POLYTECH NANTES

École d'ingénieurs de l'université de Nantes

2022–2023

Département « Peip »

Analyse

Hélène PÉRENNOU (auteure, encadrante de TD)
helene.perennou@univ-nantes.fr

Pierre MARTINOD (cours magistraux, encadrant de TD)
pierre.martinod@univ-nantes.fr

— 2^{e} année —

Nantes Université

POLYTECH
Premier réseau national
des écoles d'ingénieurs
polytechniques des universités

Site de la Chantrerie
Rue Christian Pauc - BP 5060
44306 Nantes cedex 3
France
tél. +33 (0)2 40 68 32 00
fax. +33 (0)2 40 68 32 32

Site de Gavy
Gavy Océanis - BP 152
44603 Saint-Nazaire cedex
France
tél. +33 (0)2 40 90 50 30
fax. +33 (0)2 40 90 50 24

www.polytech.univ-nantes.fr

Table des matières

I Intégrales généralisées

I. 1 Définitions et premières propriétés

Notation 1.1.1. Dans toute la suite, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

I. 1.1 Définition

Définition 1.1.2.

1) Soit f une fonction **continue** sur $[a;+\infty[$. Pour R dans $[a;+\infty[$, on appelle **intégrale partielle jusqu'à** R le réel :
$$I(R) = \int_a^R f(t)dt.$$
Si $I(R)$ a une limite finie L quand R tend vers $+\infty$, on dit que **l'intégrale généralisée** (I.G. en abrégé) $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **converge vers** L et on note :
$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = L.$$
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée **diverge**.

2) Soit f une fonction **continue** sur $]a;b]$. Pour r dans $]a;b]$, on appelle **intégrale partielle jusqu'à** r le réel :
$$I(r) = \int_r^b f(t)dt.$$
Si $I(r)$ a une limite finie L quand r tend vers a par valeurs supérieurs, on dit que **l'intégrale généralisée** $\int_a^b f(t)dt$ **converge vers** L et on note :
$$\int_a^b f(t)dt = L.$$
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée **diverge**.

Remarque 1.1.3. Si on s'intéresse à une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty;a]$ ou $[a;b[$, on se ramène à un cas de la définition par un changement de variable $t \mapsto -t$.

Exemple 1.1.4.

1) *L'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ *converge vers* 1.

2) *L'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}dt$ *diverge.*

3) *L'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_0^{1} \ln(x)dx$ *converge vers* (-1).

4) *L'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{u}du$ *diverge.*

I. 1.2 Intégrales de Riemann

Définition 1.1.5.

Soit α un réel.

1) On appelle **intégrale de Riemann sur** $[1; +\infty[$ l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$.

2) On appelle **intégrale de Riemann sur** $]0; 1]$ l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}dx$.

Théorème 1.1.6.

Soit α un réel.

1) I.G. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

2) I.G. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Démonstration *On calcule l'intégrale partielle puis on étudie sa limite selon les cas.* □

Exemple 1.1.7.

1) I.G. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ *converge.*

2) I.G. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}}du$ *diverge.*

3) I.G. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^2}dx$ *diverge.*

4) I.G. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ *converge.*

Exemple 1.1.8. *Que dire de I.G.* $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{(1+t)^2}dt$ *?*

I. 1.3 Opérations sur les intégrales généralisées

Proposition 1.1.9 : Relation de Chasles

Soit $f : [a;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et a' dans $[a;+\infty[$. Les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{a'}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature. Si elles convergent, alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt + \int_{a'}^{+\infty} f(t)dt.$$

Proposition 1.1.10 : Linéarité

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;+\infty[$ et λ un réel. Si les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ convergent, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\lambda f(t)+g(t))dt$ converge et :

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(t)+g(t))dt = \lambda\int_a^{+\infty} f(t)dt + \int_a^{+\infty} g(t)dt.$$

Remarque 1.1.11. Attention aux raccourcis : On peut trouver deux fonctions f et g telles que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} (f(t)+g(t))dt$ converge sans que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ convergent.

Proposition 1.1.12.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;+\infty[$ et λ un réel. Si I.G. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et I.G. $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge, alors I.G. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)+g(t)dt$ diverge.

Remarque 1.1.13. Les mêmes relations sont valables pour des fonctions continues sur $]a; b]$.

I. 1.4 Absolue convergence

Définition 1.1.14.

Soit f une fonction numérique continue sur $[a; +\infty[$. On dit que I.G. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est **absolument convergente** si I.G. $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ est convergente.

Proposition 1.1.15.

Si I.G. $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ est absolument convergente, alors I.G. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

Démonstration *On montre et on utilise l'encadrement :*

$$0 \leqslant f + |f| \leqslant 2|f|.$$

$\square$

Remarque 1.1.16. On a le même résultat pour une fonction continue sur $]a; b]$.

