

Арифметический сопроцессор (сложные вычисления)

Вопросы

- Частичный остаток от деления
- Тригонометрические функции
- Степень и логарифм

Частичный остаток от деления

- **FPREM**

$$ST := ST - \text{целая часть} \left(\frac{ST}{ST(1)} \right) * ST(1)$$

знак результата = знак делимого

$$0 \leq |\text{результат}| < |ST(1)|$$

Пример:

$$9.3 \text{ FPREM } 2 = 9.3 - 4 * 2 = 1.3$$

$$-9.3 \text{ FPREM } 2 = -9.3 - (-4) * 2 = -1.3$$

$$9.3 \text{ FPREM } (-2) = 9.3 - (-4) * (-2) = 1.3$$

Частичный остаток от деления

- **FPREM1** – остаток по стандарту IEEE 754

$ST := ST - \text{округленное до целого} \left(\frac{ST}{ST(1)} \right) * ST(1)$

$$-\frac{|ST(1)|}{2} \leq \text{результат} \leq \frac{|ST(1)|}{2}$$

Пример:

$$9.3 \quad \text{FPREM1 } 2 = 9.3 - 5 * 2 = -0.7$$

$$8.6 \quad \text{FPREM1 } 2 = 8.6 - 4 * 2 = 0.6$$

$$-9.3 \quad \text{FPREM1 } 2 = -9.3 - (-5) * 2 = 0.7$$

Частичный остаток от деления

- Экспонента ST может быть уменьшена не более, чем на 63

если экспонента(ST) - экспонента(ST(1)) \leq 63

то

ST := остаток

C2 := 0

иначе

ST := частичный остаток

C2 := 1

Частичный остаток от деления

- Если требуется, инструкцию нужно повторять пока $C2 = 1$
- Пример: найти остаток от деления b на a

```
FLD a           ; a
FLD b           ; a, b
```

lrem:

```
FPREM           ; a, частичный ост. от b/a
FSTSW ax
SAHF
JP lrem        ; пока не найден остаток
                ; в стеке a, остаток от b/a
```

Частичный остаток от деления

- Если вычислен полный остаток, младшие 3 бита частного сохраняются в C0, C3, C1 (в таком порядке!)
- Пример: получить младшие 3 бита частного

...

```
FSTSW ax
```

```
SAHF
```

```
JP lrem
```

Частичный остаток от деления

; AL = xx xx xx xx xx xx xx xx
 ; AH = xx **C3** xx xx xx C2 **C1** **C0**
 ; **CF** = **C0**

R**C**L al, 1 ; AL = xx xx xx xx xx xx xx **C0**

SHL ah, 2 ; AH = xx xx xx C2 **C1** **C0** xx xx
 ; **CF** = **C3**

R**C**L al, 1 ; AL = xx xx xx xx xx xx **C0** **C3**

SHL ah, 5 ; AH = **C0** xx xx xx xx xx xx xx
 ; **CF** = **C1**

R**C**L al, 1 ; AL = xx xx xx xx xx **C0** **C3** **C1**

AND al, 7 ; **AL** = 0 0 0 0 0 **C0** **C3** **C1**

Тригонометрические функции

Общие сведения:

- Углы – в радианах
- Аргумент должен лежать в $[-2^{63}, 2^{63}]$
 - в противном случае можно сначала использовать FPREM с делителем, кратным 2π
 - если операнд слишком велик, то C2=1 и стек не меняется

Тригонометрические функции

команда	действие
FSIN	$ST := \sin(ST)$
FCOS	$ST := \cos(ST)$
FSINCOS	$ST := \sin(ST)$ поместить в стек $\cos(\text{старое } ST)$ (<i>sin теперь в <u>ST(1)</u></i>)

- FSINCOS быстрее, чем пара команд SIN и COS

Пример

- Вычислить катеты треугольника по углу a и гипотенузе h

```
FLD a           ; a
FSINCOS         ; sin(a), cos(a)
FMUL h          ; sin(a), cos(a)*h
FLD h           ; sin(a), cos(a)*h, h
FMULP st(2), st(0)
                ; sin(a)*h, cos(a)*h
```

Тангенс

команда	действие
FPTAN	<ul style="list-style-type: none">• $ST := \text{tg}(ST)$• поместить в стек "1" (<i>tg теперь в ST(1)</i>)

- 1 добавляется чтобы легче было найти ctg
- В FPU до 387 аргумент должен был лежать в $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, сейчас – в $[-2^{63}, 2^{63}]$

Пример

- Общая часть примера:

FLD a ; a

FPTAN ; $\text{tg}(a)$, 1

- Вычислить ctg:

FDIV **RP** ; $1/\text{tg}(a) = \text{ctg}(a)$

- Вычислить tg и ctg:

FDIV st, st(1) ; $\text{tg}(a)$, $\text{ctg}(a)$

Пример

- Вычислить

tg: FFREE st

FINCSTP ; tg(a)

- Вычислить tg – вариант 2:

FMULP ; tg(a)

