# ***ТЕМА 2* ТРИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ**

## §1. Статистическая вероятность

Напомним определение частоты события. Случайный эксперимент повторяется в неизменных условиях *N* раз и подсчитывается  – число появлений события *A*.

#### Определение. Частотой события *A* в серии из *N* наблюдений (или в *N* повторениях случайного эксперимента) называют число

.

Уже было сказано о свойстве устойчивости частот. Теперь можно дать определение статистической вероятности.

#### Определение. Статистической вероятностью события *A* называют его частоту, вычисленную по большой серии случайных экспериментов, или число, близкое к частоте.

**Свойства**

1. , (ибо ).

2. Ø, (ибо Ø).

3. .

**Недостатки**

1. Необходимость проведения достаточно большого числа испытаний.

2. Зависимость от числа испытаний.

Свойства 1) и 2) обратной силы не имеют (в отличие от классического определения).

##### Замечание. Если, например, , то в 100 повторениях случайного эксперимента событие произошло 30 раз; но это не означает, что в другой сотне наблюдений событие появится ровно 30 раз.

Если вероятность того, что деталь бракованная  0,1, то это означает, что **в среднем** в каждой сотне деталей 10 бракованных, а в тысяче – 100 в среднем!

## §2. Классическое определение

Пусть пространство элементарных исходов состоит из конечного числа исходов: , причем, все исходы в силу некоторой симметрии и однородности одинаково возможны, т.е. нет оснований считать, что одни из них более возможны, чем другие.

#### Определение. Классической вероятностью события *A* называют число

,

где  – общее число равновозможных элементарных исходов,

 – число исходов, благоприятствующих событию *A* (*A* состоит из  элементарных исходов).

**Свойства**

1.  и наоборот: .

2. Ø и наоборот: Ø.

3. .

4.  (в некотором смысле).

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | *А*= «извлеченный шар белый»:  ; в 100 повторениях этого эксперимента  шаров будут белыми (теория вероятностей позволяет уточнить, что означает ). |

**Недостатки**

1. Конечность пространства элементарных исходов.

2. Равновозможность элементарных исходов

Равновозможность элементарных исходов появляется в специально организованных случайных экспериментах. В теории вероятностей есть методы проверки равновозможности исходов. В условиях задач равновозможность обеспечивают условием: карты извлекают «наудачу»; шары, неразличимые на ощупь, извлекают «наудачу», «случайным образом».

Применение классической вероятности требует умения подсчитывать число исходов случайного эксперимента.

И здесь, говоря о случайном эксперименте, необходимо выделять три момента:1) в каких условиях проводится случайный эксперимент; 2) в чем состоит случайный эксперимент; 3) каковы возможные результаты, исходы.  
Например, монету можно подбрасывать на Земле или в космосе; две монеты могут быть различимыми или неразличимыми; колода карт может быть в 36 листов или в 52 листа; шары можно извлекать из урны с возвращением или без возвращения.

В зависимости от целей случайного эксперимента можно строить различные пространства элементарных исходов.

Например, случайный эксперимент – извлечение одной карты из 36-ти. Здесь можно рассмотреть такие пространства элементарных исходов: Ω1= {красная, черная}, Ω2={♠, ♣, ♥, ♦}, ,   
Ω4 = {все 36 карт}.

Иногда пространство элементарных исходов построить достаточно просто. Например, если случайный эксперимент состоит в подбрасывании двух различимых игральных костей, то элементарный исход такого эксперимента – это упорядоченная пара чисел . Все ПЭИ изображается матрицей шестого порядка:

 .

В таком случае легко подсчитать  для любого события *A*.

В более сложных случайных экспериментах (3 или 4 кости) нужны методы подсчета  и .

В математике есть раздел, который занимается подсчетом всевозможных комбинаций объектов – это «Комбинаторика».

## §3. Элементы комбинаторики

**І Два правила комбинаторики**

Комбинаторика оформилась в XVII – XVIII веках в трудах Паскаля, Ферма, Лейбница, Бернулли, Эйлера и к началу XX в. считалась завершенным разделом математики. В XX в. её начали рассматривать, как раздел теории конечных множеств и она получила развитие и применение в теории ЭВМ, теории информации и кодирования.

Комбинаторика рассматривает всевозможные подмножества конечного множества, как упорядоченные, так и неупорядоченные и разрабатывает методы подсчета количества таких подмножеств.

