Лабораторная работа № 6

Плоские и планарные графы

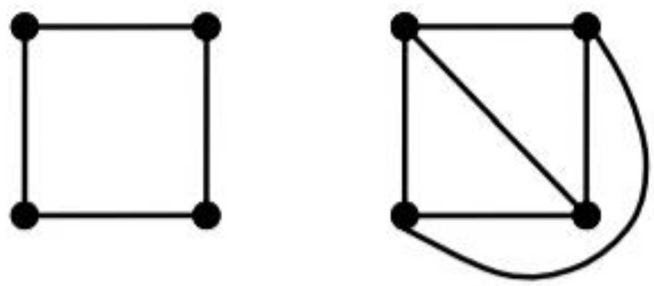
Цель работы: приобретение практических навыков в определение планарности графов на основе критериев Понтрягина-Куратовского и Вагнера, построении плоской укладки и определении числовых характеристик непланарных графов.

Теоретическая справка

Плоские и планарные графы

Плоским называется такой граф **G**, у которого вершины – точки плоскости, а ребра – непрерывные плоские линии без пересечений и самопересечений, причем соединяющие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентных им обоим вершин.

Пример:



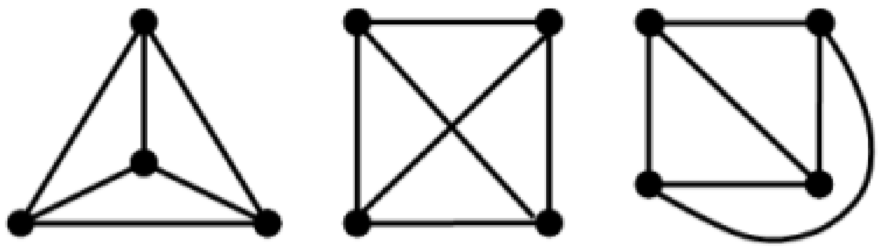
Планарный граф – это граф, который изоморфен плоскому.

О планарных графах говорят, что они имеют **плоскую укладку** или **укладываются на плоскости**.

Утверждение 1. Всякий подграф планарного графа – планарен.

Утверждение 2. Если некоторый граф содержит непланарный подграф, то и сам граф не планарен.

На рисунке приведено три изображения графа $\mathbf{K}_4$.



G_1 G_2 G_3

Графы $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_3$ являются плоскими по определению, а граф $\mathbf{G}_2$ – планарен, так как изоморфен плоскому графу.

Теорема Жордано

Жорданова кривая – это непрерывная спрямляемая линия, не имеющая самопересечений.

Теорема Жордано

Замкнутая Жорданова кривая $\mathbf{L}$ на плоскости делит область на две области, так, что любая линия, соединяющая точки в различных подобластях пересекает Жорданову кривую

Гранью плоского графа называется максимальное по включению количество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена Жордановой кривой, не пересекающей ребра графа.

Граница грани – это множество вершин и ребер, принадлежащих грани.

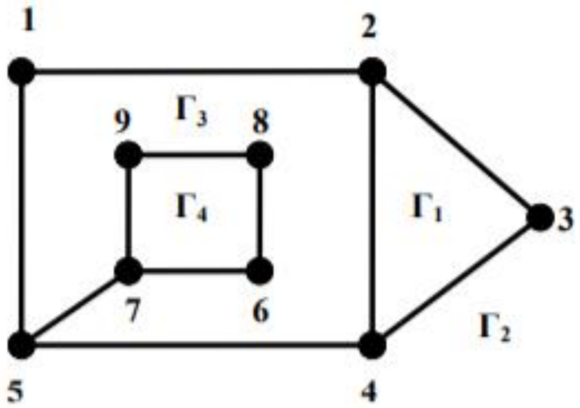
Всякий плоский граф имеет одну единственную неограниченную **внешнюю** грань**,** остальные – **внутренние.**

Следствие из теоремы Жордано

> Любые две вершины, принадлежащие одной грани, могут быть соединены цепью произвольной длины таким образом, что выбранная грань разбивается на две грани

Например

Грани $\Gamma 1, \Gamma 3, \Gamma 4$ – внутренние, грань $\Gamma 2$ – внешняя.



