ALJABAR BOOLEAN

PENGANTAR- LOGIKA

- Dari bahasa Yunani logos
- Ilmu untuk berfikir dan menalar dengan benar (sehingga didapatkan kesimpulan yang absah).
- Manusia mampu mengembangkan pengetahuan karena mempunyai bahasa dan kemampuan menalar.
- Untuk dapat menarik konklusi yang tepat, diperlukan kemampuan menalar.
- Kemampuan menalar adalah kemampuan untuk menarik konklusi yang tepat dari bukti-bukti yang ada, dan menurut aturan-aturan tertentu
- Logika dapat dikatakan sebagai bentuk penarikan kesimpulan, apakah sesuatu atau argumen itu absah (valid) atau sebagai pendapat yang keliru (fallacious).
- Komputasi logika :
  - Logika Boolean (aljabar Boolean)

Aljabar Boolean

- An abstract mathematical system primarily used in computer science and in expressing the relationships between groups of objects or concepts (sets).

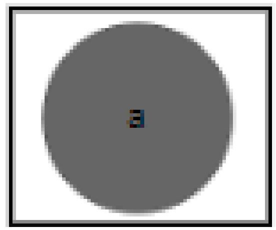
- Sifat-sifat fungsi-fungsi Boolean
  - **Logical sum, that is Boolean OR, of several argument values is** true if one or more of the argument values is true and is false only if all the argument values are false.
  - **Logical product, that is Boolean AND, of several argument** values is false if any of the argument values is false and is true only if all the argument values are true.
  - **NOT function ensures that NOT false = true and** NOT true = false.

Aljabar Boolean

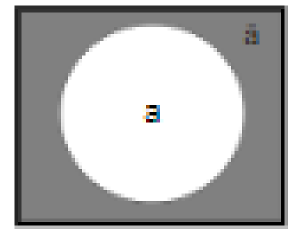
- setiap peubah Boolean hanya dapat berkeadaan satu dari dua keadaan, 0 atau 1
- Teorema dasar Aljabar Boolean
- $a + 0 = a \qquad a.0 = 0$
- $a + 1 = 1 \qquad a.1 = a$