**1) Правило произведения**. Если действие *A* можно выполнить *n* способами, а действие *B* – *m* способами, то **оба** действия одновременно *A* **и** *B* можно выполнить  способами.

|  |  |
| --- | --- |
| a  b  c  1  2 | Количество путей из A в B – 3.  Количество путей из B в C – 2.  Количество путей из A в C – . |

**2) Правило суммы**. Если действие *A* – *n*  способами, а действие *B* – *m* способами, то выполнить **только одно** действие *A* **или** *B* можно  способами («или» исключающее).

|  |  |
| --- | --- |
| 1  1 | Способов выбрать два шара – .  Способов выбрать только один шар –. |

###### Примеры

1. Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 составляют трехзначное число. Количество таких чисел: 1) без повторения цифр–; 2) с повторением цифр–;

3) четное, цифры могут повторяться –.

2. Семь шариков размещаются наудачу по трем ящикам. Количество возможных исходов – 

### ІI Сочетания из *n* по *k*

Пусть множество Ω содержится  элементов. Всякое его подмножество, содержащее  элементов, называется сочетанием из  элементов по . Два сочетания отличаются лишь элементами. Количество таких подмножеств принято обозначать . Формула для вычисления:



Свойства: 

Эти числа называются биномиальными коэффициентами, ибо связаны с биномом Ньютона

,

известным из курса математического анализа

|  |  |
| --- | --- |
| 5 | Сколькими способами можно выбрать пять шаров? пять шаров выбрать так, чтобы среди них было ровно три черных?  Решение:  – пять шаров;  – три черных (и два не черных). |

### III Перестановки

Множество называется упорядоченным, если каждому его элементу поставлено некоторое число (номер элемента) от 1 до *n*, где *n* – число элементов множества.

Упорядочить множество можно различными способами. Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов, называются перестановками. Их количество обозначается символом . Формула для вычисления – прямое следствие правила произведения:



При этом в качестве соглашения принимается:  Полезная рекур-  
рентная формула: 

###### Примеры

* 1. Из семи человек можно организовать  очередей. Если два человека хотят стоять рядом, то таких очередей . Если три человека хотят стоять рядом, то .
  2. Множество чисел  упорядочить так, чтобы четные числа стояли на местах с четными номерами. Число способов – 

### IV Размещения из *n* по *k*

Упорядоченное *k*-элементное подмножество множества из *n* элементов называют размещением из *n* элементов по *k*. Их число обозначается симво-лом  и вычисляется по формуле:

.

Различные размещения различаются либо элементами, либо их порядком.

###### Пример. Три призовых места среди семи бегунов могут распределиться способами. Тот же ответ – – и для такой задачи: число способов разместить три шарика по семи ящикам, с условием, что в ящик попадает не более одного шарика.

Сочетания, перестановки и размещения – основные типы комбинаций элементов конечного множества. Кроме них существуют и другие комбинации.

### V Разбиения на группы; перестановки с повторениями

Сочетание из *n* по *k* – это число способов разбить множество на два подмножества с числом элементов *k* и  В общем случае можно поста-вить такую задачу: Ω – множество из *n* элементов, его надо разбить на  не пересекающихся множеств  с числом элементов  соответственно, . Количество способов, которыми это можно сделать, дает формула:



Эта же формула решает и другую задачу: из *n* элементов, среди которых  первого типа,  второго типа, …, – *m*-го типа, можно составить  перестановок с повторением.

###### Пример. Сколько «наборов» букв можно составить, переставляя буквы в слове «математика»? Имея по две буквы «м» и «т», три буквы «а», по одной буквы «е», «и», «к», получим



Вышеприведенная формула связана с обобщением бинома Ньютона – полиномиальной формулой



где сумма распространяется на все неотрицательные числа  такие, что 

###### Примеры

###### 1. На первой линии шахматной доски надо расставить две ладьи, два слона, два коня, ферзя и короля. Сколькими способами можно это сделать?



2. Имеется *n* различимых частиц, которые распределяется по *m* ячейкам, причем в первую ячейку попадает  частиц, во вторую –  частиц, …, в *m*-ю ячейку –  частиц. Число способов выполнить такое размещение:



### VI Размещения с повторениями

Размещения с повторениями – размещение элементов, в которых каждый элемент может участвовать несколько раз. Ещё такие размещения называют выборками с возвращением**:**

.

