BAB 7: APLIKASI INTEGRAL (PROBLEM BASED LEARNING)

Pendahuluan

Aplikasi integral dapat diterapkan dalam bidang ekonomi dan bisnis, Fisika, atau bidang yang lain. Aplikasi integral dapat menerapkan integral tak tentu dan intergral tentu (teori dasar kalkulus). Integral tak tentu misalnya dapat diterapkan untuk mencari fungsi biaya dan fungsi penerimaan. Selain itu, integral tak tentu juga dapat digunakan untuk mencari besarnya sumber daya dari suatu bidang tertentu (penerapan kecepatan). Sedangkan untuk integral tentu dapat digunakan untuk mencari surplus konsumen dan produsen

Penerapan Integral Tak Tentu

1. Fungsi Biaya dan Fungsi Penerimaan

Pendekatan integral tak tentu dapat diterapkan untuk mencari persamaan fungsi total dari suatu variabel ekonomi apabila persamaan fungsi marjinalnya diketahui. Karena fungsi marjinal pada dasarnya merupakan turunan dari fungsi total, maka dengan proses sebaliknya, yaitu integrasi dapatlah dicari fungsi asal dari fungsi turunan tersebut atau fungsi totalnya.

A. Fungsi Biaya

Fungsi umum biaya total adalah:

$$C = f(x)$$

dan fungsi marginalnya merupakan turunan dari fungsi biaya, yaitu:

$$MC = C' = \frac{d(f(x))}{dx} = f'(x)$$

Sehingga apabila diketahui fungsi biaya marjinalnya, maka untuk mencari fungsi biaya MC diintegralkan.

$$C = \int MC\ dx = \int f'(x)\ dx$$

Jika ingin mencari biaya rata-rata, maka:

$$AC = \frac{C}{x}$$

Contoh 1:

Biaya marjinal suatu perusahaan yang memproduksi buku tulis ditunjukkan oleh $MC = 3Q^2 - 6Q + 4$. Carilah fungsi biaya total dan rata-ratanya (biaya tetap adalah 5 satuan),-!

Jawaban:

Mencari biaya total:

$$C = \int MC\, dQ = \int 3Q^2 - 6Q + 4\, dQ = \frac{3}{3}Q^3 - \frac{6}{2}Q^2 + 4Q + c$$

$$= Q^3 - 3Q^2 + 4Q + c$$

Karena biaya tetap adalah 5 satuan, maka *c* dapat disubstitusi dengan nilai 5 sehingga:

$$C = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 5$$

Mencari biaya rata-rata:

$$AC = \frac{Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 5}{Q} = Q^2 - 3Q + 4 + \frac{5}{Q}$$

B. Fungsi Penerimaan

Fungsi penerimaan adalah:

$$R = f(x)$$

Dan fungsi penerimaan marginal adalah:

$$MR = R' = \frac{d(f(x))}{dx} = f'(x)$$

Sehingga apabila diketahui fungsi penerimaan marjinal, maka untuk mencari fungsi penerimaan, MR diintegralkan.

$$R = \int MR\, dx = \int f'(x)\ dx$$

Jika ingin mencari biaya rata-rata, maka:

$$AR = \frac{R}{x}$$

Contoh 2:

Carilah persamaan penerimaan total dan penerimaan rata-rata dari suatu perusahaan yang memproduksi buku bergaris jika persamaan marjinalnya $MR = 16 - 4Q$ (biaya tetap adalah 5 satuan)

Jawaban:

Mencari penerimaan total:

$$R = \int MR\, dQ = \int 16 - 4Q\, dQ = 16Q - \frac{4}{2}Q^2 + c = 16Q - 2Q^2 + c$$