Границы граней:

$\Gamma 1 = \{2,3,4\}$ или $\{23, 24, 34\}$; $\Gamma 2 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{12, 23, 34, 45, 15\}$;

$\Gamma 3 = 1)\{1, 2, 4, 5\} \to \{12, 15, 24, 45\}$;

$2)\{5, 6, 7, 8, 9\} \to \{57, 67, 68, 79, 89\}$;

$\Gamma 4 = \{6,7,8,9\} \to \{67,68,79,89\}$.

Теорема Эйлера для плоского графа

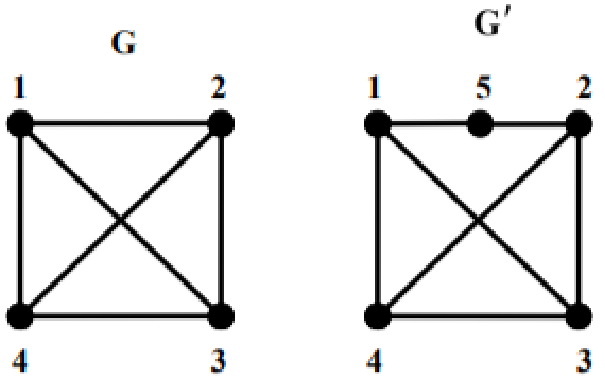
> Для любого связного графа $G = (V, E)$, $|V| = p$, $|E| = q$, являющегося плоским, справедливо соотношение:
>
> $$p - q + f = 2,$$
>
> где p – количество вершин, q – количество ребер, f – количество граней плоского графа

Графы K_5 и $K_{3,3}$ – непланарны.

Критерии планарности графов

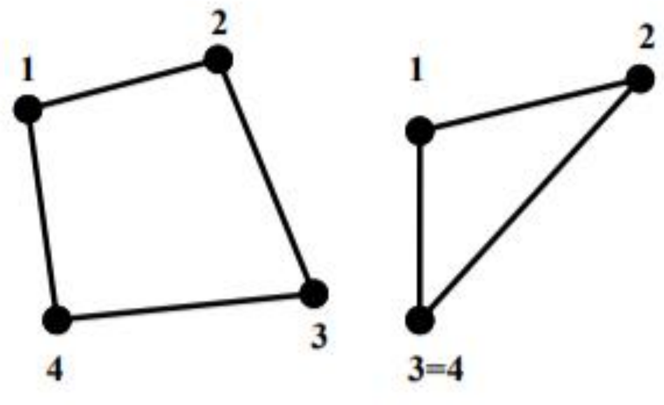
Операция подразбиения ребер

В произвольном графе $\mathbf{G}$ удаляется ребро $\mathbf{e} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ и добавляется два новых ребра: $\mathbf{e_1} = \{\mathbf{u}, \mathbf{a}\}, \mathbf{e_2} = \{\mathbf{a}, \mathbf{v}\}$, где $\mathbf{a}$ – новая вершина, не принадлежащая графу. Таким образом, ребро $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ графа $\mathbf{G}$ **подразбивается** вершиной **a** на два ребра и получается новый граф : $\mathbf{G}' = \mathbf{G} - \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} + \{\mathbf{u}, \mathbf{a}\} + \{\mathbf{a}, \mathbf{v}\}$.

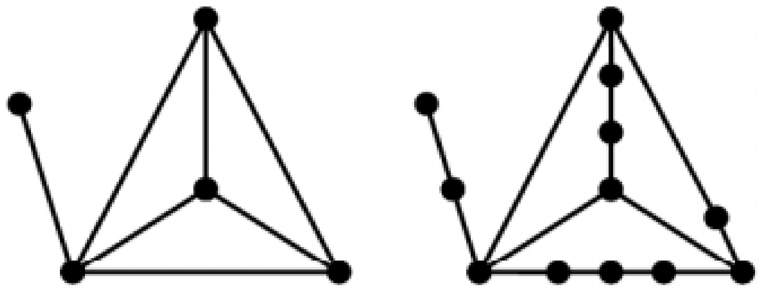


Операция стягивания ребер

Операция стягивания ребер – отождествление смежных вершин ребра (операция противоположная операции подразбиения ребер).



