Vektor Satuan

adalah suatu vektor yang panjangnya satu

Vektor satuan searah $sumbu\ X$,
$sumbu\ Y$, dan $sumbu\ Z$
berturut-turut
adalah vektor $\underline{i}\,,\ \underline{j}\ \ dan\ \underline{k}$

$$\underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ \ \text{dan}\ \ \underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aljabar Vektor

- Kesamaan vektor
- Penjumlahan vektor
- Pengurangan vektor
- Perkalian vektor dengan bilangan real

Kesamaan Vektor

Misalkan:

$\underline{a} = a1\mathit{i} + a2\mathit{j} + a3\mathit{k}$ dan

$\underline{b} = b1\mathit{i} + b2\mathit{j} + b3\mathit{k}$

Jika: $\underline{a} = \underline{b}$, maka $a1 = b1$

$a2 = b2$

dan

$a3 = b3$

Kesamaan Vektor

Dua buah vektor dikatakan sama besar bila besar dan arahnya sama.

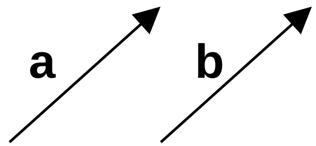
Misalkan **u** = (a,b) dan **v =** (c,d)

Jika **u** = **v**, maka

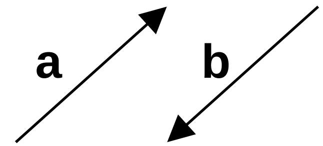
|**u**| = |**v**|

arah u = arah **v**

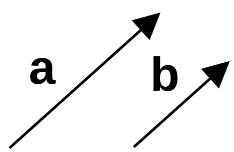
a=c dan b=d



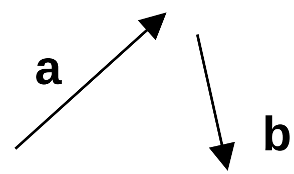
Dua vektor sama,
a = b



Dua Vektor mempunyai besar sama, arah berbeda



Dua vektor arah sama, besaran beda



Dua Vektor besar dan arah berbeda

Contoh

Diketahui:

$\underline{a} = i + xj - 3k$ dan

$\underline{b} = (x - y)i - 2j - 3k$

Jika a = b, maka x + y = ...

Jawab:

$\underline{a} = i + xj - 3k$ dan

$\underline{b} = (x - y)i - 2j - 3k$

$\underline{a} = \underline{b}$

$1 = x - y$

$x = -2$; disubstitusikan

$1 = -2 - y; \Rightarrow y = -3$

Jadi $x + y = -2 + (-3) = -5$

Penjumlahan Vektor

Misalkan: $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Jika: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$, maka vektor

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Contoh

Diketahui:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2p \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} p \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4q \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jika $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$, maka $p - q =$....

jawab: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2p \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4q \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3+p \\ -2p+6 \\ (-1)+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4q \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3+p \\ -2p+6 \\ (-1)+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4q \\ 2 \end{pmatrix}$$

$3 + p = -5 \quad \Rightarrow p = -8$

$-2p + 6 = 4q$

$16 + 6 = 4q$

$22 = 4q \quad \Rightarrow q = 5\tfrac{1}{2};$

Jadi $p - q = -8 - 5\tfrac{1}{2}$

$= -13\tfrac{1}{2}$

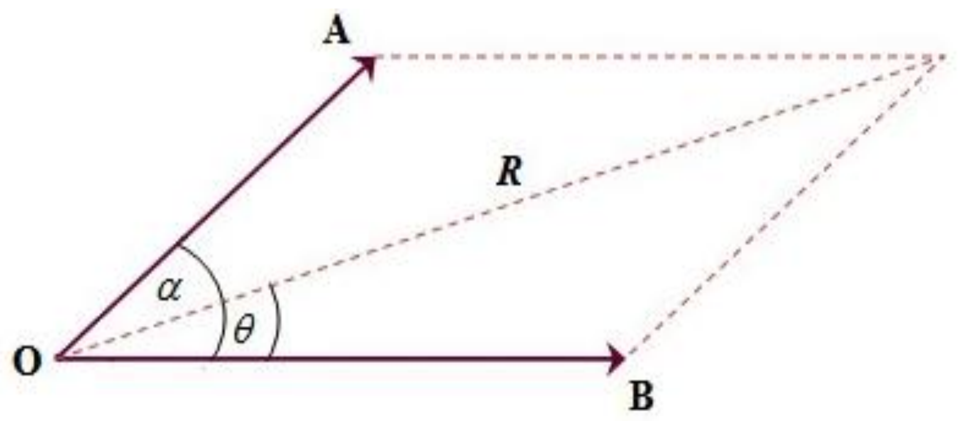
Resultan Vektor dan Metode Mencari Resultan

Hasil Penjumlahan dari vektor-vekrot disebut resultan.

