Министерство образования Республики Беларусь
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ»

В.К. ПЧЕЛЬНИК, И.Н. РЕВЧУК,

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Методические рекомендации
для студентов заочного отделения
специальности
1-31 03 01-02 «Математика»

Гродно 2010

Рецензенты: кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технической механики и материаловедения ГГАУ *А.А.Денисковец*;

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и оптимального управления ГрГУ им. Я.Купалы *В.И.Булгаков*.

Рекомендовано советом факультета математики и информатики ГрГУ им. Я.Купалы.

Пчельник В.К.

Исследование операций: методические рекомендации/ В.К.Пчельник, И.Н.Ревчук, – Гродно: ГрГУ им. Я.Купалы, 2010. — 104 с.

В методических рекомендациях содержится краткий теоретический материал, примеры решения задач и задания для самостоятельной работы по следующим разделам курса «Исследование операций»: теория игр, теория графов, календарное планирование, расчет временных параметров сетевого графика, имитационное моделирование. Показаны возможности использования электронных таблиц MS EXCEL для решения указанных типов задач.

1. Теория игр

Рассмотрим игру двух лиц А и В с противоположными интересами. Будем обозначать стратегии игрока A через $A_1, A_2, ..., A_m$, а стратегии игрока B – $B_1, B_2, ..., B_n$ (игра $m \times n$). Пусть игра состоит только из личных ходов. Тогда выбор стратегий A_i, B_j однозначно определяет исход игры. Пусть также известны значения a_{ij} выигрыша при каждой паре стратегий. Значения a_{ij} удобно записать в виде прямоугольной матрицы, строки которой соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы – стратегиям игрока B. Такую матрицу называют платежной матрицей (рис. 1).

A \ B	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Рисунок 1

Цель теории игр – дать рекомендации разумного поведения игроков в конфликтных ситуациях, то есть, в выработке оптимальной стратегии каждого из них. Оптимальной стратегией считается такая стратегия, которая при многократном повторении игры дает игроку максимально возможный средний выигрыш (или, что то же самое, минимально возможный средний проигрыш). Пусть $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$, $\alpha = \max\limits_i \alpha_i$, $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$, $\beta = \min\limits_j \beta_j$. Величина α называется нижней ценой игры, а β – верхней ценой игры.

A \ B	B_1	B_2	…	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	α_i
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	…	β_n	

Рисунок 2

Доказано, что каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение (возможно, в области смешанных стратегий). Следовательно, цена игры ν удовлетворяет соотношению $\alpha \le \nu \le \beta$. Задача состоит в том, чтобы найти две оптимальные смешанные стратегии игроков А и В

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & ... & A_m \\ p_1 & p_2 & ... & p_m \end{pmatrix}, \quad S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & ... & B_n \\ q_1 & q_2 & ... & q_n \end{pmatrix},$$

где $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1, q_1 + q_2 + ... + q_n = 1$. Оптимальная стратегия S_A^* должна обеспечить игроку А выигрыш, не меньший ν, а игроку В – проигрыш, не больший ν. Величина ν неизвестна, но, по крайней мере, равна некоторому положительному числу.

Если игрок А выбрал свою оптимальную смешанную стратегию S_A^*, то его средний выигрыш при оптимальной стратегии B_j игрока В равен $\alpha_j = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + ... + p_m a_{mj}$. Оптимальная стратегия S_A^* игрока А обладает тем свойством, что при любом поведении игрока В гарантирует ему выигрыш, не меньший ν. Следовательно, имеет место система (1.1).

$$
\begin{cases}
p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + \ldots + p_m a_{m1} \ge \nu, \\
p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + \ldots + p_m a_{m2} \ge \nu, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} + \ldots + p_m a_{mn} \ge \nu.
\end{cases} \qquad (1.1)
$$

Разделив каждое неравенство системы (1.1) на положительное число ν и введя обозначения (1.2), получим систему (1.3).

$$
\frac{p_1}{\nu} = \xi_1, \frac{p_{12}}{\nu} = \xi_2, \ldots, \frac{p_m}{\nu} = \xi_m, \qquad (1.2)
$$

$$
\begin{cases}
a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{m1}\xi_m \ge 1, \\
a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{m2}\xi_m \ge 1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \ldots + a_{mn}\xi_m \ge 1,
\end{cases} \qquad (1.3)
$$

В системе (1.3) $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ – неотрицательные числа. Поскольку $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$, то $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ удовлетворяют условию $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m = \frac{1}{\nu}$. Следовательно, для нахождения решения игры следует определить неотрицательные значения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, удовлетворяющие условиям (1.3), так, чтобы их сумма $L = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m$ была минимальной. При этом мы получили задачу линейного программирования.

Пример 1. Два противника ведут борьбу за два стратегических пункта. Исход борьбы за пункт в конечном итоге определяется количеством ресурсов, которые используют на данном пункте соперники. Переброска ресурсов производится скрытно. Армия, которая посылает больше полков на тот или иной пункт, занимает его и уничтожает все силы противника в этом пункте. Игрок при этом получает единицу выигрыша за захват пункта и по одной единице за каждый уничтоженный полк противника (эта игра называется игрой полковника Блотто). Предположим, что у Блотто в наличии три полка, а у его противника – 2 полка. Найти решение игры.

Решение. Составим вначале платежную матрицу игры. Пусть Блотто – это игрок А, а его противник – игрок В. У Блотто 4 чистые стратегии:

1) послать 3 полка на пункт α и 0 полков – на пункт β. Обозначим эту стратегию через (3, 0);
2) послать 2 полка на пункт α и 1 полк – на пункт β – (2, 1);
3) послать 1 полк на пункт α и 2 полка – на пункт β – (1, 2);
4) послать 0 полков на пункт α и 3 полка – на пункт β – (0, 3).

У игрока 2 три чистые стратегии: (2, 0), (1, 1) и (0, 2). На рисунке 3 приведена платежная матрица игры.

	(2, 0)	(1, 1)	(0, 2).
(3, 0)	3	1	0
(2, 1)	1	2	-1
(1, 2)	-1	2	1
(0, 3)	0	1	3

Рисунок 3

Поясним построение элементов платежной матрицы. Элемент $a_{11} = 3$, так как на пункт α Блотто посылает 3 полка, а его противник – 2. По условию, Блотто уничтожает 2 полка противника, получая при этом 2 единицы и дополнительную единицу за захват пункта α. В пункте β нет войск, поэтому в итоге $a_{11} = 2 + 1$. Элемент $a_{12} = 1$, так как на пункт α Блотто посылает 3 полка, а его противник – 1 полк. Блотто уничтожает этот полк, получая при этом единицу выигрыша и еще одну единицу – за захват пункта α. На пункт β Блотто не посылает войск, а его противник посылает 1 полк и получает единицу за захват пункта. При этом Блотто теряет единицу выигрыша. В сумме выигрыш Блотто составляет $a_{12} = 2 - 1 = 1$. Остальные элементы платежной матрицы вычисляются аналогично (рис. 4).

	A	B	C	D	E
8					
9		α	2	1	0
10	α	β	0	1	2
11	3	0	3	1	0
12	2	1	1	2	-1
13	1	2	-1	2	1
14	0	3	0	1	3

Рисунок 4

Решим игру приведением к задаче линейного программирования. Для обеспечения условия ν>0 (ν – цена игры) увеличим элементы матрицы платежей на 1. Тогда все ее элементы станут неотрицательными. Новая матрица игры теперь имеет вид как на рисунке 5.

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Рисунок 5

Сформулируем соответствующую задачу линейного программирования (1.4).

$$L = \sum_{i=1}^{4} p_i \to \min$$

$$\begin{cases} 4p_1 + 2p_2 + \qquad\quad p_4 \geq 1, \\ 2p_1 + 3p_2 + 3p_3 + 2p_4 \geq 1, \\ p_1 + \qquad\quad 2p_3 + 4p_4 \geq 1, \\ p_i \geq 0 \ \forall i = \overline{1,4}. \end{cases} \qquad (1.4)$$

Для решения задачи воспользуемся надстройкой «Поиск решения». Разместим данные так, как на рисунке 6. На

рисунке 7 приведены используемые формулы, а на рисунке 8 – окно диалога надстройки.

	A	B	C	D	E	F	G
1		переменные				целевая функция	
2	p	0	0	0	0	0	
3	1 неравенство	4	2	0	1	0	ограничен
4	2 неравенство	2	3	3	2	0	
5	3 неравенство	1	0	2	4	0	

Рисунок 6

	A	B	C	D	E	F	G
1		переменные				целевая функция	
2	p	0	0	0	0	=СУММ(B2:E2)	
3	1 неравенство	4	2	0	1	=СУММПРОИЗВ(B3:E3;$B$2:$E$2)	ограничен
4	2 неравенство	2	3	3	2	=СУММПРОИЗВ(B4:E4;$B$2:$E$2)	
5	3 неравенство	1	0	2	4	=СУММПРОИЗВ(B5:E5;$B$2:$E$2)	

Рисунок 7

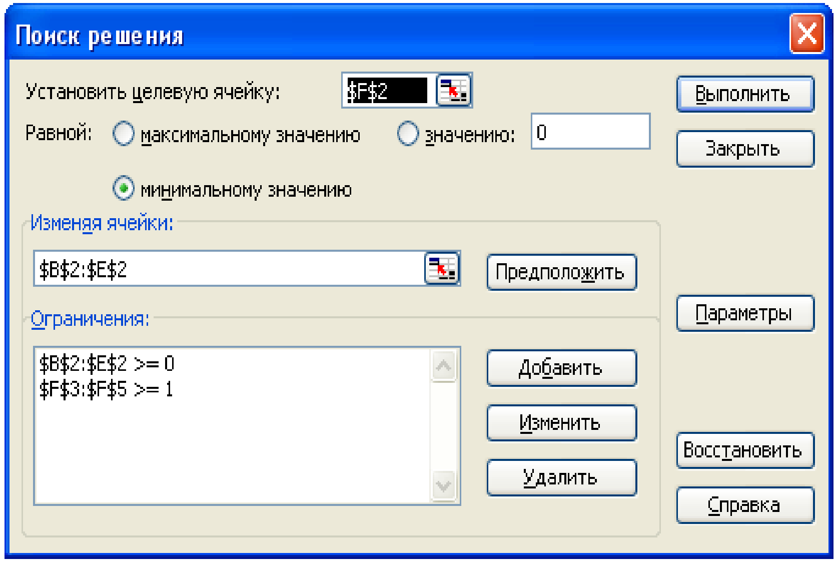


Рисунок 8

На рисунке 9 приведен результат работы надстройки. Оптимальное решение задачи линейного программирования: $p_1 = 7/33$, $p_2 = 0$, $p_3 = 1/11$, $p_4 = 5/33$. Цена игры ν^* с платежной матрицей A^* определяется из соотношения $1/L = \nu^*$, откуда $\nu^* = 11/5$. Тогда оптимальные стратегии первого игрока определяются так:

$$x_1 = p_1 * \nu^* = 7/33 * 11/5 = 7/15,$$

$$x_2 = p_2 * \nu^* = 0,$$

$$x_3 = p_3 * \nu^* = 1/11 * 11/5 = 1/5,$$

$$x_4 = p_4 * \nu^* = 5/33 * 11/5 = 1/3.$$

	A	B	C	D	E	F	G
1		переменные				целевая функция	
2	p	7/33	0	1/11	5/33	5/11	
3	1 неравенство	4	2	0	1	1	ограничения
4	2 неравенство	2	3	3	2	1	
5	3 неравенство	1	0	2	4	1	
6	x	7/15	0	1/5	1/3		

Рисунок 9

Цена игры с исходной матрицей А определяется как $\nu = \nu^* - 1 = 11/5 - 1 = 6/5$.

Оптимальную стратегию второго игрока можно найти, решив задачу (1.5).

$$Z = \sum_{j=1}^{3} q_j \to \max$$

$$\begin{cases} 4q_1 + 2q_2 + q_3 \le 1, \\ 2q_1 + 3q_2 \le 1, \\ 3q_2 + 2q_3 \le 1, \\ q_1 + 2q_2 + 4q_3 \le 1, \\ q_j \ge 0 \ \forall j = \overline{1,3}. \end{cases} \qquad (1.5)$$

На рисунке 10 показан результат работы надстройки «Поиск решения» и оптимальные стратегии второго игрока.

	A	B	C	D	E	F
1			переменные		целевая функция	
2	q	1/11	3/11	1/11	5/11	
3	1 неравенство	4	2	1	1	ограничения
4	2 неравенство	2	3	0	1	
5	3 неравенство	0	3	2	1	
6	4 неравенство	1	2	4	1	
7	y	1/5	3/5	1/5		

Рисунок 10

Следовательно,

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3. & A_4 \\ \frac{7}{15} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Это означает, что полковник Блотто с вероятностью 7/15 использует первую чистую стратегию, с вероятностью 1/5 – свою третью чистую стратегию и с вероятностью 1/3 – свою четвертую чистую стратегию. При этом в среднем за игру Блотто выигрывает 6/5 единиц у своего противника.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–11 построить математическую модель как матричную игру и решить ее, используя симплекс-метод или надстройку «Поиск решения».

1. Найти решение игры полковника Блотто, если противники располагают двумя и четырьмя полками соответственно.
2. Решить игру полковника Блотто, изменив условие следующим образом: за захват пункта игрок получает 2 единицы выигрыша. Игроки располагают двумя полками против трех.
3. Решить игру полковника Блотто, изменив условие следующим образом: если за пункт сражается одинаковое количество полков, то с вероятностью p полковник Блотто занимает пункт. Число полков равно 2 и 3 соответственно.

4. *Игра в прятки*. Игрок I прячется в одной из клеток матрицы размерности $m \times n$. Если игрок II угадывает номер строки i или столбца j, в которой находится игрок I, то игрок I проигрывает p_{ij} единиц. В противном случае игрок II выплачивает q_{ij} единиц. Положить $m=n=2$,

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Решить игру в прятки, изменив условие следующим образом: игрок II выбирает только строки. Использовать числовые данные предыдущей задачи.

6. *Опознавание самолета*. Самолеты, приближаясь к воздушной базе, должны подавать сигнал наблюдателю, находящемуся на базе, независимо от того, являются ли они своими или неприятельскими. На основании сигнала наблюдатель должен решить, какой стороне, своей или неприятельской принадлежит самолет. Пусть выигрыш равен A, если наблюдатель признает своего за своего; B, если наблюдатель признает своего за неприятеля; C, если наблюдатель признает неприятеля за своего; D, если наблюдатель признает неприятеля за неприятеля. Здесь $A>B$, $A>D$, $C>B$,$C>D$.

Свой всегда подает сигнал «свой». Неприятель может подавать сигналы «свой» либо «неприятель». Известно, что самолет свой с вероятностью p.

7. Два человека играют в следующую игру. Каждый показывает 1 или 2 пальца и одновременно называет число пальцев, которое, по его мнению, показывает противник. Если один из игроков угадал, то он получает выигрыш, равный сумме пальцев, показанных им и его противником, иначе – ничья.

8. Решить предыдущую задачу при условии, что первый игрок показывает 1, 2 или 3 пальца.

9. *Одноглазая кошка*. Кошка и мышь находятся в противоположных углах дома, имеющего в проекции вид квадрата (рис. 11). Они начинают бежать одновременно с одинаковой

скоростью, каждая в одном из двух возможных направлений вдоль стены дома. У кошки поврежден левый глаз, и когда мышка появляется слева, то она имеет возможность убежать. Поэтому если кошка бежит направо, а мышь вниз, то мышь оказывается слева и теряет A единиц. Если кошка бежит вверх, а мышь – налево, то мышь теряет B единиц ($B>A$).

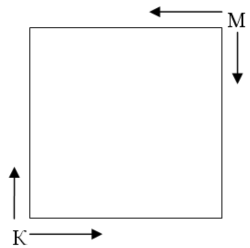


Рисунок 11

10. Решить предыдущую задачу с измененным условием: если кошка и мышь встречаются, то кошка теряет C единиц. Положить B=3, A=2, C=1.

11. Два производственных объединения выпускают продукцию одного вида. Сбыт продукции зависит от затрат на рекламу. Объединение A имеет возможность потратить на эти цели 20, либо 50, либо 100 денежных единиц, а объединение B – либо 5, либо 15 единиц. Матрица P задает дополнительные прибыли предприятия A, которое оно получит за счет потерь предприятия B.

$$P = \begin{pmatrix} -10 & -15 \\ 5 & -20 \\ -1 & 20 \end{pmatrix}.$$

В задачах 12–16 построить математическую модель игры двух лиц с нулевой суммой. Необходимую дополнительную информацию ввести самостоятельно.

12. В задаче 7 изменить условие следующим образом: каждый игрок записывает произвольное рациональное число из отрезка [1, 2].

13. В задаче 11 считать, что предприятие А имеет возможность затратить на рекламу от 20 до 100 единиц, а предприятие В – от 5 до 15 единиц.

14. *Шумная дуэль*. Два игрока стреляют друг в друга из пистолетов. Каждый из них имеет право на один выстрел. Первоначально они находятся на расстоянии a друг от друга и по сигналу начинают сходиться. Вероятность ожидания b противника зависит от расстояния до него. Каждый игрок знает, сделал ли выстрел противник.

15. *Бесшумная дуэль*. В предыдущей задаче игроки не знают, сделал ли выстрел противник.

16. *Смешанная дуэль*. В задаче 14 один игрок может определить, выстрелил ли противник, а второй – не может.

2. Теория графов

2.1. Основные определения

Графом $G = (X, A)$ называется пара объектов $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, где X – множество вершин, а A – множество ребер графа. Если ребра из множества A ориентированы, то они называются дугами, а граф называют ориентированным. Если ребра не имеют ориентации, то граф называют неориентированным. В противном случае граф является смешанным. На рисунках 12–13 приведены неориентированный и ориентированный графы соответственно.

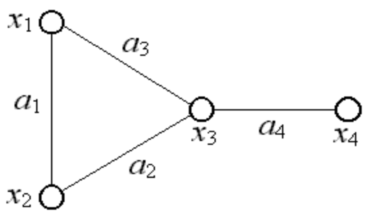


Рисунок 12

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

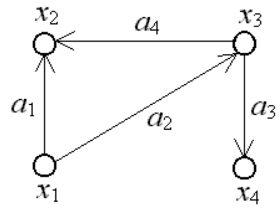


Рисунок 13

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

$A = \{a_1 = (x_1, x_2), a_2 = (x_1, x_3), a_3 = (x_3, x_4), a_4 = (x_3, x_2)\}$.

