noir).

Désignation	Schéma 3D	Schéma plan	Torseur des efforts $\{\mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1)\}$	Domaine validité torseur
Liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{x})			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point de (O, \vec{x})
Liaison sphérique à doigts d'axes (O, \vec{x}) et (O, \vec{y})			$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & N \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	Au point O

TABLE 4.4 – Liaisons normalisées à 2 degrés de liberté (4 inconnues de liaison). Légende des couleurs : S_1 (gris clair) ; S_2 (noir).

Désignation	Schéma 3D	Schéma plan	Torseur des efforts $\{\mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1)\}$	Domaine validité torseur
Liaison hélicoïdale d'axe (O, \vec{x}) ; rotation et translation proportionnelles			$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$, et $L = -pX$	En tout point de (O, \vec{x})
Liaison pivot d'axe (O, \vec{x})			$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point de (O, \vec{x})
Liaison glissière de direction \vec{x}			$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point

TABLE 4.5 – Liaisons normalisées à 1 degré de liberté (5 inconnues de liaison). Légende des couleurs : S_1 (gris clair) ; S_2 (noir).

Désignation	Schéma 3D	Schéma plan	Torseur des efforts $\{\mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1)\}$	Domaine validité torseur
Liaison encastrement			$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point

TABLE 4.6 – Liaisons normalisées à 0 degré de liberté (6 inconnues de liaison). Légende des couleurs : S_1 (gris clair) ; S_2 (noir).

Chapitre 5

Principe Fondamental de la Dynamique

Ce dernier chapitre permet de faire le lien entre le mouvement d'un système matériel, déjà étudié en cinématique, et les efforts appliqués à ce système.

5.1 Principe Fondamental de la Dynamique

5.1.1 Enoncé du PFD

Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Il existe au moins un repère d'espace noté R_g , et une manière de mesurer le temps appelée chronologie galiléenne, tel que le torseur dynamique d'un système matériel \mathcal{S} en mouvement par rapport à R_g soit égal au torseur des actions mécaniques extérieures à \mathcal{S} .

On note :

$$\{\mathcal{D}(\mathcal{S}/R_g)\} = \{\mathcal{F}(\bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S})\}. \quad (5.1)$$

Référentiel galiléen

Le référentiel galiléen (ou référentiel inertiel) est l'association du repère d'espace R_g et de la chronologie galiléenne, telle que le PFD soit vérifié. Le choix d'un référentiel galiléen dépend du problème étudié. Pour beaucoup de problèmes de mécanique industrielle, de petite taille et dont on étudie le mouvement sur une durée relativement courte (durée largement inférieure à une journée, telle que la rotation de la Terre sur elle-même puisse être négligée), le repère terrestre (lié à la Terre) est une bonne approximation d'un repère galiléen. D'autres repères galiléens peuvent être utilisés pour d'autres problèmes. Citons par exemple :

- le repère géocentrique : l'origine du repère est le centre de la Terre, les axes du repère pointent vers des étoiles lointaines que l'on peut considérer comme fixes. Ce repère peut être utilisé pour expliquer par exemple l'expérience du pendule de Foucault, la chute libre depuis une altitude élevée, ou encore pour étudier le mouvement des navettes spatiales et des satellites... Ce repère n'est galiléen que pour expliquer des expériences suffisamment courtes pour que l'on puisse négliger l'influence du mouvement de la Terre autour du Soleil.
- le repère de Copernic : son origine est le centre de masse du système solaire, les axes du repère pointent vers des étoiles lointaines. Ce repère est utilisé pour étudier

le mouvement des astres, fusées ou satellites dans le système solaire, pour expliquer le phénomène des marées... Ce repère peut être considéré comme galiléen pour des mouvements d'une durée petite devant celle du mouvement du système solaire dans la Galaxie (plusieurs dizaine de millions d'années).

Enfin, il faut souligner que certains problèmes de mécanique se résolvent en choisissant des repères non galiléens. Il est possible dans ce cas de généraliser l'énoncé du PFD en prenant en compte les accélérations d'entraînement (forces d'inertie d'entraînement) et de Coriolis (forces d'inertie de Coriolis) dans le torseur des actions mécaniques appliquées au système \mathcal{S} .

5.1.2 Théorèmes généraux de la dynamique

Le PFD donne deux équations vectorielles : le théorème de la résultante dynamique et le théorème du moment dynamique. Pour un problème 3D, chaque équation vectorielle permet d'obtenir 3 équations scalaires. On obtient donc 6 équations, soit autant que le nombre de ddl maximal possible pour le système.

Théorème de la résultante dynamique

Pour tout système matériel \mathcal{S} en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g , la résultante du torseur dynamique de \mathcal{S} dans son mouvement par rapport à R_g et la résultante du torseur des actions mécaniques extérieures à \mathcal{S} sont égales. On a :

$$\vec{D}(\mathcal{S}/R_g) = \vec{R}(\bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}). \quad (5.2)$$

L'application du théorème de la résultante dynamique permet d'étudier le mouvement du centre d'inertie du système matériel. Le théorème de la résultante dynamique montre que le centre d'inertie d'un système matériel \mathcal{S} en mouvement par rapport à R_g a le même mouvement qu'un point matériel, dont la masse est celle du système matériel, et sur lequel s'applique la somme des forces extérieures au système matériel.

Remarque : pour un système réduit à point matériel P , le théorème de la résultante dynamique correspond à la deuxième loi de Newton, $\sum \vec{F}(P) = m\vec{a}(P)$.

Théorème du moment dynamique

Pour tout système matériel \mathcal{S} en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g , le moment dynamique de \mathcal{S} dans son mouvement par rapport à R_g et le moment des actions mécaniques extérieures à \mathcal{S} sont égaux. On a pour un point Q :

$$\vec{\delta}(Q, \mathcal{S}/R_g) = \vec{M}(Q, \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}). \quad (5.3)$$

L'application du théorème de moment dynamique permet d'étudier le mouvement du système matériel autour de son centre d'inertie.

Remarque : pour un système réduit à point matériel P , le théorème du moment dynamique correspond au théorème du moment cinétique (première loi de Newton).



Explication 5.1 (Théorème des actions mutuelles)

Soit un système matériel \mathcal{S} constitué de deux solides S_1 et S_2 tel que $\mathcal{S} = S_1 \cup S_2$, en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g . A partir du PFD, montrer que l'action mécanique de S_1 sur S_2 est opposée à l'action mécanique de S_2 sur S_1 , tel que :

$$\{\mathcal{F}(S_1 \rightarrow S_2)\} = -\{\mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1)\}. \quad (5.4)$$

5.2 Cas particulier de la statique

5.2.1 Principe fondamental de la statique

Principe Fondamental de la Statique (PFS)

Pour qu'un système matériel \mathcal{S} soit en équilibre (au repos) par rapport à un repère galiléen R_g , il faut que le torseur des actions mécaniques exercées sur ce système soit nul, c'est-à-dire :

$$\{\mathcal{F}(\bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S})\} = \{\vec{0}; \vec{0}\}. \quad (5.5)$$

Conditions d'équilibre d'un système matériel

La vérification du PFS est une condition nécessaire mais non suffisante d'équilibre du système matériel \mathcal{S} . Pour qu'un système matériel soit en équilibre, il faut et il suffit :

- qu'il soit en équilibre à l'état initial,
- que chacune de ses sous-parties soit en équilibre. Exemple : pour un système matériel $\mathcal{S} = S_1 \cup S_2$, il faut donc vérifier l'équilibre du système et de chaque solide individuellement, c'est-à-dire : $\{\mathcal{F}(\bar{S}_1 \rightarrow S_1)\} = \{\mathcal{F}(\bar{S}_2 \rightarrow S_2)\} = \{\vec{0}; \vec{0}\}$.

Conditions d'annulation du torseur dynamique

Le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(\mathcal{S}/R_g)\}$ est nul dans quatre cas :

- le système matériel \mathcal{S} a une masse nulle ;
- les effets d'inertie sont négligés ;
- le système matériel a un mouvement de *translation rectiligne et uniforme* par rapport au repère R_g (dans ce cas, $\vec{\Gamma}(P \in \mathcal{S}/R_g) = \vec{0}$) ;
- le système matériel est *dynamiquement équilibré*¹ et a un mouvement de *rotation uniforme* (accélération angulaire nulle) par rapport au repère R_g .

5.2.2 Théorèmes généraux de la statique

Le PFS donne deux équations vectorielles : le théorème de la résultante statique et le théorème du moment statique. Pour un problème 3D, chaque équation vectorielle permet d'obtenir 3 équations scalaires. On obtient donc 6 équations, soit autant que le nombre d'inconnues de liaison pour un solide.

1. Un système matériel \mathcal{S} est dynamiquement équilibré, si 1. son centre d'inertie est sur l'axe de rotation du système matériel \mathcal{S} dans son mouvement par rapport à R_g ; 2. les produits d'inertie de \mathcal{S} par rapport aux axes de R_g sont nuls.

