

THEORIE DE L'INFORMATION

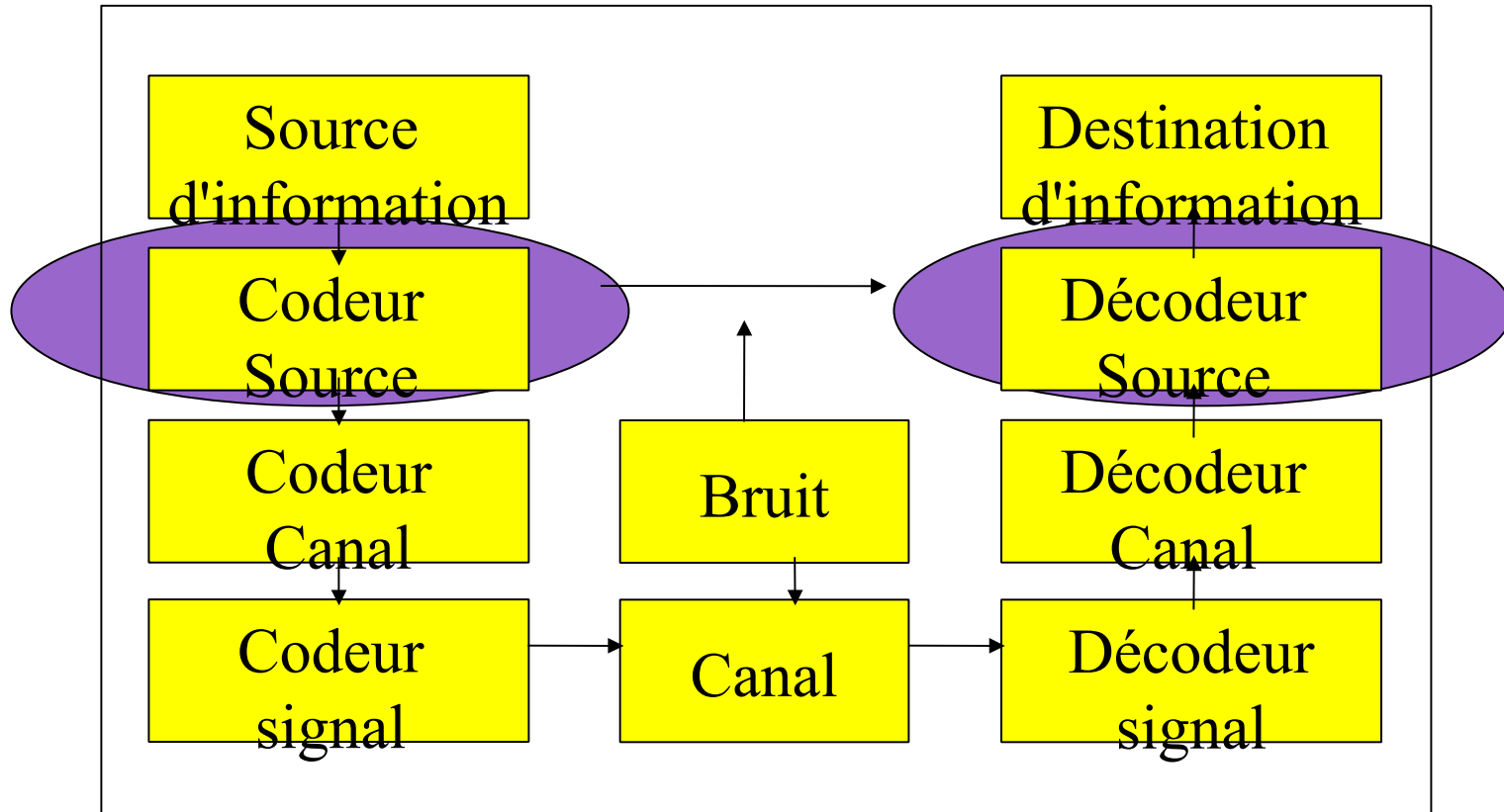
chapitre 2

Codage source

jp.guédon

INFO 3

Théorie de l' Information



2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.1. Définitions relatives au codage

- **2.1.1 Codage et décodage**
- **2.1.2 Débit**
- **2.1.3 Efficacité**
- **2.1.4 Redondance**
- **2.1.5 Exemples**

2.2. Algorithmes de codage entropique

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

Le codage de l'information consiste à exprimer les messages d'une source grâce à un alphabet particulier. L'objectif est multiple :

- - **transcrire l'information** pour une meilleure manipulation en fonction des applications envisagées. Exemple du numéro INSEE pour les applications médicales.
- - **réduire la quantité** de symboles à transmettre

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

- - **réduire la quantité** de symboles à transmettre
- - **prévenir les dégradations** (distorsions et bruits du canal) en optimisant la décision sur un symbole à la destination
- - **sécuriser** la transmission des informations (secret) pour la rendre inintelligible excepté au destinataire possédant le code

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

- **Codage** : soit un alphabet A formé de q caractères $A = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ et un ensemble de messages d'une source $S = \{m_1, m_2, \dots, m_N\}$.

Un code est une application de S dans A .

- L'élément M_i de A qui correspond à m_i est appelé le mot-code de m_i .
- Sa longueur l_i est le nombre de caractères qui le forment.
- Une suite de messages est appelé un texte.

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

- **Exemple:**

$S = \{m_1, m_2\}$, $A = \{0, 1\}$, on forme deux codes :

$C_1 = \{m_1 \rightarrow 0; m_2 \rightarrow 1\}$, $C_2 = \{m_1 \rightarrow 0, m_2 \rightarrow 10\}$

Messages $m_1 m_2$

C_1 0 1

Messages $m_1 m_1 m_1 m_2 m_2 m_1 m_2 m_2$

C_2 00 010 100 1010

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

- **Codage en blocs:**

un code en blocs est aussi une application mais de S^k dans A .

La différence est que l'on affecte à une suite de k messages un seul mot-code.

Exemple : suite binaire $S = \{0,1\}$ $A =$ entiers

0000 11 00000 1111 0 11 \Rightarrow 4 2 5 4 1 2

10000 11 00000 1111 0 11 \Rightarrow 0 1 4 2 5 4 1 2

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.1.2 Débit

Comme on peut le voir dans l'exemple précédent le nombre de caractères d'un mot-code dépend de celui-ci. On veut maintenant caractériser l'information moyenne transportée par un codage.

$l_i = \text{long}(M_i)$ est le nombre de caractères de A utiles pour le codage de m_i .

Si la source S utilise N messages différents, la longueur moyenne est calculée par :

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.1.2 Débit

$l_i = \text{long}(M_i)$ est le nombre de caractères de A utiles pour le codage de m_i avec $p_i = \Pr\{m=m_i\}$,
si la source S utilise N messages différents, la longueur moyenne est calculée par :

$$L = \sum_{i=1}^N p(a_i) l_i \text{ bit/symbole}$$

2.1.2 Débit

source	a1	a2	a3	a4	a5	a6
prob	1/2	1/8	1/8	1/8	1/16	1/16
Code 1	000	001	010	011	100	101
Code 2	0	100	101	110	1110	1111

Calculer l'entropie de la source avec les 6 symboles

Calculer la longueur moyenne de chacun des 2 codes

$$H(A) = \sum_{i=1}^6 p(a_i) \log_2 \left(\frac{1}{p(a_i)} \right) \text{ bit/symbole}$$

solution

$$H(A) = \frac{1}{2} \log_2(2) + 3 \left(\frac{1}{8} \log_2(8) \right) + 2 \left(\frac{1}{16} \log_2(16) \right) \text{ bit/symbole}$$

$$L_1 = \sum_{i=1}^N p(a_i) l_i \text{ bit/symbole}$$

solution

$$L_1 = \frac{1}{2} \times 3 + 3 \left(\frac{1}{8} \times 3 \right) + 2 \left(\frac{1}{16} \times 3 \right) \text{ bit/symbole}$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \times 1 + 3 \left(\frac{1}{8} \times 3 \right) + 2 \left(\frac{1}{16} \times 4 \right) \text{ bit/symbole}$$

$$L_1 = \sum_{i=1}^N p(a_i) l_i \text{ bit/symbole}$$

solution

$$H(A) = 2 + \frac{1}{8} \text{ bit/symbole}$$

H et L s'expriment
dans la même unité
(sont comparables)

$$L_1 = 3 \text{ bit/symbole}$$

$$L_2 = 2 + \frac{1}{8} \text{ bit/symbole}$$

H ne dépend pas du code
 $H \leq L$

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.1.2 Débit

L'entropie par caractère est donc égale à

$$\frac{H(S)}{L} \text{ bit/caractère}$$

On se rappelle aussi que l'entropie est bornée et puisqu'on a q caractères dans A :

$$0 \leq \frac{H(S)}{L} \leq \log_2 q$$

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.1.2 Débit

La longueur moyenne par caractère L est donc **BORNEE** par :

$$\frac{H(S)}{\log_2 q} \leq L$$

D'autre part, si la source produit D caractères par seconde, le débit d'information exprimé en bit/ seconde est :

$$R = D \cdot \frac{H(S)}{L}$$

Remarques

1) plus L est petit (H étant donné par la source), plus le débit d'information est important

2) la limitation minimum sur L induit :

$$R \leq D \cdot \log_2 q$$

2.1.4 Redondance

La redondance est utilisée pour accroître la robustesse aux erreurs de transmission des codes (cf. théorie des codes détecteurs / correcteurs). Elle est définie par :

$$\text{red} = 1 - \text{eff} = 1 - \frac{H(S)}{L \cdot \log_2(q)}$$

Donc plus un code est efficace (en termes de transmission) moins il est redondant (robuste).

2.1.4 Redondance

Où est le compromis entre efficacité et redondance ?

