***ТЕМА* 11** **СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ**

**§1. Основные понятия**

Как уже говорилось, случайная величина *X* – это некоторая функция, определённая на пространстве элементарных исходов:

.

Существуют ситуации, когда эта функция зависит от некоторого параметра *t*, принимающего значения из некоторого множества *T.* Тогда говорят, что на множестве *T* определена случайная функция



Если же аргумент *t* истолковывается как время, то такую случайную функцию называют **случайным (стохастическим, вероятностным) процессом.**

Каждая случайная величина, которая получается из  при фиксиро-ванном значении *t*, называется **сечением** случайного процесса. Если же зафиксировать элементарный исход , то получим обычную функцию, которая называется **реализацией (траекторией)** случайного процесса. Таким образом, случайный процесс можно понимать, как множество реализаций. Именно реализации случайного процесса мы в состоянии наблюдать. Поэтому иногда удобно отождествлять пространство элементарных исходов с совокупностью возможных реализаций процесса.

Чтобы ввести классификацию (неполную!) случайных процессов, будем понимать их следующим образом. Имеется некоторая физическая система *S*, которая с течением времени  случайным образом меняет свое состояние. Будем рассматривать простейшие системы, состояние которых в момент времени *t* описывается лишь одной случайной величиной .

Классификация по множеству возможных состояний:

1) процесс с дискретными состояниями, если число возможных состояний конечно или счётно;

2) процесс с непрерывными состояниями, если множество возможных состояний несчётно.

Классификация по типу множества *T*:

А) процесс с дискретным временем, если система переходит из одного состояния в другое в заранее известные моменты времени, ;

В) процесс с непрерывным временем, если переходы могут происходить в любые случайные моменты времени, *T* – интервал.

**Примеры.**

**1А.** 1) Функционирование ЭВМ: число возможных состояний велико, но конечно, а переходы из одного состояния в другое происходят в определенные моменты времени, зависящие от тактовой частоты;

2)  – число дождливых дней с начала года до дня .

**1В.** Функционирование любой системы массового обслуживания. Если, например, обслуживающий прибор один, то возможные состояния: S1 – прибор исправен, занят; S2 – прибор исправен, свободен; S3 – прибор неисправен, в ремонте; S4 – прибор неисправен, ожидает ремонта.

**2А.** 1)  – температура больного, измеряемая в определённые моменты времени 

2)  – положение движущейся точки, которая в определённые моменты времени получает случайный толчок, изменяющий её положение на некоторую непрерывную случайную величину.

**2В.**  – уровень воды в водохранилище, уровень бензина в бензобаке.

Это наиболее простой способ классификации случайных процессов, не учитывающий их вероятностных свойств таких, как совместные распределения и зависимость различных сечений процесса. Более подробная классификация находится вне рамок нашего курса.

**Замечание.** Сечения случайного процесса с дискретным временем образуют последовательность случайных величин (дискретных или непрерыв-  
ных), поэтому такие процессы называют **случайными последовательностями** или **временными рядами**.

**§2. Потоки событий**

**Поток событий** в теории вероятностей – это последовательность событий, происходящих одно за другим в случайные моменты времени. Классическими примерами могут служить потоки заявок на обслуживание в любых системах массового обслуживания (от парикмахерских и мастерских по ремонту обуви до морских и океанских портов).

Если события следуют друг за другом через строго определённые промежутки времени, то поток называют **регулярным**. Этот случай редко встречается в реальных системах, но представляет интерес как предельный случай.

Заметим сразу, что здесь термин «событие» совершенно отличен по смыслу от термина «случайное событие». В частности, не имеет смысла говорить о вероятностях событий, образующих поток. С «потоком событий» можно связать, например, такие «случайные события»:

*А* – за промежуток времени  произошло ровно 2 события потока;

*В* – время между 1м и 2м событиями потока превышает один час.

События потока характеризуются моментом наступления и некоторыми дополнительными признаками (например, необходимостью срочного обслуживания в СМО). Чаще всего, однако, рассматривают **однородные** потоки, события в которых различаются лишь моментами наступления.

Рассмотрим некоторые возможные естественные свойства однородного потока событий.

1. Поток называют **стационарным**, если его вероятностные характеристики не зависят от выбора начала отсчёта времени. Более конкретно: вероятность появления  событий на любом промежутке времени зависит только от числа  и длительности промежутка и не зависит от положения промежутка на оси времени.

2. Поток называют потоком **без последействия**, если число событий, появившихся за любой промежуток времени (это случайная величина!), не зависит от того, сколько событий появилось на другом, не пересекающимся с ним, промежутке.