Karena biaya tetap adalah 5 satuan, maka *c* dapat disubstitusi dengan nilai 5 sehingga:

$$R = 16Q - 2Q^2 + 5$$

Mencari penerimaan rata-rata:

$$AR = \frac{16Q - 2Q^2 + 5}{Q} = 16 - 2Q + \frac{5}{Q}$$

2. **Mendapatkan Banyaknya Sumber Daya**

Aplikasi integral ini menerapkan integral tak tentu dengan konsep laju kecepatan atau laju pertumbuhan. Jadi dalam aplikasi integral ini, jika diketahui kecepatan suatu kendaraan, maka yang ingin dicari adalah jaraknya. Dalam kasus lain, misalnya yang diketahui adalah laju pertumbuhan penduduk, maka yang akan dicari adalah jumlah penduduknya. Hal ini berkebalikan pada aplikasi turunan, jika di aplikasi turunan, yang diketahui adalah sumbernya sedangkan di integral ini kita ingin mencari sumbernya.

Fungsi umum:

Contoh3:

Di masa pandemi ini, hampir seluruh wilayah di Kabupaten Bandung terdampak. Di Suatu kecamatan, pada tanggal 05 Desember 2020 status berubah dari zona hijau menjadi zona merah. Tercatat bahwa ada 12 warga positif covid 19. Seorang peneliti mengatakan bahwa perkiraan laju penambahan banyaknya pasien perhari dinyatakan dalam fungsi $V(x) = -3x^2 + 18x + 6$. Setelah 5 hari ada berapa kira-kira ada berapa kasus covid di kecamatan itu?

Jawaban:

$$V(x) = -3x^2 + 18x + 6$$

Untuk mengetahui banyaknya warga terjangkit setelah 5 hari, maka harus diketahui dulu fungsi yang menyatakan banyaknya warga yang terjangkit terhitung dari awal mula warga terjangkit. Maka dari itu, kita perlu mengintegralkan $V(x)$, yaitu:

$$S(x) = \int V(x)dx = \int -3x^2 + 18x + 6\,dx = -\frac{3}{3}x^3 + \frac{18}{2}x^2 + 6x + c$$

Karena diketahui yang pertama terjangkit di kecamatan tersebut adalah 12 orang, maka:

$S(0) = -(0)^3 + 9(0)^2 + 6(0) + c$

$c \quad = 12$

Sehingga persamaan menjadi:

$S(x) = -x^3 + 9x^2 + 6x + 12$

Jumlah warga yang terjangkit setelah 5 hari adalah:

$S(5) = -(5)^3 + 9(5)^2 + 6(5) + 12 = -125 + 225 + 30 + 12 = 142$

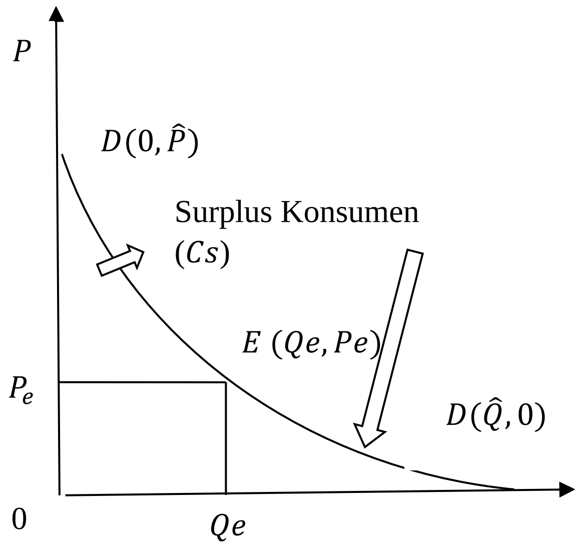
Jadi setehal 5 hari dari 05 Desember 2020 diperkirakan aka nada 142 yang terjangkit

Penerapan Integral Tentu

Penerapan integral tentu ini mengikuti konsep dari Teori Dasar Kalkulus (TDK). Penerapan dari integral tentu ini dapat digunakan untuk mencari surplus konsumen dan produsen.