Contoh Diagram Ven

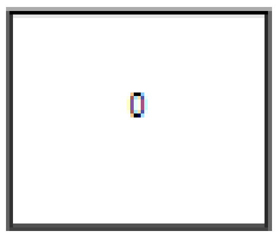
a



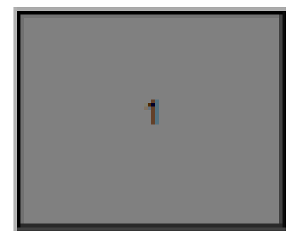
$\overline{a}$



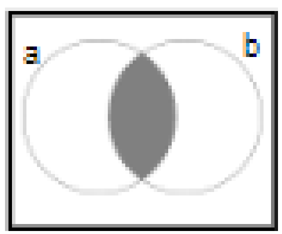
0



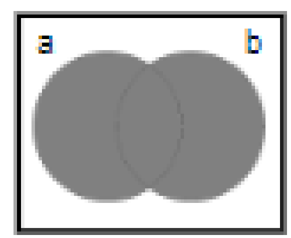
1



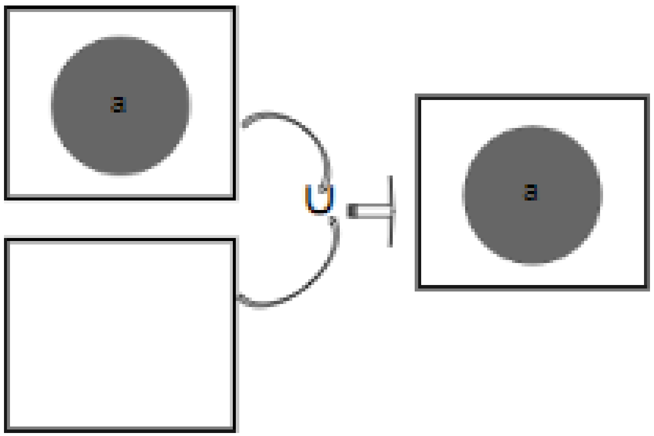
$a \bullet b$



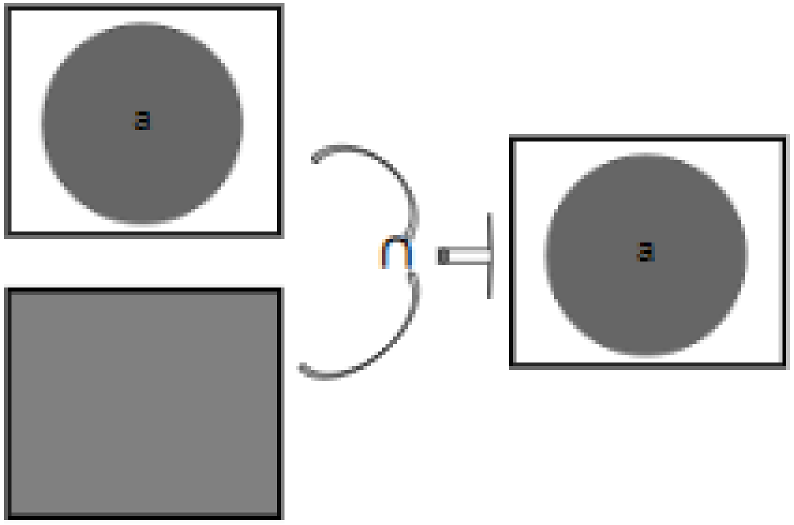
$a + b$



- $a + 0$



$a.1$



Ekspresi Boolean

- Mengevaluasi Ekspresi Boolean
- Contoh: $a' \cdot (b + c)$
- jika $a = 0, b = 1, dan\ c = 0,$
- maka hasil evaluasi ekspresi:
- $0' \cdot (1 + 0) = 1 \cdot 1 = 1$

- Dua ekspresi Boolean dikatakan ekivalen(dilambangkan dengan '=') jika keduanya mempunyai nilai yang sama untuk setiap pemberian nilai-nilai kepada n peubah.
  Contoh: $a \cdot (b + c) = (a . b) + (a \cdot c)$

- Contoh. Buktikan bahwa $a + a'b = a + b$.

a	b	a'	$a'b$	$a + a'b$	$a + b$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

- Perjanjian: tanda titik (·) dapat dihilangkan dari penulisan ekspresi Boolean, kecuali jika ada penekanan:
- $(i)\ a(b + c) = ab + ac$
- $(ii)\ a + bc = (a + b)(a + c)$
- $(iii)\ a \cdot 0$, $bukan\ a0$

Prinsip Dualitas

- Prinsip dualitas adalah konsep yang sangat penting dalam aljabar boolean.
- Prinsip dualitas dapat dikatakan bahwa, jika sebuah ekspresi adalah valid di dalam aljabar boolean, dual dari ekspresi tersebut valid juga.
- Dual dari sebuah Ekspresi dapat dicari dengan:
  - mengganti semua operator + dengan .
  - mengganti semua operator . dengan +
  - mengganti 1 (satu) dengan 0 (nol)
  - mengganti 0 (nol) dengan 1 (satu).