Théorème de la résultante statique

Pour tout système matériel \mathcal{S} en équilibre par rapport à un repère galiléen R_g , la résultante du torseur des actions mécaniques extérieures à \mathcal{S} est nulle. On a :

$$\vec{R}(\bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}) = \vec{0}. \quad (5.6)$$

Théorème du moment statique

Pour tout système matériel \mathcal{S} en équilibre par rapport à un repère galiléen R_g , le moment des actions mécaniques extérieures à \mathcal{S} est nul. On a pour tout point Q :

$$\vec{M}(Q, \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}) = \vec{0}. \quad (5.7)$$

Par ailleurs, le théorème des actions mutuelles (5.4) reste valide.

5.3 Méthodologie de mise en équation d'un problème de statique

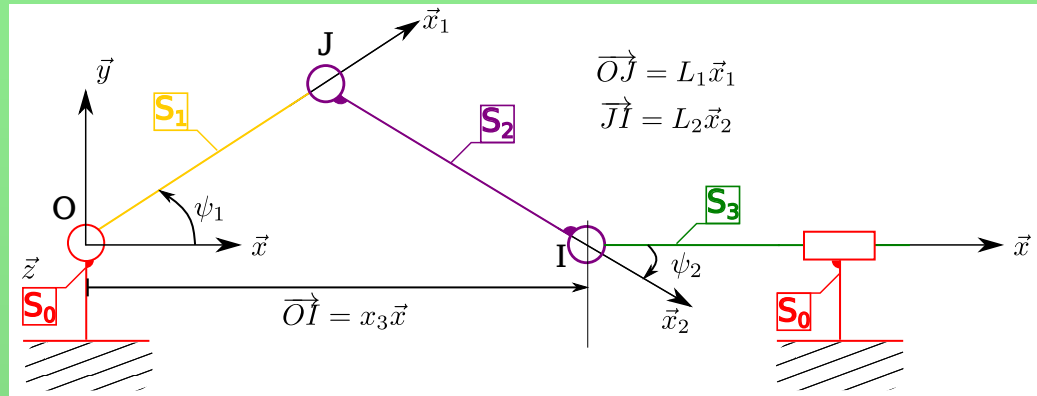
Le premier objectif de la résolution d'un problème de statique est de déterminer l'ensemble des actions mécaniques qui s'exercent sur le système étudié (ce système est supposé en situation d'équilibre). Le second objectif est de déterminer les conditions à respecter pour que l'équilibre soit effectivement possible, ce qui peut être par exemple : condition sur l'effort de frottement ; efforts ou couples à fournir pour maintenir l'équilibre (par l'intermédiaire d'actionneurs extérieurs, type vérins ou moteurs) ; inconnues de liaisons (utilisées ensuite pour dimensionner correctement la liaison) etc.

La démarche de résolution est toujours la même et est donnée ci-dessous :

1. Représenter le système étudié. La représentation se fait à l'aide : d'un schéma cinématique ; du graphe des liaisons. A cette étape, il est aussi fortement conseillé de réaliser toutes les figures de changement de repère nécessaires.
2. Identifier les actions mécaniques qui s'exercent sur le système global et sur chaque sous-système (sur chaque solide constituant le système) et écrire le torseur des efforts correspondant. Distinguer les actions mécaniques connues et les actions mécaniques inconnues. Toutes les inconnues ne seront pas forcément déterminées, cela dépend du problème étudié !
3. Elaborer une stratégie de fractionnement du système : déterminer pour quels solides ou pour quels ensembles de solides il faudra appliquer le PFS. Le but est de faire apparaître successivement les efforts de liaisons comme des efforts extérieurs aux solides. Le graphe des liaisons est un très bon outil pour identifier les différents fractionnement possibles. Déterminer le nombre d'équations qui pourra être obtenu en suivant cette stratégie. Il doit y avoir au moins autant d'équations que d'inconnues pour pouvoir résoudre le problème (problème dit isostatique).
4. Appliquer le PFS en fonction de la stratégie de fractionnement choisi.
5. Résoudre les équations obtenues pour obtenir l'expression des actions mécaniques inconnues en fonction de paramètres connus.

Explication 5.2 (Equilibre de la bielle-manivelle)

On reconsidère la bielle-manivelle, réduite à un mécanisme plan, déjà traitée précédemment.



On suppose que le piston S_3 subit une pression uniforme (due à la combustion du carburant dans la chambre de combustion), modélisée par une action mécanique de résultante $\vec{F} = -F\vec{x}$. La bielle-manivelle transforme cette pression uniforme en couple moteur, qui permet de faire tourner l'hélice. Le couple moteur qui s'exerce sur le vilebrequin S_1 est noté $\vec{C} = C\vec{z}$. On supposera que toutes les liaisons sont parfaites et que l'effet de la pesanteur est négligeable.

1. Ecrire les torseurs des actions mécaniques qui s'exercent sur chaque solide constituant le système bielle-manivelle. Combien y a-t-il d'inconnues en tout ?
2. Faire le bilan du nombre d'équations disponibles grâce à l'application du PFS. Peut-on résoudre le problème ?
3. Appliquer le PFS à chaque solide et en déduire le système d'équations.
4. Résoudre le système. En déduire la loi d'entrée-sortie en efforts entre F et C .
5. Ecrire les torseurs des efforts dans chaque liaison en fonction de F .

(Exercice inspiré d'un sujet de D. Defauchy, enseignant en CPGE.)

5.4 Méthodologie de mise en équation d'un problème de dynamique

L'objectif principal lors de la résolution d'un problème de dynamique est d'obtenir la ou les équations du mouvement. Contrairement à un problème de statique, les inconnues d'efforts ne sont déterminées que si cela est nécessaire.

Définition : équation du mouvement

Les équations du mouvement décrivent l'évolution du mouvement en fonction du temps. Les équations du mouvement relient les paramètres cinématiques (paramètres de translation ou de rotation), les paramètres d'inertie, les paramètres géométriques, les actions

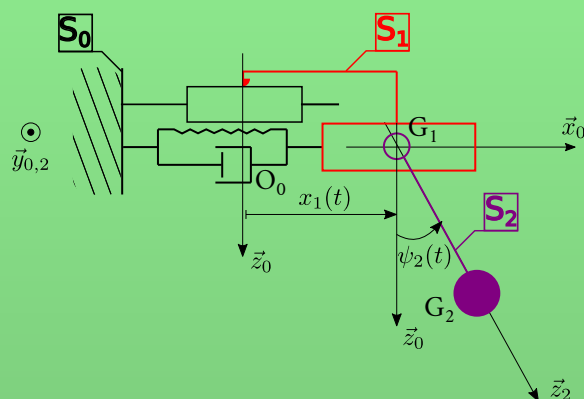
à distance ou de contact (forces de frottement, pesanteur, couples imposés...). En revanche, **les inconnues de liaison n'apparaissent pas dans les équation du mouvement.**

La démarche de résolution d'un problème de dynamique est souvent la même et est donnée ci-dessous :

1. Représenter le système étudié. La représentation se fait à l'aide : d'un schéma cinématique ; du graphe des liaisons. A cette étape, il est aussi fortement conseillé de réaliser toutes les figures de changement de repère nécessaires.
2. Identifier, à l'aide du paramétrage (souvent déjà réalisé dans les énoncés), les paramètres du mouvement et leur nombre. Le nombre de paramètres du mouvement à déterminer donne le nombre d'équations du mouvement qu'il faut obtenir.
3. Elaborer une stratégie de fractionnement du système : déterminer pour quels solides ou pour quels ensembles de solides il faudra appliquer le PFD. Pour ne pas faire apparaître d'inconnues de liaison dans les équations, on essaiera dans la mesure du possible de projeter les théorèmes du PFD suivant les directions où le torseur des actions mécaniques de liaison a une composante nulle (écrire les torseurs si besoin). Déterminer le nombre d'équations qui pourra être obtenu en suivant cette stratégie. Il doit y avoir autant d'équations que d'inconnues pour pouvoir résoudre le problème (problème dit isodynamique).
4. S'il n'y a pas assez d'équations, il faut sans doute déterminer des équations de liaisons complémentaires, en exploitant par exemple les relations de roulement sans glissement.
5. Appliquer le PFD en fonction de la stratégie de fractionnement choisi et en déduire les équations du mouvement. Généralement, la résolution s'arrête ici car les équations du mouvement ne peuvent pas souvent être résolues facilement à la main.
6. Si on souhaite aussi déterminer les inconnues de liaison, alors il suffit de suivre la démarche habituelle de résolution des problèmes de statique (mais cela rajoute beaucoup d'équations!).

Explication 5.3 (Equations du mouvement du pendule d'Euler)

On considère le pendule d'Euler schématisé ci-dessous.



Le pendule d'Euler est constitué de trois solides :

- Bâti S_0 , de repère lié $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ supposé galiléen.

