

JOBSHEET MATEMATIKA DISKRIT

PERTEMUAN : 12

MATERI : Kombinatorial 2 (Permutasi, Kombinasi, Kombinasi dengan Perulangan Objek)

TUJUAN : Mahasiswa mampu memahami tentang definisi kombinatorial dan mampu melakukan perhitungan kombinatorial matematika

A. PERMUTASI

Permutasi adalah cara untuk menghitung banyaknya cara pengaturan objek-objek di mana urutan kejadian dianggap penting.

Permutasi dari sejumlah n objek, adalah:

$$P(n) = n!$$

$P(n)$: permutasi dari n objek

n : jumlah objek

Bila ada sejumlah n objek, cara pengaturan sejumlah r objek yang merupakan anggota dari n objek tersebut, dengan menganggap penting urutan adalah:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$P(n, r)$: hasil permutasi

n : jumlah total objek

r : jumlah objek yang diatur

Contoh 1:

Misalkan di dalam kelas ada 20 orang mahasiswa dan akan dipilih satu orang yang akan menjadi ketua kelas dan satu orang yang akan menjadi sekretaris.

Jawaban:

Untuk memilih ketua, ada 20 calon yang dipilih. Kemudian, untuk memilih sekretaris, tinggal 19 calon yang dapat dipilih, karena calon yang terpilih tidak boleh sama dengan calon yang terpilih sebagai ketua kelas.

Pada permutasi, urutan pemilihan diperhatikan. Keadaan bila Mahasiswa 1 terpilih sebagai Ketua Kelas dan Mahasiswa terpilih sebagai Sekretaris, akan berbeda dengan kondisi apabila Mahasiswa 2 terpilih sebagai Ketua Kelas dan Mahasiswa 1 terpilih sebagai Sekretaris.

Jumlah seluruh pasangan yang bisa terpilih adalah jumlah mahasiswa yang mungkin terpilih sebagai ketua kelas dikali jumlah mahasiswa yang mungkin terpilih sebagai sekretaris:

$$\begin{aligned}
 P(n, r) &= P(20, 2) \\
 &= \frac{20!}{(20-2)!} \\
 &= \frac{20!}{18!} \\
 &= 20 \times 19 \\
 &= \mathbf{380} \text{ pasangan}
 \end{aligned}$$

Contoh 2:

Sebuah kelompok terdiri dari 3 pria dan 7 wanita. Ada berapa macam cara berbaris yang mungkin dilakukan jika ketiga pria tersebut harus bersebelahan satu sama lain?

Jawaban:

Ada 2 langkah yang harus dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Pertama, kita harus menghitung berapa cara ketiga pria tersebut bisa berbaris bersebelahan. Langkah pertama dapat dihitung:

$$P(3) = 3! = \mathbf{6}$$

Kedua, kita menganggap ketiga pria tersebut sebagai satu kesatuan, lalu menghitung berapa cara pria dan wanita bisa berbaris. Total ada 10 orang dan ketiga pria dianggap satu kesatuan, maka dianggap ada 8 objek yang berbaris. Perhitungan untuk langkah kedua adalah:

$$P(8) = 8! \text{ cara}$$

Untuk menghitung banyaknya cara pria dan wanita tersebut berbaris seperti aturan di atas, kita harus menggabungkan hasil perhitungan dari langkah 1 dan 2 dengan kaidah perkalian. Maka, banyaknya cara adalah $\mathbf{6 \times 8!}$ cara.

B. KOMBINASI

Bila ada sejumlah n buah objek, maka cara pengaturan r buah objek tanpa memperhitungkan urutan kejadian adalah:

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

$C(n, r)$: hasil kombinasi

n : jumlah total objek

r : jumlah objek yang diatur

Contoh 1:

Misalkan ada 20 mahasiswa dalam satu kelas, dan akan dipilih 4 orang yang akan mewakili kelas untuk mengikuti lomba karya ilmiah. Berapakah jumlah kombinasi mahasiswa yang mungkin terpilih?

Jawaban:

Berbeda dengan permutasi, kombinasi tidak menganggap penting urutan kejadian. Pada kasus ini, yang penting ada 4 orang mahasiswa yang terpilih, tidak jadi masalah bagaimana urutannya. Ketika 4 mahasiswa terpilih, meskipun dalam urutan yang berbeda-beda, maka tetap dianggap sebagai 1 kejadian yang sama.