Граф можно задать матрицами *смежности* и *инцидентности*. Элементы матрицы смежности S графа задаются как:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существует ребро (дуга), соединяющее вершины } x_i \text{ и } x_j; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$(i, j=1, 2,\dots, n)$.

Элементы матрицы инцидентности $U = \left| u_{ij} \right|_{m \times n}$ для графа G, состоящего из n вершин и m дуг, определяются как:

$$u_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ – начало дуги } a_j; \\ -1, & \text{если вершина } x_i \text{ – конец дуги } a_j; \\ 0, & \text{если вершина } x_i \text{ не инцидентна дуге } a_j \end{cases}$$

$(i=1, 2,\dots,n;\ j=1, 2,\dots, m)$.

Если граф содержит петли, то есть дуги вида (x_i, x_i) то элементы матрицы инцидентности, соответствующие дугам, образующим петли, одновременно равны 1 и –1, что приводит к неоднозначности матрицы инцидентности.

Пусть G – неориентированный граф. *Маршрутом* в графе G называется такая последовательность (конечная или бесконечная) ребер a_1, a_2, ... a_n..., что каждые два соседних ребра a_i и a_{i+1} имеют общую инцидентную вершину. Одно и то же ребро может встречаться в маршруте несколько раз. В конечном маршруте (a_1, a_2, ... a_n) имеется первое ребро a_1 и последнее ребро a_n. Вершина x_1, инцидентная ребру a_1, но не инцидентная ребру a_2, называется началом маршрута, а вершина x_n, инцидентная ребру a_n, но не инцидентная ребру a_{n-1}, называется концом маршрута.

Длиной маршрута называется число ребер, входящих в маршрут, причем каждое ребро считается столько раз, сколько оно входит в данный маршрут.

Замкнутый маршрут называется *циклом*.

Маршрут (цикл), в котором все ребра различны, называется *простой цепью* (циклом). Маршрут (цикл), в котором все вершины (кроме первой и последней) различны, называется *элементарной цепью* (циклом).

На рисунке 14 изображены два маршрута из вершины x_1 в вершину x_4: $M_1 = (a_1, a_2, a_4)$ и $M_2 = (a_1, a_2, a_5, a_6)$. Длина маршрута M_1 равна 3, а длина маршрута M_2 равна 4.

Понятия пути и контура в ориентированном графе аналогичны понятиям маршрута и цикла в неориентированном графе.

Путем в ориентированном графе называется последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей дуги.

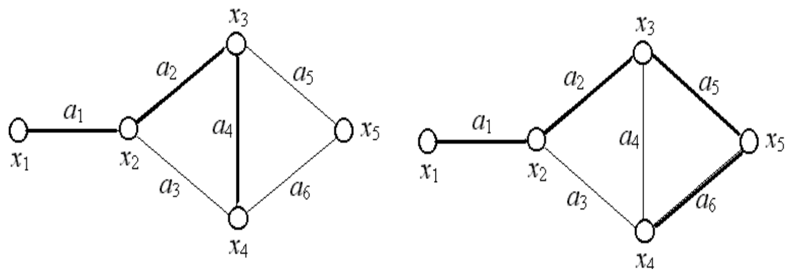


Рисунок 14

Число дуг пути называется *длиной* пути.

Путь называется *контуром*, если его начальная вершина совпадает с конечной вершиной.

Путь (контур), в котором все дуги различны, называется *простым*.

Путь (контур), в котором все вершины, кроме первой и последней, различны, называется *элементарным*.

Понятиям ребра, маршрута, цикла в неориентированном графе соответствуют понятия дуги, пути и контура в ориентированном графе.

Неориентированный граф	Ориентированный граф
ребро маршрут цикл	дуга путь контур

Граф называется *связным*, если каждая пара различных вершин может быть соединена, по крайней мере, одной цепью.

Ориентированный граф называется *нагруженным*, если дугам этого графа поставлены в соответствие веса, так что дуге (x_i, x_j) сопоставлено некоторое число $c(x_i, x_j) = c_{ij}$, называемое *длиной* (или *весом*, или *стоимостью* дуги). *Длиной* (*весом* или *стоимостью*) пути s, состоящего из некоторой последовательности дуг (x_i, x_j), называется число $l(s)$, равное сумме длин дуг, входящих в этот путь, т.е.

$$l(s) = \sum c_{ij},$$

причем суммирование ведется по всем дугам $(x_i, x_j) \in s$.

Матрица $C = (c_{ij})$ называется *матрицей длин дуг* или *матрицей весов*.

Подграфом неориентированного графа G называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер графа G. Подграф называется *собственным*, если он отличен от самого графа. Аналогично определяется подграф ориентированного графа.

Компонентой связности неориентированного графа называется его связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа данного графа.

Неориентированным деревом (или просто *деревом*) называется связный граф без циклов.

Остовным деревом (деревом-остовом, покрывающим деревом, скелетным деревом) связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

2.2. Задача построения минимального покрывающего дерева

Задачу построения минимального дерева-остова можно решить с помощью алгоритмов Краскала и Прима. Приведем описание алгоритма Краскала по шагам [7].

Шаг 1. Отсортировать ребра графа по неубыванию весов.

Шаг 2. Положить, что каждая вершина относится к своей компоненте связности.

Шаг 3. Просмотреть ребра в «отсортированном» порядке. Для каждого ребра выполнить следующую проверку:

а) если вершины, соединяемые данным ребром, лежат в разных компонентах связности, то объединить эти компоненты в одну, а рассматриваемое ребро добавить к минимальному дереву-остову;

б) если вершины, соединяемые данным ребром, лежат в одной компоненте связности, то исключить ребро из рассмотрения, так как при включении данного ребра образуется цикл.

Шаг 4. Если есть еще нерассмотренные ребра и не все компоненты связности объединены в одну, то перейти к шагу 3, иначе алгоритм завершает работу:

а) если при этом просмотрены все ребра, но не все компоненты связности объединены в одну, то для исходного графа невозможно построить покрывающее дерево;

б) если просмотрены все ребра, и все компоненты связности объединены в одну, то для исходного графа построено минимальное покрывающее дерево.

Алгоритм Прима последовательно наращивает дерево, состоящее из одной компоненты связности, по матрице расстояний. Алгоритм состоит из следующей последовательности действий.

Шаг 1. В матрице расстояний просматриваем элементы первой строки и выбираем минимальный элемент (например, элемент i-го столбца). Строится ребро, соединяющее 1-ю и i-ю вершины ($i\neq1$).

Шаг 2. Исключаются из рассмотрения 1-й и i-й столбцы.

Шаг 3. Найти минимальный элемент в 1-й и i-й строках (если минимальных элементов несколько, то выбирается любой из них).

Шаг 4. Шаги 2 и 3 повторяются до тех пор, пока либо в компоненте связности не окажутся все вершины исходного графа, либо дальнейший выбор минимального элемента ($\neq\infty$) невозможен. В первом случае минимальное покрывающее дерево построено. Во втором случае для исходного графа невозможно построить покрывающее дерево.

2.3. Задача построения кратчайшего пути

Пусть $G = (X, A)$ — связный граф, каждой дуге которого приписано некоторое число $a(x, y)\geq 0$. Задача построения кратчайшего пути между заданной парой вершин $s\in X$ и $t\in X$ заключается в том, чтобы из множества путей, соединяющих указанные вершины, найти такой, суммарная длина дуг которого минимальна.

Для решения задачи можно воспользоваться алгоритмом Дейкстры [7]. Приведем его описание по шагам.

Шаг 1. Перед началом выполнения алгоритма все вершины графа не окрашены. Каждой вершине $x\in X$ в ходе выполнения алгоритма присваивается число $d(x)$, равное длине кратчайшего пути из s в x, включающего только окрашенные вершины.

Положить $d(s)=0$, $d(x)=\infty$ для всех x, отличных от s. Окрасить вершину s и положить $y=s$ (y – последняя из окрашенных вершин).

Шаг 2. Для каждой неокрашенной вершины x следующим образом пересчитать величину $d(x)$:

$$d(x)=min\,\{d(x),\, d(y)+a(y, x)\}.$$

Если $d(x)=\infty$ для всех неокрашенных вершин x, закончить процедуру алгоритма: в заданном графе отсутствуют пути между указанной парой вершин. В противном случае окрасить ту из вершин x, для которой величина $d(x)$ является наименьшей. Положить $y=x$.

Шаг 3. Если $y=t$, закончить процедуру: кратчайший путь из вершины s в вершину t найден. В противном случае перейти к шагу 2.

2.4. **Задача построения максимального потока и минимального разреза**

Для любой сети максимальная величина потока из источника s в сток t равна минимальной пропускной способности разреза, отделяющего s и t. Разрезом $\left(X, \overline{X}\right)$ в сети $G = (N, A)$, отделяющим узлы s и t, называется множество дуг, где $s \in X, t \in \overline{X}$. При этом $X \cap \overline{X} = \varnothing,\ X \cup \overline{X} = N$.

Задача построения максимального потока между заданной парой вершин $s \in N$ и $t \in N$ заключается в том, чтобы из множества путей, соединяющих указанные вершины, найти такие, по которым можно пропустить максимальное количество единиц потока в единицу времени. При этом должны соблюдаться следующие ограничения:

- поток по каждой дуге не должен превышать ее пропускную способность;
- поток из источника s равен потоку, приходящему в сток t;
- для промежуточных вершин количество единиц потока, попавшего в этот узел, должно в точности равняться количеству единиц потока, вышедшего из этого узла.

Для решения задачи можно воспользоваться алгоритмом расстановки пометок Форда-Фалкерсона [12].

Алгоритм может начинать работу с нулевого потока. Затем вычисления развиваются в виде последовательности «расстановки пометок» (операция A), каждая из которых либо приводит к потоку с большей величиной (операция B), либо заканчивается заключением о том, что рассматриваемый поток максимален. Все узлы сети находятся в одном из следующих состояний: не помечен, помечен и не просмотрен, помечен и просмотрен. Вначале все узлы не помечены.

Операция A (процесс расстановки пометок). Источник s получает пометку $(-, \varepsilon(s)=\infty)$ (источник теперь помечен и не просмотрен, остальные узлы не помечены). Выбираем любой помеченный и не просмотренный узел x. Пусть он имеет пометку $\left(z^{\pm}, \varepsilon(x)\right)$. Всем узлам y, которые не помечены и для которых $f(x, y) < c(x, y)$ приписываем пометку $\left(x^{+}, \varepsilon(y)\right)$, где

$$\varepsilon(y) = \min\left[\varepsilon(x), c(x, y)\text{-}f(x, y)\right]$$

(такие узлы y теперь помечены и не просмотрены). Всем узлам y, которые после этого не помечены и для которых $f(y, x) > 0$ приписываем пометку $\left(x^{-}, \varepsilon(y)\right)$, где

$$\varepsilon(y) = \min\left[\varepsilon(x),\ f(y, x)\right]$$

(такие узлы y теперь помечены и не просмотрены, а узел x после этого помечен и просмотрен).

Этот общий шаг повторяем до тех пор, пока

1) не окажется помеченным и не просмотренным сток t,
2) или же до тех пор, пока нельзя будет пометить ни один узел, а сток t не будет помечен.

В первом случае переходим к операции В, а во втором — алгоритм закончил работу, так как максимальный поток в сети получен.

Операция B (изменение потока). Пусть сток t имеет пометку $\left(y^{\pm}, \varepsilon(t)\right)$. Если он имеет пометку $\left(y^{+}, \varepsilon(t)\right)$, то $f(y, t)$ заменяем на $f(y, t)+\varepsilon(t)$; если он имеет пометку $\left(y^{-}, \varepsilon(t)\right)$, то $f(y, t)$ заменяем на $f(y, t)\text{-}\varepsilon(t)$. В любом из этих случаев переходим к узлу y. Вообще, если узел y имеет пометку $\left(x^{+}, \varepsilon(y)\right)$, то $f(x, y)$ заменяем на $f(x, y)+\varepsilon(t)$, а если он имеет пометку $\left(x^{-}, \varepsilon(y)\right)$, то $f(x, y)$ заменяем на $f(x, y)\text{-}\varepsilon(t)$ и переходим к узлу x. Когда мы достигнем источника s, изменение потока прекращается. Нужно стереть все старые пометки и вновь перейти к операции A.

Примечание. Пропускные способности дуг должны быть целыми неотрицательными числами. В [12] приведен пример с иррациональными пропускными способностями дуг. Для этого примера алгоритм не приводит к правильному решению.

2.5. **Примеры решения задач**

Пример 2. Построить матрицы смежности и инцидентности для графа, приведенного на рисунке 15.

Решение. В соответствии с определениями матриц смежности и инцидентности матрица смежности для данного графа имеет вид как на рисунке 16, а матрица инцидентности — на рисунке 17.

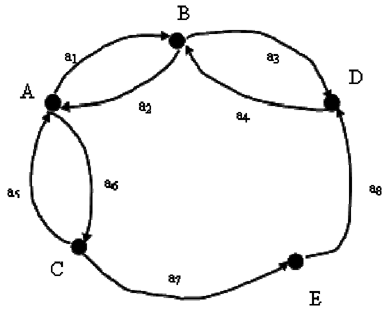


Рисунок 15

$$
\begin{array}{c} \\ \\ A \\ B \\ S = C \\ D \\ E \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \hline
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Рисунок 16

$$
U = \begin{array}{c|c}
 & a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \\ \hline
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Рисунок 17

Пример 3. Граф G содержит 10 вершин. Расстояния между вершинами указаны на рисунке 18. Найти его минимальное дерево-остов, используя алгоритм Краскала.

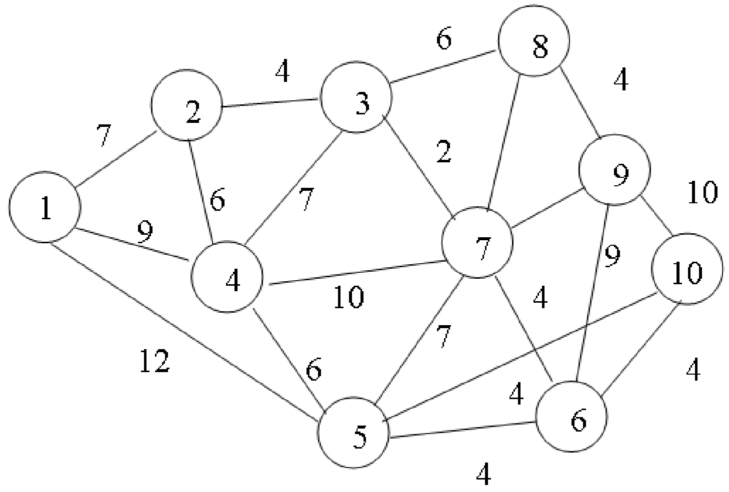


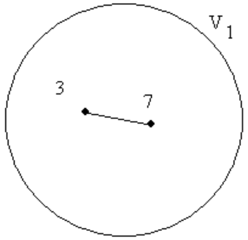
Рисунок 18

Решение. Отсортированный список ребер графа приведен в таблице 1.

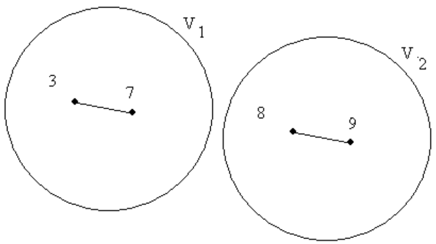
Таблица 1

Номер ребра	Ребро	Вес	Номер ребра	Ребро	Вес
1	(3, 7)	2	10	(4, 5)	6
2	(8, 9)	4	11	(1, 2)	7
3	(2, 3)	4	12	(3, 4)	7
4	(5, 6)	4	13	(5, 7)	7
5	(6, 10)	4	14	(1, 4)	9
6	(6, 7)	4	15	(6, 9)	9
7	(5, 10)	4	16	(4, 7)	10
8	(2, 4)	6	17	(9, 10)	10
9	(3, 8)	6	18	(1,5)	12

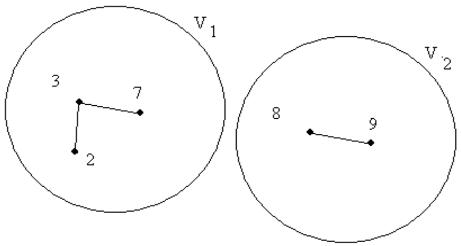
Включаем в строящееся дерево ребро (3, 7). Обозначим множество вершин, включенных в дерево, через $V_1 = \{3,7\}$.



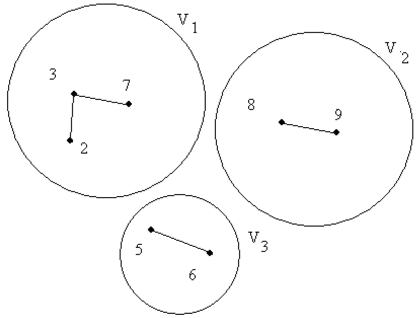
1. Для ребра (8, 9) $8 \notin V_1, 9 \notin V_1$. Следовательно, образуем новое множество $V_2 = \{8,9\}$ и включаем это ребро в строящееся дерево.



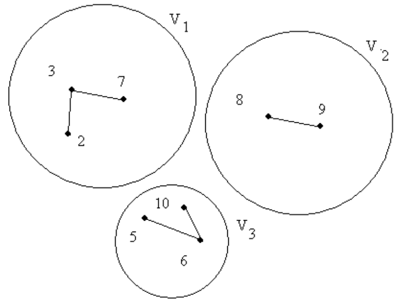
2. Для ребра (2, 3) $2 \notin (V_1 \cup V_2), 3 \in V_1$. Следовательно, можно положить $V_1 = \{2,3,7\}$. Включаем это ребро в строящееся дерево.



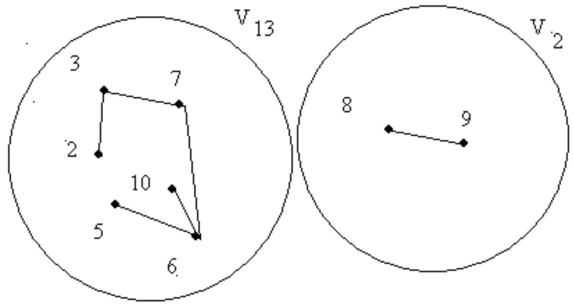
3. Для ребра (5, 6) $5,6 \notin (V_1 \cup V_2)$. Следовательно, образуем новое множество $V_3 = \{5,6\}$. Включаем это ребро в строящееся дерево.