Примеры

1. Три шара размещают по семи ящикам без ограничений на число шаров в ящике. Число способов: .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| fig_2_5 |  | 2. Или *k* орудий обстреливают *n* целей.  3. Или *k* пассажиров лифта выходят на *n* этажах. |

### VII Сочетания с повторениями

Имеются элементы *n* различных типов (неограниченное число каждого типа). Из этого множества выбирают *k* элементов. Каждый такой выбор – сочетание с повторениями из *n* по *k*. Их количество вычисляют по формуле:

.

###### Примеры

1. В ящике шары трёх цветов: красный, белый, зеленый. Сколькими способами можно выбрать два шара?

.

2. В магазине карандаши пяти цветов (достаточно много). Сколькими способами можно выбрать семь карандашей?



Пусть  и требуется, чтобы в сочетании каждый тип встречался хотя бы один раз. Формула для числа таких сочетаний:

.

###### Пример. В магазине имеется сортов вина. Сколькими способами можно купить бутылок так, чтобы среди них было хотя бы по одной бутылке каждого сорта?

.

## §4. Примеры решения задач на классическую вероятность

**Пример 1.** Случайный эксперимент: игральную кость бросают три раза. . Найти вероятности событий: 1) *A* – все три раза выпало одно и то же число очков; 2) *B* – все три раза кость выпадала разными гранями; 3) *C* – хотя бы одни раз выпало «1».

**Решение.**  Общее число исходов:  (размещения с повторениями). Число благоприятствующих исходов:

1)  ( в первом броске выпала любая грань, а второй и третий броски повторили результат первого броска);

2)  (в первом броске выпала любая грань, во втором – тоже любая, но отличная от выпавшей в первом, в третьем броске – любая, но не повторяющая первую и вторую);

3) если ввести обозначение  « выпадение «1» в *k-*ом броске, то  ««1» выпала 1 раз или 2 раза или 3 раза», поэтому



и ; однако, проще перейти к противоположному событию –  ««1» ни разу не выпала» = «все 3 раза выпадала «не «1»» и получить , а .

Теперь нетрудно вычислить вероятности событий:



**Пример 2.** Случайный эксперимент: из урны, содержащей 3 белых, 5 черных и 2 красных шара, наудачу извлекают 3 шара. Найти вероятности событий: 1)  «все извлеченные шары черные»; 2)  «все извлеченные шары одного цвета»; 3)  *«*все извлеченные шары разного цвета»;   
4) «среди извлеченных ровно 2 белых шара»; 5)  «извлечен хотя бы один белый шар».

**Решение.** Элементарный исход данного СЭ – тройка (неупорядоченная) шаров. Общее количество таких троек – число сочетаний:  Число благоприятствующих исходов:

1)  (три шара выбираем из пяти красных);

2) («три красных или три белых»);

3)  («1 белый и 1 черный и 1 красный »);

4)  («2 белых и 3–2=1 небелый»);

5) («все извлеченные небелые»).

Вычисляем вероятности событий:



**Пример 3.** Из урны с тем же набором шаров, что и в предыдущем примере, извлекают 3 шара **по одному с возвращением**. Вычислим вероятности для тех же событий, что и в предыдущем примере:



 – в отличие от предыдущего примера здесь возможны и 3красных шара;

 – возможны 3!=6 перестановок трёх цветов;  
  – возможны 3 порядка появления ровно   
двух белых, а именно: «»;



##### В подобном СЭ можно рассматривать события, связанные с порядком извлекаемых шаров, например, *F =* «только первый извлеченный шар черный»: Отметим, что примеры, подобные рассмотренному, значительно проще решать с использованием теорем сложения и умножения вероятностей, которые излагаются в следующей теме.

**Пример 4.** Случайный эксперимент: четыре различных шарика размещают наудачу по четырем ящикам. Найти вероятности событий: 1)  «все ящики заняты»; 2)  «занят только один ящик»; 3)  *«*в одном из ящиков ровно три шара».

**Решение.** Общее число исходов:  у каждого из четырех шариков имеется по четыре возможности. Событие *А* означает, что в каждом ящике по одному шарику, а четыре объекта располагать по четырем местам можно *n*(*A*)=4! способами. Поэтому  Событие *В* означает, что все шарики попали в один ящик, значит у первого шарика четыре возможности, а у трех остальных по одной:  и 

Чтобы вычислить рассуждаемтак: выберем ящик для трех шаров–это можно сделать способами, потом выберем три шарика для этого ящика – это  способов, и, наконец, выбираем ящик из оставшихся трех для оставшегося шарика – это способов. Итак,  и 

**Пример 5.** Случайный эксперимент: из колоды карт (36 листов) наудачу извлекают четыре карты. Найти вероятности событий: 1)  «все карты бубны»; 2)  «все карты одной масти»; 3) «извлечен ровно один туз» 4) «извлечен хотя бы один туз».