Ada beberapa metode yang dapat digunakan mencari resultan antara lain :

1. Metode Jajaran Genjang
2. Metode Poligon
3. Metode Analitik

Metode Jajaran Genjang



Besar (panjang) ***R*** dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\boxed{R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha}}$$

Catatan :

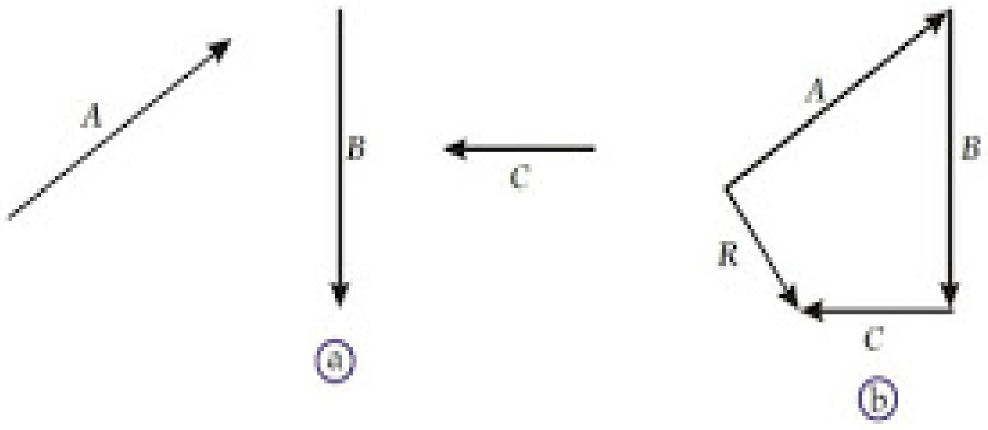
- Jika vektor A dan B searah, maka α = 0° $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB}$
- Jika vektor A dan B berlawanan arah, maka α = 180° $R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB}$
- Jika vektor A dan B saling tegak lurus, maka α = 90° $R = \sqrt{A^2 + B^2}$

Contoh

Dua vektor masing-masing dengan gaya F1 dan F2 sebesar 5 N dan 8 N, dua vektor tersebut membentuk sudut 60^{o}, tentukan besar resultan kedua vektor tersebut !

Metode Segi Banyak (Poligon)

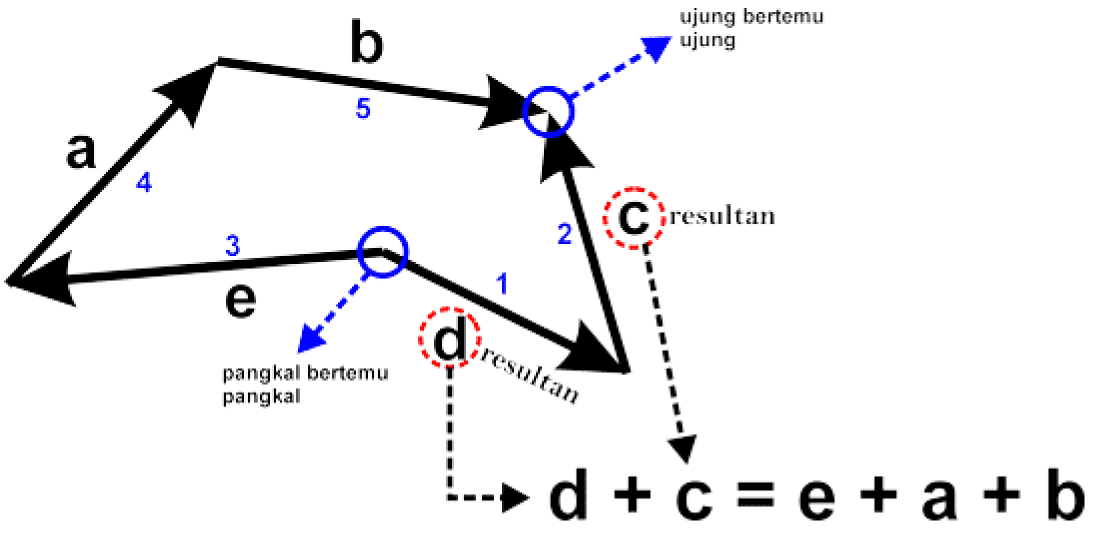
Cara meresultankan vektor dengan cara menggambar untuk menghitung nilai resultan. Resultan dapat dibentuk dengan menggambar anak panah dari pangkal awal hingga ujung akhir