A retenir : Être absolument convergent est plus fort qu'être convergent.

Exemple 1.1.17.

1) I.G. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x\sqrt{x}} dx$ *est absolument convergente.*

2) I.G. $\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} dt$ *est absolument convergente.*

Remarque 1.1.18. Comme pour les séries, on pourra se ramener à des fonctions positives, pour lesquelles on dispose de critères de convergence.

I. 2 Critères de convergence pour les fonctions positives

I. 2.1 Cas des fonctions définies sur $[a; +\infty[$

On commence par s'intéresser aux cas de fonctions **continues et positives** sur un intervalle $[a; +\infty[$. Les résultats s'adaptent aux fonctions continues, positives sur un intervalle du type $]-\infty; b]$.

Remarque 1.2.1. Puisque la fonction primitive $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est croissante (f positive), ou bien F est bornée quand x tend vers $+\infty$ et I.G $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, ou bien $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Théorème 1.2.2 : Critère de comparaison

Soit f et g deux fonctions **positives** et **continues** sur $[a; +\infty[$ telles que pour tout x dans $[a; +\infty[$:

$$f(x) \leqslant g(x).$$

1) Si I.G. $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge alors, I.G. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.

2) Si I.G. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge alors, I.G. $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge.

Remarque 1.2.3. Le résultat reste valable si on suppose simplement qu'il existe R dans $[a; +\infty[$ tel que pour tout x supérieur ou égal à R, $f(x) \leqslant g(x)$.

Exemple 1.2.4. *L'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^5+2}dx$ *converge.*

Théorème 1.2.5 : Critère d'équivalence

Soit f et g deux fonctions **positives** et **continues** sur $[a; +\infty[$ telles que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x).$$

Dans ce cas, I.G. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ sont de même nature.

Remarque 1.2.6. Même si les intégrales généralisées convergent, elles n'ont pas forcément la même valeur.

Exemple 1.2.7.

1) *L'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \frac{3+\cos\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2+\sqrt{u}}du$ *converge.*

2) *L'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \frac{t^3(t^2-3t)}{t^5\sqrt{t+3}}dt$ *diverge.*

Théorème 1.2.8 : Critère de Riemann en $+\infty$

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur $[1; +\infty[$.

1) S'il existe $\alpha > 1$ tel que la limite de $x^\alpha f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ existe et est finie, alors I.G. $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

2) S'il existe $\alpha < 1$ tel que la limite de $x^\alpha f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ existe et est **non nulle**, alors I.G. $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

Exemple 1.2.9. *L'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt$ *converge.*

I. 2.2 Cas des fonctions définies sur $[a; b[$

On a des résultats similaires aux précédents pour les fonctions définies sur un intervalle borné, ouvert sur l'une des bornes.

Remarque 1.2.10. Si f est positive, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)dt$ croît quand x tend vers a. Donc soit $\displaystyle\int_x^b f(t)dt$ est bornée (pour x dans $]a; b]$) et l'intégrale est convergente, soit $\displaystyle\int_x^b f(t)dt$ tend vers $+\infty$.
En particulier, si f est bornée sur $]a; b]$, I.G. $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge. Les cas problématiques sont donc ceux pour lesquels, $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$.

Théorème 1.2.11 : Critère de Riemann en 0^+

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur $]0; 1]$.

1) S'il existe $\alpha < 1$ tel que la limite de $x^\alpha f(x)$ quand x tend vers 0^+ existe et est finie, alors I.G. $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ converge.

2) S'il existe $\alpha > 1$ tel que la limite de $x^\alpha f(x)$ quand x tend vers 0^+ existe et est **non nulle**, alors I.G. $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ diverge.

Exemple 1.2.12. *L'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}e^t}dt$ *diverge*

Théorème 1.2.13 : Critère de comparaison

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $]a; b]$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout t dans $]a; a+\varepsilon]$,

$$f(t) \leqslant g(t).$$

1) Si I.G. $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge, alors I.G. $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.

2) Si I.G. $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors I.G. $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Exemple 1.2.14. *L'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{u^2+\sqrt{u}}du$ *converge.*

Théorème 1.2.15 : Critère d'équivalence

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $]a; b]$ telles que :

$$f(x) \underset{x\to a^+}{\sim} g(x).$$

Les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Exemple 1.2.16. *L'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_0^2 \frac{3v}{2v^2-4v\sqrt{v}}dv$

I. 3 Plan d'étude

On termine avec un petit point méthode pour étudier une intégrale généralisée :

Plan d'étude.

1) Identifier le point problématique.

2) Dès que possible, calculer une primitive. Il s'agit ensuite d'un calcul de limite. Sinon :

3) Se ramener à une intégrale positive et tenter d'appliquer un critère de convergence.

