# ***ТЕМА 4* ПОВТОРЕНИЕ ОПЫТОВ**

## §1. Формула Бернулли

Выражение  мы читаем «вероятность того, что в случайном эксперименте событие  наступит». Т.е. это выражение имеет отношение к **одному** случайному эксперименту. Однако, это число приобретает смысл лишь при повторении случайного эксперимента.

Рассмотрим следующую простейшую схему повторения опытов, которая называется схемой Бернулли. В каждом из **независимых** испытаний возможны два исхода  и , вероятности которых не меняются от испытания к испытанию: 

Существуют две реализации этой схемы.

1. Случайный эксперимент **повторяется** в неизменных условиях  раз.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Событие  «извлеченный шар белый», событие  «среди  извлеченных (с возвращением) шаров ровно  белых»,  ? |

2. Проводится  **независимых** случайных экспериментов, в каждом из которых может появиться событие .

|  |  |
| --- | --- |
|  | Событие «извлеченный шар белый», событие  =«среди  извлеченных шаров ровно  белых»,  ? |

На поставленный вопрос дает ответ формула Я. Бернулли (XVII в.).

В каждой реализации повторения опытов, каждый случайный эксперимент описывается пространством элементарных исходов : «1» соответствует появлению события , «0» – соответствует появлению события ..

Для : с вероятностями  соответственно.

Для  с вероятнос-тями  соответственно.

В общем случае  испытаний пространство элементарных исходов – это  – множество  все-возможных -значных двоичных чисел. Если в таком числе  единиц и  нулей, то вероятность такого исхода  (испытания независимы, применяем вторую теорему умножения). Чтобы ответить на ранее поставленный вопрос, надо просто выяснить, из скольких элементарных событий состоит событие . Ответ прост: сколькими способами можно из  позиций выбрать  позиций для написания «1»? Это число сочетаний.

#### Теорема 1. Вероятность того, что в независимых испытаниях событие появится ровно раз, если в каждом из испытаний , вычисляется по формуле

,

которая носит имя Якоба Бернулли (XVII век, Швейцария).

Частные случаи этой формулы нам уже встречались:







##### Замечание об обозначении для вероятности:

в *n* независимых испытаниях событие *A* произойдет не менее 

раз и не более  раз.

Пример 1. Из всей продукции станка, брак в которой составляет 20%, наудачу отбирают 5 деталей. Найти вероятность событий:  – среди отобранных ровно 1 брак;  – среди отобранных ровно 3 стандартных;  – среди отобранных по крайней мере 3 стандартных.

**Решение.** Схема Бернулли: испытание – проверка детали, интересующее нас событие **** «деталь бракованная»,  Применяя формулу Бернулли, получим:









Как понимать, например, последний результат? Если детали наудачу раскладывают в коробки по пять штук, и коробку, в которой по крайней мере три стандартных, считают «хорошей», то в большой массе коробок 94% «хороших».

Пример 2. Вероятность попадания в цель в каждом выстреле Для уничтожения цели необходимы 2 попадания. Батарея последовательно обстреливает 5 целей, делая по каждой не более 3-х выстрелов. Число уничтоженных целей = оценка стрельбы. Какова вероятность того, что батарея сдаст экзамен?

**Решение.** Схема Бернулли: испытание – это обстрел одной цели; .

Нас интересует событие **** «цель уничтожена». Обозначим**** «попада-ниев в цель в -ом выстреле». Вероятность события****





Теперь можно найти вероятность сдачи экзамена, т.е. вероятность уничтожения не менее трех целей из пяти:





## §2. Два обобщения схемы Бернулли

### І Случай более чем 2-х исходов (полиномиальная схема)

Пусть в каждом из  испытаний может поступить одно из событий *A*1, *A*2, …, , которые образуют полную группу, причем в каждом из испытаний  и . Вероятность сложного события, состоящего в том, что событие **** в  испытаниях произойдет  раз, **** обозначим символом . Имеет место следующая теорема.

#### Теорема 2.



Пример 1. Семь шаров наудачу размещаются по четырем ящикам. Найти вероятность того, что в первом ящике будет 4 шара, во втором – 2, в четвертом – 1шар.

**Решение.** Схема: испытание – размещение одного шара, ; событие**** «шар попал в -йящик»,  Применяем теорему с  



Пример 2. В одной игре можно выиграть 10, 6, 2, 0 очков с вероятнос-тями 0,1; 0,2; 0,4; 0,3 соответственно. Какова вероятность выиграть 20 очков в пяти играх?

**Решение.** Введем обозначение для события **** «выиграть в одной игре  очков»,  Вероятности этих событий  Рассмотрим варианты выигрыша 20 очков в 5-ти играх:

Искомая вероятность . Каждую из вероятностей можно вычислить по полиномиальной формуле. Например:



## ІІ Случай различных вероятностей

Пусть производится  независимых испытаний, в каждом из которых может наступить интересующее нас событие **** причем в -ом испытании  Принимаем без доказательства следующую теорему.

