Оглавление

Раздел I Элементы линейной алгебры

Раздел II Аналитическая геометрия

Раздел I Элементы линейной алгебры

ЛЕКЦИЯ 1

Тема Матрицы и определители

§1. Матрицы: основные понятия

Понятие матрицы возникает и используется в различных разделах высшей математики, в частности, при изучении систем линейных уравнений. В отличие от элементарной алгебры мы будем рассматривать системы с произвольным числом уравнений и неизвестных. Все неизвестные приходится обозначать одной буквой с индексом; то же относится и к свободным членам. Коэффициенты при неизвестных приходится индексировать двумя индексами: первый указывает на номер уравнения системы, а второй – на номер неизвестного, при котором находится коэффициент. Система m линейных уравнений с n неизвестными (не обязательно $m=n$) запишется в следующем общем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Используя символ суммирования $\sum$, можно получить более простую запись системы:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \\ i = 1,2,\ldots,m. \end{cases} \qquad (2)$$

Составленная из чисел, прямоугольная таблица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

называется **матрицей** и кратко обозначается A, или (a_{ij}), или $A=(a_{ij})$ $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$.

Числа в матрице расположены рядами. Горизонтальные ряды называются **строками**, а вертикальные – **столбцами**. Сами числа называются элементами матрицы. Индексы указывают месторасположение элемента:

первый индекс указывает номер строки, второй – столбца. Заметим, что a_{13} следует читать “a один три”, а не “a тринадцать”. В матрице (3) m строк и n столбцов и о ней говорят: “матрица A размера $m\times n$” или “$(m\times n)$-матрица $A=(a_{ij})$”.

Матрица, состоящая из одного столбца (и m строк), называется вектор-столбцом, или вектором, или столбцом. Уточняя, говорят: “m-мерный столбец”.

Матрица, состоящая из одной строки (и n столбцов), называется n-мерной строкой, вектором, вектор-строкой.

Итак, вся информация о системе (1) содержится в двух матрицах: в матрице коэффициентов $A=(a_{ij})$ и столбце свободных членов $B=(b_i)$.

Если в матрице (3) $m=n$ (т.е. число строк равно числу столбцов), то матрица называется **квадратной матрицей** порядка n:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Для такой матрицы вводятся понятия главной и побочной диагоналей. **Главной диагональю матрицы** (4) называют диагональ $a_{11}\ a_{22}\ \dots\ a_{nn}$, идущая из левого верхнего угла этой матрицы в правый нижний её угол. **Побочной диагональю** этой матрицы называется диагональ $a_{n1}\ a_{n-1,2}\ \dots\ a_{1n}$, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

Если все элементы матрицы (4), расположенные ниже главной диагонали, равны нулю, то матрица называется **верхней треугольной**. **Нижняя треугольная** определяется аналогично. Верхние и нижние треугольные матрицы называются также просто **треугольными**.

Матрица (4) называется **диагональной**, если она одновременно и верхняя треугольная, и нижняя, т.е. ниже и выше главной диагонали стоят нули.

Диагональная матрица, у которой все элементы, стоящие на главной диагонали равны 1, называется **единичной** и обозначается E, или E_n (индекс указывает порядок).

Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется **нулевой**.

Приведем примеры, рассмотренных выше частных случаев квадратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§2. Основные операции над матрицами и их свойства

Прежде всего, договоримся считать две матрицы равными, если эти матрицы имеют одинаковые размеры и все их соответствующие элементы совпадают.

Перейдем к определению операций над матрицами.

1) <u>Сложение матриц</u>. Сумой двух матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одного и того же размера $m\times n$ называется матрица $C=(c_{ij})$ того же размера $m\times n$, элементы которой равны

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i=1,2, \dots , m;\ j=1,2, \dots ,n). \qquad (1)$$

Для обозначения суммы матриц используется запись $C=A+B$.

2) <u>Умножение матрицы на число</u>. Произведением $(m\times n)$-матрицы A на число λ называется $(m\times n)$-матрица $C=(c_{ij})$, элементы которой равны

$$c_{ij} = \lambda\, a_{ij} \quad (i=1,2, \dots , m;\ j=1,2, \dots ,n). \qquad (2)$$

Для обозначения произведения матрицы на число используется запись $C=\lambda\cdot A$.

Непосредственно из формул (1) и (2) ясно, что две введенные операции обладают свойствами:

а) $A+B = B+A$ – коммутативность сложения ;

б) $(A+B)+C = A+(B+C)$ – ассоциативность сложения;

в) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$ – ассоциативность умножения на число;

г) $\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B$ – дистрибутивность умножения относительно сложения.

<u>Замечание 1.</u> Разность матриц можно определить следующим образом:

$$A–B = A+(–1)B.$$

Кратко говоря, сложение, вычитание матриц и умножение матрицы на число производится поэлементно.

<u>Пример:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\cdot 3 & 2+2\cdot(-1) \\ 3+2\cdot 5 & 4+2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 13 & 8 \end{pmatrix}.$$

3) <u>Умножение матриц</u>. Произведением $(m\times n)$-матрицы $A=(a_{ij})$ на $(n\times p)$-матрицу $B=(b_{ij})$ называется $(m\times p)$-матрица $C=(c_{ij})$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}\,,$$

которую с использованием символа суммирования можно записать в виде

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad (i=1,2, \dots , m;\ j=1,2, \dots , p).$$

Для обозначения произведения матрицы A на матрицу B используют запись $C=A\cdot B$.

Сразу заметим, что матрицу A можно умножить не на всякую матрицу B: необходимо, чтобы число столбцов матрицы A было равно числу строк матрицы B.

Формула (3) представляет правило нахождения элементов матрицы $A{\cdot}B$. Сформулируем это правило словесно: **элемент c_{ij} , стоящий в i-й строке и j-ом столбце матрицы $A{\cdot}B$, равен сумме попарных произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.**

Приведем пример умножения квадратных матриц второго порядка:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц обладает свойствами:

а) $(AB)C = A(BC)$ – ассоциативность;

б) $(A+B)C = AC+BC$ или $A(B+C) = AB+AC$ – дистрибутивность умножения относительно сложения.

Вопрос о коммутативности умножения имеет смысл ставить лишь для квадратных матриц одинакового порядка, ибо только для таких матриц A и B оба произведения AB и BA определенны и являются матрицами одинаковых порядков. Элементарные примеры показывают, что умножение матриц, вообще говоря, некоммутативно. Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad и \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ то } AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq AB.$$

<u>Пример</u>. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ найти все матрицы B такие, что $AB = BA$.

<u>Решение</u>. Введем обозначение $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ x+z & y+t \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ z+t & t \end{pmatrix}.$$

Равенство $AB = BA$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x = x + y, \\ y = y, \\ x + z = z + t, \\ y + t = t, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, равносильна системе $\begin{cases} y = 0, \\ t = x. \end{cases}$

Итак, искомая матрица имеет вид $B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x \end{pmatrix}$, где x и z – произвольные числа. Её можно записать и так: $B = zA+(x–z)E$.

Замечание. Единичная и нулевая матрицы n-го порядка перестановочны с любой квадратной матрицы того же порядка, причем $AE = EA = A$, $A\cdot 0 = 0\cdot A = 0$.

Используя операцию умножения, дадим наиболее краткую – матричную – форму записи системы линейных уравнений (1.1). Введем обозначения: $A=(a_{ij})$ – $(m\times n)$-**матрица коэффициентов** системы уравнений;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – $\boldsymbol{m}$**-мерный столбец свободных членов** и

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – $\boldsymbol{n}$**-мерный столбец неизвестных**. Согласно определению произведение $A\cdot X$ представляет собой m-мерный столбец. Его элемент, стоящий в i-й строке, имеет вид

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n .$$

Но эта сумма есть не что иное, как левая часть i-го уравнения системы (1.1) и по условию она равна b_i , т.е. элементу, стоящему в i-й строке столбца B. Отсюда получаем: $\boldsymbol{A\cdot X = B}$. Это и есть матричная запись системы линейных уравнений. Здесь: A – матрица коэффициентов системы, B – столбец свободных членов, X – столбец неизвестных.

4) Транспонирование матрицы. Транспонированием любой матрицы называется операция, в результате которой меняются местами строки и столбцы с сохранением порядка их следования. В результате транспонирования $(m\times n)$-матрицы A получается $(m\times n)$-матрица, обозначаемая символом A' и называемая транспонированной по отношению к матрице A.

Пример. Для $A = (a_1\ a_2\ a_3)$ найти $A\cdot A'$ и $A'\cdot A$.

Решение. Транспонированная строка – это столбец. Поэтому:

$$A\cdot A' = (a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$ – квадратная матрица 1го порядка.

$$A'\cdot A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(a_1\ a_2\ a_3) = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{pmatrix}$$ – квадратная матрица 3го порядка.

§3. Линейная зависимость и независимость вектор-столбцов и вектор-строк

Рассмотрим несколько m-мерных столбцов, элементы которых будем индексировать двумя индексами

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \ldots,\ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Как и любые матрицы их можно умножать на числа и складывать. Пусть λ_1, $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ – некоторые числа.

Вектор-столбец вида $C= \lambda_1 A_1+ \lambda_2 A_2+\ldots+ \lambda_n A_n$ называется линейной комбинацией вектор-столбцов $A_1, A_2,\ldots, A_n$, а числа $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$ называются коэффициентами линейной комбинации.

Очевидно,

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \ldots + \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_n a_{2n} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \ldots + \lambda_n a_{mn} \end{pmatrix}$$

Для понятия линейной зависимости и независимости существует два определения, равносильность которых принимаем без доказательства.

1. Вектор-столбцы называются линейно зависимыми, если хотя бы один из них есть линейная комбинация остальных. Вектор-столбцы называются линейно независимыми, если ни один из них не являются линейной комбинацией других.

2. Вектор-столбцы A_1, $A_2, \ldots, A_n$ называются линейно зависимыми, если существуют числа α_1, α_2, ..., α_n, не равные 0 одновременно, такие, что

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n = 0. \quad (2)$$

Вектор-столбцы A_1 $A_2, \ldots, A_n$ называются линейно независимыми, если равенство (2) возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Заметим, что в (2) правая часть – это нулевой столбец.

Например, столбцы $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – линейно независимы, ибо их линейная комбинация имеет вид

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda \alpha_3 A_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

и равна нулевому столбцу, если только $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Столбцы же $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *и* $A_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ – линейно зависимы, ибо $A_3 = 2A_1 + A_2$.

Для двух столбцов линейная зависимость равносильна пропорциональности их элементов.

Вопрос о линейной независимости и зависимости столбцов (1) в силу определения 2 равносилен вопросу: имеет ли однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

только нулевое решение или еще и не нулевые решения.

Очевидно, что во всех приведенных выше рассуждениях термин “столбцы” можно заменить термином “строки”.

ЛЕКЦИЯ 2

§4. Определители второго и третьего порядков

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

С каждой такой матрицей свяжем вполне определенную численную характеристику, называемую определителем, соответствующим этой матрице, и обозначаемую одним из символов: Δ, $\det(A)$ или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2)$$

Как и для матриц, для определителей используется терминология: строки, столбцы, элементы определителя и т.п.

Если порядок матрицы (1) равен 1, т.е. матрица $A=(a_{11})$ состоит из одного числа, то положим $\det(A)=a_{11}$.

Если порядок матрицы (1) равен 2, т.е. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то определителем второго порядка, соответствующим этой матрице, назовем число

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей. Итак, по определению

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \quad (3)$$

Определитель (3) естественным образом возникает при решении системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases}$$

Если 1[е] уравнение умножить на a_{22}, а второе на $(-a_{12})$ и почленно сложить, то из полученного равенства x_1 выражается как отношение двух определителей второго порядка, а именно:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Для неизвестного x_2 можно получить похожую формулу.

Прежде, чем давать определение определителя третьего порядка и т.д., введем два новых понятия.

В квадратной матрице n-го порядка (1) или в определителе n-го порядка (2) зафиксируем элемент a_{ij} и вычеркнем из нее элементы стоящие в i-й строке и j-ом столбце. Из оставшихся элементов образуем **определитель** $(n–1)$-го порядка, назовем его **минором элемента** a_{ij} и обозначим M_{ij} .

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} назовем число

$$A_{ij}=(–1)^{i+j}M_{ij} .$$

Ясно, что пока мы можем вычислять миноры и дополнения для элементов матрицы третьего порядка: например, для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-4) = 5.$$

Вычислим алгебраические дополнения всех девяти элементов матрицы $A=(a_{ij})$ третьего порядка и составим шесть таких сумм:

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} A_{ij} \ (i = 1,2,3);$$
$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} A_{ij} \ (j = 1,2,3). \qquad (4)$$

Нетрудно проверить справедливость следующей теоремы

Теорема Лапласа. Все шесть сумм вида (4) равны одному и тому же числу.

Теперь мы можем дать определение: определителем третьего порядка, соответствующим матрице $A=(a_{ij})$ третьего порядка, называют общее значение сумм (4).

Выпишем подробнее одну из сумм:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Эту формулу называют разложением определителя третьего порядка по элементам первой строки (аналогичные названия есть и для остальных пяти сумм вида (4)).

Замечание. Для вычисления определителя 3-го порядка существуют (кроме определения) различные вычислительные схемы.

§5. Определитель порядка n

Если рассмотреть матрицу 4-го порядка $A=(a_{ij})$, то алгебраические дополнения ее элементов – это определители 3-го порядка (с точностью до знака). Мы уже умеем их вычислять. Для такой матрицы можно составить 8 сумм

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}A_{ij} \ (i = 1,2,3,4);$$

$$\sum_{i=1}^{4} a_{ij}A_{ij} \ (j = 1,2,3,4).$$

Оказывается и здесь верна теорема Лапласа: все эти 8 сумм дают одно и то же число, которые и называют определителем 4-го порядка. После этого можно дать определение определителя 5-го порядка и так далее. И, вообще, можно дать следующее индуктивное определение определителя порядка n.

Определителем порядка n, соответствующим квадратной матрице $A=(a_{ij})$, называется число, вычисляемое по любой из $2n$ формул:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \ (i = 1,2,\ldots,n); \qquad (1)$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \ (j = 1,2,\ldots,n). \qquad (2)$$

Это определение корректно, ибо можно доказать, что все $2n$ сумм в формулах (1) и (2) дают одно и то же число (теорема Лапласа).

Формула (1) называется разложением определителя по элементам i-й строки, а формула (2) – разложением определителя по элементам j-го столбца.

Приведем пример вычисления определителя четвертого порядка. Очевидно, что для разложения надо выбирать строку (или столбец), в которой много нулей.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} =$$

$$= 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \left(2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \right) + 3 \left(1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= 3 \cdot (-2(1 \cdot 6 - 2 \cdot 4)) + 3((1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) - -2(1 \cdot 4 - 3 \cdot 0)) = -30.$$

Исходный определитель разлагали по 3-му столбцу, а миноры M_{13} и M_{33} – по 2-й строке.

§6. Свойства определителей

Некоторые свойства непосредственно следуют из определения определителя, другие доказываются с помощью метода математической индукции. Для определителей 2-го и 3-го порядков все эти свойства легко проверяются непосредственно.

1. При транспонировании матрицы её определитель не изменяется: $\det(A)=\det(A')$.

Это свойство непосредственно вытекает из определения, ибо разложение $\det(A)$ по столбцу тождественно совпадает с разложением $\det(A')$ по строке. Оно означает полную равноправность строк и столбцов и позволяет нам все последующие свойства устанавливать лишь для строк и быть уверенными в справедливости их и для столбцов.

2. Если в определителе переставить местами две строки (два столбца), то определитель поменяет знак на противоположный. Если порядок определителя n=2, то определители

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad и \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}$$

отличаются лишь знаком, т.е. свойство выполняется. Предположим, что это свойство справедливо для определителей (n–1)-го порядка и, опираясь на это, убедимся в справедливости свойства для определителя порядка n.

Разложим определитель порядка n по элементам какой-либо строки, не принимающей участие в перестановке:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} . \qquad (1)$$

Заметим, что в этой формуле все миноры M_{ij} – это определители $(n–1)$-го порядка. Перестановка двух строк в определителе Δ вызовет перестановку тех же строк (быть может, с другими номерами) и во всех минорах, что, по предположению индукции, приведет к изменению их знаков на противоположные. Но, если в сумме, стоящей в правой части (1), все слагаемые изменят знаки на противоположные, то и вся сумма, т.е. определитель, изменит знак. Свойство доказано.

3. Общий множитель всех элементов некоторой строки (или некоторого столбца) определителя можно вынести за знак определителя.

Например, для определителя 3-го порядка это свойство выглядит так

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Отметим одно свойство алгебраических дополнений (оно понадобится нам и в дальнейшем):

Если два определителя отличаются лишь одной строкой, то алгебраические дополнения элементов этой строки у обоих определителей совпадают (ибо элементы рассматриваемой строки не участвуют в образовании алгебраических дополнений).

Пусть в данном определителе, который обозначим Δ_1, элемент i-й строки имеют общий множитель λ. Определитель, получающийся из Δ_1 вынесением этого множителя, обозначим Δ. Эти два определителя отличаются только i-й строкой, а значит алгебраические дополнения A_{ij} $(j=1,2,\ldots,n)$ элементов этой строки у Δ_1 и Δ совпадают. Поэтому

$$\Delta_1 = \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{ij}) A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \lambda (a_{ij} A_{ij}) = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \lambda \cdot \Delta .$$

Свойство доказано.

4. Определитель равен нулю, если: а) содержит строку (столбец), все элементы которой равны 0; б) содержит две равные строки (столбца); в) элементы двух строк (столбцов) пропорциональны.

Докажем б), для чего переставим местами две равные строки. С одной стороны определитель Δ не изменится, а с другой стороны, в силу свойства 2 изменит знак на противоположный. Таким образом, $\Delta = -\Delta$, т.е. $\Delta=0$.

5. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали (Докажите самостоятельно). В частности, определитель единичной матрицы равен 1.

6. Пусть каждый элемент i-й строки определителя Δ имеет вид $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$. Тогда этот определитель можно представить в виде суммы двух

определителей Δ_1 и Δ_2 , причем определитель Δ_1 в i-й строке имеет элементы равные b_{ij} , а Δ_2 – элементы c_{ij} $(j=1,2,\ldots,n)$, элементы же других строк определителей Δ_1 и Δ_2 совпадают с элементами исходного определителя Δ.

Например, для определителя второго порядка

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Для доказательства этого свойства достаточно разложить определитель Δ по элементам i-й строки.

7. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольный множитель λ.

Например, для определителя 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+\lambda a & d+\lambda b \end{vmatrix}.$$

Это свойство является следствием свойств 6, 3 и 4б.