Remarque 1.3.1. Dans ce cours on ne s'intéresse qu'à des intégrales généralisées ou un problème se pose sur **une seule** borne. Il peut y avoir des problèmes à chacune des bornes.

II Séries numériques

II. 1 Définition et premiers exemples

Définition 2.1.1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La série de terme général u_n est notée $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Le réel S_n est appelé **somme partielle d'indice** n de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Exemple 2.1.2.

1) La série

$$\sum_{n\geqslant 0} n$$

a pour terme général $u_n = n$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2) La série

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n}$$

a pour terme général $u_n = \frac{1}{n}$.
Il n'y a pas de manière simple d'exprimer le terme général S_n.

Notation 2.1.3. Le symbole $\sum$ indique qu'on calcule une somme :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = \sum_{k=1}^{10} k.$$

Plus généralement,

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La lettre k en indice sert uniquement à désigner le terme de la suite qu'on doit additionner, on aurait pu choisir une autre lettre :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{i=0}^{n} u_i.$$

Définition 2.1.4.

- Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est **convergente**. Dans ce cas, la limite S de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **somme de la série** $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et notée : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est **divergente**

Remarque 2.1.5. Comme pour les suites, on parle souvent de la **nature** d'une série. Étudier la nature d'une série, consiste à déterminer si elle est convergente ou divergente.
Dans le cas où la série est convergente, on a :

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right).$$

Exemple 2.1.6.

1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n$ *diverge.*

2) La série $\sum\limits_{k\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ *converge et sa somme vaut* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$.

Remarque 2.1.7. On s'intéresse parfois à des séries dont le premier terme n'est pas 0 mais un certain entier n_0. Dans ce cas, on note $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$. On ne change pas la nature d'une série si on supprime les premiers termes de la série. Par contre, si la série est convergente, sa somme sera différente.

Exemple 2.1.8.

1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 100} n$ *diverge.*

2) La série $\sum\limits_{k\geqslant 5}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ *et sa somme vaut* $\sum\limits_{n=5}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{16}$.

Exemple 2.1.9. *Étude de la nature de* $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$.

Exemple 2.1.10. *Étude de la nature de la* **série harmonique** $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$.

II. 2 Premières propriétés

Proposition 2.2.1.

Si la série de terme général u_n est convergente, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration *Par définition, la série converge si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une certaine limite S. On a donc :*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S$$

et aussi

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (S_{n-1} + u_n) = S + \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right).$$

On en déduit $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

□

Remarque 2.2.2. Attention : La réciproque est fausse ! La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 mais la série harmonique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n}$ **diverge**.

En pratique on utilisera un corollaire de ce résultat :

Corollaire 2.2.3.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Définition 2.2.4.

Dans ce cas, on dit que la série **diverge grossièrement**.

Théorème 2.2.5.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
La série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1} - u_n)$ est convergente si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Dans ce cas la somme de la série vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) - u_0.$$

Démonstration *On détermine S_n la n-ème somme partielle puis on calcule la limite quand n tend vers $+\infty$.*

□

Définition 2.2.6.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Une série de la forme $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ est appelée **série télescopique**.

Proposition 2.2.7.

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors la suite des **restes** $(R_N)_{N\in\mathbb{N}}$, avec

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = S - \sum_{n=0}^{N} u_n,$$

converge.

Démonstration *Il suffit de calculer la limite* $\lim_{N\to+\infty} R_N$.

□

II. 3 Opérations sur les séries

Théorème 2.3.1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels et λ un réel.

1) Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0} \lambda.u_n$ converge aussi et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda.u_n = \lambda.\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$.

2) Si λ est non nul et $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geqslant 0} \lambda.u_n$ diverge aussi.

3) Si les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergent, alors $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ converge aussi et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

4) Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge, alors $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ diverge.

Remarque 2.3.2. D'après les points 1) et 3), on peut dire que l'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des séries numériques réelles).

Exemple 2.3.3.

1) La série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{7}{2^k}$ *converge.*

2) La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1}$ *diverge.*

II. 4 Séries de référence

II. 4.1 Séries géométriques et dérivées

Définition 2.4.1.

Soit q un réel. La série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ est appelée **série géométrique de raison** q.

Théorème 2.4.2.

La série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ est convergente si, et seulement si, $|q| < 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Démonstration

- *Pour les cas divergents, c'est grossier !*
- *Pour les cas convergents, on étudie la suite des sommes partielles.*

□

Théorème 2.4.3.

1) La série $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ converge si, et seulement si, $|q|<1$. Dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Cette série est dite **série géométrique dérivée première**.

2) La série $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ converge si, et seulement si, $|q|<1$. Dans ce cas :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Cette série est dite **série géométrique dérivée seconde**.