Два графа называются **гомеоморфными**, если они могут быть получены из одного и того же графа путем подразбиения его ребер.



Критерий планарности Понтрягина-Куратовского

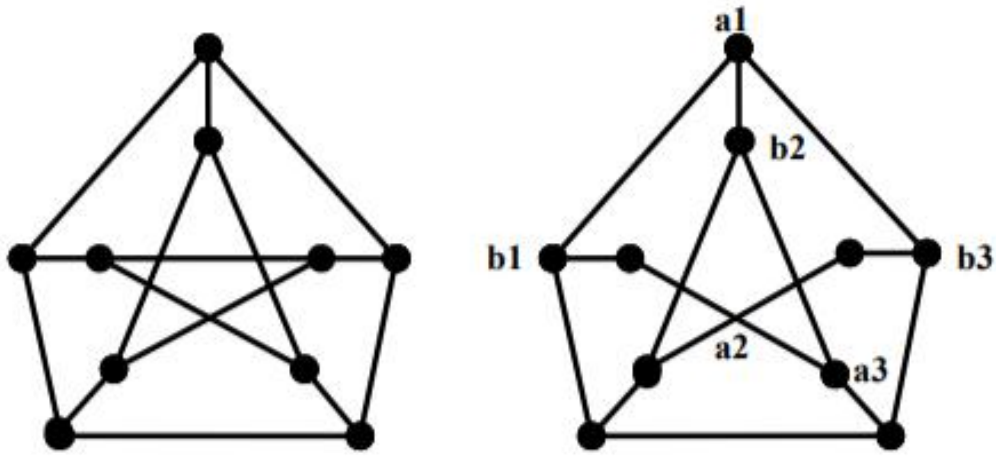
Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов гомеоморфных $\mathbf{K}_5$ или $\mathbf{K}_{3,3}$

Критерий планарности Вагнера

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к графам $\mathbf{K}_5$ или $\mathbf{K}_{3,3}$

Например.

Граф Петерсона стягивается к $\mathbf{K}_5$, поэтому – непланарен. Граф справа от графа Петерсона стягивается к $\mathbf{K}_{3,3}$, поэтому также непланарен.



Алгоритм плоской укладки графа

Для плоской укладки графа и проверки является ли он планарным, используется алгоритм γ.

Для правильной работы алгоритма (без ограничения области применения) определим свойства графов, которые подаются на вход алгоритма:

- граф должен быть связным;
- граф должен иметь хотя бы один цикл;
- граф не должен содержать мостов, т.е. ребер после удаления которых граф распадается на несколько компонент связности.

Алгоритм γ плоской укладки графа $\mathbf{G}$ представляет собой процесс последовательного присоединения к некоторому уже уложенному на плоскости графу $\tilde{\mathbf{G}}$ (подграф графа $\mathbf{G}$) некоторой новой цепи также принадлежащей $\mathbf{G}$, оба конца которой принадлежат $\tilde{\mathbf{G}}$. Эта цепь разбивает одну из граней графа $\tilde{\mathbf{G}}$ на две.

При этом в качестве начального плоского графа $\tilde{\mathbf{G}}$ выбирается любой простой цикл исходного графа. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет получена плоская укладка графа $\mathbf{G}$ или присоединение некоторой цепи оказывается невозможным, в том случае граф является не планарным.

Пусть есть граф $\mathbf{G}$ и построена некоторая плоская укладка $\tilde{\mathbf{G}}$ подграфа графа $\mathbf{G}$.

Сегментом S относительно текущей плоской укладки $\tilde{\mathbf{G}}$ или просто **сегментом** будем называть подграф исходного графа $\mathbf{G}$ одного из следующих двух видов:

1) ребро $\mathbf{e} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ исходного графа $\mathbf{G}$ такое, что не принадлежит текущей плоской укладке графа, $\mathbf{e} \notin \tilde{\mathbf{G}}$, но концевые вершины этого ребра $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ принадлежат этой плоской укладке;

2) связная компонента графа $\mathbf{G} - \widetilde{\mathbf{G}}$, дополненная всеми ребрами графа $\mathbf{G}$, инцидентными вершинам взятой компоненты и концевыми вершинами этих ребер.