3. Поток называют **ординарным,** если появление двух или более событий за малый промежуток времени  практически невозможно, то есть события появляются поодиночке, а не группами по два, по три и т.п.

Чтобы от вышенаписанных слов перейти к формулам, введём обозначения для случайных величин, связанных с потоком событий:

 число событий потока, которые появились на промежутке времени 

 число событий потока, появившихся на промежутке времени  Тогда:

1) свойство стационарности означает, что для любого 



2) отсутствие последействия означает, что величины  и независимы, если промежутки и не пересекаются;

3) свойство ординарности означает, что для малых  вероятность пренебрежимо мала по сравнению с ; более точно

 при 

**§3. Пуассоновский процесс**

Стационарный ординарный поток событий без последействия называется **простейшим потоком** или стационарным процессом Пуассона.

В предыдущем параграфе мы связали с потоком событий случайную функцию  – число событий потока, наступивших в интервале . События потока могут изображаться точками оси  и могут пониматься как случайные моменты времени:

Любая реализация процесса  является неубывающей непрерывной слева ступенчатой функцией с единичными скачками, причём .

Название «пуассоновский» связано с тем, что любое сечение процесса имеет распределение Пуассона. Докажем это, для чего найдем вероятность



Сначала найдём функцию  Очевидно, что это убывающая функция, причём  Рассмотрим промежуток  и обозначим  Разобьём этот промежуток на  равных частей длиной . Стационарность и отсутствие последействия приводят к равенству



а значит и теорема умножения даёт



Рассмотрим произвольный момент времени . Согласно принципу Архимеда для любого натурального  найдётся натуральное  такое, что



а так как функция  убывающая, то

.

Если теперь устремить  и  к бесконечности так, чтобы , тогда получим

.

Для вероятности  имеется три варианта: 1) ; 2) ; 3). Первый вариант означает, что



То есть с вероятность 1 за любой промежуток времени появляется хотя бы одно событие, а значит и бесконечно много событий. Второй – – означает, что события вообще не наступают. Интересен только третий вариант. Но, если , то существует  такое, что  и, следовательно, искомая функция имеет вид:

.

Напомним, что полученная формула – это следствие стационарности и отсутствия последействия. Теперь воспользуемся ординарностью потока и из очевидного равенства



получим:



Осталось применить эквивалентность для показательной функции



чтобы получить формулы для двух вероятностей:



Далее, чтобы найти вероятности  для , составим и решим систему дифференциальных уравнений. Введём обозначения для случайных событий связанных с потоком:

 – за промежуток времени  произошло  событий потока;

 – за промежуток  произошло  событий потока;

 – за промежуток  произошло  событий потока.

События  и  независимы вследствие отсутствия последействия, а стационарность обеспечивает равенство . Кроме того, . Применив теоремы умножения и сложения к очевидному равенству

,

получим:



В силу ординарности потока . Поэтому в написанной выше сумме главными являются первые два слагаемых:

.

Отсюда для приращения функции 

.

Разделив все части этого уравнения на  и устремив  к нулю, получим дифференциальное уравнение



с очевидным начальным условием .

Все уравнения этой системы – линейные неоднородные первого порядка, причём у всех них соответствующее однородное уравнение одно и то же вида

.

Решим это уравнение с разделяющимися переменными:



Итак, решение однородного уравнения, общего для всех уравнений написанной выше системы, имеет вид:

.

Решения неоднородных уравнений находим методом вариации постоянной, а именно, постоянную  заменяем неизвестной функцией:

.

Подставим это  и производную  в неоднородное уравнение:

.

Отсюда: , причём , так как , а для . Решая последовательно уравнения, получим:



Окончательно, для искомой вероятности того, что за промежуток времени  произойдёт ровно  событий потока, получаем формулу

,

что означает для любого сечения пуассоновского процесса .

**Замечание 1.** Из свойств распределения Пуассона вытекает смысл параметра  – это среднее число событий потока за единицу времени:

.

Эту величину называют **интенсивностью** или **плотностью** потока. В случае нарушения стационарности вводят понятие мгновенной интенсивности:



Можно доказать, что случайная величина  – число событий потока, появившихся на промежутке времени  имеет распределение Пуассона с параметром

.

**Замечание 2.** Рассмотрим случайную величину  – время ожидания первого события потока. Её функция распределения:

.

Такой вид функции распределения означает, что  В силу стацио-  
нарности и отсутствия последействия, в простейшем потоке время между любыми двумя последовательными событиями также имеет показательное распределение с тем же параметром.

**Замечание 3.** Так же как нормальное распределение является предельным распределением для сумм произвольных случайных величин, так и простейший поток возникает при сложении большого числа независимых стационарных потоков с любым последействием при малых значениях интенсивностей слагаемых.