Démonstration

- *Si $|q|\geqslant 1$, c'est grossier.*
- *Pour le cas où $|q|<1$. Pour n un entier, on introduit la fonction $t\mapsto S_n(t)=\sum_{k=0}^{n} t^k$ qu'on dérive et qu'on dérive une deuxième fois, en utilisant **deux** expressions de S_n.*
  On vérifie ensuite $S_n'(q)$ et $S_n''(q)$ admettent une limite quand n tend vers $+\infty$, en utilisant la bonne expression.

□

Exemple 2.4.4. *On peut en déduire la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} nq^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} n^2q^n$ en fonction du paramètre q.*

II. 4.2 Séries exponentielles

Définition 2.4.5.

Soit x un réel. On appelle **série exponentielle**, toute série de la forme $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$.

Théorème 2.4.6.

Soit x une réel. La série exponentielle $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Exemple 2.4.7. *La série* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$ *converge vers* e.

II. 4.3 Séries de Riemann

Définition 2.4.8.

Soit α un réel. On appelle **série de Riemann**, toute série de la forme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Théorème 2.4.9.

Soit α une réel. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Exemple 2.4.10.

1) La série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ *converge.*

2) La série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ *diverge.*

L'idée est que $\frac{1}{n^2}$ *se rapproche beaucoup plus de zéro que* $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *et assez vite pour que la série converge.*

II. 5 Absolue convergence

Définition 2.5.1.

On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est dite **absolument convergente** lorsque la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge.

Proposition 2.5.2.

Si une série est absolument convergente, alors elle converge.

Définition 2.5.3.

La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est dite **semi-convergente** lorsqu'elle converge mais qu'elle **n'est pas** absolument convergente.

II. 6 Séries à termes positifs

Puisque la convergence absolue d'une série entraine sa convergence, on peut dans un premier temps, s'intéresser aux séries à termes positifs, en étudiant la série de terme général $|u_n|$. Dans cette section on donne donc des critères permettant d'étudier la nature d'une série **à termes positifs**.

Définition 2.6.1.

- On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est **à termes positifs** si pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
- On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est **à termes positifs à partir d'un certain rang** s'il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 0$.

Théorème 2.6.2.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes positifs. La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée.

Démonstration

- *La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
- *Une suite de réels croissante converge si, et seulement si, elle est majorée.*
  (résultat classique sur les suites de réels).

$\square$

II. 6.1 Critère de comparaison

Théorème 2.6.3.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries **positives** à partir d'un certain rang n_0 et telles que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$u_n \leqslant v_n.$$

- Si $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

Démonstration *On utilise les hypothèses et le résultat précédent qui caractérise la convergence pour les séries à termes positifs.*

$\square$

Exemple 2.6.4. *Avec ce critère on peut montrer la proposition 2.*

Exemple 2.6.5. *La série* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2-\sin(n)}{1+n^4}$ *converge.*

II. 6.2 Critère d'équivalence

Rappel 2.6.6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels, non nulles à partir d'un certain rang. On dit que u_n et v_n sont **équivalentes**, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Exemple 2.6.7. *Une manière efficace de trouver des équivalents simples est d'utiliser des développements limités. Il faut donc les connaître et les reconnaître. Par exemple :*

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Théorème 2.6.8.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries **positives** à partir d'un certain rang. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

Démonstration

- *En utilisant l'équivalence des deux suites, on établie qu'il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$:*

$$\frac{1}{2}u_n \leqslant v_n \leqslant 2u_n.$$

- *On utilise le critère de comparaison.*

□

Exemple 2.6.9.

1) $\sum_{k\geqslant 0} \frac{k^2+3k+1}{k^4+2k^3+4}$ *converge.*

2) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+\ln(n)}{n^2}$ *diverge.*

II. 6.3 Critère de Riemann

Théorème 2.6.10.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes positifs à partir d'un certain rang et soit α un réel positif tel que $n^\alpha u_n$ converge vers L quand n tend vers $+\infty$.

- Si $\alpha > 1$ et $L \geqslant 0$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
- Si $\alpha \leqslant 1$ et L est dans $]0;+\infty[\cup\{+\infty\}$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Démonstration *On utilise le critère de comparaison en comparant à une série de Riemann.*

□

Exemple 2.6.11.

1) La série $\sum_{k\geqslant 1} \dfrac{\ln(k)}{k^2}$ *converge.*

2) La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$ *diverge.*

II. 6.4 Critère de D'Alembert

Théorème 2.6.12.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes positifs, non nuls à partir d'un certain rang, et telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

- Si $l > 1$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement.
- Si $l < 1$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Démonstration • *Si $l > 1$, on étudie la suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

• *Si $l < 1$, on montre qu'à partir d'un certain rang n_0 :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1+l}{2} < 1.$$

Par récurrence, on montre que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$u_n \leqslant \left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-N} u_{n_0}.$$

On conclut en utilisant le critère de comparaison, en comparant à une suite géométrique.

