# ***ТЕМА* 5. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ**

## §1. Два основных типа случайных величин

В предыдущих лекциях мы занимались вычислением вероятностей отдельных событий, связанных с теми или иными случайными экспериментами. Однако, чаще всего случайные эксперименты проводят с целью что-то измерить или что-то подсчитать.

Принимаю экзамен – подсчитываю число «двоек».

Проверяю на годность детали – считаю число бракованных.

Включил компьютер – измеряю время до 1го сбоя.

#### Определение 1. Случайная величина(СВ) – это величина, которая в результате случайного эксперимента принимает то или иное определенное значение из некоторого множества возможных значений (МВЗ) наперед неизвестное и зависящее от случайных причин.

Это определение из классической теории вероятностей. В аксиоматике Колмогорова СВ – это некая функция, определенная на пространстве элементарных исходов: каждому элементарному исходу она ставит в соответствие определенное число.

Случайные величины обозначаются прописными латинскими буквами *X*, *Y*, *Z*, а их возможные значения – соответствующими строчными *x*, *y*, *z* (с индексами или без).

Запись  означает событие: «случайная величина *X* в результате СЭ приняла значение *x*». Аналогично и запись .

Рассмотрим характерные примеры СВ.

1. СЭ: извлечение 4х карт из колоды.

СВ *X* – число «пик» среди извлеченных; МВЗ: 0, 1, 2, 3, 4.

2. СЭ: наблюдение за работой АТС в течении дня.

СВ *Y* – число вызовов; МВЗ: 0, 1, 2, …, *n*, … .

3. СЭ: испытание прибора на надежность.

СВ *T* – время безотказной работы; МВЗ: [0; + ∞).

4. СЭ – стрельба по круглой мишени.

СВ *Z* – расстояние от точки попадания до центра; МВЗ: отрезок [0; *R*].

Множество возможных значений случайной величины может быть:  
1) конечным или счетным: *X*, *Y*; 2) некоторым промежутком, конечным или бесконечным: *T*, *Z*. Вид МВЗ и определяет тип СВ.

**Определение 2.** СВ *X* называется **дискретной (ДСВ)**, если её возможные значения образуют некоторую последовательность чисел   
конечную или бесконечную.

#### Определение 3. СВ *X* называется непрерывной (НСВ), если она может принимать любые значения из некоторого промежутка, конечного или бес-конечного.(В дальнейшем это определение будет уточнено.)

## §2. Закон распределения (вероятностей) ДСВ

Очевидно, что простое указание множества возможных значенийслучайной величины не определяет ее полностью. Кроме перечисления возможных значений, необходимо указать, как часто СВ принимает эти значения, т. е. указать вероятности событий вида .

#### Определение 1 (общее для ДСВ и НСВ). Любое правило, которое устанавливает соответствие между возможными значениями СВ и вероятнос-тями принять эти значения, называют законом распределения вероятностей (ЗРВ) случайной величины.

Существуют различные формы закона распределения: табличная, аналитические, графические. В этом параграфе рассмотрим только дискретные величины. Для ДСВ наиболее употребительной является табличная форма ЗРВ.

#### Определение 2. Рядом распределения ДСВ называют таблицу вида

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *x*1 | *x*2 | … | *xn* |
| P | *p*1 | *p*2 | … | *pn* |

В верхней строке указаны (в возрастающем порядке) все различные возможные значения СВ *X*, а в нижней – соответствующие этим значениям вероятности: причем 

Пример 1.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| СЭ: | 1  2  3  1  4  1 | СВ *X* – число белых среди извлеченных. Возможные значения: 0, 1, 2. Найдем, используя теоремы и умножения и сложения, вероятности этих значений. |

,



.

Ряд распределения имеет вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 | Проверка: . |
| P | 0,32 | 0,56 | 0,12 |

Пример 2. СЭ: стрельба до 1гопопадания, но не более 3х выстрелов, с вероятностью попадания в каждом из независимых выстрелов . ДСВ число промахов; МВЗ – 0, 1, 2, 3.

;

;

;

.

Графическая форма ЗРВ ДСВ – это так называемый многоугольник распределения: точки  последовательно соединяем отрезками прямых.

Иногда удобной оказывается механическая интерпретация ряда распределения: единичная масса распределена по точкам оси *Ox* таким образом, что в точке с координатой  сосредоточена масса .

Еще одну форму ЗРВ введем, рассмотрев пример.

Пример 3. Вероятность появления события *A* в одном СЭ равна *p*. Проводится ряд независимых испытаний, которые продолжаются до 1го появления события *A*, после чего испытания прекращаются. СВ *X* – число произведенных испытаний.

Значения СВ *X*: 1, 2, 3, …, *n*, … (теоретически, они не ограничены). Вычислим вероятности этих значений:

;

, здесь ;

…….



