# *тема* 9 Системы случайных величин

## §1. Функция распределения двумерной случайной величины

Рассмотрим простейший случайных эксперимент: выстрел по плоской

мишени. В зависимости от цели проведения случайного эксперимента его результат можно описывать:

1) событиями – «попали» и «не попали»;

2) одной непрерывной случайной величиной *Х* – расстояние от точки попадания до центра мишени;

3) двумя случайными величинами – координатами точки попадания (если на мишени введена та или иная система координат).

Если две случайные величины *Х* и *Y* рассматриваются одновременно, то принято говорить о системе случайных величин , или о двумерной случайной величине. Такую величину удобно понимать, как случайную точку на плоскости или как случайный вектор Сами случайные величины *Х* и *Y* при этом принято называть **компонентами системы случайных величин**. Очевидно, что свойства двумерной случайной величины не исчерпываются свойствами ее компонент. Важно также знать, как компоненты зависят одна от другой.

Полную вероятностную характеристику системы случайных величин дает функция распределения системы или совместная функция распределения компонент: . Если  – случайная точка, то  – это вероятность попадания точки в бесконечный квадрант с вершиной , лежащий левее и ниже.

|  |  |
| --- | --- |
| 0  (*x*,*y*)  *x*  *y* | **Свойства.**     3. – неубывающая, непрерывная слева по каждому аргументу. 4. Cвойство согласованности: функции распределения компонент имеют вид |
|  | . |

1. Вероятность попадания двумерной случайной величины в прямоугольную область



#### Определение. По определению две случайные величины назы-ваются независимыми, если закон распределения одной не зависит того, какие значения приняла другая.

#### Теперь, имея понятие совместной функции распределения, можно сформулировать критерий независимости двух СВ:

случайные величины *Х* и *Y* независимы тогда и только тогда, когда функция распределения системы равна произведению функций распределения компонент:



В дальнейшем это общее равенство перепишем в двух формах для двух типов случайных векторов.

## §2. Случайный вектор дискретного типа

### І Закон распределения

Если каждая из компонент системы случайных величин  является дискретной случайной величины, то всю систему называют **случайным вектором дискретного типа (СВДТ).**

Пусть возможные значения а возможные значения  Вместо совместной функции распределения  удобно рассматривать матрицу с элементамии задавать закон распределения в табличной форме:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y*  *Х* |  |  | …. |  | …. |  |  |
|  |  |  | …. |  | …. |  |  |
|  |  |  | …. |  | …. |  |  |
| …. | …. | …. | …. | …. | …. | …. | …. |
|  |  |  | …. |  | …. |  |  |
| …. | …. | …. | …. | …. | …. | …. | …. |
|  |  |  | …. |  | …. |  |  |
|  |  |  | …. |  | …. |  |  |

Первый столбец – это возможные значения случайной величины *Х*, а первая строка – значения случайной величины *Y*. На пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца стоит вероятность . Просуммируем эти вероятности по строкам и заполним последний столбец этими суммами:



т.к. события , *j=*1, 2, …, *n*, образуют полную группу.

Таким образом, первый и последний столбцы образуют ряд распределения дискретной случайной величины *Х*. Аналогичным образом поступим со столбцами и получим: первая и последняя строки – это ряд распределения компоненты *Y*.

Имея ряды распределения компонент, можно найти их числовые характеристики:

,

Кроме того, можно получить условие независимости компонент случайного вектора дискретного типа:

, т.е. 

Пример 1. Из урны, содержащей 2 красных шара, 3 белых и 5 черных, наудачу извлекают 2 шара. Компоненты двумерного случайного вектора (*X*,*Y*) – это *Х* = «число красных среди извлеченных», *Y* = «число белых среди извлеченных». Составить совместный закон распределения в табличной форме.