Il dépend essentiellement du médium de transmission et du taux d'erreurs binaires de celui-ci et aussi du ou des protocoles supportés au-dessus.

Des valeurs classiques de redondance utilisées au niveau du codage canal radioélectrique sont $1 \square 2$, $2 \square 3$, $3 \square 4$ ce qui veut dire 2 bits envoyés pour 1 créé par le codeur source (ou bien 3 pour 2, ou 4 pour 3).

2.1.3 Efficacité

Pour un alphabet A associé à une source S de code C , l'efficacité est le rapport :

$$eff = \frac{\min L}{L}$$

Ce minimum est donné par :
ce qui fait

$$\min L = \frac{H(S)}{\log_2(q)}$$

$$eff = \frac{H(S)}{L \cdot \log_2(q)}$$

Remarque : par définition $0 \leqslant eff \leqslant 1$

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.1.5 Exercice

La source S produit 4 sortes de messages de probabilités respectives telles qu'indiquées dans le tableau suivant:

Calculer l'entropie de cette source.

Messages	m1	m2	m3	m4
proba	1/2	1/4	1/8	1/8
C1	00	01	10	11
C2	0	10	110	111

pour les deux codes $C1$ et $C2$, calculer la longueur moyenne et en déduire l'efficacité et la redondance.

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.1.5 Exemples

La source S produit 4 sortes de messages de probabilités respectives telles qu'indiquées dans le tableau suivant:

$$H(S) = \frac{1}{2} \log_2(2) + \frac{1}{4} \log_2(4) + 2 \cdot \frac{1}{8} \log_2(8) = 1.75 \text{ bit/symbole}$$

Messages	m1	m2	m3	m4
proba	1/2	1/4	1/8	1/8
C1	00	01	10	11
C2	0	10	110	111

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.1.5 Exemples

La source S produit 4 messages

$H(S) = 1.75$ bit/symbole

Messages	m1	m2	m3	m4
proba	1/2	1/4	1/8	1/8
C1	00	01	10	11
C2	0	10	110	111

$$eff_1 = \frac{H(S)}{L \cdot \log_2(q)} = \frac{1.75}{2} = 87.5\% \quad \text{red}_1 = 1 - eff_1 = 22.5\%$$

$$eff_2 = \frac{H(S)}{L \cdot \log_2(q)} = \frac{1.75}{1.75} = 100\% \quad \text{red}_2 = 1 - eff_0 = 0\%$$

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.1.5 Autres exemples

La source S produit 4 messages $H(S) = 1.75$

Messages	m1	m2	m3	m4
proba	1/2	1/4	1/8	1/8
C3	00	00	10	11
C4	0	1	11	01

C3 n'est pas un code régulier (m1 et m2 même codage).

C4 est régulier mais peut être ambigu à la lecture :

111 \Rightarrow m2m3 ou m3m2, 01 \Rightarrow m1m2 ou m4 ?

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur fixe

Toute personne résident en France possède un code sur 13 caractères ce qui est finalement peu pour nous résumer!

L'immense avantage qu'en tire tout traitement est évident. Cette opération est très générale dans tout secteur de traitement de données textuelles, images, vidéo ou sonores.

Le plus connu : code ASCII

Utile pour les couches basses des réseaux (plus de sémantique) => utilisation de la redondance.

2.2. Codage de longueur variable

S'il fallait que tous les mots du dictionnaire possèdent le même nombre de lettres on n'en finirai pas et cela prendrait sans doute pas mal de place! Il y a donc des cas de figure ou il vaut mieux procéder par des code de longueur variable.

Le principe est alors simple le mot code qui revient le plus souvent doit pouvoir être codé avec le plus faible nombre de bits alors qu'il sera possible d'utiliser plus de bits pour un mot rare (au sens de l'entropie).

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable

2.2.1. Principe

À partir d'un ensemble de mots et de leurs probabilités respectives on veut associer des codes binaires dont la longueur sera inversement proportionnelle à la probabilité.

On veut donc trouver un codage de

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_S\}$ et $\text{Proba} = \{p(a_1), \dots, p(a_S)\}$

vers $\text{Code} = \{c_1, c_2, \dots, c_S\}$ et $\text{Long} = \{l_1, l_2, \dots, l_S\}$

Le décodage est l'opération inverse de A vers Mots

La longueur du code est alors:

$$L = \sum_{i=1, S} p(a_i) l_i \text{ bit/symbole}$$

2.2. Codage de longueur variable

Théorème Shannon (1948) :

Pour des codes binaires, on peut approcher L aussi proche que l'on veut par $H(A)$

(En fait on a : $H(A) \leq L \leq H(A)+1$)

$$L = \sum_{i=1, S} p(a_i) l_i \text{ bit/symbole}$$

$$H(A) = E \{ I_N(A) \} = - \sum_{i=1, S} p(a_i) \log_2(p(a_i)) \text{ bit/symbole}$$

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable

Théorème:

Pour des codes binaires, on peut approcher L aussi proche que l'on veut par $H(A)$

Donc il suffit de trouver un algorithme de codage optimal (le théorème ne dit pas comment faire pour trouver cet algorithme...)

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

A partir de maintenant, nous partons à la pêche au bon algorithme de codage

Pour comparer, on prend la source A suivante:

ai	1	2	3	4	5	6	7
p(ai)	0.44	0.19	0.18	0.07	0.07	0.03	0.02

Son entropie est égale à $H = ?$

$$H(A) = E \{ I_N(A) \} = - \sum_{i=1, S} p(a_i) \log_2(p(a_i)) \text{ bit/symbole}$$

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

$$H(A) = E \{ I_N(A) \} = - \sum_{i=1, S} p(a_i) \log_2(p(a_i)) \text{ bit/symbole}$$

Pour la source A

$$H(A) = - \{ 0,44 \log_2(0,44) + 0,19 \log_2(0,19) + 0,18 \log_2(0,18) + 2 \times 0,07 \log_2(0,07) + 0,03 \log_2(0,03) + 0,02 \log_2(0,02) \} \text{ bit/symbole}$$

a _i	1	2	3	4	5	6	7
p(a _i)	0.44	0.19	0.18	0.07	0.07	0.03	0.02

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

Pour la source A

$$H(A) = - \{ 0,44 \log_2(0,44) + 0,19 \log_2(0,19) + 0,18 \log_2(0,18) + 2 \times 0,07 \log_2(0,07) + 0,03 \log_2(0,03) + 0,02 \log_2(0,02) \} \text{ bit/symbole}$$

En utilisant $\log_2(x) = \log_a(x) / \log_a(2)$ (ici $a=e$)

$$\text{on a } H(A) = (-1/\ln(2)) \{ 0,44 \ln(0,44) + 0,19 \ln(0,19) + 0,18 \ln(0,18) + 2 \times 0,07 \ln(0,07) + 0,03 \ln(0,03) + 0,02 \ln(0,02) \} \text{ bit/symbole}$$

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

Pour la source A

on a $H(A) = (-1/\ln(2)) \{0,44 \ln(0,44) + 0,19 \ln(0,19) + 0,18 \ln(0,18) + 2 \times 0,07 \ln(0,07) + 0,03 \ln(0,03) + 0,02 \ln(0,02)\}$

$$H(A) = (1/\ln(2)) \{0,361 - 0,19 \ln(0,19) - 0,18 \ln(0,18) - 2 \times 0,07 \ln(0,07) - 0,03 \ln(0,03) - 0,02 \ln(0,02)\}$$
$$H(A) = (1,443) \{0,361 + 0,3155 + 0,3087 + 2 \times 0,186 + 0,105 + 0,078\}$$
$$H(A) = (1,443) \times 1,5402 = 2,223 \text{ bit/symbole}$$

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

- Codage à virgule

De la même façon qu'une virgule sépare deux propositions, ici la "virgule" va séparer deux mots : c'est ainsi que l'on se rends compte que le premier est fini et que le second débute.

Le but est alors de rester plus robuste à l'erreur binaire qui intervient si souvent... Ceci simplement parce que même si l'on manque une virgule le reste du texte est encore compréhensible (on a perdu deux mots).

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

- Codage à virgule

On met en œuvre en codant par exemple « 0 »
pour la virgule

« 0 » pour le code de plus grande probabilité

« 10 » pour le suivant

« 110 » pour le suivant

Etc.

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable: Codage à virgule

Exemple:

ai	p(ai)	code(ai)	ai	p(ai)	code(ai)
1	0.44	0	5	0.07	11110
2	0.19	10	6	0.03	111110
3	0.18	110	7	0.03	1111110
4	0.07	1110			

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable: Codage à virgule

Exemple source caractérisée par son entropie $H=2,223$:

ai	p(ai)	code(ai)	ai	p(ai)	code(ai)
1	0.44	0	5	0.07	11110
2	0.19	10	6	0.03	111110
3	0.18	110	7	0.03	1111110
4	0.07	1110			

Avec ce codage, on obtient une longueur moyenne

$$L=0,44+0,19 \times 2+0,18 \times 3+0,07(4+5)+0,03 \times 6+0,02 \times 7$$

$$L= 0,44+0,38+0, 54 +0,63 +0,18+0,14$$

$$L= 0,82 +1,17 +0,32$$

$$L = 2,31 \text{ bit/symbole}$$

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable: Codage à virgule comparaison avec codage longueur fixe

ai	p(ai)	code(ai)	ai	p(ai)	code(ai)
1	0.44	0	5	0.07	11110
2	0.19	10	6	0.03	111110
3	0.18	110	7	0.03	1111110
4	0.07	1110			

Avec ce codage, on obtient une longueur moyenne :

$$L_{\text{fixe}} = 3 \times (0,44 + 0,19 + 0,18 + 0,07 + 0,07 + 0,03 + 0,02)$$

$$L_{\text{fixe}} = 3 \times 1 = 3$$

à comparer avec $L = 2,31$ pour le code à virgule

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

- Codage à virgule

Exemple

Pour la source caractérisée par son entropie

$H=2,223$ bit/symbole

et par un codage virgule avec $L = 2,31$ bit/symbole

Rappel du théorème de Shannon :

$H=2,223 \leq L=2,31 \leq 3,223=H+1$

On est déjà proche de la limite!