Применяя это свойство, можно обратить в ноль все элементы какого-нибудь столбца, за исключением одного. Тогда разложение определителя по элементам этого столбца содержит только одно слагаемое и вопрос о вычислении определителя порядка n сразу сводится к вопросу о вычислении определителя порядка $(n–1)$. Более того, используя это свойство, всякий определитель можно привести к треугольному виду, а затем воспользоваться свойством 5.

Пример. Вычислить определитель, приведя его к треугольному виду

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 9 & 7 \end{vmatrix}.$$

Решение. Чтобы обратить в ноль элементы первого столбца, стоящие ниже главной диагонали, умножим 1-ю строку на (–2) и прибавим ко 2-й строке и одновременно умножим на 3 и прибавим к третьей строке. Получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 15 & 16 \end{vmatrix}.$$

Теперь с помощью 2-й строки можно обратить в ноль элементы 2-го столбца, стоящие ниже главной диагонали: Умножим 2-ю строку на 15 и прибавим к третьей. Получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -14 \end{vmatrix}.$$

Чтобы получить значение определителя, достаточно перемножить элементы главной диагонали: $\Delta=1\cdot(-1)\cdot(-14)=14$.

8. Если A и B – квадратные матрицы одинакового порядка, то $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$. (Без доказательства).

9. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов любой другой строки (столбца) равна нулю.

Заметим, что, если A_{kj} $(j=1,2,\ldots,n)$ – это алгебраические дополнения элементов k-й строки определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

а c_1, c_2, … c_n – произвольные числа, то сумма $c_1A_{k1}+c_2A_{k2}+\ldots+c_nA_{kn}$ есть не что иное, как разложение по k-й строке определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

который получился из определителя Δ заменой элементов k-й строки числами c_1, c_2, …, c_n. Но тогда сумма $a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}$ (произведение элементов i-й строки на дополнения k-й строки) есть разложение определителя, который получается из Δ заменой элементов k-й строки элементами i-й строки. Но определитель с двумя равными строками равен 0 (свойство 4б). Итак, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$ $(если\;\; i \neq k)$. Свойство доказано.

10. Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его строки (столбцы) являются линейно зависимыми, т.е. хотя бы одна из строк (столбцов) есть линейная комбинация остальных (без доказательства).

В частности, определитель 2-го порядка равен нулю тогда и только тогда, когда его строки (столбцы) пропорциональны.

Действительно, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0 \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

§7. Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка, а E – единичная матрица того же порядка.

Матрица B называется обратной по отношению к матрице A, если $AB=BA=E$.

Теорема. Всякая матрица с отличным от нуля определителем (т.н. невырожденная матрица) имеет обратную и притом единственную.

Доказательство. Вычислим алгебраические дополнения A_{ij} всех n^2 элементов матрицы A, составим из них новую матрицу и транспонируем её. Получим т.н. союзную матрицу:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произведение матриц $A \cdot A^*=(c_{ij})$. Его элементы вычисляются по формуле $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$. Если $i=j$, то эта сумма равна определителю $\Delta=\det(A)$ (по определению), если же $i\neq j$, то она равна 0 (по свойству 9). Итак, матрица $A \cdot A^*$ имеет вид

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix} = \Delta \cdot E.$$

Но тогда $A \cdot (\frac{1}{\Delta} A^*) = E$. Аналогично можно показать, что и $A^*A=\Delta \cdot E$ и $(\frac{1}{\Delta} A^*) \cdot A = E$.Все это означает, что матрица $B = \frac{1}{\Delta} A^*$ и есть обратная матрица по отношению к матрице A.

Докажем единственность. Пусть существует еще одна матрица C (кроме построенной выше B) такая, что $CA=AC=E$. Тогда: $C=CE=C(AB)=(CA)B=EB=B$, т.е. C совпадает с матрицей B. Теорема доказана.

Замечание. Матрицу обратную к матрице A, принято обозначать символом A^{-1}. В силу одного из свойств определителей.

$$\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}.$$

Пример. Найти матрицу, обратную к данной

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Убедимся, что матрица A невырожденная: $\Delta=a_{11}\cdot A_{11}=1\cdot(3\cdot5-3\cdot4)=3\neq0$. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 10; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 5; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -3; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Составляем союзную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & -4 \\ -9 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{10}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ЛЕКЦИЯ 3
Тема **Системы линейных уравнений**

§1. Основные определения

В общем случае система m линейных уравнений с n неизвестными имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

При этом через x_1, $x_2,\ldots$, x_n обозначены неизвестные, подлежащие определению, причем, их число n, не предполагается обязательно равным числу уравнений m. Величины a_{11}, $a_{12},\ldots$, a_{mn} , называемые коэффициентами системы, и величины b_1, $b_2,\ldots$, b_n, называемые свободными членами, предполагаются известными.

Решением системы (1) называется такая совокупность n чисел c_1, $c_2,\ldots$, c_n , что каждое из уравнений (1) обращаются в верное числовое равенство после замены в нем неизвестных x_i соответствующими числами c_i , $i=1,2,\ldots,n$.

Система уравнений называется совместной, если она имеет, по крайней мере, одно решение, и несовместной, если у нее не существует ни одного решения.

Например, система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

является несовместной, ибо в противном случае мы получили бы, что 1=3.

Решить систему уравнений означает найти все её решения или доказать, что она несовместна.

Два решения совместной системы $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и $d_1, d_2, \ldots, d_n$ называются различными, если нарушается хотя бы одно из равенств $c_1=d_1$, $c_2=d_2$, ... …, $c_n=d_n$.

Совместная система уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если у нее существуют, по крайней мере, два различных решения.

Система уравнений называется однородной, если свободные члены всех её уравнений равны нулю.

Очевидно, однородная система всегда совместна, ибо обладает решением $x_1=0$, $x_2=0,\ldots$, $x_n=0$ (т.н. тривиальное решение).

Можно доказать, что, если система уравнений имеет два различных решения, то она имеет бесконечное множество решений.

Справедливость этого наглядно проявляется в случае системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} ax + by = f_1, \\ cx + dy = f_2. \end{cases} \qquad (2)$$

Каждое уравнение системы (2) определяет на плоскости Oxy некоторую прямую. Решение системы (2) – это координаты общей точки двух прямых. Но у двух прямых может не существовать общих точек, быть только одна общая точка или бесконечно много общих точек (если прямые совпадают).

Две системы линейных уравнений называются эквивалентными (равносильными), если они или обе несовместимы, или же обе совместны и обладают одними и теми же решениями.

§2. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений

Рассмотрим случай, когда число уравнений системы совпадает с числом уравнений. (т.н. квадратная система):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Матрицу, составленную из коэффициентов системы (1), $A=(a_{ij})$, называют основной матрицей системы, а её определитель $\Delta=\det(A)$ называют определителем системы.

<u>Теорема</u>. Квадратная система (1) с отличным от нуля определителем имеет решение, и притом, единственное. Его можно найти по формулам

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n \quad , \qquad (2)$$

где Δ_j – это определитель, получающийся из определителя Δ после замены в нем j-го столбца столбцом свободных членов системы (1).

<u>Доказательство.</u> Докажем сначала, что числа, определяемые формулами (2), дают решение системы (1). Возьмём левую часть i-го уравнения системы и подставим в нее эти числа, при этом определитель Δ_j разложим по j-му столбцу:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}) = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_k A_{kj} = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj})$$

Внутренняя сумма $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj}$ (т.е. множитель, стоящий возле b_k) в полученном выражении либо равна определителю Δ, если $k=i$, либо равна 0, если $k \neq j$. Значит во внешней сумме только i-е слагаемое отлично от нуля и вся эта сумма равна $b_i \cdot \Delta$. Откуда получаем, что левая часть i-го уравнения при подстановке (2) равна $\frac{1}{\Delta}(b_i \cdot \Delta) = b_i$, т.е. правой части этого уравнения. Итак, числа (2) дают решение системы (1).

Докажем теперь единственность решения (2), для чего предположим, что существуют числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ такие, что:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \ldots + a_{nn}c_n = b_n \end{cases} \qquad (3)$$

есть система верных числовых равенств. Выполним с этими верными равенствами следующее: $1^е$ умножим на алгебраическое дополнение элемента a_{11}, $2^е$ – на дополнение элемента a_{21} и т.д. и почленно сложим. Получим следующее:

$$(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\ldots+a_{n1}A_{n1})c_1+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+\ldots+a_{n2}A_{n1})c_2+\ldots$$
$$\ldots+(a_{1n}A_{11}+a_{2n}A_{21}+\ldots+a_{nn}A_{n1})c_n=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\ldots+b_nA_{n1}.$$

Первая скобка в левой части равна определителю Δ, а все остальные скобки равны 0. Правая же часть есть разложение определителя Δ_1 по первому столбцу. Итак, мы получили

$$\Delta \cdot c_1 = \Delta_1.$$

Если же указанную процедуру повторить, взяв в качестве множителей алгебраические дополнения элементов $a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}$, то получим

$$\Delta \cdot c_2 = \Delta_2$$

и так далее по аналогии $\Delta \cdot c_n = \Delta_n$. Поскольку по условию $\Delta \neq 0$, то полученные равенства эквивалентны соотношениям

$$c_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

что и означает, что у системы (1) нет других решений кроме тех, что даются формулами Крамера. Теорема доказана.

Значение формул Крамера заключается главным образом в том, что в тех случаях, когда они применимы, эти формулы дают явное выражение для решения системы через коэффициенты и свободные члены. Практическое использование формул Крамера связано с довольно громоздкими вычислениями определителей n-го порядка. К этому следует добавить, что, если коэффициенты уравнений и свободные члены представляют собой лишь приближенные значения каких-либо измеряемых физических величин или округляются в процессе вычислений, то использование формул Крамера может привести к большим ошибкам и в ряде случаев является нецелесообразным.

Замечание. Из полученных в процессе доказательства равенств

$$c_j \cdot \Delta = \Delta_j \;,\; j=1,2,\ldots,n$$

следует важный вывод:

если $\Delta=0$, а хотя бы один из $\Delta_1, \Delta_2,\ldots, \Delta_n$ отличен от 0, то системы (1) решений не имеет; в случае же когда $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\ldots=\Delta_n=0$ система (1) может быть или несовместной, или неопределенной.

И еще один полезный вывод из теоремы: если однородная система n уравнений с n неизвестными имеет нетривиальное решение, то её определитель равен 0.

§3. Решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Весьма удобно записывать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \\ i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases} \qquad (1)$$

в матричной форме, а именно: если $A=(a_{ij})$ – основная матрица системы, а B и X – столбцы свободных членов и неизвестных, то (1) можно записать в виде

$$A \cdot X = B. \qquad (2)$$

Как и в предыдущем параграфе, предположим, что определитель системы $\Delta \neq 0$. Отсюда вытекает, что основная матрица системы имеет обратную A^{-1}. Умножим обе части матричного равенства (2) на матрицу A^{-1}. Используя ассоциативность умножения матриц и роль единичной матрицы, как единицы при умножении матриц, будем иметь:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B,$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B,$$

$$EX = A^{-1}B,$$

$$X = A^{-1}B. \qquad (3)$$

Последнее равенство и дает выражение столбца неизвестных через обратную матрицу и столбец свободных членов. Вспомним вид обратной матрицы $A^{-1}=(A_{ji}/\Delta)$ и приравняем j-е элементы столбцов, стоящих в левой и правой частях (3):

$$x_j = \frac{A_{1j}}{\Delta} b_1 + \frac{A_{2j}}{\Delta} b_2 + \ldots + \frac{A_{nj}}{\Delta} b_n$$

или

$$x_j = \frac{1}{\Delta}\left(b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \ldots + b_n A_{nj}\right).$$

Выражение, стоящее в скобках, есть не что иное, как разложение определителя Δ_j (из предыдущего параграфа) по j-му столбцу. Поэтому (3) равносильно

$$x_j = \frac{1}{\Delta}\Delta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

и мы снова пришли к формулам Крамера.

Итак, если определитель Δ основной матрицы A системы линейных уравнений отличен от нуля, то существует и притом единственное решение матричного уравнения

$$AX=B,$$

определяемое соотношением

$$X=A^{-1}B,$$

которое эквивалентно формулам Крамера.

§4. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Вначале одно предварительное замечание. Применяя метод Гаусса, приходится выполнять такие преобразования системы: 1) переставлять местами два уравнения; 2) умножать обе части какого-нибудь уравнения системы на одно и то же число, отличное от нуля; 3) обе части одного из уравнений системы, умноженные на одно и то же число, вычитать из соответствующих частей некоторого другого уравнения системы. Нетрудно показать, что система, полученная в результате этих преобразований, будет эквивалентна исходной.

Перейдем теперь к изложению методом Гаусса, который называется также методом последовательного исключения неизвестных.

Пусть дана произвольная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Предположим, что $a_{11} \neq 0$ (в противном случае пришлось бы переставить два уравнения: ведь какой-нибудь из коэффициентов при x_1 отличен от 0). С помощью 1-го уравнения исключим неизвестное x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго. Для этого вычтем из i-го уравнения первое уравнение, умноженное на a_{i1}/a_{11}, $i=2,3,\ldots,m$. В результате придем к новой системе, эквивалентной исходной:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \qquad (2)$$

Далее будем преобразовывать систему (2), причем 1-е уравнение мы не будем трогать совсем и подлежащей преобразованиям будем считать лишь часть этой системы, состоящую из всех уравнений, кроме первого. При этом мы считаем, что среди этих уравнений нет таких, все коэффициенты левых частей которых равны нулю: такие уравнения мы выбросили бы, если бы и их свободные члены были равны нулю, а в противном случае мы уже доказали бы несовместимость нашей системы. Таким образом, среди коэффициентов a'_{ij} есть отличные от нуля; для определенности примем, что $a'_{22} \neq 0$ (в противном случае пришлось бы переставлять уравнения или неизвестные). С помощью 2-го уравнения системы (2) исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы (2), начиная с третьего. Для этого вычтем из j-го уравнения второе, умноженное на $a'_{j2}\big/a'_{22}$. Придем к следующей системе, эквивалентной системе (2), а значит (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n = b''_3, \\ \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad a''_{p3}x_3 + \ldots + a''_{pn}x_n = b''_p. \end{cases} \qquad (3)$$

Наша система содержит теперь p уравнений, $p \leq m$, так как некоторые уравнения оказались, возможно, отброшенными. В дальнейшем подлежит преобразованиям, аналогично уже поделанным, часть полученной системы, содержащей все уравнения, кроме двух первых.

Когда остановится этот процесс последовательного исключения неизвестных?

Если мы придем к такой системе, одно из уравнений которой имеет отличный от нуля свободный член, а все коэффициенты левой части равны нулю, то, как мы знаем, наша исходная система несовместна.

Если же таких уравнений не встретится, то процесс исключения закончится не позже чем на $(m–1)$-ом шаге. Обозначим через k – число уравнений, которые останутся в системе после завершения процесса исключения неизвестных. Возможны случаи: $k=n$, $k<n$, $k>n$.

В случае, когда $k=n$ получим так называемую "треугольную" систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}, \end{cases} \tag{4}$$

у которой в каждом последующем уравнении ровно на одно неизвестное меньше, чем в предыдущем. Из последнего уравнения мы получаем вполне определенное значение для неизвестного x_n. Подставив его в предпоследнее уравнение, мы найдем однозначно определенное значение для неизвестного x_{n-1}. Продолжая так далее, мы найдем, что система (4), а поэтому и система (1) обладают единственным решением, т.е. совместна и определена.

Пусть теперь $k<n$. Система, полученная после завершения процесса исключения, имеет так называемую "трапецеидальную" форму:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2k}x_k + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad a_{kk}^{(k-1)}x_k + \ldots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)}. \end{cases} \tag{5}$$

Назовем неизвестные x_{k+1}, $x_{k+2},\ldots,x_n$ свободными, придадим им произвольные числовые значения и перенесем члены, содержащие их, в правые части уравнений. Мы получим систему "треугольной" формы (4), из которой однозначно определяется неизвестные x_1, $x_2,\ldots,x_k$. Так как значения для свободных неизвестных можно выбирать бесконечным числом различных способов, то наша система (5) и, следовательно, система (1) будут совместными, но неопределенными. Легко проверить, что указанным здесь методом будут найдены все решения системы (1).

Третий случай, когда $k>n$ кажется возможным лишь первый момент. Система имеет вид, получающийся приписыванием к системе (4) еще нескольких уравнений, содержащих лишь неизвестное x_n. В действительности, однако, в этом случае преобразования просто не доведены до конца: так как $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$, то из всех уравнений, начиная с $(n+1)$-го, неизвестное x_n может быть исключено.

Итак, подведем итоги. Метод Гаусса применим к любой системе линейных уравнений. При этом система будет несовместной, если в процессе исключения неизвестных мы получим уравнение, в котором коэффициенты при всех неизвестных равны нулю, а свободный член отличен от нуля; Если же такого уравнения мы не встретим, то система будет совместной. Совместная система будет определенной, если приводится к треугольному виду (4) (число оставшихся уравнений равно числу неизвестных), и неопределенной, если приводится к трапецеидальному виду (5) (число оставшихся уравнений меньше числа неизвестных).

Замечание. При практическом применении метода Гаусса следует выписать основную матрицу системы и, приписав к ней столбец свободных членов, получить так называемую расширенную матрицу системы. Все преобразования выполняют над строками этой матрицы. Для удобства столбец свободных членов можно отделить вертикальной чертой от остальных столбцов матрицы.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_3 = 4, \\ \quad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 \quad - 3x_4 = 1, \\ \quad -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Решение. Подвергаем преобразованиям расширенную матрицу этой системы.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Краткие пояснения. 1-й шаг: первую строку вычитаем из третьей. 2-й шаг: вторую строку умножаем на 5 и вычитаем из третьей, а также умножаем на 7 и прибавляем к четвертой. 3-й шаг: третью строку умножаем на 2 и прибавляем к четвертой. 4-й шаг: отбрасываем четвертую строку, сплошь состоящую из нулей, и делим третью строку на 2. Мы приходим, следовательно, к системе:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ \qquad x_2 - \ x_3 \ + \ x_4 \ = -3, \\ \qquad\qquad x_3 \ - 2x_4 = 6. \end{cases}$$

В качестве свободного неизвестного можно принять любое из неизвестных x_3 или x_4. Пусть $x_4=\alpha$. Тогда из 3-го уравнения $x_3=6+2\alpha$, из 2-го получаем $x_2=3+\alpha$, а из первого $x_1=-8$. Итак, общий вид решения заданной системы: $(-8;\ 3+\alpha;\ 6+2\alpha;\ \alpha)$, где α – произвольное число.

§5. Теорема Кронекера-Капелли

I Понятие ранга матрицы.

Рассмотрим произвольную матрицу $A=(a_{ij})$, $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$.