□

Remarque 2.6.13. Si $l = 1$, on ne peut pas conclure avec ce critère.

Exemple 2.6.14. *Étude de la nature de* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$.

II. 7 Séries alternées

On s'intéresse ici à un type particulier de séries, qui ne sont pas à termes positifs, mais pour lesquelles on dispose d'un critère de convergence.

Définition 2.7.1.

Une série numérique $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est appelée **série alternée** si deux termes consécutifs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de signes opposés.

Exemple 2.7.2. *Les séries* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n}$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n n$ *sont des séries alternées.*

Théorème 2.7.3 : Critère Spécial des Séries Alternées.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série alternée. Si la suite de réels $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0, alors la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Exemple 2.7.4. *La série* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n}$ *converge.*

Remarque 2.7.5. Cette série est donc semi-convergente.

II. 8 Comparaison série-intégrale

Théorème 2.8.1.

Soit f une fonction numérique continue et positive sur $[0;+\infty[$. Si f est **monotone**, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ et I.G. $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature.

Exemple 2.8.2. *On retrouve ainsi la nature des séries de Riemann en utilisant les calculs effectués pour les intégrales de Riemann.*

III Suites de fonctions

III. 1 Définitions

Notation 3.1.1. Dans toute la suite I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.

Définition 3.1.2.

Soit I un intervalle et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs réels. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** si pour tout x_0 dans I, la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Dans ce cas, on peut définir la fonction :

$$f_\infty \ : \ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \end{array} .$$

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers f_∞ et que la fonction f_∞ est la **limite simple** de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 3.1.3. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, sa limite simple est unique.

Exemple 3.1.4. *La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout n dans $\mathbb{N}$, f_n est définie sur $[0;1]$ par :*

$$f_n(x) = x^n,$$

converge simplement vers la fonction f_∞ définie pour tout x dans $[0;1]$ par :

$$f_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0;1[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

Proposition 3.1.5.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions définies sur I et λ un réel. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f_∞ sur I et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g_∞ sur I, alors la suite de fonctions $(f_n + \lambda g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $(f_\infty + \lambda g_\infty)$ sur I.

Définition 3.1.6.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et f_∞ la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers f_∞ si la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f_\infty(x)|$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Rappel 3.1.7. Si A est un ensemble de nombre réel, $\sup(A)$, s'il existe, est le plus petit des majorants de A. On a donc,

- pour tout a dans A, $a \leqslant \sup(A)$ et
- si $\varepsilon > 0$, il existe a dans A tel que $a > A - \varepsilon$.

Par exemple :

$$\sup([0;1]) = 1, \quad \sup([0;1[) = 1, \quad \sup(\{-\exp(x) \mid x \in \mathbb{R}\}) = 0.$$

Exemple 3.1.8. *La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout n dans $\mathbb{N}$, f_n est définie sur $[0,1]$ par :*

$$f_n(x) = x^n,$$

ne converge pas uniformément vers sa limite simple. Par contre contre, si on considère uniquement les fonctions définies sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, alors la limite simple f_∞ est la fonction nulle et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f_∞.

Proposition 3.1.9.

Si une suite de fonctions converge uniformément sur I, elle converge simplement sur I.

Remarque 3.1.10.

1) On retiendra que la convergence uniforme est "plus forte" que la convergence simple. Ceci dit, on a besoin de la limite simple pour étudier la convergence uniforme. Donc en pratique, on commencera par étudier la convergence simple.
2) Le résultat précédent (par contraposée) nous dit que si une suite de fonctions ne converge pas simplement, alors elle ne converge pas uniformément.

Exemple 3.1.11. Bosses glissantes et tas de sable.
Comparaisons des deux types de convergence pour les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(x-n)^2}$
- $g_n(x) = \dfrac{1}{n+(x-n)^2}$.

Exemple 3.1.12. *Étude de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0;1]$ par :*

$$f_n(x) = x^n(1-x).$$

Proposition 3.1.13.

S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I tel que $|f_n(x_n) - f_\infty(x_n)|$ ne converge pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément.

Démonstration *On raisonne par contraposée : on suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f_∞ et on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I. On note, pour tout n entier, $v_n = |f_n(x_n) - f_\infty(x_n)|$. le but est montrer que v_n converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*
En utilisant l'hypothèse de convergence uniforme, on obtient l'existence d'une suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$0 \leqslant |f_n(x_n) - f_\infty(x_n)| \leqslant m_n.$$

Un théorème d'encadrement permet de conclure.

