Лабораторная работа № 7

Раскраска графов

Цель работы: приобретение практических навыков определения хроматического числа и индекса для неорграфов, построении оптимальной и субоптимальной правильной вершинной и реберной раскраски графов.

Теоретическая справка

Вершинная раскраска графов

$\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ – простой неориентированный граф, $\mathbf{k}$ – натуральное число.

Вершинной k-раскраской или просто **k-раскраской** графа **G** называется произвольная функция **f**, отображающая множество вершин графа **G** в некоторое **k**-элементное множество:

$$\mathbf{f}: \mathbf{VG} \rightarrow \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\} = \mathbf{A}.$$

Если для некоторой вершины **v** графа **G**: **f(v)=i,** то говорят что вершина **v** **раскрашена в i-тый цвет**.

Раскраска называется **правильной**, если $\mathbf{f(u)} \neq \mathbf{f(v)}$ для любых смежных вершин **u** и **v** графа **G** (или концевые вершины любого ребра окрашены в разные цвета).

Граф, для которого существует правильная **k**-раскраска, называется **k-раскрашиваемым**.

Хроматическое число графа G – это минимальное число красок, при котором граф имеет правильную раскраску.

Если хроматическое число равно **k**, то граф называется **k-хроматическим** (обозначают $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) = \mathbf{k}$).

Правильную **k**-раскраску графа **G** можно рассматривать как разбиение множества вершин графа **G** на не более чем **k** непустых множеств, которые называются **цветными классами.**

Графы с малым хроматическим числом

Лемма о 2-х раскрашиваемых графах

Пусть $\mathbf{G}$ – простой неориентированный граф:
1) $\chi(G) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{G}$ – пустой граф, $\chi(O_p) = 1$.
2) $\chi(G) = 2$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{G}$ – непустой двудольный граф.
Если непустой граф является деревом, то $\chi(G) = 2$.

Лемма о раскраске циклов

Хроматическое число всякого цикла, содержащего $\mathbf{p}$ вершин, равно 2, если $\mathbf{p}$ – четно, и 3, если $\mathbf{p}$ – нечетно.
Если граф $\mathbf{G}$ содержит цикл нечетной длины , то $\chi(G) > 2$.

Лемма о раскраске полного графа

Хроматическое число полного графа K_p равно $\mathbf{p}$.
Если граф $\mathbf{G}$ содержит подграф изоморфный графу K_p, то $\chi(G) \geq p$.

Граф, у которого $\chi = 2$, называются **бихроматическим**.

Теорема Кёнига

Непустой граф является **бихроматическим** тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.

Следствие 1. Любое дерево бихроматично.

Следствие 2. Любой двудольный граф бихроматичен.

Оценки хроматического числа графа

Под **нижними оценками хроматического числа** понимают неравенства вида: $\chi(G) \geq c$, где $\mathbf{c}$ – некоторая константа, вычисляемая по графу $\mathbf{G}$, а под **верхними** оценками – неравенства вида $\chi(G) \leq c$, где $\mathbf{c}$ имеет тот же смысл.

Первая нижняя оценка

Для произвольного графа $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}), |\mathbf{V}| = \mathbf{p}, |\mathbf{E}| = \boldsymbol{q}$ справедливо неравенство $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) \geq \frac{p^2}{p^2 - 2q}$

Хроматическое число и плотность графа или вторая нижняя оценка

Для произвольного графа **G** справедливо неравенство $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) \geq \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{G})$, где $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{G})$ – плотность графа или кликовое число

Теорема о графах без треугольников

Для произвольного $\mathbf{k} \geq \mathbf{2}$ существует простой связный граф $\mathbf{G_k}$ такой, что справедливо $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{G_k}) = \mathbf{2}$ и $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) = \mathbf{k}$

Хроматическое число и число независимости графа или третья нижняя оценка

Для произвольного графа **G** справедливо неравенство: $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) \geq \frac{\mathbf{p}}{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{G})}$, где $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{G})$ – число независимости графа

Верхние оценки хроматического числа

Для произвольного графа **G** справедливо неравенство: $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) \leq \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{G}) + \mathbf{1}$, где $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{G})$ – максимум из степеней вершин графа

Теорема Брукса

Для связного неполного графа **G** при условии, что $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{G}) \geq \mathbf{3}$, справедливо неравенство: $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) \leq \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{G})$.