- Contoh.
- $(i)\ \ (a \cdot 1)(0 + a') = 0$

  $dualnya\ (a + 0) + (1 \cdot a') = 1$
- $(ii)\ a(a' + b) = ab$

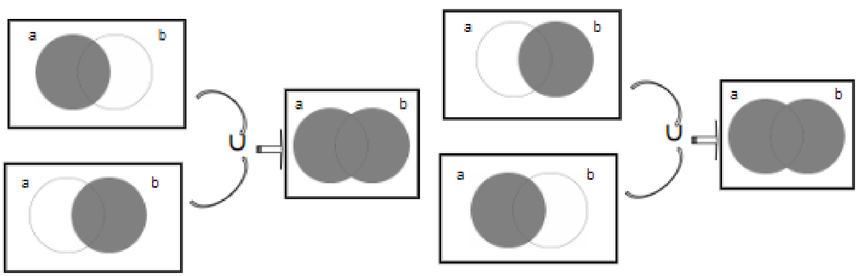
  $dualnya\ a + a'b = a + b$

Type equation here.	Type equation here.
$Hukum\ Identitas$	$(i)\ a + 0 = a$ $(ii)\ a \cdot 1 = a$
$Hukum\ Idempoten$	$(i)\ a + a = a$ $(ii)\ a \cdot a = a$
$Hukum\ Komplemen$	$(i)\ a + a' = 1$ $(ii)\ aa' = 0$
$Hukum\ Dominasi$	$(i)\ a \cdot 0 = 0$ $(ii)\ a + 1 = 1$
$Hukum\ Involusi$	$(i)\ (a')' = a$
$Hukum\ Penyerapan$	$(i)\ a + ab = a$ $(ii)\ a(a + b) = a$
$Hukum\ Komutatif$	$(i)\ a + b = b + a$ $(ii)\ ab = ba$
$Hukum\ Asosiatif$	$(i)\ a + (b + c) = (a + b) + c$ $(ii)\ a\,(b\,c) = (a\,b)\,c$
$Hukum\ Distributif$	$(i)\ a + (b\,c) = (a + b)\,(a + c)$ $(ii)\ a\,(b + c) = a\,b + a\,c$
$Hukum\ De\ morgan$	$(i)\ (a + b)' = a'b'$ $(ii)\ (ab)' = a' + b'$

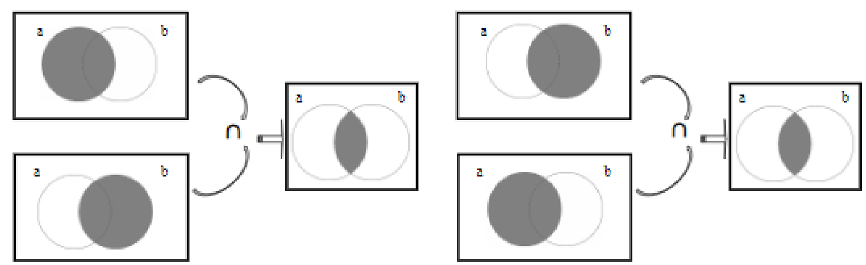
Hukum Komutatif

- **Commutativity of the + and . operations**
- Untuk setiap a dan b
  - $a + b = b + a,$
  - $a \,.\, b = b \,.\, a$