Cara menghitung jumlah kejadian yang mungkin terjadi pada kasus tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
 C(n, r) = C(20, 4) &= \frac{20!}{4! \times (20 - 4)!} \\
 &= \frac{20!}{4! \times 16!} \\
 &= \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \\
 &= \frac{116280}{24} \\
 &= 4845 \text{ kejadian}
 \end{aligned}$$

Contoh 2:

Sebuah perusahaan memiliki 6 karyawan laki-laki dan 9 karyawan perempuan. Pimpinan perusahaan akan membentuk tim berisi 5 orang untuk mengerjakan suatu proyek. Berapakah banyaknya cara untuk membentuk tim, bila anggota tim tersebut harus:

- Berisi 3 laki-laki dan 2 wanita
- Paling sedikit terdapat 3 orang karyawan laki-laki.

Jawaban:

- Karena pada pemilihan anggota tim urutan tidak diperhatikan, maka jumlah cara untuk memilih tim yang terdiri atas 3 orang laki-laki dan 2 orang wanita adalah:

$$\begin{aligned}
 C(6,3) \times C(9,2) &= \frac{6!}{3! \times (6-3)!} \times \frac{9!}{2! \times (9-2)!} \\
 &= \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{9 \times 8}{2 \times 1} \\
 &= 20 \times 36 = 720 \text{ cara}
 \end{aligned}$$

- Untuk menyelesaikan soal ini, kita perlu menghitung banyaknya cara untuk membentuk tim dengan 3 orang, 4 orang, dan 5 orang laki-laki.

- 3 orang laki-laki dan 2 orang perempuan:

Sama seperti perhitungan pada soal a, yaitu **720** cara.

- 4 orang laki-laki dan 1 orang perempuan:

$$\begin{aligned}
 C(6,4) \times C(9,1) &= \frac{6!}{4! \times (6-4)!} \times \frac{9!}{1! \times (9-1)!} \\
 &= \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{9}{1} \\
 &= 15 \times 9 = 135 \text{ cara}
 \end{aligned}$$

- 5 orang laki-laki, tidak ada anggota perempuan:

$$C(6,5) = \frac{6!}{5! \times (6-5)!} = \frac{6}{1} = 6 \text{ cara}$$

Setelah itu, kita olah nilai yang didapatkan dengan kaidah penjumlahan, yaitu:

$$720 + 135 + 6 = 861$$

Jadi, jumlah cara untuk membentuk tim dengan paling sedikit 3 orang laki-laki adalah **861** cara.

C. PERMUTASI DENGAN PERULANGAN OBJEK

Permutasi berbeda yang mungkin dari n buah objek, dengan beberapa objek berulang adalah:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \dots \times n_k!}$$

Contoh:

Ada berapa banyak susunan huruf berbeda yang bisa dibentuk dari huruf-huruf penyusun kata MATEMATIKA?

Jawaban:

Ada 10 huruf penyusun kata MATEMATIKA yang sebagian berulang. Huruf-huruf penyusun kata MATEMATIKA adalah:

2 huruf M, 3 huruf A, 2 huruf T, 1 huruf E, 1 huruf I, dan 1 huruf K.

Oleh karena itu, banyaknya susunan huruf berbeda yang dapat dibentuk dari huruf penyusun kata matematika adalah:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \dots \times n_k!} = \frac{10!}{2! \times 3! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1!} = \mathbf{1.200} \text{ kata}$$

TUGAS

1. Suatu undian dilakukan menggunakan angka yang terdiri dari 7 digit. Jika digit-digit dalam suatu angka diharuskan berbeda satu dengan lainnya, ada berapakah kemungkinan kelompok undian yang terbentuk, bila:
 - a. Tidak ada aturan khusus.
 - b. Nomor undian diawali dengan angka 553.
 - c. Nomor undian diawali dengan angka 547 dan setiap digit nomor undian tidak boleh berulang.

2. Bila ada 4 orang laki-laki dan 6 orang wanita, berapakah variasi barisan yang mungkin terbentuk, bila:
 - a. Tidak ada aturan barisan.
 - b. 4 orang laki-laki harus bersebelahan satu sama lain.
 - c. 2 orang laki-laki harus ada di barisan paling depan.
 - d. 3 orang laki-laki harus ada di barisan paling belakang.

- c. Sebuah perusahaan memiliki 10 orang karyawan laki-laki dan 8 orang karyawan perempuan. Bila pimpinan perusahaan ingin membentuk 1 tim berisi 6 orang, maka berapakah cara membentuk tim dengan:
 - a. Paling sedikit 3 orang laki-laki.
 - b. Paling banyak 4 orang perempuan.
 - c. Paling banyak 3 orang laki-laki, Ira dan Ari harus termasuk di dalam anggota tim.
 - d. Paling banyak 3 orang perempuan, Ari tidak boleh ada di dalam tim.