Минором k-го порядка матрицы A называют определитель k-го порядка с элементами, лежащими на пересечении любых k строк и любых k столбцов матрицы A (конечно, $k\leq\min(m,n)$).

Предположим, что хотя бы один из элементов a_{ij} матрицы A отличен от нуля. Тогда найдется такое натуральное число r, что будут выполнены два условия: 1) у матрицы A имеется минор r-го порядка, отличной от нуля; 2) всякий минор $(r+1)$-го порядка и более высокого (если таковые существуют), равен нулю.

Число r, удовлетворяющее требованиям 1) и 2), называют рангом матрицы A. Тот минор r-го порядка, который отличен от 0, называют базисным минором (конечно, у матрицы может быть несколько миноров r-го порядка, отличных от нуля). Строки и столбцы, на пересечении которых стоит базисный минор, называют базисными строками и базисными столбцами.

Смысл понятия ранга матрицы проясняет следующее утверждение, которое называют теоремой о базисном миноре:

базисные строки (базисные столбцы) линейно независимы; любая другая строка (столбец) является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

В связи с этой теоремой рангом матрицы называют также максимальное число линейно независимых столбцов (строк) матрицы.

II Критерий совместности системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \\ i = 1,2,\ldots,m. \end{cases} \qquad (1)$$

Наряду с основной матрицей системы $A=(a_{ij})$ рассмотрим еще и так называемую расширенную матрицу A_1, полученную присоединением к A столбца свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Вопрос о совместности системы полностью решается следующей теоремой.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы этой системы равен рангу её основной матрицы.

Эта теорема только утверждает существование, но не дает, однако, никакого способа для практического разыскания всех решений системы.

Раздел II Аналитическая геометрия.

ЛЕКЦИЯ 4

Тема **Векторная алгебра.**

§1. Действительные числа. Числовая ось

Существуют различные методы построения теории действительных (вещественных) чисел. Мы будем считать действительными числами всевозможные десятичные дроби, положительные и отрицательные, конечные и бесконечные, периодические и непериодические. Конечные и бесконечные периодические дроби называют рациональными числами, бесконечные непериодические – иррациональными.

Модуль (или абсолютная величина) действительного числа a обозначается символом $|a|$ и определяется формулой

$$|a| = \begin{cases} a\,, \text{если} \;\; a \geq 0, \\ -a\,, \text{если} \;\; a < 0. \end{cases}$$

Некоторые свойства модуля:

1.$|a| \geq 0$;

2.$|-a| = |a|$;

3.$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;

4.$|a+b| \leq |a|+|b|$;

5.$|a| = \sqrt{a^2}$.

Для наглядного изображения чисел служит числовая ось. Ось – это прямая, с выбранным на ней направлением (указывается стрелкой). Числовая ось – это ось с выбранными на ней двумя точками O и E. Точка O называется началом отсчета; она делит ось на две полуоси – положительную, обозначаемую символом R^+, и отрицательную, обозначаемую R^-. Точка $E \in R^+$ и называется единичной точкой. Отрезок OE называется единичным и служит для измерения длин отрезков и расстояний между точками оси. Примем за аксиому тот факт, что расстояние между любыми двумя точками оси можно выразить действительным числом. Расстояние между точками M и N будем обозначать $d(M,N)$. Теперь можно установить соответствие между числами и точками числовой оси:

1) числу a соответствует точка A , находящаяся на расстоянии $|a|$ от начала отсчета , причем $A \in R^+$, если $a > 0$, $A \in R^-$, если $a<0$;

2) точке A соответствует число $a = \pm d(A,O)$, причем знак "+" выбираем, если $A \in R^{+}$, а "–" выбираем, если $A \in R^{-}$;

3) числу 0 соответствует начало отсчета (и наоборот).

В силу этого соответствия вполне допустимы обороты "число A" и "точка a ". Модуль числа a можно понимать как расстояние от начала отсчета до точки, которая изображает число a.

§2. Системы координат

Задать систему координат (на прямой, на плоскости, в пространстве) – это значит указать способ, позволяющий устанавливать положение точек (прямой, плоскости, пространства) с помощью чисел.

Когда речь заходит о системе координат необходимо различать два момента: 1) чем задается, определяется система координат; 2) что такое координаты точки.

I Система координат на прямой

Чтобы задать СК на прямой достаточно превратить ее в числовую ось, т.е. выбрать направление и две точки. Координатой точки A служит то действительное число x, которое изображает точка A: $x = \pm d(A,0)$. Тот факт, что точка A имеет координату x записывают в виде $A(x)$. Расстояние между точками $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$ вычисляется по формуле

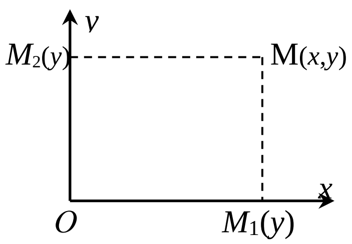
$$d(A_1,A_2) = |x_2 - x_1|.$$

II Декартова прямоугольная система координат на плоскости

Задается двумя взаимно перпендикулярными числовыми осями с общим началом отсчета, равными единичными отрезками, причем указано, какая из них считается первой, а какая второй.

Общее начало отсчета называется началом координат и обозначается буквой O. Оси называются координатными осями или осями координат. Первую из них называют осью абсцисс и обозначают символом Ox, а вторую – осью ординат, обозначают Oy.

Пусть M – произвольная точка плоскости. Спроектируем ее на координатные оси, т.е. опустим перпендикуляры из M на Ox и Oy. Основания этих перпендикуляров обозначим M_1 и M_2 соответственно. Эти точки, каждая на своей оси, имеют определенные координаты: $M_1(x)$ и $M_2(y)$.



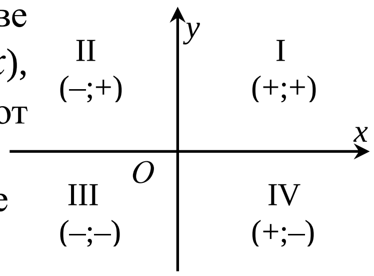
Число x называется абсциссой точки M, а y – ординатой точки M.

Тот факт, что точка плоскости M имеет координаты x и y записывают в виде $M(x,y)$.

Расстояние между точками $A_1(x_1,y_1)$ и $A_2(x_2,y_2)$ вычисляется по формуле

$$d(A_1,A_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

Каждая ось разбивает плоскость на две полуплоскости: верхнюю и нижнюю (ось Ox), правую и левую (ось Oy). Две оси вместе разбивают плоскость на 4 квадранта (четверти). Нумерация квадрантов и знаки координат показаны на рисунке

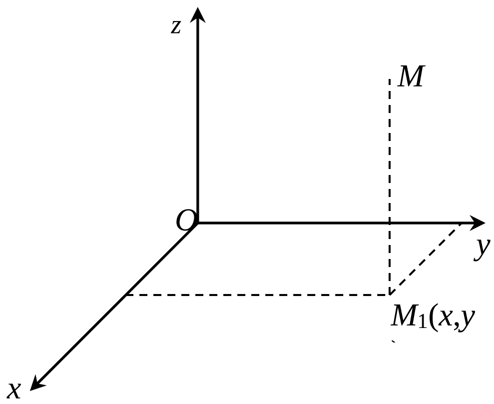


<u>III ДПСК в пространстве</u>

Задается тремя взаимно перпендикулярными числовыми осями с общим началом отсчета и одинаковыми единичными отрезками. Оси занумерованы в некотором порядке, т.е. указано, какая из них считается первой, какая второй и какая третьей.

Первая и вторая называются так же, как и в предыдущем пункте, а третья называется осью аппликат и обозначается Oz.

Каждая пара осей определяет плоскость, которая называется координатной. Обозначения: xOy, xOz и yOz. Каждая плоскость разбивает пространство на два полупространства. В частности, горизонтальная плоскость xOy разбивает на верхнее (расположено в положительном направлении оси Oz) и нижнее полупространства



Пусть M – произвольная точка пространства. Спроектируем ее на плоскость xOy. Получим точку M_1, которая на этой плоскости имеет вполне определенные координаты x и y. Они называются абсциссой и ординатой точки M. Третья координата – аппликата – точки M определяется формулой

$$z = \pm d(M,M_1),$$

причем знак "+" выбираем, если M лежит в верхнем полупространстве, а знак "–", если в нижнем.

Расстояние между точками $M(x_1,y_1,z_1)$ и $N(x_2,y_2,z_2)$ вычисляется по формуле

$$d(M,N)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,.$$

Если точка $C(x,y,z)$ делит данный отрезок MN в отношении λ (т.е. $MC:CN=\lambda$), то

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\quad,\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\quad,\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Если требуется найти координаты середины отрезка MN, достаточно положить в этих формулах $\lambda=1$.

IV Полярная система координат

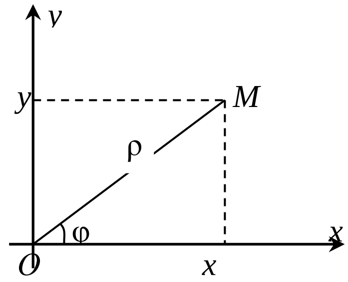
Рассмотренная выше ДПСК является наиболее употребительной. Однако, при решении некоторых задач могут оказаться более удобными и другие системы. Одной их таких СК на плоскости является так называемая полярная СК.

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O (называемой полюсом), луча, исходящего их этой точки (называемого полярной осью) и единичного отрезка для измерения длин. Кроме того, необходимо указать, какие повороты вокруг точки O считаются положительными. Обычно считаются положительными повороты, совершаемые против часовой стрелки.

Пусть M – произвольная точка плоскости, на которой задана ПСК. Обозначим через ρ расстояние $d(O,M)$ и через φ – угол, на который нужно повернуть полярную ось для совмещения ее с лучом OM. Угол φ будем понимать так, как это принято в тригонометрии, т.е. с точностью до слагаемого вида $\pm 2n\pi$.

Полярными координатами точки M называются ρ и φ. При этом число ρ называется полярным радиусом точки M, а число φ – полярным углом. Чтобы избежать неоднозначности будем рассматривать только так называемое главное значение угла φ, т.е. значение, удовлетворяющее соотношению $-\pi<\varphi\le\pi$ или $0\le\varphi<2\pi$. Тогда каждая точка плоскости характеризуется вполне определенной парой чисел (ρ,φ). Исключение составляет полюс: его полярный угол не имеет определенного значения (полярный радиус равен нулю).

В случаях, когда приходится одновременно пользоваться и декартовой и полярной системами, возникает необходимость в формулах перехода от одной к другой. В частном случае, когда полюс ПСК совпадает с началом координат ДПСК, полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс, эти формулы имеют вид



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Заметим, что последняя формула для определения значения φ требует знания, в какой четверти находится точка.

§3. Векторы: основные определения

Некоторые физические величины, такие как скорость, ускорение, сила, характеризуются не только числовым значением, но и направлением. Они называются векторными величинами. Математической моделью такой величины служит вектор.

Вектором называют направленный отрезок, т.е. отрезок, для которого указано, какая из ограничивающих его точек считается началом, а какая концом.

На чертежах векторы обозначаются в виде стрелки →. В тексте вектор записывается либо двумя большими буквами с общей чертой наверху $\overline{AB}$ (первая из них – это начало, а вторая – конец), либо одной малой буквой с чертой $\overline{a}$, либо малой буквой полужирного шрифта $\boldsymbol{a}$.

Длиной вектора или модулем называется длина отрезка изображающего вектор. Обозначение $|\overline{a}|$, $|\overline{AB}|$ иногда AB.

Вектор, длина которого равна нулю (т.е. конец совпадает с началом) называется нулевым: $\overline{0}$, $\overline{AA}$. Направление нулевого вектора следует считать вполне неопределенным. (нулевой вектор можно считать перпендикулярным любому вектору и коллинеарным любому вектору).

Единичным вектором, или ортом, называют вектор, длина которого равна 1.

Векторы, лежащие на одной прямой, или на параллельных прямых, называются коллинеарными. Обозначение : $\overline{a}\,||\,\overline{b}$. Коллинеарные векторы, направленные в одну сторону, называются одинаково направленными, а направленные в противоположные стороны – противоположно-направленными. Обозначения: $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$, $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют равными и пишут $\overline{a} = \overline{b}$, если: 1) $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ (имеют равные длины); 2) $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ (одинаково направлены).

Такое определение равенства векторов означает, что векторы рассматривают с точностью до их положения на плоскости, в пространстве, т.е. не различая векторов, получающихся друг из друга параллельным переносом. В этом смысле векторы называют свободными. Точка приложения вектора – его начало – может быть выбрана произвольным образом.

Три вектора называются компланарными, если лежат в одной плоскости, или в параллельных плоскостях. В противном случае они называются некомпланарными.

Нетрудно доказать такие утверждения:

1. Если $\overline{a} \,||\, \overline{b}$, то $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – компланарные (для любого $\overline{c}$).

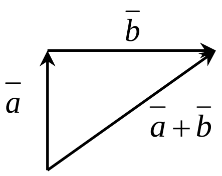
2. Векторы $\overline{0}$ и $\overline{a}$ коллинеарные; $\overline{0}, \overline{a}, \overline{b},$ – компланарные (для любых $\overline{a}$ и $\overline{b}$).

3. Если $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ некомпланарные, то любые два из них неколлинеарные.

§4. Линейные операции над векторами

I Сложение векторов

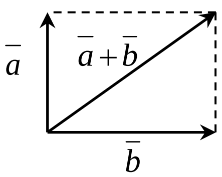
Суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют вектор, обозначаемый $\overline{a}+\overline{b}$, который идет из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$, при условии, что $\overline{b}$ приложен к концу $\overline{a}$. (“правило треугольника”) .



Полезная форма записи

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Замечание. Сумму векторов можно находить и по так называемому правилу параллелограмма: приведем векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ к общему началу, построим на них параллелограмм, тогда $\overline{a}+\overline{b}$ есть диагональ этого параллелограмма, идущая из общего начала



$\bar{a}$ и $\bar{b}$. "Правило треугольника" удобно при сложении 3-х и более векторов, "правило параллелограмма" удобно тем, что на том же параллелограмме легко показать разность $\bar{a}-\bar{b}$.

II Умножение вектора на число

Произведением числа λ на вектор $\bar{a}$ называют вектор, обозначаемый символом $\lambda\bar{a}$ и удовлетворяющий условиям: 1) $|\lambda\bar{a}|=|\lambda|\cdot|\bar{a}|$; 2) $\lambda\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{a}$, если $\lambda>0$, и $\lambda\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{a}$, если $\lambda<0$.

Ортом вектора $\bar{a}$ называют орт $\bar{a}^{o}$, одинаково направленный с вектором $\bar{a}$. Очевидно, чтобы получить орт ненулевого вектора надо разделить вектор на его длину (т.е. умножить на $|\bar{a}|^{-1}$):

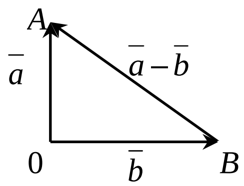
$$\bar{a}^{o}=\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}.$$

III Вычитание векторов

Разность векторов определяется следующим образом

$\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-1)\cdot\bar{b}$.

В параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и имеющих общее начало, $\bar{a}-\bar{b}$ есть диагональ идущая из конца "вычитаемого" к концу "уменьшаемого".



$$\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}.$$

IV Основные свойства линейных операций

Введенные выше операции обладают всеми обычными свойствами сложения и умножения чисел:

$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ – коммутативность сложения;

$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ – ассоциативность сложения;

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda+\mu)\cdot\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}\\ \lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}\end{array}\right\}$$ – дистрибутивность умножения относительно сложения;

$\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$; $1\cdot\bar{a}=\bar{a}$ и т.п.

Эти свойства дают право при умножении скалярного многочлена на векторный многочлен производить умножение “почленно”.

Замечание. Согласно определению векторы $\bar{a}$ и $\lambda\bar{a}$ коллинеарные. Оказывается, справедливо и, в некотором смысле, обратное утверждение, а именно:

если вектор $\bar{a}$ коллинеарен ненулевому вектору $\bar{b}$, то существует и притом единственное, число λ такое, что $\bar{a} = \lambda\bar{b}$. Попробуйте доказать это утверждение, взяв $\lambda = \pm\dfrac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}$, где знак “+” соответствует $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, а знак “–” соответствует $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$.

§5. Проекции вектора на оси. Направляющие косинусы

Рассмотрим некоторую ось u и выберем какой-нибудь отрезок в качестве единицы измерения длин. Если нам дан некоторый вектор $\bar{a}$, то поместим его начало в какую-нибудь точку O оси u, а конец вектора пометим буквой A. Пусть далее В – какая-нибудь точка оси u, расположенная в положительном направлении от точки О.

Угол $\varphi = \angle AOB$ называют углом наклона вектора $\bar{a}$ к оси u. Этот угол понимаем в элементарно-геометрическом смысле, пределы изменения от 0 до π.

Проекцией вектора $\bar{a}$ на ось u называют число

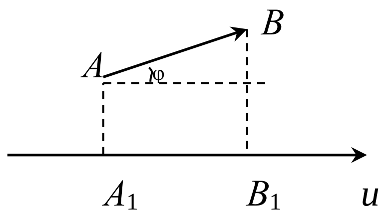
$$пр_u\,\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол наклона $\bar{a}$ к оси u.

Это число имеет наглядный геометрический смысл. Спроектируем начало и конец вектора $\overline{AB}$ на ось u, получим точки A_1, B_1. Рассмотрим вектор $\overline{A_1B_1}$ лежащий на оси u. Тогда

$$пр_u\,\overline{AB} = \pm\left|\overline{A_1B_1}\right|,$$

причем знак “+” соответствуем случаю, когда угол φ острый, а “–”, когда φ – тупой.



Элементарно-геометрическими методами можно получить свойства проекций вектора на ось:

$$пр_u(\overline{a}+\overline{b}) = пр_u\overline{a} + пр_u\overline{b}\,,\;\; пр_u(\lambda\overline{a}) = \lambda\cdot пр_u\overline{a}\,.$$

<u>Замечание 1.</u> Если φ – это угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (понимаемый как угол между двумя отрезками, исходящими из одной точки), то число $|\overline{a}|\cdot\cos\varphi$ называют проекцией вектора $\overline{a}$ на направление вектора $\overline{b}$, или просто проекцией $\overline{a}$ на $\overline{b}$ и обозначают символом $пр_{\overline{b}}\overline{a}$.

Пусть теперь на плоскости (или в пространстве) задана ДПСК. Проекции вектора $\overline{a}$ на оси координат обозначают a_x, a_y, a_z, или a_1, a_2, a_3, или X, Y, Z. Проекции вектора на оси координат, будучи заданы, вполне определяют его как свободный вектор, т.е. с точностью до положения в пространстве. Если вектор расположен в плоскости xOy, то достаточно двух проекций a_1 и a_2. Проекции вектора часто называют его координатами.