$$R = A + B + C$$

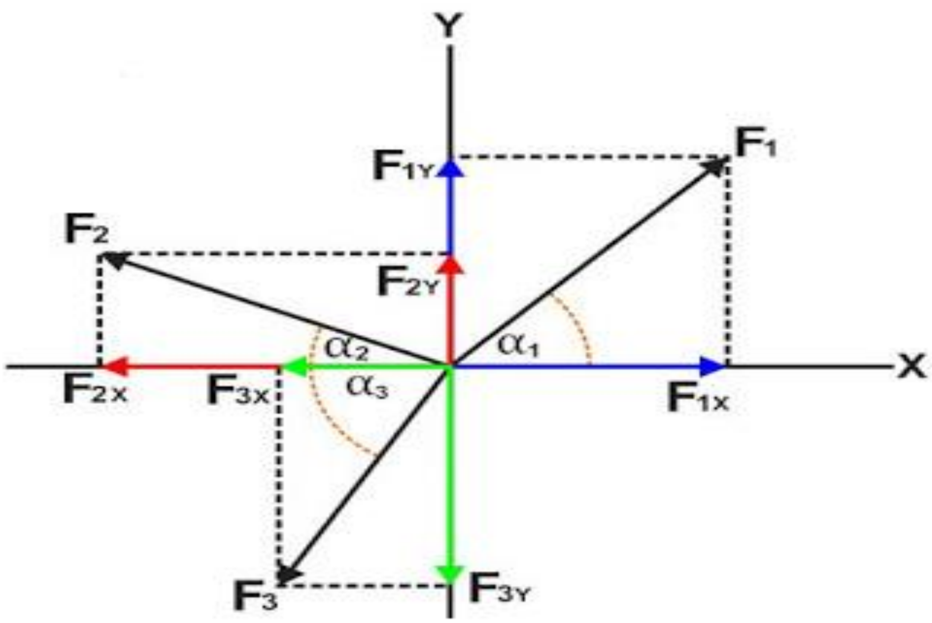
Metode Segi Banyak (Poligon)

Dalam metode Poligon terkadang vektor yang dijumlahkan banyak, maka resultan bisa terdapat lebih dari satu.



Metode Analitik

Vektor akan diproyeksikan kedalam komponen-komponennya dalam suatu koordinat tertentu. Jika pada satu titik bekerja lebih dari 1 vektor maka untuk mencari resultan dapat digunakan metode analitik.



Vektor Komponen pada sumbu X

$$\mathbf{F_{1x}} = \mathbf{F_1} \cos \alpha_1$$

$$\mathbf{F_{2x}} = \mathbf{F_2} \cos \alpha_2$$

$$\mathbf{F_{3x}} = \mathbf{F_3} \cos \alpha_3$$

$$\Sigma \mathbf{F_x} = \mathbf{F_1} \cos \alpha_1 + \mathbf{F_2} \cos \alpha_2 + \mathbf{F_3} \cos \alpha_3$$

Vektor Komponen pada sumbu Y

$$\mathbf{F_{1Y}} = \mathbf{F_1} \sin \alpha_1$$

$$\mathbf{F_{2Y}} = \mathbf{F_2} \sin \alpha_2$$

$$\mathbf{F_{3Y}} = \mathbf{F_3} \sin \alpha_3$$

$$\Sigma \mathbf{F_Y} = \mathbf{F_1} \sin \alpha_1 + \mathbf{F_2} \sin \alpha_2 + \mathbf{F_3} \sin \alpha_3$$

Secara umum, Jika bekerja *n* buah vektor yang bekerja pada bidang datar membentuk sudut *n* buah α dengan sumbu X, maka rumus resultan vektor pada sumbu *X* dan *Y* adalah :

$$\Sigma F_X = F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + F_3 \cos\alpha_3 + \ldots\ldots\ldots + F_n \cos\alpha_n$$

$$\Sigma F_Y = F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 + F_3 \sin\alpha_3 + \ldots\ldots\ldots + F_n \sin\alpha_n$$

Jika nilai komponen vektor pada sumbu X dan Y telah dikatahui maka nilai vektor resultan dihitung dengan persamaan :

$$F_R = \sqrt{\left(\sum F_X\right)^2 + \left(\sum F_Y\right)^2}$$

Arah resultan terhadap X positif (β) dapat dicari dengan persamaan :

$$\tan \beta = \frac{\sum F_Y}{\sum F_X}$$

$$\beta = arc\ tan \left(\frac{\sum F_Y}{\sum F_X}\right)$$

Arctan(x) adalah inverse dari tan(x).