**§4. Цепи Маркова**

**І Основные понятия**

Пуассоновский процесс, рассмотренный в предыдущем параграфе, является частным случаем так называемого **марковского** процесса или, ещё говорят, процесса без последействия.

**Определение.** Процесс, протекающий в физической системе, называется **марковским**, если для каждого момента времени вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от её состояния в настоящий момент  и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние.

Мы ограничимся только частным случаем марковского процесса с дискретным (конечным) множеством состояний и дискретным временем – **цепью Маркова**.

Рассмотрим физическую систему *S*, которая в каждый момент времени может находиться в одном из состояний , и меняет случайным образом своё состояние только в определённые моменты . Припишем каждому состоянию некоторое число (например, его номер) и рассмотрим случайный процесс  – состояние системы, где , или проще:

 – состояние системы в момент .

Марковское свойство определяется равенством



и, если оно выполняется, то говорят, что случайная последовательность образует **цепь Маркова** с конечным множеством состояний  и с **вероятностями перехода**

.

В общем случае эти вероятности перехода зависят от времени (номера шага). Мы ограничимся лишь так называемыми **однородными** цепями Маркова, когда вероятности перехода зависят только от того, из какого состояния в какое происходит переход:



Вероятности перехода образуют квадратную матрицу  порядка . Отметим одну особенность этой матрицы перехода. Элементы -ой строки указывают вероятности всех возможных переходов из состояния  за один шаг ( в том числе и переход в самоё себя). А так как эти переходы образуют полную группу несовместных событий, то



Матрицы, удовлетворяющие такому условию, называют **стохастическими**.

Чтобы полностью определить состояние системы в любой момент времени, кроме вероятностей перехода, надо иметь информацию о состоянии системы в начальный момент. Обычно задаются вероятности

,

набор которых  называют **начальным распределением** вероятностей. Теорема умножения и марковское свойство позволяют определить вероятность любой траектории цепи Маркова. Например,

.

Итак, однородная цепь Маркова полностью определяется матрицей перехода  и вектором начальных вероятностей 

**Замечание 1.** Если число состояний цепи невелико, то её удобно изображать в виде графа, вершины которого – возможные состояния, а дуги имеют направление и вес, соответствующие вероятностям перехода за один шаг. Цепь Маркова можно представить себе так: точка, изображающая систему, случайным образом перемещается по графу состояний, перескакивая за один шаг из одного состояния в другое или задерживаясь в одном и том же состоянии на несколько шагов.

**Пример 1.** Рассмотрим частицу, которая перемещается по цело-численным точкам оси  следующим образом. В начальный момент времени частица может находится в точках  и  с равными вероятностями. Через равные промежутки времени подбрасывается монета и результат броска определяет смещение частицы на единицу влево, если выпал герб, и на единицу вправо, если выпала цифра. И пусть  – абсцисса частицы после -го броска. В точках  и  находятся отражающие экраны: если , то смещение только направо, а если  – то направо. Последовательность  – цепь Маркова с возможными состояниями , с вектором начальных вероятностей  и матрицей перехода



Граф состояний имеет вид:

**Замечание 2.** В примере описан процесс, который называется **случайным** **блужданием** с отражающими экранами. Можно рассматривать другие типы экранов (поглощающие, комбинированные) или блуждание без экранов. Или использовать несимметричную монету. А с помощью двух монет можно организовать блуждание по целочисленной решётке плоскости .

Важную роль играют так называемые **абсолютные вероятности** состояний цепи

 –

вероятности нахождения системы в том или ином состоянии на -ом шаге. Чтобы их найти, необходимо знать вероятности (условные) перехода за  шагов:

.

Очевидно, что . Кроме того, принимают по определению



Эти вероятности перехода за  шагов образуют стохастическую матрицу  порядка . Заметим, что в силу однородности цепи . Формула полной вероятности приводит к так называемому уравнению Маркова (частный случай уравнения Колмогорова–Чепмена):

.

В частности, справедлива рекуррентная формула



Например, для элемента матрицы перехода за два шага:

,

что является ни чем иным, как элементом произведения матрицы  на себя, то есть . А элемент матрицы перехода за три шага

,

что означает: . И вообще, матрица перехода за  шагов – это -я степень матрицы перехода за один шаг.

Теперь нетрудно получить формулы для абсолютных вероятностей:



**II Классификация состояний и цепей**

1. Говорят, что состояние  **достижимо** из состояния  , если  для некоторого , т.е. с положительной вероятностью система попадёт в состояние  из состояния  за конечное число шагов.

2. Говорят, что состояния  и  **сообщаются** , если они достижимы друг из друга .

