# ***ТЕМА* 1. ВВЕДЕНИЕ**

## §1. Немного истории

Грубо говоря, теория вероятностей изучает случайные явления, правда, вкладывая в термин «случайный» свой собственный смысл. Кроме того, как всякая математическая наука, она изучает не сами явления, а их математические модели. Подробнее об этом позже.

О важности случайных явлений люди поняли ещё в глубокой древности.

«И обратился я, и видел под солнцем, что не проворным достается успешный бег, не храбрым – победа, не мудрым – хлеб, и не у разумных – богатство, и не искусным – благорасположение, но время и случай для всех их» (Книга Экклезиаста, от X до III в. до н.э.).

Первые задачи теории вероятностей были связаны с азартными играми, ибо именно в них было замечено то, что сейчас называют статистической устойчивостью.

В XIII веке французский каноник Ришар де Фурниваль подсчитал все возможные суммы очков при бросании 3-х костей, и главное – указал число способов, которые может получиться каждая сумма. Это число способов можно понимать, как первую числовую меру ожидаемости события, аналогичную вероятности.

В XV веке Лука Пачоли сформулировал задачу о разделе ставки: «Если два игрока прервали, не доиграв, серию партий, то, как им разделить ставку, если, например, один выиграл три партии, а второй одну?» И хотя, решение этой задачи было неверно, оно привлекло внимание математиков, последующих поколений – Джероламо Кардано и Никколо Тарталья (XVI век, Италия). Они предложили свои решения, которые впоследствии также были признаны неудачными.

Решались и другие задачи. Но это были разрозненные задачи, пока за дело не взялись Пьер Ферма и Блез Паскаль (XVII век, Франция). Считается, что основы теории вероятностей были заложены именно в переписке этих ученых. Поводом стали задачи, поставленные Паскалю неким французским писателем де Мере. Одна из них – это задача о разделе ставки, другая – задача об очках: «Сколько раз надо подбросить две игральные кости, чтобы одновременное выпадение хотя бы один раз двух шестерок было вероятнее более чем на половину?».

Об их переписке узнал Гюйгенс (XVII век, Голландия), и заинтересовался этими вопросами. Он опубликовал первый трактат по теории вероятностей: «О расчетах в азартных играх» (1657г). В книге много решенных задач, а также задач для самостоятельного решения. Одна из таких задач – задача о разорении игрока (найти вероятность проигрыша за *N* шагов, вероятность выигрыша и ожидаемую длину игры).

С тех пор многие математики принимали участие в развитии теории вероятностей. В процессе изучения дисциплины «Теория вероятностей» мы познакомимся с ними.

## §2. Исходные понятия теории вероятностей

К таким понятиям относится: эксперимент, событие и вероятность события.

Эксперимент – это всякое действие (активное или пассивное), совершаемое для получения некоторого результата. Используются также его синонимы: опыт, испытание, наблюдение, измерение, подсчет и т.п.

Слово «эксперимент» может, в сущности, применятся для обозначения лишь такого действия, когда мы в состоянии рассказать другим, что нами проделано и что нам стало известно в итоге.

Все мыслимые эксперименты можно разделить на три группы.

1. Хорошие эксперименты, детерминированные, в которых наблюдается полная устойчивость исхода.

2. Эксперименты, в которых полной устойчивости нет, но есть статистическая устойчивость.

3. Совсем плохие эксперименты, в которых нет даже статистической устойчивости.

Конечно, отнесение к первой или второй группе, зависит от того, для чего проводится эксперимент.

Эксперименты из первой группы ясны и без теории вероятностей. А для экспериментов из третьей группы она бесполезна.

Именно вторая группа составляет основную сферу применения теории вероятностей. Правда, некоторые скептики считают, что мы вряд ли когда-либо можем быть вполне уверенными, что наш эксперимент относится ко второй группе, а не к третьей.

Событие – любой результат эксперимента.

Случайное событие – событие, которое в данном эксперименте может, как произойти, так и не произойти. Обозначается заглавными латинскими буквами *A*, *B*, *C….*

Невозможное событие – событие, которое в данном эксперименте не происходит. Обозначается: Ø.