- Chariot S_1 . Le chariot est en liaison glissière de direction \vec{x}_0 avec le bâti. Le mouvement est paramétré par la position du centre d'inertie G_1 du chariot, tel que $\overrightarrow{O_0G_1} = x_1(t)\vec{x}_0$. Le chariot a pour masse m_1 .
- Pendule S_2 de repère lié $R_2(G_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$. Le pendule est en liaison pivot d'axe (G_1, \vec{y}_0) et d'angle $\psi_2(t)$ avec S_1 . Le centre d'inertie du pendule est repéré par $\overrightarrow{G_1G_2} = L\vec{z}_2$ où la longueur L est constante. Le pendule a pour masse m_2 .

De plus, un ressort et un amortisseur (sans masse) exercent des actions mécaniques sur S_1 . Les caractéristiques de ces éléments sont les suivantes :

- ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 ;
 - amortisseur de coefficient d'amortissement c .
1. Tracer le graphe de liaisons du pendule d'Euler. Combien y a-t-il de paramètres du mouvement ? Donner les torseurs des efforts de liaison.
 2. Etablir la stratégie de mise en équations (bilan minimal d'équations) pour obtenir les équations du mouvement. Préciser les axes de projections et les points d'applications du PFD.
 3. Appliquer le PFD et en déduire les équations du mouvement.
 4. Etablir la stratégie de mise en équation si l'on souhaite aussi obtenir les inconnues d'efforts. Appliquer le PFD et déterminer l'ensemble des équations permettant de déterminer les inconnues de liaison.

(Exercice inspiré d'un sujet de L. Faure, enseignant-chercheur à l'IUT GMP de Metz.)

1 Cinématique du point

1.1 Application du cours

Exo 1.1. Construction de vecteurs rotation Soit un repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Le repère $R_1(O_{0,1}, \vec{x}_{0,1}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est en rotation d'axe $(O_{0,1}, \vec{x}_{0,1})$ et d'angle $\psi_1(t)$ avec le repère R_0 .

Le repère $R_2(O_{1,2}, \vec{x}_{1,2}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est en rotation d'axe $(O_{1,2}, \vec{x}_{1,2})$ et d'angle $\psi_2(t)$ avec le repère R_1 .

Le repère $R_3(O_{2,3}, \vec{x}_3, \vec{y}_{2,3}, \vec{z}_3)$ est en rotation d'axe $(O_{2,3}, \vec{y}_{2,3})$ et d'angle $\theta_3(t)$ avec le repère R_2 .

1. Faire un schéma de la situation et tracer les figures de changement de repère.
2. Donner l'expression des vecteurs rotation $\vec{\Omega}(R_1/R_0)$, $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$, $\vec{\Omega}(R_3/R_2)$, $\vec{\Omega}(R_2/R_0)$, $\vec{\Omega}(R_3/R_0)$, $\vec{\Omega}(R_3/R_1)$.
3. Calculer les dérivées suivantes : $(\frac{d\vec{x}_1}{dt})_{R_0}$, $(\frac{d\vec{x}_1}{dt})_{R_2}$, $(\frac{d\vec{x}_1}{dt})_{R_3}$.

Exo 1.2. Mouvement circulaire uniforme

Soient un repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et un repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. R_1 est paramétré par rapport à R_0 tel que : $\overrightarrow{O_0O_1} = \vec{0}$ et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \psi_1(t) = \omega_1 t$, où ω_1 est une vitesse angulaire constante (rotation d'axe $(O_{0,1}, \vec{z}_{0,1})$).

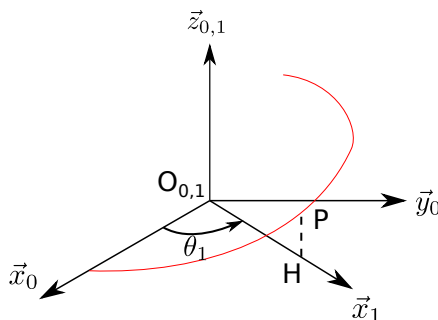
On considère un point P astreint à se déplacer sur un cercle de rayon R . Sa trajectoire est donnée par $\overrightarrow{O_0P}(t) = R\vec{x}_1(t)$.

1. Faire un schéma de la situation et tracer la figure de changement de repère. Donner les relations de projection et l'expression du vecteur $\vec{\Omega}(R_1/R_0)$.
2. Pourquoi peut-on dire que le mouvement est uniforme ?
3. Exprimer la vitesse $\vec{V}(P/R_0)$. Quel est le repère d'observation ? Quel est le repère de projection ? Représenter graphiquement la vitesse en fonction du rayon R .
4. Exprimer l'accélération $\vec{\Gamma}(P/R_0)$. Représenter graphiquement l'accélération.

1.2 Problèmes

Exo 1.3. Mouvement hélicoïdal

Soit un repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Dans ce repère, le point P décrit une trajectoire hélicoïdale, autour de l'axe (O, \vec{z}_0) , de rayon R . On définit le repère $R_1(O_{0,1}, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ en rotation d'axe $(O_{0,1}, \vec{z}_{0,1})$ et d'angle $\theta_1(t)$. A l'instant t , la projection orthogonale de P sur le plan $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ est le point H , tel que $\overrightarrow{O_0H} = R\vec{x}_1$ et $\overrightarrow{HP} = R\theta_1(t) \tan \alpha \vec{z}_{0,1}$ où α est l'angle d'hélice.



1. Calculer la vitesse du point P dans son mouvement par rapport à R_0 .
2. Calculer l'accélération du point P dans son mouvement par rapport à R_0 . Que vaut l'accélération si la vitesse angulaire du point P est constante ?

Exo 1.4. Vitesse du centre d'inertie d'une toupie

Voir l'exercice transversal « Toupie », partie cinématique du point.

Exo 1.5. Mesure du rayon d'une roue Soient un repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et un repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. R_1 est paramétré par rapport à R_0 tel que : $\overrightarrow{O_0O_1} = \vec{0}$ et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \psi_1(t) = \omega_1(t)t$.

On considère un point P qui peut se déplacer librement dans le plan (\vec{x}_1, \vec{y}_1) . Sa trajectoire est donnée par $\overrightarrow{O_0P} = r(t)\vec{x}_1(t)$.

1. Tracer la figure de changement de repère.
2. Exprimer la vitesse $\vec{V}(P/R_0)$.
3. Exprimer l'accélération $\vec{\Gamma}(P/R_0)$.
4. Dans quelles conditions retrouve-t-on un mouvement circulaire uniforme ?
5. On considère que le point P appartient à une roue de rayon R . La roue, initialement au repos, est mise en rotation avec une accélération angulaire constante de $2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$. Lorsque la roue atteint une vitesse angulaire de $1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, l'accélération du point P (mesurée avec un accéléromètre) vaut $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Combien vaut le rayon de la roue ?

2 Cinématique du solide

2.1 Application du cours

Exo 2.1. Manipulation du torseur cinématique Le torseur cinématique d'un solide S_1 en mouvement par rapport à un solide S_0 est donnée par :

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \{\dot{\psi}_1 \vec{x}_1; L\dot{\psi}_1 \vec{z}_1\}_A.$$

On définit : $\vec{OA} = L\vec{y}_1$ et $\vec{OB} = l\vec{z}_1$.

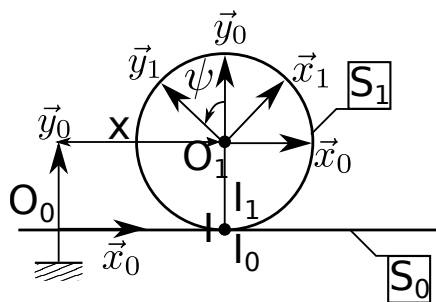
1. Donner les coordonnées vectorielles du torseur. Quel est le mouvement de S_1 par rapport à S_0 ?
2. Donner les coordonnées scalaires du torseur dans les repères $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
3. Donner la vitesse $\vec{V}(B \in S_1/R_0)$.

Exo 2.2. Repère absolu et relatif Alice aperçoit son ami Bob à 500 m d'elle. Alice se dirige vers Bob à une vitesse de $5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et Bob se dirige vers Alice à une vitesse de $4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

1. Préciser dans quel repère la situation ci-dessous est décrite (ce repère sera considéré comme le repère absolu).
2. Décrire la situation dans le repère relatif lié à Alice, puis dans le repère relatif lié à Bob.
3. En choisissant un repère adéquat, donner le temps nécessaire à Alice et Bob pour se rejoindre.

Exo 2.3. Roulement sans glissement d'une roue sur le sol On considère une roue (S_1) qui roule sur le sol (S_0). En plus du schéma ci-dessous, on donne les paramètres suivants :

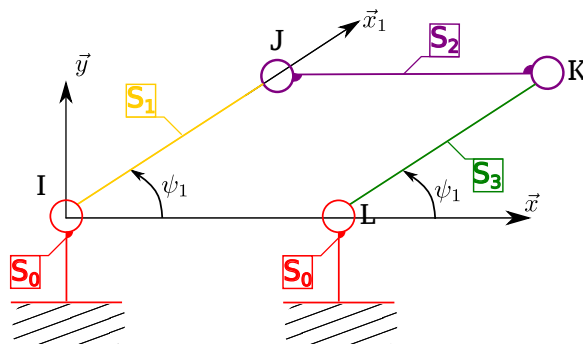
- $\vec{O_0O_1} = x(t)\vec{x}_0 + R\vec{y}_0$
- $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \psi(t)$.