Тот факт, что вектор $\overline{a}$ имеет проекции a_1, a_2, a_3, показывают записью

$$\overline{a} = \{a_1; a_2; a_3\}.$$

Итак, впредь для нас вектор, чаще всего, это упорядоченная тройка (или пара) чисел.

Если вектор $\overline{a}$ задан началом $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и концом $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$, то его проекции определяются формулами

$$a_x = x_2 - x_1 \quad,\quad a_y = y_2 - y_1 \quad,\quad a_z = z_2 - z_1 \quad, \text{ т.е.}$$

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

Выразим линейные операции над векторами через их проекции. Пусть $\overline{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$, $\overline{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$. Тогда:

1. $\overline{a} = \overline{b}$ тогда и только тогда когда $a_i = b_i$, $i = 1, 2, 3$;

2. $\lambda\overline{a} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\}$;

3. $\overline{a} + \overline{b} = \{a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3\}$;

4. условие коллинеарности: $\overline{a} \parallel \overline{b}$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \text{т.е. проекции пропорциональны;}$$

5. $|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$;

6. условие компланарности векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}=\{c_1;c_2;c_3\}$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

Обозначим через α,β,γ углы, которые вектор $\bar{a}$ составляет с осями абсцисс, ординат и аппликат соответственно. Направляющими косинусами вектора $\bar{a}$ называют косинусы этих углов. Очевидно (из определения проекций):

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\bar{a}|},\ \cos\beta=\frac{a_2}{|\bar{a}|},\ \cos\gamma=\frac{a_3}{|\bar{a}|}.$$

Основное свойство направляющих косинусов:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Кроме того, направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ служат проекциями орта этого вектора:

$$\bar{a}^0=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}.$$

Замечание 2. Вектор можно задавать: 1) длиной и направлением (т.е. углами α,β,γ); 2) началом и концом; 3) проекциями. Необходимо уметь переходить от одного способа к другому.

§6. Разложение вектора

I Частный случай

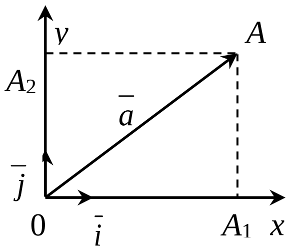
Пусть в пространстве дана ДПСК. Обозначим через $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – единичные векторы осей Ox ,Oy и Oz соответственно (они лежат на осях и направлены в положительные стороны).

Теорема 1. Всякий вектор $\bar{a}=\{a_1;a_2;a_3\}$ можно представить (единственным образом) в виде линейной комбинации векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$:

$$\bar{a}=a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k}. \quad (1)$$

Схема доказательства

Пусть $\bar{a}=\overline{OA}$, а A_1 и A_2 – проекции точки A на оси координат. Тогда $\bar{a}=\overline{OA_1}+\overline{OA_2}$ (правило параллелограмма).



$\overline{OA_1} \uparrow\uparrow \bar{i},$ значит $\overline{OA_1} = \lambda \bar{i},$ где $\lambda = \pm \dfrac{\left|\overline{OA_1}\right|}{\left|\bar{i}\right|} = a_1$. Аналогично

$\overline{OA_2} = \mu \bar{j},$ где $\mu = a_2$.

Замечание 1. Представление вектора $\bar{a}$ в виде (1) называют разложением $\bar{a}$ по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Слагаемые в правой части (1) называют компонентами вектора $\bar{a}$.

Замечание 2. Радиус-вектором точки M называют вектор $\overline{OM}$, часто обозначаемый $\bar{r}(M)$ или $\overline{r_M}$. Его проекции совпадают с координатами точки M: если $M(x; y; z),$ то $\bar{r}(M) = \{x; y; z\}.$ Полезная формула:

$$\overline{AB} = \bar{r}(B) - \bar{r}(A).$$

II Общий случай

Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ называются линейно независимыми, если ни один из них не является линейной комбинацией других. Для двух векторов независимость равносильна неколлинеарности, а для трех – некомпланарности.

Говорят, что линейно независимые векторы образуют базис, если любой другой вектор является их линейной комбинацией.

Теорема 2. Любая тройка некомпланарных векторов образует базис в пространстве. Любая пара неколлинеарных векторов образует базис в плоскости, содержащей эту пару векторов.

Другими словами, если $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – некомпланарные векторы, то для любого вектора $\bar{d}$ существуют (и притом единственные) числа λ, μ, υ такие, что

$$\bar{d} = \lambda \bar{a} + \mu \bar{b} + \upsilon \bar{c}. \qquad (2)$$

Поиск коэффициентов линейной комбинации (2) сводится к решению системы линейных уравнений, матрица коэффициентов которой составлена из проекций векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ (по столбцам), а свободные члены – это проекции вектора $\bar{d}$.

Замечание к §3-6.

Студент должен уметь:

– выполнять действия с векторами в геометрической и координатной формах;

– находить проекции, длину, направляющие косинусы, орт вектора;

– разлагать вектор по базису;
– проверять коллинеарность и компланарность векторов.

ЛЕКЦИЯ 5

§7. Скалярное произведение векторов

I Определение

Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют число, обозначаемое символом $\overline{a}\cdot\overline{b}$, и вычисляемое по формуле

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi, \quad (1)$$

где φ – угол между векторами $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$.

Вспоминая формулу для проекции одного вектора на другой, можно выразить скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ другими формулами:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot np_{\overline{a}}\overline{b}, \qquad \overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{b}|\cdot np_{\overline{b}}\overline{a}. \quad (2)$$

II Механический смысл

Если вектор $\overline{a}$ изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала вектора $\overline{b}$ в его конец, то работа этой силы есть не что иное, как $\overline{a}\cdot\overline{b}$.

II Свойства скалярного произведения

1. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$ (коммутативность).
2. $(\lambda\overline{a})\cdot\overline{b}=\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})$ (ассоциативность относительно умножения на число).
3. $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$ (дистрибутивность относительно сложения).

Замечание 1. Указанные свойства дают право при скалярном перемножении векторных многочленов выполнять действия почленно, не заботясь о порядке сомножителей. Например,

$$\left(3\overline{a}+5\overline{b}\right)\cdot\left(2\overline{a}+3\overline{b}\right)=\left(3\overline{a}\right)\cdot\left(2\overline{a}\right)+\left(5\overline{b}\right)\cdot\left(2\overline{a}\right)+\left(3\overline{a}\right)\cdot\left(3\overline{b}\right)+\left(5\overline{b}\right)\cdot\left(3\overline{b}\right)=$$
$$=6\cdot\overline{a}\cdot\overline{a}+19\cdot\overline{a}\cdot\overline{b}+15\cdot\overline{b}\cdot\overline{b}.$$

Замечание 2. Скалярного произведения трех векторов не существует.

4. Скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{a}$ называется скалярным квадратом вектора $\overline{a}$ и обозначается символом $\overline{a}^2$. Скалярный квадрат вектора, равен квадрату его длинны:

$$\overline{a}^2=|\overline{a}|^2.$$

Это свойство можно использовать для нахождения длин векторов. Например, найти длину вектора $\bar{c} = 2\bar{a} - \bar{b}$, где $|\bar{a}| = 5, |\bar{b}| = 7$, $\varphi = 60^o$. Имеем:

$$|\bar{c}|^2 = \bar{c}^2 = \left(2\bar{a} - \bar{b}\right)^2 = 4\bar{a} - 4\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2 = 4|\bar{a}|^2 - 4|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi + |\bar{b}|^2$$

$$= 4 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos 60^o + 7^2 = 79,$$

откуда $|\bar{c}| = \sqrt{79}$.

5. Если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ (т.к. $\cos 90^o = 0$), но важно и обратное утверждение: если $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, то векторы взаимно перпендикулярны. Действительно, равенство $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi = 0$ возможно, если: 1) $\cos\varphi = 0$, или 2) $|\bar{a}| = 0$, или 3) $|\bar{b}| = 0$. В первом случае сразу получаем $\varphi = 90^o$. Второй (третий) случай означает, что вектор $\bar{a}$ ($\bar{b}$) есть нулевой вектор, направление которого можно считать каким угодно, в частности перпендикулярным $\bar{b}$ ($\bar{a}$).

Сказанное выше можно сформулировать как условие перпендикулярности векторов:

векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно 0.

IV Выражение скалярного произведения через проекции

Пусть известны проекции векторов на оси некоторой ДПСК: $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Запишем разложения этих векторов по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$:

$$\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\,\bar{j} + a_3\bar{k},$$
$$\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\,\bar{j} + b_3\bar{k}.$$

Базисные векторы – единичные, значит, их скалярные квадраты равны 1; они взаимно перпендикулярные значит $\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j} \cdot \bar{k} = 0$. Перемножая разложения почленно, получим

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (3)$$

Это и есть формула, выражающая скалярное произведение векторов через их проекции на оси ДПСК.

Из формулы (3) можно получить ряд важных следствий.

1. Длина вектора $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ вычисляется по формуле
$$|a| = \sqrt{\bar{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$
2. Угол φ между векторами $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ определяется равенством

$$\cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

3. Необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ является равенство

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0.$$

4. Если ось u составляет с осями координат углы α, β, γ, то проекция вектора $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ на эту ось определяется равенством

$$пр_u \bar{a} = a_1 \cdot \cos\alpha + a_2 \cdot \cos\beta + a_3 \cdot \cos\gamma. \qquad (4)$$

Для доказательства (4) рассмотрим единичный вектор $\bar{e}$ одинаково направленный с осью u. Тогда: 1) $\bar{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$; 2) $пр_u \bar{a} = пр_{\bar{e}} \bar{a}$. Но из определения $\bar{a} \cdot \bar{b}$ следует

$$пр_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}.$$

Остается в этой формуле положить $\bar{b} = \bar{e}$ и воспользоваться формулой (3) и тем, что $|\bar{e}| = 1$.

5. Если $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, то $a_1 = \bar{a} \cdot \bar{i}$, $a_2 = \bar{a} \cdot \bar{j}$, $a_3 = \bar{a} \cdot \bar{k}$.

§8. Векторное произведение векторов

I Определение

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор, который обозначается символом $\bar{a} \times \bar{b}$ и определяется условиями:

1) $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$ (φ – угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$);

2) $\bar{a} \times \bar{b} \perp \bar{a}$ и $\bar{a} \times \bar{b} \perp \bar{b}$;

3) тройка векторов ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a} \times \bar{b}$) является правой тройкой, т.е. из конца $\bar{a} \times \bar{b}$ кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ кажется совершающимся против часовой стрелки.

II Механический смысл

Если вектор $\bar{b}$ изображает силу, приложенную к какой-нибудь точке *M*, а вектор $\bar{a}$ идет из некоторой точки O в точку *M*, то вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ представляет собой момент силы $\bar{b}$ относительно точки O.

III Свойства векторного произведения

1. $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$ (антикоммутативность).
2. $(\lambda\bar{a})\times\bar{b}=\lambda(\bar{a}\times\bar{b})=\bar{a}\times(\lambda\bar{b})$ (ассоциативность по отношению к числовому множителю).
3. $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$ (дистрибутивность относительно сложения).

Замечание 1. Указанные свойства дают право при векторном перемножении векторных многочленов выполнять действия почленно, обращая внимание на порядок сомножителей.

4. $\bar{a}\parallel\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}$ (условие коллинеарности векторов).

Замечание 2. Так как всегда $\bar{a}\times\bar{a}=\bar{0}$, то в векторной алгебре понятие векторного квадрата не употребляется.

5. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ приведены к общему началу, то модуль их векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Пример. На векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построен параллелограмм P_1 а на диагоналях его построен еще один параллелограмм P_2. Как связаны площади этих параллелограммов?

Решение. Диагонали P_1 – это сумма и разность $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{d}_1=\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{d}_2=\bar{a}-\bar{b}$. Тогда площадь параллелограмма P_2:

$$S_2=\left|\bar{d}_1\times\bar{d}_2\right|=\left|\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}-\bar{b}\right)\right|=\left|\bar{a}\times\bar{a}-\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{a}-\bar{b}\times\bar{b}\right|=$$

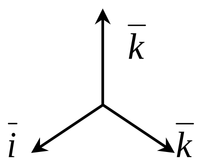
$$=\left|\bar{0}-\bar{a}\times\bar{b}-\bar{a}\times\bar{b}-\bar{0}\right|=\left|-2\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\right|=2\cdot\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=2S_1.$$

Итак, площадь параллелограмма P_2 в два раза больше площади параллелограмма P_1.

IV Выражение векторного произведения через проекции

Приведем таблицу векторного умножения базисных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, легко получаемую из рисунка

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$



В столбце базисных векторов приведены первые множители векторного произведения, а в строке – вторые.

Пусть известны проекции векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в некоторой ДПСК: $\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\overline{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Разложим векторы по базису

$$\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k},$$

$$\overline{b} = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}$$

и векторно перемножим эти “многочлены” почленно. Учитывая приведенную таблицу, получим:

$$\overline{a} \times \overline{b} = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)\overline{i} + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3)\overline{j} + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)\overline{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \overline{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \overline{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \overline{k}.$$

В этой формуле нетрудно заметить формальное разложение некоторого определителя третьего порядка по элементам, например, первой строки. Итак, имеем

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Пример. Найти площадь ΔABC, где A(1;1;1), B(2;2;2) и C(4;3;5).

Решение. Найдем векторы $\overline{AB} = \{1; 1; 1\}$ и $\overline{AC} = \{3; 2; 4\}$. Перемножим их векторно:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \overline{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \overline{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\overline{i} - \overline{j} - \overline{k}.$$

Модуль этого вектора – это площадь параллелограмма, построенного на $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, а половина этого модуля – искомая площадь треугольника:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

Вектор $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$ обладает важным свойством, которое понадобится нам в дальнейшем: этот вектор перпендикулярен векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ или, другими словами, этот вектор перпендикулярен плоскости ΔABC.

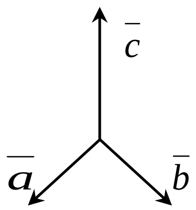
§9. Смешанное произведение трех векторов

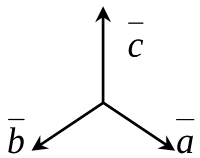
I Правые и левые тройки векторов

Если одновременно с заданием трех векторов сказано, какой из них считается первым, какой вторым и какой третьим, то говорят, что задана упорядоченная тройка (или просто “тройка”) векторов. В тексте тройка записывается в порядке нумерации.

Тройка некомпланарных векторов называется правой, если, после приведения их к общему началу, из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму кажется совершающимся против часовой стрелки. Если же указанный поворот по часовой стрелке, то тройка называется левой.

Тройка $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$





Правая Левая

II Определение смешанного произведения и его смысл

Смешанным произведением векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называют скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $(\overline{b}\times\overline{c})$.

Можно показать, что получается тот же самый результат, если скалярно перемножить векторы $(\overline{a}\times\overline{b})$ и $\overline{c}$. Поэтому для смешанного произведения векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ используют символ $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$

Смешанное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, взятому со знаком (+), если тройка $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – правая, а со знаком (–), если тройка левая.

III Выражение смешанного произведения через проекции

Пусть $\overline{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\overline{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ и $\overline{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$. Тогда по определению имеем:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=(a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k})\cdot\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=$$

$$=\left(a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k}\right)\cdot\left(\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\bar{k}\right)=$$

$$=a_1\cdot\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}-a_2\cdot\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}+a_3\cdot\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}.$$

В полученном выражении легко увидеть разложение определителя, составленного из проекций перемножаемых векторов. Итак, имеем формулу, выражающую смешанное произведение трех векторов через проекции сомножителей:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

IV Условие компланарности векторов

Векторы $\bar{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\bar{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ и $\bar{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=0.$$

Действительно, если $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарные, то $\bar{a}$ лежит в плоскости векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$, а вектор $\bar{b}\times\bar{c}$ перпендикулярен этой плоскости (по определению векторного произведения). Но тогда, $\bar{b}\times\bar{c}\perp\bar{a}$, а значит $\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=0$.

С другой стороны, если определитель равен нулю, то одна из его строк есть линейная комбинация двух других, т.е. один из векторов есть линейная комбинация двух других, а значит лежит в плоскости этих двух векторов (заметим, что все векторы считаются приведенными к общему началу).

Пример. Даны вершины тетраэдра $A(3;2;1)$, $B(1;4;-2)$, $C(3;6;-7)$ и $D(-4;-5;8)$. Найти его объём и длину высоты, опушенной из вершины D.

Решение. Найдем векторы, идущие из вершины A тетраэдра по его ребрам:

$$\bar{b} = \overline{AB} = \{-2; 2; -3\},$$
$$\bar{c} = \overline{AC} = \{0; 4; 6\},$$
$$\bar{d} = \overline{AD} = \{-7; -7; 7\}.$$

Найдем смешанное произведение этих векторов

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = -308.$$

Объем параллелепипеда, построенного на $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ равен $|-308| = 308$ (знак “–“ говорит о том, что эта тройка векторов левая). Объем тетраэдра, построенного на трех векторах, составляет одну шестую часть объема параллелепипеда, построенного на тех же векторах. Итак, искомый объем равен $V = \dfrac{308}{6} \approx 51{,}33$. С другой стороны,

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H,$$

оттуда $H = 3V / S_{осн}$. Площадь же основания найдем как половину модуля векторного произведения соответствующих векторов: если высота опускается из вершины D, то основание – это ΔABC. Находим векторное произведение:

$$\bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 24\bar{i} + 12\bar{j} - 8\bar{k}.$$

Тогда

$$S_{осн} = \frac{1}{2}\sqrt{24^2 + 12^2 + (-8)^2} = 14.$$

Итак,

$$H = 3 \cdot \frac{308}{6} \Big/ 14 = 11.$$

ЛЕКЦИЯ 6

Тема **Прямая на плоскости**

§1. Уравнение линии на плоскости

I Две задачи аналитической геометрии.

Буквами $x,y,t,s,\ldots$ будем обозначать переменные величины, а записью $F(x,y)$ или $F(t,s)$ – любое выражение с переменными, например: $x^2+y^2–25=0$, $x^2–4=0$ (одна переменная x – это частный случай двух переменных).

Говорят, что числа $x=x_0$ и $y=y_0$ удовлетворяют уравнению $F(x,y)=0$, если при подстановке их в это уравнение вместо переменных оно становится верным числовым равенством. Например, $x=4$ и $y=5$ удовлетворяют уравнению $x^2+y^2–25=0$, а числа $x=1$ и $y=3$ этому уравнению не удовлетворяют. Конечно, среди множества уравнений встречаются такие, которым не удовлетворяют ни какие пары чисел (например, $x^2+y^2+1=0$) и такие, которым удовлетворяют любые пары значений переменных (например, $\sin^2(xy)+\cos^2(xy)-1=0$). Мы исключим из рассмотрения эти крайности.