**Решение.**



Последнюю вероятность можно вычислить значительно проще, если перейти к противоположному событию:  «ни одного туза»  «все нетузы» и  , а  Тогда: 

##### Замечание. Классическая схема может быть формализована и обобщена. Некоторые случайные эксперименты можно описать такой моделью: пространство элементарных исходов состоит из конечного или счетного числа элементарных исходов и каждому исходу приписана некоторая вероятность , причем



(откуда берутся эти , вопрос не ставится). Тогда для любого события *А*

.

Например, такая модель: стрелок с вероятностью 0,7 попадания в каждом выстреле стреляет до первого попадания. Пусть  «стрелок сделал ровно *k* выстрелов». Тогда ; проверка:



Вычислим вероятности некоторых событий:





Формулы для **,** написанные выше, возникнут позже в теме «Основные теоремы тории вероятностей».

Для классической модели **** и ****.

## §5. Геометрическая вероятность

Один из недостатков классической модели – конечность пространства элементарных исходов. В то же время, существуют случайные эксперименты с бесконечным (несчетным) пространством элементарных исходов, в которых, в силу некоторой симметрии и однородности, все исходы равноправны, «одинаково возможны». (Здесь нельзя сказать, что они равновероятны, ибо ****.

Примеры

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Линия электропередач.  *A*  *B*  *a*  *b* | Случайный эксперимент: обрыв ЛЭП одинаково возможен в любой точке.  Какова вероятность обрыва на ? |

2. Случайный эксперимент: стрельба по вращающейся круглой мишени, половина которой черная, а оставшиеся две четверти – белая и красная.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Любая точка равновозможная для попадания.  Какова вероятность попасть в белую область? |

3. Случайный эксперимент: три числа наудачу выбираются из промежутка . Здесь пространство элементарных исходов – это единичный куб ****

|  |  |
| --- | --- |
| *x*  *y*  *z*  1  1  1 | Событие *A*«». Какова его вероятность? |

В этих задачах случайный эксперимент – точка бросается наудачу на пространство элементарных исходов. Пространство элементарных исходов – это линия, фигура или тело. Элементарные исходы – точки. Событие *A* – некоторая часть линии, фигуры или тела. Слово «наудачу» означает, что вероятность брошенной точке попасть в данную часть зависит лишь от меры этой части (длины, площади, объёма) и не зависит от её формы и положения в пространстве элементарных исходов.

#### Определение. Геометрическая вероятность события *A* – это число

,

где  – мера множества (длина *L*, площадь *S*, объём *V*).

Примеры

1. Если линия электропередач (ЛЭП) имеет длину 50 км, то

.

2. 

3. 

**Свойства**

1. 

|  |  |
| --- | --- |
| 2. .  3. Ø | (свойства 2) и 3) обратной силы не имеют) |

4.  (чуть позже используем это свойство).

###### Задача о встрече

|  |  |
| --- | --- |
| 11  10  11  1/3  *x*  *y* | Двое студентов договорились встретится в определенном месте в промежутке времени . Пришедший первым ждет не более  другого, после чего уходит. Время прихода – равновозможно в промежутке времени . Найти вероятность встречи. |

Занумеруем студентов 1-й и 2-й и обозначим *x* и *y* времена их прихода соответственно. Пространство элементарных исходов – это квадрат со сторо-ной . Встреча состоится, если  или , т.е.





###### Задача Бюффона (1777 год, Франция)

Толчок этой задачи дала игра. На пол, выложенный шестиугольными плитками, бросают мотету. И один из игроков выигрывает, если монета целиком окажется внутри шестиугольника, а другой – если пересечет хотя бы одну из линий.

Более известна другая задача. На горизонтальную плоскость, расчерченную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 2*a*, бросают иглу длиной 2*l*  Какова вероятность того, что игла пересечет одну из этих прямых?

|  |  |
| --- | --- |
| 2*a*  *x*  *φ*  *φ* | Положение иглы можно задать двумя числами: *x* – расстояние от центра иглы до ближайшей прямой;  – угол, составленный иглой и этой прямой. |

Пространство элементарных исходов – прямоугольник:



Будем считать, что каждая точка  одинаково возможна. Именно такой смысл вкладывается в слова «иглу бросают наудачу».