1. Tracer la figure de changement de repère.
2. Calculer les vitesses des trois points coïncidant à l'instant t au point I : $\vec{V}(I/R_0)$, $\vec{V}(I \in S_0/R_0)$, $\vec{V}(I \in S_1/R_0)$ (pour cette dernière vitesse, utiliser deux méthodes différentes : (1) Dérivation du vecteur position; (2) Formule de Varignon)
3. Exprimer la condition de roulement sans glissement entre la roue et le sol.

Exo 2.4. Système de bielles

On considère le système de bielles représenté dans la figure ci-dessous. Ce système est utilisé par exemple pour guider les essuies-glaces des autobus (alors fixés sur la bielle 2). On fixe $IJ = KL$.



Sans calculs, donner les mouvements de S_1 , S_2 , S_3 par rapport à S_0 .

Exo 2.5. Torseurs de liaisons

Écrire les torseurs des mouvement cinématiquement admissibles et préciser les degrés de liberté des liaisons suivantes :

1. Liaison pivot d'axe (O, \vec{y})
2. Liaison glissière de direction \vec{z}
3. Liaison rotule de centre O : en 3D ; dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) .
4. Liaison appui plan de normale \vec{x} : en 3D ; dans le plan (y, z) .

2.2 Problèmes

Exo 2.6. Roues de friction

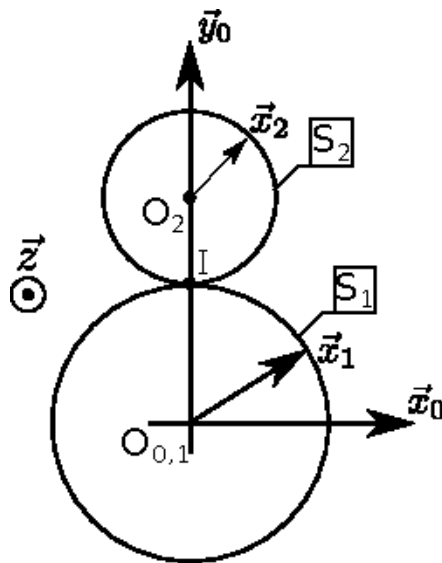
Les roues de friction sont un mécanisme élémentaire permettant de transmettre un mouvement de rotation d'un solide à un autre. Ce système se retrouve par exemple dans les dynamos montées sur les vieux vélos : le mouvement de rotation de la roue est transmis à un galet, qui entraîne un alternateur (conversion d'énergie mécanique en énergie électrique).

Le modèle des roues de friction est également utilisé pour étudier les transmissions par engrenages. Dans ce cas, les roues représentent les rayons primitifs des engrenages.

Nous proposons d'étudier le cas de deux roues de friction, S_1 et S_2 , de rayon R_1 et R_2 . On définit les repères suivants :

- $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti sur lequel les roues sont montées.
- $R_1(O_{0,1}, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ lié à S_1 . On impose une vitesse angulaire ω_1 à cette roue, telle que $\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \omega_1(t)\vec{z}_{0,1}$.
- $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_{0,2})$ lié à S_2 . On impose une vitesse angulaire ω_2 à cette roue, telle que $\vec{\Omega}(R_2/R_0) = \omega_2(t)\vec{z}_{0,2}$.

Le point de contact entre les deux roues est le point I .

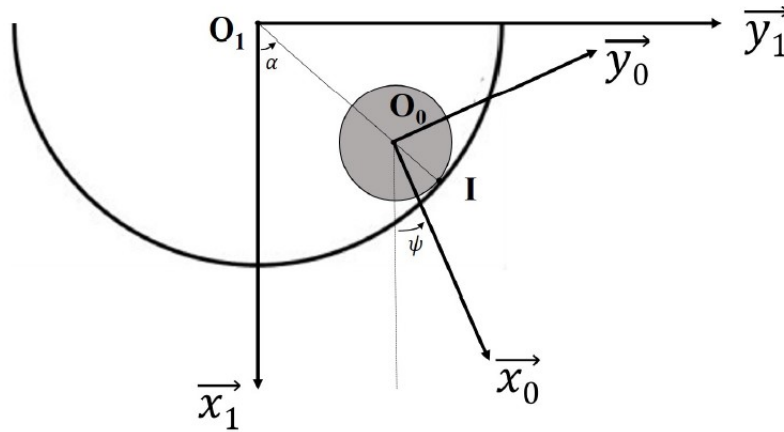


1. Tracer les figures de changement de repère.
2. Calculer les vitesses des points $I \in S_1$ et $I \in S_2$ dans leur mouvement par rapport à R_0 .
3. Pour que le mouvement soit transmis efficacement, il est impératif que les roues roulent l'une sur l'autre sans glisser. Exprimer cette condition et montrer que l'on obtient le rapport de réduction du mécanisme.
4. Calculer la vitesse du point $O_2 \in S_1$ dans son mouvement par rapport à R_0 .
5. Déterminer l'accélération du point $I \in S_1$ dans son mouvement par rapport à R_0 .
6. Calculer la vitesse et l'accélération du point quelconque $A_1 \in S_1$. Comparer les résultats obtenus lorsque A_1 et I coïncident.

Exo 2.7. Sphère dans un cylindre

On s'intéresse à l'étude du mouvement d'une sphère S_0 placée à l'intérieur d'un cylindre S_1 immobile. On note R_0 et R_1 les rayons de S_0 et S_1 respectivement. On associe à S_0 et S_1 les repères $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ respectivement.

Les axes $R_0(O_0, \vec{z}_0)$ et $R_1(O_1, \vec{z}_1)$ qui correspondent aux axes de S_0 et S_1 respectivement sont colinéaires. On suppose donc qu'aucun mouvement de S_0 s'effectue dans cette direction. La figure ci-dessous correspond à un cliché du mouvement de S_0 à un instant donné. On note $\alpha = (\vec{O_1O_0}, \vec{x}_1)$ et $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$

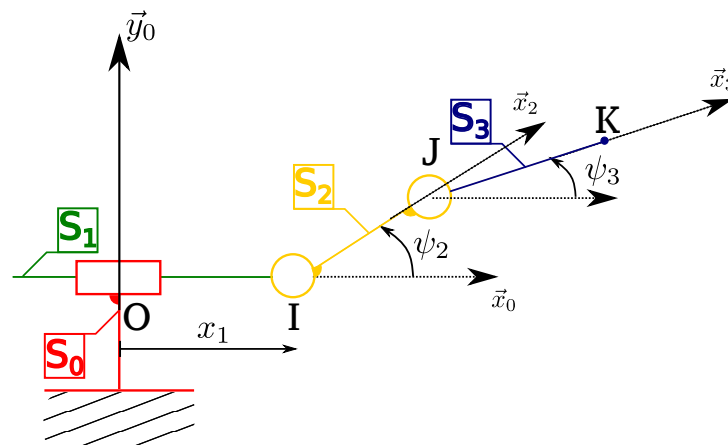


1. Tracer la figure de changement de repère.
2. Déterminer les éléments de réduction, au point O_0 , de la torseur cinématique relatif au mouvement de la sphère S_0 par rapport au cylindre S_1 .
3. Déterminer la vitesse du point de contact $I \in S_0$ dans le mouvement de la sphère S_0 par rapport au cylindre S_1 .
4. Exprimer la condition de non glissement de la sphère S_0 par rapport au cylindre S_1 .
5. En déduire que pour cette condition, on a : $\psi = -\frac{(R_0-R_1)}{R_1}\alpha$. Interpréter le signe négatif.

Exo 2.8. Bras articulé On considère le bras articulé représenté ci-dessous.

On définit les repères suivants :

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti
 - S_1 est en liaison glissière de direction \vec{x} et de paramètre x_1 avec S_0 , tel que $\vec{OI} = x_1(t)\vec{x}_0$.
 - $R_2(I, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié à S_2 . S_2 est en liaison pivot d'axe (I, \vec{z}_0) et d'angle $(\vec{x}_0, \vec{x}_2) = \psi_2(t)$ avec S_1 .
 - $R_3(J, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ lié à S_3 . S_2 est en liaison pivot d'axe (J, \vec{z}_0) et d'angle $(\vec{x}_0, \vec{x}_3) = \psi_3(t)$ avec S_2 .
- On donne également les informations géométriques suivantes : $IJ = L_2$; $JK = L_3$.