Достоверное событие – событие, которое всегда происходит в данном эксперименте. Обозначается: Ω.

Следует отметить, что отнесение события к той или иной группе зависит от случайного эксперимента.

Для понимания термина «статистическая устойчивость» повторим данный эксперимент в неизменных условиях *N* раз и подсчитаем количество наступлений некоторого события *A.*

Отношение  называется частотой события *A*.

**Статистическая устойчивость** означает следующее (ещё говорят «**устойчивость частот**»):

1) при больших *N* частота изменяется незначительно, слегка колеблясь возле некоторого числа;

2) частоты, вычисленные по различным (большим) сериям экспериментов, близки между собой.

В теории вероятностей термин «случайный» (случайный эксперимент, случайное событие) относится **лишь** к экспериментам, в которых наблюдается устойчивость частот.

Как говорят: «Вся человеческая история свидетельствует о том, что неизменность условий эксперимента, приводит к устойчивости частот».

Из этого свойства случайного эксперимента следует, что для каждого события существует некоторое положительное число, которое и называется вероятностью события.

«Вероятность события – это числовая характеристика степени возможности появления события при фиксированных условиях, которые могут быть осуществлены неограниченное число раз». (БСЭ)

«Вероятность есть самая важная концепция в современной науке, особенно потому, что никто не имеет ни малейшего понятия об её истинном смысле». (Б. Рассел, 1929 г.)

В практической теории вероятностей существуют различные способы вычисления вероятности. Теоретическая теория вероятностей строится на аксиоматической основе, разработанной А. Н. Колмогоровым в 30-е годы прошлого века. Идея проста.

С каждым случайным экспериментом связано множество событий. В зависимости от целей случайного эксперимента можно выделить т.н. элементарные исходы, которые образуют пространства элементарных исходов. Эти исходы могут быть определены двумя условиями: 1) никакие два элементарные исходы не могут осуществиться одновременно; 2) в каждой реализации случайного эксперимента происходит один из элементарных исходов. Всякое другое случайное событие – это набор некоторых элементарных исходов, т.е. подмножество пространства элементарных исходов.

Вероятность события *A* – это неотрицательное число , удовлетворяющее условиям:

1) ;

2) , если совместное появление слагаемых есть невозможное событие.

Вопрос «откуда взялись эти числа?» в современной теории вероятностей не ставится.

Итак, событие – это множество в пространстве элементарных исходов, а значит, к ним можно применять понятия теории множеств. Однако в теории вероятностей принято использовать свои термины и обозначения.

**§3. Алгебра событий**

Операции с событиями хорошо иллюстрируются так называемыми диаграммами Эйлера-Венна.

|  |  |
| --- | --- |
| элементарный исход  событие | Пространство элементарных исходов Ω представлено на диаграмме прямоугольником, его точки представляют элементарные исходы. Всякая фигура в Ω представляет некоторое событие. |

**I Сложение событий**

**Сумма событий** *A* и *B* обозначается *A+B* и является событием, состоящим в том, что произошло **хотя бы одно** из событий *A* или *B*, т.е. только *A* или только *B*, или одновременно и *A* и *B*.

Состоит из тех элементарных исходов, которые входят хотя бы в одно из событий *A* или .

Ещё читают *A+B* = «*A* **или** *B*», причем «или» не исключающее.

Эта операция сложения двух событий естественным образом обобщается на любое количество слагаемых.

|  |  |
| --- | --- |
| *A+B* | **Свойства:**  1) ;  2) ;  3) ;  4) Ø ;  5) . |

Интерпретация суммы событий:

|  |  |
| --- | --- |
| *A*1  *A*2 | *A*1 – верхняя лампочка годна.  *A*2 – нижняя лампочка годна.  «Ток в цепи есть» . |

Случайный эксперимент: два последовательных выстрела по мишени, *Ak*– попадание в *k-*м выстреле, *k* = 1, 2. Тогда «хотя бы одно попадание».

**ІІ Умножение событий**

**Произведение событий** *A* и *B* обозначается  и состоит в том, что произошло и *A* и *B*. Включает в себя те элементарные исходы, которые входят как в *A*, так и в *B*. Читается:  «*A* **и** *B*».