$\square$

Définition 3.1.14.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I. La **série de fonctions de terme général** u_n est la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

On dit que la série de terme général u_n **converge normalement** si la série (numérique) de terme général $\left(\sup_{x\in I} |u_n(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exemple 3.1.15. *Soit R un réel strictement positif. La série de fonctions de terme général u_n, où pour tout n dans $\mathbb{N}$, u_n est définie sur $[-R, R]$, par :*

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

converge normalement sur $[-R, R]$.

Proposition 3.1.16.

Si la série de terme général u_n converge normalement, alors la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction définie pour tout x dans I par :

$$S_\infty(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

Exemple 3.1.17. *La suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

converge uniformément vers la fonction exponentielle.

III. 2 Continuité et convergence

Théorème 3.2.1.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I, f_∞ la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et x_0 un élément de I. Si

1) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f_∞,

2) pour tout n dans $\mathbb{N}$, f_n est continue en x_0,

alors f_∞ est continue en x_0.

Corollaire 3.2.2.

La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue. Autrement dit, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur I qui converge uniformément vers une fonction f_∞ sur I, alors f_∞ est continue.

Remarque 3.2.3. On déduit du corollaire ci-dessus que si une suite de fonctions **continues** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f_∞ qui **n'est pas continue**, alors la convergence n'est pas uniforme.

Exemple 3.2.4. *Étude de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0; +\infty[$ par :*

$$f_n(x) = \left(\frac{x^3 + x}{x + \frac{1}{n}}\right) e^{-x}.$$

Corollaire 3.2.5.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I. Si la série de fonctions de terme général u_n converge normalement alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} S_\infty & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x). \end{array}$$

est continue sur I.

Exemple 3.2.6. *La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.*

III. 3 Intégration et convergence

Théorème 3.3.1.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un segment $[a;b]$. Si

1) les fonctions f_n sont continues sur $[a;b]$,

2) la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f_∞,

alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f_\infty(x)dx.$$

Remarque 3.3.2. On pourra utiliser la contraposée de ce résultat pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément.

Exemple 3.3.3. *Calcul de :*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x\left(1+\frac{1}{n}e^{-n\sqrt{x}}\right)dx.$$

Théorème 3.3.4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un segment $[a;b]$. Si

1) les fonctions u_n sont continues sur $[a;b]$,

2) la série de fonctions de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement,

alors la série de terme général $\left(\int_a^b u_n(t)dt\right)$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b u_n(t)dt = \int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(t)\right)dt.$$

III. 4 Dérivation et convergence

Théorème 3.4.1.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un segment I. Si

1) les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

2) la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f_∞ sur I,

3) la suite fonctions $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une certaine fonction g_∞,

alors la fonction f_∞ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f_\infty' = g_\infty$.

Rappel 3.4.2. Soit f une fonction définie sur I. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si elle est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I. En particulier, f est continue sur I.

Remarque 3.4.3. Attention : Il existe des suites de fonctions dérivables qui convergent uniformément vers une fonction qui n'est pas dérivable. Par exemple, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

Exemple 3.4.4. *Étude de la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

Théorème 3.4.5.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si :

1) la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur I,

2) la série de fonctions de terme général u_n' converge normalement sur I,

alors la fonction S_∞ définie sur I par $S_\infty(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout x dans I :

$$S_\infty'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x).$$

Exemple 3.4.6. *La fonction* $\exp$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et* $\exp' = \exp$.

Première partie
Exercices

I Exercices sur les intégrales généralisées

Exercice 1.1. *Étudier la nature des intégrales généralisées suivantes. On donnera leur valeur dans le cas où elles convergent.*

1) I.G. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^3}dx$,

2) I.G. $\displaystyle\int_1^{+\infty} ue^{u^2+2}du$,

3) I.G. $\displaystyle\int_{-\ln(2)}^{+\infty} \frac{e^y}{(e^y+2)^2}dy$,

4) I.G. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^5e^{-t^3}dt$.

Exercice 1.2. *Soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$ continue et positive. Montrer que si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ avec $l \neq 0$, alors I.G. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ diverge.*

Exercice 1.3. *Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes, éventuellement en fonction du paramètre réel α :*

1) I.G. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$,

2) I.G. $\displaystyle\int_0^{1} \ln(\sin(t))dt$,

3) I.G. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \sqrt{x^2+4x}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\sin^2\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$,

4) I.G. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(u)}{u^2+1}du$,

5) I.G. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin(t)-t}{t^\alpha}dt$,

6) I.G. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^\alpha}dt$.

Exercice 1.4. *Soit a et b deux réels. On s'intéresse à la nature de l'intégrale généralisée $I_{a,b}$ avec :*

$$I_{a,b} = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a \ln(t)^b}.$$

1) On suppose $a \neq 1$. Utiliser le critère de Riemann pour déterminer la nature de $I_{a,b}$.