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable: Codage virgule « G »

Dans le code à virgule, pas très efficace sur la longueur des li: on modifie l'algo pour ne pas avoir de code avec deux « 1 » à suivre, on commence un code par un « 1 » et on met un « 1 » pour faire la virgule

Les codes vont donc être construit par la suite des codes ordonnés par proba:

s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8
1	101	100 1	100 01	101 01	100 001	100 101	101 001

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

Codage virgule « G »

Codage: soit la suite :s₁s₂s₁s₃s₁s₁s₂s₄...

On obtient la suite :1101110011110110101...

Décodage:

À chaque fois que l'on a 2 « 1 » à la suite, le premier est la fin du code précédent et le second commence le suivant:

1 □ 101 □ 1 □ 1001 □ 1 □ 1 □ 101 □ 10101
s₁s₂s₁s₃s₁s₁s₂s₄

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable: Codage virgule « G »

Comparaison virgule « G » avec virgule simple: on perd dans les premiers codes (s2,s3, et s4) mais on gagne ensuite pour tous les autres.

1	101	1001	10001	10101	100001
1	01	001	0001	00001	000001
100101	101001	1000001	1000101	1001001	1010001
0000001	00000001	000000001	0000000001	00000000001	000000000001

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable: Codage virgule « G »

Les codes virgule « G »:

1 101 1001 10001 10101 100001 100101 101001

Par construction, on ajoute les codes (sans la virgule) à partir d'une puissance de 2 jusqu'à la puissance de deux inférieure

1 10 100 1000

On ajoute à 10000, 10 puis 100
(ni le premier ni le dernier)

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable: Codage virgule « G »

Exemple:

ai	p(ai)	code(ai)	ai	p(ai)	code(ai)
1	0.44	1	5	0.07	10101
2	0.19	101	6	0.03	100001
3	0.18	1001	7	0.03	100101
4	0.07	10001			

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

Avec ce codage, on obtient une longueur moyenne

$$L = 0,44 + 0,19 \times 3 + 0,18 \times 4 + 0,07(5+5) + 0,03 \times 6 + 0,02 \times 6$$

$$L = 0,44 + 0,57 + 0,72 + 0,70 + 0,18 + 0,12$$

$$L = 1,01 + 1,42 + 0,30 \Rightarrow L = 2,73 \text{ bit/symbole}$$

$$H = 2,223 \leq L(\text{virgule}) = 2,31 < L(\text{virgule « G »}) = 2,73$$

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

Codage de Shannon-Fano (1949)

Comme on a vu : il faut mettre le moins de longueur sur les codes de plus grandes probas:

On repense à la définition de l'entropie : idée pour associer les codes dans un arbre binaire avec le parcours de la racine à la feuille.

La première façon de construire cet arbre est de partitionner les symboles en deux de sorte à avoir deux sous arbres équilibrés (dichotomie)

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable: Codage de Shannon-Fano

La première façon de construire cet arbre est de partitionner les symboles en deux de sorte à avoir deux sous arbres équilibrés

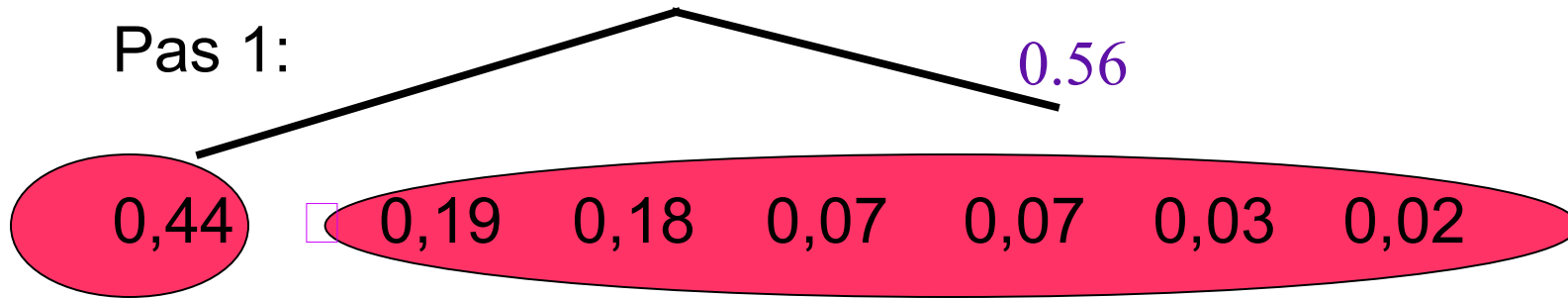
Exemple favori:

ai	1	2	3	4	5	6	7
p(ai)	0.44	0.19	0.18	0.07	0.07	0.03	0.02

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable: Codage de Shannon-Fano

Pas 1:



on sépare ici car le mieux équilibré

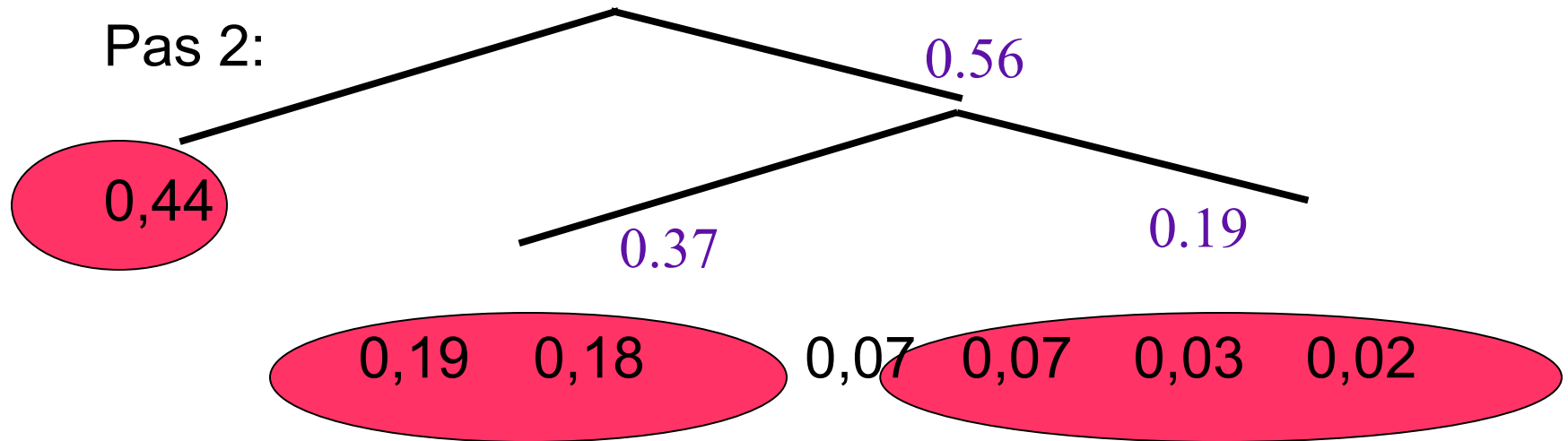
$(0,44 \leq 0,56)$ sinon $(0,44 + 0,19 \leq 0,56 - 0,19)$

Mais il faut aussi laisser l'ordre de décroissance des probabilités dans l'arbre (pour savoir où on a rangé les valeurs)

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable: Codage de Shannon-Fano

Pas 2:



$56/2=28$ soit 19 soit 37 donc pareil : $28-19=37-28$

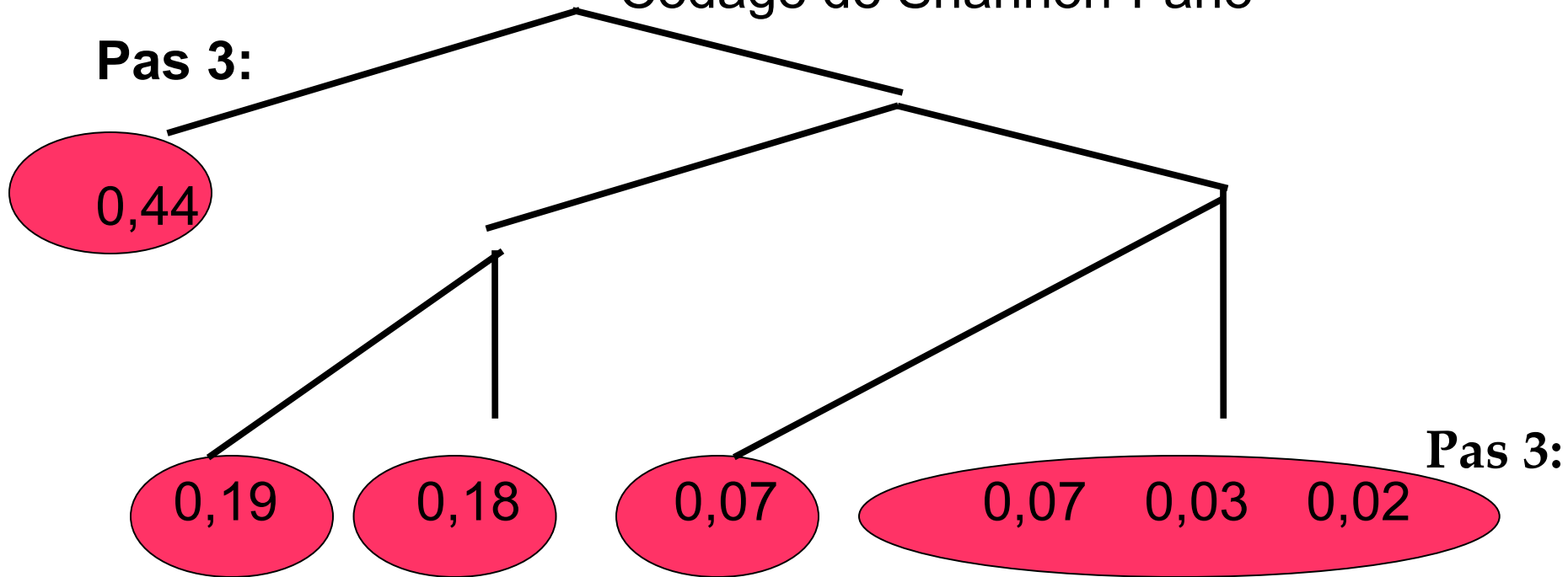
On choisit 37 car mieux équilibré (nb de feuilles)