Кроме букв, обозначающих переменные, уравнение может содержать также и другие символы a, b, c,… которые представляют собой фиксированные (хотя бы и не указанные) числа. Их принято называть параметрами уравнения. Например, в уравнении $ax+by–9=0$ параметрами являются a и b.

Пусть на плоскость задана некоторая ДПСК и некоторая линия L. Пару чисел (x,y) мы интерпретируем как точку плоскости.

Определение 1. Уравнением данной линии L называется такое уравнение с двумя переменными $F(x,y)=0$, которому удовлетворяют координаты x и y любой точки, лежащей на линии L, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на L.

С этим определением связана одна из задач аналитической геометрии на плоскости: по геометрическому (словесному) определению линии составить (говорят “вывести”) её уравнение. Здесь возможны две ситуации:

1) система координат дана; например, составить уравнение линии, все точки которой равноудалены от точек $A(1;0)$ и $B(0;1)$;

2) система координат не дана, требуется вначале выбрать её; например, составить уравнение линии, все точки которой равноудалены от двух окружностей, имеющих внешнее касание.

Очевидно, что во втором случае уравнение линии будет зависеть от выбранной системы координат.

Пример. Вывести уравнение линии, все точки которой находятся вдвое ближе от точки $A(2;0)$, чем от точки $B(8;0)$.

Решение. Это типовая задача и мы решим её по определенной схеме.

1. Обозначим буквой M произвольную точку линии (говорят “текущую точку”), т.е. точку с переменными координатами x и y (“текущие координаты”).

2. Условие, характеризующее все точки линии, запишем в математических символах:

$$2\cdot d(M,A)=d(M,B). \qquad (1)$$

3. Выясним в последнем соотношении все величины, которые могут меняться при произвольных движениях точки M. Ими являются оба расстояния.

4. Выразим указанные величины через текущие координаты точки M и заменим их в соотношении (1) этими выражениями. Имеем:

$$d(M,A)=\sqrt{(x-2)^2+y^2}\ ,\ d(M,B)=\sqrt{(x-8)^2+y^2}\,.$$

Отсюда и из (1) находим:

$$2\cdot\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(x-8)^2+y^2}\,. \qquad (2)$$

Это и есть искомое уравнение, ему удовлетворяют координаты любой точки, рассматриваемой линии, и не удовлетворяют координаты никакой другой точки плоскости. Задача решена. Мы можем только пожелать упростить уравнение (2). С этой целью возведем обе части в квадрат, раскроем скобки и приведём подобные. В результате получим

$$x^2+y^2=16.$$

Замечание 1. В общем случае при возведении обеих частей уравнения в квадрат можем получить уравнение, не равносильное исходному. В нашем случае этого не произошло, ибо обе части уравнения (2) положительны.

Во многих задачах уравнение линии играет роль первичного данного, а сама линия рассматривается, как нечто вторичное.

Определение 2. Линия, определяемая данным уравнением вида $F(x,y)=0$, есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Вторая задача аналитической геометрии состоит в том, чтобы по данному уравнению изучить свойства линии, построить её.

Пример. Выяснить, какую линию определяет уравнение $x^2-y^2=0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $(x-y)(x+y)=0$, что равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x-y=0, \\ x+y=0, \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} y=x, \\ y=-x. \end{array}\right.$$

Первое из них определяет биссектрису первой и третьей четверти, а второе – биссектрису второй и четвертой четверти. Итак, исходное уравнение определяет биссектрисы координатных углов.

Замечание 2. Конечно, существуют уравнения, которые либо вообще не определяют никакого геометрического образа $(x^2+y^2+1=0)$, либо определяют геометрический образ, отличный от того, что мы привыкли понимать под словом “линия”. Например, уравнение $x^2+y^2=0$ определяет лишь одну точку $(0;0)$, а уравнение $|x|+|y|-|x+y|=0$ определяет первый и третий квадранты.

В дальнейшем вместо выражения “дано уравнение линии $F(x,y)=0$” будем говорить короче: “дана линия $F(x,y)=0$”.

II Параметрическое задание линии

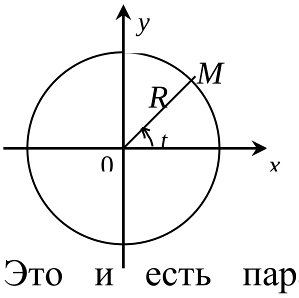
Определение 3. Если абсцисса и ордината произвольной точки линии заданы как функции некоторой вспомогательной переменной, а именно:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \qquad (3)$$

то говорят, что линия задана параметрически. Уравнения (3) называют параметрическими, переменную t – параметром.

Параметрическое представление линии естественно возникает, если эту линию рассматривать как траекторию движения материальной точки, непрерывно движущейся по определенному закону.

В качестве примера установим параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в начале координат. Пусть $M(x,y)$ – текущая точка окружности, а t – угол между радиус-вектором этой точки и осью Ox, отсчитываемый в положительном направлении. Вспоминая определение синуса и косинуса произвольного угла, нетрудно получить



$$\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t. \end{cases} \qquad (4)$$

Это и есть параметрические уравнения рассматриваемой окружности. Параметр может принимать любые значения, но для того, чтобы точка $M(x,y)$ один раз обошла окружность, следует ограничить область измерения параметра, например, промежутком $0\le t<2\pi$.

Замечание 3. Иногда удается из параметрических уравнений исключить параметр и прийти к уравнению вида $F(x,y)=0$. Например, если уравнения (4) возвести в квадрат и сложить, то получим известное уравнение рассматриваемой окружности: $x^2+y^2=R^2$.

Замечание 4. Часто линию L определяют не уравнением вида $F(x,y)=0$, а разрешенным относительно какой-либо переменной, например уравнением $y=f(x)$. В таком случае говорят, что линия задана явно, линия является графиком функции. Заметим, что такой способ задания является частным случаем параметрического:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

Иногда одно уравнение вида $F(x,y)=0$ распадается на несколько явных:

$$x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{R^2 - x^2}, \\ y = -\sqrt{R^2 - x^2}. \end{array}\right.$$

III О пересечении двух линий

В аналитической геометрии часто приходится решать задачу: даны две линии $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$, требуется найти точки их пересечения. Как всегда в аналитической геометрии, говоря "найти точки", мы подразумеваем: "вычислить их координаты".

Само определение уравнения линии дает способ решения этой задачи: следует решить систему уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

IV Уравнение линии в различных системах координат

Как уже отмечалось, вид уравнения линии L зависит не только от вида самой линии L, но и от выбора системы координат. Уравнение линии меняется как при переходе от одной ДПСК к другой, так и при переходе от декартовых координат к каким-нибудь другим.

Если есть уравнение линии в ДПСК, то получить уравнение в другой системе можно просто применив формулы перехода. Например:

$x^2+y^2-2Rx=0$ – в ДПСК,

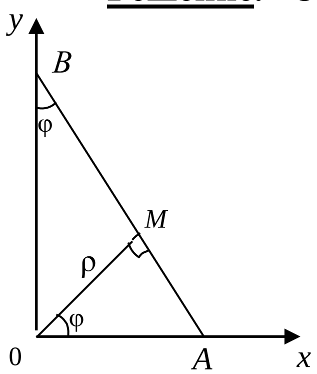
$(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 - 2R\rho\cos\varphi = 0$, или после преобразования

$\rho = 2R\cos\varphi$ – в ПСК.

Если же декартового уравнения нет, можно сразу получать уравнение в требуемой системе координат.

Пример. Отрезок длиной $2a$ движется так, что его концы находятся на положительных полуосях координат. Из начала координат на него опущен перпендикуляр. Составить уравнение линии, которую описывает основание этого перпендикуляра при движении отрезка.

Решение. Составим уравнение в ПСК.



Пусть $M(\rho,\varphi)$ – текущая точка линии (основания перпендикуляра). Из элементарно-геометрических соображений имеем:

$$OA = AB \cdot \sin\varphi = 2a\sin\varphi,\ OB = 2a\cos\varphi,$$
$$OA \cdot OB = OM \cdot AB, \quad \textit{откуда}$$
$$OM = \rho = \frac{2a\sin\varphi \cdot 2a\cos\varphi}{2a}.$$

Окончательно, $\rho = a\sin 2\varphi$ – полярное уравнение рассматриваемой линии.

§2. Общее уравнение прямой на плоскости

Будем считать, что на плоскости задана некоторая ДПСК.

Определение. Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный данной прямой, называется её нормальным вектором. Стандартное обозначение: $\overline{n} = \{A, B\}$.

Очевидно, что всякая прямая имеет бесконечно много нормальных векторов, но все они коллинеарны друг другу.

Теорема. В декартовых координатах всякая прямая определяется уравнением первой степени, т.е. уравнением вида

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

И обратно: всякое уравнение вида (1) определяет на плоскости некоторую прямую.

Доказательство. Докажем прямую часть теоремы. Пусть на плоскости задана прямая p и пусть точка $M_0(x_0,y_0)$ – некоторая принадлежащая ей точка, а $\overline{n} = \{A, B\}$ – её нормальный вектор. Как обычно при выводе уравнений, берем текущую точку прямой $M(x,y)$ и рассматриваем вектор $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$. Тогда:

$$M \in p \Leftrightarrow \overline{M_0M} \perp \overline{n} \Leftrightarrow \overline{n} \cdot \overline{M_0M} = 0.$$

Выражая скалярное произведение векторов через их проекции, получаем:

$$A \cdot (x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (2)$$

Это и есть искомое уравнение прямой. Раскрыв скобки, его нетрудно записать в форме (1):

$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$ и обозначив $(-Ax_0 - By_0) = C$,

получим уравнение (1).

Докажем обратную часть теоремы. Пусть дано произвольное уравнение вида (1). Термин "произвольное" означает, что коэффициенты A,B,C могут быть какими угодно числами, исключая, конечно, случай одновременного равенства $A=B=0$. Мы должны доказать, что такое уравнение определяет некоторую прямую.

Пусть x_0, y_0 – какое-нибудь решение уравнения (1) (например, x_0 – произвольное, а $y_0=(-C-Ax_0)/B$, если $B\neq 0$; если же $B=0$, то y_0 – произвольное, а $x_0=-C/A$). Это означает, что

$$Ax_0+By_0+C=0 \quad – \qquad (3)$$

верное числовое равенство. Вычтем из уравнения (1) равенство (3). Получим уравнение

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \quad (2)$$

равносильное исходному уравнению (1). Но согласно уже доказанному, такое уравнение имеет прямая проходящая через точку с координатами x_0 и y_0, для которой $\bar{n}=\{A,B\}$ – нормальный вектор. Теорема доказана.

Замечание 1. Уравнение

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

называют общим уравнением прямой. Уравнение же

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \quad (2)$$

есть уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ и имеющей нормальный вектор $\bar{n}=\{A,B\}$.

Пример. Даны вершины треугольника $A(2;1)$, $B(-1;-1)$ и $C(3;2)$. Составить уравнение высоты AD, опущенной из вершины A на сторону BC.

Решение. Для высоты AD вектор $\overline{BC}=\{4,3\}$ является нормальным. Поэтому, используя (2), можно написать искомое уравнение:

$$4(x-2)+3(y-1)=0,$$

или $4x+3y-11=0$.

Замечание 2. В случае, когда один или два из коэффициентов уравнения (1) равны 0, уравнение называют неполным. Неполные уравнения определяют на плоскости характерные прямые.

1) $C=0$; уравнение $Ax+By=0$ определяет прямую, проходящую через начало координат.

2) $B=0$ $(A\neq 0)$ означает: $\bar{n}\perp Oy \Rightarrow$ прямая параллельна оси Oy.

3) $B=0$ и $C=0$ $(A\neq 0)$; прямая параллельна оси Oy и проходит через начало координат, т.е. это сама ось ординат, её уравнение $Ax=0$ или $x=0$.

4) $A=0$ $(B\neq 0)$; прямая параллельна Ox.

5) $A=0$, $C=0$ $(B\neq 0)$; прямая совпадает с осью Ox, её уравнение $y=0$.

§3. Уравнения прямой с угловым коэффициентом

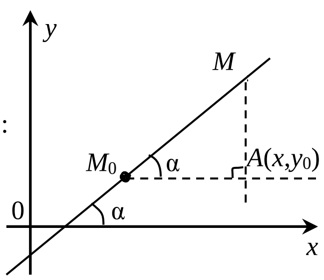
Рассмотрим какую-нибудь прямую p, пересекающую ось Ox; точку пересечения обозначим A. Возьмем на оси Ox точку B, лежащую правее A, а на прямой p точку С, лежащую в верхней полуплоскости. Угол

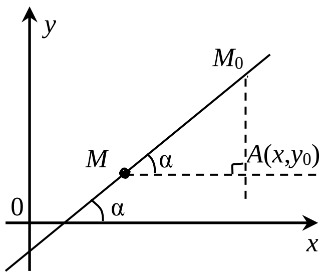
$\alpha = \angle BAC$ называется углом наклона прямой p к оси Ox. Если же $p||Ox$, будем считать $\alpha = 0$.

Угловым коэффициентом прямой называют тангенс угла наклона ее к оси Ox; обозначение k: $k=\text{tg}\alpha$. Так как всегда $0 \leq \alpha < 180^{\circ}$, то угловой коэффициент, как и сам угол α, однозначно определяет наклон прямой к оси абсцисс.

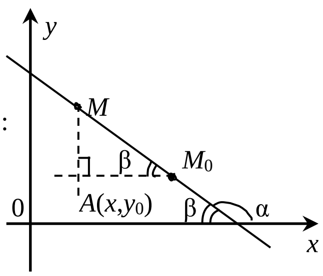
Составим уравнение прямой p, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k. Пусть $M(x,y)$ – текущая точка прямой. В зависимости от знака k и взаимного расположения точек M и M_0 возможны четыре случая:

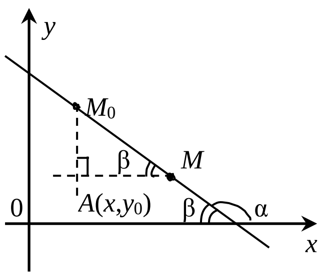
k>0:





k<0:





Рассмотрим прямоугольный треугольник AM_0M и найдем тангенс угла α (для первых двух случаев) и угла β (для двух других):

$$tg\alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0}; \qquad tg\alpha = \frac{y_0 - y}{x_0 - x};$$

$$tg\beta = \frac{y - y_0}{x_0 - x}; \qquad tg\beta = \frac{y_0 - y}{x - x_0}.$$

Учитывая, что $\beta=180^{\circ}-\alpha$, а значит $tg\beta = -tg\alpha$, все эти четыре формулы сводятся к одной

$$tg\alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0}. \qquad (1)$$

Но по определению $tg\alpha = k$, значит, (1) можно переписать в виде

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (2)$$

Это и есть искомое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ и имеющую данный угловой коэффициент k.

Замечание 1. Уравнению (2) можно придать другую форму. Если положить $b=y_0-kx_0$, то из (2) получим

$$y=kx+b. \qquad (3)$$

Этот вид записи уравнения прямой употребляется, пожалуй, наиболее часто. Его называют уравнением прямой с угловым коэффициентом. Свободный член b имеет простой геометрический смысл – это ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Замечание 2. Соотношение (1) справедливо для любой пары точек $M(x,y)$ и $M_0(x_0,y_0)$ прямой с углом наклона α. Используя этот факт, можно решить следующую задачу:

составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$.

Для ее решения берем, как обычно, текущую точку $M(x,y)$ и применяем соотношение (1) к двум парам точек: $(M,\ M_1)$ и $(M_2,\ M_1)$. Получим:

$$tg\alpha=\frac{y-y_1}{x-x_1}, \quad tg\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Левые части этих равенств равны, следовательно, можно приравнять правые, а затем, используя свойство пропорции, записать уравнение

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (4)$$

Это и есть искомое уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$.

Отметим, что к уравнению (4) можно прийти и другими способами.

Пример. Даны вершины треугольника $A(2;-1)$, $B(-1;-1)$ и $C(3;2)$. Составить уравнение медианы, проведенной из вершины A.

Решение. Медиана треугольника соединяет его вершину A с серединой противоположной стороны BC. Обозначим эту середину $D(x_1,y_1)$ и найдем ее:

$$x_1=\frac{-1+3}{2}=1; \quad y_1=\frac{-1+2}{2}=0.5.$$

Напишем теперь уравнение медианы, как прямой проходящей через две точки $A(2;1)$ и $D(1;0,5)$:

$$\frac{y-1}{0.5-1}=\frac{x-2}{1-2}.$$

Упрощая, получим $x-2y=0$, или $y=0.5x$.

Замечание 3. Между общим уравнением прямой и уравнением прямой с угловым коэффициентом существуют очевидные связи:

1) угловой коэффициент прямой $Ax+By+C=0$ имеет вид $k=-\dfrac{A}{B}$ (если только $B\neq 0$, т.е. прямая не параллельна оси Oy);

2) нормальный вектор прямой $y=kx+b$ имеет вид $\overline{n}=\{k;-1\}$ (с точностью до коллинеарности).

§4. Взаимное расположение двух прямых

В этом параграфе мы приведем условия параллельности и перпендикулярности прямых, а также формулы, позволяющие найти угол между прямыми.

Пусть даны две прямые

$$p_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad p_1:\ y=k_1x+b_1,$$
$$p_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0, \qquad p_2:\ y=k_2x+b_2.$$

1. Прямые параллельны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы коллинеарные, или угловые коэффициенты равны:

$$p_1 \,||\, p_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \,||\, \overline{n_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2},$$

$$p_1 \,||\, p_2 \Leftrightarrow k_1=k_2.$$

2. Прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы перпендикулярны:

$$p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \Leftrightarrow \overline{n_1}\cdot\overline{n_2}=0.$$

Это в терминах проекций означает следующее:

$$p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0.$$

Если же прямые заданы в форме уравнений с угловыми коэффициентами, то $\overline{n_1}=\{k_1;-1\}$ и $\overline{n_2}=\{k_2;-1\}$ и условие перпендикулярности принимает вид:

$$k_1\cdot k_2+1=0 \text{ или } k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

3. Один из двух углов, которые образуют две пересекающиеся прямые (их сумма равна π), равен углу между нормальными векторами этих прямых, и его косинус может быть найден по известной формуле. Если же мы хотим находить острый угол φ между прямыми, эта формула модифицируется:

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}\right|}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|}=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

В случае задания прямых в форме уравнений с угловыми коэффициентами можно пользоваться и другой формулой:

$$tg\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|.$$

Пример. Дана прямая p: $y=2x+3$ и точка $M_0(1;2)$. Через точку M_0 провести: 1)прямую $q_1||p$; 2) прямую $q_2 \perp p$.