2) On suppose $a = 1$. Soit R dans $[2; +\infty[$, calculer :

$$\int_2^{R} \frac{dt}{t^a \ln(t)^b}.$$

En déduire la nature de $I_{a,b}$.

Exercice 1.5. *Soit α un réel. On s'intéresse à I.G. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$.*

1) Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha e^{-t/2}$.

2) En déduire qu'il existe un réel A tel que pour tout $t \geqslant A$,

$$t^\alpha e^{-t} \leqslant e^{-t/2}.$$

3) Déterminer la nature de I.G. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt$ et déduire celle de I.G. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$.

II Exercices sur les séries

Exercice 2.1. *On s'intéresse à la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ avec pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{1}{n^2-1}$.*

1) Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{n^2-1}$.

2) En déduire, pour tout $n \geqslant 2$ une expression de la somme partielle d'ordre n :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k.$$

3) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$.

Exercice 2.2. *Étudier la limite du terme général des séries suivantes et en déduire leur nature :*

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \cos(n)$,

2) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$,

3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2+3n-1}{2n+1}$,

4) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{\pi+k^{-2}}$.

Exercice 2.3. *Déterminer la nature de la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 2.4. *Déterminer pour quelle valeurs de* a *dans* $[0;+\infty[$*, la série de terme général :*

$$u_n = \frac{a^n}{1+a^{2n}}$$

est convergente.

Indication : On pourra distinguer les cas $a<1$, $a=1$ et $a>1$.

Exercice 2.5. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée de réels.*

1) Montrer que si q *est dans* $[0;1[$*, alors* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n q^n$ *converge.*

2) Que peut-on dire si que $q \geqslant 1$ *?*

Exercice 2.6. *Après avoir justifier leur existence, calculer les sommes suivantes :*

1) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n$

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{(n-1)!}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Exercice 2.7. *Lors d'une course, une tortue a* 10 *mètres d'avance sur un lièvre. À chaque fois que le lièvre arrive là où était la tortue, celle ci a avancé des trois quart de la distance qui les séparaient précédemment.*
Le lièvre rattrapera-t-il la tortue ? Si oui, après avoir parcouru quelle distance ?
On répondra à cette question de deux façon, avec une série, et sans.

Exercice 2.8. *Utiliser le critère de comparaison ou le critère sur les équivalents pour étudier la nature des séries suivantes*

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$,

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+1}{(n^3+2)(\sqrt{n}+2)}$,

3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3+2^n}{n^2+3^n}$,

4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

5) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$,

6) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 2.9. *Utiliser le critère de Riemann pour étudier la nature des séries suivantes.*

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{4}{n^{3/2}}\right)$,

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$,

3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$,

4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Exercice 2.10. *Utiliser le critère de D'Alembert pour étudier la nature des séries suivantes.*

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{n!3^n}$

2) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k^2\frac{3^k}{4^k}$

3) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(\ln(k))^k}{k!}$

4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^\alpha}$.

Indications : On pourra penser à utiliser T.A.F. pour obtenir un encadrement dans la troisième. Pour la quatrième, on discutera selon la valeur de α.

Exercice 2.11. *En utilisant le critère sur les séries alternées, montrer que la série de terme général* $u_n = (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{\ln(n+2)}\right)$ *converge.*

Exercice 2.12. *On considère une série* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *avec* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite réelle décroissante positive. On va démontrer le critère de condensation de Cauchy :*

La série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *converge si et seulement si la série* $\sum_{n\geqslant 0} 2^n a_{2^n}$ *converge.*

Si ces deux séries convergent, en notant S *et* T *leur somme respective, on a* $S \leqslant T \leqslant 2S$.

Dans la suite, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *et* $T_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$.

1) *Montrer que* $S_7 \leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 = T_2$ *et* $2S_4 \geqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 = T_2$.

2) *En généralisant, montrer que pour tout* $n \geqslant 1$, $S_{2^{n+1}-1} \leqslant T_n$ *et* $2S_{2^n} \geqslant T_n$.

3) *En déduire le critère de condensation.*

4) *Application : on considère la série de Riemann* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *pour* $\alpha > 0$ *(on suppose qu'on ne connaît pas la nature de cette série).*
Vérifier les hypothèses du critère de condensation et montrer que la série de Riemann converge si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} (2^{1-\alpha})^n$ *est convergente.*
En déduire la nature de la série de Riemann selon les valeurs de α.

5) *De la même façon, pour* $\alpha > 0$, *étudier la nature de la série de Bertrand* $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)^\alpha}$.

Exercice 2.13. *Soit deux séries numériques de termes généraux définis par :*

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

1) *Montrer que la série* $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ *est convergente.*

2) *On pose* $w_n = u_n - v_n$, *pour* $n \geqslant 2$. *Quelle est la nature de la série numérique* $\sum_{n\geqslant 2} w_n$ *?*

3) *En déduire la nature de la série* $\sum_{n\geqslant 2} v_n$.

