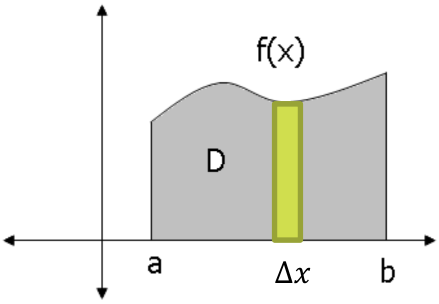
BAB 7: APLIKASI INTEGRAL

Menghitung Luas Daerah

Luas daerah dari suatu kurva biasanya terbagi menjadi dua bagian, yang pertama luas daerrah yang dibatasi oleh satu fungsi dan luas daerah yang dibatasi oleh dua fungsi.

A. Luas Daerah pada Satu Fungsi

Jika misalkan terdapat daerah $D = \{(x, y)|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, maka Luas daerah *D* dapat dicari dengan langak berikut:



1. Iris daerah *D* menjadi *n* bagian dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan panjang $f(x)$ dengan lebar Δx sehingga:

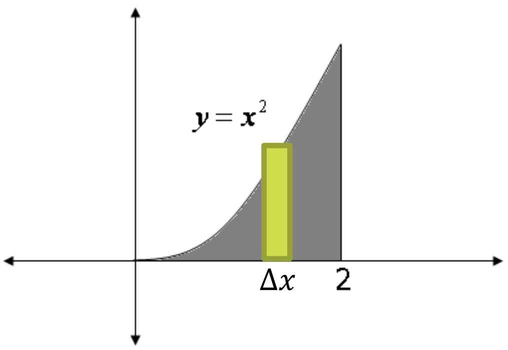
$$\Delta A \approx f(x)\Delta x$$

2. Luas daerah *D* didekati oleh jumlahan dari luas persegi panjang. Apabila mengambil limitnya, maka luas *D* adalah:

$$Luas\ D = A = \int_a^b f(x)dx$$

Contoh 1:

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dengan $0 \leq x \leq 2$



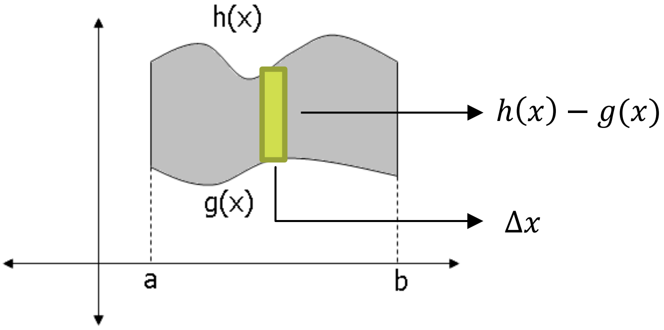
Luas irisan: $\Delta A \approx x^2\Delta x$

Luas daerah:

$$A = \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 0) = \frac{8}{3}$$

B. Luas Daerah pada Dua Fungsi dengan batas di sumbu x

Jika misalkan terdapat daerah $D = \{(x, y)|a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}$, maka Luas daerah *D* dapat dicari dengan langak berikut:



1. Iris daerah *D* menjadi *n* bagian dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan panjang $h(x) - g(x)$ dengan lebar Δx sehingga:

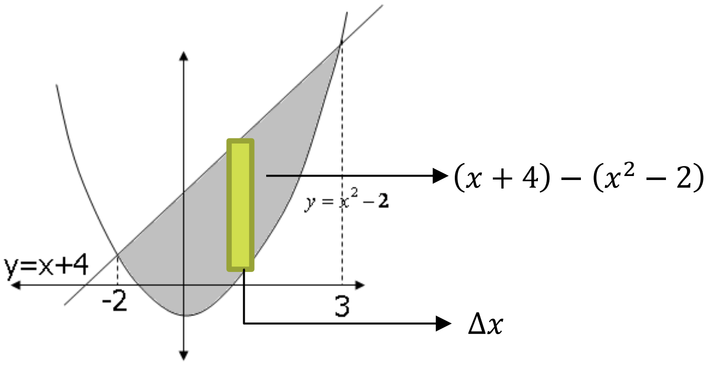
$$\Delta A \approx (h(x) - g(x))\Delta x$$

2. Luas daerah *D* didekati oleh jumlahan dari luas persegi panjang. Apabila mengambil limitnya, maka luas *D* adalah:

$$Luas\ D = A = \int_a^b (h(x) - g(x))dx$$

Contoh 2:

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = x + 4$ dan parabola $y = x^2 - 2$ seperti gambar di bawah ini:



Menentukan titik potong antara dua kurva:

$x^2 - 2 = x + 4$ → Dibuat sama denhan nol

$x^2 - 2 - (x + 4) = 0$

$x^2 - 2 - x - 4 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$ → Faktorkan untuk mendapatkan batas

$(x - 3)(x + 2) = 0$

Titik potong kedua kurva adalah di $x = -2$ dan x=3

Luas irisan: $\Delta A \approx \left((x + 4) - (x^2 - 2)\right)\Delta x$

Luas daerah:

$$A = \int_{-2}^{3} \left((x + 4) - (x^2 - 2)\right)dx = \int_{-2}^{3} -x^2 + x + 6\, dx$$

$$A = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \Big|_{-2}^{3} = \left(-\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 18\right) - \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{2} - 12\right)$$

$$A = \frac{-27 - 8}{3} + \frac{9 - 4}{2} + 18 + 12 = \frac{125}{6}$$

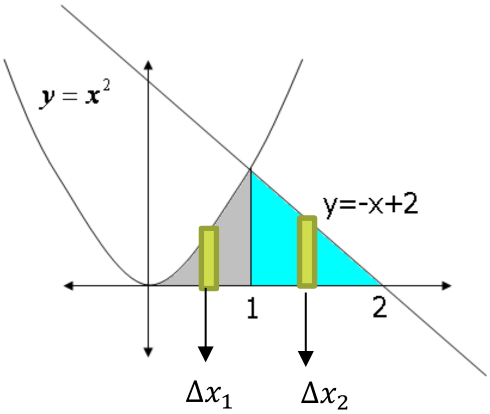
Catatan:

Jika irisan dibuat tegak lurus terhadap sumbu *x*, maka tinggi irisan adalah kurva yang terletak di sebelah atas dikurangi kurva yang berada di sebelah bawah. Jika batas atas dan bawah irisan berubah untuk sembarang irisan di *D* maka daerah *D* harus dibagi menjadi dua bagian atau lebih.

Contoh 3:

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x dari kurva $y = x^2$ dan $y = 2 - x$

Jika dibuat irisan tegak, maka luas daerah dibagi menjadi dua bagian, yaitu luas irisan I dan luas irisan II.



Karena luas yang diinginkan adalah daerah yang dibatasi juga oleh sumbu x, maka luas daerah yang dicari adalah yang terletak di antara sumbu x, $y = x^2$, $y = 2 - x$

Titik potong:

$x^2 = -x + 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

Titik potong yang digunakan hanya: $x = 1$

Luas irisan I:

$\Delta A_1 \approx x^2 \Delta x$

Batas: dari $x = 0$ sampai $x = 1$

Luas irisan II

$\Delta A_1 \approx (2 - x)\Delta x \approx (-x + 2)\Delta x$

Batas: dari $x = 1$ sampai $x = 2$

Luas daerah I

$$A_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Luas daerah II

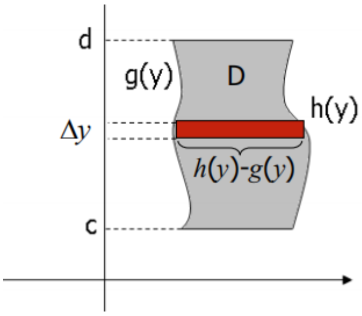
$$A_2 = \int_1^2 -x + 2\,dx = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_1^2 = \left(-\frac{4}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{2} + 2\right) = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}$$

Sehingga luas daerahnya adalah:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

C. Luas Daerah pada Dua Fungsi dengan batas di sumbu y

Jika misalkan terdapat daerah $D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$, , maka Luas daerah *D* dapat dicari dengan langak berikut:



1. Iris daerah *D* menjadi *n* bagian dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan panjang $h(y) - g(y)$ dengan lebar Δy sehingga:

$$\Delta A \approx (h(y) - g(y))\Delta y$$

2. Luas daerah *D* didekati oleh jumlahan dari luas persegi panjang. Apabila mengambil limitnya, maka luas *D* adalah:

$$Luas\ D = A = \int_c^d (h(y) - g(y))dy$$

Contoh 4:

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh $x = 3 - y^2$ dan $y = x - 1$

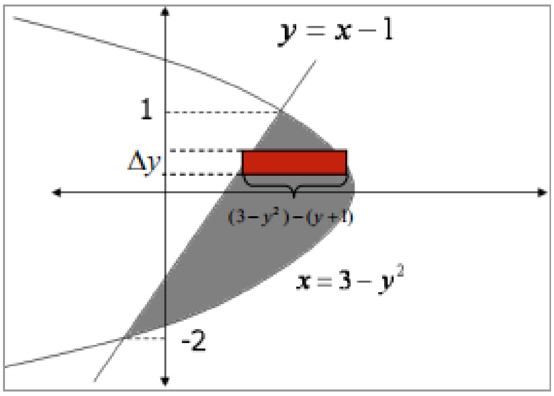
Titik potong:

$y = x - 1 \longrightarrow \quad x = y + 1$

$y + 1 = 3 - y^2$

$y^2 + y - 2 = 0$

$(y + 2)(y - 1) = 0 \longrightarrow \quad y = -2$ dan $y = 1$



Luas irisan:

$$\Delta A \approx \big((3 - y^2) - (y + 1)\big)\Delta y$$

Luas daerah:

$$L = \int_{-2}^{1} (3 - y^2) - (y + 1)\, dy = \int_{-2}^{1} -y^2 - y + 2dy$$

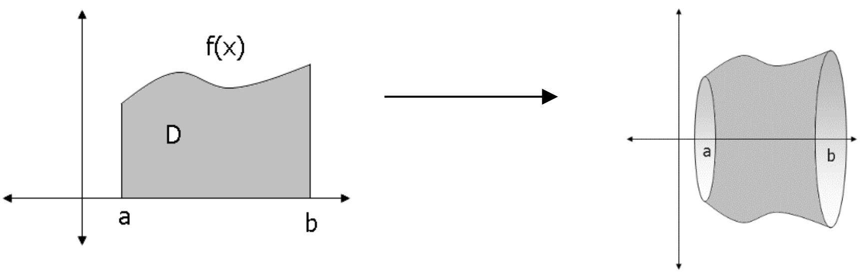
$$L = -\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$$

Catatan:

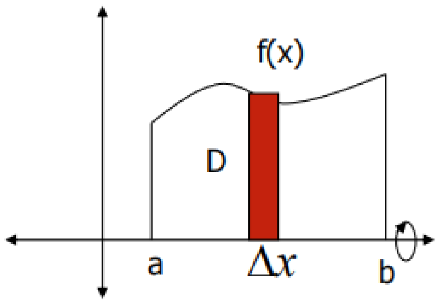
Jika irisan sejajar dengan sumbu *x*, maka tinggi irisan adalah kurva yang terletak di sebelah kanan dikurangi kurva yang berada di sebelah kiri. Jika batas kanan dan kiri irisan berubah untuk sembarang irisan di *D* maka daerah *D* harus dibagi menjadi dua bagian atau lebih.

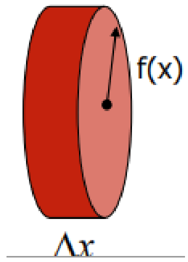
Menghitung Volume Benda Putar

A. Metode Cakram



Jika suatu daerah $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ diputar terhadap sumbu x, untuk menghitung volume benda putar maka gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlahkan dan ambil limitnya.





Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi $f(x)$ dan alas Δx diputar terhadap sumbu x akan diperoleh bentuk cakram lingkaran dengan tebal Δx dan jari-jari $f(x)$ sehingga:

$\Delta V \approx \pi f^2(x) \Delta x$

Dan

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\ dx$$

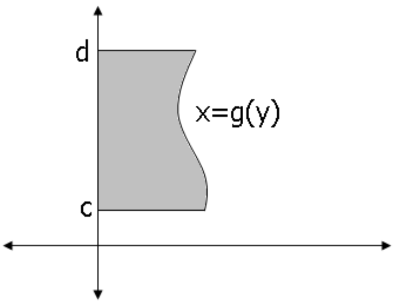
Apabila diputar terhadap sumbu y, maka akan diperoleh bentuk cakram lingkaran dengan tebal Δy dan jari-jari $g(y)$ sehingga:

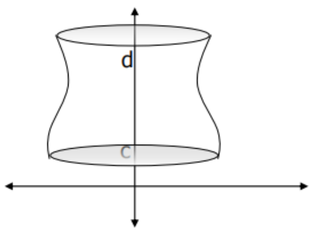
$\Delta V \approx \pi g^2(y) \Delta y$

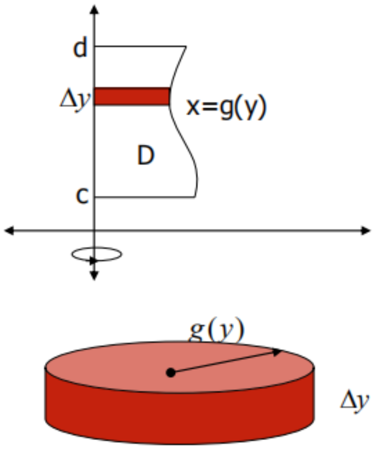
Dan

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)\ dy$$

Ilustrasi:

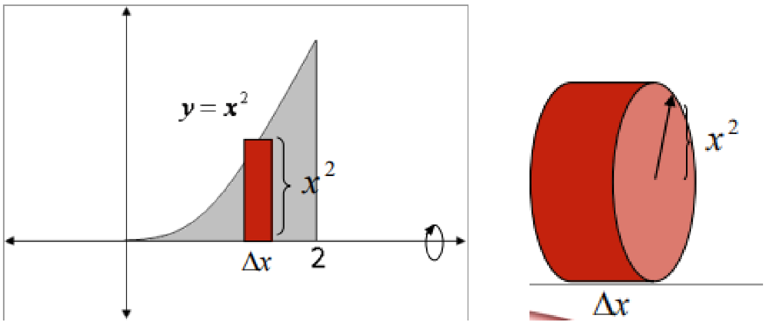






Contoh 5:

Tentukan volume benda putar jika daerah *D* dibatasi oleh $y = x^2$, sumbu x dan garis $x = 2$



Jika irisan diputar terhadap sumbu x akan diperoleh bentuk cakram lingkaran dengan tebal Δx dan jari-jari x^2 sehingga:

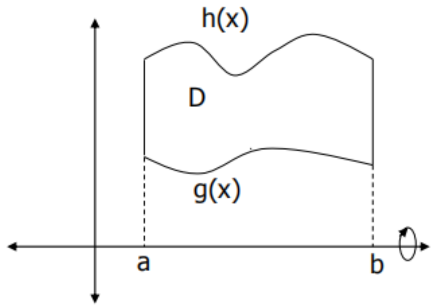
$\Delta V \approx \pi(x^2)^2 \Delta x \approx \pi x^4 \Delta x$

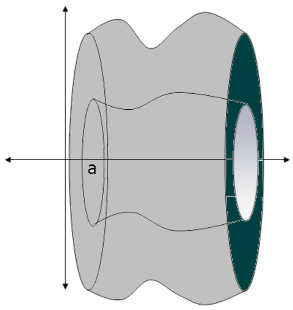
Dan

$$V = \pi \int_0^2 x^4 \ dx = \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^2 = \frac{32}{5}\pi$$

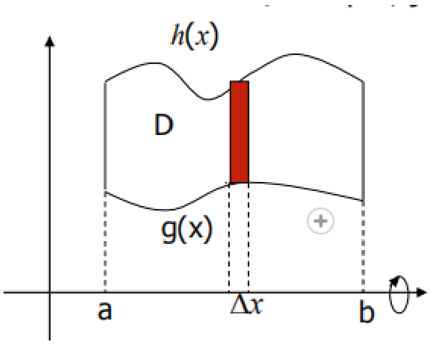
B. Metode Cincin

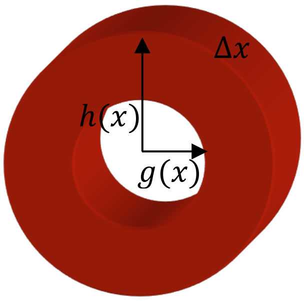
Jika daerah $D = \{(x, y)|a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ diputar terhadap sumbu x,





Maka untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlahkan dan ambil limitnya





Apabila irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi $h(x) - g(x)$ dan alas Δx diputar terhadap sumbu x akan diperoleh suatu cincin dengan ketebalan Δx dan jari-jari luar $h(x)$ dan jari-jari dalam $g(x)$ sehingga:

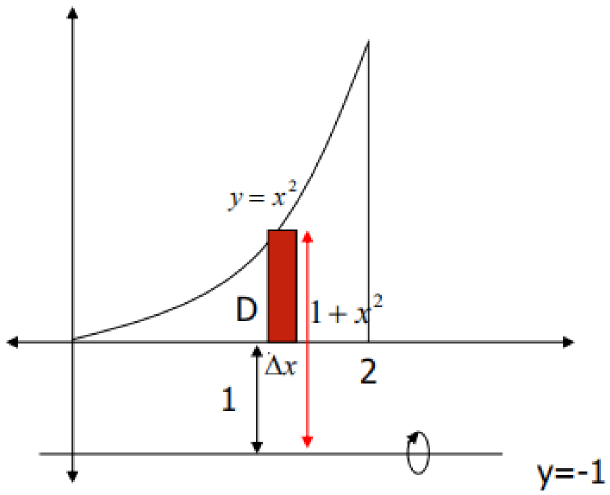
$$\Delta V \approx \pi\left(h^2(x) - g^2(x)\right)\Delta x$$

Dan

$$V = \pi \int_a^b h^2(x) - g^2(x)\ dx$$

Contoh 6:

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah D dibatasi oleh $y = x^2$, sumbu x dan garis $x = 2$ dan diputar terhadap garis $y = -1$



$\Delta V \approx \pi((x^2+1)^2 - 1^2)\Delta x \approx \pi(x^4 + 2x^2 + 1 - 1)\Delta x \approx \pi(x^4 + 2x^2)\Delta x$

Dan

$$V = \pi \int_0^2 x^4 + 2x^2\, dx = \pi\left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 \Big|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right) = \pi\left(\left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3}\right) - 0\right) = \frac{186}{15}\pi$$