Решение. Зная угловой коэффициент прямой p, а именно: $k=2$, нетрудно найти угловые коэффициенты прямых q_1 и q_2. Имеем:

$$k_1=k=2, \quad k_2=-\frac{1}{k}=-\frac{1}{2}.$$

После этого находим искомые уравнения, как уравнения прямых, проходящих через данную точку и имеющих данные угловые коэффициенты:

$$q_1:\ y-2=2(x-1), \quad \text{или } y=2x;$$

$$q_2:\ y-2=-\frac{1}{2}(x-1), \quad \text{или } y=-0.5x+2.5.$$

ЛЕКЦИЯ 7

§5. Расстояние от точки до прямой на плоскости

Пусть даны точка $M^*(x^*,y^*)$ и прямая p: $Ax+By+C=0$. Для определения расстояния $d(M^*,p)$ от точки до прямой имеются различные методы. Два из них изложим схематично.

1) Проводим через M^* прямую $q \perp p$. Затем находим точку $N = p \cap q$. Тогда

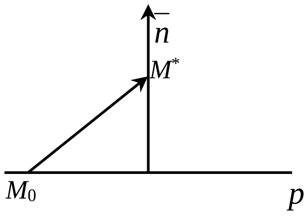
$$d\left(M^*, p\right) = d\left(M^*, N\right).$$

2) Берем на прямой p две точки M_1 и M_2, т.е. находим два решения уравнения $Ax+By+C=0$. Затем рассматриваем векторы $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M^*}$ и строим на них параллелограмм. Искомое расстояние – это не что иное, как высота параллелограмма, опущенная из вершины M^* на сторону M_1M_2. Высоту же можно найти через площадь:

$$d\left(M^*, p\right) = h = \frac{S}{a} = \frac{\left|\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M^*}\right|}{\left|\overline{M_1M_2}\right|}.$$

3) Этот метод приведет нас к простой формуле, которую полезно запомнить.

Возьмем на прямой p некоторую точку $M_0(x_0,y_0)$. Искомое расстояние есть не что иное, как проекция (вернее, ее абсолютная величина) вектора



$\overline{M_0M^*} = \left\{x^* - x_0; y^* - y_0\right\}$ на направление нормального вектора $\bar{n} = \{A, B\}$ прямой p. Поэтому имеем:

$$d\left(M^*, p\right) = \left|np_{\bar{n}}\overline{M_0M^*}\right| = \frac{\left|\bar{n}\cdot\overline{M_0M^*}\right|}{\left|\bar{n}\right|} = \frac{\left|A(x^* - x_0) + B(y^* - y_0)\right|}{\left|\bar{n}\right|} =$$

$$= \frac{\left|Ax^* + By^* + (-Ax_0 - By_0)\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Тот факт, что $M_0 \in p$ означает, что $Ax_0+By_0+C=0$ – верное равенство, из которого получим $(-Ax_0-By_0)=C$. Итак, мы получили полезную формулу для расстояния от точки $M^*(x^*,y^*)$ до прямой p: $Ax+By+C=0$:

$$d\left(M^*, p\right) = \frac{\left|Ax^* + By^* + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

<u>Пример.</u> Две стороны данного квадрата лежат на данных прямых p_1: $5x-12y-65=0$ и p_2: $10x-24y+13=0$. Найти его площадь.

<u>Решение.</u> Нормальные векторы $\overline{n_1} = \{5;-12\}$ и $\overline{n_2} = \{10;-24\}$ данных прямых коллинеарны (ибо их проекции пропорциональны). Значит, длина стороны квадрата равна расстоянию между этими прямыми $d(p_1,p_2)$. Найдем какую-нибудь точку на одной из прямых, т.е. найдем какое-нибудь решение уравнения, например $5x-12y-65=0$. Положим $y=0$, тогда $x=13$. Итак, точка $M_1(13;0) \in p_1$. Тогда

$$d(p_1, p_2) = d(M_1, p_2) = \frac{\left|10\cdot 13 - 24\cdot 0 + 13\right|}{\sqrt{10^2 + (-24)^2}} = 5{,}5.$$

Искомая площадь квадрата: $S=5{,}5^2=30{,}25$.

<u>§6. Другие формы уравнения прямой на плоскости</u>

В целях удобства решения стандартных задач в аналитической геометрии используются некоторые специальные формы записи уравнения прямой. Естественно, что все они могут быть получены путем алгебраических преобразований из общего уравнения (на то оно и общее!). Но мы будем выводить эти формы непосредственно, чтобы отчетливее выявлять их геометрический смысл.

<u>I Каноническое уравнение</u>

<u>Определение.</u> Всякий ненулевой вектор, лежащий на данной прямой или параллельный ей, называется ее направляющим вектором. Стандартное обозначение: $\bar{a} = \{l; m\}$.

Выведем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0;y_0)$ и имеющей данный направляющий вектор $\overline{a}=\{l;m\}$. Как обычно, берём текущую точку данной прямой $M(x,y)$ и рассматриваем вектор $\overline{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0\}$. Векторы $\overline{M_0M}$ и $\overline{a}$ коллинеарны, следовательно, их проекции пропорциональны:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}. \qquad (1)$$

Это и есть искомое уравнение. Его называют каноническим уравнением прямой.

Пример. Через точку $M_0(1;2)$ провести прямую q, перпендикулярную прямой $p{:}3x–4y+7=0$.

Решение. Нормальный вектор $\overline{n}_p=\{3;-4\}$ прямой p перпендикулярен ей, а значит, параллелен прямой q, т.е. он для прямой q является направляющим

$$\overline{a_q}=\overline{n_p}=\{3;-4\}.$$

Следовательно, уравнение прямой q имеет вид

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-4} \quad \text{или } 4x+3y-10=0.$$

Замечание 1. Если прямая проходит через две данные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, то вектор $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$ – ее направляющий вектор. Положив $M_0=M_1$ и применив каноническую форму (1), получим уже известную форму:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (2)$$

II Уравнение прямой “в отрезках”.

Рассмотрим прямую, которая пересекает обе координатные оси, причем не проходит через начало координат (ее общее уравнение – полное). Пусть $A(a;0)$ и $B(0;b)$ – точки пересечения прямой с осями Ox и Oy соответственно. Применив к этой прямой формулу (2), после преобразования получим

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \quad (3)$$

Это уравнение принято называть уравнением “в отрезках”.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(8;6)$ и отсекающей от координатного угла треугольник с площадью равной 12 кв.ед.

Решение. Запишем уравнение искомой прямой в отрезках

$$p:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Наша задача – найти значения параметров a и b. Т.к. $M_0 \in p$, то $\frac{8}{a}+\frac{6}{b}=1$ и после упрощения получаем $8b+6a=ab$. Это одно из уравнений, связывающее неизвестные параметры. Из самого смысла параметров a и b уравнения “в отрезках” получим: площадь треугольника, образованного прямой p и осями координат, выражается формулой

$$S=\frac{|a\cdot b|}{2} \quad \text{или} \quad ab=\pm 2S.$$

Согласно условию нашей задачи имеем

$$ab=\pm 24.$$

Это второе уравнение. Итак, требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} 8b+6a=ab, \\ ab=\pm 24. \end{cases}$$

Эта система равносильна следующей

$$\begin{cases} a=\pm 24/b, \\ b^2 \mp 3b \pm 18=0, \end{cases}$$

которая имеет два решения $a_1=-8$, $b_1=3$ и $a_2=4$, $b_2=-6$. Подставляя эти значения в уравнение прямой “в отрезках” и упрощая, получим искомые уравнения прямых:

$$3x-8y+24=0 \quad \text{и} \quad 3x-2y-12=0.$$

III Параметрические уравнения прямой

Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0;y_0)$ и имеет направляющий вектор $\bar{a}=\{l,m\}$. Тогда для любой ее точки $M(x;y)$ вектор $\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0\}$ коллинеарен вектору $\bar{a}$. Это означает, что существует число t такое, что $\overline{M_0M}=t\cdot\bar{a}$. Записав это равенство в проекциях векторов, получим: $x-x_0=tl$, $y-y_0=tm$, или окончательно

$$\begin{cases} x=x_0+l\cdot t, \\ y=y_0+m\cdot t. \end{cases} \quad (4)$$

Это и есть параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ в направлении вектора $\bar{a}=\{l,m\}$.

Замечание 2. Если на параметр t смотреть как на время, то уравнения (4) определяют прямолинейное и равномерное движение точки $M(x;y)$ со скоростью $v=\sqrt{l^2+m^2}$ в направлении вектора $\bar{a}=\{l,m\}$; точка $M_0(x_0;y_0)$ – начальная (t=0) точка движения.

Пример. Составить уравнения движения точки $M_0(1;1)$, движущейся прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\bar{s}=\{3,4\}$ со скоростью $v=15$. Установить, в какой момент времени она пересечет прямую $x–y+9=0$.

Решение. Сравнивая модуль вектора $\bar{s}$, равный $|\bar{s}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$, с заданной скоростью v=15, мы видим, что в качестве вектора $\bar{a}$ надо взять $3\cdot\bar{s}$, т.е. $\bar{a}=\{9,12\}$. Тогда искомые уравнения имеют вид:

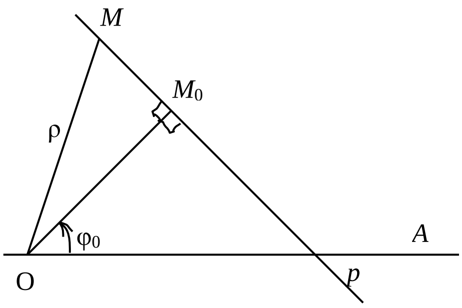
$$\begin{cases} x=1+9t, \\ y=1+12t. \end{cases} \qquad (5)$$

В любой момент времени t координаты движущейся точки вычисляются по формулам (5), в частности, и в момент пересечения с прямой $x–y+9=0$. Но в этот момент они должны удовлетворять и уравнению этой прямой, т.е. момент пересечения есть решение уравнения $(1+9t)–(1+12t)+9=0$ или $–3t+9=0$. Отсюда $t=3$.

IV Полярное уравнение прямой

Если прямая проходит через полюс полярной системы координат и наклонена к полярной оси под углом φ_0, то она определяется совокупностью уравнений $\left[\begin{array}{l} \varphi=\varphi_0, \\ \varphi=\varphi_0+\pi. \end{array}\right.$

Рассмотрим теперь случай, когда прямая p не проходит через полюс. Пусть $M_0(\rho_0;\varphi_0)$ – основание перпендикуляра, опущенного из полюса на эту прямую. Возьмем текущую точку $M(\rho;\varphi)$. В прямоугольном треугольнике



ΔM_0MO угол $\angle MOM_0=\varphi-\varphi_0$ или $\angle MOM_0=\varphi_0-\varphi$. В обоих случаях $\dfrac{OM_0}{OM}=\cos(\varphi-\varphi_0)$ или в более понятной форме $\rho\cdot\cos(\varphi-\varphi_0)=\rho_0$ (5)

Это и есть полярное уравнение прямой.

Тема **Плоскость и прямая в пространстве.**

§1. Уравнение поверхности и уравнения линии

I Поверхность

Соотношение вида $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)$ – выражение с переменными, называется уравнением с тремя переменными. Например, $x+2y+3z–1=0$, $x^2+y^2–25=0$, $x–1=0$.

Говорят, что три числа $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ удовлетворяют данному уравнению с тремя переменными, если при подстановке их в это уравнение вместо переменных оно становится верным числовым равенством.

Пусть теперь в пространстве задана некоторая поверхность и выбрана некоторая ДПСК. Тройку чисел (x,y,z) понимаем как координаты точки пространства.

Определение 1. Уравнением данной поверхности называют такое уравнение с тремя переменными, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на этой поверхности, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней.

Определение 2. Поверхность, определяемая данным уравнением вида $F(x,y,z)=0$, есть множество всех точек пространства, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

С этими определениями связны две задачи аналитической геометрии в пространстве: 1) по словесному определению поверхности, по свойствам ее точек составить уравнение поверхности; 2) зная уравнения поверхности, выяснить свойства ее точек, изобразить поверхность.

Замечание. Задание поверхности уравнением $F(x,y,z)=0$ называется неявным. Если же это уравнение удается разрешить относительно одной из переменных и получить, например, $z=f(x,y)$, то говорят о явном задании поверхности. Отметим, что существует и параметрический способ задания поверхности, но его мы будем рассматривать позже.

II Линия в пространстве

Линию в пространстве естественно рассматривать как пересечение двух поверхностей.

Именно, если $F(x,y,z)=0$ и $\Phi(x,y,z)=0$ есть уравнения двух поверхностей, пересекающихся по некоторой линии L, то линия L есть множество общих точек этих поверхностей, т.е. множество точек, координаты которых удовлетворяют одновременно обоим уравнениям.

Таким образом, система двух уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ \Phi(x,y,z)=0 \end{cases} \quad (1)$$

определяет линию L, т.е. является уравнениями этой линии.

Например, уравнения $\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x-4y+z=0 \end{cases}$

двух плоскостей определяют прямую, проходящую через начало координат и точку $P(1;1;2)$ (координаты точек O и P удовлетворяют обоим уравнениям).

Однако, задание линии уравнениями (1) не всегда удобно. Возможен, и очень естественен с кинематической точки зрения, другой подход к понятию линии: линия – это траектория движения материальной точки. Этот подход приводит к параметрическим уравнениям линии, когда абсцисса, ордината и аппликата текущей точки линии выражаются функциями вспомогательной переменной – параметра t:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Например, параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ z = Vt \end{cases}$$

задают так называемую винтовую линию. Ее можно понимать как траекторию точки, движущейся равномерно по образующей кругового цилиндра, если сама образующая равномерно вращается вокруг оси цилиндра.

§2. Общее уравнение плоскости

Будем считать, что в пространстве задана некоторая ДПСК.

Определение. Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости, называется ее нормальным вектором. Обозначение: $\overline{n} = \{A; B; C\}$.

Теорема. В декартовых координатах всякая плоскость определяется уравнением первой степени, т.е. уравнением вида

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (1)$$

И обратно: всякое уравнение вида (1) определяет в пространстве некоторую плоскость.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы об общем уравнении прямой на плоскости.

Уравнение (1) называют общим уравнением плоскости. Коэффициенты A,B,C – это проекции нормального вектора плоскости.

Уравнение вида

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

является уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и имеющей нормальный вектор $\overline{n}=\{A;B;C\}$.

Пример. Составить уравнение плоскости α, проходящей через данную точку $M_0(1;2;3)$ и перпендикулярной плоскостям β: $x+2y-z=0$ и γ: $2x-y+3z+1=0$.

Решение. Нормальные векторы $\overline{n_1}=\{1;2;-1\}$ и $\overline{n_2}=\{2;-1;3\}$ плоскостей β и γ перпендикулярны своим плоскостям, а значит параллельны плоскости α, т.к. $\alpha\perp\beta$ и $\alpha\perp\gamma$. Но тогда векторное произведение $\overline{n_1}\times\overline{n_2}$, будучи перпендикулярным своим сомножителям, будет также перпендикулярным к плоскости α, т.е. оно является нормальным вектором этой плоскости. Найдем его:

$$\overline{n_1}\times\overline{n_2}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=5\bar{i}-5\bar{j}-5\bar{k}.$$

Вектор $\overline{n}=\{1;-1;-1\}$, коллинеарный $\overline{n_1}\times\overline{n_2}$, также будет нормальным вектором искомой плоскости α. Теперь можем составить ее уравнение:

$$1(x-1)+(-1)(y-2)+(-1)(x-3)=0 \text{ или}$$

$$x-y-z+4=0.$$

§3. Неполные уравнения плоскости

Рассмотрим сейчас некоторые частные случаи общего уравнения плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, именно случаи, когда какие-либо из коэффициентов A,B,C,D обращаются в ноль.

1) $D=0$; плоскость $Ax+By+Cz=0$ проходит через начало координат.
2) $A=0$; плоскость $By+Cz+D=0$ параллельна оси Ox (поскольку ее нормальный вектор $\overline{n}=\{0;B;C\}$ перпендикулярен оси Ox).
3) $B=0$; плоскость $Ax+Cz+D=0$ параллельна оси Oy (ибо этой оси перпендикулярен ее нормальный вектор $\overline{n}=\{A;0;C\}$).
4) $C=0$; плоскость $Ax+By+D=0$ параллельна оси Oz (по причине аналогичной в пунктах 2) и 3)).
5) $A=0$, $B=0$; плоскость $Cz+D=0$ параллельна координатной плоскости Oxy (в силу 2) и 3) она параллельна осям Ox и Oy).

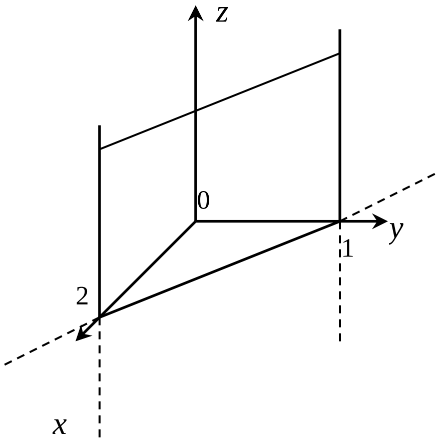
6) $A=0$, $C=0$; плоскость $By+D=0$ параллельна координатной плоскости Oxz.

7) $B=0$, $C=0$; плоскость $Ax+D=0$ параллельна координатной плоскости Oyz.

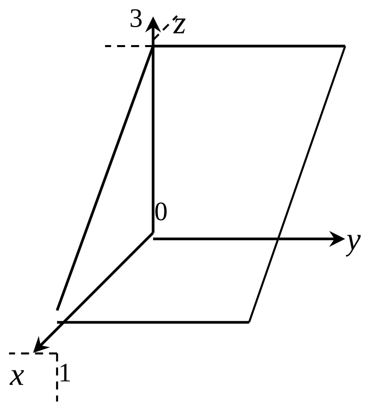
8) $B=0$, $D=0$; плоскость $Ax+Cz=0$ проходит через ось ординат.

9) $C=0$, $D=0$; плоскость $Ax+By=0$ проходит через ось аппликат.

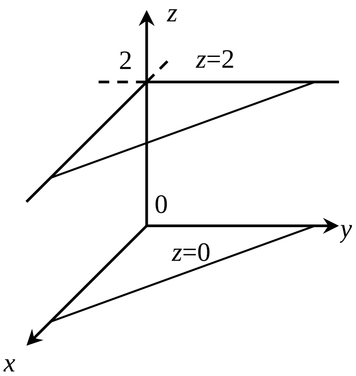
10) $A=0$, $D=0$; плоскость $By+Cz=0$, проходит через ось абсцисс.