Это пример аналитической формы закона распределения, когда вероятность  есть функция значения .В этом случае нет необходимости строить ряд распределения.

Это пример одного из основных дискретных распределений – геометри-ческого (вероятности образуют геометрическую прогрессию):

.

С другими главными дискретными распределениями вероятностей ознакомимся позже.

## §3. Числовые характеристики ДСВ

### І Общие понятия (для обоих типов СВ)

Закон распределения в той или иной форме полностью характеризует СВ с вероятностной точки зрения. Зная его можно ответить на любой вопрос, связанный с СВ.

Но кроме такого полного описания СВ, в теории вероятностей широко используется и неполные описания с помощью так называемых **числовых характеристик**.

#### Определение 1. Числовые характеристики случайной величины – это числа (неслучайные!), которые в сжатой форме выражают наиболее сущест-венные особенности СВ.

Можно указать, по крайней мере три причины, объясняющие необходимость этих характеристик.

1. Для решения многих практических задач не обязательно знать закон распределения, а достаточно знать одну-две характеристики.

2. Все важнейшие распределения (и дискретные, и непрерывные) зависят от некоторых параметров, которые в свою очередь выражаются через числовые характеристики. В таких случаях эти характеристики полностью определяют ЗРВ.

3. Закон распределения СВ чаще всего неизвестен, и для его даже приближенного определения требуется большой объем испытаний. В то же время числовые характеристики из наблюдений находятся (приближенно!) достаточно просто.

Основные два класса числовых характеристик – это характеристики положения и характеристики рассеивания.

### ІІ Математическое ожидание ДСВ

К характеристикам положения относятся математическое ожидание, мода, медиана. Эти характеристики характеризуют положение значений СВ на числовой оси, указывают некое среднее значение СВ на числовой оси, возле которого группируются все возможные значения СВ.

Рассмотрим две лотереи со случайными выигрышами *X* и *Y*:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 10 | 300 |  | *Y* | 0 | 30 | 100 |
| P | 0,7 | 0,2 | 0,1 |  | P | 0,6 | 0,1 | 0,3 |

Билеты какой предпочтительнее покупать? Ответ на такой вопрос легко  
получить с помощью математического ожидания.

Рассмотрим ДСВ, заданную рядом распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *x*1 | *x*2 | … | *xn* |
| P | *p*1 | *p*2 | … | *pn* |

#### Определение 2. Математическим ожиданием (МО) или иначе средним значением ДСВ *X* называют число, обозначаемое M(*X*), и вычисляемое по формуле:

.

##### Замечание 1. Если МВЗ *X* счётное, то дополнительно требуется, чтобы ряд сходился абсолютно. В противном случае считается, что ДСВ не имеет МО. Например, если , то

 –

ряд сходится, но условно, следовательно, МО не существует.

**Смысл**. Чтобы выяснить смысл МО проведем *N* наблюдений над СВ *X* и пусть значение *x*1 онапринимает *N*1 раз, *x*2 – *N*2 раз, и т. д., *xn* – *Nn*раз, . Для частот событий  имеем:

.

Найдём среднее арифметическое тех значений, которые принимала СВ:



Итак, вероятностный смысл МО следующий: математическое ожидание случайной величины *Х* приближенно равно среднему арифметическому   
значений СВ, которые она приняла в достаточно большой серии наблюдений.

Если выигрыш *X* в некоторой игре имеет распределение

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | –10 | 0 | 20 | , |
| P | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

то $. Это означает, что **в среднем** (при большом числе игр!) на каждую игру ожидаемый выигрыш – 1$. Как и понятие вероятности события, понятие МО приобретает смысл лишь при многократных наблюдениях над СВ.

Мы рассмотрели ДСВ, но тот же вывод справедлив и для НСВ.

**Свойства математического ожидания**

1. M(*X*) – неслучайное число, имеющее размерность СВ.

|  |  |
| --- | --- |
| *X* | C |
| P | 1 |

2. min *X* ≤ M(*X*) ≤ max *X*.

3. M(*C*) = *C*: *X* = C – частный случай СВ.

4. M(*C*·*X*) = *C*·M(*X*).

5. M(*X* + *Y*) = M(*X*) + M(*Y*).

6. Если *X* и *Y* независимы, то M(*X*·*Y*) = M(*X*)·M(*Y*).

Строгие определения сумм и произведений случайных величин дадим позже. А независимость случайных величин понимаем, как связь с независимыми случайными экспериментами. Две СВ называют независимым, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения приняла другая.

7. Если ДСВ понимать, как распределение единичной массы, то M(*X*) – центр масс. Отсюда другое название МО – центр распределения.

8. Для любой функции  имеем:



(если только ряд сходится абсолютно); например .