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

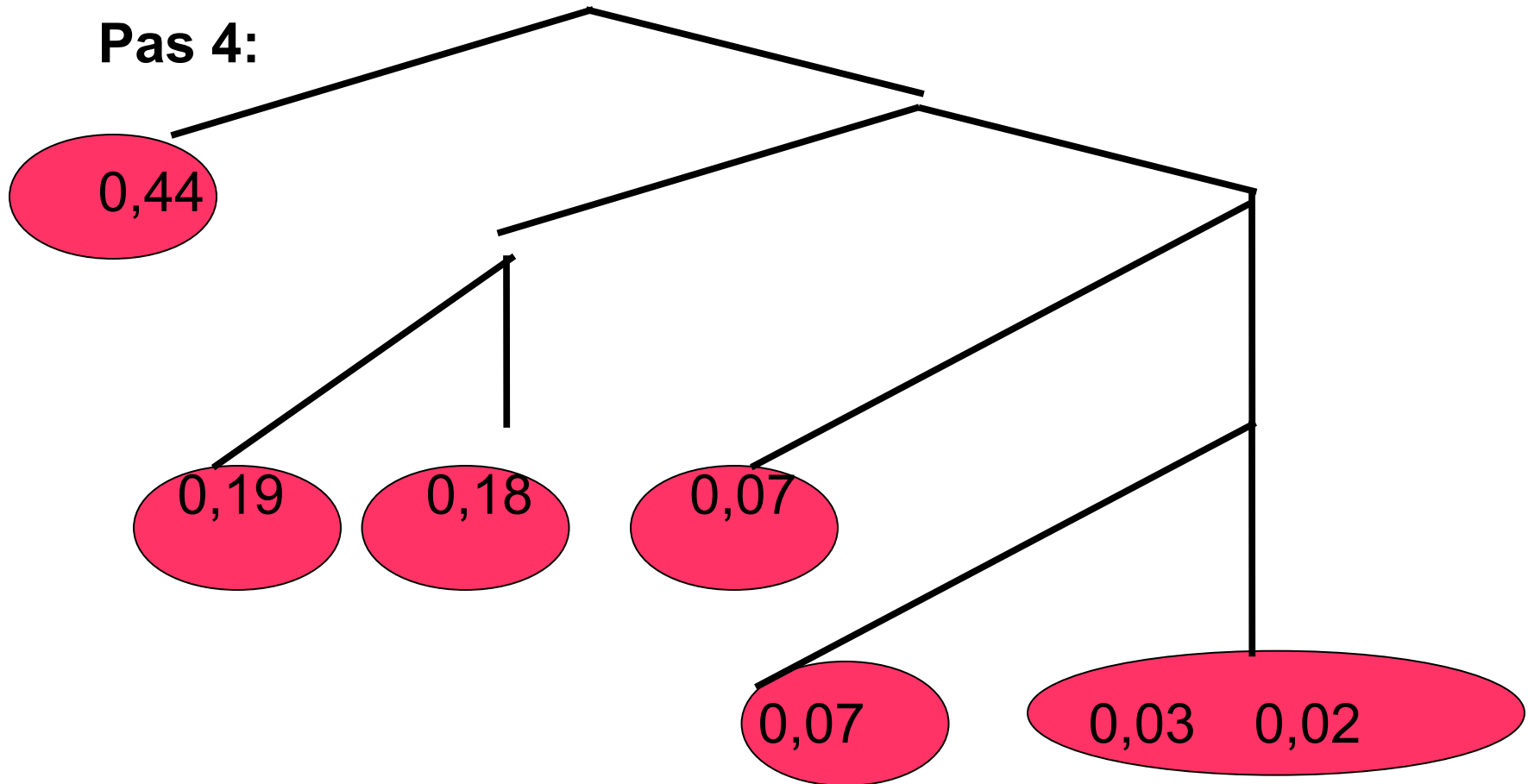
Codage de Shannon-Fano

Pas 3:



2.2. Codage de longueur variable: Codage de Shannon-Fano

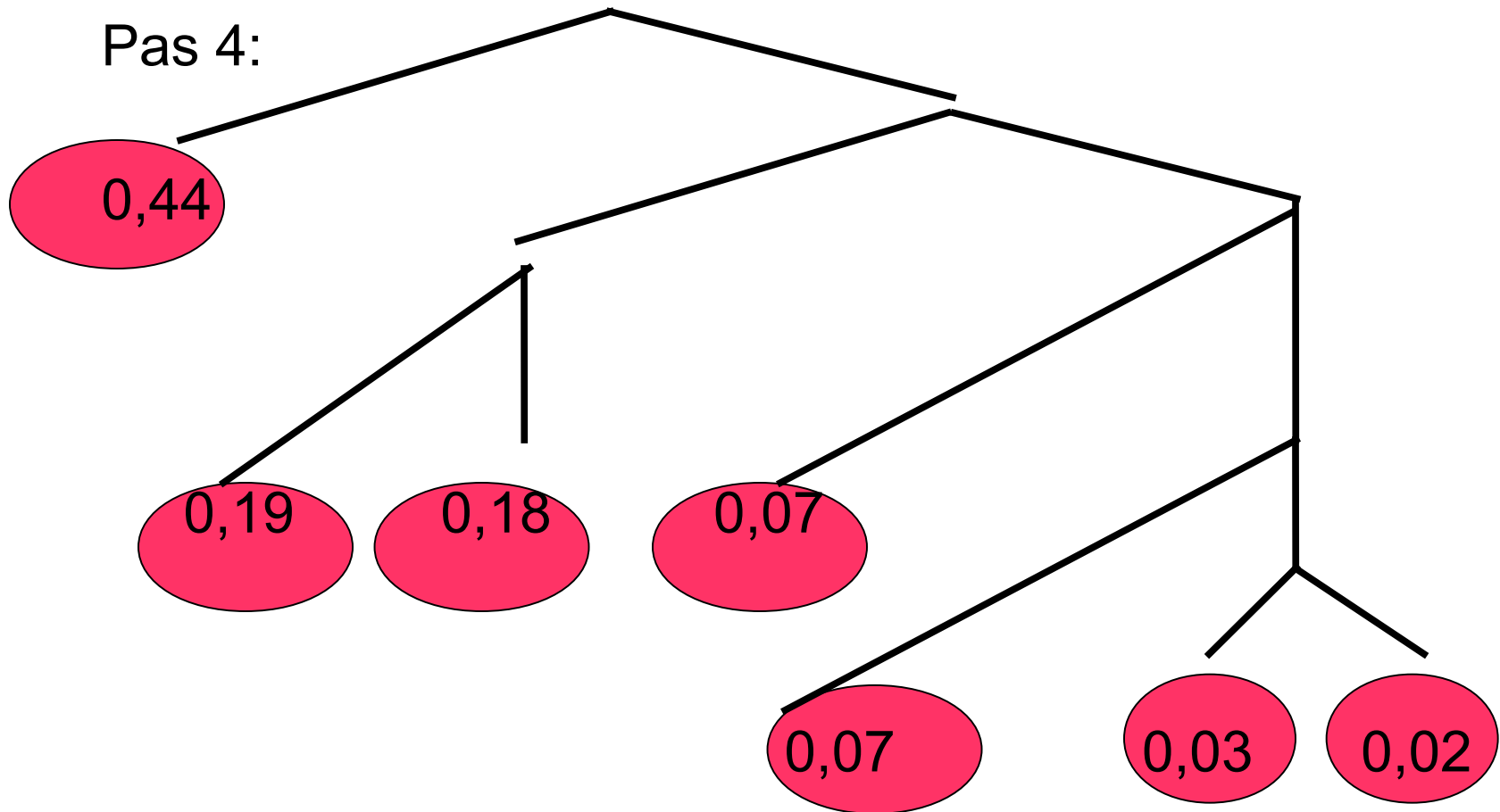
Pas 4:



2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

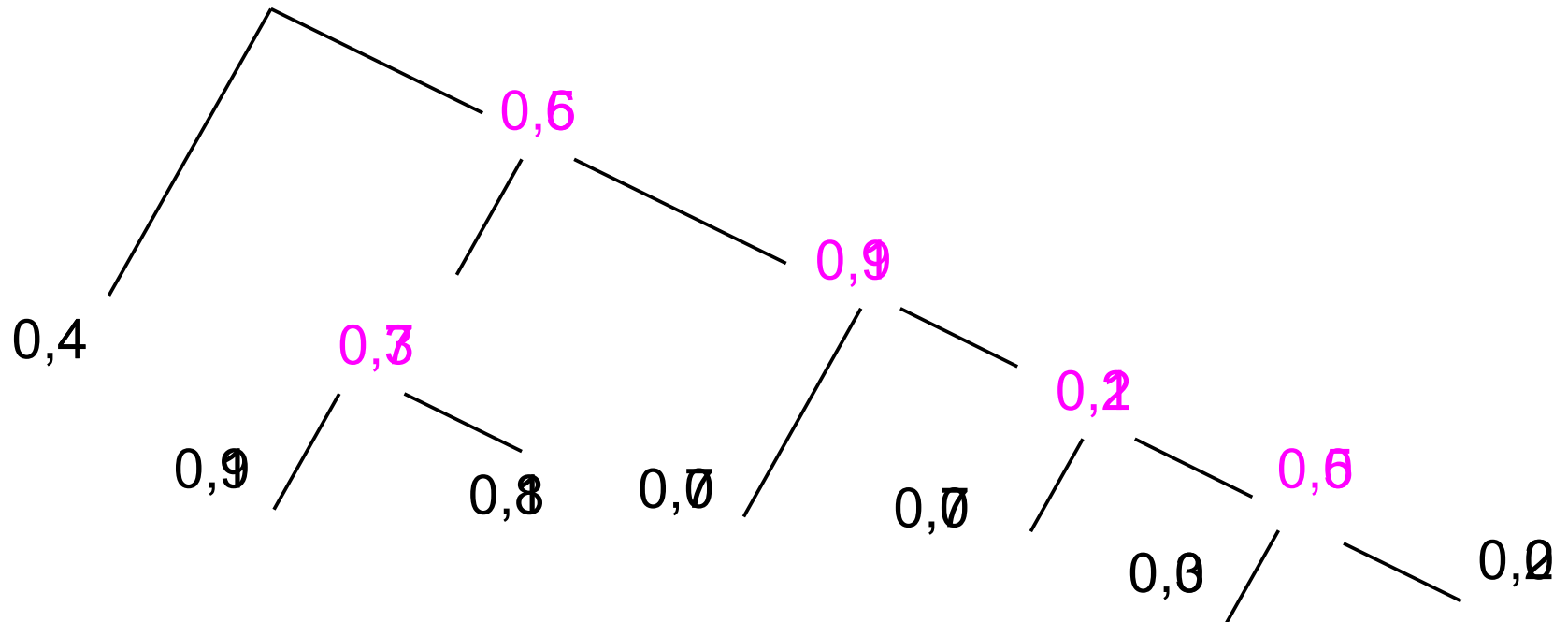
2.2. Codage de longueur variable: Codage de Shannon-Fano

Pas 4:



2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

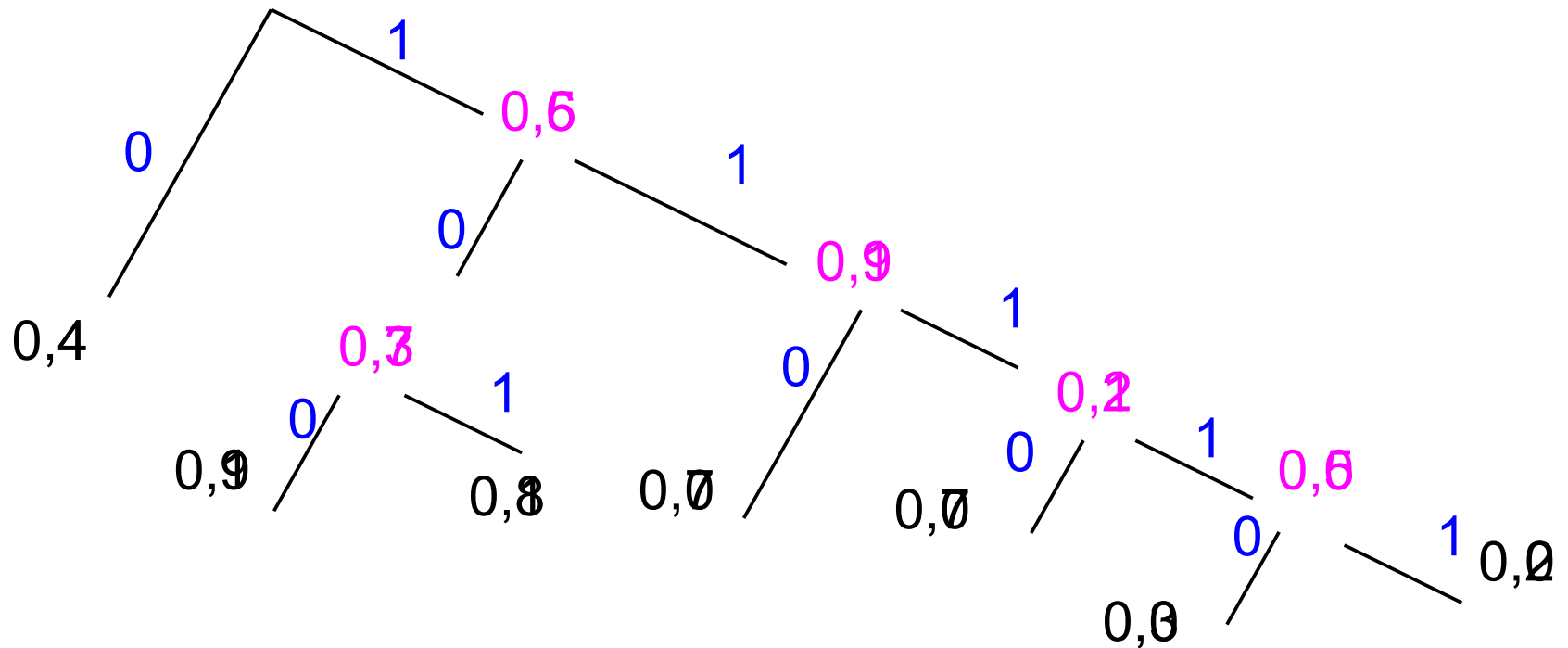
2.2. Codage de longueur variable: Codage de Shannon-Fano