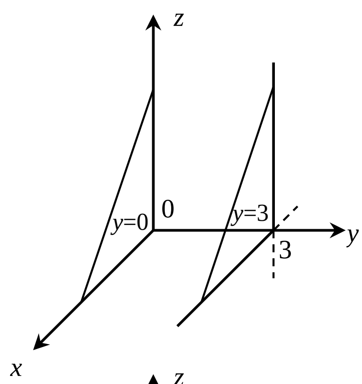


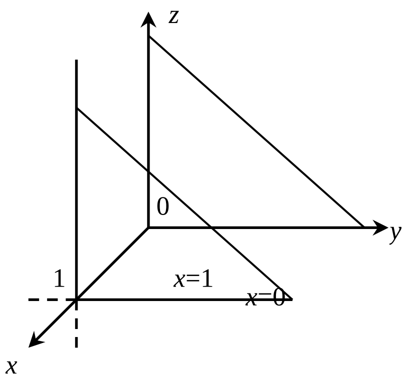
$x+2y–2=0$

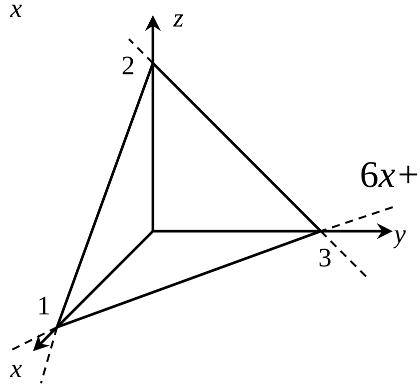


$3x+z–3=0$









$6x+2y+3z–6=0$

§4. Взаимное расположение двух плоскостей

Рассмотрим две плоскости

α_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,

α_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Как и в случае прямых на плоскости, взаимное расположение плоскостей полностью определяется их нормальными векторами $\overline{n_1}=\{A_1;B_1;C_1\}$ и $\overline{n_2}=\{A_2;B_2;C_2\}$.

Условие параллельности плоскостей:

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \parallel \overline{n_2}\text{, что означает}$$

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \Leftrightarrow \overline{n_1}\cdot\overline{n_2}=0,\text{ что означает}$$

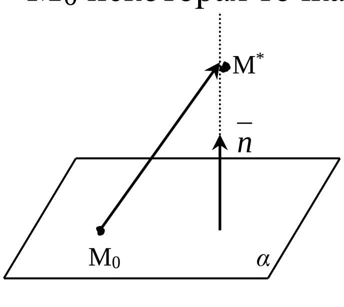
$$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0.$$

Угол (острый) φ между плоскостями:

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}\right|}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|}=\frac{|\ A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\ |}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

§5. Расстояние от точки до плоскости

Пусть даны точка $M^*(x^*;y^*;z^*)$ и плоскость α: $Ax+By+Cz+D=0$. Формула для расстояния $d(M^*,\alpha)$ от точки M^* до плоскости α выводится аналогично формуле для расстояния от точки до прямой на плоскости. Если M_0 некоторая точка плоскости α, то



$$d\left(M^*,\alpha\right)=\left|np_{\bar n}\overline{M_0M^*}\right|.$$

Применяя формулу, выражающую проекцию одного вектора на другой через их скалярное произведение, и учитывая условие $M_0\in\alpha$ (т.е. $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ – верное равенство), получим

$$d\left(M^*,\alpha\right)=\frac{\left|Ax^*+By^*+Cz^*+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Это и есть формула для вычисления расстояния от точки $M^*(x^*;y^*;z^*)$ до плоскости α:$Ax+By+Cz+D=0$.

Пример. Составить уравнение плоскостей, параллельных данной плоскости α: $2x–2y–z–3=0$ и отстоящих от нее на расстояние $d=5$.

Решение. Найдем какое-нибудь решение уравнения $2x–2y–z–3=0$. Пусть, например $x=0$, $y=0$, тогда $z=–3$, значит точка $M_0(0;0;–3)\in\alpha$. По условию искомые плоскости параллельны данной. Значит, их уравнения отличаются от уравнения данной плоскости α лишь свободным членом:

$$\beta: 2x–2y–z+D=0.$$

Запишем расстояние от точки M_0 до плоскости β и приравняем его 5:

$$\frac{|2\cdot 0-2\cdot 0-(-3)+D|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=5,$$

$$\text{или } |D+3|=15,\ D+3=\pm 15.$$

Отсюда имеем $D_1=–18$, $D_2=12$. Искомые плоскости имеют уравнения:

$$\beta_1: 2x–2y–z–18=0 \quad \text{и} \quad \beta_2: 2x–2y–z+12=0.$$

ЛЕКЦИЯ 8

§6. Другие виды уравнения плоскости

I Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Выведем уравнение плоскости, которая проходит через три различные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$, не лежащие на одной прямой. Так как указанные точки не лежат на одной прямой, векторы $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$ и $\overline{M_1M_3}=\{x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1\}$ неколлинеарны, а потому произвольная точка $M(x,y,z)$ лежит в одной плоскости с точками M_1, M_2, M_3 тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ и $\overline{M_1M}=\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$ компланарны. Но компланарность равносильна равенству нулю смешанного произведения векторов. Записав смешанное произведение через проекции векторов, получим:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \quad . \qquad (1)$$

Это и есть уравнение плоскости проходящей через данные три точки.

II Уравнение плоскости “в отрезках”

Рассмотрим плоскость, которая пересекает все координатные оси и не проходит через начало координат. Введем обозначения для точек пересечения с осями: $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$ и $M_3(0;0;c)$. Составим уравнение плоскости, используя формулу (1):

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель, получим:

$$(x-a)bc+yac+zab=0.$$

Разделим обе части уравнения на abc:

$$\frac{x-a}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0.$$

И окончательно

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad . \qquad (2)$$

Это и есть уравнение плоскости “в отрезках”.

§7. Прямая в пространстве

I Общие уравнения прямой

Как уже говорилось ранее, в аналитической геометрии линию в пространстве понимают как пересечение двух поверхностей. В частности, прямую линию мы будем рассматривать как пересечение двух плоскостей. Поэтому, если в пространстве задана некоторая ДПСК, то уравнениями прямой служит система двух уравнений первой степени:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Будем называть эти уравнения общими уравнениями прямой (конечно, предполагается, что прямые пересекаются).

Очевидно, существует бесчисленное множество пар плоскостей, пересекающихся по данной прямой, и соответственно этому существует бесчисленное множество общих уравнений (1) для данной прямой.

Общие уравнения удобны при решении задачи о пересечении прямой и плоскости или двух прямых, задачи о проектировании прямой на плоскость. В других задачах более удобными оказываются иные формы уравнений прямой.

II Канонические уравнения прямой

Определение. Всякий ненулевой вектор, лежащий на данной прямой или параллельный ей, называется ее направляющим вектором. Обозначение: $\bar{a}=\{l,m,n\}$.

Составим уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ в направлении вектора $\bar{a}=\{l,m,n\}$. Возьмем текущую точку прямой $M(x,y,z)$

и рассмотрим вектор $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. Он лежит на данной прямой и поэтому коллинеарен ее направляющему вектору $\overline{a} = \{l, m, n\}$. Осталось написать условие коллинеарности, т.е. пропорциональность проекций:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (2)$$

Это и есть канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\overline{a} = \{l, m, n\}$.

Пример. Найти канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 3x + y + z + 4 = 0, \\ z - y + z - 8 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решение. Чтобы составить канонические уравнения прямой, нужно: 1) найти какую-либо точку прямой; 2) найти направляющий вектор прямой.

1) Найти какую-нибудь точку прямой (3) – это означает найти какое-нибудь решение этой системы двух уравнений с тремя неизвестными. Положим, например, $x=0$. Система (3) превратится в

$$\begin{cases} y + z = -4, \\ -y + z = 8. \end{cases}$$

Отсюда нетрудно найти: $z=2$, $y=-6$. Итак, точка $M_0(0; -6; 2)$ принадлежит прямой (3).

2) Прямая определена как пересечения двух плоскостей, значит она лежит в каждой из них и поэтому перпендикулярна их нормальным векторам $\overline{n_1} = \{3, 1, 1\}$ и $\overline{n_2} = \{1, -1, 1\}$. В качестве направляющего вектора можно взять любой вектор перпендикулярный к векторам $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$, например, их векторное произведение

$$\overline{n_1} \times \overline{n_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\overline{i} - 2\overline{j} - 4\overline{k},$$

или вектор, коллинеарный ему $\overline{a} = \{1, -1, -2\}$. Итак, искомые канонические уравнения имеют вид

$$\frac{x - 0}{1} = \frac{y + 6}{-1} = \frac{z - 2}{-2}.$$

Пример. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Решение. Для того, чтобы использовать канонические уравнения (2), положим $M_0 = M_1$, $\overline{a} = \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$. Получим:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (4)$$

Имея эти уравнения, предыдущей пример можно решить, не находя направляющий вектор прямой. Надо только найти не одну точку, лежащую на прямой, а две.

III Параметрические уравнения прямой

Пусть даны канонические уравнения какой-либо прямой. Обозначим буквой t каждое из трех равных отношений, которые участвуют в канонических уравнениях:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t.$$

Отсюда:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l}=t, \\ \dfrac{y-y_0}{m}=t, \\ \dfrac{z-z_0}{n}=t. \end{cases}$$

И окончательно

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt. \end{cases} \qquad (5)$$

Это и есть параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ в направлении вектора $\overline{a}=\{l,m,n\}$. Эти уравнения удобно применять в тех случаях, когда требуется найти точку пересечения прямой и плоскости.

Пример. Найти проекцию данной точки $M_0(5,\ 2,-1)$ на плоскость α: $2x-y+3z+23=0$.

Решение. Проведем через M_0 прямую $p\perp\alpha$; ее направляющим вектором служит нормальный вектор плоскости $\overline{a}_p=\overline{n}_\alpha=\{2;-1;3\}$. Имеем параметрические уравнения (5)

$$p:\begin{cases} x=5+2t, \\ y=2-t, \\ z=-1+3t. \end{cases}$$

Проекция точки M_0 на плоскость α – это точка пересечения прямой p с плоскостью α, ее координаты – это решение системы, составленной из уравнения плоскости и уравнений прямой. Подставим параметрические уравнения прямой в общее уравнение плоскости:

$$2(5+2t)-(2-t)+3(-1+3t)+23=0.$$

Отсюда $t=-2$ и координаты искомой точки имеют вид:

$$x=5+2(-2)=1;\quad y=2-(-2)=4;\quad z=-1+3(-2)=-7.$$

§8. Расстояние от точки до прямой в пространстве

Получим формулу для вычисления расстояния $d(M^*,p)$ от точки $M^*(x^*,y^*,z^*)$ до прямой

$$p:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Будем считать, что направляющий вектор прямой $\bar{a}=\{l,m,n\}$ лежит на прямой и приложен в ее точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах $\bar{a}$ и $\overline{M_0M^*}=\{x^*-x_0;y^*-y_0;z^*-z_0\}$. Его высота h, опущенная из вершины M^* на сторону $\bar{a}$ и есть искомое расстояние. Вспомним формулы для вычисления площади параллелограмма:

$$S=h\cdot|\bar{a}| \text{ и } S=\left|\overline{M_0M^*}\times\bar{a}\right|.$$

Сравнивая их, будем иметь:

$$d(M^*,p)=\frac{\left|\overline{M_0M^*}\times\bar{a}\right|}{|\bar{a}|}.$$

Это и есть искомая формула для расстояния от точки $M^*(x^*,y^*,z^*)$, до прямой проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ в направлении вектора $\bar{a}=\{l,m,n\}$.

§9. Взаимное расположение двух прямых в пространтве

Пусть две прямые p_1 и p_2 в пространстве заданы своими каноническими уравнениями:

$$p_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$p_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Параллельность, перпендикулярность и угол между прямыми вполне определяется их направляющими векторами $\overline{a_1} = \{l_1, m_1, n_1\}$ и $\overline{a_2} = \{l_2, m_2, n_2\}$.

Условие параллельности:

$$p_1 \parallel p_2 \Leftrightarrow \overline{a_1} \parallel \overline{a_2} \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Условие перпендикулярности:

$$p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow \overline{a_1} \perp \overline{a_2} \Leftrightarrow l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0.$$

Угол φ между прямыми определяется по формуле:

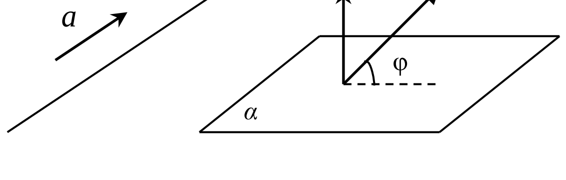
$$\cos\varphi = \frac{\left|\overline{a_1} \cdot \overline{a_2}\right|}{\left|\overline{a_1}\right| \cdot \left|\overline{a_2}\right|} = \frac{\left|l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2\right|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Две прямые в пространстве могут: 1) пересекаться; 2) быть параллельными; 3) скрещиваться. В первых двух случаях прямые лежат в одной плоскости. Наряду с направляющими векторами прямых $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$, рассмотрим вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, где $M_1(x_1, y_1, z_1) \in p_1$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in p_2$. Прямые лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны, что, в свою очередь, равносильно равенству нулю их смешанного произведения. Выразив смешанное произведение через проекции векторов, получим условие принадлежности прямых p_1 и p_2 одной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

§10. Взаимное расположение плоскости и прямой в пространстве

Пусть дана плоскость α: $Ax+By+Cz+D=0$ с нормальным вектором $\overline{n} = \{A, B, C\}$ и прямая $p: \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ с направляющим вектором $\overline{a} = \{l, m, n\}$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.



Условие параллельности прямой и плоскости:

$$p \parallel \alpha \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{n} \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$p \perp \alpha \Leftrightarrow \overline{a} \parallel \overline{n} \Leftrightarrow \frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}.$$

Угол φ между прямой и плоскостью определяется по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{|\overline{n} \cdot \overline{a}|}{|\overline{n}| \cdot |\overline{a}|} = \frac{|A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Условия принадлежности прямой плоскости:

$$p \subset \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{a} \perp \overline{n}, \\ M_0 \in \alpha . \end{cases}$$

ЛЕКЦИЯ 9

Тема **Линии второго порядка.**

§1. Общее уравнение

Определение. Уравнение с двумя переменными вида

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0 \qquad (1)$$

называется уравнением второй степени, а линия, которую оно определяет – линией второго порядка (если только хотя бы один из старших коэффициентов A, B или C отличен от нуля).

При некоторых значениях коэффициентов уравнение (1) определяет так называемые вырожденные линии второго порядка: уравнение $x^2+y^2=0$ определяет одну точку $O(0;0)$; уравнение $x^2+2y^2+1=0$ не определяет никакого геометрического образа; уравнения $x^2–y^2=0$ и $x^2–1=0$ определяют пары прямых (пересекающихся и параллельных).

Если исключить из рассмотрения вырожденные линии, то собственно кривая второго порядка может быть одной из четырех типов: окружность, эллипс, гипербола, парабола.

Поворотом системы координат на некоторый угол (он определяется как решение уравнения $(B–A)\sin2\alpha+C\cos2\alpha=0$), можно исключить из уравнения (1) член, содержащий произведение переменных. В дальнейшем будем считать, что такой поворот уже выполнен, т.е. в уравнении (1) коэффициент $C=0$. Тогда вид кривой определяется по коэффициентам A и B следующим образом:

1) $A=B$ – уравнение (1) определяет окружность (или пустое множество, или единственную точку);

2) $A\cdot B>0$ (т.е. A и B одного знака) – уравнение определяет эллипс (или пустое множество, или точку);
3) $A\cdot B<0$ (т.е. A и B различного знака) – уравнение определяет гиперболу (или пару пересекающихся прямых);
4) $A\cdot B=0$ (в уравнении отсутствует квадрат одной из переменных) – уравнение определяет параболу (или пару параллельных прямых).

Путем выделения полных квадратов уравнение (1) можно привести к нормальной форме:

$$A(x-x_0)^2+B(y-y_0)^2+G=0 \text{ в случаях 1), 2), 3);}$$
$$A(x-x_0)^2+E(y-y_0)=0 \quad \text{или}$$
$$B(y-y_0)^2+D(x-x_0)=0 \quad \text{в случае 4).}$$

Перенося начало системы координат в точку (x_0,y_0), получим канонические уравнения кривых второго порядка.

§2. Окружность

Определение. Окружность есть геометрическое место точек (плоскости), каждая из которых находится на расстоянии R (называется радиусом окружности) от фиксированной точки C (называемой центром).

Пусть система координат выбрана так, что центр окружности имеет координаты $C(x_0,y_0)$; тогда окружность определится уравнением (нормальным):

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \quad (1)$$

Если же начало координат поместить в центр окружности, получим каноническое уравнение:

$$x^2+y^2=R^2. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) – это простые следствия формулы расстояния между двумя точками плоскости.

Часто встречаются уравнения т.н. смещенной окружности, центр которой лежит на одной из осей координат на расстоянии радиуса от начала координат. Например,

$$(x-R)^2+y^2=R^2 \text{ или } x^2+y^2=2Rx. \quad (3)$$

Параметрические уравнения окружности (2) имеют вид:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi \,. \end{cases}$$

Полярные уравнения:
окружности (2) – $\rho=R$;
окружности (3) – $\rho=2R\cos\varphi$.

Типовые задачи. Дано общее уравнение окружности

$$2x^2+2y^2+8x-4y+3=0.$$

Требуется : 1) найти радиус и центр окружности; 2) установить, как расположены относительно окружности точка $A(2;7)$ и прямая p: $y=5x+7$; 3) установить, как расположена относительно данной окружности другая окружность $x^2+y^2=25$; 4) через начало координат провести касательные к окружности.

§3. Эллипс

I Каноническое уравнение эллипса

Определение 1. Эллипсом называется линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (1)$$

где a и b – некоторые положительные числа.

Уравнение (1) не изменится, если заменить x на $(-x)$. Это означает, что вместе с точкой (x_0,y_0) эллипсу принадлежит и точка $(-x_0,y_0)$, т.е. эллипс (1) симметричен относительно оси Oy. Аналогично, можно сделать вывод и о симметрии относительно оси Ox. Поэтому достаточно рассмотреть линию (1) лишь в первой четверти, где явное уравнение эллипса (1) имеет вид:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,. \qquad (2)$$

Функция (2) убывает от $y(0)=b$ до $y(a)=0$, при $x>a$ – не существует. Методами математического анализа можно показать, что линия (2) выпукла вверх и перпендикулярна осям координат в точках пересечения с ними.

II Определяющее свойство эллипса

Предположим, что $a>b$ и обозначим $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ называются фокусами эллипса (если $b>a$, то $c=\sqrt{b^2-a^2}$ и фокусы лежат на Oy на расстоянии c от начала координат). Докажем, что для любой точки эллипса сумма ее расстояний до фокусов равна $2a$.