Проверим на примере свойство 6. Сначала назовем произведением двух СВ *X* и *Y* такую СВ *Z*, значения которой – это все возможные попарные произведения значений *X* и *Y*, а вероятности (в случае независимости *X* и *Y*) – это произведения соответствующих вероятностей. Некоторые произведения возможных значений могут совпадать, тогда используем теорему сложения.

Пусть случайные величины имеют такие ряды распределения:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | –1 | 0 | 1 |  | *Y* | –1 | 1 |  |
| P | 0,2 | 0,3 | 0,5 |  | P | 0,6 | 0,4 |  |

Их математические ожидания:



Возможные значения СВ  Найдем их вероятности:











Проверка:  Итак, СВ *Z* имеет такой ряд распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Z* | –1 | 0 | 1 |  |  |
| P | 0,38 | 0,3 | 0,32 |  |

### Вычисляем математическое ожидание и убеждаемся в справедливости свойства 6:



### ІІІ Дисперсия

Сравним две случайные величины:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | –0,1 | 0,1 | и | *Y* | –10 | 10 |
| P | 0,5 | 0,5 | P | 0,5 | 0,5 |

Обе имеют нулевые МО. Но очевидно, что существенно различаются: у одной возможные значения близки к МО, а у другой – далеки. Таким образом, математическое ожидание не полностью характеризует случайную величину. Необходимы характеристики, позволяющие оценить разброс значений СВ вокруг МО. Хороший пример – стрельба по цели: необходимо оценивать кучность стрельбы.

Наряду со случайной величиной *X* рассмотрим т.н. центрированную случайную величину  отклонение СВ от её МО.

Может показаться, что характеристикой рассеивания может служить среднее отклонение, т.е. , однако, в силу свойств МО:



Это свойство отклонения объясняется просто: одни отклонения положи-тельные, другие отрицательные, в результате усреднения они взаимно погашаются. Можно, конечно, заменить отклонения их модулями

.

Однако, это иногда приводит к серьезным затруднениям (напомню, что, например, модуль недифференцируем). Поэтому чаще всего усредняют квадрат отклонения.

#### Определение 3. Дисперсией случайной величины (любого типа!) назы-вают математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:



Используем свойства МО и получим более удобную формулу для дисперсии:



.

Еще раз: эта формула не зависит от типа СВ. Для ДСВ определение и формула для вычисления имеет вид:

,

.

Заметим, что величина дисперсии зависит не только от возможных значений СВ, но и от их вероятностей. Например, для двух СВ:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | –1 | 0 | 1 | и | *Y* | –1 | 0 | 1 |
| P | 0,1 | 0,8 | 0,1 | P | 0,4 | 0,2 | 0,4 |

МВЗ одинаковы и  – одинаковы, но дисперсия *Y* больше дисперсии *X*.

**Свойства дисперсии**

1.  неслучайное неотрицательное число, ее размерность равна квадрату размерности случайной величины.

2. и наоборот: если , то .

3. .

4. .

5. Если *X* и *Y* независимы, то



Докажем это свойство. Для простоты обозначим :



6. Механическая интерпретация – момент инерции системы материаль-ных точек относительно центра масс.

##### Замечание. Размерность D(*X*) равна квадрату размерности СВ. Это иногда вызывает неудобство. Поэтому наряду с дисперсией в качестве меры разброса используют т. н. среднеквадратическое отклонение (стандартное отклонение):

.

**Смысл дисперсии**

Смысл дисперсии можно понять из неравенства Чебышёва:

.

**Доказательство**: , обе суммы неотрицательны. Первая сумма – для тех  для которых , а вторая – для остальных. Далее:



Сравнивая левую часть неравенства с правой, получим неравенство Чебышёва. Это неравенство справедливо для **любой** СВ. В этом его ценность. Если взять то

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | M(*X*) – 3σ  M(*X*) + 3σ  M(*X*)  89% |

Если *X* – время безотказной работы электролампы, то D(*X*) характеризует стабильность условий производства и эксплуатации.

Если *X* – ошибка (неизбежная!) измерения чего-либо, то D(*X*) характеризует точность прибора.

### IV Другие характеристики

**Мода** – то значение ДСВ *X*, которое имеет максимальное значение вероятности*.*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| унимодальное распределение |  |  | полимодальное распределение | антимодальное распределение |

**Медиана** – число Me, удовлетворяющее системе неравенств:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Для ДСВ определяется не всегда однозначно.

**Моменты**

**–** **начальный момент** -го порядка.

**–центральный момент**-го порядка.

Если множество возможных значений СВ счетное, то указанные ряды должны сходиться абсолютно, т.е. должны существовать **абсолютные** **моменты**:

**–** начальный абсолютный момент -го порядка;

** –** центральный абсолют-ный момент-го порядка.

Так как математическое ожидание обладает свойством линейности, то центральные моменты можно выразить через начальные:

.

И ещё:   – характеризует симметрию распределения;  показывает, насколько ярко выражена вершина распре-деления в окрестности среднего.