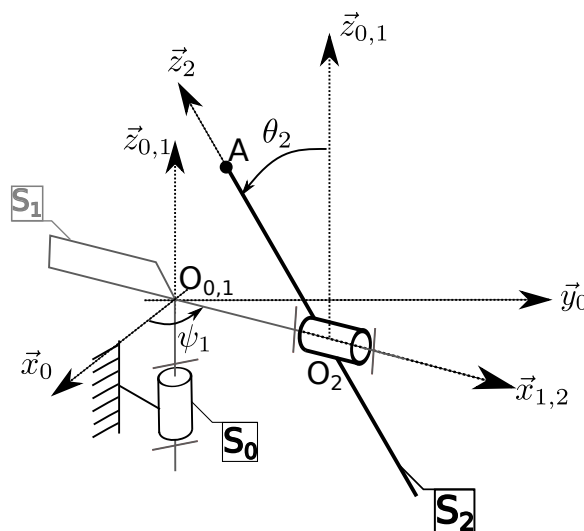


1. Tracer le graphe de liaisons du bras articulé.
2. Tracer les figures de changement de repère.
3. Le mouvement étant plan, donner les torseurs cinématiques des liaisons dans leur repère local.
4. Déterminer la vitesse $\vec{V}(K \in S_3/R_0)$ en utilisant les formules de composition du mouvement.

Exo 2.9. Étude d'une éolienne

Dans ce problème, nous étudions le mouvement d'une éolienne. L'éolienne est modélisée par trois solides (voir schéma ci-dessous). Le mat, S_0 , est fixe par rapport au sol. La girouette S_1 (support des pâles et du système de conversion d'énergie mécanique en énergie électrique) est libre de s'orienter face au vent. Elle est en liaison pivot avec le mat. Enfin, les pâles S_2 sont mises en rotation sous l'effet du vent.

L'objectif est de calculer la vitesse et l'accélération en bout de pale. La vitesse en bout de pale est en effet essentielle pour définir le Tip Speed Ratio (TSR) (rapport entre la vitesse tangentielle en bout de pale et la vitesse du vent). Lorsque le TSR optimal est atteint, l'extraction d'énergie à partir du vent est maximale. Dans le cas contraire, la conversion d'énergie est dégradée par de nombreux facteurs (rotation trop lente ou trop rapide, turbulences...). L'éolienne peut aussi être endommagée.



Le paramétrage est le suivant :

- Repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au solide S_0 , fixe par rapport au sol.
- Repère $R_1(O_{0,1}, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ lié au solide S_1 . Le solide est en liaison pivot d'axe $(O_{0,1}, \vec{z}_{0,1})$ et de paramètre $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \psi_1(t)$ avec le solide S_0 .
- Repère $R_2(O_2, \vec{x}_{1,2}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié au solide S_2 . Le solide est en liaison pivot d'axe $(O_2, \vec{x}_{1,2})$ et de paramètre $(\vec{z}_{0,1}, \vec{z}_2) = \theta_2(t)$ avec le solide S_1 .

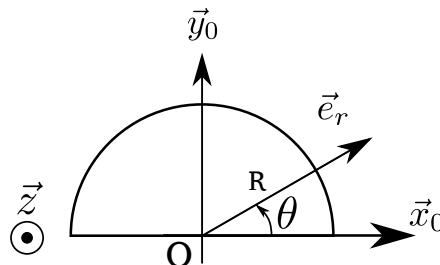
Informations géométriques : $\overrightarrow{O_{0,1}O_2} = a\vec{x}_1$; longueur d'une pale : $\overrightarrow{O_2A} = b\vec{z}_2$.

1. Tracer le graphe de liaisons de l'éolienne et les figures de changement de repère.
2. Donner les torseurs cinématiques des liaisons dans leur repère local.
3. Donner la vitesse et l'accélération du point A lié à S_2 dans son mouvement par rapport à R_1 .
4. Donner la vitesse et l'accélération du point A lié à S_2 dans son mouvement par rapport à R_0 .
5. Que vaut $\vec{\Gamma}(A \in S_2/R_0) \cdot \vec{x}_0$ (accélération du point A lié à S_2 , dans son mouvement par rapport à R_0 , par rapport à l'axe \vec{x}_0) ?

3 Cinétique

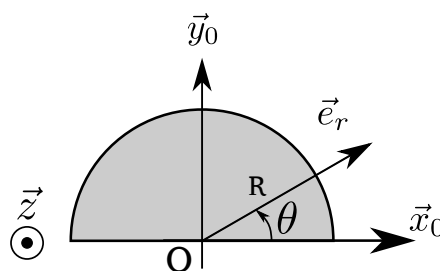
3.1 Application du cours

Exo 3.1. Centre de masse d'un demi-cercle Soit un demi-cercle de rayon R , de masse linéique ρ_L constante, de masse m .



1. En vous aidant des propriétés de symétrie, à quel axe le centre d'inertie G appartient-il ?
2. Exprimer la masse élémentaire.
3. En déduire par le calcul la position du centre d'inertie du demi-cercle.

Exo 3.2. Centre de masse d'un demi-disque Soit un demi-disque de rayon R , de masse surfacique ρ_S constante, de masse m .



1. En vous aidant des propriétés de symétrie, à quel axe le centre d'inertie G appartient-il ?
2. Exprimer la masse élémentaire.
3. En déduire par le calcul la position du centre d'inertie du demi-disque.

Exo 3.3. Matrice d'inertie d'un parallélépipède Soit un parallélépipède S_1 , de longueur L , de hauteur h , de profondeur p , et de masse m . La matrice d'inertie est donnée dans le repère $R_1(G_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, lié au solide et d'origine G_1 , centre d'inertie du solide, par :

$$[I(G_1, S_1)] = \begin{bmatrix} \frac{m(L^2+h^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(p^2+h^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(L^2+p^2)}{12} \end{bmatrix}.$$

1. Faire un schéma.
2. En analysant les symétries de S_1 , donner la position de son centre d'inertie G_1 .
3. On fixe $h = p$ et $L > h$. Par rapport à quel(s) axe(s) du repère l'inertie en rotation du solide est-elle minimale ?
4. Déterminer le moment d'inertie de S_1 par rapport à l'axe de vecteur directeur $\overrightarrow{G_1 A} = (p/2)\vec{x}_1 + (h/2)\vec{z}_1$.

Exo 3.4. Cinétique des mouvements élémentaires Soit un solide S_1 en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

1. Ecrire le torseur cinétique, d'abord au centre d'inertie du solide, puis en un autre point du solide, dans le cas où le solide est translation par rapport à R . Quelle est la caractéristique d'inertie qui s'oppose au mouvement ?
2. Ecrire le torseur cinétique, d'abord au centre d'inertie du solide, puis en un autre point du solide, dans le cas où le solide est en rotation d'angle $\theta(t)$ par rapport à R , et dont l'axe de rotation \vec{z} passe par le centre d'inertie du solide. Quelle est la caractéristique d'inertie qui s'oppose au mouvement ?

3.2 Problèmes

Exo 3.5. Pendule composé Voir l'exercice transversal « Pendule composé », partie cinétique.

Exo 3.6. Double pendule Voir l'exercice transversal « Double pendule », partie cinétique.

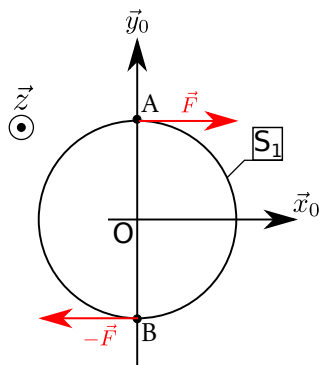
Exo 3.7. Cône en rotation (toupie) Voir l'exercice transversal « Toupie », partie cinétique.

4 Statique

4.1 Application du cours

Exo 4.1. Torseur couple

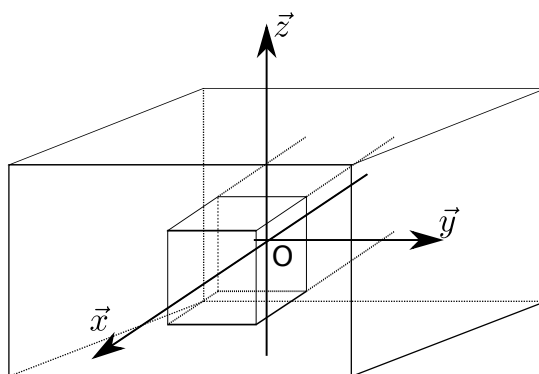
Soit le système de forces s'appliquant au solide S_1 schématisé ci-dessous. On pose $OA = OB = R$. Le solide est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) .



1. Exprimer la résultante des deux forces. Le solide est-il en l'équilibre ?
2. Exprimer au point O le torseur des actions mécaniques appliquées au solide S_1 .
3. Que vaut le moment en tout point du solide ?

Exo 4.2. Etude de la liaison glissière

La liaison glissière élémentaire est modélisée par deux solides prismatiques coulissant l'un dans l'autre (voir schéma ci-dessous).



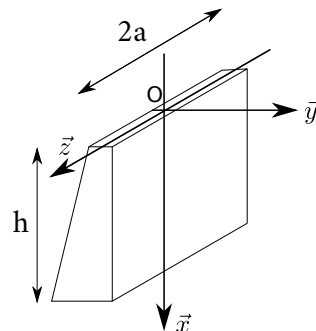
1. Déterminer la surface de contact entre les deux solides.
2. En supposant un contact parfait entre les deux solides, en déduire le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison glissière.
3. Retrouver le même résultat à partir du torseur des mouvements cinématiquement admissibles de la liaison glissière.