a + b   b + a



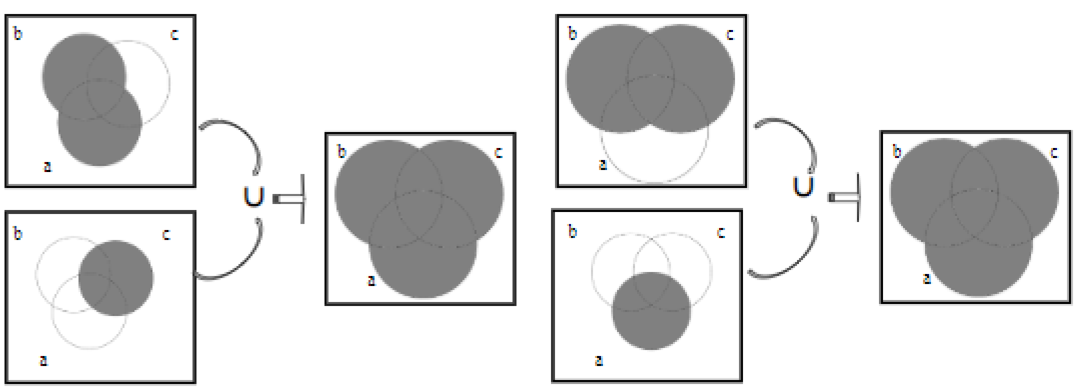
a . b   b . a



Hukum Asosiatif

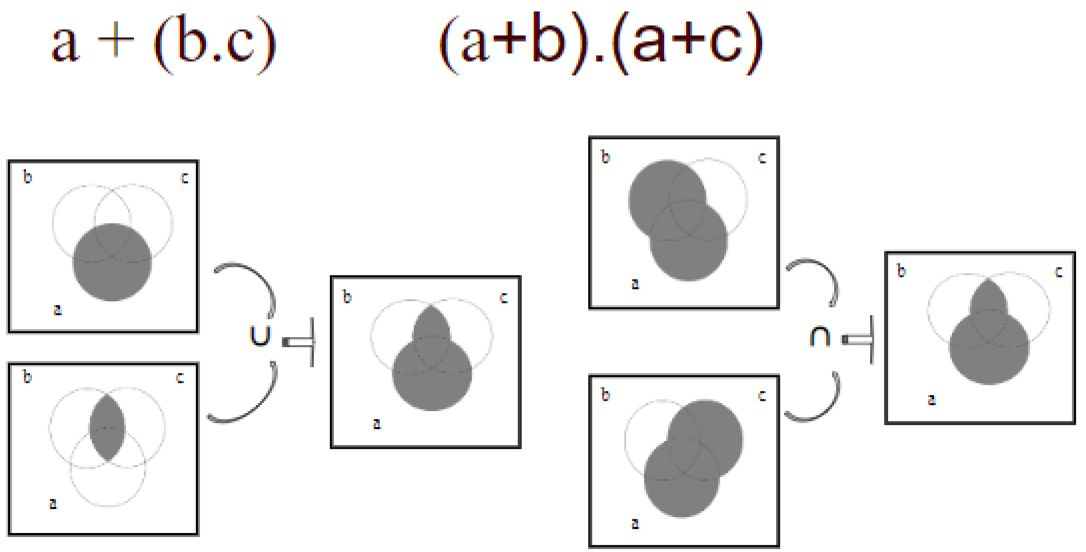
- **Associativity of the + and . operations**
- Untuk setiap a,b, dan c
  - $a + (b + c) = (a + b) + c$
  - $a.(b.c) = ((a.b).c.$

(a+b)+c a + (b+c)



Hukum Distributif

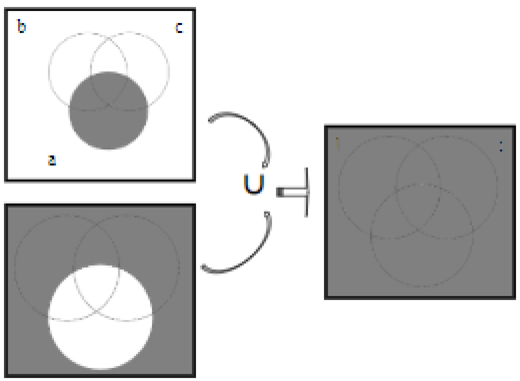
- **Distributivity of + over . and . over +**
- Untuk setiap a,b, dan c
  - $a + (b.c) = (a+b).(a+c),$
  - $a.(b+c) = (a.b) + (a.c).$

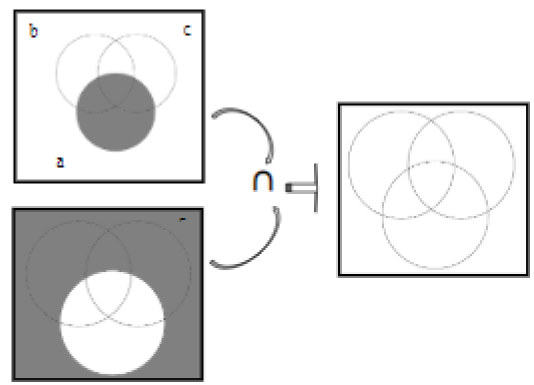


Hukum Komplemen

(i) $a + a' = 1$

(ii) $aa' = 0$





Hukum Penyerapan

- $a + ab = a$
- $a(a + b) = a$

Proof

$\boldsymbol{a + ab = a}$

$= (a.1) + (a.b)$

$= a(1 + b)$

$= a.1$

Fungsi Boolean

- Setiap ekspresi Boolean tidak lain merupakan fungsi Boolean.