4. Для ребра (6, 10) $10 \notin (V_1 \cup V_2 \cup V_3), 6 \in V_3$. Следовательно, полагаем $V_3 = \{5,6,10\}$. Включаем это ребро в строящееся дерево.

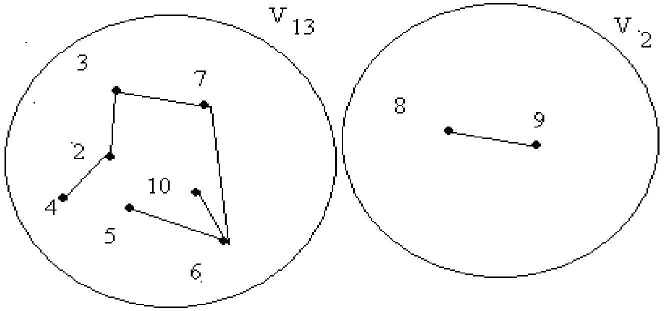


5. Для ребра (6, 7) $6 \in V_3, 7 \in V_1$. Следовательно, объединяем множества V_1 и V_3 во множество $V_{13} = \{2,3,5,6,7,10\}$.

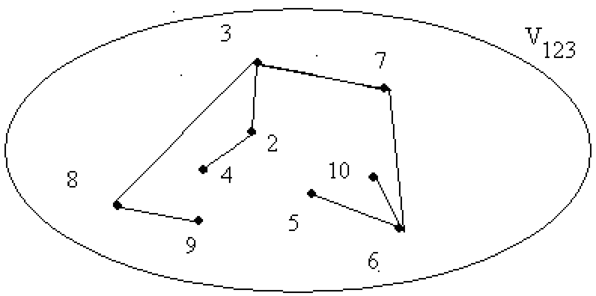


6. Для ребра (5, 10) $5,10 \in V_{13}$. Поэтому ребро не включается в строящееся дерево.

7. Для ребра (2, 4) $4 \notin (V_{13} \cup V_2), 2 \in V_{13}$. Поэтому полагаем $V_{13} = \{2,3,4,5,6,7,10\}$ и включаем это ребро в строящееся дерево.

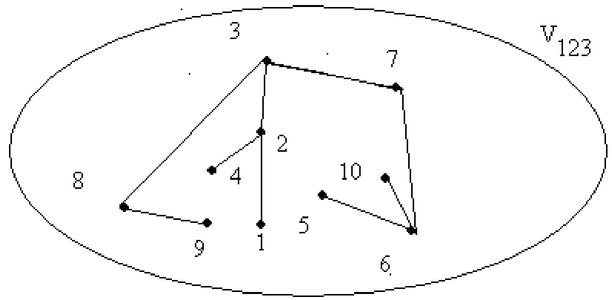


8. Для ребра (3, 8) $3 \in V_{13}, 8 \in V_2$. Поэтому объединяем множества V_{13} и V_2 во множество $V_{123} = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ и включаем ребро (3, 8) в строящееся дерево.



9. Для ребра (4, 5) $4,5 \in V_{123}$. Ребро не включается в строящееся дерево.

10. Для ребра (1, 2) $2 \in V_{123}, 1 \notin V_{123}$. Поэтому включаем это ребро в строящееся дерево и полагаем $V_{123} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.



11. Так как все вершины графа вошли в дерево, то получено покрывающее дерево (дерево-остов) с минимальным весом, равным 41 (рис. 19).

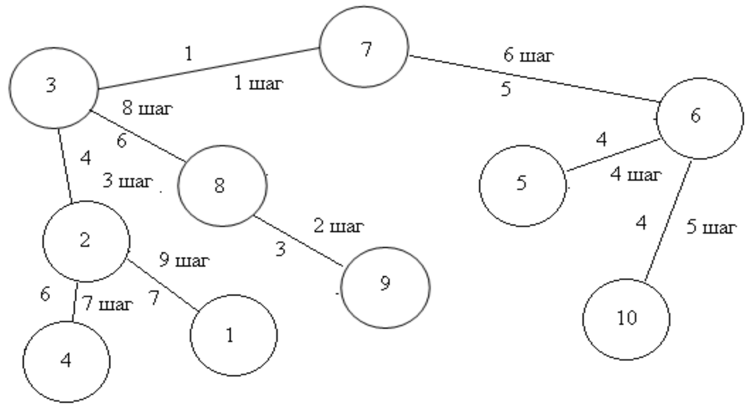


Рисунок 19

Пример 4. Найти минимальное дерево-остов для графа, приведенного на рисунке 18, с использованием алгоритма Прима.

Решение. Для решения задачи воспользуемся электронными таблицами MS EXCEL. Вес отсутствующих ребер будем обозначать числом 1000. Разместим данные на рабочем листе так, как на рисунке 20.

В ячейку P3 (рис. 20) вводим формулу (2.1) из таблицы 2. Для определения номера столбца, содержащего минимальный элемент, вводим формулу (2.2) в диапазон T2:AC2. Затем определяем номер столбца и минимальное значение по формуле (2.3), введенной в ячейку Q3. На этом этапе алгоритма ячейка R3 заполняется вручную значением 1 – номером первой вершины.

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
2		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10				
3	1	1000	7	1000	9	12	1000	1000	1000	1000	1000	7	2	1	
4	2	7	1000	4	6	1000	1000	1000	1000	1000	1000				
5	3	1000	4	1000	7	1000	1000	2	6	1000	1000				
6	4	9	6	7	1000	6	1000	10	1000	1000	1000				
7	5	12	1000	1000	6	1000	4	7	1000	1000	11				
8	6	1000	1000	1000	1000	4	1000	5	1000	9	4				
9	7	1000	1000	2	10	7	5	1000	9	8	1000				
10	8	1000	1000	6	1000	1000	1000	9	1000	3	1000				
11	9	1000	1000	1000	1000	1000	9	8	3	1000	10				
12	10	1000	1000	1000	1000	11	4	1000	1000	10	1000				
13															

Рисунок 20

Таблица 2

Ячейка (диапазон)	Формула	
P3	=МИН(F3:O3)	(2.1)
T2:AC2	{=ЕСЛИ(F3:O3=$P3;F$2:O2;100)}	(2.2)
Q3	=МИН(T3:AC3)	(2.3)
R3, A3, D3	1	(2.4)
A4	=Q3	(2.5)
C3	=P3	(2.6)

P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	2	1		1000	2	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

Рисунок 21

В столбце A, начиная с ячейки A3 (рис. 22), располагаются номера вершин, включенных в дерево-остов. В столбец C помещаются веса ребер, добавленных в дерево-остов.

В таблице 3 приводятся формулы для заполнения ячеек диапазона A15:AM24. Это одна итерация алгоритма. Каждая итерация занимает 12 строк.

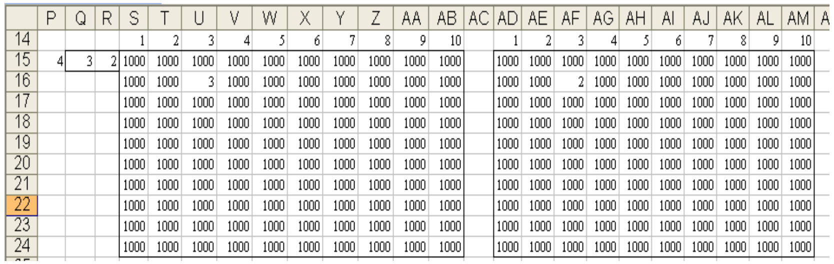
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	вес дерева		41												
2	вершины		веса			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1		7	**1**	1	1000	7	1000	9	12	1000	1000	1000	1000	1000
4	2				2	7	1000	4	6	1000	1000	1000	1000	1000	1000
5					3	1000	4	1000	7	1000	1000	2	6	1000	1000
6					4	9	6	7	1000	6	1000	10	1000	1000	1000
7					5	12	1000	1000	6	1000	4	7	1000	1000	11
8					6	1000	1000	1000	1000	4	1000	5	1000	9	4
9					7	1000	1000	2	10	7	5	1000	9	8	1000
10					8	1000	1000	6	1000	1000	1000	9	1000	3	1000
11					9	1000	1000	1000	1000	1000	9	8	3	1000	10
12					10	1000	1000	1000	1000	11	4	1000	1000	10	1000
13															
14						1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
15	3		4	**2**	1	1000	1000	1000	9	12	1000	1000	1000	1000	1000
16					2	1000	1000	4	6	1000	1000	1000	1000	1000	1000
17					3	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
18					4	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
19					5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
20					6	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
21					7	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
22					8	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
23					9	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
24					10	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

Рисунок 22

Таблица 3

Ячейка (диапазон)	Формула	
F15:O24	=ЕСЛИ((ЕОШИБКА(ВПР($E15:$E24; СМЕЩ($A$3;0;0;(D15- 1)*12;1);1;ЛОЖЬ)))+ (ЕОШИБКА(ВПР(F14:O14;СМЕЩ(A 3;0;0;(D15-1)*12;1);1;ЛОЖЬ))=2);1000;	(2.7)

	ЕСЛИ(ЕОШИБКА(ВПР($E15:$E24; СМЕЩ($A$3;0;0;(D15-1)*12;1); 1;ЛОЖЬ));1000;ЕСЛИ(ЕОШИБКА (ВПР(F14:O14;СМЕЩ($A$3;0;0;(D15-1)*12;1);1;ЛОЖЬ)); $F$3:$O$12; 1000)))	
S15:AB24	{=ЕСЛИ(F15:O24=$P15;F14:O14;1000)}	(2.8)
Q15	=МИН(S15:AB24)	(2.9)
AD15: AM24	{=ЕСЛИ($Q15=S15:AB24;$E15:$E24; 1000)}	(2.10)
R15	{=МИН(AD15:AM24)}	(2.11)
D15	=D3+1	(2.12)
A15	=ЕСЛИ(ЕОШИБКА(ВПР(Q15;СМЕЩ($A$3;0;0;(D15-1)*10;1);1;ЛОЖЬ)); Q15;R15)	(2.13)
C15	=ВПР(Q15;$E$3:$O$12;R15+1)	(2.14)
C1	=ЕСЛИ(СУММ(C3:C99)>=1000; "граф несвязный";СУММ(C3:C99))	(2.15)



	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC
14				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
15	4	3	2	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	
16				1000	1000	3	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	
17				1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	
18				1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	
19				1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	
20				1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	
21				1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	
22				1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	
23				1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	
24				1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	

	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM
14	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
15	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
16	1000	1000	2	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
17	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
18	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
19	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
20	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
21	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
22	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
23	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
24	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

Рисунок 23

Далее выделяем и копируем диапазон A14:AM24. Устанавливаем курсор в ячейку A26 и вставляем фрагмент. Последовательно производим такую же вставку в ячейки A38, A50, A62, A74, A86 и A98.

Если граф не имеет покрывающего дерева, то есть является несвязным, то в сумму будут включаться значения, равные 1000. Косвенно по этому признаку можно судить о том, имеет ли граф покрывающее дерево (формула

(2.15) в таблице 3). Просматривая столбцы Q и R, выписываем ребра, входящие в состав дерева-остова. Результат работы приведен на рисунке 24. Полностью решение задачи приведено в [21].

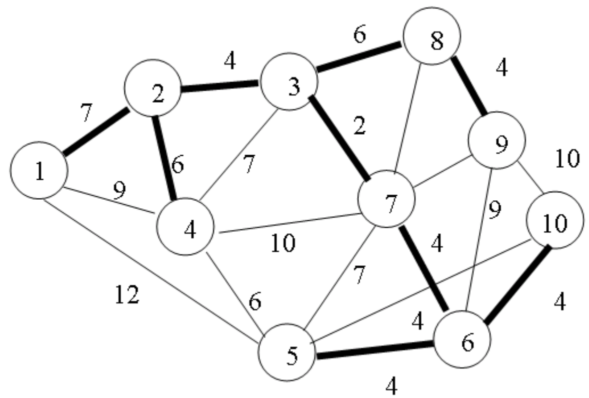


Рисунок 24

Пример 5. В заданном на рисунке 25 графе найти кратчайший путь между вершинами *s* и *t*.

*Решение***.** Для решения задачи воспользуемся алгоритмом Дейкстры.

Перед началом выполнения алгоритма полагаем $d(s) = 0, d(x) = \infty$ для всех x≠s; вершина s – последняя из окрашенных вершин.

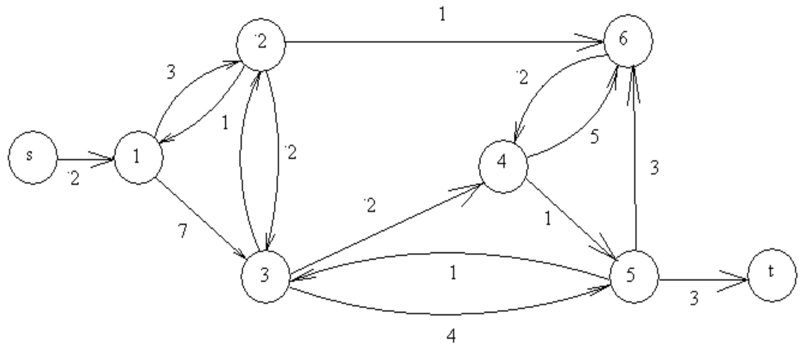


Рисунок 25

$$d(1) = \min\{d(1), d(s)+a(s,1)\} = \min\{\infty, 0+2\} = 2;$$
$$d(x) = \infty \quad \forall x \neq s,\ \ 1.$$

Так как минимум выпал на вершину 1, то y=1 – последняя из окрашенных вершин (рис. 26). На рисунках будем отмечать окрашенные вершины знаком □, а вершины с оценками, меньшими ∞, но не окрашенными – знаком ▢.

$$d(2) = \min\{d(2), d(1)+a(1,2)\} = \min\{\infty, 2+3\} = 5;$$
$$d(3) = \min\{d(3), d(1)+a(1,3)\} = \min\{\infty, 5+4\} = 9;$$
$$d(x) = \infty \quad \forall x \neq s,1,2,3.$$

Так как минимум выпал на вершину 2, то y=2 – последняя из окрашенных вершин (рис. 27).

$$d(3) = \min\{d(3), d(2)+a(2,3)\} = \min\{9, 5+2\} = 7;$$
$$d(6) = \min\{d(6), d(2)+a(2,6)\} = \min\{\infty, 5+1\} = 6;$$
$$d(x) = \infty \quad \forall x = 4,5,t.$$

Так как минимум выпал на вершину 6, то y=6 – последняя из окрашенных вершин (рис. 28).

$$d(3) = \min\{d(3), d(6)+a(6,3)\} = \min\{7, 6+\infty\} = 7;$$
$$d(4) = \min\{d(4), d(6)+a(6,4)\} = \min\{\infty, 6+2\} = 8;$$
$$d(x) = \infty \quad \forall x = 5,t.$$

Так как минимум выпал на вершину 3, то y=3 – последняя из окрашенных вершин (рис. 29).

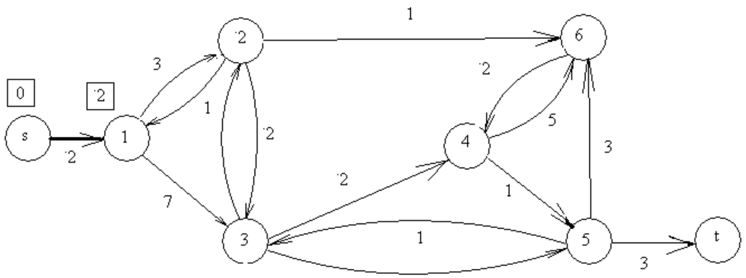


Рисунок 26

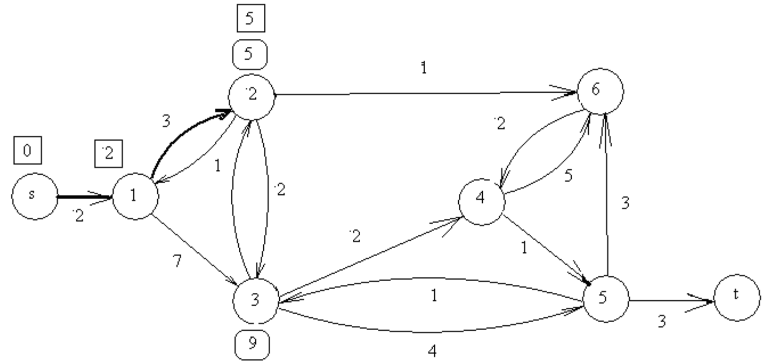


Рисунок 27

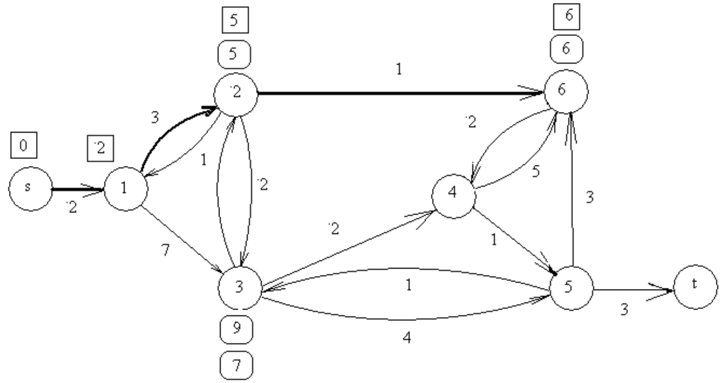


Рисунок 28

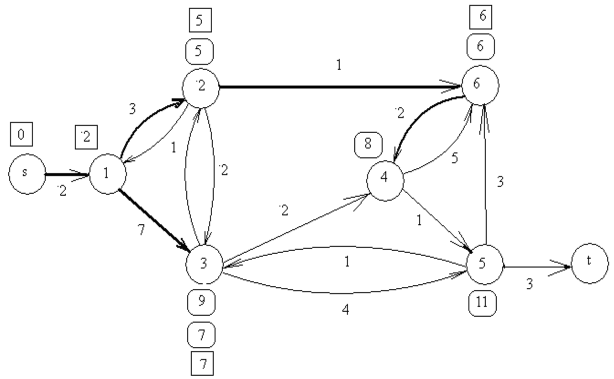


Рисунок 29

$d(5) = \min\{d(5), d(3) + a(3,5)\} = \min\{\infty, 7 + 4\} = 11;$

$d(4) = \min\{d(4), d(3) + a(3,4)\} = \min\{8, 7 + 2\} = 8;$

$d(t) = \infty.$

Так как минимум выпал на вершину 4, то y=4 – последняя из окрашенных вершин (рис. 30).