Как и операция сложения, эта операция умножения двух событий очевидным образом обобщается на любое количество множителей.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Свойства:**   1. ; 2. ; 3. ; 4. Ø  Ø; 5. . |

Интерпретация произведения событий:

|  |  |
| --- | --- |
| *A*1  *A*2 | *A*1 – верхняя лампочка годна.  *A*2 – нижняя лампочка годна.  «Ток в цепи есть» . |

В эксперименте с выстрелами по мишени:  = « два попадания».

**Определение.** События *A* и *B* называются **несовместными**, если   
Ø, т.е. их совместное наступление невозможно.

События *A*1, *A*2, …,  называются попарно несовместными, если Ø .

**ІІІ Переход к противоположному событию**

**Противоположным** событию *A* называется событие , которое состоит в ненаступлении события *A*, и включает в себя те элементарные исходы, которые не входят в *A*.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Свойства:**   1. ; 2. Ø; 3. Ø; 4. ; 5. Ø. |

Эти три операции связаны следующими формулами:

– дистрибутивность умножения относительно сложения;

 – дистрибутивность сложение относительно умножения.

Сумму двух произвольных событий можно представить в виде суммы трех попарно несовместных событий:

,

кроме того, .

Формулы Де Моргана (XIX век, Великобритания):

,

 ().

Эти формулы были известны ещё Уильяму Оккаму (XIII век, Англия), который был одним из величайших логиков всех времен.

**IV Вычитание событий**

**Разность** событий *A* и *B* (обозначается ) – событие, состоящее в том, что *A* происходит, а *B* не происходит. Состоит из тех элементарных исходов, которые входят в *A*, но не входят в *B*.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Свойства:**   1. Ø; 2. ; 3. Ø; 4. Ø. |

Выражается через другие операции: .

В эксперименте с выстрелами по мишени:  «попадание только в первом выстреле».

**V Симметрическая разность событий**

**Симметрическая разность** событий *A* и *B* – (обозначается ) – событие, состоящее в том, что происходит только одно из *A* или *B* («или» исключающее).

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Свойства:**   1. ; 2. ; 3. . |

В эксперименте с выстрелами:  = «только одно попадание».

**Определение.** Говорят, что событие *A* влечет за собой *B*, или *B* есть следствие события *A*, и пишут , если все элементарные исходы, входящие в *A*, входят в *B*.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Свойства:**   1. Ø ; 2. ; 3. Если Ø, то 4. Если , то , Ø, . |

Если  и , то события называются равными или эквивалентными и пишут .

#### Определение. Говорят, что события *A*1, *A*2, …, образуют **полную** **группу**, если:

* 1. ;
  2. Ø .

|  |  |
| --- | --- |
|  | Случайный эксперимент: из колоды карт извлекают одну карту. Полная группа событий:  – красная масть,  – трефа,  – пика.  Случайный эксперимент: подбра-сывают две монеты. Полная группа событий:  – 0 гербов,  – 1 герб,  – 2 герба. |

**Замечание о приоритете операций:** 1) переход к противоположному событию; 2) умножение; 3)сложение. Скобки могут менять порядок действий.

Пример 1. Случайный эксперимент: броски монеты до первого герба. Пространство элементарных исходов имеет вид:



где  – в -ом броске выпал герб. Выразим некоторые события через элементарные:

*С*= «ровно три броска» ;

 «менее трех бросков» = «один или два броска» ;

 «не менее трех бросков»  «две первые были цифры»

*D*  «в случайном эксперименте сделано нечетное число бросков» 



Пример 2. Случайный эксперимент: три выстрела по мишени. Пусть  попадание в -ом выстреле. Не выписывая ПЭИ, выразим ряд сложных событий через 

*B*  «три попадания» .

*С*  «попадание только в первом выстреле» .

*D*  «ровно одно попадание» .

*E*  «хотя бы одно попадание»  «одно или два или три попадания» 

  «ни одного попадания» .

Пример 3. Случайный эксперимент: работа электрической цепи.

|  |  |
| --- | --- |
| 1  2  3  4 | – *k*-й элемент работает.  *A* – вся цепь работает.  . |