Замечание о компонентах связности

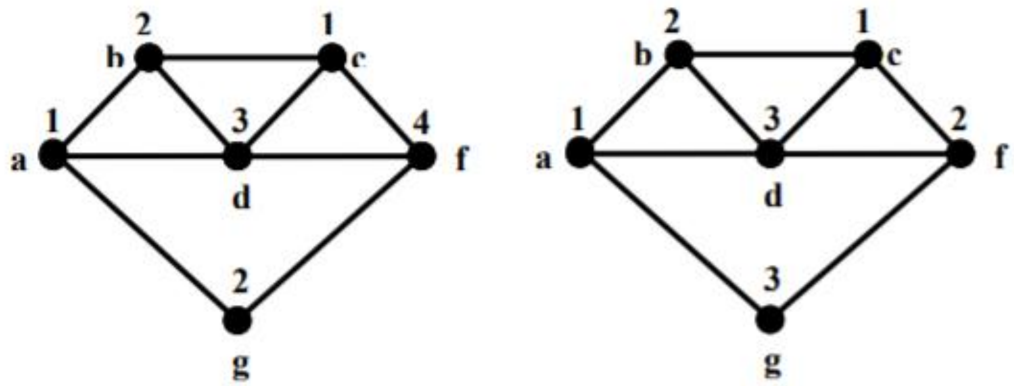
Хроматическое число графа равно максимуму из хроматических чисел его компонент связности

Алгоритм последовательной раскраски (субоптимальный)

1. Произвольной вершине графа **G** приписываем цвет 1.
2. Пусть раскрашены **i** вершин графа **G** в цвета от **1** до **k**, где $k \le i$. Произвольной неокрашенной вершине v_{i+1} приписываем минимальный цвет, неиспользованный при раскраске смежных с ней вершин. Алгоритм последовательной раскраски зависит от способа выбора вершин на обслуживание.

Например.

В первом случае последовательность выбора вершин графа для раскраски такова: (a, b, g, d, c, f) . Число красок, использованных для правильной раскраски вершин графа, равно 4.



Во втором последовательность выбора вершин графа для раскраски: (a, b, d, c, f, g). Число красок, использованных для правильной раскраски вершин графа, равно 3.

Последовательная раскраска вершин графа $G = (V, E), |V| = p, |E| = q$, с матрицей смежности $A_G = \|a_{ij}\|, i, j = \overline{1, p},$ основанная на методах переупорядочения вершин.

1. **«Наибольшие – первыми» или НП-упорядочение**

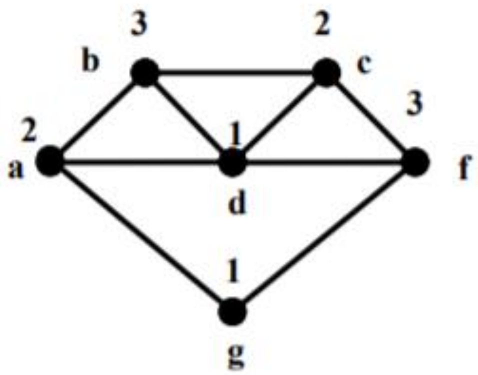
Упорядочиваем вершины графа **G** в порядке невозрастания их степеней $\deg(v_i)$. Раскрашиваем вершины графа **G** по методу последовательной раскраски, выбирая вершины из этого списка.

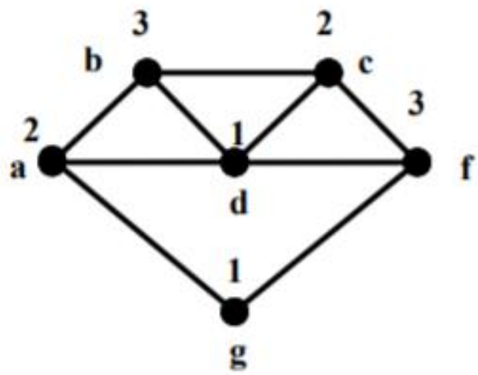
2. **«Последними – наименьшие» или ПН-упорядочение**

Выбираем в исходном графе вершину с наименьшей степенью и присваиваем ей номер $\mathbf{p}$. Удаляем эту вершину со всеми инцидентными ей ребрами. В полученном графе находим вершину с наименьшей степенью и присваиваем ей номер $\mathbf{p-1}$ и т. д.

Например:

НП-упорядочение $(\mathbf{d,a,b,c,f,g})$ ПН-упорядочение $(\mathbf{d,c,f,b,a,g})$





Раскраска ребер или реберная раскраска

Пусть есть $\mathbf{G=(V,E)}$, $|\mathbf{V}|=\mathbf{p}, |\mathbf{E}|=\mathbf{q}$.

Реберной k-раскраской графа $\mathbf{G}$ называется некоторая функция $\boldsymbol{\varphi}$, задающая отображение множества ребер графа в некоторое **k**-элементное множество, т.е. $\boldsymbol{\varphi}:\mathbf{E}\rightarrow\mathbf{A}=\{\mathbf{a_1,...,a_k}\}$.

Если $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{e})=\mathbf{c}$, то говорят, что ребро **e** окрашено в цвет **c.**

Реберная раскраска называется **правильной**, если смежные ребра окрашены в разные цвета.