Exo 4.3. Système de forces

Soit un solide S sous l'action de deux forces, $\vec{F}(A)$ et $\vec{F}(B)$.

1. Ecrire au point A les deux équations vectorielles traduisant l'équilibre du solide S sous l'action de ces deux forces.
2. En déduire que le solide est en équilibre si les deux forces sont de même direction, de même norme, et de sens opposés.

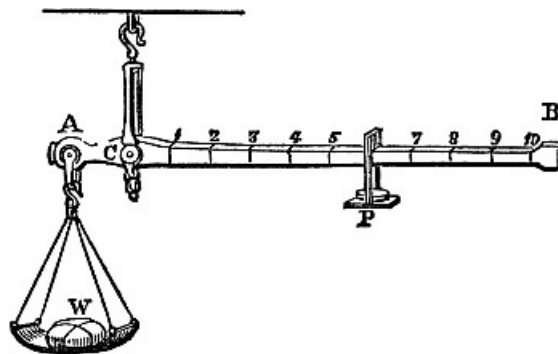
Exo 4.4. Effort appliqué sur un barrage Un barrage vertical retient un volume d'eau, de masse volumique ρ_V . Le barrage a une hauteur h et une largeur $2a$ (voir schéma ci-dessous). En tout point $M(x, 0, z)$ de la paroi, l'action de l'eau sur le barrage est modélisée par une densité surfacique de force $\vec{f}_S(M) = -(p_a + \rho_V xg)\vec{y}$, où p_a est la pression atmosphérique et g l'accélération de la pesanteur.



1. Représenter l'allure de la densité surfacique de force.
2. Calculer le torseur représentant l'action mécanique de l'eau sur le barrage au point O.

Exo 4.5. Balance romaine

Une balance romaine est constituée d'un bras de balancier gradué. Ce bras est articulé au point C avec un anneau de suspension. L'objet à peser est suspendu au point A. La mesure du poids se fait avec un seul objet de masse m , tel que l'équilibre est obtenu lorsqu'il est suspendu au point P.



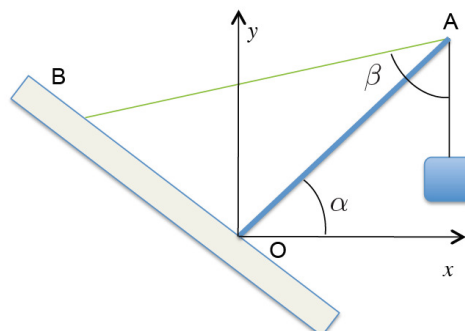
Montrer que l'on peut déterminer que la masse M de l'objet à peser est obtenue par la loi :

$$\frac{M}{m} = \frac{CP}{CA}.$$

4.2 Problèmes

Exo 4.6. Equilibre d'un treuil

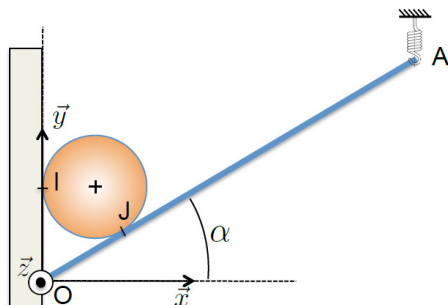
Un treuil, paramétré par le vecteur \vec{OA} , de longueur $OA = L$ et de masse M , est en liaison pivot au point O avec le bâti. Le treuil est maintenu en position par un câble BA de masse négligeable. Au point A, le treuil soulève une masse m .



1. Faire l'inventaire des efforts extérieurs qui s'appliquent sur le treuil.
2. Appliquer le PFS et déterminer les inconnues de liaison en O ainsi que la tension exercée par le câble.

Exo 4.7. Système de deux solides en équilibre

On considère le système de deux solides, en équilibre, schématisé ci-dessous.



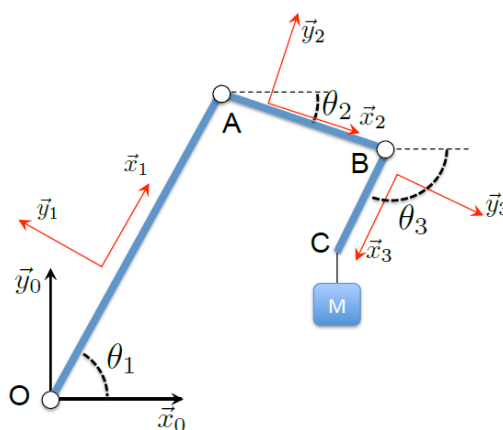
Le système est constitué d'un disque homogène S_1 , de masse M et de rayon R ainsi que d'une tige homogène S_2 de longueur $OA = l$ et de masse m . La tige S_2 est liée au bâti S_0 par une liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) et par un ressort de raideur k au point A . Le disque S_1 est en contact ponctuel parfait avec le bâti S_0 au point I , et en contact ponctuel parfait avec la tige S_2 au point J .

Paramètres géométriques : $OJ = a$; allongement du ressort Δ_y .

1. On appelle α_0 l'angle entre l'axe \vec{x} et la tige en l'absence du disque. Exprimer l'allongement Δ_y du ressort sous l'effet du disque, en fonction de α_0 , α et l .
2. Faire le bilan du nombre d'inconnues du problème (aidez vous si besoin du graphe de liaison du mécanisme ou de schémas) et du nombre d'équations que l'on peut obtenir. Peut-on résoudre le problème ?
3. Déterminer l'ensemble des inconnues de liaison en appliquant le PFS.

Exo 4.8. Dimensionnement des actionneurs d'une grue

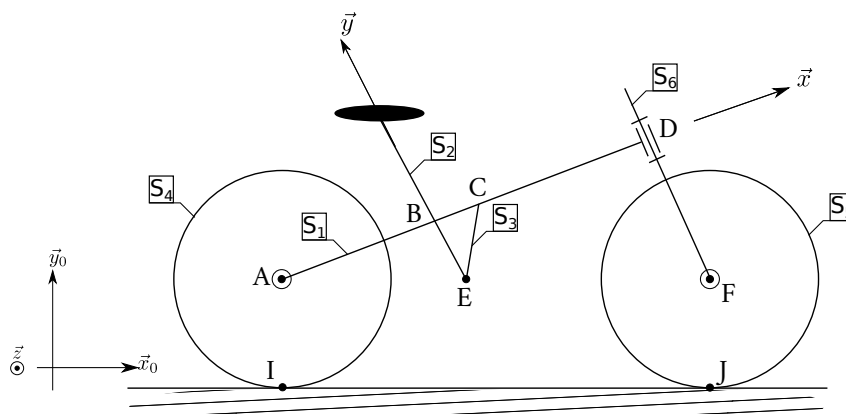
Une grue est constituée de trois bras S_1 (de longueur $OA = l_1$), S_2 (de longueur $AB = l_2$) et S_3 (de longueur $BC = l_3$), de masses négligeables. Ces bras sont liés au bâti (pour le bras S_1) et entre eux (pour les autres bras) par des liaisons pivots paramétrées par les angles $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\theta_3(t)$. La grue soulève au point C une masse M . Pour assurer l'équilibre de la grue, il est nécessaire d'utiliser des moteurs, positionnés au niveau de chaque liaison pivot, qui exercent des couples moteurs inconnus C_1 , C_2 et C_3 . On cherche à déterminer ces couples moteurs.



1. Tracer le graphe des liaisons et les figures de changement de repère.
2. Déterminer le nombre d'inconnues du problème et déterminer le nombre d'équations qui peuvent être obtenues par application du PFS.
3. Déterminer les inconnues de liaison ainsi que les couples moteurs C_1 , C_2 et C_3 .

Exo 4.9. Etude d'un VTT

Au cours de la conception d'un VTT, il est nécessaire de déterminer les efforts qui s'appliquent sur certains éléments cruciaux pour son fonctionnement : efforts exercés sur les axes des roues, efforts dans la fourche etc.



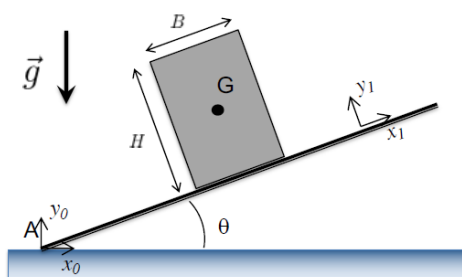
On se propose d'étudier un modèle simplifié de VTT composé de 6 solides.

- Le cadre est composé de trois barres solidaires entre elles : la barre principale S_1 (de longueur AD) et un renfort triangulaire constitué des barres S_2 (de longueur BE) et S_3 (de longueur EC).
 - Le cadre est en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) avec la roue S_4 et en liaison pivot d'axe (D, \vec{y}) avec la fourche (solidaire du guidon) S_6 .
 - La fourche est en liaison pivot d'axe (F, \vec{z}_0) avec la roue S_5 .
 - Les roues sont en contact ponctuel parfait avec le sol S_0 aux points I et J .
- On considère que le cycliste exerce une force $P = 500\text{N}$ dirigée vers le bas au point E .