3. Состояние  называют **несущественным**, если существует достижимое из него состояние, но  и  не сообщаются, т.е.  для некоторого  и .

4. Все состояния, отличные от несущественных, называются **существенными**. Состояние является существенным, если все достижимые из него состояния сообщаются с ним.

Несущественность состояния означает, что из него система рано или поздно перейдет в какое-либо из существенных состояний и больше не вернётся.

5. Свойство сообщаемости представляет собой отношение эквивалентности:

*a*)  (рефлексивность) – дополнение к определению вероятности  
 перехода 

*b*) если , то  (симметричность) – согласно определению;

*c*) если  и , то  (транзитивность) – вследствие  
 уравнения Маркова

Из этого следует, что всё множество состояний можно разбить на классы эквивалентности: состояния объединяются в один класс, если они сообщаются. Возможно, что, отправляясь из состояния, принадлежащего одному классу, система с положительной вероятностью попадает в другой класс, но тогда возврат в исходный класс уже невозможен (в противном случае оба упомянутых класса состояний входили бы в один класс эквивалентности). Таким образом, для классов сообщающихся состояний имеется две возможности: либо все состояния класса существенные, либо несущественные. Система, попав в некоторый класс существенных состояний, остаётся там навсегда.

Несущественные состояния не играют роли при изучении долговременного поведения цепи Маркова, а потому их часто игнорируют.

6. Цепь Маркова называется **неразложимой** (или **неприводимой**), если состоит из одного класса существенных сообщающихся состояний.

7. Состояние  называется **периодическим** с периодом , если возвращение в это состояние возможно за число шагов кратное , то есть  
 только для .

Если , то состояние  называется **апериодическим**. В частности, если , то состояние  является апериодическим.

Оказывается, если цепь неразложима, то либо все состояния апериодические (при этом цепь называют **апериодической**), либо все состояния периодические с одинаковым периодом.

8. Состояние  называется **поглощающим**, если , при этом очевидно, что.

**Пример 2.**

**1** – поглощающее состояние,

**4** – несущественное состояние,

**2, 3** – сообщающиеся несущественные состояния,

**5, 6, 7** – класс существенных состояний.

**ІІІ Основной результат**

Во многих задачах, если процесс протекающий в системе, длится достаточно долго, возникает вопрос о предельном поведении абсолютных вероятностей  при , ответ на который зависит от пределов вида 

Цепь Маркова называется **эргодической**, если существуют пределы   
 

Из связи абсолютных вероятностей с вероятностями перехода за  шагов для эргодической цепи следует совпадение пределов



Эти пределы называются **финальными** вероятностями, а их совокупность называют **стационарным** распределением. Наличие этих пределов означает, что с течением времени в системе *S* устанавливается предельный стационарный режим, в ходе которого система хотя и переходит из одного состояния в другое, но абсолютные вероятности состояний практически не меняются. Финальную вероятность  можно понимать, как среднее относительное время пребывания системы  в состоянии . (Пусть, например, . Тогда в среднем 30% времени система пребывает в состоянии .)

Для рассмотренных нами конечных однородных цепей Маркова имеет место следующий результат.

**Теорема.** Для того, чтобы цепь Маркова была эргодической, необходимо и достаточно, чтобы она была неразложимой и апериодической. В частности, цепь является эргодической, если при некотором  все элементы матрицы вероятностей  положительны. При этом финальные вероятности являются единственным решением системы уравнений



с естественной нормировкой .

**Пример 3.** Имеется 6 шаров, среди которых 3 белых и 3 красных в двух урнах (по три шара в каждой). При каждом испытании из урн выбирают случайным образом по одному шару и эти два шара меняют местами. Система находится в состоянии , если в первой урне  белых шаров, а во второй урне  белых. Множество состояний .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| : | ккк | ббб |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| : | бкк | ббк |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| : | ббк | бкк |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| : | ббб | ккк |

Очевидно, что из состояния  возможен переход только в , а из  только в , поэтому , остальные элементы первой и четвёртой строк матрицы вероятностей перехода равны нулю. Невозможны также переходы  и , поэтому . Далее:

(из 1-ой белый, из 2-ой красный)

(извлечены шары одного цвета)=(бб или кк)

( из 1-ой красный, из 2-ой белый)

Аналогично можно найти

   

Матрица вероятностей перехода за один шаг имеет вид:

.

Система для вычисления финальных вероятностей в матричной форме имеет вид: , где проекциями вектора  служат искомые финальные вероятности:  Для нашего примера получаем систему:



Её решение имеет вид:  С учётом нормировки получаем такие финальные вероятности:



**Замечание 3.** Если в качестве начального распределения вероятностей выбрать стационарное  то абсолютные вероятности  не зависят от .