$d(5) = \min\{d(5), d(4) + a(4,5)\} = \min\{11, 8 + 1\} = 9;$

$d(t) = \infty.$

Так как минимум выпал на вершину 5, то y=5 – последняя из окрашенных вершин (рис. 31).

$d(t) = \min\{d(t), d(5) + a(5,t)\} = \min\{\infty, 9 + 3\} = 12.$

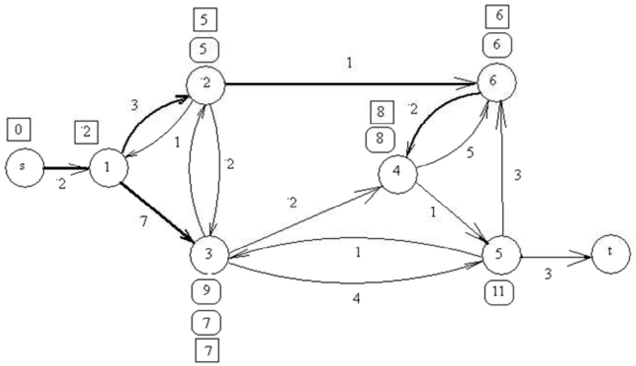


Рисунок 30

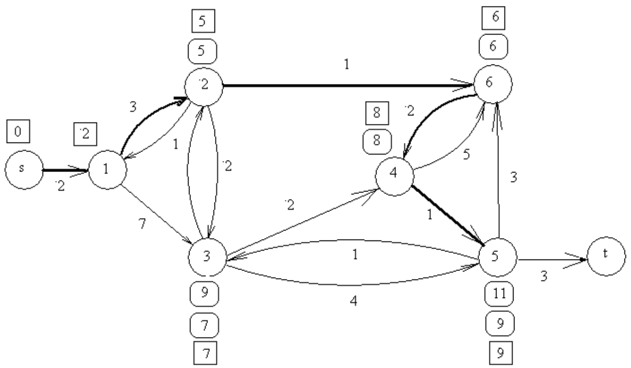


Рисунок 31

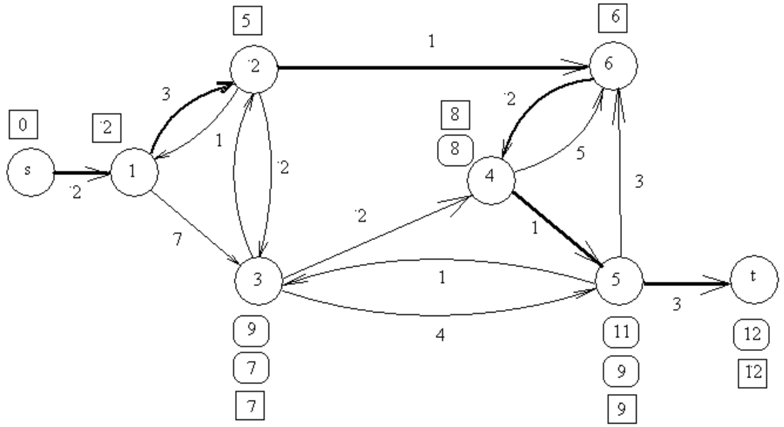


Рисунок 32

Так как минимум выпал на вершину t (нет других неокрашенных вершин), то $y=t$ – последняя из окрашенных вершин (рис. 32). В соответствии с алгоритмом Дейкстры, получен кратчайший путь из вершины s в вершину t.

Таким образом, кратчайший путь из вершины s в вершину t проходит через промежуточные вершины 1, 2, 6, 4 и 5. Длина этого пути равна 12.

Пример 6. Найти кратчайший путь из вершины 1 в вершину 10 для графа, представленного на рисунке 33, используя электронные таблицы MS EXCEL [19].

Решение. В [6] приведено решение этой задачи с использованием надстройки «Поиск решения». Однако для изучения самого алгоритма имеет смысл получить формулы, реализующие шаги алгоритма Дейкстры. Разместим исходные данные для длин дуг графа так, как на рисунке 34. В этой матрице отсутствующие дуги получили длину, равную 1000.

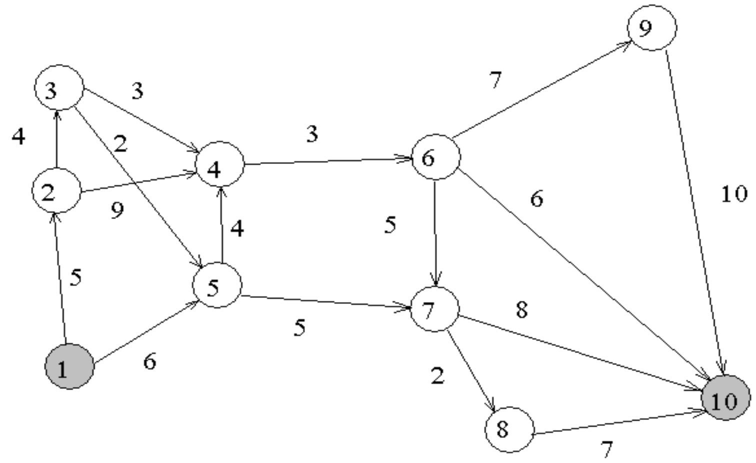


Рисунок 33

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
13		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
14	1	0	5	1000	1000	6	1000	1000	1000	1000	1000
15	2	1000	0	4	9	1000	1000	1000	1000	1000	1000
16	3	1000	1000	0	3	2	1000	1000	1000	1000	1000
17	4	1000	1000	1000	0	1000	3	1000	1000	1000	1000
18	5	1000	1000	1000	4	0	1000	5	1000	1000	1000
19	6	1000	1000	1000	1000	1000	0	5	1000	7	6
20	7	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0	2	1000	8
21	8	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0	1000	7
22	9	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0	10
23	10	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0

Рисунок 34

В таблице, приведенной на рисунке 35 слева, производим вычисление оценок *d(x)* для всех вершин. Начальная и конечная вершины пути расположены в ячейках O2 и Q2 соответственно. В ячейку B26 поместим формулу (2.16) и распространим ее далее на диапазон B27:K27. В ячейку L26 поместим формулу (2.17) и распространим ее на диапазон L27:L35.

=ЕСЛИ(B25=$O$2;0;1000) (2.16)

=ЕСЛИ(ЕОШИБКА(НАИМЕНЬШИЙ(B26:K26;A26));"";НАИМЕНЬШИЙ(B26:K26;A26)). (2.17)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
25		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10													
26	1	0	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0			1	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
27	2																							
28	3																							
29	4																							
30	5																							
31	6																							
32	7																							
33	8																							
34	9																							
35	10																							

Рисунок 35

В ячейку O26 вводим формулу (2.18) и распространяем ее на диапазон O26:X35 (правая матрица на рисунке 35).

=ЕСЛИ(B26=$L26;B$25;1000). (2.18)

В ячейку B27 вводим формулу (2.19), которая реализует основное соотношение алгоритма Дейкстры, и распространяем ее на диапазон B27:K35.

=ЕСЛИ($M26<>$Q$2;ЕСЛИ(ЕОШИБКА(ВПР($M26;$A$14:$K$23;B$13+1));"";МИН(B26;$L26+ВПР($M26;$A$14:$K$23;B$13+1)));"") (2.19)

В столбец M, начиная с ячейки M26, вручную вводится минимальное из чисел, получающихся в этой же строке диапазона O:X. На рисунке 36 показан первый такой шаг: введено число 1. После этого автоматически в строке 27 диапазонов B:K и O:X производится пересчет значений. Выбирая минимум (число 2) из диапазона O27:X27, вводим его в ячейку M27 (рис. 37) и т.д.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
25		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10													
26	1	0	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0	1		1	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
27	2	0	5	1000	1000	6	1000	1000	1000	1000	1000	5			1000	2	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
28	3																							
29	4																							
30	5																							

Рисунок 36

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
25		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10													
26	1	0	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0	1		1	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
27	2	0	5	1000	1000	6	1000	1000	1000	1000	1000	5	2		1000	2	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
28	3	0	5	9	14	6	1000	1000	1000	1000	1000	6			1000	1000	1000	1000	5	1000	1000	1000	1000	1000
29	4																							
30	5																							

Рисунок 37

На рисунке 38 приведен шаг алгоритма, когда в диапазоне O32:X32 оказались два числа, соответствующие 6 и 8 вершинам (у них одинаковые оценки, равные 13). В соответствии с алгоритмом Дейкстры следует выбрать любую из них.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
25		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10													
26	1	0	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0	1		1	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
27	2	0	5	1000	1000	6	1000	1000	1000	1000	1000	5	2		1000	2	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
28	3	0	5	9	14	6	1000	1000	1000	1000	1000	6	5		1000	1000	1000	1000	5	1000	1000	1000	1000	1000
29	4	0	5	9	10	6	1000	11	1000	1000	1000	9	3		1000	1000	3	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
30	5	0	5	9	10	6	1000	11	1000	1000	1000	10	4		1000	1000	1000	4	1000	1000	1000	1000	1000	1000
31	6	0	5	9	10	6	13	11	1000	1000	1000	11	7		1000	1000	1000	1000	1000	1000	7	1000	1000	1000
32	7	0	5	9	10	6	13	11	13	1000	19	13			1000	1000	1000	1000	1000	6	1000	8	1000	1000
33	8																							
34	9																							

Рисунок 38

Выбираем, например, вершину 6. На следующей итерации следует выбрать вершину 8 (рисунок 39). Алгоритм заканчивает работу, когда минимум выпадает на оценку для вершины 10. Длина полученного пути равна 19.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
25		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10													
26	1	0	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0	1		1	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
27	2	0	5	1000	1000	6	1000	1000	1000	1000	1000	5	2		1000	2	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
28	3	0	5	9	14	6	1000	1000	1000	1000	1000	6	5		1000	1000	1000	1000	5	1000	1000	1000	1000	1000
29	4	0	5	9	10	6	1000	11	1000	1000	1000	9	3		1000	1000	3	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
30	5	0	5	9	10	6	1000	11	1000	1000	1000	10	4		1000	1000	1000	4	1000	1000	1000	1000	1000	1000
31	6	0	5	9	10	6	13	11	1000	1000	1000	11	7		1000	1000	1000	1000	1000	1000	7	1000	1000	1000
32	7	0	5	9	10	6	13	11	13	1000	19	13	6		1000	1000	1000	1000	1000	6	1000	8	1000	1000
33	8	0	5	9	10	6	13	11	13	20	19	13	8		1000	1000	1000	1000	1000	6	1000	8	1000	1000
34	9	0	5	9	10	6	13	11	13	20	19	19	10		1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	10
35	10																							

Рисунок 39

Для получения порядка прохождения вершин в пути от вершины 1 к вершине 10 воспользуемся матрицей, приведенной на рисунке 40. В ячейку O52 вводится формула (2.20). Далее она распространяется на диапазон O52:X61. Приведенная на рисунке 41 матрица соответствует матрицам, приведенным на рисунке 35. По мере заполнения столбца M, получим результаты, приведенные на рисунках 42–44 соответственно.

=ЕСЛИ(ЕОШИБКА(ВПР($M26;$A$14:$K$23;B$13+1));"";ЕСЛИ(МИН(B26;$L26+ВПР($M26;$A$14:$K$23;B$13+1))=B26;O51;$M26)) (2.20)

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
51	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
52	1										
53	2										
54	3										
55	4										
56	5										
57	6										
58	7										
59	8										
60	9										
61	10										

Рисунок 40

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
51	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
52	1	1	1	3	4	1	6	7	8	9	10
53	2										
54	3										
55	4										
56	5										
57	6										
58	7										
59	8										
60	9										
61	10										

Рисунок 41

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
51	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
52	1	1	1	3	4	1	6	7	8	9	10
53	2	1	1	2	2	1	6	7	8	9	10
54	3										
55	4										
56	5										
57	6										
58	7										
59	8										
60	9										
61	10										

Рисунок 42

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
51	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
52	1	1	1	3	4	1	6	7	8	9	10
53	2	1	1	2	2	1	6	7	8	9	10
54	3	1	1	2	5	1	6	5	8	9	10
55	4	1	1	2	5	1	6	5	8	9	10
56	5	1	1	2	5	1	4	5	8	9	10
57	6	1	1	2	5	1	4	5	7	9	7
58	7										
59	8										
60	9										
61	10										

Рисунок 43

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
51	1	1	1	3	4	1	6	7	8	9	10
52	2	1	1	2	2	1	6	7	8	9	10
53	3	1	1	2	5	1	6	5	8	9	10
54	4	1	1	2	5	1	6	5	8	9	10
55	5	1	1	2	5	1	4	5	8	9	10
56	6	1	1	2	5	1	4	5	7	9	7
57	7	1	1	2	5	1	4	5	7	6	7
58	8	1	1	2	5	1	4	5	7	6	7
59	9	1	1	2	5	1	4	5	7	6	7
60											

Рисунок 44

Строка 9 последней матрицы (рис. 44) соответствует завершению работы алгоритма. Просматривая столбец 10 этой строки, находим значение 7. Это значит, что кратчайший путь в вершину 10 проходит через вершину 7. Просматривая столбец 7 последней строки, получаем номер вершины 5. Следовательно, в вершину 7 кратчайший путь прошел через вершину 5. В столбце 5 последней строки находим вершину с номером 1. Следовательно, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 10 проходит через вершины 1, 5, 7 и 10. Длина этого пути равна 19. На рисунке 46 указан соответствующий кратчайший путь.

Если нет пути, соединяющего указанные в ячейках O2 и Q2 вершины, то на каком-то этапе выполнения алгоритма оценка минимальной длины станет равной 1000. В соответствии с алгоритмом это означает отсутствие искомого пути. На рисунке 45 приведен пример поиска кратчайшего пути между вершинами 8 и 9.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
25		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10													
26	1	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0	1000	1000	0	8		1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	8	1000	1000
27	2	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0	1000	7	7	10		1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	10
28	3	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0	1000	7	1000			1	2	3	4	5	6	7	1000	9	1000
29	4																							

Рисунок 45

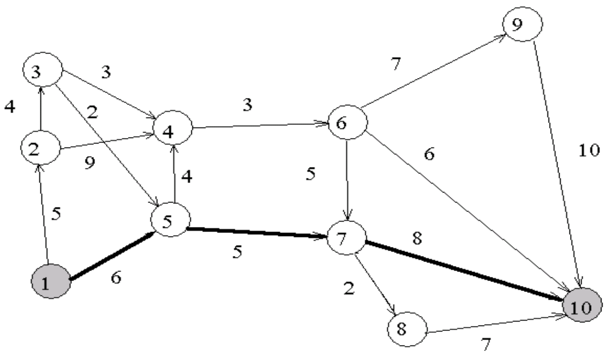


Рисунок 46

Пример 7. Найти максимальный поток и минимальный разрез, отделяющий источник 1 и сток 6 для сети, приведенной на рисунке 47. Число около каждой дуги означает пропускную способность соответствующей дуги.

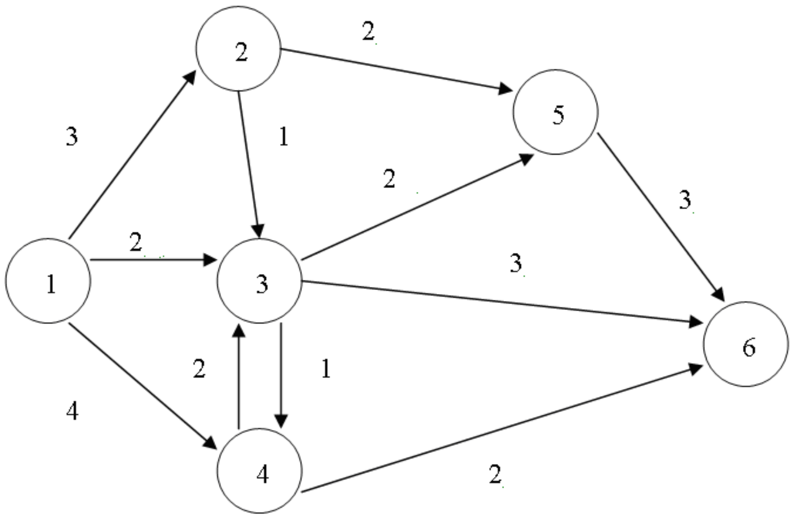


Рисунок 47

Решение. Решение задачи можно начинать с потока величины 7 (рис. 48). Нетрудно заметить, что все условия сохранения потока выполнены.

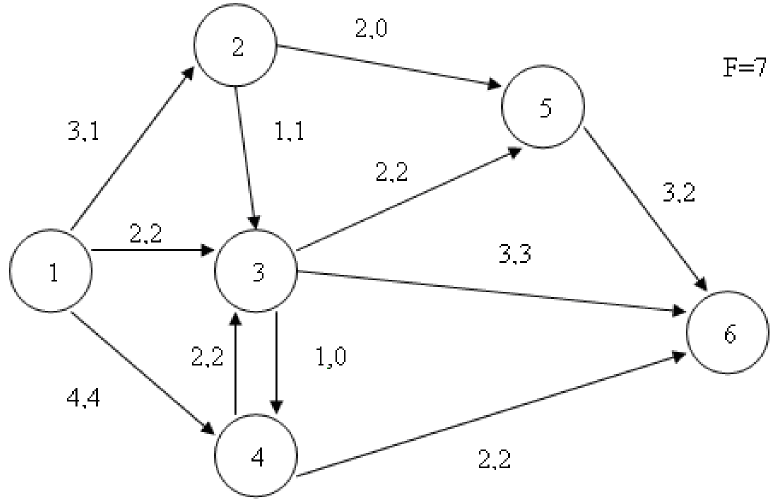


Рисунок 48

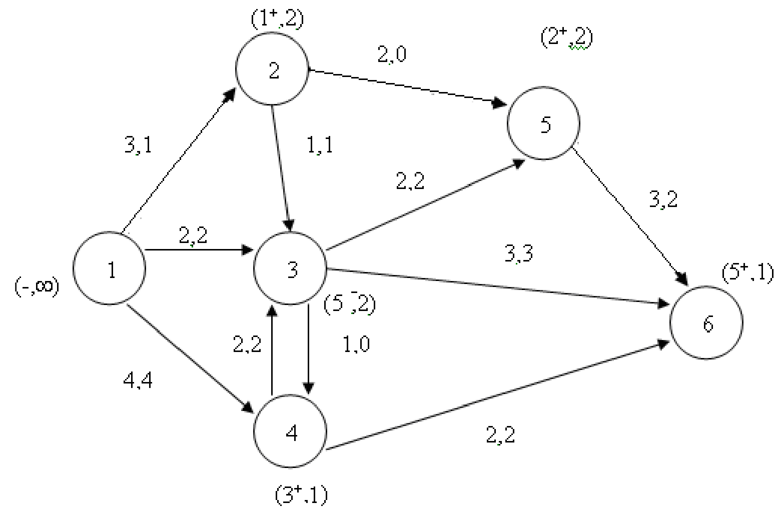


Рисунок 49

Согласно алгоритму, источник (узел 1) получил пометку (-, ∞). Затем из узла 1 можно пометить только узел 2. Из узла 2 помечается узел 5, а из узла 5 – узел 3 и сток (узел 6). Так как сток оказался помеченным, переходим к операции В. Сток получил пометку (5^+, 1). Следовательно, $f(5,\ 6)$ станет равным 2+1=3. Переходим к узлу 5. Так как он имеет пометку (2^+, 2), но до стока дошла только одна единица потока, то поток по дуге (2, 5) станет равным 0+1=1. Следовательно, $f(2,5)=0+1=1$.