1. Faire le graphe de liaison du VTT.
2. Donner le torseur des actions mécaniques transmissibles par chaque liaison.
3. L'hypothèse de contact ponctuel parfait entre les roues et le sol vous semble-t-elle réaliste ?
4. En appliquant le PFS à l'ensemble du VTT, déterminer les réactions aux points I et J .
5. Déterminer les efforts qui s'exercent sur les axes des roues aux points A et F .
6. Déterminer le torseur des efforts appliqués sur la fourche S_6 au point D .

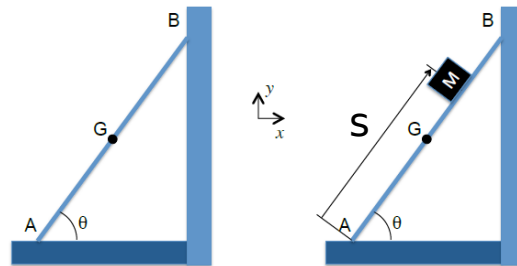
Exo 4.10. Frottements sur un pan incliné ; basculement statique

Soit un solide S_1 de largeur B , de hauteur h et de masse m . Ce solide est posé sur un plan incliné d'un angle θ par rapport au repère $R(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$. Le coefficient de frottement entre le solide S_1 et le plan incliné est noté f .



1. En considérant que le contact peut être modélisé par un contact ponctuel au point O (coin inférieur gauche du solide S_1), faire l'inventaire des forces qui s'appliquent sur S_1 .
2. En appliquant au point O le PFS au solide S_1 isolé, donner les expressions des composantes tangentielle et normale de la réaction de frottement. En déduire la condition d'adhérence de S_1 sur le plan incliné. Proposer une méthode de mesure du coefficient de frottement.
3. En utilisant le théorème du moment statique, quelle condition doit vérifier la largeur par rapport à la hauteur pour éviter que le solide S_1 ne bascule ?

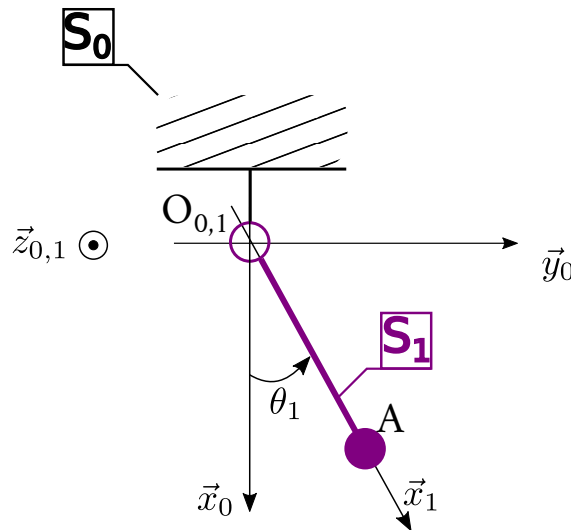
Exo 4.11. Equilibre d'une échelle – arc-boutement Une échelle S_1 , de longueur $AB = l$ et de masse m est posée sur le sol en A et contre un mur vertical en B . On suppose que le contact en B est parfait, et que le coefficient de frottement vaut f pour le contact en A .



1. Faire l'inventaire des forces qui s'appliquent à l'échelle S_1 . Combien y a-t-il d'inconnues ?
2. Appliquer le PFS et déterminer la condition que doit respecter l'inclinaison θ de l'échelle pour éviter de glisser. La masse de l'échelle a-t-elle une influence ?
3. On suppose désormais que Camille monte sur l'échelle. En considérant que cette personne a le même effet qu'une masse ponctuelle M au point C avec $AC = s$, en déduire les nouvelles conditions d'équilibre de l'échelle.

5 Dynamique

Exo 5.1. Pendule simple On considère un pendule S_1 constitué d'une tige sans masse, de longueur $OA = l$ et d'une masse ponctuelle m au point A . La tige est en liaison pivot parfait avec le bâti S_0 , d'axe (O, \vec{z}) et de paramètre angulaire $\theta_1(t)$.



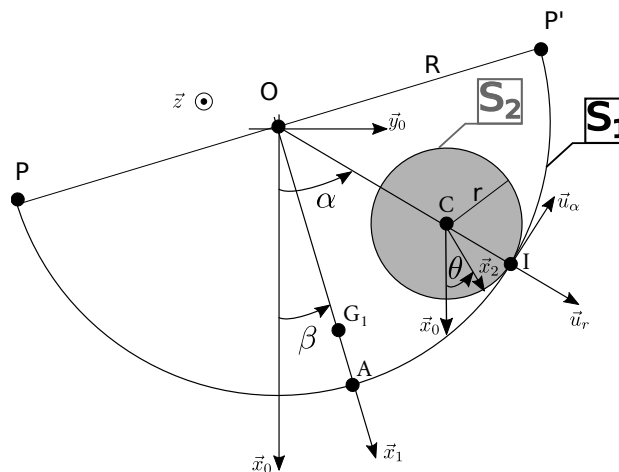
1. Exprimer le torseur des actions mécaniques extérieures qui s'appliquent au point O sur l'ensemble S_1 .
2. Exprimer le torseur dynamique de S_1/R_0 au point A puis au point O .
3. Appliquer le PFD au point O et en déduire l'équation différentielle du mouvement du pendule.

Exo 5.2. Pendule composé Voir l'exercice transversal « Pendule composé », partie dynamique.

Exo 5.3. Pendule double Voir l'exercice transversal « Pendule double », partie dynamique.

Exo 5.4. Toupie Voir l'exercice transversal « Toupie », partie dynamique.

Exo 5.5. Rail suspendu (extrait du concours Mines-Ponts 2008) On considère le mouvement d'oscillation d'une sphère dans un rail cylindrique suspendu et lui même oscillant.



Le rail S_1 , de masse M , de rayon R , est relié au point O du bâti par l'intermédiaire de fils inextensibles et de masse négligeable, fixés aux points P et P' . La position du milieu du rail (point A) est repérée par le paramètre angulaire $\beta(t)$ (rotation d'axe (O, \vec{z})). Le centre de masse du rail G_1 est repéré par $\vec{OG}_1 = l\vec{x}_1$. Le moment d'inertie du rail par rapport à son axe de rotation est noté $I_{\text{rail}/(O, \vec{z})} = MR^2$.

La sphère S_2 roule sans glisser sur le rail. La sphère, de centre C , a un rayon r et une masse m . Le point de contact entre la sphère et le rail est repéré par le point I , tel que $\vec{OI} = R\vec{u}_r$. On définit le repère $R_c(I, \vec{u}_r, \vec{u}_\alpha, \vec{u}_z)$ lié au point I et repéré par l'angle $\alpha(t)$. Par ailleurs, la sphère est en rotation d'angle $\theta(t)$ et d'axe $(C, \vec{z}(t))$. Le moment d'inertie de la sphère par rapport (C, \vec{z}) est donné : $I_{\text{sphère}/(C, \vec{z})} = \frac{2}{5}mr^2$.

1. Tracer les figures de changement de repère pour les repères R_1 , R_c et R_2 et donner les vecteurs de rotation $\vec{\Omega}(R_1/R_0)$, $\vec{\Omega}(R_c/R_0)$, $\vec{\Omega}(R_2/R_0)$.

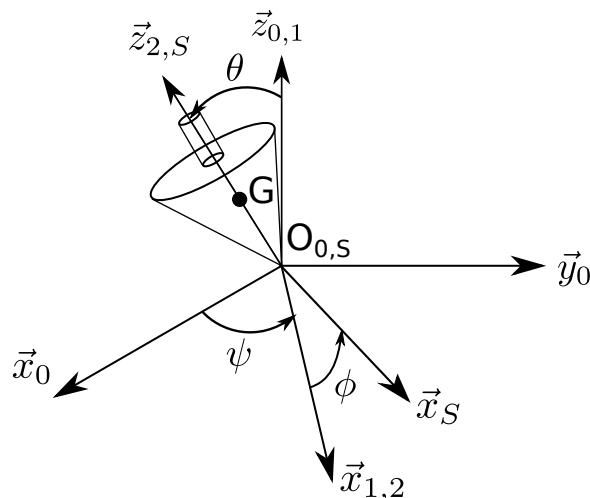
2. Ecrire la condition de roulement sans glissement au point I en fonction de $\dot{\theta}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$.
3. Exprimer le moment cinétique de la sphère S_2 dans son mouvement par rapport au bâti, au point C , projeté dans le repère R_0 . En déduire le moment cinétique de la sphère S_2 dans son mouvement par rapport au bâti, au point O .
4. Exprimer le moment cinétique du rail S_1 dans son mouvement par rapport au bâti, au point O , projeté dans le repère R_0 .
5. Faire l'inventaire des efforts extérieurs à l'ensemble $\mathcal{S} = S_1 \cup S_2$ et en déduire le moment résultant au point O . Appliquer le théorème du moment dynamique à l'ensemble $\mathcal{S} = S_1 \cup S_2$ au point O et en déduire une équation différentielle reliant $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ (utiliser pour cela l'équation issue de la condition de roulement sans glissement).
6. Faire l'inventaire des efforts extérieurs à S_2 et en déduire le moment résultant au point C . Appliquer le théorème du moment dynamique S_2 au point C , et donner la relation reliant la force tangentielle de frottement au point I et l'accélération angulaire de la sphère θ . Utiliser la condition de roulement sans glissement pour exprimer la force tangentielle de frottement en fonction de $\ddot{\alpha}$ et $\ddot{\beta}$.
7. Appliquer le théorème du moment dynamique en O à S_1 seulement. En déduire une équation différentielle de la forme :

$$A\ddot{\beta} - B\ddot{\alpha} = -Mgl \sin \beta$$

Exprimer A en fonction de M , m et R . Exprimer B en fonction de m , r et R .