Игла пересечет прямую тогда и только тогда, когда выполняется условие: 

|  |  |
| --- | --- |
| Пусть . Тогда | *x*  0  *a* |

Итак, вероятность пересечения 

Эту формулу можно использовать для экспериментального определения числа . Если сделать *n* бросков и получить *m* пересечений, то по одному из свойств геометрической вероятности



Долгое время геометрические вероятности возникали в специально придуманных задачах. Однако, сравнительно недавно задача Бюффона нашла практическое применение, дав толчок к развитию новой науки стереологии (1961 г. – появление термина).

|  |  |
| --- | --- |
|  | Простейшая задача. Имеется некоторая кривая, и требуется найти её длину *L*. Будем считать, что кривая – след *N* бросков иглы длинной  т.е.  Наложим на эту кривую сетку параллельных линий (расстояние между которыми ) и посчитаем число пересечений *m*. |

Тогда частота события «есть пересечение иглы с прямыми» , а геометрическая вероятность  Приравняем эти числа: . Откуда 

Итак,  где *a* – полуширина сетки, *m* – число пересечений прямых с линией.

Для уточнения рассматривают разные *a* и разные направления линий.

|  |  |
| --- | --- |
|  | А как определить площадь некоторой фигуры?  Наложим ту же самую сетку параллельных прямых и находим *L* – сумму длин высекаемых хорд. Тогда . Уже созданы приборы для измерения, например, площади листа. |

Методы стереологии находят применения в геологии, металлургии, медицине, астрономии (восстановление трёхмерных объектов по их двумерным сечениям, или проекциям).

#### Парадокс Бертрана (1889 год, Франция)

Французский математик Ж. Бертран получил парадоксальный  
 результат, решая следующую задачу.

|  |  |
| --- | --- |
| В окружности единичного радиуса **наудачу** проводят хорду. Какова вероятность того, что длина хорды будет больше длины стороны вписанного в круг равностороннего треугольника? | *a*  *h*  *R* |

Бертран нашел три различных **правильных** ответа. Потом другие математики показали, что таких ответов бесконечно много.

**Первый способ**. Случайным образом в данном круге выбираем точку – середину хорды. Это точка определяет единственную хорду.

|  |  |
| --- | --- |
| *h*  *R*  *r* | Для того, чтобы длина хорды была больше , необходимо, чтобы точка попала во вписанный круг. Но  и тогда . Откуда искомая вероятность |

**Второй способ**. Из соображений симметрии можем считать, что одним концом хорды является произвольная фиксированная тачка. Пусть это будет вершина треугольника.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Второй конец выберем случайно с равномерным распределением на окружности. Тогда нужное нам событие осуществится, если второй конец будет на дуге, равной трети всей окружности.  Итого, искомая вероятность |

**Третий способ**.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Выберем случайным образом точку на радиусе окружности и возьмём хорду, перпендикулярную этому радиусу и проходящую через эту точку. Сторона треугольника, перпендикулярная радиусу, делит его пополам и интересующее нас событие происходит, если точка выбрана на той половине радиуса, которая ближе к центру. Итого, |

Различные ответы связаны с нечетким определением «наудачу проводят хорду». Каждый из способов использует свое равномерное распределение – в круге, на окружности, на радиусе.

##### Замечание к трем определениям вероятности

В дальнейшем вероятность события обозначается , независимо от того, как она получена. Но всегда полезно помнить частотную интерпретацию вероятности:  в  испытаний событие *A* происходит.

## §6. Условная вероятность

Всякое событие *A* и его вероятность связана с некоторым пространством элементарных исходов, которое в свою очередь определяется условиями проведения случайного эксперимента. Часто возникают ситуации, когда к этим условиям добавляются дополнительные. Это может привести к изменению вероятности события. Такую новую вероятность называют условной (хотя и исходная вероятность тоже условная).

#### Определение. Вероятность события *B*, вычисленную в предположении, что событие *A* уже наступило, называется условной вероятностью события *B* и обозначают символом .

Пример 1. Имеется 4 карточки черные с обеих сторон, 6 карточек белых (с обеих сторон) и 10 карточек белых с одной стороны, и черных с другой. Одну карточку извлекают наудачу из данных двадцати. Событие *A*  «на карточке есть черный цвет», событие *B*  «на карточке есть белый цвет».

Пример2. Из урны, содержащей 3 красных и 7 белых шаров, наудачу извлекают по одному без возвращения два шара. Пусть *A*  «первый извлеченный шар красный», *B*  «второй извлеченный шар красный» и *С*  «второй извлеченный шар белый». Тогда, очевидно,

.