- Misalkan sebuah fungsi Boolean adalah $f(x, y, z) = xyz + x'y + y'z$

- Fungsi f memetakan nilai-nilai pasangan terurut ganda-3 (x, y, z) ke himpunan $\{0, 1\}$.
- Contoh $(1, 0, 1)$ yang berarti $x = 1, y = 0$, dan $z = 1$ sehingga $f(1, 0, 1) = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1' \cdot 0 + 0' \cdot 1$

$$= 0 + 0 + 1 = 1$$

Fungsi Boolean

- Diketahui fungsi Booelan f(x, y, z) = xy z', nyatakan h dalam tabel kebenaran

x	y	z	xy	z'	xyz'
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Kanonikal Standar

- menyatakan suatu persamaan dalam hubungan operasi AND atau OR antar variabel secara lengkap pada setiap suku.
- Dan antar suku dihubungkan dengan operasi OR atau AND.
- Ada dua macam bentuk kanonik:
  - Penjumlahan dari hasil kali (sum-of-product atau SOP)
    - disebut minterm
  - 2. Perkalian dari hasil jumlah (product-of-sum atau POS)
    - disebut maxterm

x	y	Minterm Suku	Minterm Lambang	Maxterm Suku	Maxterm Lambang
0	0	$x'y'$	m_0	$x + y$	M_0
0	1	$x'y$	m_1	$x + y'$	M_1
1	0	xy'	m_2	$x' + y$	M_2
1	1	$x\ y$	m_3	$x' + y'$	M_3

x	y	z	Minterm Suku	Minterm Lambang	Maxterm Suku	Maxterm Lambang
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'y\ z'$	m_2	$x + y'+z$	M_2
0	1	1	$x'y\ z$	m_3	$x + y'+z'$	M_3
1	0	0	$x\ y'z'$	m_4	$x'+ y + z$	M_4
1	0	1	$x\ y'z$	m_5	$x'+ y + z'$	M_5
1	1	0	$x\ y\ z'$	m_6	$x'+ y'+ z$	M_6
1	1	1	$x\ y\ z$	m_7	$x'+ y'+ z'$	M_7

M I N T E R M

- Adalah suku dalam persamaan yang memiliki hubungan operasi AND antar variabel secara Lengkap dan antar suku dihubungkan dengan OR
- Contoh.

  Tunjukkan fungsi Boolean F = A + B'C dalam minterm
- Jawab.
  - Fungsi mempunyai 3 variabel A,B dan C
  - suku pertama A = A(B+B') (C+C')

    = ABC+ABC'+AB'C+AB'C'
  - suku kedua BC = B'C (A+A')

    = AB'C + A'B'C
- Jadi penulisan Minterm untuk F = A + B'C
  - F = ABC+ABC'+AB'C+AB'C'+A'B'C
  - = m7 + m6 + m5 + m4 + m1
  - Atau dapat ditulis dengan notasi
- F (ABC) = S (1,4,5,6,7)

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

MAXTERM

- Adalah suku dalam persamaan yang memiliki hubungan operasi OR antar variabel secara lengkap. Dan antar suku di hubungkan dengan operasi AND.
- Contoh.
  - Tunjukkan fungsi Boolean $F = XY + X'Z$ dalam Maxterm.
- Jawab.
  - Fungsi mempunyai 3 variabel X,Y dan Z
  - dengan menggunakan Hk.Distributif
  - $F = XY + X'Z$
  - $= (XY + X')(XY + Z)$
    $= (X + X')(Y + X')(X + Y)(X + Z)$
  - $= (X' + Y)(X + Z)(Y + Z)$

- Untuk suku 1
  - $(X'+Y) = X'+Y + ZZ' = (X' + Y + Z)\ (X' + Y + Z')$
  - $(X + Z) = X + Z + YY' = (X + Z + Y)\ (X + Y' + Z)$
  - $(Y + Z) = Y + Z + XX' = (X + Y + Z)\ (X' + Y + Z)$
- Jadi dapat ditulis
  - $F\ (XYZ) = (X+Y+Z)\ (X+Y'+Z)\ (X'+Y+Z)\ (X'+Y+Z')$
  - $= M0.M2.M4.M5$
- Atau ditulis dengan notasi
  - $F\ (XYZ) = p\ (0,2,4,5)$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

- Carilah bentuk Minterm dan Maxterm dari $f(x, y, z) = y' + xy + x'yz'$

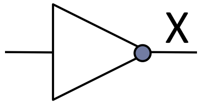
- Penyelesaian:
- (a) Minterm
- $f(x, y, z) = y' + xy + x'yz'$
  $= y' (x + x') (z + z') + xy (z + z') + x'yz'$
  $= (xy' + x'y') (z + z') + xyz + xyz' + x'yz'$
  $= xy'z + xy'z' + x'y'z + x'y'z' + xyz + xyz' + x'yz'$