**Теорема 3.** Вероятность **** того, что в  испытаниях событие ****наступит  раз, есть коэффициент, стоящий при **** в разложении так называемой производящей функции**:**

****

Или **** (известная из математического анализа связь коэффициентов многочлена с его производными в нуле).

Пример 3. Стрелок делает 5 независимых выстрелов по мишени, причем в трех выстрелах вероятности попадания равны 0,9, а в двух – 0,7.

Производящая функция имеет вид:

****

Коэффициент при ****: **** этот коэффициент есть не что иное, как **** – вероятность трех попаданий в пяти выстрелах.

## §3. Наивероятнейшее число появления события

## в схеме Бернулли

Исследуем поведение вероятности **** в схеме Бернулли при изменении  от 0 до .

****

Пока правая часть больше единицы вероятность **** возрастает:

****

Учитывая, что , получим неравенства:

если ****

если ****

Если , то наивероятнейшее число  одно, удовлетворяющее двойному неравенству  Если же , то таких чисел два: 

Можно сказать: наивероятнейшее число  появлений события **** в  испытаниях удовлетворяет двойному неравенству

.

Пример. Из урны, содержащей три шара, один из которых красный, наудачу извлекают по одному с возвращением 50 шаров.

Если событие **** «извлечение красного шара», то **** Наивероятнейшее число извлеченных красных шаров удовлетворяет двойному неравенству: , т.е.  и 

Вычислим эту наибольшую вероятность

****

## §4. Приближенные формулы для схемы Бернулли

Если  велико или одновременно  велико и  мало, формула Бернулли требует больших вычислений, особенно для .

### I Формула Пуассона (закон редких явлений).

Обозначим  и перепишем **** заменив  на 

****.

Чтобы получить приближенную формулу, найдем **** при условии, что :

****

****(2й  замечательный предел).

#### Теорема 1 (Пуассон,1837 год, Франция). Если велико, а мало, имеет место прибли-женная формула

 где .

Формула дает хорошее приближение для  и 

Пример 1. При транспортировке изделий 2% приходят в негодность. Завод отправил потребителю 200 изделий. Найти вероятности следующих событий:

**** «ровно 5 изделий придут в негодность»;

**** «не более 3-х изделий придут в негодность»;

**** «хотя бы 1 изделие придет в негодность».

**Решение.** Транспортировка одного изделия – испытание, , в каждом испытании событие  «изделие портится» имеет вероятность. Тогда  и

****

****

#### II Обобщенная формула Пуассона

Если в -ом испытании  то формула остается верной с ****, если только все  малы, а  велико.

Пример 2. Некоторое устройство состоит из 500 элементов, выходящих из строя независимо друг от друга. Работая в разных условиях, имеют разные вероятности выхода из строя за некоторое время : 50 элементов – , 150 элементов – 0,005, 300 элементов – 0,002.

Найдем **** Тогда:

****(отказал хотя бы 1 элемент) ****

****(не более 3х элементов отказали)****

****.

### ІІI Локальная теорема Лапласа

Частный случай (для ) был найден Муавром (1730 г.), а Лаплас доказал общий случай (1812 г., Франция).

#### Теорема 2. Пусть постоянна в каждом испытании и отлична от 0 и 1. Тогда для вероятности того, что событие в независимых испытаниях появится раз, имеет место приближенная формула

****

где  а ****функция Гаусса, имеет вид ****

Для функция Гаусса имеются таблицы значений. Надо только знать два свойства: 1) ****; 2) **** для больших значений .

Пример 3. Брак в продукции некоторого станка составляет 10%. Детали наудачу фасуются по 100 штук в коробке. Найти вероятность того, что в коробке будет 13 бракованных деталей.

Решение. Схема: испытание – упаковка детали в коробку, событие   
 «деталь бракованная», ,  Предварительные вычисления:  Точная формула для искомой вероятности

****

Приближенное значение:

****

Практический вывод: около 8% коробок будут содержать по 13 бракованных деталей.

**Замечание.** Локальная формула, как и приведенная ниже интегральная, даёт удовлетворительное приближение при ****, причем, чем ближе 

к , тем точнее формула. При значениях  близких к 0 или 1 формула дает большую погрешность.

### IV Интегральная теорема Лапласа (ИФЛ)

#### Теорема 3. В предположениях теоремы 2, для вероятности того, что событие в независимых испытаниях произойдет от до раз, имеет место приближенная формула

****

Здесь ** –** функция Лапласа. Для нее также есть таблицы. Свойства: 1) ; 2)  для больших .