Переходим к узлу 2. Так как он имеет пометку (1^+, 2), то до стока по дуге (1, 2) дошла только одна дополнительная единица потока. Поток по дуге (1, 2) станет равным 1+1=2. Следовательно, $f(1,2)=1+1=2$.

Так как в результате выполнения операции *В* достигнут источник (узел 1), то следует стереть старые пометки и снова перейти к операции *А*. Состояние сети приведено на рисунке 50. Жирными стрелками указаны дуги, по которым идет одна дополнительная единица потока.

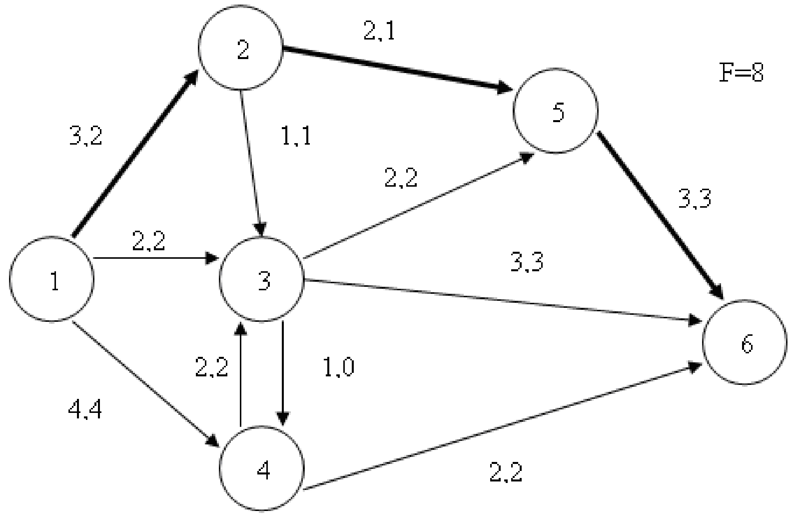


Рисунок 50

Снова выполняем операцию *А*. Источник (узел 1) получил пометку (-, ∞). Затем из узла 1 помечается узел 2 (рис. 51). Из узла 2 помечается узел 5, а из узла 5 – узел 3. Из узла 3 можно пометить узел 4.

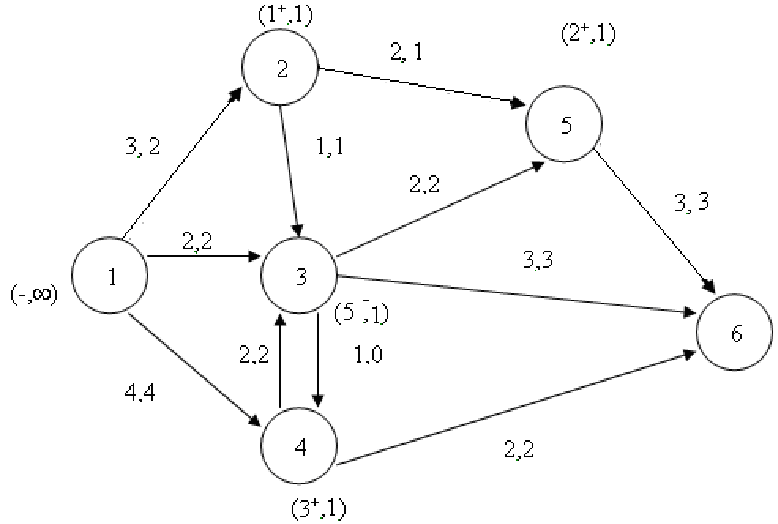


Рисунок 51

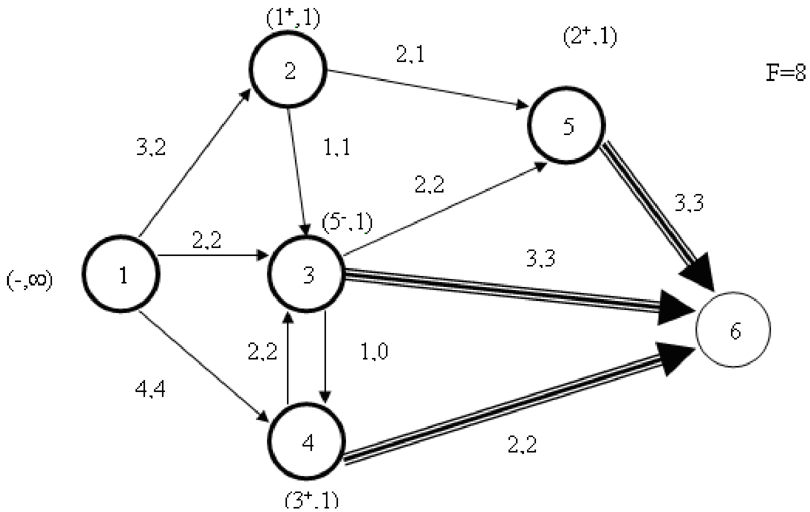
Однако дальнейшее выполнение алгоритма невозможно, так как дуги (5, 6), (3, 6) и (4, 6) имеют нулевую остаточную пропускную способность. Поскольку не удается пометить вершину 6 (сток), то на предыдущем шаге выполнения алгоритма получен максимальный поток величины 8.

Так как помеченными оказались вершины 1–5, а непомеченной – вершина 6, то минимальный разрез, отделяющий источник и сток, представляет собой совокупность дуг

$$\left(X,\overline{X}\right)=\{(5,6),(3,6),(4,6)\},$$

где $X=\{1,2,3,4,5\}$, $\overline{X}=\{6\}$.

Состояние сети приведено на рисунке 52. Жирными стрелками изображен минимальный разрез $\left(X,\overline{X}\right)$.



$X = \{1,2,3,4,5\};$

$\overline{X} = \{6\};$

$(X, \overline{X}) = \{(5,6),(3,6),(4,6)\}.$

Рисунок 52

Задачи для самостоятельного решения

1. Неориентированный граф G содержит 10 вершин. Расстояния между вершинами заданы в таблицах 4–5. Найти его минимальное дерево-остов (минимальное покрывающее дерево).

Таблица 4

начало	конец	Варианты									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина
1	2	1	17	20	12	17	9	14	13	10	4
1	3	1	11	13	10	13	2	12	13	14	13
1	4	1	18	20	4	15	16	12	19	14	12
1	5	2	20	7	9	13	17	6	2	17	16
1	6	2	6	6	18	10	15	4	3	3	19
1	7	2	18	14	9	13	19	5	10	14	1
1	8	2	1	11	3	18	5	14	4	8	7
1	9	2	5	12	4	11	8	3	14	6	1
1	10	2	8	14	5	11	16	17	9	20	11
2	3	3	19	14	8	1	13	15	9	20	1
2	4	3	10	7	9	12	17	14	11	14	6
2	5	3	13	18	7	17	18	1	14	6	9
2	6	3	4	5	16	7	8	16	2	20	13
2	7	4	14	8	19	15	20	2	7	17	7
2	8	4	12	4	9	19	19	11	2	18	20
2	9	5	14	5	14	9	11	5	9	16	4
2	10	5	20	2	3	16	20	11	7	9	5
3	4	6	15	10	6	7	17	13	5	3	19
3	5	6	4	6	2	2	6	9	16	12	4
3	6	6	17	2	11	17	1	12	12	13	12
3	7	6	16	11	12	3	10	8	8	14	5
3	8	6	18	18	9	2	15	6	4	5	4
3	9	6	15	4	10	20	19	11	10	1	7
3	10	6	16	17	18	1	20	5	18	1	3
4	5	6	6	11	14	10	18	18	15	11	1

Продолжение таблицы 4

4	6	7	20	12	11	1	2	8	10	13	18
4	7	7	7	17	3	5	9	3	2	18	16
4	8	7	8	16	11	13	1	8	1	19	13
4	9	7	7	20	13	7	14	10	10	15	15
4	10	7	1	17	19	6	6	20	14	14	3
5	6	8	15	7	7	1	16	1	12	5	2
5	7	8	4	19	1	8	8	13	14	3	3
5	8	8	7	17	8	16	7	20	5	2	15
5	9	8	9	11	8	7	20	11	3	9	17
5	10	8	20	4	10	10	4	11	5	4	16
6	7	9	13	7	14	16	14	18	7	19	16
6	8	9	16	12	1	13	5	8	3	12	2
6	9	9	7	4	2	17	18	19	20	17	3
6	10	9	9	16	17	7	6	14	10	15	13
7	8	9	12	10	17	10	14	15	2	3	16
7	9	9	9	16	6	15	13	20	6	7	2
7	10	9	9	10	16	9	15	7	7	4	1
8	9	10	17	19	18	18	8	1	19	9	14
8	10	10	1	7	2	15	14	4	11	13	10

Таблица 5

начало	конец	Варианты									
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина
1	2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	3	4	18	16	5	14	7	8	4	15	9
1	4	4	15	15	16	12	7	9	9	3	9
1	5	1	14	17	8	16	16	2	4	14	7
1	6	18	16	14	17	16	5	5	16	3	3

Продолжение таблицы 5

1	7	20	2	1	11	6	16	19	3	12	6
1	8	9	13	19	2	9	12	4	10	5	14
1	9	14	18	18	16	1	9	1	13	12	18
1	10	5	9	11	13	17	12	20	3	7	10
2	3	18	2	19	10	17	11	9	10	13	7
2	4	16	15	4	1	6	16	11	16	10	11
2	5	20	10	5	4	10	9	17	6	8	12
2	6	18	5	4	3	6	10	13	19	19	11
2	7	10	19	19	20	6	15	16	13	9	12
2	8	10	3	6	2	7	3	19	12	7	7
2	9	20	5	12	1	2	17	2	14	19	20
2	10	16	7	20	15	4	8	15	13	10	7
3	4	5	8	12	17	16	9	17	7	15	16
3	5	6	11	8	10	7	15	20	4	9	5
3	6	10	17	18	10	20	1	10	19	10	4
3	7	6	12	15	20	6	14	19	11	2	5
3	8	19	14	3	18	8	8	17	2	11	11
3	9	20	10	1	6	13	2	10	11	9	13
3	10	19	4	7	9	10	3	2	1	16	18
4	5	13	15	19	6	4	20	1	17	20	12
4	6	2	2	2	7	12	2	8	1	16	4
4	7	13	20	9	12	15	9	3	11	4	4
4	8	4	5	6	11	5	19	18	17	8	16
4	9	2	4	6	3	18	18	18	4	8	18
4	10	11	20	6	18	18	7	8	13	8	9
5	6	20	10	15	11	20	4	11	10	11	9
5	7	14	3	3	4	14	16	18	3	7	3
5	8	5	18	14	18	13	20	15	20	8	17
5	9	2	11	20	16	20	16	10	12	13	6
5	10	8	16	3	2	15	4	17	17	3	18

Продолжение таблицы 5

6	7	17	6	20	5	19	20	19	6	17	13
6	8	1	5	15	7	20	16	5	1	9	7
6	9	12	13	19	12	12	2	20	3	2	3
6	10	6	19	5	16	9	5	7	11	18	8
7	8	5	10	1	2	5	12	11	15	20	5
7	9	16	15	16	2	16	20	1	13	5	18
7	10	18	17	8	5	9	20	17	20	14	8
8	9	14	4	17	18	17	8	12	3	8	10
8	10	1	7	18	19	13	4	18	12	5	2
9	10	18	2	7	16	19	8	20	6	6	14

2. Граф содержит 10 вершин (рис.53). Расстояния между вершинами заданы таблицами 6–7. Найти кратчайший путь между вершинами 1 и 10.

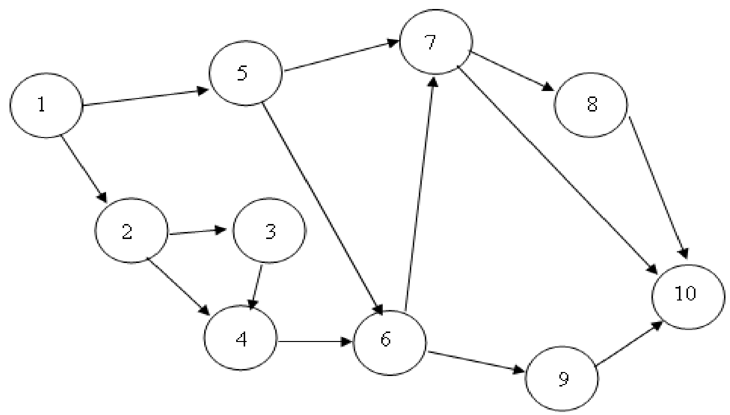


Рисунок 53

Таблица 6

начало	конец	Варианты									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина
1	2	1	17	20	12	17	9	14	13	10	4
1	5	1	11	13	10	13	2	12	13	14	13
2	3	3	19	14	8	1	13	15	9	20	1
2	4	3	10	7	9	12	17	14	11	14	6
3	4	6	15	10	6	7	17	13	5	3	19
4	6	7	20	12	11	1	2	8	10	13	18
5	6	8	15	7	7	1	16	1	12	5	2
5	7	8	4	19	1	8	8	13	14	3	3
6	7	9	13	7	14	16	14	18	7	19	16
6	9	9	7	4	2	17	18	19	20	17	3
7	8	9	12	10	17	10	14	15	2	3	16
7	10	9	9	10	16	9	15	7	7	4	1
8	10	10	1	7	2	15	14	4	11	13	10
9	10	10	2	13	3	11	2	20	16	18	14

Таблица 7

начало	конец	Варианты									
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина
1	2	15	10	6	7	9	9	9	8	5	11
1	5	3	8	7	15	10	6	8	12	6	3
2	3	10	5	10	10	7	13	15	14	14	13
2	4	12	14	4	3	14	14	13	6	7	12
3	4	11	14	9	15	6	1	1	8	13	3
4	6	10	1	12	12	14	3	1	12	13	10
5	6	1	7	2	3	7	7	8	6	1	8
5	7	8	6	3	10	7	14	13	3	12	11
6	7	2	9	7	11	14	13	5	5	5	3
6	9	10	4	14	15	4	9	7	4	2	4
7	8	3	1	13	7	15	3	1	8	14	2
7	10	4	1	4	8	14	8	15	4	13	2
8	10	8	9	11	11	10	14	13	4	13	9
9	10	10	11	2	2	10	1	9	12	2	4

3. Сеть содержит 10 вершин (рис. 54). Пропускные способности дуг заданы таблицами 8–9. Найти максимальный поток между вершинами 1 и 10 и соответствующий минимальный разрез.

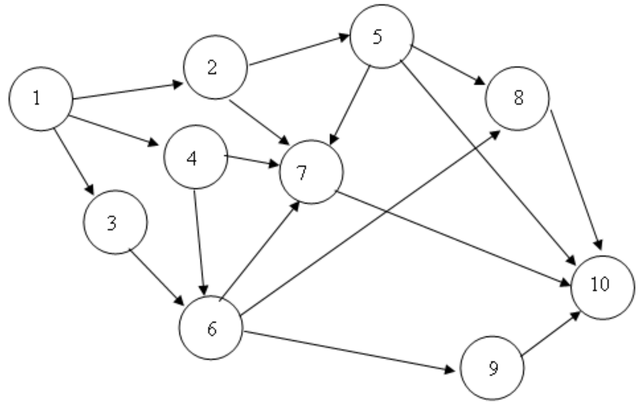


Рисунок 54

Таблица 8

начало	конец	Варианты									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина
1	2	4	9	12	10	9	12	9	13	13	9
1	3	13	12	9	13	11	12	8	10	1	10
1	4	14	4	9	11	3	12	7	5	4	7
2	5	7	10	7	11	2	3	7	12	9	5
2	7	7	3	3	4	1	4	14	6	4	11
3	6	13	4	14	9	13	5	1	1	1	11
4	6	6	15	5	7	15	5	13	8	8	12
4	7	9	13	12	9	3	2	12	10	4	13
5	7	6	8	11	5	14	15	5	3	9	8
5	8	2	4	9	13	1	11	4	5	10	15
5	10	2	10	2	2	10	8	8	14	8	12
6	7	4	15	11	3	6	4	9	6	10	1
6	8	9	14	11	15	3	3	3	11	13	9

Продолжение таблицы 8

6	9	14	7	5	7	7	5	11	8	10	11
7	10	10	9	15	10	6	11	2	8	6	3
8	10	15	10	9	8	15	8	15	13	4	2
9	10	10	5	7	1	12	11	8	11	13	13

Таблица 9

начало	конец	Варианты									
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		длина	длина	длина	длина	Длина	длина	длина	длина	длина	длина
1	2	8	14	15	8	1	2	12	14	11	7
1	3	10	12	14	2	15	8	15	15	15	7
1	4	4	7	9	13	9	3	13	3	7	9
2	5	14	12	15	9	13	1	6	1	14	7
2	7	10	8	12	10	8	4	12	3	4	14
3	6	5	10	11	1	13	12	1	11	1	11
4	6	10	8	12	14	7	11	13	15	11	8
4	7	3	5	12	10	7	4	2	13	13	11
5	7	3	12	4	6	8	1	7	5	4	1
5	8	7	2	4	9	4	2	3	9	5	7
5	10	15	13	10	2	3	2	13	8	6	8
6	7	15	6	2	8	9	1	2	3	4	1
6	8	5	13	1	10	2	2	11	12	7	2
6	9	6	4	11	13	5	14	12	2	3	4
7	10	9	6	4	7	14	4	9	4	6	2
8	10	10	11	9	6	9	11	11	9	10	7
9	10	5	12	4	10	2	2	4	6	10	12

3. Теория расписаний

Пример 8. Имеется множество работ $N = \{1,2,...7\}$, которые должны быть выполнены на двух последовательных приборах A и B (сначала на приборе A, а затем – на приборе B). Время, необходимое для полного обслуживания работы $к$ ($1 \le к \le 7$) на приборе A, обозначим через $t_{кA}$, а на приборе B – через $t_{кB}$ соответственно. Необходимо найти такой порядок обслуживания, при котором суммарное время простоя приборов A и B минимально.