2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

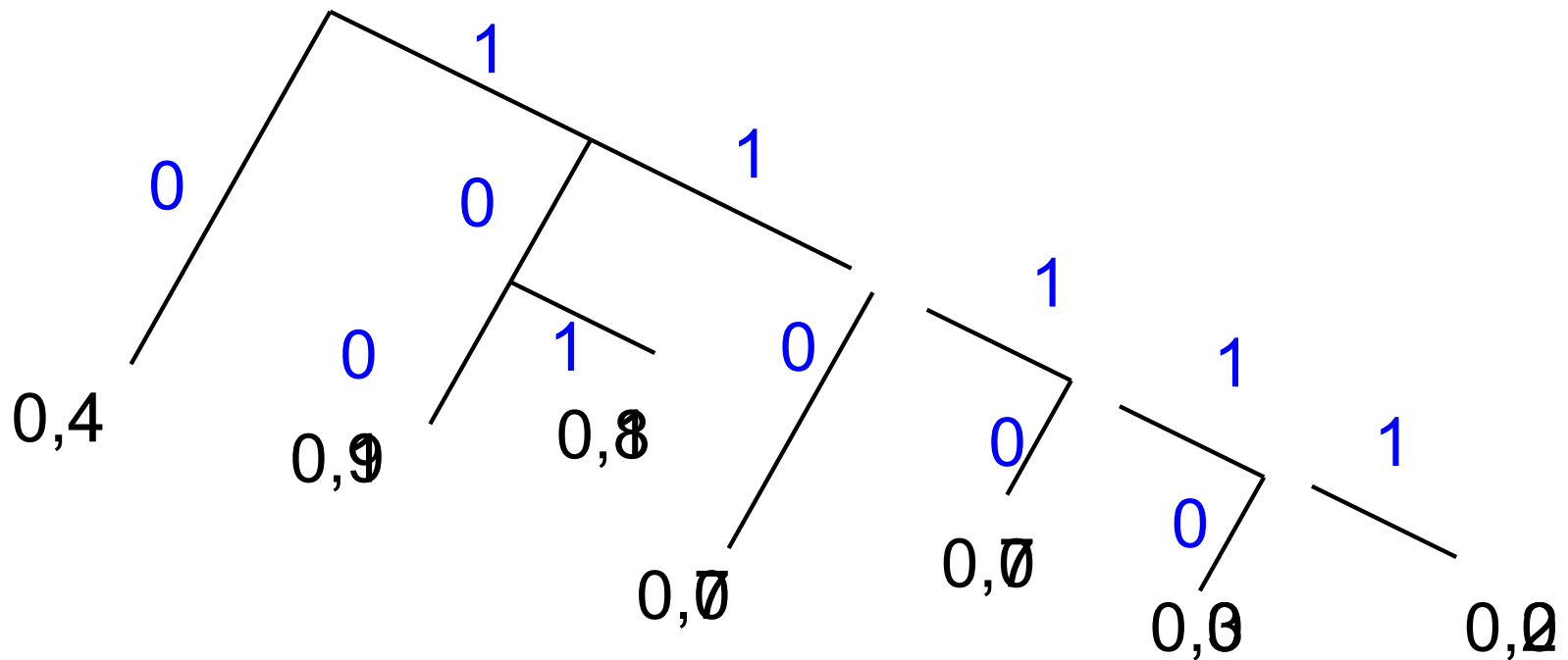
Codage de Shannon-Fano



2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

Codage de Shannon-Fano



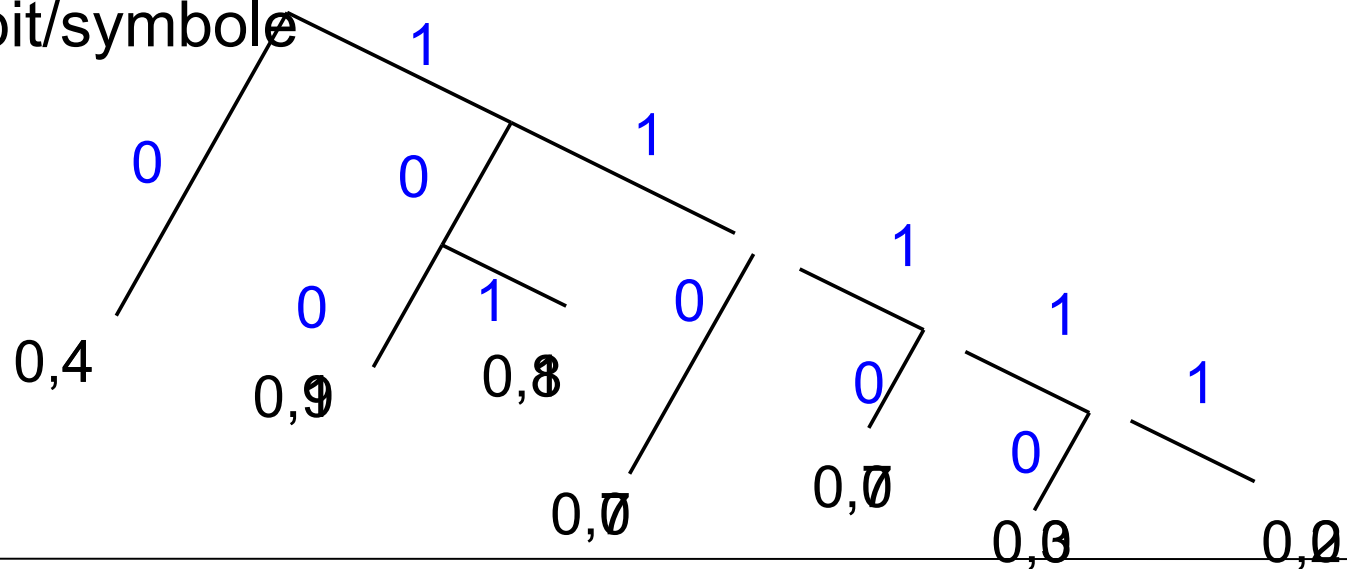
2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable: Codage de Shannon-Fano

PROB	0,18	0,18	0,07	0,07	0,03	0,02	0,02
CODE	1	100	101	110	1110	11110	11111

$$L = 0,44 + 3 \times 0,19 + 3 \times 0,18 + 3 \times 0,07 + 4 \times 0,07 + 5 \times 0,03 + 5 \times 0,02$$

$L = 2,23$ bit/symbol



2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

$$\begin{aligned} H=2,223 &\leq L(\text{Shannon - Fano})=2,23 \\ &\leq L(\text{virgule})=2,31 \\ &\leq L(\text{virgule « G »})=2,73 \end{aligned}$$

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

Codage de Huffman (1951)

Même idée que Shannon Fano du codage entropique de l'arbre binaire avec le parcours de la racine à la feuille.

La différence : on part des feuilles que l'on agrège pour aller vers la racine.

(il faut aussi laisser l'ordre de décroissance des probabilités dans l'arbre)

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

Codage de Huffman

Exemple favori:

ai	1	2	3	4	5	6	7
p(ai)	0.44	0.19	0.18	0.07	0.07	0.03	0.02

A chaque étape on agrège dans un nœud les deux plus petites probabilités

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

Codage de Huffman

Exemple favori:

6+7 $p=0,05$

5+6+7 $p=0,12$

4+5+6+7 $p=0,19$

Ici on a 2 nœuds avec 0,19, un avec 0,18 et un 0,44 : on peut donc agréger le 0,19 de notre choix avec le 0,18

ai	1	2	3	4	5	6	7
p(ai)	0.44	0.19	0.18	0.07	0.07	0.03	0.02

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

Codage de Huffman

Exemple favori:

$6+7$ $p=0,05$. $5+6+7$ $p=0,12$. $4+5+6+7$ $p=0,19$

Ici on a 2 nœuds avec 0,19, un avec 0,18 et un 0,44 : on peut donc agréger le 0,19 de notre choix avec le 0,18

ai	1	2	3	4	5	6	7
p(ai)	0.44	0.19	0.18	0.07	0.07	0.03	0.02

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable:

Codage de Huffman

Exemple favori:

$6+7$ $p=0,05$. $5+6+7$ $p=0,12$. $4+5+6+7$ $p=0,19$

(Choix identique à exemple Shannon-Fano)

$2+3$ $p=0,37$

Puis 1 reste
seul

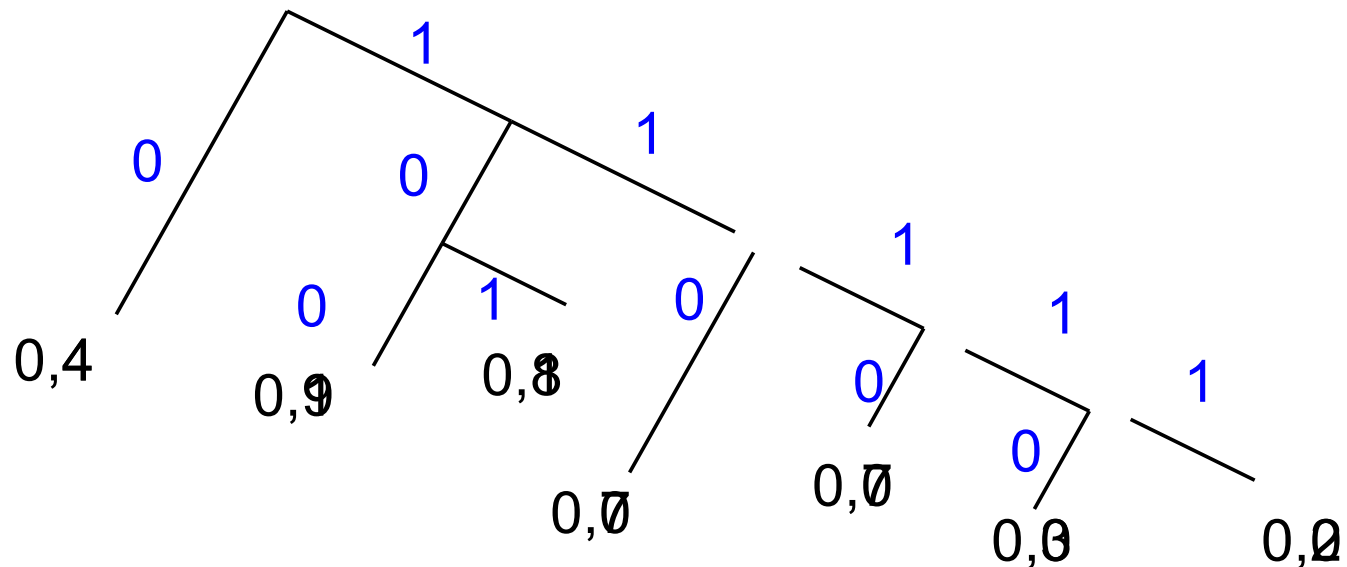
2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage de longueur variable: Codage de Huffman

0,44 0,19 0,18 0,07 0,07 0,03 0,02

1 100 101 110 1110 11110 11111

$L(\text{Huffman}) = L(\text{SF}) = 2,23 \text{ bit/symbole}$



2.2. Codage de longueur variable:

Résumé

Codage Virgule, Virgule « G », Shannon-Fano, Huffman

De façon théorique, le codage d'Huffman est le plus « optimal » en termes de longueur moyenne.

2.2. Codage arithmétique:

principe une séquence de S symboles est traduite par un intervalle entre 0 et 1 de longueur égale à la proba de S
sur $I = \text{ceil}(-\log_2(p(S)))$ bits

$$x \in [0,1] \rightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} d_i 2^{-i} ; \text{ avec } d_i \in \{0,1\}$$

0.25 \wedge 0.01 0.43 \wedge 0.0110111000...

0.125 \wedge 0.001 0.71 \wedge 0.101101111...

0.625 \wedge 0.101

Attention il peut exister plusieurs développements 2-adiques (eg 0.25 \wedge 0.0011111....) on prend le plus court

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage arithmétique

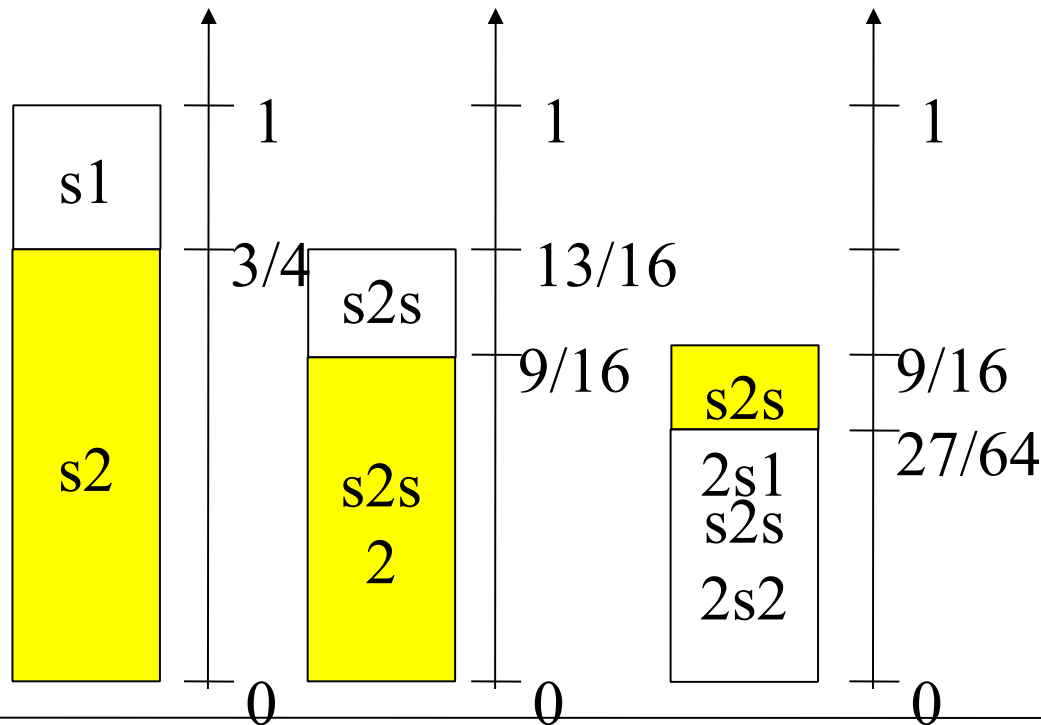
exemple : 2 symboles : s1 p1=1/4 et s2 p2=3/4