Граф $\mathbf{G} - \widetilde{\mathbf{G}}$ получается вычитанием графа $\tilde{\mathbf{G}}$ из исходного графа $\mathbf{G}$.

Контактная вершина – это вершина $\mathbf{v}$ сегмента $\mathbf{S}$ относительно $\tilde{\mathbf{G}}$, которая принадлежит множеству вершин текущей плоской укладки.

Допустимой гранью для сегмента $\mathbf{S}$ называется такая грань $\mathbf{\Gamma}$ графа $\tilde{\mathbf{G}}$, которая содержит все контактные вершины сегмента $\mathbf{S}$.

Обозначим $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{S_i})$ – множество всех допустимых граней для сегмента $\mathbf{S_i}$.

Простая цепь $\boldsymbol{\alpha}$ сегмента $\mathbf{S}$, содержащая 2 различные контактные вершины и не содержащая других контактных вершин, называется $\boldsymbol{\alpha}$-цепью.

Простая $\boldsymbol{\alpha}$-цепь проходит из контактной вершины через неконтактные и возвращается в контактную вершину.

Алгоритм $\boldsymbol{\gamma}$.

0. Выберем некоторый простой цикл $\mathbf{C}$ графа $\mathbf{G}$ и уложим его на плоскости (лучше выбирать простой цикл графа $\mathbf{G}$, доставляющий окружение графа): $\tilde{\mathbf{G}} := \mathbf{C}$.

1. Найдем грани графа $\tilde{\mathbf{G}}$ и множество сегментов $\mathbf{S}$ относительно текущей укладки $\tilde{\mathbf{G}}$. Если множество сегментов пусто перейти к п. 7.

2. Для каждого сегмента $\mathbf{S}$ найдем множество допустимых граней $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{S})$.

3. Если существует сегмент $\mathbf{S}$, для которого $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{S}) = \varnothing$ (множество граней пусто), то граф $\mathbf{G}$ не планарен. Выход из алгоритма, иначе переход к п. 4.

4. Если существует сегмент $\mathbf{S}$ для которого ровно одна допустимая грань ($|\mathbf{\Gamma(S)}| = 1$), то перейдем к п. 6, иначе п. 5.

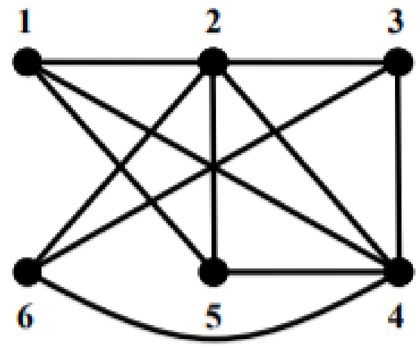
5. Для некоторого сегмента $\mathbf{S}$ выбираем произвольную допустимую грань $\mathbf{\Gamma}$.

6. Поместим произвольную α-цепь $\mathbf{L}$, принадлежащую $\mathbf{S}$, в грань $\mathbf{\Gamma}$, заменим $\tilde{\mathbf{G}}$ на $\tilde{\mathbf{G}} \cup \mathbf{L}$ и перейдем к п. 1. Построена $\tilde{\mathbf{G}}$ – частичная, текущая плоская укладка графа $\mathbf{G}$.

7. Построена $\tilde{\mathbf{G}}$ плоская укладка графа $\mathbf{G}$.

Пример.

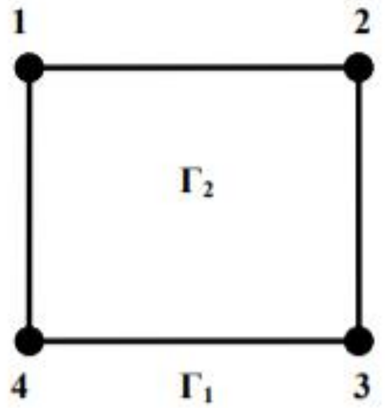
Определить планарность и построить плоскую укладку графа $\mathbf{G}$.