A. Surplus Konsumen

Surplus Konsumen mencerminkan suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati konsumen tertentu berkenaan dengan tingkat harga pasar suatu barang. Fungsi permintaan secara umum adalah $P = f(Q)$ yang menunjukkan jumlah suatu barang yang akan dibeli oleh konsumen pada tingkat harga tertentu. Jika tingkat harga pasar adalah Pe, maka bagi konsumen tertentu yang sebetulnya mampu dan bersedia membayar dengan harga lebih tinggi dari Pe. Hal akan menjadi keuntungan bagi konsumen tersebut, sebab cukup membayar dengan harga Pe. Keuntungan lebih macam inilah yang disebut **surplus konsumen**. Secara geometri, besarnya surplus konsumen ditunjukkan oleh luas area di bawah kurva permintaan tetapi di atas tingkat harga pasar.



Besarnya surplus konsumen ada 2 persamaan, yang pertama adalah:

$$C_s = \int_0^{Qe} f(Q)dQ - Q_e.P_e$$

Dalam hal ini fungsi permintaan berbentuk $P = f(Q)$

Atau yang kedua adalah:

$$C_s = \int_{P_e}^{\hat{P}} f(P)\text{ dP}$$

Dalam hal ini fungsi permintaan berbentuk $Q = f(P)$; $\hat{P}$ adalah nilai P untuk $Q = 0$ atau penggal kurva permintaan pada sumbu harga.

Dengan demikian

$$C_s = \int_0^{Qe} f(Q)dQ - Q_e.P_e = \int_{P_e}^{\hat{P}} f(P)\text{ dP}$$

Contoh 4:

Hitunglah surplus konsumen dari fungsi permintaan $f(P) = Q = 40 - 2P$ yang tingkat harga pasarnya 10 satuan!

Jawaban:

$P_e = 10$

Mencari $\hat{P}$

$Q = 40 - 2P \rightarrow 0 = 40 - 2P \rightarrow 40 = 2P \rightarrow \hat{P} = 20$

$$C_s = \int_{P_e}^{\hat{P}} f(P)\,dP$$

$$= \int_{10}^{20} (40 - 2P)dP$$

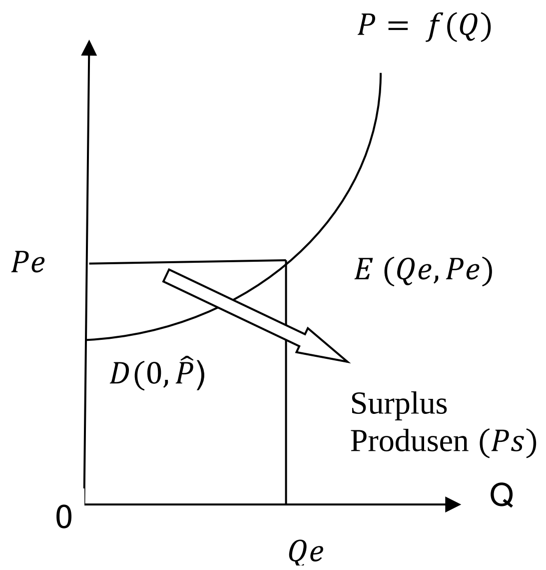
$$= 40P - P^2 \Big|_{10}^{20}$$

$$= [40(20) - (20)^2] - [40(10) - (10)^2]$$

$$= [800 - 400] - [400 - 100] = 400 - 300 = 100$$

B. Surplus Produsen

Surplus Produsen mencerminkan suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati produsen tertentu berkenaan dengan tingkat harga pasar dari barang yang ditawarkannya. Sehingga surplus produsen berkenaan dengan fungsi penawaran, yaitu $P = f(Q)$ yang menunjukkan jumlah suatu barang yang akan dijual oleh produsen pada tingkat harga tertentu. Jika tingkat harga pasar adalah Pe, maka bagi produsen tertentu yang sebetulnya bersedia menjual dengan harga lebih rendah dari Pe. Secara geometri, besarnya surplus produsen ditunjukkan oleh luas area di atas kurva penawaran tetapi di bawah tingkat harga pasar.



