# ***ТЕМА* 6. ОСНОВНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**

## §1. Распределение Бернулли

#### Определение. Говорят, что дискретная случайная величина *X* имеет распределение Бернулли с параметром , если она принимает лишь два значения 0 и 1, причем .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | *X* | 0 | 1 | | P | 1 – *p* | *p* | |  |  |
|  |

C любым случайным событием *A* можно связать такую СВ, т. н. **индикатор события**:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

 – это число появлений события *A* в одном случайном эксперименте.

## §2. Биномиальное распределение

#### Определение. Говорят, что дискретная случайная величина имеет биномиальное распределение с параметром и , если она может принимать значения с вероятностями, вычисляемыми по формуле Бернулли:

, .

Название связанно с тем, что сумма этих вероятностей – это разложение по формуле бинома Ньютона:

.

Тот факт, что ДСВ  имеет биномиальное распределение с параметрами  и  записывается в виде .

Такую величину можно понимать так: «*X* – число появления события *A* в серии из  независимых испытаний, если в каждом из них ».

Примерами таких СВ служат: 1) число попаданий в 10ти выстрелах; 2) число гербов в 100 бросках монеты; 3) число шаров в 1м ящике при разбрасывании 5ти шаров по 3м ящикам.

Чтобы найти числовые характеристики этого распределения, представим *X* в виде суммы , где  – число появлений события  в *k*-ом испытании. Используя свойства математического ожидания и дисперсии, получим:

;



При вычислении дисперсии использовали независимость испытаний, т.е. независимость слагаемых в сумме .

Пример 1. Четыре шарика наудачу разбрасываются по трем ящикам. Случайная величина *X* – «число шаров, попавших в первый ящик» – имеет биномиальное распределение с параметрами  (четыре шарика = четыре испытания),  (вероятность попадания шарика в первый ящик).



Пример 2. Если , причем , , то чему равны параметры распределения?

Ответ получим, решив систему уравнений:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

## 

## §3. Геометрическое распределение

#### Определение. Говорят, что дискретная случайная величина *X* имеет геометрическое распределение с параметром , если она принимает значения с вероятностями

.

Название обусловлено тем, что вероятности  образуют бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем . Это позволяет про-верить условие :

.

Обозначение для такой СВ: . Понимают ее так: «число независи-мых испытаний до первого появления события *A*, если в каждом испытании ».

Найдем математическое ожидание СВ :

.

Найдем второй момент:



Теперь можно найти дисперсию:

.

При вычислении  и  мы воспользовались тем фактом, что эти характеристики по сути являются степенными рядами, которые (как известно из математического анализа) можно почленно дифференцировать и интегрировать.

Пример 3. У меня на экзамене неограниченное число вопросов. Задаю вопросы студенту, пока не услышу правильный ответ, и фиксирую число заданных вопросов *X*. В результате двадцати таких СЭ получены, например, такие значения *X*:

2, 3, 1, 5, 4, 2, 1, …, 6.

Найдем – среднее арифметическое. Пусть, например, . СВ *X* имеет геометрическое распределение с неизвестным параметром *p*. Значит:

.

Вывод: студент знает  всего материала.

Пример 4. Пусть случайная величина *X* – «число выстрелов до трехпопаданий». Возможные значения: 3, 4, …, *n*, … Событие () означает следующее: в *n*-ом выстреле было попадание, а в предшествующих  выстрелах было 2 попадания. Формула Бернулли и теорема умножения (выстрелы предполагаются независимыми) даёт вероятность



Здесь (Попадание в одном выстреле), .

**Замечание 1.** О случайной величине *Y*, которая принимает значения с вероятностями , также говорят, что она имеет геометрическое распределение с параметром . Если *Х –* число выстрелов до первого попадания, то *Y –* число сделанных при этом промахов. Очевидно, что 

**Замечание 2.** Геометрическое распределение из (предыдущего замечания) является частным случаем так называемого отрицательного биномиального распределения (см. § 6).

Геометрическое распределение имеет одно интересное свойство, которое называется отсутствием последействия. Пусть известно, что до *n*-го испытания событие *A* не наступало. Какова при этом условии вероятность того, что оно наступит в -м испытании?





Отсутствие последействия можно интерпретировать следующим образом. Рассмотрим телефонные разговоры и предположим, что их длительность измеряется целым числом минут и в начале каждой минуты с вероятностью *p* принимается решение закончить разговор и с вероятностью  
() – продолжить. Длительность разговора будет иметь геометрическое распределение. А свойство отсутствия последействия означает следующее: вероятность того, что разговор будет продолжаться  минут при условии, что он не закончился за *n* минут совпадает с безусловной вероятностью того, что разговор будет продолжаться ровно *m* минут.

Следует отметить, что таким свойством среди всех дискретных распре-делений обладает только геометрическое. Если некоторое распределение  обладает свойством отсутствия после-действия, то это означает

.

Положим *n* = 1 и получим рекуррентное соотношение:

,

Отсюда и получим .