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса (1). Тогда $|x|\le a$, $y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$. Вычислим расстояние:

$$r_1=d(M,F_1)=\sqrt{\left(x-(-c)\right)^2+\left(y-0\right)^2}=\sqrt{(x+c)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}=$$

.

$$=\sqrt{x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)-2xc+\left(c^2+b^2\right)}=\sqrt{\frac{x^2c^2}{a^2}-2xc+a^2}=$$

$$=\sqrt{\left(a-\frac{xc}{a}\right)^2}=\left|a-\frac{xc}{a}\right|.$$

Так как $c<a$, то $\frac{c}{a}<1$ и $\left|\frac{xc}{a}\right|<|x|\le a$, поэтому выражение под знаком модуля в формуле для r_1 положительно. Значит

$$r_1=a-\frac{c}{a}x.$$

Аналогично можно показать (покажите!), что

$$r_2=d(M,F_2)=a+\frac{c}{a}x.$$

Легко увидеть, что $r_1+r_2=2a$.

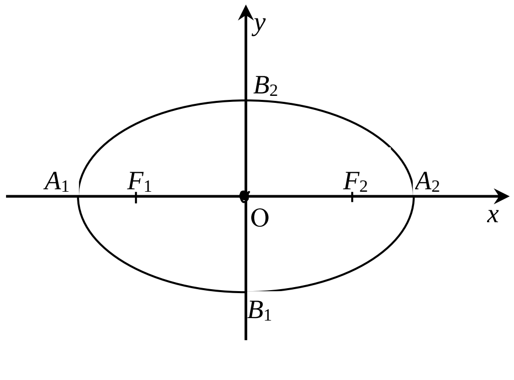
Доказанное свойство можно взять за определение эллипса, после чего получить каноническое уравнение (1) при некотором выборе ДПСК.

Определение 2. Эллипс есть геометрическое место точек (плоскости), для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (называемых фокусами) есть величина постоянная (большая расстояния между фокусами).

III Элементы эллипса

Эллипс имеет две оси симметрии, которые называются осями эллипса. Точка пересечения осей – это центр эллипса. Точки пересечения эллипса со своими осями – это вершины эллипса. Отрезки осей между вершинами и их длины также называют осями: большая ось (на ней лежат фокусы) и малая ось. Половины этих осей называют полуосями (большая и малая). Кроме того, для любой точки M эллипса отрезки MF_1 и MF_2 и их длины r_1 и r_2 называют фокальными радиусами этой точки (формулы для фокальных радиусов см. пункт II).

Пример. Найти элементы эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.



Полуоси: $a=\sqrt{25}=5$ – большая,

$b=\sqrt{9}=3$ – малая.

Вершины: $A_1(-5;0)$, $A_2(5;0)$, $B_1(0;-3)$, $B_2(0;3)$.

Расстояние между фокусами:

$2c=2\sqrt{25-9}=8$.

Фокусы: $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$.

IV Нормальное уравнение эллипса.

Исходя из определения 2, выберем ДПСК так, чтобы центр эллипса имел координаты (x_0,y_0), а его оси были параллельны координатным осям. В этой системе эллипс будет определяться уравнением

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \quad (3)$$

К этому же уравнению приходим и исходя из определения 1 после параллельного переноса системы координат в точку $(-x_0;-y_0)$.

Фокусы эллипса (3) лежат на прямой $y=y_0$, если $a>b$, и на прямой $x=x_0$, если $a<b$.

V Параметрические уравнения эллипса (1):

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \quad 0\le t\le 2\pi. \end{cases}$$

Замечание. Окружность – это частный случай эллипса, когда $a=b$. А эллипс можно понимать как деформированную окружность.

Типовые задачи. 1). Составить каноническое уравнение эллипса, зная некоторые из его элементов. 2). Общее уравнение эллипса, например $x^2+4y^2+4x-8y-8=0$, привести к нормальному виду и найти элементы эллипса. 3). Выяснить, какую линию определяет уравнение $x=3-2\sqrt{4-y^2}$.

ЛЕКЦИЯ 10

§4. Гипербола

I Каноническое уравнение гиперболы

Определение 1. Гиперболой называется линия, которая в некоторой ДПСК имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (1)$$

где a и b – некоторые положительные числа.

Гипербола (как и эллипс) симметрична относительно обеих осей координат. В первой четверти уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ . \qquad (2)$$

При $0\le x<a$ гипербола (2) не существует, $y(a)=0$ и при стремлении x в $+\infty$, y также стремится в $+\infty$. Чтобы выяснить характер этого стремления,

рассмотрим прямую $p: y = \frac{b}{a}x$ и найдем расстояние $d(M,p)$, где $M(x,y)$– текущая точка гиперболы (2):

$$d(M,p) = \frac{\left| y - \frac{b}{a}x \right|}{\sqrt{1^2 + \left(-\frac{b}{a}\right)^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{b}{a} \left| \sqrt{x^2-a^2} - x \right| =$$

$$= \frac{b}{c}\left(x - \sqrt{x^2-a^2}\right).$$

Умножая и деля полученное выражение на $\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right)$, получим

$$d(M,p) = \frac{a^2 b}{c} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Теперь нетрудно заметить, что $d(M,p) \to 0$ при $x \to +\infty$, т.е. гипербола (2) приближается к прямой p. Эту прямую (а с ней и прямую $y = -\frac{b}{a}x$ в силу симметрии) называют асимптотой гиперболы.

<u>II Определяющее свойство гиперболы</u>

Обозначим $c = \sqrt{a^2+b^2}$ и рассмотрим точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ (их называют фокусами гиперболы). Можно доказать (докажите!), что для любой точки M гиперболы (1) имеет место соотношение

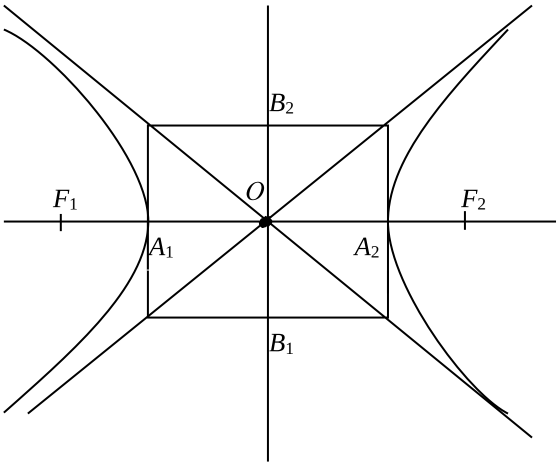
$$\left| d(M,F_1) - d(M,F_2) \right| = 2a.$$

Как и для эллипса, это свойство можно взять за определение и получить каноническое уравнение (1) в некоторой ДПСК.

<u>Определение 2.</u> Гипербола есть геометрическое место точек (плоскости), для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек (называемых фокусами гиперболы) есть величина постоянная (меньшая расстояния между фокусами).

<u>III Элементы гиперболы</u>

Оси симметрии гиперболы называют, обычно, просто ее осями, а точку их пересечения – центром гиперболы. Для канонической гиперболы – это оси координат и начало координат. Точки пересечения гиперболы со своими осями – это вершины гиперболы. Гипербола (1) имеет две действительные вершины $A_1(-a;0)$ и $A_2(a;0)$ и две “мнимые” вершины $B_1(0;-b)$ и $B_2(0;b)$. Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называется действительной осью гиперболы (1), а отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ – мнимой осью (a и b – полуоси, действительная и мнимая). Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей гиперболы и касающийся ее в вершинах называется основным прямоугольником гиперболы. Диагонали этого прямоугольника – прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ – это асимптоты гиперболы.



Для любой точки M гиперболы отрезки MF_1 и MF_2 и их длины r_1 и r_2 называются фокальными радиусами этой точки.
Гипербола состоит из двух частей, которые называются ветвями.

IV Нормальное уравнение гиперболы

Гипербола, центр которой имеет координаты $(x_0;y_0)$, а оси параллельны координатным осям, имеет уравнение

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Фокусы этой гиперболы лежат на прямой $y=y_0$.

Замечание 1. Уравнение вида

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

также определяет гиперболу. Ее фокусы и действительные вершины лежат на оси Oy. Гиперболы (1) и (4) в одной и той же системе координат и при одних и тех же значениях полуосей a и b называются сопряженными друг с другом.

Замечание 2. Гипербола с равными полуосями $(a=b)$ называется равносторонней. Каноническое уравнение такой гиперболы пишут в виде $x^2 - y^2 = a^2$. Ее асимптоты взаимно перпендикулярны.

Типовые задачи аналогичны задачам для эллипса.

§5. Парабола

I Каноническое уравнение параболы

Определение 1. Параболой называется линия, которая в некоторой ДПСК имеет уравнение

$$y^2 = 2px \quad или \qquad (1)$$

$$x^2 = 2py, \qquad (2)$$

где p – некоторое положительное число.

Рассмотрим параболу (1). Т.к. замена y на $(-y)$ не изменяет уравнения, это означает симметрию линии относительно оси Ox. В верхней полуплоскости уравнение (1) равносильно уравнению

$$y = \sqrt{2px}. \qquad (3)$$

При $x<0$ корень не существует, следовательно, левее оси ординат ни одной точки параболы (1) нет. При $x=0$ получаем $y=0$: начало координат является самой "левой" точкой параболы (1) и с возрастанием x от 0 до $+\infty$ y возрастает аналогично. Методы математического анализа позволяют выяснить, что линия (3) выпукла вверх и в начале координат касается оси ординат. Асимптот у параболы нет.

II Определяющее свойство параболы

Для параболы (1) рассмотрим точку $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, которую назовем фокусом параболы, и прямую $d: x = -\frac{p}{2}$, которую назовем директрисой. И пусть точка $M(x,y)$–произвольная точка параболы (1) т.е. $x\geq 0$, а $y^2=2px$. Найдем расстояние от M до F и до d:

$$d(M,F) = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} =$$

$$= \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2};$$

$$d(M,d) = \frac{\left|x+\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2+0^2}} = x + \frac{p}{2}.$$

Итак, точки параболы равноудалены от фокуса и директрисы.

Это свойство (как и в случае эллипса и гиперболы) можно взять в качестве определения.

Определение 2. Парабола есть геометрическое место точек (плоскости) равноудаленных от данной точки (называемой фокусом) и данной прямой (называемой директрисой).

Исходя из этого определения, получим каноническое уравнение, для чего обозначим расстояние от фокуса F до директрисы d через p, а ДПСК выберем следующим образом: ось абсцисс проведем через фокус перпендикулярно к директрисе и будем считать ее направленной к фокусу от директрисы, а начало координат поместим посередине между F и d. В этой системе: $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ и $d: x=-\frac{p}{2}$. Пусть теперь $M(x,y)$ текущая точка параболы (определение 2). Заметим сразу, что M не может находиться левее оси ординат, ибо в этом случае $d(M,F)>d(M,d)$. Найдем эти расстояния:

$$d(M,F)=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2};$$

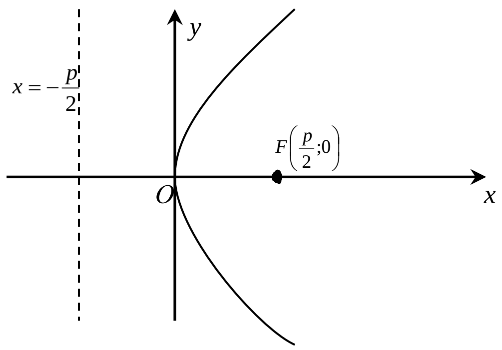
$$d(M,d)=d(M,N)=\sqrt{\left(x-\left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2+(y-y)^2}=\sqrt{x^2+px+\frac{p^2}{4}},$$

здесь $N\left(-\frac{p}{2},y\right)$ – проекция M на директрису. Приравняем (в соответствии с определением 2) полученные расстояния и для упрощения возведем обе части полученного равенства в квадрат (посторонние корни не появятся; почему?). После упрощения получим каноническое уравнение (1): $y^2=2px$.

Замечание 1. Уравнение (2) получим, если ось Oy провести через F перпендикулярно к d и от d к F. Кроме уравнений (1) и (2) рассматривают еще два уравнения $y^2=-2px$ – ось Ox направлена от F к d, и $x^2=-2py$ – ось Oy направлена от F к d.

III Элементы параболы

Ось симметрии – это просто ось параболы. Точка пересечения параболы со своей осью – это вершина параболы. Если M – точка параболы, то отрезок MF и его длина r называется фокальным радиусом точки M. Очевидно, что для параболы (1) $r=\frac{p}{2}+x$. К элементам параболы относят также фокус и директрису.



Замечание 2. Параметр параболы p имеет еще один наглядный смысл. Проведем через фокус прямую, перпендикулярную к оси параболы и пусть M и N –это точки пересечения прямой с параболой. Тогда

$$d(M,N)=2d(M,F)=2\left(\frac{p}{2}+\frac{p}{2}\right)=2p.$$

Таким образом, p характеризует “ширину” области, ограниченной параболой (при условии, что эта ширина измеряется перпендикулярно к оси на определенном расстоянии от вершины).

IV Нормальное уравнение параболы

Если вершина параболы имеет координаты (x_0,y_0), а ось параллельна оси Ox, то ее уравнение имеет вид:

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0).$$

Если же ось параллельна Oy, то

$$(x-x_0)^2=2p(y-y_0).$$

Типовые задачи. 1). Составить каноническое уравнение параболы, зная некоторые ее элементы. 2). От общего уравнения $y^2+8x-6y-7=0$ перейти к нормальному и найти элементы параболы. 3). Исходя из определения 2, найти уравнение параболы, у которой фокус $F(1;1)$, а уравнение директрисы $x+y+2=0$. (Заметим, что при решении этой задачи получим общее уравнение, в котором присутствует член, содержащий произведения переменных, из-за того, что ось параболы не параллельна ни одной из координатных осей).

§6. Касательные к кривым 2$^{\text{го}}$ порядка

I Определения

Касательную к окружности, эллипсу, гиперболе и параболе можно определить как прямую, имеющую с кривой одну общую точку, за исключением двух случаев: 1) прямая, параллельная асимптоте гиперболы, пересекает ее в одной точке, но не является касательной; 2) прямая, параллельная оси параболы, пересекает параболу в одной точке, но не является касательной.

Касательную к окружности можно определить и как прямую, проходящую через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку.

II Уравнения касательных

Методами математического анализа можно получить (нужно уметь!) уравнения касательных к линиям, заданными своими каноническими уравнениями. Пусть точка $(x_0\ ,y_0)$ лежит на линии. Тогда:

1) касательная к эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ имеет вид $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$;
2) касательная к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ имеет вид $\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1$;
3) касательная к параболе $y^2=2px$ имеет вид $y_0y=p(x+x_0)$.

Замечание. Окружность понимаем как частный случай эллипса.

III Некоторые свойства касательных

1. Фокусы эллипса расположены по одну сторону от любой его касательной, а фокусы гиперболы – по разные стороны.
2. Фокальные радиусы любой точки эллипса (гиперболы) образуют равные углы с касательной, проходящей через эту точку.
3. Произведение расстояний от фокусов эллипса (гиперболы) до любой касательной к линии есть величина постоянная.
4. Отрезок касательной к гиперболе, заключенный между ее асимптотами, делится пополам точкой касания.
5. Площадь треугольника, образованного касательной к гиперболе и ее асимптотами, есть величина постоянная.
6. Касательная к параболе в любой ее точке образует равные углы с фокальным радиусом этой точки и лучом, исходящим из нее и идущим параллельно оси параболы в ту сторону, куда парабола бесконечно простирается.
7. Касательные к эллипсу (гиперболе), проведенные в концах одного и того же диаметра, параллельны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия.– М.: «Наука», 1988.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии.– СПб.: «Профессия», 2002.
3. Привалов И.И. Аналитическая геометрия.– Киев: изд-во УСХА, 1991.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ВОПРОСЫ
к модульному контролю – 1.1

1-2.Матрицы и действия с ними. Обратная матрица.

3-4.Определители и их свойства. Теоремы Лапласа.

5.Методы решения систем линейных уравнений.

6.Линейная зависимость и независимость вектор-строк и вектор-столбцов.

7.Системы координат.

8-9.Векторы: основные понятия, линейные операции, условия коллинеарности, перпендикулярности, компланарности.

10-11-12.Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов: определение, смысл, свойства, вычисление, применение.

13.Способы задания линии на плоскости и в пространстве.

14.Прямая на плоскости: различные формы уравнения.

15-16.Расстояние от точки до прямой на плоскости и в пространстве.

17-18.Взаимное расположение прямых на плоскости и в пространстве.

19.Плоскость: различные формы уравнения.

20.Расстояние от точки до плоскости.

21-22.Взаимное расположение плоскостей, плоскости и прямой в пространстве.

23-24-25.Эллипс, гипербола, парабола: определение 1, определяющее свойство.

26-27-28.Эллипс, гипербола, парабола: определение 2, вывод канонического уравнения.

29.Общее уравнение линии $2^{го}$ порядка и его преобразования.

30-31.Окружность: определение, уравнения в различных системах координат, взаимное расположение с точкой, прямой, другой окружностью.

32-33.Касательные к кривым $2^{го}$ порядка: определение, уравнения, свойства.

ОБРАЗЕЦ БИЛЕТА МК-1.1

1.Найти угол между векторами $\overline{m}$ и $\overline{n}$, зная, что:

3) $\overline{m} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 6\overline{k},\ \ \overline{n} = \overline{AB} : A(1,-2,3),\ B(-1,-4,4);$

4) $\overline{m}, \overline{n} -$ орты, причем $(2\overline{m} + \overline{n}) \perp (4\overline{m} - 5\overline{n});$

5) $|\overline{m}| = 2,\ |\overline{n}| = 5,\ |\overline{m} - \overline{n}| = 5.$

2.Найти проекцию точки A на прямую p:

3) $A(1;2),\ \ p: 2x + y - 9 = 0$; найти $d(A, p)$;

4) $A(2;6;3),\ \ p: \begin{cases} x = 2t - 7, \\ y = -t + 3, \\ z = t. \end{cases}$

5) $A(1;3;5),\ p: \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0, \\ 3x + y + 2z - 3 = 0. \end{cases}$.

3.Написать уравнение параболы, зная координаты фокуса F и уравнение директрисы d:

3) $F(2,0),\ d: x + 2 = 0;$

4) $F(1,7),\ d: x - 5 = 0;$

5) $F(1,1),\ d: y = -x - 2.$

4.Эллипс: определение 1, определяющее свойство.

5.Определители и их свойства.

Учебное издание

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
по разделу курса высшей математики
«**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**»

(для студентов направления подготовки
6.050102 “Программная инженерия”)

Составитель: Скворцов Анатолий Ефремович