##### Замечание. В литературе встречаются и другие функции, носящие имя Лапласа. Например,

****

**** (функция ошибок).

Между ними есть связи:  и . Это надо иметь в виду при использовании таблиц.

Пример 4. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что в коробке будет не более 15 деталей с браком.

**Решение.**

****

В 95% коробок число бракованных деталей не превосходит 15 штук.

### V Некоторые приложения ИФЛ: обратные задачи

Пример 5. В условиях предыдущих задач число бракованных деталей в коробке теоретически может быть от 0 до 100. Однако, практически какова верхняя грань числа бракованных? Ответ зависит от той вероятноcти, которую мы считаем близкой к 1: 0,9; 0,95; 0,99.

Пусть эта вероятность 0,99. Найти  из условия:

****

т.е. для  имеем:  Используя таблицу значений функции Лапласа в обратном направлении и тот факт, что эта функция возрастающая, получим:



Вывод: в 99% коробок число бракованных деталей не превосходит 17 штук. В среднем в одной коробке из сотни число бракованных превосходит этот уровень.

Пример 6. Всхожесть семян некоторой сельскохозяйственной культуры равна 80%. Сколько надо посеять семян, чтобы можно было ожидать с вероятностью не менее 0,95, что взойдет хотя бы 100 семян?

**Решение.** Испытание – это наблюдение за посеянным семенем. В каждом испытании может появиться событие **** «семя проросло**»** с вероятностью **** Если считать, что семена прорастают или не прорастают независимо одно от другого, то будем находиться в условиях схемы Бернулли. Требуется найти число необходимых испытаний **** из условия ****.

Применяя ИФЛ, получим:

****

или после упрощения

****

Так как ****, то **** и  Значит, для определения **** имеем неравенство:



Функции Лапласа возрастающая, поэтому **** Решив это неравенство, получим для **** условие ****, то есть ****.

Итак, если посеять хотя бы 135 семян, то проросших будет 100 или больше с надежностью 95%. Как понимать «надежность»? Если я еженедельно в течении 2-х лет (≈ 100 недель) провожу такие посевы, то только в 5 посевах я буду иметь проросших семян меньше, чем хотелось. Много это или мало, решать Вам.

### VI Одно следствие ИФЛ

Пусть в **** испытаниях Бернулли событие **** наступило **** раз. Тогда отношение **** – это частота события . Уже говорилось, что при больших ****. Но какова точность этого приближенного равенства? Какова вероятность того, что частота отклонится от вероятности не более чем на ****:

****

Запишем неравенство с модулем иначе:

**.**

Искомая вероятность – это **** где ****.

Оценим эту вероятность, используя ИФЛ:

****

Итак, вероятность отклонения частоты события от его вероятности не больше, чем на оценивается по формуле:

****

Пример 7. В продукции некоторого станка доля брака составляет 10%. Наудачу отобрано 400 деталей. Какова вероятность того, что частота появле-ния брака отклонится от вероятности брака не более чем на 0,02.

**Решение.** Имеем: **** Тогдаискомая вероятность равна ****

Если имеем большое количество выборок по 400 деталей, то в 82% случаев отклонение частоты от вероятности не будет больше, чем 0,02.

Вероятность брака 0,1 – это утверждение производителя. Как его прове-рить? Исследовать 400 деталей и найти реальное отклонение частоты от 0,1. Если оно не превосходит 0,02, то нет оснований сомневаться. А если оно превосходит этот уровень? Вероятность такого события 1–0,82=0,18. Это вероятность Вашей ошибки, если поверите производителю.

Замечание. Неравенство , для вероятности которого полу-чена формула, можно понимать таким образом: 

Если мы хотим оценить неизвестную вероятность **** с точностью **** и надежностью ****, то сколько наблюдений надо провести? Достаточно решить неравенство

****

Обозначим через **** корень уравнения **** (его легко найти по таблице значений функции Лапласа). Тогда для числа наблюдений**** получим

****

Однако в этой формуле участвует неизвестная вероятность ****. Это можно обойти следующим образом:

для ****

Заменим в полученной формуле **** на 0,5, тем самым только увеличим оценку****:

****

Пусть, например, **** тогда **** и получаем: ****.

Если хотим оценить по частоте вероятность с точностью ****, то необходимо провести 10 тысяч испытаний.

Если мы проводим опрос населения по некоторому вопросу, с бинарным ответом («да-нет»), то чтобы получить оценку с точностью до 1%, надо опросить 10 тысяч человек. Опрос 100 человек дает погрешность ****. Когда смотрите результаты опроса, интересуйтесь числом опрошенных.

Конечно, оценка **** очень грубая, её можно использовать лишь при полном отсутствии информации о неизвестной вероятности **.** Если, например, **** или ****, то **** и для **** а **** получим ****