6 Problèmes transversaux

Exo 6.1. Toupie Soit un repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au sol. On s'intéresse au mouvement d'une toupie S dans ce repère.



On définit le repère $R_S(O_{0,S}, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ lié à la toupie. Le paramétrage du mouvement de la toupie dans le repère R_0 est effectué à l'aide des angles d'Euler, dont on rappelle les caractéristiques :

- $R_1(O_{0,1}, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})/R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: précession d'angle $\psi(t)$ autour de $(O_{0,S}, \vec{z}_{0,1})$,
- $R_2(O_{1,2}, \vec{x}_{1,2}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)/R_1(O_{0,1}, \vec{x}_{1,2}, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$: nutation d'angle $\theta(t)$ autour de $(O_{0,S}, \vec{x}_{1,2})$,
- $R_S(O_{2,S}, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_{2,S})/R_2(O_{2,S}, \vec{x}_{1,2}, \vec{y}_2, \vec{z}_{2,S})$: rotation propre d'angle $\phi(t)$ autour de $(O_{0,S}, \vec{z}_{2,S})$.

** CINEMATIQUE DU POINT **

La position du centre d'inertie G_S de la toupie est : $\overrightarrow{O_0 G_S} = h \vec{z}_{2,S}$.

1. Déterminer la vitesse du centre d'inertie dans son mouvement par rapport au sol : $\vec{V}(G_S/R_0)$.
2. Déterminer l'accélération du centre d'inertie dans son mouvement par rapport au sol : $\vec{\Gamma}(G_S/R_0)$.

** CINETIQUE **

Au point $O_{0,S}$ et dans les repères R_2 et R_S , la matrice d'inertie de la toupie est de la forme :

$$[I(O_{0,S}, S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_2, R_S}.$$

1. Déterminer le moment cinétique au point $O_{0,S}$ de la toupie S dans son mouvement par rapport au repère R_0 .
2. Déterminer le moment dynamique au point $O_{0,S}$ de la toupie S dans son mouvement par rapport au repère R_0 : par rapport à \vec{z}_0 ; par rapport à \vec{z}_S ; par rapport à $\vec{x}_{1,2}$.

** DYNAMIQUE **

On suppose que la pointe de la toupie $O_{0,S}$ reste immobile sur le plan $(O_{0,S}, \vec{x}, \vec{y})$. L'action du sol sur la toupie est modélisée par le torseur d'une liaison ponctuelle de normale $(O_{0,S}, \vec{z})$ avec frottement, telle que :

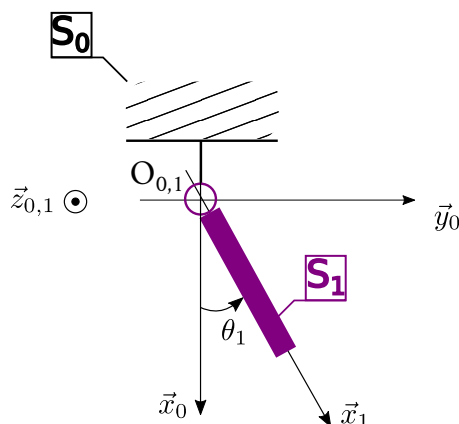
$$\{\mathcal{F}(S_0 \rightarrow S)\} = \left\{ \vec{R}(S_0 \rightarrow S); \vec{0} \right\}_{O_{0,S}}$$

Par ailleurs, la toupie est soumise à l'action de la pesanteur.

1. Combien d'équations du mouvement faut-il obtenir ?
2. Faire le bilan des actions mécaniques s'appliquant sur la toupie au point $O_{0,S}$.
3. Suivant quelles directions faut-il appliquer le théorème du moment dynamique ? En déduire les équations du mouvement.
4. Pour quelles conditions peut-on obtenir un mouvement stationnaire de la toupie, caractérisé par $\dot{\psi} = \text{constante}$?

Exo 6.2. Pendule composé

Un pendule S_1 est composé d'une tige homogène, de masse m et de longueur L . Cette tige est en liaison pivot parfaite avec le bâti S_0 , d'axe $(O_{0,1}, \vec{z}_{0,1})$ et d'angle $\theta_1(t)$.

**** CINETIQUE ****

On donne la matrice d'inertie de la tige dans le repère $R_1(O_{0,1}, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$:

$$[I(O_{0,1}, S_1)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}_{R_1}$$

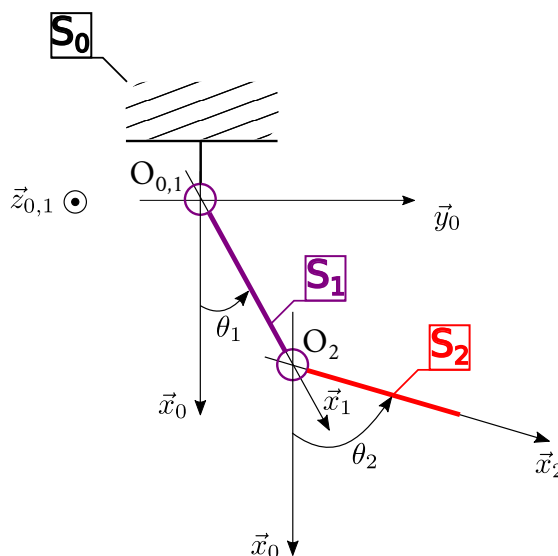
1. Donner sans calcul la position du centre de masse G_1 du pendule.
2. Calculer la résultante cinétique de la tige dans son mouvement par rapport au bâti.
3. Calculer le moment cinétique résultant de la tige dans son mouvement par rapport au bâti, au point $O_{0,1}$. En déduire $\vec{\sigma}(G_1, S_1/S_0)$. Que vaut le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe $(G_1, \vec{z}_{0,1})$?
4. Exprimer le torseur dynamique de la tige dans son mouvement par rapport au bâti, d'abord au point $O_{0,1}$ puis au point G_1 .

**** DYNAMIQUE ****

1. Ecrire au point $O_{0,1}$ les torseurs des actions mécaniques s'appliquant sur la tige.
2. Indiquer le nombre d'équations du mouvement qu'il faut déterminer, et détailler comment appliquer le PFD pour y parvenir.
3. Appliquer le PFD et donner la (les) équation(s) du mouvement du pendule composé.

Exo 6.3. Double pendule

Un double pendule est constitué de deux tiges, S_1 et S_2 . Ces deux tiges sont identiques : homogènes de masse m , de longueur $2a$.



Le paramétrage est le suivant :

- repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti.
- repère $R_1(O_{0,1}, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ lié à la tige S_1 . La tige S_1 est en liaison pivot parfaite avec le bâti, d'angle $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta_1(t)$ et d'axe $(O_{0,1}, \vec{z}_{0,1})$.
- repère $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_{1,2})$ lié à la tige S_2 . La tige S_2 est en liaison pivot parfaite avec la tige S_1 , d'angle $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \theta_2(t)$ et d'axe $(O_2, \vec{z}_{1,2})$.

**** CINETIQUE ****

On donne la matrice d'inertie de la tige S_2 au point O_2 (tige S_1 identique) :

$$[I(O_2, S_2)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4ma^2}{3} \end{bmatrix}_{R_2}.$$

1. Tracer le graphe de liaisons et les figures de changement de repère.
2. Déterminer le moment cinétique de S_2 au point O_2 et au point $O_{0,1}$ dans son mouvement par rapport à R_0 .
3. En déduire le moment dynamique de S_2 au point O_2 dans son mouvement par rapport à R_0 .
4. Déterminer le moment cinétique de $S_2 \cup S_1$ au point $O_{0,1}$ dans son mouvement par rapport à R_0 . En déduire le moment dynamique de $S_2 \cup S_1$ au point $O_{0,1}$ dans son mouvement par rapport à R_0 .

**** DYNAMIQUE ****

1. Combien d'équations du mouvement faut-il obtenir ?
2. Définir une stratégie de fractionnement pour appliquer le PFD.
3. En déduire les équations du mouvement.
4. Que deviennent les équations du mouvement dans le cas où l'on considère des petites oscillations (angles petits et vitesses petites) autour de la position d'équilibre stable du double pendule ? Peut-on les résoudre ?