При построении расписания обслуживания требований множества N необходимо учитывать следующие условия:

- в любой момент времени на одном приборе не может обслуживаться более одной работы;
- одна работа в любой момент времени может занимать не более одного прибора.

Время обслуживания для заданного множества работ N на приборах A и B задано в таблице.

к	1	2	3	4	5	6	7
$t_{кA}$	3	4	8	6	7	2	5
$t_{кB}$	2	1	7	4	5	3	2

Решение. Эта задача называется задачей Беллмана-Джонсона для двух последовательных приборов. Доказано ([5], [8]), что в оптимальном расписании порядок обслуживания требований множества N одинаков на обоих приборах. Приведем описание алгоритма.

Шаг 1. Среди чисел $t_{кA}$ и $t_{кB}$ выбираем минимальное. Если это число находится в строке, соответствующей прибору А, то данная работа будет обслуживаться первой как на приборе A, так и на приборе B. Если это число находится в строке, соответствующей прибору B, то данная работа будет обслуживаться последней как на приборе A, так и на приборе B.

Шаг 2. Исключаем из рассмотрения время выполнения тех работ, которые уже упорядочены. Если оставшееся множество работ пусто, то задача решена. В противном случае возвращаемся к первому шагу.

Переходим к решению задачи. Минимум по всем $t_{кA}$ и $t_{кB}$ приходится на работу с номером 2. Так как число 1 находится во второй строке (минимум упал на $t_{кB}$), то работа 2 будет обслуживаться последней как на приборе A, так и на приборе B. Последовательность выполнения работ пока выглядит так: $\pi_1 = (\,,\,,\,,\,,\,,2)$. Для дальнейшего решения исключаем работу 2 из рассмотрения и работаем с таблицей, приведенной ниже.

к	1	3	4	5	6	7
$t_{кA}$	3	8	6	7	2	5
	2	7	4	5	3	2

Минимум по всем оставшимся длительностям приходится на число 2. Так как число 2 находится и в первой, и во второй строках, то выбираем, например, работу 1. Так как и в этом случае число 2 находится во второй строке, то работа 1 будет обслуживаться последней как на приборе А, так и на приборе В (не считая работы 2). Последовательность выполнения работ пока выглядит так: $\pi_2 = (\,,\,,\,,\,,1,2)$. Для дальнейшего решения исключаем работу 1 из рассмотрения и работаем с таблицей, приведенной ниже.

к	3	4	5	6	7
$t_{кA}$	8	6	7	2	5
$t_{кB}$	7	4	5	3	2

Далее приведем только таблицы и соответствующие им последовательности обслуживания. Выбираемые элементы в таблицах подчеркнуты. $\pi_3 = (\,,\,,\,,7,1,2)$.

к	3	4	5	6
$t_{кA}$	8	6	7	2
$t_{кB}$	7	4	5	3

к	3	4	5
$t_{кA}$	8	6	7
$t_{кB}$	7	4	5

$\pi_4 = (6,\,,\,,7,1,2)$. $\pi_5 = (6,\,,4,7,1,2)$.

к	3	5		3
$t_{кA}$	8	7		8
$t_{кB}$	7	5		7

$\pi_6 = (6,\,,5,4,7,1,2)$. $\pi_7 = (6,3,5,4,7,1,2)$.

На рисунке 55 приведен один из вариантов решения задачи. Суммарный простой приборов A и B равен 12 Второй вариант решения приведен на рисунке 56.

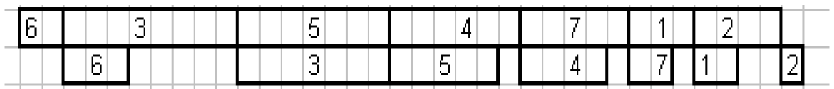


Рисунок 55

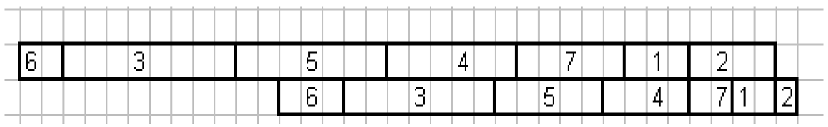


Рисунок 56

Пример 9. Пусть n требований обслуживаются одним прибором. Все требования поступают на обслуживание в момент времени d=0. Длительность обслуживания требования k (k=1, 2,…, n) равна t_k единиц времени. Если требование k обслуживается первым, то для подготовки прибора к обслуживанию этого требования необходимо δ_{0k} единиц времени. Если требование j обслуживается непосредственно после требования i, то для переналадки прибора с обслуживания требования i на обслуживание требования j необходимо δ_{ij} единиц времени ($1 \le i \ne j \le n$). Требуется так организовать процесс обслуживания (то есть указать такую последовательность прохождения требований через прибор), для которой общее время обслуживания всех требований минимально. Нетрудно заметить, что искомой последовательности при этом должно соответствовать наименьшее время пуско-наладочных работ. В ряде случаев желательно также учитывать время δ_{k0}, требуемое на приведение обслуживающего устройства в исходное состояние, если требование k обслуживается последним.

Таким образом, необходимо найти такую последовательность $\pi=(i_1, i_2,\ldots,i_n)$ обслуживания требований, при которой величина

$$\delta_{0i_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \delta_{i_k i_{k+1}} + \delta_{i_n 0}$$

была бы наименьшей.

Эта задача допускает простую графическую интерпретацию. Рассмотрим полный симметрический ориентированный граф (X,U), где $X=\{0,1,\ldots,n\}$ – множество вершин, U – множество дуг. Каждой дуге (i, j) графа приписано число δ_{ij}. Требуется найти контур, проходящий через каждую вершину один и только один раз (гамильтонов контур), которому соответствует наименьшая длина. Под длиной контура понимается величина, равная сумме длин дуг. Эта задача получила название задачи коммивояжера ([4], [5], [8]). Приведем решение задачи методом ветвей и границ при n=6 для матрицы расстояний C.

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 20 & 28 & 12 & 39 & 32 \\ 21 & \infty & 15 & 9 & 17 & 27 \\ 30 & 25 & \infty & 45 & 29 & 47 \\ 7 & 52 & 40 & \infty & 15 & 1 \\ 60 & 46 & 11 & 5 & \infty & 34 \\ 11 & 45 & 14 & 21 & 30 & \infty \end{pmatrix}$$

Решение. Опишем алгоритм решения задачи.

1. Привести матрицу расстояний по строкам и столбцам. Найти нижнюю границу всех гамильтоновых контуров

$$\varphi_{(R)} = \gamma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j .$$

2. Каждый ноль в приведенной матрице условно заменить на ∞ и найти сумму констант приведения $\gamma_{\overline{(i,\, j)}} = \alpha_i + \beta_j$.

Значения $\gamma_{\overline{(i,\, j)}}$ записать в соответствующих строках и столбцах приведенной матрицы рядом с нулями.

3. Исключить ту дугу (i, j), для которой сумма констант приведения $\gamma_{\overline{(i,\, j)}}$ является наибольшей (исключение дуги (i, j) достигается заменой соответствующего элемента матрицы на ∞. В результате будет образовано подмножество гамильтоновых контуров $\{\overline{(i,\, j)}\}$.

4. Привести полученную матрицу расстояний и определить нижнюю границу $\varphi_{\overline{(i,\, j)}}$ подмножества контуров $\{\overline{(i,\, j)}\}$.

5. Включить дугу (i, j) в контур, что приведен к исключению из матрицы, полученной после выполнения п. 2, i-й строки и j-го столбца. Заменить один из элементов полученной матрицы на ∞ для предотвращения образования негамильтонова контура.

6. Привести полученную матрицу расстояний и определить нижнюю границу $\varphi_{(i,\, j)}$ подмножества контуров $\{(i,\, j)\}$.

7. Проверить размерность сокращенной матрицы. Если сокращенная матрица имеет размерность 2 на 2, то перейти к пункту 9.

8. Сравнить нижние границы подмножеств контуров $\varphi_{\overline{(i,\, j)}}$ и $\varphi_{(i,\, j)}$ и перейти к шагу 2. Если при этом $\varphi_{\overline{(i,\, j)}} < \varphi_{(i,\, j)}$, то разбиению подлежит подмножество $\{\overline{(i,\, j)}\}$, в противном случае – подмножество $\{(i,\, j)\}$.

9. Определить гамильтонов контур и его длину.

10. Сравнить длину полученного контура с нижними границами оборванных ветвей. Если длина контура не превосходит нижних границ оборванных ветвей дерева решений, то получен оптимальный гамильтонов контур. Если длина полученного гамильтонова контура больше границы некоторых ветвей, то, действуя по алгоритму, развиваем эти ветви до тех пор, пока не получим контур с меньшей длиной или убедимся, что такого не существует.

Выполним приведение матрицы по строкам:

	1	2	3	4	5	6	
1	∞	20	28	12	39	32	12
2	21	∞	15	9	17	27	9
3	30	25	∞	45	29	47	25
4	7	52	40	∞	15	1	1
5	60	46	11	5	∞	34	5
6	11	45	14	21	30	∞	11
							63 $=\sum_{i=1}^{6}\alpha_i$

В результате будет получена матрица:

	1	2	3	4	5	6
1	∞	8	16	0	27	20
2	12	∞	6	0	8	18
3	5	0	∞	20	4	22
4	6	51	39	∞	14	0
5	55	41	6	0	∞	29
6	0	34	3	10	19	∞

Выполним приведение матрицы по столбцам:

	1	2	3	4	5	6	
1	∞	8	16	0	27	20	
2	12	∞	6	0	8	18	
3	5	0	∞	20	4	22	
4	6	51	39	∞	14	0	
5	55	41	6	0	∞	29	
6	0	34	3	10	19	∞	
			3		4		7 $=\sum_{j=1}^{6}\beta_j$

В результате будет получена полностью приведенная матрица:

	1	2	3	4	5	6
1	∞	8	13	0	23	20
2	12	∞	3	0	4	18
3	5	0	∞	20	0	22
4	6	51	36	∞	10	0
5	55	41	3	0	∞	29
6	0	34	0	10	15	∞

Сумма констант приведения для полностью приведенной матрицы равна $\sum_{i=1}^{6}\alpha_i + \sum_{j=1}^{6}\beta_j = 70$.

Выполняем оценку нулевых элементов полностью приведенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} \infty & 8 & 13 & 0^{8} & 23 & 20 \\ 12 & \infty & 3 & 0^{3} & 4 & 18 \\ 5 & 0^{8} & \infty & 20 & 0^{4} & 22 \\ 6 & 51 & 36 & \infty & 10 & 0^{24} \\ 55 & 41 & 3 & 0^{3} & \infty & 29 \\ 0^{5} & 34 & 0^{3} & 10 & 15 & \infty \end{pmatrix}$$

Наибольшую оценку получил элемент, находящийся на пересечении 4 строки и 6 столбца. Поэтому все множество гамильтоновых контуров разбивается на подмножества $\{(4,6)\}$ и $\{\overline{(4,6)}\}$. На рисунке 57 приведено дерево решений на данном этапе.

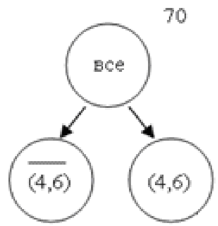


Рисунок 57

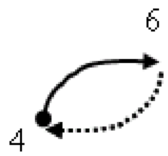


Рисунок 58

Рассмотрим подмножество $\{(4,6)\}$. Включая дугу (4, 6) в контур, следует запретить вхождение в него дуги (6, 4) (рис. 58). Вычеркиваем 4 строку, 6 столбец и запрещаем переход (6, 4). В результате получится матрица, приведенная на рисунке 59.

(4,6)	1	2	3	4	5
1	∞	8	13	0	23
2	12	∞	3	0	4
3	5	0	∞	20	0
5	55	41	3	0	∞
6	0	34	0	∞	15

Рисунок 59

Так как в каждой строке и каждом столбце вновь полученной матрицы есть нулевой элемент, то $\varphi_{\{(4,6)\}} = 70$.

Невключение дуги (4, 6) в множество гамильтоновых контуров приводит к матрице, приведенной на рисунке 60. Полученную таким образом матрицу можно привести по 4 строке и 6 столбцу, в результате чего оценка увеличится на 24 и станет равной 94. На рисунке 61 приведено дерево решений с оценками вершин на данном этапе.

Так как 70<94, то рассматриваем множество контуров, включающих дугу (4, 6). Выполняем оценку нулевых элементов матрицы, приведенной на рисунке 62.

$$\begin{pmatrix} \infty & 8 & 13 & 0^8 & 23 & 20 \\ 12 & \infty & 3 & 0^3 & 4 & 18 \\ 5 & 0^8 & \infty & 20 & 0^4 & 22 \\ 6 & 51 & 36 & \infty & 10 & \infty \\ 55 & 41 & 3 & 0^3 & \infty & 29 \\ 0^5 & 34 & 0^3 & 10 & 15 & \infty \end{pmatrix}$$

Рисунок 60

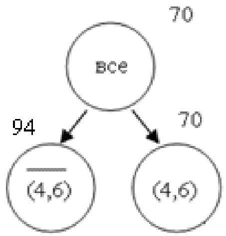


Рисунок 61

	1	2	3	4	5
1	∞	8	13	0^8	23
2	12	∞	3	0^3	4
3	5	0^8	∞	20	0^4
5	55	41	3	0^3	∞
6	0^5	34	0^3	∞	15

Рисунок 62

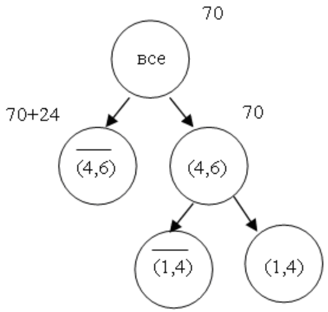


Рисунок 63

Наибольшую оценку, равную 8, имеют два элемента, поэтому выбираем любой из них, например, (1, 4). На рис. 63 приведено дерево решений на данном этапе.

Невключение дуги (1, 4) в контур приведет к увеличению оценки на 8 (рис. 64).

$\overline{(1,4)}$	1	2	3	4	5	
1	∞	8	13	∞	23	8
2	12	∞	3	0	4	
3	5	0	∞	20	0	
5	55	41	3	0	∞	
6	0	34	0	∞	15	

$\overline{(1,4)}$	1	2	3	4	5
1	∞	0	5	∞	15
2	12	∞	3	0	4
3	5	0	∞	20	0
5	55	41	3	0	∞
6	0	34	0	∞	15

Рисунок 64

Включение дуги (1, 4) потребует запретить переход по дуге (6, 1) (рис. 65). Соответствующая матрица после вычеркивания 1 строки, 4 столбца и замены элемента (6, 1) на ∞, приведена на рисунке. 66.

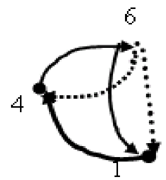


Рисунок 65

(1, 4)	1	2	3	5
2	12	∞	3	4
3	5	0	∞	0
5	55	41	3	∞
6	∞	34	0	15

Рисунок 66

Эту матрицу следует привести по строкам и столбцам. Результат приведения показан на рис. 67.

(1, 4)	1	2	3	5	
2	12	∞	3	4	3
3	5	0	∞	0	
5	55	41	3	∞	3
6	∞	34	0	15	
					6

(1, 4)	1	2	3	5
2	9	∞	0	1
3	5	0	∞	0
5	52	38	0	∞
6	∞	34	0	15
	5			

(1, 4)	1	2	3	5
2	4	∞	0	1
3	0	0	∞	0
5	47	38	0	∞
6	∞	34	0	15

Рисунок 67

В результате получаем дерево решений, приведенное на рисунке 68.

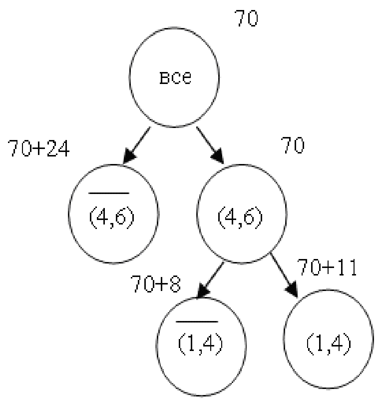


Рисунок 68

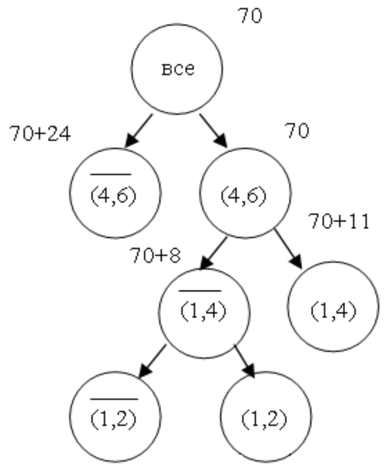


Рисунок 69

Так как 78<81, следует использовать вариант невключения дуги (1, 4). Это означает возврат к матрице, приведенной на рис. 64 справа. Выполняем оценку нулевых элементов этой матрицы (рис. 70).

$\overline{(1,4)}$	1	2	3	4	5
1	∞	0^5	5	∞	15
2	12	∞	3	0^3	4
3	5	0^0	∞	20	0^4
5	55	41	3	0^3	∞
6	0^5	34	0^3	∞	15

Рисунок 70

Наибольшую оценку получил элемент, расположенный в 1 строке и 2 столбце. Следовательно, дерево решений на данном этапе принимает вид в соответствии с рисунком 69.