Инициализация алгоритма:

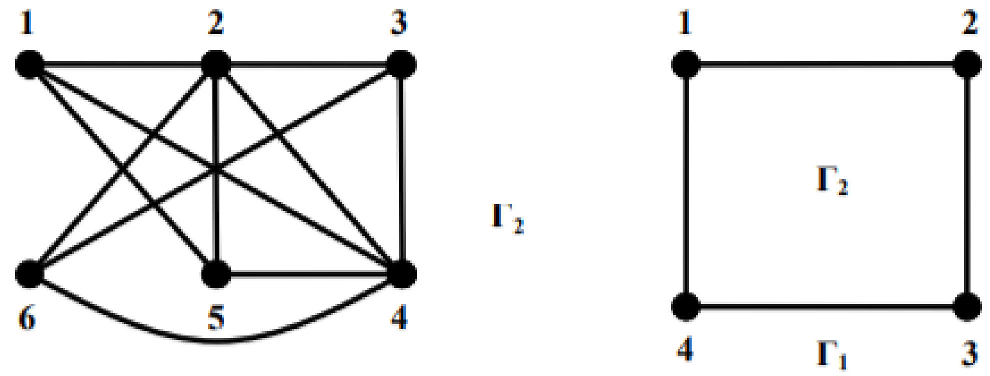
– выберем в графе произвольный простой цикл и уложим его на плоскости $\tilde{\mathbf{G}} := \mathbf{C}$;

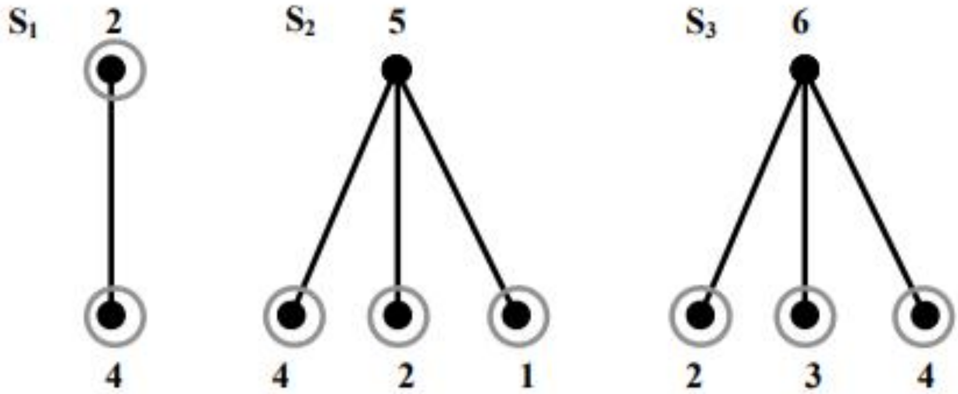
– определим для него множество граней.



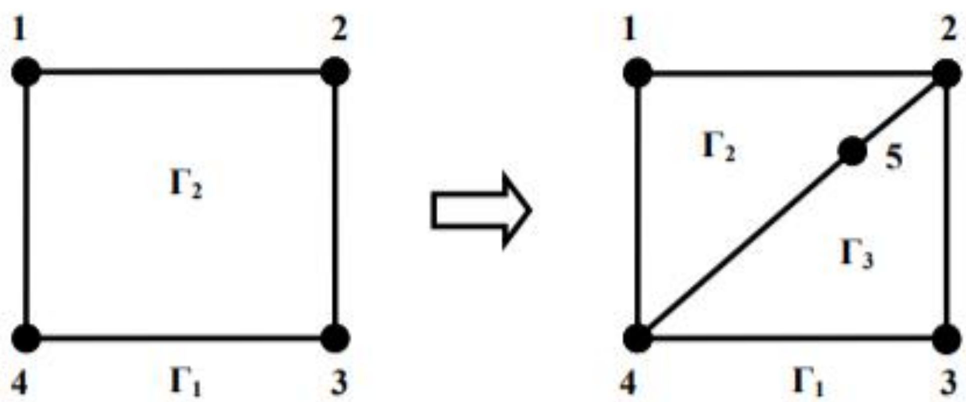
1) Определим множество сегментов относительно текущей плоской укладки. Множество сегментов не пусто.