Решение. Возможные значения как *Х*, так и *Y* – это 0, 1, 2. Общее

число равновозможных исходов . Найдем вероятности :

(оба шара черные)

(1 белый, 1 черный)

(оба шара белые)

(1 красный, 1черный)

(1 красный, 1,белый)



(оба шара красные)





Внесем полученные вероятности в таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y*  *X* | 0 | 1 | 2 |  |
| 0 |  |  |  |  |
| 1 |  |  | 0 |  |
| 2 |  | 0 | 0 |  |
|  |  |  |  | ͵Σ=1 |

Совместную функцию распределения изобразим в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y*  *X* |  |  |  |  |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | 0 |  |  |  |
|  | 0 |  |  |  |
|  | 0 |  |  | 1 |

В силу свойства согласованности последний столбец и последняя строка – это функции распределения компонент *Х* и *Y* соответственно.

Вычислим числовые характеристики компонент этого вектора :





### II Условные распределения

Совместный закон распределения системы  определяет и индивидуальные законы распределения *Х* и *Y*. А наоборот? Лишь в случае независимости *Х* и *Y*. Если же *Х* и *Y* зависимы, то необходимо каким-то образом описывать эту зависимость. Для этой цели служат так называемые условные законы распределения.

#### Определение. Условным законом распределения случайной величины *X*, входящей в систему , называют ее закон распределения, найден-ный при условии, что случайная величина *Y* приняла определенное значение. Например, если , условный закон имеет вид:

#### . 1

#### Для рассмотренного ранее примера при условии, что *Y=*0, имеем

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 |
|  |  |  |  |

Но, если есть распределение, то можно найти математическое ожидание, в данном случае условное:

,



Аналогичным образом можно найти

 И теперь можем рассмотреть новую случайную величину , которая принимает значение  с вероятностью**. В нашем случае можно получить:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 0 |
|  |  |  |  |

Эта случайная величина M(*X/Y*) называется условным математическим ожиданием случайной величины *Х* при условии случайной величины *Y*. Имеет место формула полного математического ожидания:

*.*

### III Коэффициент корреляции

Закон распределения системы  в виде совместной функции  
распределения  или в виде матрицы – это полная характеристика случайного вектора дискретного типа. К неполным относятся числовые характеристики компонент и, самое главное, совместные характеристики, в частности, совместные моменты. Вообще, для любой действительной функции двух переменных  и случайного вектора дискретного типа  имеем:



Если  или , такие математические ожидания называются моментами, начальными и центральными соответственно.

Наиболее употребительный – так называемый корреляционный момент



Используя свойства математического ожидания, можно получить и другую формулу более удобную для вычислений:



Для случая дискретных компонент *Х* и *Y* вторая формула принимает вид:



Имея понятие совместного распределения, можно доказать некоторые свойства математического ожидания, например:



Если же компоненты *Х* и *Y* независимы (), то

.

Но тогда корреляционный момент будет равен 0.

Важный вывод: корреляционный момент независимых случайных величие равен 0, а его отличие от нуля есть признак существования зависимости между случайными величинами.

Размерность корреляционного момента есть произведение размерностей случайных величин. Эта особенность корреляционного момента затрудняет сравнение различных систем случайных величин. Поэтому чаще рассматривают другую, безразмерную, числовую характеристику – коэффициент корреляции:



Свойства

1. Если *Х* и *Y* независимы, то, но не наоборот.

2. 

3.  равносильно наличию линейной связи межу *Х* и *Y*: *Y=ах+b*.

4. Если , то говорят о положительной корреляции случайных величин *Х* и *Y*. Это означает, что при возрастании одной из случайных величин, другая в среднем также возрастает. Аналогично и для случая – отрицательная корреляция.

##### Замечание. Если, а значит и , то случайные величины *Х* и *Y* называютсянекоррелированными.

Пример 2. Дважды бросают игральную кость. *Х* – «число выпавших пятерок», *Y* – «число выпавших четных». Найти закон распределения и числовые характеристики. Найти 

Решение. Если нарисовать все 36 исходов этого случайного экспери-мента в виде матрицы 6-го порядка, то легко подсчитать количество исходов, благоприятствующих каждой паре возможных значений *Х* и *Y*.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y*  *X* |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  | 0 |  |
|  |  | 0 | 0 |  |
|  |  |  |  | Σ=1 |

‘

Очевидно, что *Х* и *Y* имеют биномиальные распределения:

*X*~B(2, 1/6), *Y*~B(2, 1/2

Поэтому





Вычислим совместный момент:

****

Теперь можно вычислить коэффициент корреляции:



Найдем условные распределения ****

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 |
|  | 4/9 | 4/9 | 1/9 |

*Y*=0:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 |
|  | 12/18 | 6/18 |  |

*Y*=1:

|  |  |
| --- | --- |
| *X* | 0 |
|  |  |

*Y*=2:

Теперь можно найти 







Находим распределение случайной величины 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1/3 | 2/3 |
|  | 9/36 | 18/36 | 9/36 |

и её математическое ожидание



## § 3. Случайный вектор непрерывного типа

### I Плотность

Систему случайных величин (*Х*,*Y*) будем называть **случайным вектором непрерывного типа (СВНТ)**, если ее совместная функция распределения  всюду непрерывна и имеет непрерывную смешанную производную 2-го порядка (за исключением, быть может, конечного числа кривых или точек).

#### Определение. Плотностью совместного распределения СВНТ называют смешанную производную второго порядка его совместной функции распределения:



**Свойства**

1.  т.к.  возрастающая по обеим переменными.

2. Для любой области 



3. Условие нормировки 

4. Совместная функция распределения и функции распределения компонент:







5. Плотности распределения компонент СВНТ:

 

6. Вероятностный смысл плотности: еслидостаточно малы, то  
 

**ІІ Условные распределения**

Условное распределение одной из компонент СВНТ при условии, что другая компонента приняла определенное значение, нельзя вычислить по формуле полной вероятности: НСВ любое своё значение принимает с нуле-вой вероятностью. Поэтому поступают следующим образом:



При получении последнего равенства к внутренним интегралам применили теорему о среднем значении.

Дифференцируя (по *х*!) полученную условную функцию распределе-ния, находим условную плотность *Х* при условии, что СВ *Y* приняла конкретное значение *y*:



Аналогично:



условная плотность СВ *Y* при условии, что СВ *Х* приняла значение *х.*

Из формул для условных плотностей получаем теорему об умножении плотностей:



Независимость двух СВ естественно понимать, как совпадение условной плотности с безусловной, то есть, как равенство



Отсюда получаем условие независимости компонент СВНТ:



**Пример 1.** Функцию  можно представить в виде произведения двух функций  где



Эти функции положительны и удовлетворяют условию нормировки



Это означает, что данные функции  и– плотности некоторых непрерывных случайных величин *X* и *Y*, а функция – совместная плотность СВНТ , причем, компоненты *X* и *Y* являются независимыми случайными величинами.

**ІІІ Коэффициент корреляции**

Пусть  – совместная плотность СВНТ. Тогда для любой функции полагают по определению



Поэтому для корреляционного момента имеем



или другая формула, более удобная для вычисления:



Здесь 

Аналогично и 

Коэффициент корреляции:



где 

Свойства коэффициента корреляции СВНТ те же, что и у коэффициента корреляции СВДТ.

**IV Два важных частных случая**

**Определение.** Говорят, что СВНТравномерно распределен в области если его совместная плотность имеет вид



Учитывая свойство двойного интеграла от единичной функции, для константы в этом определении получим значение где площадь области

**Пример 1.** Случайный вектор равномерно распределен в квадра-те со стороной , диагоналями которого служат оси координат. Найти:

1) совместную плотность 

*x*

2) плотности распределения компо-нент    
3) коэффициент корреляции 

**Решение.** 1) Область значений вектора – это область вида

  
 её площадь 

Совместная плотность: 

2) Плотность компоненты  в фиксированной точке – это интеграл вида

0



Так как совместная плотность равна 0 вне то интеграл вычисляется по «хорде» *АВ* и он равен произведению длины «хорды» на Длину найдем элементарными средствами, учитывая, что стороны квадрата составляют с его диагоналями углы в 45о. Окончательно будем иметь:



Похожий вид имеет и плотность  компоненты ( с заменой *х* на *у*).