On envoie s2s2s1 ^ intervalle entre 9/16 (=1/2 +1/16 ^ 1001)

Et 27/64 (=1/4+1/8+1/16+1/64 ^ 011101)

Sur 3 bits : 4/8 ^ 100

$$c_m = \sum_{i=1}^{m-1} p_i$$



2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage arithmétique

probas cumulées c_m

Algo IC (intervalle de codage)

Calcul probas cumulées

Bic(0)= 0 (base) , Lic(0)=1 (longueur)

Tant que pafini

– Si $x_n = a_m$ (de proba p_m) alors

Bic(n)] Bic(n-1)+cm.Lic(n-1)

Lic(n)] $p_m \cdot \text{Lic}(n-1)$

rem : IC(n) s'emboite dans IC(n-1)

Lic(n) = $p_1.p_2 \dots p_m$

IC(n) codé par $b12^{-1} + \dots + b_{NB}$ avec NB bits

$$c_1 = 0 \quad c_{(M+1)} = 1$$

$$c_m = \sum_{i=1}^{m-1} p_i$$

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Décodage arithmétique

exemple : 2 symboles : s1 $p_1=1/4$ et s2 $p_2=3/4$

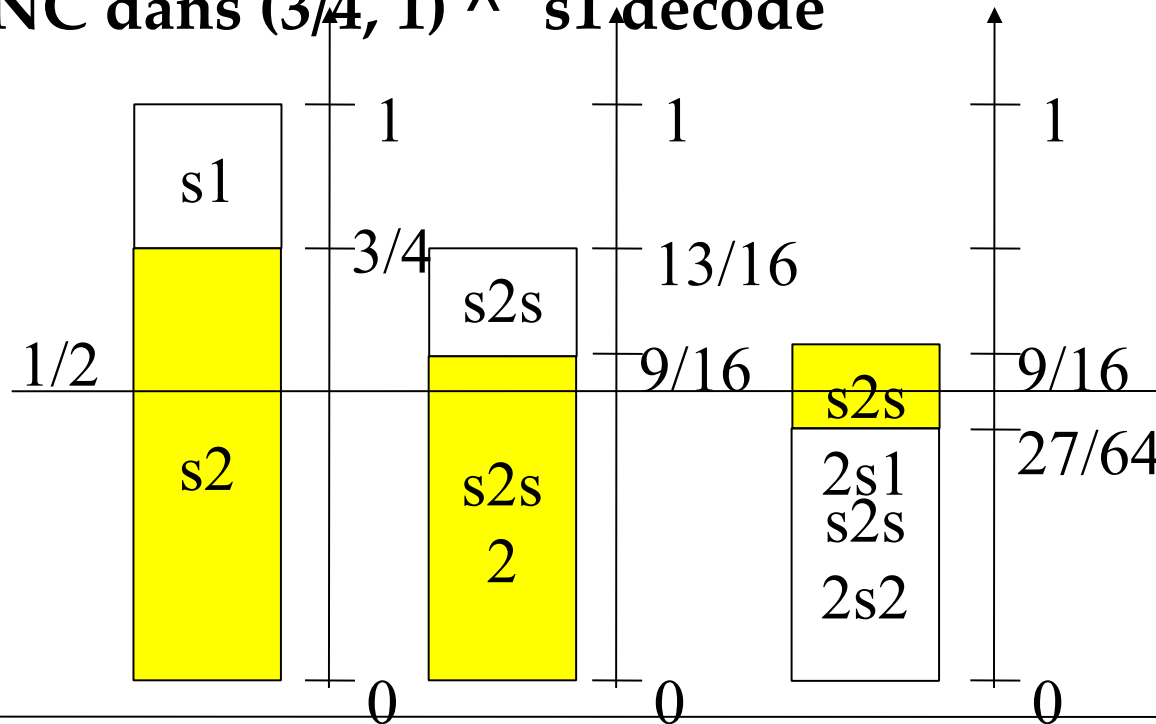
Code 100 NC=1/2 (Long=3)

NC dans $(0, 3/4)$ ^ s2 décodé NC] NC/3/4 = 2/3

NC dans $(0, 3/4)$ ^ s2 décodé NC] NC/3/4 = 8/9

NC dans $(3/4, 1)$ ^ s1 décodé

$$C_m = \sum_{i=1}^{m-1} p_i$$



2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.2. Codage arithmétique

probas cumulées c_m

Algo décodage

$$c_1 = 0 \quad c_{(M+1)} = 1$$

Le code reçu est traduit en fraction NC

1) Trouver m tq NC dans intervalle (c_m, c_{m+1})

$$c_m = \sum_{i=1}^{m-1} p_i$$

=> donne le symbole a_m

2) mise à jour NC] $(NC - c_{m-1})/p_m$

intervalle (c_m, c_{m+1}) dilaté sur $(0,1)$

rem : la dilatation permet de supprimer l'influence de a_m

Le décodeur doit savoir (en plus des p_m) le nb de symboles à décoder

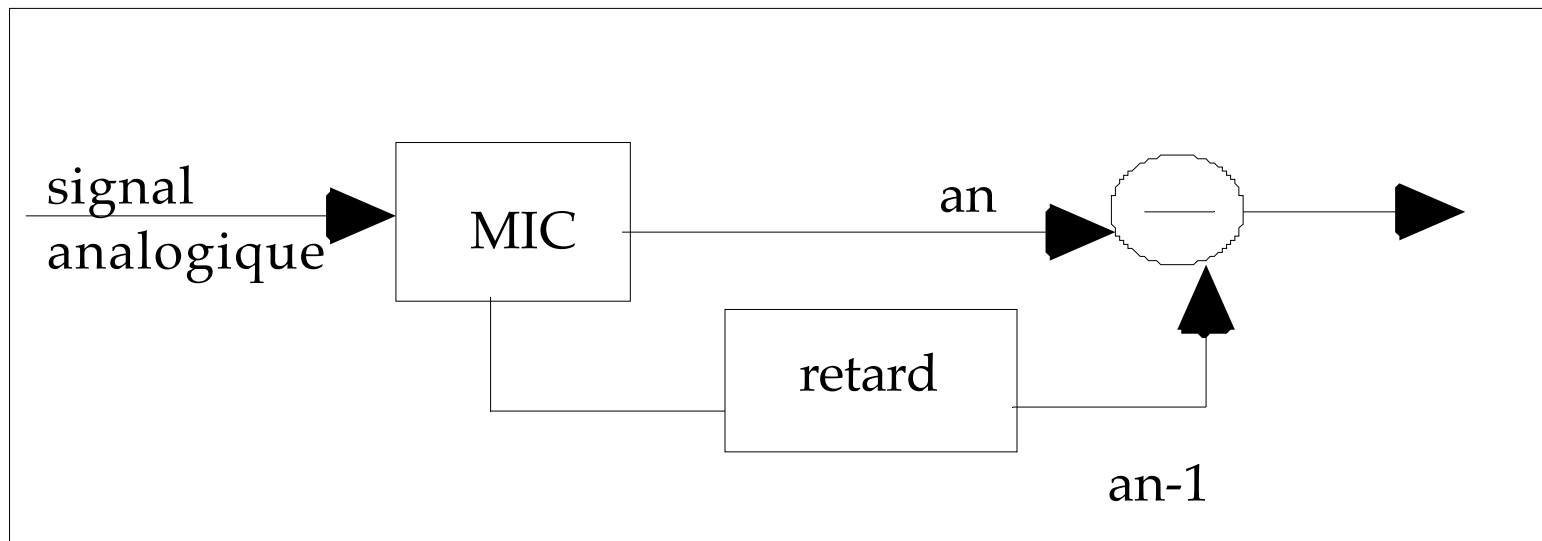
2.3. Codage MICD

Notion de Codage MIC (modulation impulsion codées) et MICD (différentiel)

Ce codage permet de passer simplement d'un signal analogique à un signal numérique en discrétisant chaque échantillon (son, image) sur un nombre fixe de bits. L'astuce est d'exploiter la corrélation de deux échantillons successifs en effectuant une différence : c'est ainsi que l'on décorrèle le signal (pas complètement toutefois).