- atau $f(x, y, z) = m0 + m1 + m2 + m4 + m5 + m6 + m7$

- (b) Maxterm $f(x, y, z) = M3 = x + y' + z'$

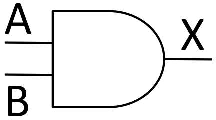
Gerbang Logika

NOT



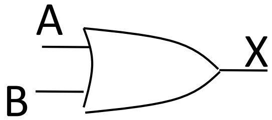
A	X
0	1
1	0

AND



A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

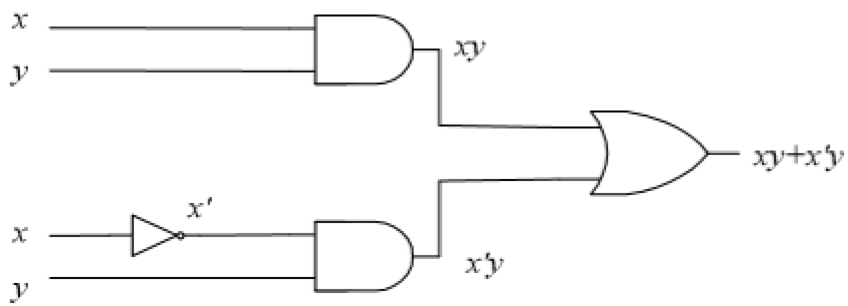
OR

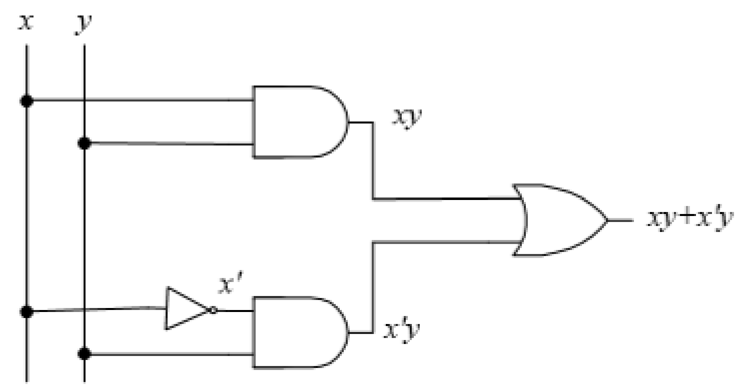


A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Gerbang Logika

- Contoh. Nyatakan fungsi f(x, y, z) = xy + x'y ke dalam rangkaian logika.

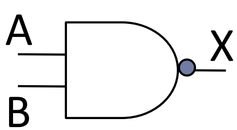




Gerbang Logika

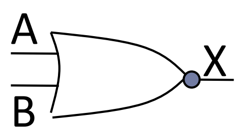
- ## GERBANG TURUNAN

NAND



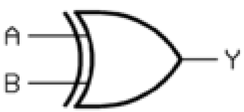
A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR



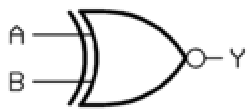
A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