Невключение дуги (1, 2) приведет к увеличению оценки на 5 (рис. 71).

$\overline{(1,2)}$	1	2	3	4	5
1	∞	∞	5	∞	15
2	12	∞	3	0	4
3	5	0	∞	20	0
5	55	41	3	0	∞
6	0	34	0	∞	15

	$\overline{(1,2)}$	1	2	3	4	5
5	1	∞	∞	0	∞	10
	2	12	∞	3	0	4
	3	5	0	∞	20	0
	5	55	41	3	0	∞
	6	0	34	0	∞	15

Рисунок 71

Включение дуги (1, 2) потребует запретить переход по дуге (2, 1) (рис. 72).

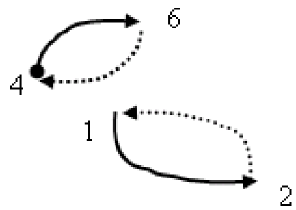


Рисунок 72

(1,2)	1	3	4	5
2	∞	3	0	4
3	5	∞	20	0
5	55	3	0	∞
6	0	0	∞	15

Рисунок 73

Соответствующая матрица после вычеркивания 1 строки, 2 столбца и замены элемента (2, 1) на ∞ приведена на рисунке 73.

Эта матрица приведена по строкам и столбцам. В результате получаем дерево решений, приведенное на рисунке 74. Так как 78<83, продолжаем решение задачи по ветке, включающей дугу (1, 2).

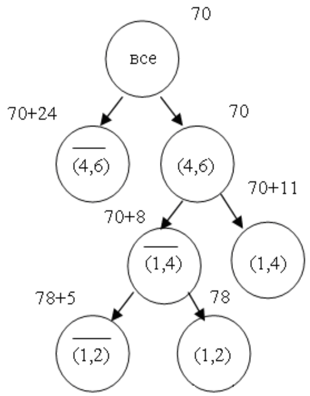


Рисунок 74

(1,2)	1	3	4	5
2	∞	3	0^3	4
3	5	∞	20	0^9
5	55	3	0^3	∞
6	0^5	0^3	∞	15

Рисунок 75

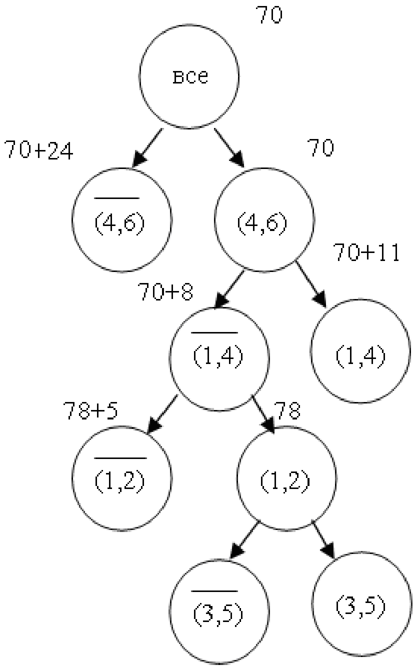


Рисунок 76

Выполняем оценку нулевых элементов матрицы, приведенной на рисунке 73. Результат оценки показан на рисунке 75. Наибольшую оценку получил элемент, расположенный

в 3 строке и 5 столбце. Следовательно, дерево решений на данном этапе принимает вид в соответствии с рисунком 76.

Невключение дуги (3, 5) приведет к увеличению оценки на 9 (рис. 77).

$\overline{(3,5)}$	1	3	4	5	
2	∞	3	0	4	
3	5	∞	20	∞	5
5	55	3	0	∞	
6	0	0	∞	15	

$\overline{(3,5)}$	1	3	4	5
2	∞	3	0	4
3	0	∞	15	∞
5	55	3	0	∞
6	0	0	∞	15
				4

$\overline{(3,5)}$	1	3	4	5
2	∞	3	0	0
3	0	∞	15	∞
5	55	3	0	∞
6	0	0	∞	11

Рисунок 77

Включение дуги (3, 5) потребует запретить переход по дуге (5, 3) (рис. 78).

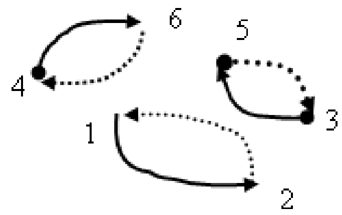


Рисунок 78

Соответствующая матрица после вычеркивания 3 строки, 5 столбца и замены элемента (5, 3) на ∞ приведена на рисунке 79.

(3,5)	1	3	4
2	∞	3	0
5	55	∞	0
6	0	0	∞

Рисунок 79

(3,5)	1	3	4
2	∞	3	0^3
5	55	∞	0^{55}
6	0^{55}	0^3	∞

Рисунок 80

Эта матрица приведена по строкам и столбцам. Следовательно, оценка длины контура в 78 единиц остается неизменной. Так как 78<78+8, продолжаем решение задачи по ветке, включающей дугу (3, 5).

Выполняем оценку нулевых элементов матрицы, приведенной на рисунке 79. Результат приведения показан на рисунке 80.

Наибольшую оценку получили два элемента (5 строка, 4 столбец и 6 строка, 1 столбец). Следовательно, дерево решений на данном этапе принимает вид в соответствии с рисунком 82.

Невключение дуги (5, 4) приведет к увеличению оценки на 55 (рис. 81).

$\overline{(5,4)}$	1	3	4
2	∞	3	0
5	55	∞	∞
6	0	0	∞

55

$\overline{(5,4)}$	1	3	4
2	∞	3	0
5	0	∞	∞
6	0	0	∞

Рисунок 81

Включение дуги (5, 4) потребует запретить переход по дуге (6, 3) (рис. 83). Соответствующая матрица после вычеркивания 5 строки и 4 столбца и запрета перехода по дуге (6,3) приведена на рисунке 85 слева.

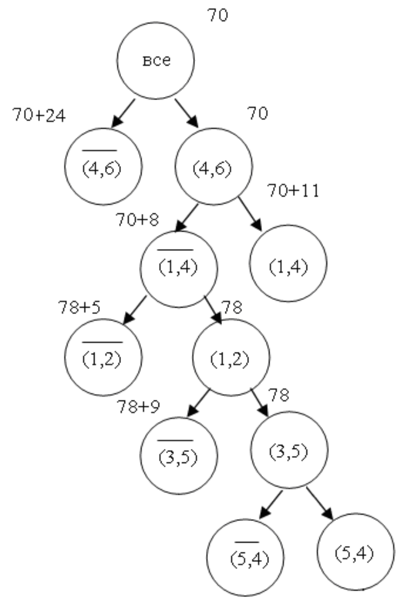


Рисунок 82

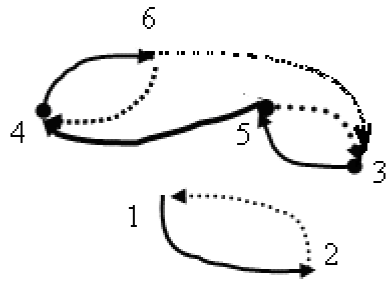


Рисунок 83

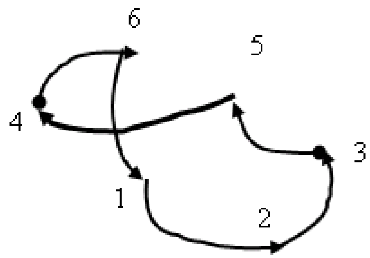


Рисунок 84

Приводя полученную квадратную матрицу порядка 2 путем вычитания 3 из первой строки, получаем увеличение оценки на 3.

(5,4)	1	3
2	∞	3
6	0	∞

3

(5,4)	1	3
2	∞	0
6	0	∞

Рисунок 85

В последней матрице выбор двух оставшихся дуг производится однозначно − это дуги (6, 1) и (2, 3). На рисунке 84 приведен полученный контур, а на рисунке 86 – дерево решений. Длина полученного контура равна 81.

Анализируя полученное решение, приходим к выводу о том, что оно оптимально, так как оценки всех остальных «оборванных» ветвей дерева решений не меньше полученного значения.

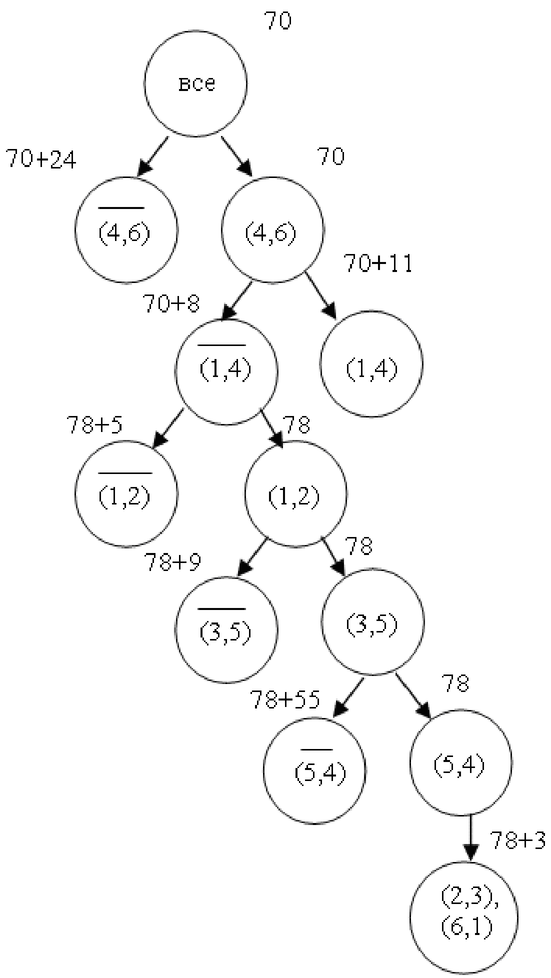


Рисунок 86

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти решение задачи Беллмана-Джонсона для двух последовательных приборов. Длительности обслуживания приборами А и В приведены в таблице 10.

Таблица 10

вариант	$к$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$t_{кA}$	5	4	5	4	2	4	3	5	2	1
	$t_{кB}$	2	1	2	4	3	4	1	3	2	5
2	$t_{кA}$	2	4	5	5	4	3	1	2	1	1
	$t_{кB}$	5	3	4	5	2	1	4	3	1	5
3	$t_{кA}$	3	1	5	3	3	3	1	5	3	3
	$t_{кB}$	5	3	4	4	4	4	2	1	1	2
4	$t_{кA}$	1	2	3	1	1	2	1	4	5	5
	$t_{кB}$	4	3	1	4	3	3	3	4	1	5
5	$t_{кA}$	2	1	3	3	4	1	2	3	3	4
	$t_{кB}$	4	3	3	4	5	3	1	4	4	2
6	$t_{кA}$	4	5	1	2	3	2	4	4	4	1
	$t_{кB}$	3	3	3	4	3	1	2	1	1	2
7	$t_{кA}$	4	4	2	5	5	5	5	4	5	4
	$t_{кB}$	4	1	1	5	1	3	5	1	1	1
8	$t_{кA}$	2	5	5	2	3	2	5	4	2	5
	$t_{кB}$	5	4	1	2	3	3	4	4	2	3
9	$t_{кA}$	3	5	3	1	2	5	3	3	5	5
	$t_{кB}$	1	3	2	4	5	1	2	2	2	5
10	$t_{кA}$	5	4	1	2	1	5	1	3	2	4
	$t_{кB}$	2	5	3	5	3	3	2	5	4	5

Продолжение таблицы 10

11	$t_{кA}$	2	4	3	1	4	5	4	3	1	4
	$t_{кB}$	3	3	1	3	3	5	1	5	2	1
12	$t_{кA}$	1	2	2	5	3	1	3	4	3	3
	$t_{кB}$	4	4	2	1	1	5	3	5	2	1
13	$t_{кA}$	4	4	3	5	5	4	1	3	3	5
	$t_{кB}$	2	2	5	5	2	3	3	3	5	5
14	$t_{кA}$	3	5	5	4	1	4	1	3	5	1
	$t_{кB}$	2	5	2	5	3	5	3	3	1	1
15	$t_{кA}$	1	4	5	4	1	4	1	1	4	4
	$t_{кB}$	2	2	4	3	5	1	3	1	5	5
16	$t_{кA}$	2	4	1	2	3	5	3	4	2	4
	$t_{кB}$	5	1	3	2	2	1	4	4	5	5
17	$t_{кA}$	5	2	2	1	1	5	5	4	4	1
	$t_{кB}$	1	5	5	3	4	3	5	4	1	3
18	$t_{кA}$	5	2	2	4	4	1	1	5	1	2
	$t_{кB}$	5	1	5	3	2	3	3	2	4	1
19	$t_{кA}$	1	5	4	1	3	4	5	1	1	3
	$t_{кB}$	1	2	1	4	1	1	3	3	5	4
20	$t_{кA}$	4	1	2	1	5	1	4	1	5	2
	$t_{кB}$	5	4	5	1	5	5	1	4	1	3

2. Найти точное решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ.

2.1.

∞	31	15	19	8	55
19	∞	22	31	7	35
25	43	∞	53	57	16
5	50	49	∞	39	9
24	24	33	5	∞	14
34	26	6	3	36	∞

2.2.

∞	20	28	12	39	32
21	∞	15	9	17	27
30	25	∞	45	29	47
7	52	40	∞	15	1
60	46	11	5	∞	34
11	45	14	21	30	∞

2.3.

∞	22	30	14	41	34
23	∞	17	11	19	29
32	27	∞	47	31	49
9	54	44	∞	17	3
62	48	13	7	∞	36
13	47	16	23	32	∞

2.4.

∞	64	57	52	1	33
37	∞	40	3	68	18
29	3	∞	33	9	25
48	35	29	∞	44	36
49	64	4	8	∞	58
43	3	69	16	35	∞

2.5.

∞	60	31	66	7	15
7	∞	23	4	37	58
32	43	∞	18	5	12
4	31	56	∞	50	9
50	37	58	34	∞	11
12	43	38	60	48	∞

2.6.

∞	9	67	42	40	58
47	∞	66	31	6	68
1	4	∞	9	43	22
19	69	4	∞	47	45
31	46	68	10	∞	21
69	39	7	15	30	∞

2.7.

∞	17	53	29	34	16
35	∞	41	20	37	45
41	4	∞	65	38	59
40	29	46	∞	15	40
33	4	49	50	∞	25
49	11	8	35	24	∞

2.8.

∞	65	60	59	3	41
61	∞	34	70	70	32
30	29	∞	44	16	51
58	41	10	∞	28	4
55	58	38	12	∞	28
24	57	56	15	37	∞

2.9.

∞	22	54	52	41	52
17	∞	52	35	36	28
4	62	∞	63	35	41
37	63	7	∞	36	68
19	34	17	64	∞	10
65	34	62	3	26	∞

2.10.

∞	27	28	4	3	70
58	∞	14	70	6	31
68	19	∞	10	43	17
4	43	22	∞	33	57
47	44	58	69	∞	60
50	9	35	2	36	∞

2.11.

∞	6	9	60	8	18
44	∞	16	49	34	58
10	41	∞	11	56	6
43	30	40	∞	17	4
49	42	26	18	∞	41
59	64	18	52	27	∞

2.12.

∞	8	66	17	32	43
1	∞	35	70	62	27
4	59	∞	35	30	1
52	30	41	∞	51	70
18	8	32	6	∞	17
13	63	40	24	61	∞

2.13.

∞	41	13	10	5	31
45	∞	16	28	6	67
45	4	∞	50	12	61
37	31	24	∞	20	67
7	6	62	24	∞	40
49	41	3	7	26	∞

2.14.

∞	26	54	63	8	6
40	∞	68	17	16	20
42	43	∞	64	68	18
60	18	9	∞	49	3
21	32	9	7	∞	57
29	44	43	24	18	∞

2.15.

∞	38	3	6	26	34
14	∞	5	33	24	24
9	39	∞	49	50	5
16	57	53	∞	43	25
35	7	31	22	∞	19
55	8	19	15	31	∞

2.16.

∞	14	9	16	35	55
38	∞	39	57	7	8
3	5	∞	53	31	19
6	33	49	∞	22	15
26	24	50	43	∞	31
34	24	5	25	19	∞

2.17.

∞	1	53	60	48	33
2	∞	9	32	9	27
45	38	∞	24	39	38
3	22	39	∞	50	10
43	21	58	26	∞	37
35	2	11	25	19	∞

2.18.

∞	2	45	3	43	35
1	∞	38	22	21	2
53	9	∞	39	58	11
60	32	24	∞	26	25
48	9	39	50	∞	19
33	27	38	10	37	∞

4. Сетевое планирование и управление

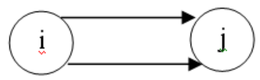
Пример 10. Построить сетевую модель программы опроса общественного мнения, которая включает работы, представленные в таблице 11. Найти критический путь.

Таблица 11

Содержание работы	Код работы	Длительность работы (в днях)
Разработка анкет	A	1
Распечатка анкет	B	0,5
Прием на работу персонала	C	1
Обучение персонала	D	2
Выбор опрашиваемых лиц	E	2
Рассылка им анкет	F	1
Анализ полученных данных	G	6

Решение. При построении сетевого графика необходимо следовать следующим правилам [4]:

1) длина стрелки не зависит от времени выполнения работы;
2) стрелка может не быть прямолинейным отрезком;
3) для действительных работ используются сплошные, а для фиктивных – штриховые стрелки;
4) каждая операция должна быть представлена только одной стрелкой;
5) между одними и теми же событиями не должно быть параллельных работ, т.е. работ с одинаковыми кодами (рис. 87);



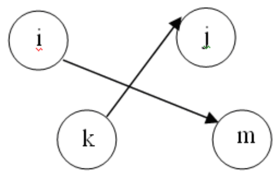


Рисунок 87 Рисунок 88

6) следует избегать пересечения стрелок (рис. 88);
7) не должно быть стрелок, направленных справа налево;

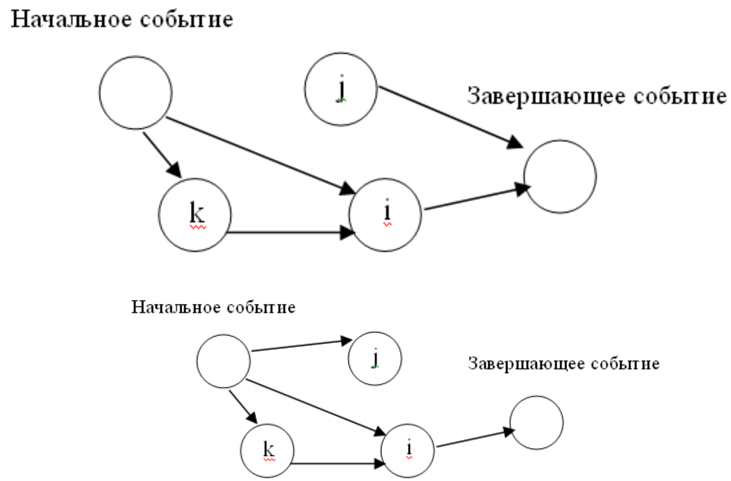


Рисунок 89

8) номер начального события должен быть меньше номера конечного события;
9) не должно быть висячих (т.е. не имеющих предшествующих событий), кроме исходного, и тупиковых событий (т.е. не имеющих последующих событий), кроме завершающего (рис. 89);
10) не должно быть циклов (рис.90).

