BAB 8: FUNGSI TRANSENDEN DAN METODE INTEGRAL PARSIAL

Pendahuluan

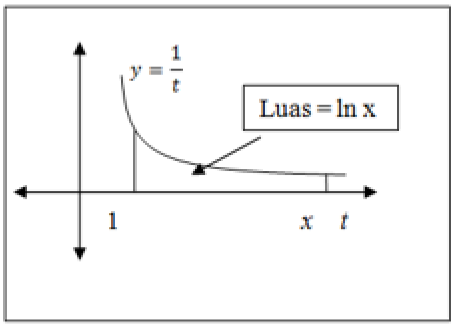
Fungsi elementer dapat dikelompokkan menjadi fungsi aljabar dan fungsi transenden. Fungsi aljabar diperoleh melalui sejumlah berhingga operasi ajlabar atas fungsi konstan. Sedangkan fungsi transenden merupakan fungsi elementer yang bukan fungsi aljabar. Fungsi transenden pada penjelasan ini meliputi fungsi logaritma asli dan invers dari fungsi logaritma asli, yaitu fungsi eksponen asli

Fungsi Logaritma Asli

Fungsi logaritma asli dinotasikan dengan ln dan didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt\,, x > 0$$

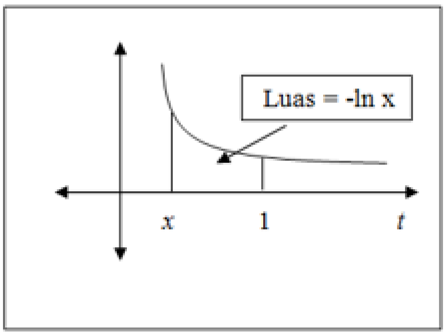
Jika $x > 1$ maka $\ln x$ dapat diartikan sebagai luas daerah di bawah kurva $y = \frac{1}{t}$ dari $1 \leq t \leq x$



Untuk $x = 1$ diperoleh $\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$, sementara untuk $0 < x < 1$, $\ln x$ adalah negatif dari daerah di bawah kurva $y = \frac{1}{t}$ dari $x \leq t \leq 1$, atau

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt$$

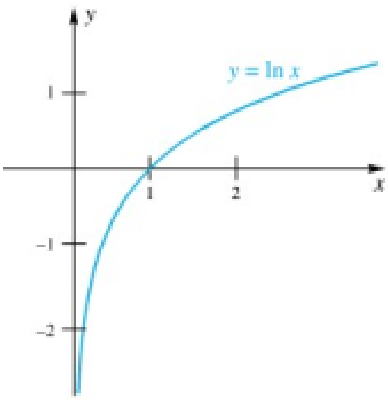
Yang seperti pada gambar di bawah:



Sifat dari Logaritma Asli:

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln ab = \ln a + \ln b$
3. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
4. $\ln a^r = r \ln a$

Grafik dari Fungsi Logaritma Asli:



Diketahui:

a. $f(x) = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0$

b. $f'(x) = \frac{1}{x} > 0, \forall x \in D_f,$

f selalu monoton naik pada D_f

c. $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \forall x \in D_f,$

grafik selalu cekung ke bawah

d. $f(1) = 0$

Turunan Fungsi Logaritma Asli

Dengan menggunakan teorema dasar kalkulus II, diperoleh:

$$D_x\left(\int_1^x \frac{1}{t} dt\right) = D_x(\ln x) = \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

Menggunakan aturan rantai, jika $u = f(x) > 0$, maka:

$$D_x(\ln u) = \frac{1}{u} D_x u$$

Contoh 1:

Tentukan turunan dari:

a. $f(x) = \ln \sqrt{x}$

b. $f(x) = \ln(x^2 - x - 2)$

c. $f(x) = \ln(\sin(4x + 2))$

Jawaban:

a. Misalkan $u = \sqrt{x}$, maka:

$$f'(x) = D_x\left(\ln \sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} D_x \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

b. Jika $u = x^2 - x - 2$, maka:

$$f'(x) = D_x(\ln(x^2 - x - 2)) = \frac{1}{x^2 - x - 2} D_x(x^2 - x - 2) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2}$$

c. Jika $u = \sin(4x + 2)$, maka:

$$f'(x) = D_x(\ln(\sin(4x + 2))) = \frac{1}{\sin(4x + 2)} D_x(\sin(4x + 2)) = \frac{4\cos(4x + 2)}{\sin(4x + 2)}$$

$$= 4\cot(4x + 2)$$

Dari turunan fungsi logaritma asli di atas, dapat ditentukan formula integral yang berkaitan dengan turunan, yaitu:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \qquad x \neq 0$$

Atau

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C, \qquad u \neq 0$$

Contoh 2:

Tentukan hasil dari integral di bawah ini.

$$\int \frac{5}{2x + 7} dx$$

Jawaban:

Misalkan $u = 2x + 7$, sehingga diperoleh $du = 2dx$, dan $dx = \frac{1}{2}du$ maka:

$$\int \frac{5}{2x+7}dx = \int \frac{5}{u}.\frac{1}{2}du = \frac{5}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{5}{2}\ln|u| + C = \frac{5}{2}\ln|2x+7| + C$$

Contoh 3:

hasil dari integral di bawah ini adalah?

$$\int_{-1}^{3} \frac{x}{10-x^2}dx$$

Misalkan $u = 10 - x^2$, maka $du = -2x\ dx$ sehingga $x\ dx = -\frac{1}{2}du$

Menentukan batas:

$$\int_{-1}^{3} \frac{x}{10-x^2}dx = \int_{-1}^{3} \frac{1}{u}.-\frac{1}{2}du = -\frac{1}{2}\ln|u| \Big|_{-1}^{3} = -\frac{1}{2}\ln|10-x^2| \Big|_{-1}^{3}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 1 - \left(-\frac{1}{2}\ln 9\right) = 0 + \frac{1}{2}\ln 9 = \frac{1}{2}\ln 9$$

Fungsi Eksponen Asli

Fungsi eksponen asli merupakan invers dari fungsi logaritma asli yang dinotasikan dengan exp. Sehingga antara fungsi logaritma asli dan fungsi eksponen asli memiliki hubungan:

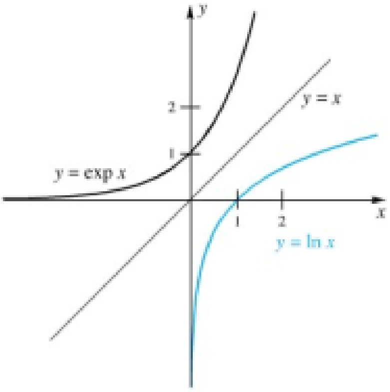
$$y = \exp x \Leftrightarrow x = \ln y$$

Bilangan e merupakan bilanga real positif yang bersifat $\ln e = 1$ sehingga $\exp(1)$ dapat ditulis dengan e^1.

Sifat Eksponen Asli:

1. $e^x e^y = e^{x+y}$
2. $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$

Grafik dari Fungsi Eksponen Asli



karena fungsi eksponen asli merupakan invers dari fungsi logaritma asli, maka grafik fungsi eksponen asli diperoleh dengan cara mencerminkan fungsi logaritma asli terhadap $y = x$

Turunan Fungsi Eksponen Asli

Dengan menggunakan turunan fungsi invers, perhatikan hubungan $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$, sehingga

$x = \ln y$

$\Leftrightarrow \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y}$

$\Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = y$

$\Leftrightarrow y' = e^x$

Jadi, $D_x(e^x) = e^x$

Secara umum, jika $u = f(x)$, maka:

$D_x(e^u) = e^u D_x(u)$

Contoh 4:

Tentukan turunan dari:

a. $f(x) = e^{4x^2}$

b. $f(x) = e^{\tan x}$

c. $f(x) = e^{2x} \sin 2x$

Jawaban:

a. Misalkan $u = 4x^2$, maka:

$f'(x) = D_x\left(e^{4x^2}\right) = e^{4x^2} D_x(4x^2) = 8xe^{4x^2}$

b. $f'(x) = D_x(e^{\tan x}) = e^{\tan x} D_x(\tan x) = \sec^2 x\, e^{\tan x}$

c. Gunakan aturan turunan rantai $(u'v + v'u)$

Misal : $u = e^{2x}$ dan $v = \sin 2x$

Turunan dari $u = e^{2x}$ adalah $2.\, e^{2x}$

Turunan dari $v = \sin 2x$ adalah $2 \cos 2x$

$f'(x) = D_x(e^{2x} \sin 2x) = (2.\, e^{2x}.\sin 2x) + (2 \cos 2x\, .\, e^{2x})$

$= 2 \sin 2x\, .\, e^{2x} + 2 \cos 2x\, .\, e^{2x} = 2e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)$

Berdasarkan turunan logaritma asli (turunan invers), $y = e^x$ memiliki turunan $y' = e^x$ sehingga:

$$\int e^x\ dx = e^x + C$$

Atau

$$\int e^u\ dx = e^u + C$$

Contoh 5:

Tentukan hasil dari integral di bawah ini:

a. $\int e^{-4x}\, dx$

b. $\int 2x^2 e^{x^3}\, dx$

Jawaban:

a. Misalkan $u = -4x$, maka $du = -4dx$ sehingga $dx = -\frac{1}{4} du$

$$\int e^{-4x}\, dx = \int e^u . -\frac{1}{4} du = -\frac{1}{4}\int e^u\ du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-4x} + C$$

b. Misalkan $u = x^3$ maka $du = 3x^2 dx$ sehingga $x^2 dx = \frac{1}{3} du$

$$\int 2x^2 e^{x^3}\ dx = \int 2e^u . \frac{1}{3}\ du = \frac{2}{3}\int e^u = \frac{2}{3} e^u + C = \frac{2}{3} e^{x^3} + C$$