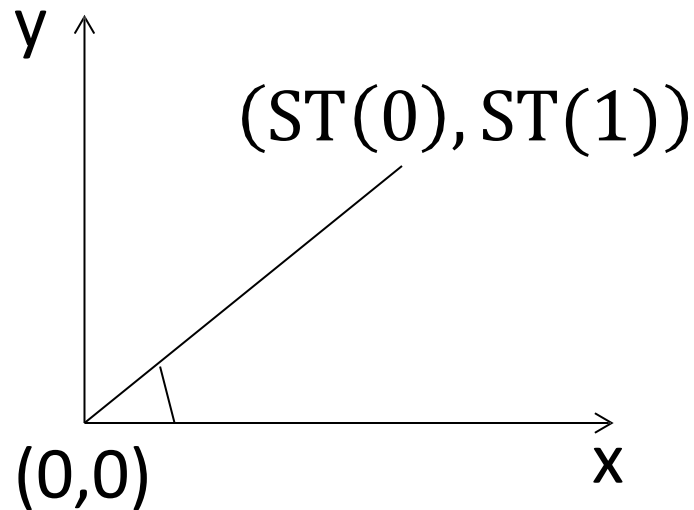
Арктангенс

команда	действие
FRATAN	$ST_{(1)} := \operatorname{arctg} \left(\frac{ST(1)}{ST(0)} \right)$ <p>выталкивает ST из стека (<i>arctg</i> теперь в ST)</p>

- Результат всегда лежит в $[-\pi, \pi]$

Арктангенс

- $ST(1)/ST(0)$ - чтобы легче было находить угол наклона отрезка



- Находит угол при любых $ST(0)$ и $ST(1)$, включая 0 и ∞

Значения FRATAN

ST(0)							
ST(1)	$-\infty$	-F	-0	+0	+F	$+\infty$	NaN
	$-\infty$	$-3\pi/4^*$	$-\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/4^*$
	-F	$-\pi$	$-\pi$ to $-\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/2$ to -0	-0
	-0	$-\pi$	$-\pi$	$-\pi^*$	-0*	-0	-0
	+0	$+\pi$	$+\pi$	$+\pi^*$	+0*	+0	+0
	+F	$+\pi$	$+\pi$ to $+\pi/2$	$+\pi/2$	$+\pi/2$	$+\pi/2$ to +0	+0
	$+\infty$	$+3\pi/4^*$	$+\pi/2$	$+\pi/2$	$+\pi/2$	$+\pi/2$	$+\pi/4^*$
	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN

- F – любое конечное число

Пример

- Найти угол прямоугольного треугольника с катетами a , b :

```
FLD a; a
```

```
FLD b; a, b
```

```
FPATAN ; arctg(a/b)
```

- Найти арктангенс числа x :

```
FLD x; x
```

```
FLD1 ; x, 1
```

```
FPATAN ; arctg(x)
```

Арксинус и арккосинус

- Команды для прямого вычисления отсутствуют!
- Можно вычислить, используя тождества:

$$tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

- Пример:

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin(x)) &= \arctg(tg(x)) \\ &= \arctg\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) \end{aligned}$$

Пример (продолжение)

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$$

FLD sinx ; sin(x)
FLD st ; sin(x), sin(x)
FMUL st, st ; sin(x), sin²(x)
FLD1 ; sin(x), sin²(x), **1**
FSUBRP ; sin(x), **cos²(x)**
FSQRT ; sin(x), cos(x)
FPATAN ; arcsin(sin(x)) = x

Возведение в степень

команда	действие
F2XM1	$ST := 2^{ST} - 1$

- Аргумент должен находиться в $[-1, 1]$
 - в противном случае результат не определен, но нет исключения

Использование

- Возведение 2 в произвольную степень

$$2^x = 2^A * 2^B$$

где A – целое, $B = x - A$, $B \in [-1,1]$

- 2^B вычисляется командой **F2XM1**
- $2^A * 2^B$ – командой **FSCALE**
- A – командой **RNDINT** (режим округления не важен)

Пример

- Вычислить 2^x

FLD x	; x
FLD st	; x, x
FRNDINT	; x, A
FSUB st(1), st	; B, A
FXCH	; A, B
F2XM1	; A, $2^B - 1$
FLD1	; A, $2^B - 1$, 1
FADDP	; A, 2^B
FSCALE	; A, $2^A * 2^B = 2^x$
FSTP st(1)	; 2^x

Двоичный логарифм

команда	действие
FYL2X	$ST(1) := ST(1) * \log_2(ST)$ выталкивает ST из стека (\log_2 теперь в ST)

Использование 1

- Вычисление логарифма по произвольному основанию

$$\log_b(x) = \log_b(2) * \log_2(x)$$

- Удобно использовать FLDLG2, FLDLN2
- Пример – натуральный логарифм числа a:

FLDLN2 ; $\ln(2)$

FLD a ; $\ln(2)$, a

FYL2X ; $\ln(2) * \log_2(a) = \ln(a)$

Использование 2

- Возведение произвольного числа в степень

$$x^y = 2^{y * \log_2(x)}$$

FLD y ; y

FLD x ; y, x

FYL2X ; $y * \log_2(x)$

- Затем возводим 2 в степень ST(0), см.
пример к F2XM1

Логарифм повышенной точности

команда	действие
FYL2XP1	$ST(1) := ST(1) * \log_2(ST + 1)$ выталкивает ST из стека (\log_2 теперь в ST)

- Ограничение:

$$ST \in \left[-\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), +\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

— иначе результат не определен и исключения
может не возникнуть (Intel's Software
Developer's Manual, 2003)

Логарифм повышенной точности

- Точнее, чем **FYL2X** для чисел, близких к 1
(FYL2X округлит результат до 0)
- Использование – капитализация процентов
и аннуитет (рента)

$$(1 + R)^n$$

где n – срок,

R – ставка (обычно маленькое число)