2) Определим для каждого сегмента множество допустимых граней: $\Gamma(S1) = \Gamma(S2) = \Gamma(S3) = \{\Gamma 1, \Gamma 2\}$.

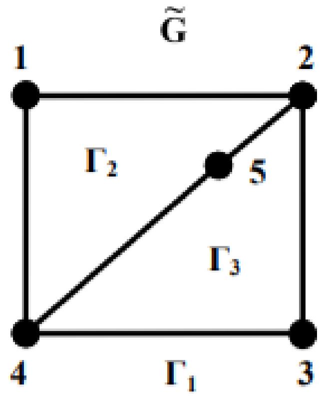


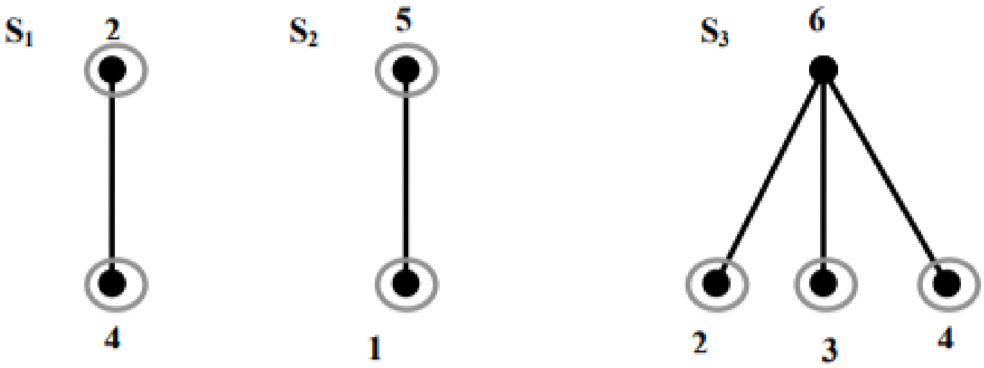


3) Выберем сегмент $S2$ и α-цепь = $\{4, 5, 2\}$, уложим ее в одной из допустимых граней, пусть это будет $\Gamma 2$.



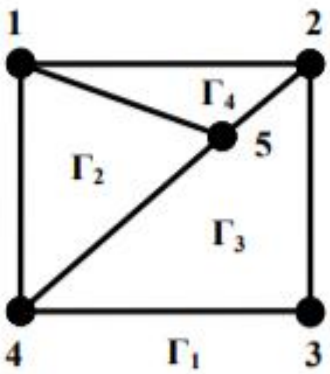
4) Для новой текущей плоской укладки определяем новые множества граней и сегментов.

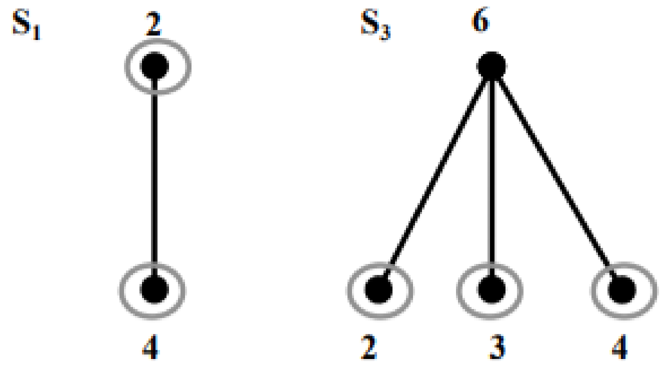




5) Для каждого сегмента определим множества допустимых граней: $\mathbf{\Gamma(S1)=\{\Gamma1, \Gamma2, \Gamma3\}}$, $\mathbf{\Gamma(S2)=\{\Gamma2\}}$, $\mathbf{\Gamma(S3)=\{\Gamma1, \Gamma3\}}$**.** Выбираем сегмент $\mathbf{S2}$ и укладываем его в единственную для него допустимую грань $\mathbf{\Gamma2}$. Получаем текущую частичную плоскую укладку графа $\mathbf{G}$.

6) Для новой текущей частичной укладки $\tilde{G}$ определим множество граней и сегментов.

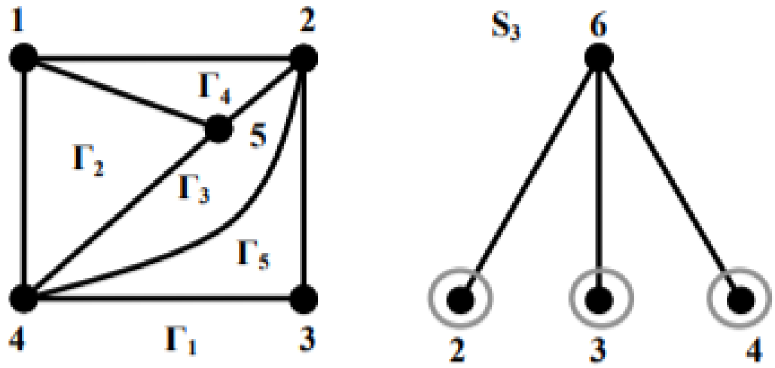




Множества допустимых граней для сегментов: $\Gamma(S1) = \Gamma(S3) = \{\Gamma1, \Gamma3\}$.

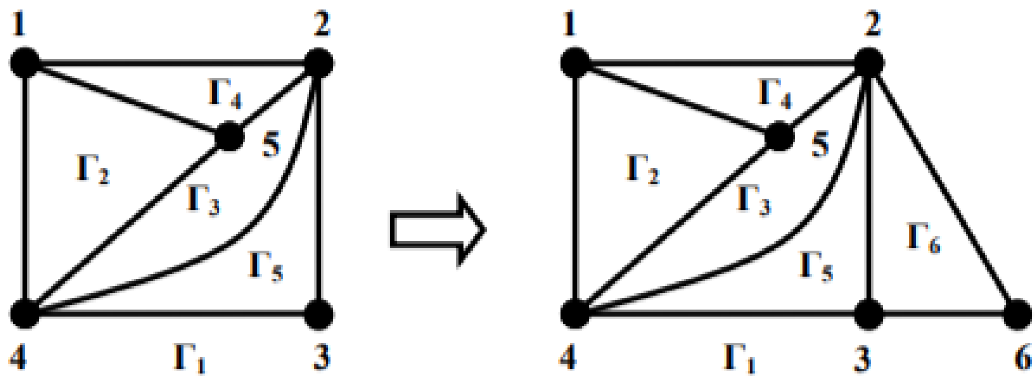
Выбираем сегмент $S1$ и укладываем в допустимой для него грани $\Gamma3$.

7) Получаем новую частичную укладку. Определяем для нее множество граней и сегментов.

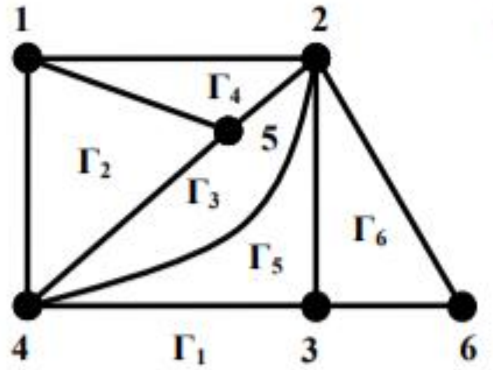


Множество допустимых граней для сегмента $\Gamma(S3) = \{\Gamma1, \Gamma5\}$.

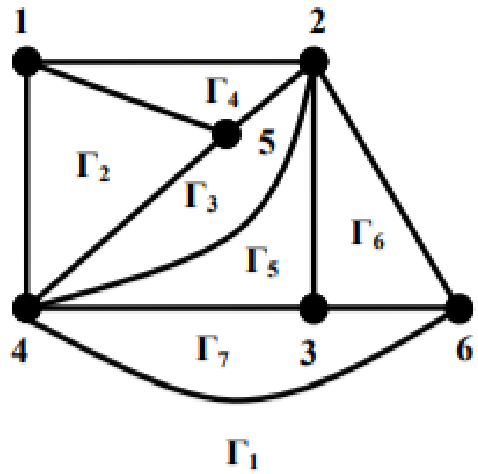
8) Выбираем грань $\Gamma1$ и α -цепь $= \{3, 6, 2\}$, укладываем его в допустимой грани и получаем новую текущую частичную укладку.