Besarnya surplus produsen adalah:

$$P_s = Q_e . P_e - \int_0^{Qe} f(Q) dQ$$

Dalam hal ini fungsi penawaran berupa $P = f(Q)$

Atau bisa dicari dengan:

$$P_s = \int_{\hat{P}}^{P_e} f(P) \text{ dP}$$

Dalam hal fungsi penawaran berbentuk $Q = f(P)$; $\hat{P}$ adalah nilai P untuk $Q = 0$ atau penggal kurva penawaran pada sumbu harga.

Dengan demikian

$$P_s = Q_e . P_e - \int_0^{Qe} f(Q) dQ = \int_{\hat{P}}^{P_e} f(P) \text{ dP}$$

Contoh 5:

Seorang produsen mempunyai fungsi penawaran $P = 0{,}5Q + 3$. Berapa surplus produsen jika tingkat harga keseimbangan di pasar adalah 10?

Jawaban:

$P_e = 10$

$f(Q) = P = 0{,}5Q + 3$

Mencari nilai Q_e

Kita substitusi $P_e = 10$ ke fungsi $P = 0{,}5Q + 3$

$P = 0{,}5Q + 3 \rightarrow 10 = 0{,}5Q + 3 \rightarrow 10 - 3 = 0{,}5Q \rightarrow 7 = 0{,}5Q \rightarrow Q = 14$

Mencari surplus produsen

$$P_s = Q_e . P_e - \int_0^{Qe} f(Q) dQ$$

$$= (14)\ (10) - \int_0^{14} (0{,}5 \text{ Q} + 3) \text{ dQ}$$

$$= 140 - \left\{ (0{,}25 \text{ Q}^2 + 3 \text{ Q}) \Big| \begin{matrix} 14 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= 140 - \{ 0{,}25\ (14)^2 + 3(\ 14\ ) \} - \{ 0{,}25\ (0)^2 + 3\ (0) \}$$

$$= 400 \text{ - } 91 \text{ -}0 = 49$$

Contoh 6

Penawaran dan permintaan akan suatu barang di pasar masing-masing ditunjukkan oleh $Q = -30 + 5P$ dan $Q = 60 - 4P$. Hitunglah masing-masing surplus yang diperoleh konsumen dan produsen.

Jawaban:

Penawaran: $Q = -30 + 5P$

Permintaan: $Q = 60 - 4P$

Menentukan nilai keseimbangan pasar untuk mencari P_e dan Q_e

$Q_s = Q_d$

$-30 + 5P = 60 - 4P$

$5P + 4P = 60 + 30$

$9P = 90$

$P = 10 \approx P_e$

$-30 + 5P = Q_s \rightarrow -30 + 5(10) = Q_s \rightarrow Q_s = 20 \approx Q_e$

Surplus Konsumen

$Q = 60 - 4P \rightarrow 0 = 60 - 4P \rightarrow 4P = 60 \rightarrow P = 15$

$$C_s = \int_{P_e}^{\hat{P}} f(P)\, dP$$

$$= \int_{10}^{15} (60 - 4P)\, dP$$

$$= 60P - 2P^2 \Big|_{10}^{15}$$

$$= (60(15) - 2(15)^2) - (60(10) - 2(10)^2)$$

$$= (900 - 450) - (600 - 200) = 50$$

Mencari Surplus Produsen

$$Q = -30 + 5P \rightarrow 5P = Q + 30 \rightarrow P = \frac{Q}{5} + 6$$

$$P_s = Q_e . P_e - \int_0^{Qe} f(Q) dQ$$

$$= 20.10 - \int_0^{20} \left(\frac{Q}{5} + 6\right) dQ = 200 - \left\{\frac{Q^2}{10} + 6Q \Big|_{0}^{20}\right\}$$

$$= \; 200 - \left\{ \left(\frac{20^2}{10} + 6(20) \right) - 0 \right\} = 200 - 160 = 40$$