Exercice 2.14. *On considère la série de terme général* u_n *avec :*

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

1) Justifier l'existence d'une fonction ε *telle que pour tout* n *dans* $\mathbb{N}^*$ *:*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{3n^{3/2}} + \frac{1}{n^{3/2}}\varepsilon(n),$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$.

2) Déterminer la nature des séries :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{3n^{3/2}}.$$

3) Justifier l'existence d'un entier non nul n_0 *tel que pour tout* $n \geq n_0$ *:*

$$\varepsilon(n) \leqslant 1.$$

En déduire la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}\varepsilon(n)$.

4) Déduire des questions précédentes la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

Exercice 2.15. *Déterminer la nature de la série de général* u_n *avec :*

1) $u_n = \ln(1 + e^{-n})$

2) $u_n = ne^{1/n} - n$

3) $u_n = \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2}$

4) $u_n = \left(\dfrac{3n}{5n+1}\right)^n$

5) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2 + \cos^2(n)}$

6) $n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{n^{1/2}}\right)$

Exercice 2.16. *Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux. On donnera une preuve ou un contre-exemple selon les cas :*

1) *Si la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge, alors la série* $\sum_{n\geqslant 0} nu_n$ *converge.*

2) *Si la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge, alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas vers* 0.

3) *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de réels positifs telle que* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge, alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ *converge également.*

III Exercices sur les suites de fonctions

Exercice 3.1. *Parmi les suites de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies sur* I *suivantes, lesquelles convergent simplement ?*

1) $I = [0;1]$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$.

2) $I = [0;1]$, $f_n(x) = nx$.

3) $I = \mathbb{R}$, $f_n(x) = 2e^x$.

4) $I = \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{nx}$.

5) $I = \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-nx}$.

6) $I = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^2 - nx}{n}$.

Exercice 3.2. *Soit* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *la suite de fonctions définies sur* $I = [0;+\infty[$ *par :*

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n}.$$

1) *Soit* x_0 *dans* $[0;+\infty[$. *Déterminer la nature de la suite* $(f_n(x_0))_{n\geqslant 1}$.

2) *En déduire que* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *converge simplement vers une fonction* f_∞ *qu'on précisera.*

3) *Pour* n *dans* $\mathbb{N}^*$, *étudier les variations de* f_n *sur* I.

4) *Étudier la suite de réels* $(f_n(n))_{n\geqslant 1}$.

5) *La suite* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *converge-t-elle uniformément vers* f_∞ *?*

Exercice 3.3. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I qui converge simplement vers f_∞.*

1) Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante, alors f_∞ est croissante.

2) Que peut-on dire si on suppose que les f_n sont strictement croissantes ?

Exercice 3.4. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0;1]$ par :*

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}.$$

Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers une fonction f_∞ qu'on précisera.
A-t-on convergence uniforme sur $[0;1]$? $]0;1]$? $[a;1]$ avec $a > 0$?

Exercice 3.5. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[0;1]$ qui converge uniformément vers f_∞. On suppose que f_∞ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe M dans $[0;+\infty[$ tel que pour tout x dans $[0;1]$,*

$$|f_\infty(x)| \leqslant M.$$

1) En donnant un contre exemple, montrer que les fonctions f_n ne sont pas nécessairement bornées.

2) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, f_n est bornée.

Exercice 3.6. *On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $[0;1]$ par :*

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x}.$$

1) Calculer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On la notera f_∞.

2) Montrer que pour tout x dans $[0,1]$:

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leqslant \left|\frac{e^{-x} - x}{n+x}\right|,$$

puis que

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leqslant \frac{2}{n}.$$

3) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément vers f_∞ ?

Exercice 3.7. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0;1]$ par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si} \quad x \in \left[0;\dfrac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Étudier la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$.

3) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément ?

4) Étudier la convergence uniforme sur $[a;1]$ avec $a > 0$.

Exercice 3.8. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définie sur $I = [0;1]$ par :*

$$f_n(x) = x^n\sqrt{1-x^2}.$$

1) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, étudier la fonction f_n (continuité, dérivabilité et variations).

2) Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction nulle.

3) Étudier la convergence uniforme.

Exercice 3.9. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies sur $I = [0;1]$, continues, positives et décroissantes. On suppose que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur I, notée f_∞. Montrer que la convergence est uniforme.*

Exercice 3.10. *Soit g une fonction définie et continue sur $[0;+\infty[$ telle que $g(0) = 0$ et pour tout $x > 0$, $g(x)$. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $[0;+\infty[$ par :*

$$g_n(x) = \frac{ng(x)}{ng(x)+1}.$$

Montrer que $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers une fonction g_∞ mais que $(g_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément vers g_∞.