3) Находим математические ожидания компонент:



Промежуток интегрирования симметричен (относительно нуля), функция – чётная, значит – нечётная. Поэтому  Аналогично и 

Находим корреляционный момент:



Здесь во внутреннем интегралеи – уравнения нижней и верхней границ области Эти границы симметричны относительно прямой , а подынтегральная функция нечётная. Поэтому внутренний интеграл, а с ним и корреляционный момент, равен нулю.

Вспоминая формулу для коэффициента корреляции, получимчто означает некоррелированность компонент *X* и *Y.* В то же время, не являются независимыми, ибо 

**Замечание.** Если рассмотреть то же равномерное распределение, но в квадрате



то окажется, что компоненты СВНТ будут независимыми. Действительно, совместная плотность



есть произведение двух равномерных на отрезке  плотностей

 и 

**Определение.** Говорят, что СВНТ  имеет двумерное нормаль-ное распределение, если совместная плотность имеет вид:



где 

Можно показать, что компоненты этого случайного вектора имеют нормальные распределения: *X*~ и *Y*~ причем – коэффициент корреляции.

В общем случае (как показывает предыдущий пример) некоррелированность компонент случайного векторане влечет за собой их независимости. Но в случае совместного нормального распределения некоррелированность означает независимость. В самом деле, если , то совместная плотность



представляет собой произведение двух одномерных нормальных плотностей

 и 

Такое свойство (некоррелированностьнезависимость) имеет место лишь для двумерного нормального распределения.

**Замечание.** Если *X*~ и *Y*~и  из этого не следует, что СВ и  независимы, а СВНТимеет двумерное нормальное распределение.

Совместная плотность – это обычная функция двух переменных. А для таких функций существует понятие линии уровня. В теории вероятностей – это линии постоянной плотности  Для двумерного нормального распределения такие линии представляют собой эллипсы, которые называются эллипсами рассеивания. Общие оси этих эллипсов называются главными осями рассеивания. Если параметр, то главные оси параллельны осям координат, а если, кроме того и  то эллипсы рассеивания превращаются в окружности. Такое двумерное нормальное распределение называется круговым.

**Пример 3.** Пусть СВНТимеет круговое нормальное распреде-ление с 



Найти закон распределения НСВ *R=*«расстояние от случайной точки до начала координат».

**Решение.** Находим функцию распределения:



Здесь область интегрирования круг с центром в начале координат, поэтому для вычисления двойного интеграла естественно перейти в полярную систему координат:



Дифференцируя эту функцию, получим так называемую плотность распределения Рэлея:



**§4. Функции регрессии**

Вернемся к условным распределениям. Для СВДТ условные ряды распределения имеют вид 

,

Для СВНТусловные плотности одной из компонент при условии, что другая приняла определенное значение, определяются формулами:

 

Зная условные распределения, можно найти условные математические ожидания. Например, в дискретном случае:



и в непрерывном случае:



Очевидно, что такое условное математическое ожидание есть некоторая функция от *х*



которую называют функцией регрессии *Y* на *Х.* Аналогично



функция регрессии *Х* на *Y.* Графики этих функций называются линиями регрессии. Рассматривать эти функции и линии имеет смысл только для зависимых случайных величин.

Если обе функции регрессии линейные, то говорят, что *Х* и *Y* связаны линейной корреляционной зависимостью. Если при этом *Х* и *Y* независимы, то линии регрессии – это прямые, параллельные координатным осям и проходящие через точку 

Имеет место следующая важная теорема о СВНТ, имеющим нормальное распределение.

**Теорема.** Если СВНТимеет нормальное распределение, то его компоненты связаны линейной корреляционной зависимостью. При этом функции регрессии имеют вид:

регрессия *Y* на *Х*,

 регрессия *Х* на *Y.*

**Замечание 1.** Можно доказать, что, если функция регрессии *Y* на *Х*, а именно некоторой двумерной случайной величины является линейной, то она обязательно имеет вид, приведенный в теореме, где



**Замечание 2.** Что можно сказать о функциях регрессии для произвольной двумерной случайной величины ? Формулы, при-веденные в теореме, дают для них наилучшую линейную аппроксимацию, наилучшую в смысле принципа наименьших квадратов. Более подробно об этом поговорим в следующем семестре.