В простых случайных экспериментах условную вероятность легко вычислить. В более сложных нужна формула, которая легко доказывается, используя любое из трех определений вероятности. Пусть, например, из урны, содержащей *m* красных и *n* белых шаров, наудачу извлекают по одному без возвращения два шара. Тогда:



Ясно, что , т.е. . Отсюда и получено следующее определение.

#### Определение. Условная вероятность события *B* при условии, что событие *A* уже наступило, определяется формулой

****.

|  |  |
| --- | --- |
| **Свойства** |  |

1. .

2. Ø.

3. .

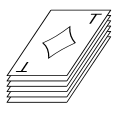
4. 

5. 

**§7. Независимость событий**

Вообще говоря, условная вероятность события не совпадает с безусловной. Грубо говоря, знание того, что *A* произошло, меняет оценку шансов на то, что *B* произойдет.

**Пример.** Случайный эксперимент: одна карта извлекается из колоды

  «дама», ,

 «картинка», , поэтому



 «пика»,  «пиковая дама»,

**Определение 1.** Говорят, что событие *B* **не зависит** от события *A*, если

.

В противном случае говорят, что *B* зависит от *A*.

Пользуясь этим определением, из формулы для условной вероятности получим, что, если *B* не зависит от *A*, то

, ****

и значит

,

т. е., если *B* не зависит от *A*, то и *A* не зависит от *B*: свойство независимости событий **взаимно**.

В дальнейшем (Тема 3, §2) будет доказана формула , которая позволяет доказать, что, если события *А* и *В* независимы, то  . Исходя из этого равенства, можно дать другое определение независимости, равносильное определению 1.

#### Определение 2. Два события называются независимыми, если вероят-ность одного не зависит от того, наступило другое или не наступило.

Можно доказать следствия этих определений независимости:

1) если *A* и *B* независимы, то независимы и пары *A* и ,  и *B*,  и ;

2) пары *A* и Ω, *A* и Ø – независимы;

3) если *A* и *B* отличны от Ω и Ø, то из независимости событий следует их совместимость, а из несовместимости следует зависимость.

В качестве еще одного определения независимости двух событий можно использовать и равенство ****. Именно так определяется независимость при аксиоматическом построении теории вероятностей.

#### Определение 3. Два события *A* и *B* называются независимыми, если

.

#### Определение 4. События называются попарно независи-мыми, если

.

#### Определение 5. События называются независимыми в совокупности, если каждое из них не зависит от любой комбинации других.

Например, три события – независимы в совокупности, если не зависит от,  не зависит от, и, наконец,  не зависит от. Надо заметить, что из попарной независимости событий не следует их независимость в совокупности. Это показывает следующий пример, принадлежащий С.Н. Бернштейну.

Пример

|  |  |
| --- | --- |
|  | Три грани тетраэдра окрашены в красный, зеленый и синий цвета, а одна – во все три цвета.  Случайный эксперимент: бросок тетраэдра на плоскость. |

События: *К* ****– «тетраэдр упал на грань, где есть красный цвет»,

*З* **** «тетраэдр упал на грань, где есть зеленый цвет»,

*С* **** «тетраэдр упал на грань, где есть синий цвет».



 и , т. е. события попарно независимы. Однако эти события не являются независимыми в совокупности, так как, например, .

##### Замечание 1. Понятия независимости и зависимости в теории вероят-ностей отличаются от обыденного смысла этих слов.

##### Замечание 2 (чрезвычайно важное). Проверка независимости (по любому из трёх определений), особенно для трёх и более событий весьма затруднительна. Поэтому в дальнейшем: если случайные эксперименты проводятся в физически независимых условиях, то события с ними связанные, являются независимым

Во многих задачах независимость случайных экспериментов будет явно указываться или предполагаться по умолчанию.

*«Стрелок сделал три независимых выстрела».*

*«Шары извлекаются по одному с возвращением».*

*«Шары наудачу распределяются по ящикам».*

##### Замечание 3. Аксиоматика теории вероятностей, разработанная А. Н. Колмогоровым, дала возможность рассматривать теорию вероятностей, как часть теории меры, которая является частью теории множеств. И отличительной чертой теории вероятностей в теории меры является использование понятия независимости. Для теории вероятностей – это фундаментальное понятие. Правда, в такой части теории вероятностей, как теория случайных процессов, в основном рассматривают зависимые события и величины.