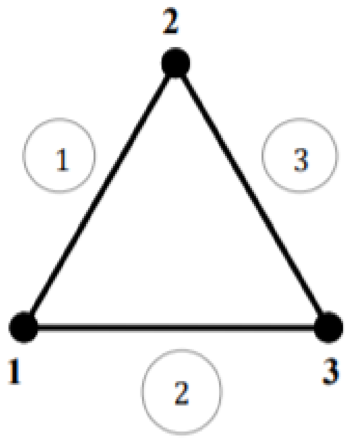
Граф $\mathbf{G}$ называется **k-раскрашиваемым**, если существует правильная **k**-раскраска ребер.

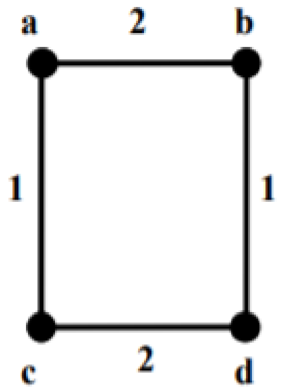
Минимальное число **k**, при котором существует правильная реберная **k**-раскраска называется **реберным хроматическим числом** или **хроматическим индексом**.

Граф **G** называется **реберно k-хроматическим**, если хроматический индекс равен **k**: $\chi'(G) = k$.

Множество ребер, окрашенных в определенный цвет, называют **реберным цветным классом**.

K3

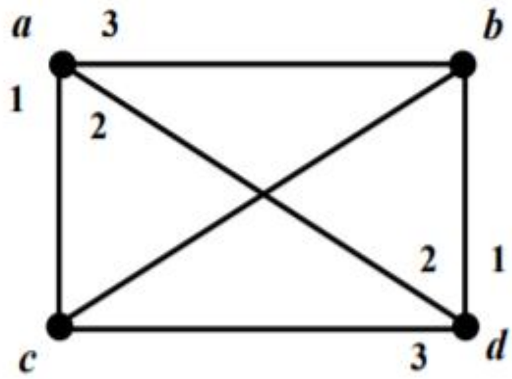




Хроматический индекс для полного графа с четным числом вершин равен: $\chi'(K_{2n}) = 2n - 1$ и с нечетным числом вершин $\chi'(K_{2n+1}) = 2n + 1$.

Пример можно проиллюстрировать:

K4



Задание к лабораторной работе

Исходные данные граф **G: G(13, {5, 6}).**

1) Планарный граф из лабораторной работы №6 обозначить **G1** (исходный или преобразованный), а непланарный **– G2**.

2) Вычислить и проанализировать для планарного и непланарного графов верхние и нижние оценки хроматического числа.

3) Последовательно раскрасить графы **G1** и **G2,** используя алгоритм последовательной раскраски, модификации алгоритма с НП- и ПН-упорядочением вершин.

4) Найти хроматическое число и хроматический индекс графов **G1** и **G2**. Ответ обосновать.

5) Сравнить хроматическое число графов **G1** и **G2** с оценками, полученными аналитически в задании 2 и в результате применения трех алгоритмов, в задании 3. Проанализировать полученные результаты.

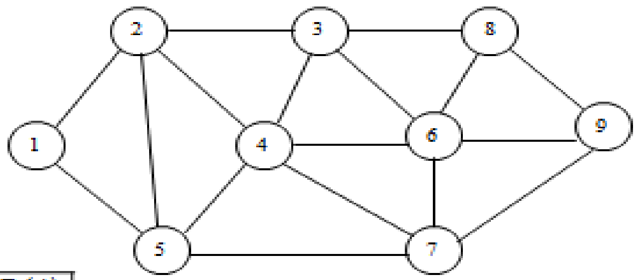
6) Привести пример графа, у которого число красок будет зависеть от порядка обхода вершин.

Раскраска графа по степеням вершин

Алгоритм

1. Упорядочить вершины по степеням начиная с наибольшей степени вершины.
2. Задать начальное значение счетчика $k=1$.
3. Первую вершину окрашиваем в цвет λ_k и заносим в букет $B(k)$.
4. Просматриваем следующую неокрашенную вершину, если она несмежная с вершинами букета $B(k)$ то окрашиваем ее в цвет λ_k, иначе пропускаем.
5. Проверяем количество просмотренных вершин, если $i \leq n$ (i-номер текущей вершины), то возврат в п.4, иначе $k=k+1$ и просмотр списка начинается заново исключая окрашенные вершины.
6. Проверка на окончание поиска: если неокрашенных вершин не осталось, то конец поиска, иначе п.5.

Пример: задан граф



Раскрасить по степеням вершин

Составим таблицу:

Вершина v_i	*Степень* Δ	*B(1)*	*B(2)*	*B(3)*	*B(4)*
4	*5*	*4*			
6	*5*		*6*		
3	*4*			*3*	
2	*4*		*2*		
5	*4*			*5*	
7	*4*				*7*
8	*3*	*8*			
9	*3*			*9*	
1	*2*	*1*			
Цвет λ		***1***	***2***	***3***	***4***