9) Для новой текущей частичной укладки находим множество граней и сегментов. Для сегмента **S3** множество допустимых граней составляет: $\boldsymbol{\Gamma(S3) = \{\Gamma 1\}}$. Заключаем сегмент **S3** до допустимой грани **Г1**.



10) Получаем новую текущую плоскую укладку. Множество сегментов пустая, следовательно, алгоритм закончил работу. Входной граф - планарный и построена его плоская укладка.



Характеристики не планарных графов

Число скрещиваний графа **G** – это min число пересечений двух ребер при изображении графа **G** на плоскости (обозначают **Cr(G)**). Число скрещиваний равно 0, если граф планарен.

Искаженность G – это минимальное число ребер, удаление которых приводит к планарному графу (обозначают **Sk(G)**).

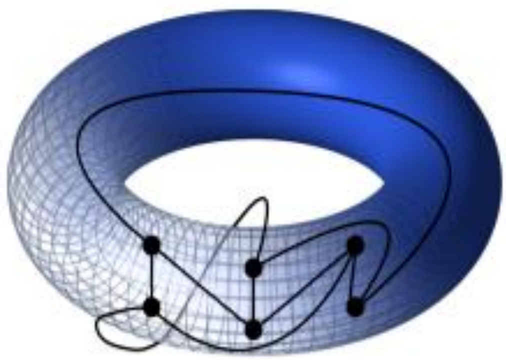
Толщина G – это минимальное число его планарных подграфов, объединение которых дает исходный граф **G** (обозначают **t(G)**).

Род графа G – это минимальное число ручек, которые необходимо добавить к сфере, чтобы можно было уложить граф **G** без пересечений, самопересечений ребер.

Непланарный граф, укладывающийся на торе без пересечений и самопересечений ребер называются **тороидальными**, род такого графа равен 1.

К тороидальным графам относят графы $\mathbf{K_5, K_7, K_{3,3}, K_{4,4}}$.

Пример укладывания графа $\mathbf{K_{3,3}}$ на торе:



Задание к лабораторной работе

Исходные данные граф $\mathbf{G : GV(13,\{5,6\})}$.

1. Определить, является ли исходный граф **G** планарным или непланарным, используя критерий Понтрягина-Куратовского или Вагнера. Найти подграф **G**, гомеоморфный $\mathbf{K_5}$ или $\mathbf{K_{3,3}}$ по критерию Понтрягина-Куратовского или подграф, стягиваемый к $\mathbf{K_5}$ или к $\mathbf{K_{3,3}}$ по критерию Вагнера.

2. Если исходный граф планарен, обозначить его **G1**.

3. Если исходный граф непланарен, обозначить его **G2**.

4. Если исходный граф был планарен, добавить минимальное число ребер до непланарности и обозначить полученный непланарный граф **G2**.

5. Если исходный граф был непланарен, удалить минимальное число ребер и обозначить полученный планарный граф **G1**.

6. Количество добавляемых (удаляемых) при преобразованиях графа ребер должно быть обосновано.

7. Построить плоскую укладку графа **G1**, используя алгоритм γ. Продемонстрировать пошаговое выполнение алгоритма γ.

8. Для непланарного графа **G2** найти род, толщину, искаженность и число скрещиваний.

Контрольные вопросы

1. Какой граф называется плоским, планарным?
2. Что такое жорданова кривая? Сформулировать теорему Жордано и следствие из нее.
3. Дать определение грани и границы грани.
4. Какие грани называют внутренними? внешними?
5. Сформулировать теорему Эйлера для плоского графа.
6. Операции подразбиения ребер и стягивания вершин. Гомеоморфные графы.
7. Сформулировать критерии планарности Понтрягина-Куратовского и Вагнера.
8. Алгоритм плоской укладки графа. Определение сегмента, контактной вершины, α – цепи, допустимой грани.
9. Характеристики непланарных графов, род, толщина, число скрещиваний и искаженность.