2.3. Codage MICD

**Notion de Codage MIC (modulation impulsion codées)
et MICD (différentiel)**



2.3. Codage MICD

Notion de Codage MIC (modulation impulsion codées) et MICD (différentiel)

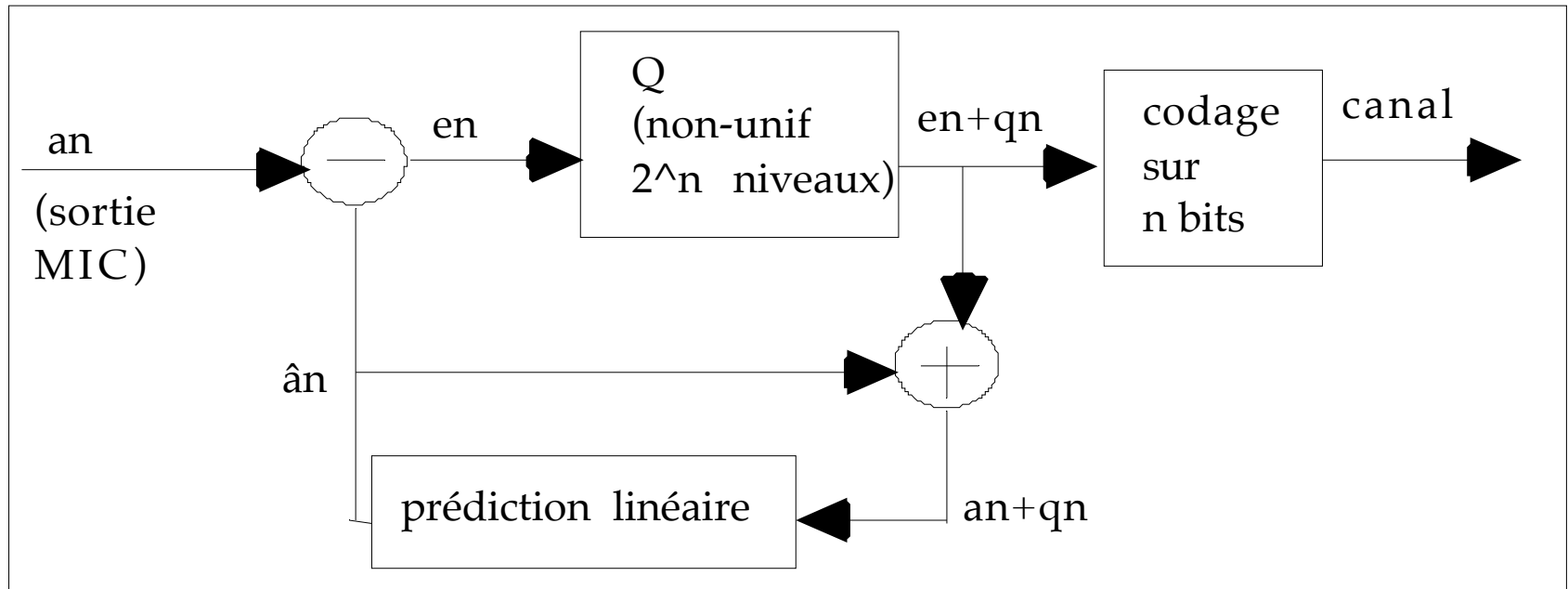
On obtient ainsi un signal en sortie dont l'entropie est inférieur à l'entropie du signal à la sortie du MIC lorsque l'on a $\text{Prob}\{a_n = a_{n-1} \mid a_{n-1}\} = 1 - \epsilon$. On a ensuite deux possibilités : soit en code en longueur variable le résultat (cf paragraphe suivant) soit on quantifie et on code le signal différentiel : c'est la MICD. Attention ici : la phase de quantification va faire perdre de l'information de manière irréversible.

2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.3. Codage MICD

Codeur MICD

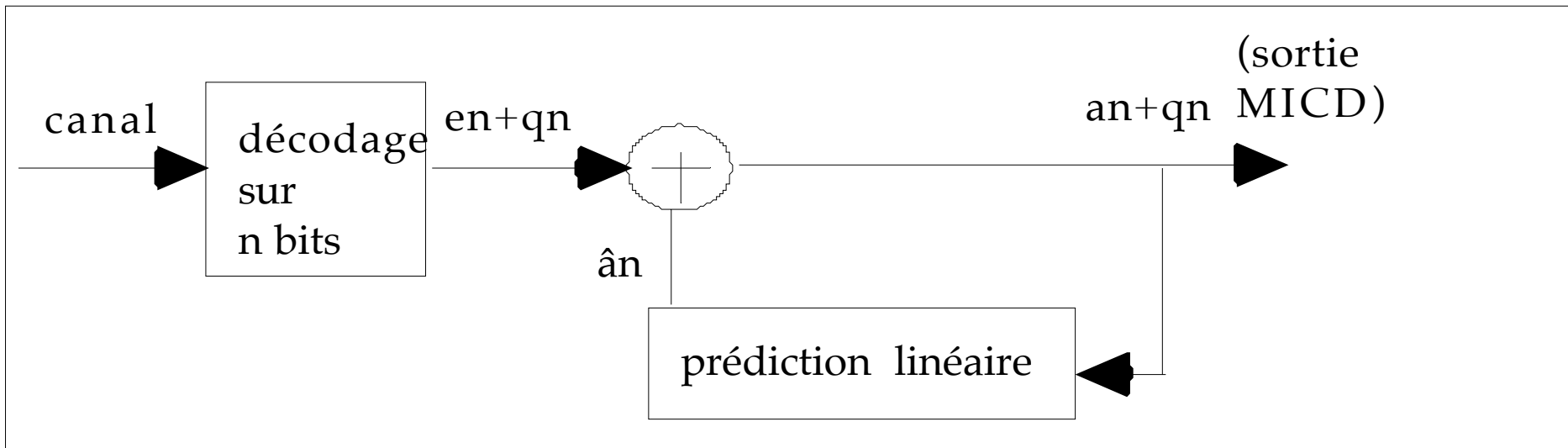
$e_n = a_n - \hat{a}_n$, q_n : bruit de quantification



2.3. Codage MICD

Décodeur MICD

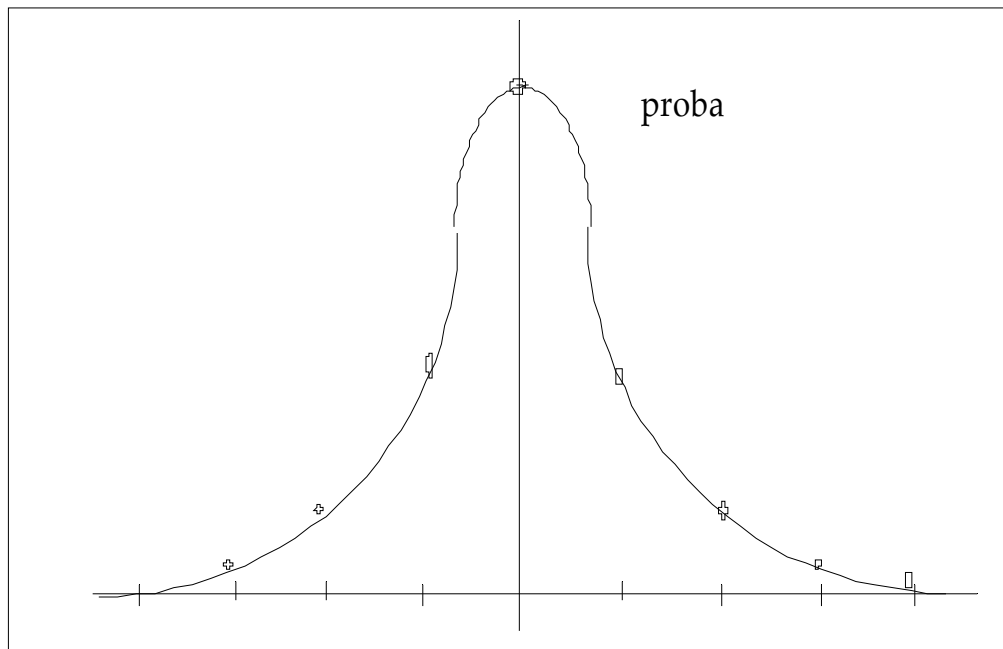
$e_n = a_n - \hat{a}_n$, q_n : bruit de quantification



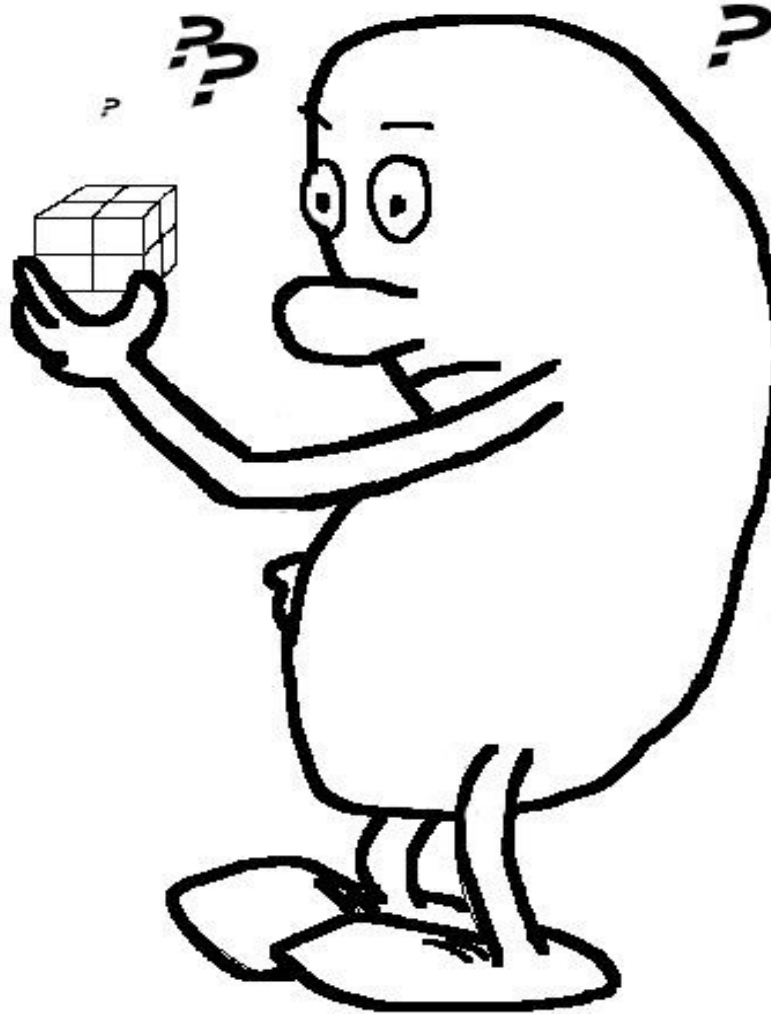
2. CODAGE ENTROPIQUE DE L'INFORMATION

2.3. Codage MICD

Décodeur MICD : Proba de sortie d'un MICD avec quantification sur 3 bits



Théorie de l'Information



- **merci**