Praktikum II "Numerik am Computer" FS 2017
Prof. H. Harbrecht; F. Bieder, R. Brügger, R. Dohrau,
R. Erb, D. Felder, G. Talarico, D. Tröndle Universität Basel

Serie 4

Polynominterpolation und Horner-Schema

zur 12. KW (27.03. – 02.04.2017)

Aufgabe 4.1:

a) Schreibe zwei MATLAB-Funktionen

`a = monomial_coeff(x,y)` und `p = monomial_interpol(a,x,z)`.

Die Funktion `monomial_coeff` soll die Koeffizienten, welche in der monomialen Darstellung vorkommen, berechnen. Die Funktion `monomial_interpol` soll den Wert des Interpolationspolynoms p an einer beliebigen Stelle z mit Hilfe dieser Koeffizienten auswerten. Es soll auch möglich sein, z als Vektor zu übergeben. Benutze ausserdem das Horner-Schema, um das Interpolationspolynom auszuwerten (siehe Beilage).

b) Teste deine Programme:

(i) Was sind die (monomialen) Koeffizenten des Interpolationspolynom p durch die Stützpunkte $(-2, 84)$, $(-1, 18)$, $(1, -12)$ und $(2, -72)$?
(Antwort: $a_0 = 2$, $a_1 = -7$, $a_2 = 1$ und $a_3 = -8$)

(ii) Was ist $p(\mathbf{z})$ für $\mathbf{z} = (3, 4, 5, 6)$?
(Antwort: $p(\mathbf{z}) = (-226, -522, -1008, -1732)$)

Aufgabe 4.2:

a) Schreibe eine MATLAB-Funktion

`p = lagrange_interpol(x,y,z)`,

welche das Lagrange-Interpolationspolynom mit den Stütztstellen gegeben durch x und y bildet und in z auswertet. Es soll wiederum möglich sein, z als Vektor zu übergeben.

b) Was ist $p(\mathbf{z})$ zu den Stützpunkten $(-2, 1538), (-1, 911), (1, 209)$ und $(2, 62)$ für $\mathbf{z} = (3, 4, 5, 6)$? (Antwort: schöne Zahlen)

Aufgabe 4.3: Wir stellen uns in dieser Aufgabe vor, dass es in MATLAB keine Funktion gibt, um den Cosinus zu berechnen. Daher müssen wir unsere eigene Cosinus-Funktion schreiben, wobei wir annehmen, dass wir zu den Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ in $[0, 2\pi]$ die Werte $y_i := \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$ kennen.

a) Schreibe drei MATLAB-Funktionen, die eine Approximation für den Cosinus liefern. (Dazu kannst du entweder die Monomiale Interpolation aus Aufgabe 1 oder die Lagrange-Interpolation aus Aufgabe 2 verwenden.) Die Funktionen sollen auch Vektoren als Eingabe akzeptieren.

(i) Die Funktion `p_1 = approx_cos_1(z)` soll die Stützstellen

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y_i	1	0	-1	0	1

benutzen.

(ii) Die Funktion `p_2 = approx_cos_2(z)` soll die Stützstellen

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	$5\pi/3$	2π
y_i	1	$1/2$	$-1/2$	-1	$-1/2$	$1/2$	1

benutzen.

(iii) Die Funktion `p_3 = approx_cos_3(z)` soll die Stützstellen

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$5\pi/3$	$11\pi/6$	2π
y_i	1	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	1

benutzen.

b) Zeichne die drei Approximationen der Cosinus-Kurve für $z \in [0, 2\pi]$ (Schrittweite $\pi/100$) sowie die exakte Lösung in ein Bild. Zeichne danach die Approximationen der Cosinus-Kurve für $z \in [-\pi, 3\pi]$ (Schrittweite $\pi/100$) in ein Bild. Was fällt dir auf? Speichere die Bilder als `Aufg_3_1.fig` und `Aufg_3_2.fig`.

c) Um unsere Approximation auch für $z \notin [0, 2\pi]$ sinnvoll gebrauchen zu können, nutzen wir die Periodizität der Cosinus-Funktion aus: Modifiziere deine Funktionen aus Teil a) so, dass z auf ein $\tilde{z} \in [0, 2\pi]$ abgebildet wird mit $\cos(z) = \cos(\tilde{z})$, bevor die eigentliche Approximation berechnet wird. Dabei hilft der MATLAB-Befehl `mod`.

d) Zeichne, mit der Modifikation aus c), die drei Approximationen $p_i(z)$, $i = 1, 2, 3$, für $z \in [-2\pi, 4\pi]$ (Schrittweite $\pi/100$) sowie die exakte Lösung in ein Bild. Benutze `legend`, um dem Bild eine Legende hinzuzufügen und gib ihm mit `title` eine Überschrift. Zeichne auch den absoluten Fehler $|p_i(z) - \cos(z)|$, $i = 1, 2, 3$, in ein Bild. Benutze zuerst wie gewohnt den Befehl `plot`, und dann den Befehl `semilogy`. Beschrifte die Bilder wiederum mit einer Überschrift und einer Legende. Welche der drei Approximationen ist am besten?

Allgemeine Informationen zum Praktikum II befinden sich auf der Website
`www.math.unibas.ch/~harbrech/teaching/praktikumII/praktikumII.html`