XOR



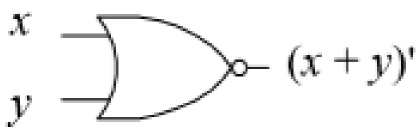
A	B	Y
0	0	0
0	I	I
I	0	I
I	I	0

XNOR

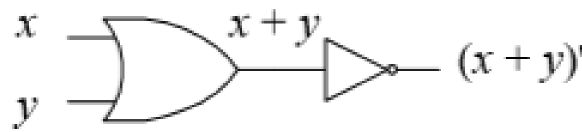


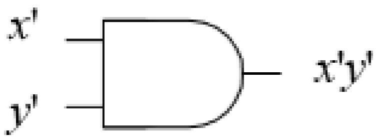
A	B	Y
0	0	I
0	I	0
I	0	0
I	I	I

NAND inverse dari AND
NOR inverse dari OR

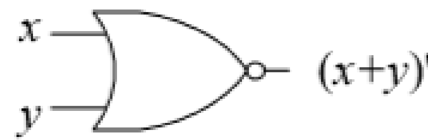


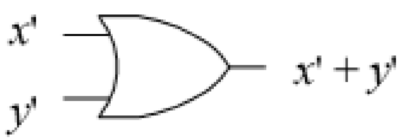
ekivalen dengan



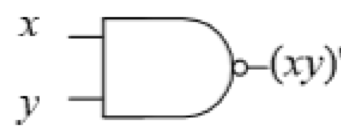


ekivalen dengan





ekivalen dengan



Penyederhanaan Fungsi Boolean

- Penyederhanaan Secara Aljabar
- Penyederhanaan Menggunakan Peta Karnaugh

Penyederhanaan Secara Aljabar

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= x + x'y \\
&= (x + x')(x + y) \\
&= 1 \cdot (x + y) \\
&= x + y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x'y'z + x'yz + xy' \\
&= x'z(y' + y) + xy' \\
&= x'z + xz'
\end{aligned}
$$

Penyederhanaan Secara Aljabar

- $f(x, y, z) = xy + x'z + yz$
  $= xy + x'z + yz(x + x')$
  $= xy + x'z + xyz + x'yz$
  $= xy(1 + z) + x'z(1 + y)$
  $= xy + x'z$

Penyederhanaan Menggunakan Peta Karnaugh

- Peta Karnaugh dengan dua peubah

m_0	m_1
m_2	m_3

		y 0	1
x	0	$x'y'$	$x'y$
	1	xy'	xy

- Peta dengan tiga peubah

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

		yz 00	01	11	10
x	0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
	1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

Penyederhanaan Menggunakan Peta Karnaugh

- Peta Karnaugh dengan 4 peubah

yz

wz	00	01	11	10
00	w'z'y'z'	w'z'y'z	w'z'yz	w'z'yz'
01	w'xy'z'			
11	wzy'z'			
10	wz'y'z'			wz'yz'

- Teknik Minimisasi Fungsi Boolean dengan Peta Karnaugh

1. Pasangan: dua buah 1 yang bertetangga

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

Sebelum disederhanakan:

$f(w,x,y,z) = wxyz + wxyz'$

Hasil Penyederhanaan:

$f(w,x,y,z) = wxy$

Bukti secara aljabar:

$f(w,x,y,z)$

$= wxyz + wxyz'$

$= wxy(z + z')$

$= wxy(1)$

$= wxy$

2. Kuad: empat buah 1 yang bertetangga

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

Sebelum disederhanakan: $f(w, x, y, z) = wxy'z' + wxy'z + wxyz + wxyz'$
Hasil penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = wx$

- Oktet: delapan buah 1 yang bertetangga

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Sebelum disederhanakan: $f(a, b, c, d) = wxy'z' + wxy'z + wxyz + wxyz' + wx'y'z' + wx'y'z + wx'yz + wx'yz'$

Hasil penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = w$

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	0	1
11	1	1	0	1
10	1	1	0	1

$$f(w,x,y,z) = wy' + yz' + w'x'z$$

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$$f(w,x,y,z) = w + xy'z$$

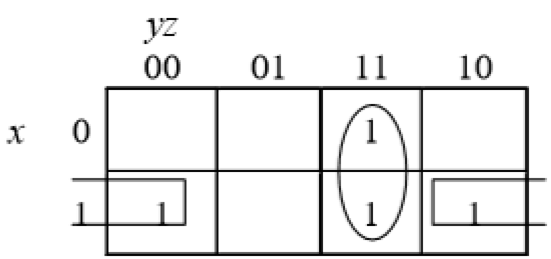
- (Penggulungan/rolling)

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	0	0	0

$$f(w,x,y,z) = xy'z' + xyz'$$

$$f(w,x,y,z) = xz'$$

- Sederhanakan fungsi Boolean f(x, y, z) = x’yz + xy’z’ + xyz + xyz’.



$$Hasil\ penyederhanaan:\ f(x, y, z) = yz + xz'$$

- Kelompok berlebihan

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	0
11	0	1	1	0
10	0	0	1	0

$$f(w,x,y,z) = xy'z + wxz + wyz$$

belum sederhana.

$$f(w,x,y,z) = xy'z + wyz$$

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	0
11	0	1	1	0
10	0	0	1	0