И еще одно свойство: если ****независимы и имеют геометрическое распределение , то

.

## §4. Распределение Пуассона

#### Определение. Говорят, что дискретная случайная величина *X* имеет распределение Пуассона с параметром и пишут , если она принимает значения с вероятностями:

.

Убедимся, что , используя ряд Тейлора для показательной функции

:

.

Найдем математическое ожидание:



Найдем момент второго порядка:





Для дисперсии имеем:

.

Итак, если****, то 

Это свойство распределения Пуассона часто применяется на практике для решения вопроса, правдоподобна ли гипотеза о том, что ДСВ ****. Для этого оценивают из опыта [математическое ожидание](http://sernam.ru/book_tp.php?id=21) и [дисперсию](http://sernam.ru/book_tp.php?id=22) этой случайной величины. Если их значения близки, то это может служить дово- дом в пользу гипотезы о пуассоновском распределении; резкое различие этих характеристик, напротив, свидетельствует против гипотезы.

Распределение Пуассона является хорошей моделью для таких ДСВ:

1) число вызовов на автоматическую телефонную станцию, станцию скорой помощи в единицу времени, вообще число заявок в любую систему массового обслуживания в единицу времени; при этом λ – среднее число заявок, т. н. интенсивность потока вызовов/заявок;

2) число дефектов на единицу длины кабеля, троса;

3) число животных или растений, живущих на единице площади леса или поля.

4) число голов в футбольных матчах;

5) число осколков, попавших в малоразмерную цель при заданном положении точки разрыва;

6) длина любой очереди;

7) число рождений и смертей, браков и разводов, самоубийств и убийств в данном городе за год.

В дальнейшем (тема 12) мы получим распределение Пуассона из нескольких естественных предположений, касающихся так называемых **потоков событий**, характерным примером которых является поток вызовов на АТС. Одно важное свойство распределения Пуассона сформулируем сначала на этом примере

I. Если  – число событий потока, наступивших за 1 времени и , то число событий, наступивших за время *t* – это .

Пример. Среднее число вызовов на АТС за минуту равно 2. Найти вероятность того, что за две минуты поступит: а) 3 вызова; б) хотя бы один вызов.



И еще два важных свойства распределения Пуассона.

II. Если  *k* = 1, 2 и  и  независимы, то

.

Докажем это свойство, используя формулу полной вероятности:



т.к. выражение в последних скобках – бином Ньютона.

III. Если  *k* =1, 2, и *Y*1 и *Y*2 – независимы, то условное распределение *Y*1 при условии  является биномиальным распределением с параметрами *n* и :

.

## §5. Гипергеометрическое распределение

Рассмотрим следующий случайный эксперимент. Из урны, содержащих *N* шаров, из которых *D* черных, наудачу извлекают *n* шаров сразу или по одному **без возвращения**, причем .

**Гипергеометрическим распределением** с параметрами *N*, *D*, *n* называют распределение случайной величины *X* – «число черных шаров среди извлеченных». Возможные значения этой величины –**** а соответствующие вероятности

.

При этом используют запись .

Числовые характеристики:

 

Обратите внимание, что, если шары извлекать по одному **с возвра-щением**, то , где . Таким образом, если нас интересует среднее число черных шаров среди извлеченных, то не важно, как извлекаются шары – с возвращением или без возвращения. Кроме того, если еще и *n* значительно меньше *N*, то отношение , и дисперсия гипер-геометрического распределения приближенно равна дисперсии биномиаль-ного:



И, вообще, в такой ситуации можно считать .

Приведем один пример использования гипергеометрического распределения для оценки количества рыб в озере. Из озера вылавливают 1000 рыб, метят их каким-либо образом и выпускают обратно в озеро. Через некоторое время, когда меченные рыбы распределятся среди других, снова вылавливают 1000 рыб. Если *X* – «количество меченных рыб среди второго улова», то , где *N* – неизвестное количество рыб в озере. Пусть *X* = 100. Тогда частота меченных рыб во втором улове  здесь во втором отношении числитель – это количество меченных рыб в озере. Наивероятнейшее количество рыб в озере: 

Более того, используя нормальное приближение (об этом позже), можно утверждать, что количество рыб в озере находится в пределах от 8500 до 12000 с надежностью 93%.

Гипергеометрическое распределение применяется также при выборочном контроле качества продукции массового производства.

## §6. Отрицательное биномиальное распределение

## (распределение Паскаля)

Так называют распределение числа *X* неудач в последовательности испытаний Бернулли, проводимых до *k*-го успеха, если вероятность успеха P(успеха) .

Нетрудно получить закон распределения:



Можно доказать: , .

Обозначение: . Геометрическое распределение – это частный случай: 

## §7. Дискретное равномерное распределение

Так называют распределение случайной величины *X*, которая принимает конечное число значений с равными вероятностями



Например, *X* – число очков при броске кости:

МВЗ: 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 

Если наудачу выбирается цифра, то

 *k* = 0, 1, 2, …, 9.

Нетрудно написать формулы для числовых характеристик:



