# ***ТЕМА* 3 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

Мы уже познакомились с тремя способами определения вероятности события. Однако, не эти способы являются основными задачами теории вероятностей: их применение не всегда удобно и возможно. Например, провели проверку 100 деталей, и нашли P(брак) = 0,1. Но, если требуется найти вероятность того, что среди 10 деталей хотя бы одна бракованная, то снова проводить испытания теперь уже по 10 деталей? В этом нет необходимости. Ибо кроме прямых методов определения вероятности, есть и косвенные методы, которые позволяют по вероятностям одних событий находить вероятности других. Эти методы базируются на основных теоремах теории вероятностей и алгебре событий.

## §1. Теоремы умножения

Позволяют находить вероятности совместного наступления событий. Являются прямым следствием формулы для вычисления условной вероятности события.

**Теорема 1**. Вероятность совместного наступления двух произвольных событий можно вычислить по любой из формул:

,

.

Теорема легко обобщается на произведение любого числа событий. Например, для трех событий она имеет вид:

.

**Пример 1.** Случайный эксперимент: из урны, содержащей 3 белых, 5 черных и 2 красных шара, извлекают **по одному** 2 шараНайти вероятности событий: 1)  «извлеченные шары черные»; 2)  «только второй извлеченный шар белый».

**Решение.** Для событий имеем:  «1йч и 2йч»,  «1йч и 2йб». Поэтому





Если излечено 3 шара, то, например, для последовательности цветов  
«белый, черный, красный» получим



#### Теорема 2. Вероятность совместного наступления независимых (в сово-купности) событий равна произведению их вероятностей.

**Пример 2.** Из урны с тем же набором шаров, что и в предыдущем примере, извлекают 3 шара **по одному с возвращением**. Тогда



##### Замечание. Вероятности событий, рассмотренных в этих примерах, можно найти и по формуле классической вероятности, но использование теоремы умножения упрощает вычисления. Кроме того, существуют ситуации, в которых классическая вероятность «не работает».

**Пример 3.** Случайный эксперимент: стрельба до первого попадания. По умолчанию выстрелы считаются независимыми. Введем обозначения, которые будем использовать и в дальнейшем:  «попадание в -ом выстреле,  И пусть вероятность попадания в каждом выстреле одна и та же и равна 0,7 (вероятность промаха равна 0,3). Найти вероятности событий:  «сделано ровно три выстрела»;  «сделано не менее трех выстрелов».

**Решение.** Так как , то  Для события *С* можно дать другую формулировку  «в первых двух выстрелах промахи» =  и тогда 

## §2. Теоремы сложения

Теоремы умножения позволяют находить вероятности наступления хотя бы одного события.

#### Теорема 1. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей:

 Ø  .

Для любого из трех определений эту теорему можно доказать. В аксиоматике Колмогорова – это одна из аксиом.

Эта теорема сложения остается верной для любого количества попарно несовместных событий.

Пример 1. Случайный эксперимент: из урны, содержащей 3 белых, 5 черных и 7 красных шара, извлекают три шара. Событие  «все извлечен- ные шары одного цвета» есть сумма трех несовместных в совокупности событий: «три белых», «три черных» и «три красных». Вероятность каждого события-слагаемого можно найти по классическому определению или по теореме умножения: для этих событий-слагаемых не важно, как извлекаются шары – сразу три или по одному без возвращения. Получим:



Пример 2. Случайный эксперимент: два (независимых) выстрела в мишень с вероятностью попадания в каждом 0,7. Для события  «ровно одно попадание» имеем:



А какова, например, вероятность трех попаданий в пяти выстрелах? Или вероятность пяти промахов в десяти выстрелах? В дальнейшем будет дана формула, отвечающая на подобные вопросы.

#### Теорема 2. Вероятности противоположных событий и связаны соотношением

.

Действительно,



 Ø  .

Пример 3. Случайный эксперимент: из колоды карт (36 листов) извлекают карты по одной с возвращением да первого туза.





**Следствия теоремы 1:**

1) если , то , причем слагаемые несовместны, поэтому ;

2) , то 

3) если  Ø , то 

4) .

#### Теорема 3. Для двух произвольных событий имеет место формула

.

**Доказательство.** Сумму двух произвольных событий можно предста-вить как сумму несовместных событий и применить теорему 1:

.

Но  так как . Поэтому:



##### Замечание. Эта теорема сложения справедлива лишь для двух событий. Для суммы трех событий можно так:



##### Замечание. Чтобы использовать эту теорему для зависимых слагаемых, необходимо знать не только безусловные вероятности событий-слагаемых, но и некоторые условные вероятности.

Пример 4. Случайный эксперимент: два зависимых выстрела в мишень.

Используем обозначения задачи 3 из §1:  «попадание в -ом выстреле,  Пусть известны вероятности



Тогда из представления  (слагаемые несовместны) можно найти вероятность попадания во втором выстреле:



Теперь можно находить вероятности различных событий, например:





Имеется обобщение третьей теоремы сложения на любое число слагаемых – так называемая формула включений и исключений.

#### Теорема 4. Для произвольных событий справедлива следующая формула:



###### Задача о совпадениях

На отдельных карточках написаны числа . Карточки наудачу расположены в ряд. Какова вероятность *P* того, что, хотя бы одно из чисел окажется на месте с таким же номером?

У этой задачи есть шуточный вариант. Некто написал  писем, но адреса на конвертах написал в случайном порядке. Найти вероятность того, что, хотя бы одно письмо будет получено своим адресатом.

**Решение**. Все  карточек можно расположить  способами. Если событие  « число  окажется на -ом месте», то необходимо найти



Находим вероятности событий, которые фигурируют в формуле включений и исключений







………………………………………….



В сумме имеется  равных слагаемых, в сумме имеется слагаемых, в сумме   слагаемых и т.д. Имеем для искомой вероятности:

 .

Из математического анализа известно, что ряд Маклорена для показательной функции  имеет вид

 и 

Нетрудно заметить, что искомая вероятность – это частичная сумма ряда для .

Итак, для вероятности того, что, хотя бы одно из чисел окажется на месте с таким же номером, имеем приближенное равенство . Рассмотренный выше ряд – знакочередующийся, поэтому легко оценить погрешность: 

**Теорема 5.** Вероятность появления хотя бы одного из независимых (в совокупности) событий  можно вычислить по формуле



Это очевидное следствие формулы де Моргана  и независимости событий.

Особенно простой вид эта формула принимает для событий с одинаковой вероятностью.

**Теорема 6.** Если  независимые (в совокупности) и такие, что  то



**Пример 5.** Известно, что в течении одного года работы выходят из строя 70% электрических ламп. В начале года в аудитории вкрутили 4 новые лампы. Найти вероятность того, что в течении года в аудитории будет свет.

**Решение.**  Введем обозначение для событий:  «-я лампа годная в течение года», Тогда

хотя бы одна лампа годная в течение года



Как понимать ответ? Если такую процедуру провели в 100 аудиториях, то  в 76 со светом все в порядке. Или, если такую процедуру в данной аудитории проводить 10 лет, то 7-8 лет будем со светом.

Полученная в теореме 6 формула позволяет решать и так называемые обратные задачи.

###### Задача 1.

Вероятность 0,76 считают малой, как её повысить при том же числе ламп ? Повысить надежность ламп .

Если мы хотим, чтобы вероятность «быть при свете» была, например, не меньше 0,99, то какова должна быть ?



Ответ: качество ламп должно быть таково, чтобы не менее 68% ламп безотказно работали в течение года.

###### Задача 2.

Чтобы получить желаемое, сколько ламп надежности 0,3 надо вкрутить?



Ответ: не менее13 ламп.

###### Задача Де Мере.

Сколько раз нужно бросить пару костей, чтобы вероятность хотя бы одного появления «66» была > 0,5?



Ответ: число бросков пары костей должно быть не менее 25.

## §3. Формула полной вероятности и формулы Байеса

В одной из задач мы находили , представив , как сумму несовместных событий .

Этот способ имеет обобщения. Но сначала типовая задача.

Случайный эксперимент:

|  |  |
| --- | --- |
| 1й  2й | (2й ч.) – ?  Событие «2й черный» зависит от того, какой шар был извлечен из первой урны и переложен во вторую. Относительно цвета первого шара можно сделать некоторое предположения и это поможет решить задачу. |

#### Теорема 1. Если события образуют полную группу, то для любого события имеет место равенство



Это равенство называют **формулой полной вероятности**.

**Доказательство**. То, что ****образуют полную группу**,** означает**:** 1) **** и 2) ****Ø Поэтому**,** причем слагаемые в этой сумме несовместны. Применяя теорему сложения и теорему умножения, получим:



что и требовалось доказать.

События  называют гипотезами. Это те предположения о неизвестных условиях случайного эксперимента, которые влияют на его исход.

Пример 1. Из первой урны, содержащей 2 красных и 3 белых шара, наудачу перекладывают два шара во вторую урну, содержащую 5 красных и   
3 белых шара. После этого из второй урны извлекают один шар. Найти вероятность того, что этот шар красный.

**Решение.** О двух переложенных шарах можно сделать предположения:

 «оба красных»,  «оба белых»,  «1 красный и 1 белый».  
Найдем вероятности этих гипотез и соответствующие условные вероятности события  «из второй урны извлечен красный шар»:







Формулой полной вероятности дает искомую вероятность:



Замечание. Вычислив вероятности гипотез, имеет смысл проверить равенство

Пример 2. Три станка штампуют однотипные детали, которые поступают в общий бункер сборочного цеха. Производительности станков соотносятся, как 2:3:5. Брак в продукции первого станка составляет 15%, в продукции второго – 10% и третьего – 5%. Каков процент брака в общем бункере?

**Решение.**  «деталь, взятая из бункера, бракованная». Относительно этой детали можно выдвинуть такие гипотезы:  «деталь из продукции -го станка»,  Для вероятностей этих гипотез можно составить такую систему уравнений:



Решив эту систему, получим:

  

Условные вероятности события  даны в условиях задачи в виде процентов:

  

По формуле полной вероятности находим ответ на поставленный вопрос:

 –

в общем бункере 8,5% брака.

У этой задачи есть интересное продолжение. Но сначала приведем простую задачу и сформулируем и докажем важную теорему.

###### Задача. Имеется 4 урны с таким содержанием шаров:

1я урна – 0 белых и 3 черных, 2я урна – 1 белый и 2 черных,

3я урна – 2 белых и 1 черный, 4я урна – 3 белых и 0 черных.

Из наудачу выбранной урны (гипотезы:  «выбрана -я урна», ) наудачу извлекают шар. Если этот шар черный, то что можно сказать о выбранной урне? Например, сразу ясно, что 

#### Теорема 2. Пусть события образуют полную группу событий, причем . Тогда для любого события ненулевой вероятности имеют место равенства



Эти формулы называют **формулами Байеса.**

Доказательство следует из определения условной вероятности, первой теоремы умножения и формулы полной вероятности:



Вернемся к задаче со станками. Пусть бракованные детали складируются в отдельный ящик. Какова среди этих деталей доля каждого станка?







Рекомендуемая проверка: 

Если это не станки, а некие производители, на которых надо накладывать штрафные санкции за брак, то полученные вероятности дают соотношение этих санкций.

Формулы Байеса используются в задачах медицинской диагностики, в решении задач по распознаванию образов, построения текстовых анализаторов.