$$\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$$

Sebagai contoh, jika tan dari 45° adalah 1

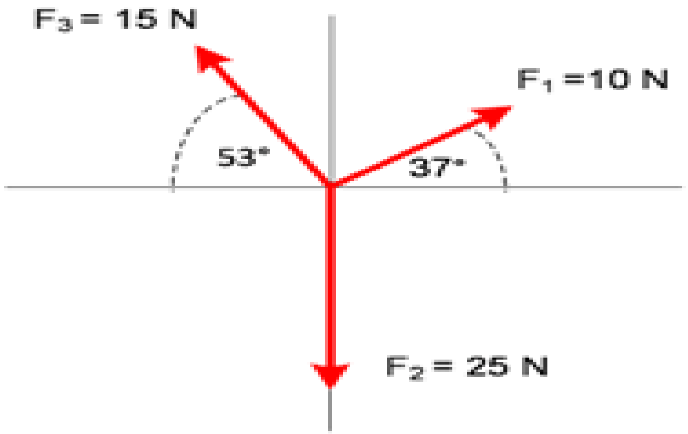
$$\tan 45^\circ = 1$$

Maka, arctan dari 1 adalah 45°

$$\arctan(1) = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$$

Tugas Individu ke 2 :

Diberikan 3 buah vektor F_1 = 10 N, F_2 25 N dan F_3 = 15 N seperti gambar, tentukanlah Resultan ketiga vektor tersebut



Pengurangan Vektor

Misalkan:

$\underline{a} = a1\underline{i} + a2\underline{j} + a3\underline{k}$

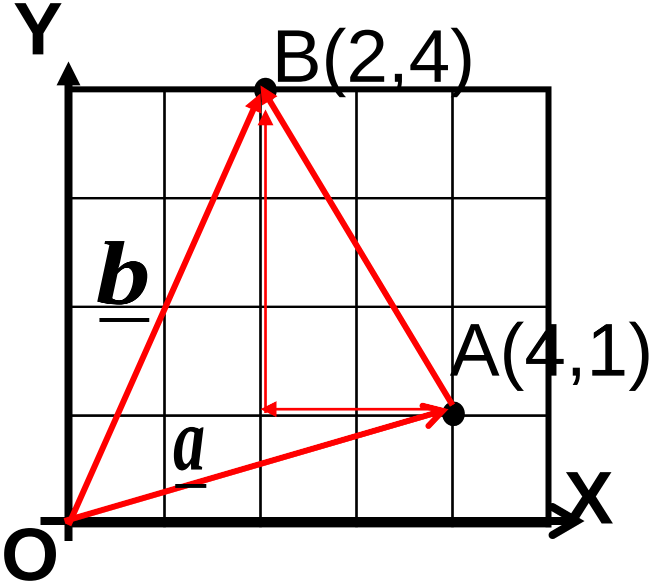
dan

$\underline{b} = b1\underline{i} + b2\underline{j} + b3\underline{k}$

Jika: $\underline{a} - \underline{b} = \underline{c}$, maka

$\underline{c} = (a1 – b1)\underline{i} + (a2 – b2)\underline{j} + (a3 - b3)\underline{k}$

Perhatikan gambar:



vektor posisi:

titik A(4,1) adalah: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

titik B(2,4) adalah: $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$$

vektor $\underrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Jadi secara umum: $\boxed{\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}}$

Contoh 1

Diketahui titik-titik A(3,5,2) dan B(1,2,4). Tentukan komponen-komponen vektor $\overrightarrow{AB}$

Jawab: $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \vec{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{a}}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Jadi } \overrightarrow{\text{AB}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Contoh 2

Diketahui titik-titik P(1,2,-2) dan Q(-1,3,0).
Tentukan panjang vektor $\overrightarrow{PQ}$
(atau jarak P ke Q)

Jawab: P(1,2,-2) $\rightarrow \underline{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Q(-1,3,0) $\rightarrow \underline{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}$$

Jadi $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{9} = 3$

Perkalian Vektor dengan Bilangan Real

Misalkan: $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan

m = bilangan real

Jika: $\underline{c}$ = $m.\underline{a}$, maka

$$\underline{c} = m\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m.a_1 \\ m.a_2 \\ m.a_3 \end{pmatrix}$$

Contoh

Diketahui: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ dan $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Vektor $\underline{x}$ yang memenuhi

$\underline{a} - 2\underline{x} = 3\underline{b}$ adalah....

Jawab:

misal $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

2 – 2x1 = 6 $\Rightarrow$ -2x1 = 4 $\Rightarrow$ x1= -2

-1 – 2x2 = -3 $\Rightarrow$ -2x2 = -2 $\Rightarrow$ x2 = 1

6 – 2x3 = 12 $\Rightarrow$ -2x3 = 6 $\Rightarrow$ x3 = -3

Jadi

$$\text{vektor } \underline{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$