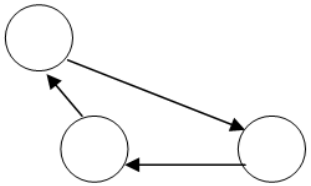


Рисунок 90

Под временными характеристиками сетевого графика понимают:

1) ранние и поздние моменты начала операций;
2) ранние и поздние моменты окончания операций;
3) резервы операций (полный, свободный, независимый);

1) Ранний момент события i – это наиболее раннее время, когда возможно начало операций, исходящих из узла i. Вычислительный процесс для определения ранних моментов событий называется прямым проходом сетевого графика. Для обозначения ранних моментов принято использовать сокращение E (от английского слова *early*) и значок □. Для начального узла сетевого графика ранний момент полагается равным нулю. Ранний момент события j (j>1) определяется как сумма раннего момента предыдущего события E_i и длительности соответствующей операции (i, j) (рис. 91).

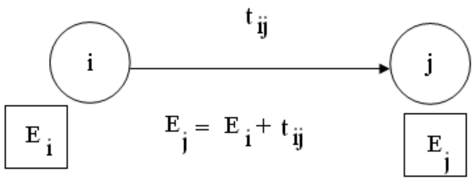
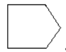


Рисунок 91

Если в узел j входят несколько операций, то ранним моментом события j является максимальная из сумм $\{E_k + t_{kj}\}$, где максимум берется по всем дугам (k, j). Ранним началом операции (i, j) является ранний момент события i. Для определения раннего окончания операции (i, j) следует найти сумму $E_i + t_{ij}$.

2) Вычислительный процесс для определения поздних моментов событий сетевого графика называется обратным проходом. Для обозначения поздних моментов принято использовать сокращение L (от английского слова late) и значок



. Вычисления начинаются с последнего узла. Поздний момент его полагается равным раннему моменту (если поздний момент завершающего события не задан). Поздний момент события i определяется как разность между поздним моментом последующего события j и длительностью операции (i, j) (рис. 92). Если из узла i выходят несколько операций, то поздним моментом является минимальная из разностей $\{L_k - t_{ik}\}$, где минимум берется по всем дугам (i, k). Поздним окончанием операции (i, j) является поздний момент события j. Для определения позднего начала операции (i, j) следует найти разность $L_j - t_{ij}$.

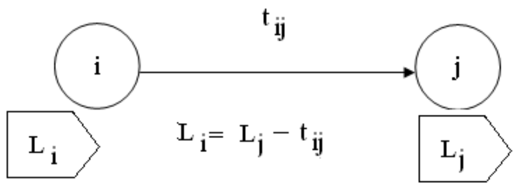


Рисунок 92

3) Полный $R_{ij}^{п}$, свободный $R_{ij}^{с}$ и независимый $R_{ij}^{н}$ резервы операции (i, j) вычисляются по формулам:

$$R_{ij}^{п} = L_j - E_i - t_{ij};$$

$$R_{ij}^{с} = E_j - E_i - t_{ij};$$

$$R_{ij}^{н} = \max\{0, E_j - L_i - t_{ij}\}.$$

На рисунке 93 все виды резервов показаны схематично.

Полный резерв используется, в основном, для установления приоритетов операций. Свободный резерв используется, в основном, для выявления операций, задержка выполнения которых не повлияет на полные резервы последующих операций. Независимый резерв устанавливает операции, задержка выполнения которых не влияет на полные резервы ни предшествующих, ни последующих операций.

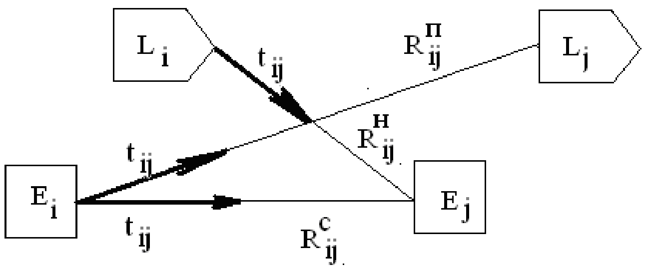


Рисунок 93

Критический путь – это полный путь максимальной длины. Операции, лежащие на критическом пути, также называют критическими.

Из условия задачи известно содержание работ, но явно не указаны взаимосвязи между работами. Поэтому для их установления необходимо проанализировать смысл каждой конкретной работы и выяснить, какие из остальных работ должны ей непосредственно предшествовать. Исходной (начальной) работой, начинающей сетевой график, в данном случае является «прием на работу» (C), поскольку все остальные работы должны выполняться уже принятыми на работу сотрудниками. Перед выполнением всех работ по опросу общественного мнения необходимо обучить персонал (D). Перед тем как разослать анкеты (F), их надо разработать (A), распечатать (B) и выбрать опрашиваемых лиц (E), причем работу с анкетами и выбор лиц можно выполнять одновре-

менно. Завершающей работой проекта является анализ полученных данных (G), который нельзя выполнить без предварительной рассылки анкет (F). В результате этих рассуждений построим сетевую модель и пронумеруем события модели (рис.94). Нетрудно заметить, что критическим путем будет путь 1→2→3→5→6→7.

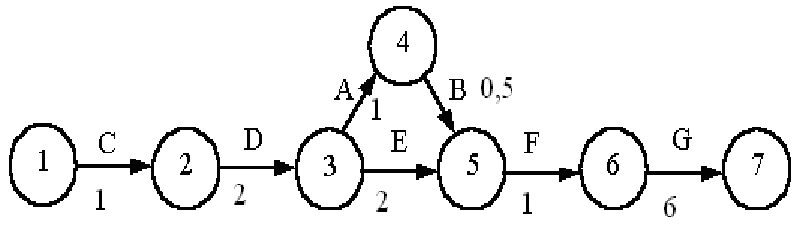


Рисунок 94

Пример 11. Построить сетевую модель, включающую некоторую совокупность работ, связанных между собой отношениями предшествования:

1) A, B и C – исходные операции проекта;
2) A и B предшествуют D;
3) B предшествует E и H;
4) C предшествует G;
5) E и H предшествуют I и J;
6) C, D и J предшествуют K;
7) K предшествует L.

Решение. В пункте 1) условия явно указано, что работы A, B и C являются исходными, поэтому изобразим их тремя стрелками, выходящими из исходного события 1. Пункт 2) условия означает, что стрелки работ A и B должны войти в одно событие, из которого выйдет стрелка работы D. Но поскольку стрелки работ A и B начинаются в одном событии, то имеет место параллельность работ, которая недопустима правилами построения сетевых моделей.

Для ее устранения введем дополнительное событие 2, в которое войдет работа B, а затем соединим события 2 и 3, в которые входят работы A и B, штриховой стрелкой фиктивной работы. В данном случае фиктивная работа (2,3) не соответствует никакой реальной работе, а лишь отображает логическую связь между работами B и D. Дальнейшее построение рассмотрим с помощью рисунка 95.

Согласно пункту 3) условия задачи, из события 2 выходят две стрелки работ E и H. Согласно пункту 4) условия задачи стрелка работы C должна войти в общее событие, из которого выйдет стрелка работы G. Проблема с параллельностью работ E и H (пункт 5 условия задачи) решается путем введения дополнительного события 5 и фиктивной работы (5,6). Для отображения в сетевой модели пункта 6) условия задачи введем стрелки работ D и J в событие 7, а связь работы C с работой K отобразим с помощью фиктивной работы (4,7). Стрелку работы C нельзя напрямую вводить в событие 7, потому что после нее должна следовать работа G, которая с работами D и J никак не связана. Стрелка работы L выходит из события 8, т.е. после окончания работы K в соответствии с пунктом 7) условия задачи.

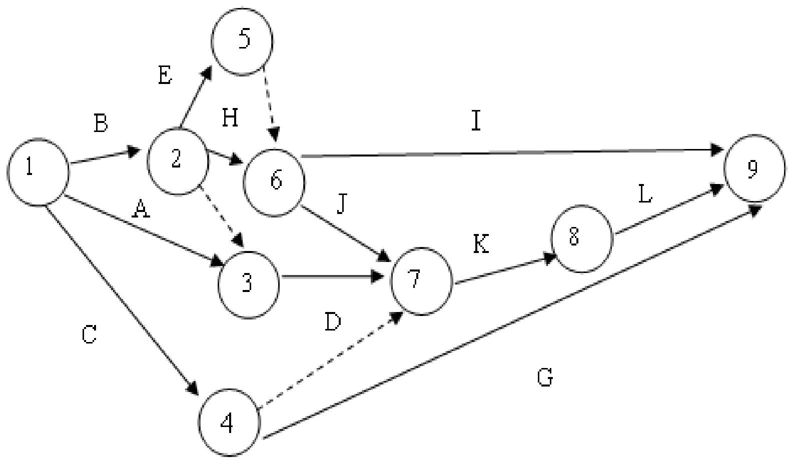


Рисунок 95

Поскольку в условии не указано, что работы L, I и G предшествуют каким-либо другим работам, то эти работы являются завершающими и их стрелки войдут в завершающее событие 9.

Пример 12. Определить временные характеристики сетевого графика, представленного на рисунке 96. Указать критический путь.

Решение. Для критических операций должны выполняться следующие условия: а) ранний и поздний моменты для начального и конечного узлов таких операций должны быть равны; б) критические операции не имеют резервов времени никакого вида.

Ранее начало операций (1, 2), (1, 3) и (1, 4) равно 0. Событие 2 является начальным для работы (2, 5), а событие 3 – для работ (3, 5) и (3 6). Так как событию 5 предшествуют две операции, выбираем максимальное из значений 4+2 и 5+6. Следовательно, ранние начало операции (5, 7) равно 11. Аналогично, ранее начало операции (6, 7) равно 10. Ранний момент наступления события 7 – это max{11+2, 10+5}=15. Следовательно, проект может завершиться по прошествии не менее чем 15 единиц времени.

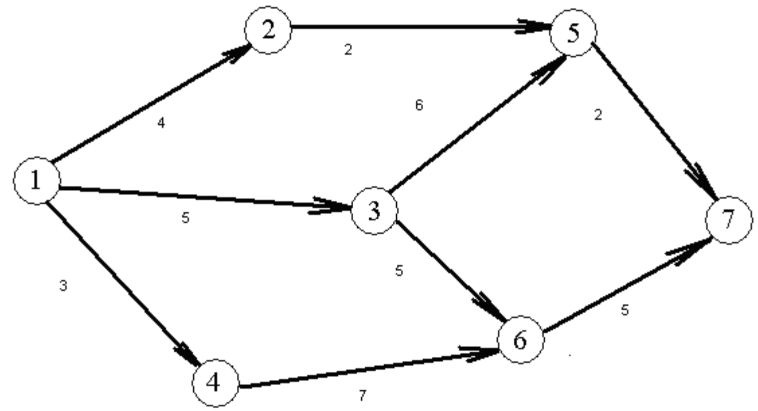


Рисунок 96

Начинаем расчет поздних моментов наступления событий. В соответствии с алгоритмом поздний момент наступления события 7 равен раннему моменту, т.е. 15. Остальные значения приведены на рисунке 97 и в таблице 12. Вычисление всех остальных временных характеристик приведено в таблице 12. Из таблицы видно, что у проекта два критических пути: 1→4→6→7 и 1→3→6→7. Длина критического пути равна 15.

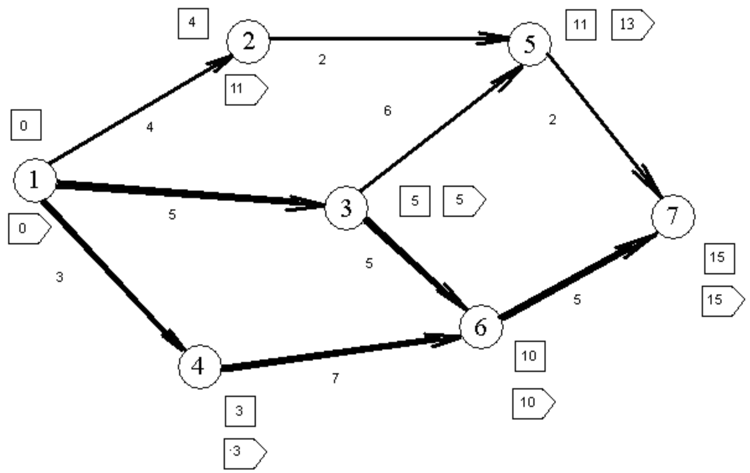


Рисунок 97

Таблица 12

Операция		Длительность	Раннее		Позднее		Резерв		
			начало	окончание	начало	окончание	полный	свободный	независимый
1	2	4	0	4	7	11	7	0	0
1	3	5	0	5	0	5	0	0	0
1	4	3	0	3	0	3	0	0	0
2	5	2	4	6	11	13	7	5	0
3	5	6	5	11	7	13	2	0	0
3	6	5	5	10	5	10	0	0	0
4	6	7	3	10	3	10	0	0	0
5	7	2	11	13	13	15	2	2	0
6	7	5	10	15	10	15	0	0	0
i	j	t_{ij}	E_i	$E_i + t_{ij}$	$L_j - t_{ij}$	L_j	$R_{ij}^{п}$	$R_{ij}^{с}$	$R_{ij}^{н}$

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить сетевые модели для проектов, информация о которых представлена ниже.

1.1. Фундамент здания можно построить в виде четырех последовательных секций. Операции по каждой секции включают рытье котлована, монтаж металлоконструкций и укладку бетона. Отрывку котлована одной секции нельзя начинать, пока не закончится рытье котлована предыдущей секции. То же относится и к заливке бетона. Порядок следования операций и их длительность представлены в таблице 13.

Таблица 13

Операция	Описание	Непосредственно предшествующая операция
A	Расчистка стройплощадки	-
B	Доставка материалов и оборудования	-
C	Выемка котлована под фундамент	A
D	Заливка фундамента бетоном	C
E	Наружные сантехнические работы	B, C
F	Сооружение каркаса здания	D
G	Прокладка электропроводной сети	F
H	Настилка полов	G
I	Кровельные работы	F
J	Внутренние сантехнические работы	E, H
K	Обшивка досками	I
L	Внешняя теплоизоляция	F, J
M	Установка дверных и оконных рам	F
N	Кладка кирпича	L, M
O	Теплоизоляция стен и потолков	G, J
P	Штукатурка стен и потолков	O
Q	Теплоизоляция крыши	I, P
R	Внутренняя отделка	P

Продолжение таблицы 13

S	Наружная отделка	I, N
T	Благоустройство территории	S

1.2. Планируется перенос участка высоковольтной линии напряжения длиной около 0,5 км. Перенос линии необходим в связи с расширением дороги, вдоль которой она проходит. Порядок следования операций представлен в таблице 14.

Таблица 14

Операция	Описание	Непосредственно предшествующая операция
A	Оценка состава и содержания работ	-
B	Осведомление потребителей электроэнергии	A
C	Составление заявки на материалы и оборудование	A
D	Обследование района проведения работ	A
E	Доставка опор и материалов	C, D
F	Распределение опор по точкам монтажа	E
G	Увязка точек монтажа	D
H	Разметка точек монтажа	G
I	Рытье ям под опоры	H
J	Монтаж опор	F, I
K	Защита старых проводов	F, I
L	Протяжка новых проводов	J, K
M	Монтаж арматуры	L
N	Выверка провиса новых проводов	L
O	Подстрижка деревьев	D
P	Обесточивание и переключение линии	D, M, N, O
Q	Включение и фазировка новой линии	P
R	Уборка строительного мусора	Q

Продолжение таблицы 14

S	Снятие старых проводов	Q
T	Демонтаж старых опор	S
U	Доставка на склад неиспользованных материалов	I

1.3. В таблице 15 приведены операции, необходимые для организации выступления хора при свечах.

Таблица 15

Операция	Описание	Непосредственно предшествующая операция
A	Выбор музыкального произведения	-
B	Разучивание музыки	A
C	Размножение нот	A
D	Пробные спевки	B, C
E	Репетиция хора	D
F	Репетиция солистов	D
G	Получение канделябров (в прокат)	D
H	Закупка свечей	G
I	Установка канделябров	H
J	Закупка декораций	D
K	Установка декораций	J
L	Заказ костюмов для хора	D
M	Отглаживание костюмов	L
N	Проверка системы усиления звука	D
O	Выбор грамзаписей	N
P	Настройка системы усиления звука	O
Q	Генеральная репетиция	E, F, P
S	Проведение концерта	M, P

1.4. Операции, связанные с покупкой нового автомобиля, приведены в таблице 16.

Таблица 16

Операция	Описание	Непосредственно предшествующая операция
A	Проведение технико-экономического обоснования	-
B	Поиск покупателя имеющегося автомобиля	A
C	Составление списка выпускаемых моделей	A
D	Оценка выпускаемых моделей	C
E	Опрос мнений автомехаников	C
F	Сбор информации от агентов по продаже	C
G	Систематизация собранной информации	D, E, F
H	Выбор трех наиболее предпочтительных моделей	G
I	Ходовая проверка трех выбранных моделей	H
J	Сбор гарантийных и финансовых данных	H
K	Выбор одной модели	I, J
L	Сравнение агентов по продаже и выбор агента	K
M	Поиск желательного цвета и оценка возможных вариантов	L
N	Повторная ходовая проверка выбранной модели	L
O	Оформление покупки нового автомобиля	B, M, N

1.5. Реактор и накопительный резервуар соединены герметичным трубопроводом. Вследствие эрозии материала требуется периодическая замена трубопровода. Клапаны, расположенные в трубопроводе и на его концах, также должны заменяться. Задача состоит в составлении основного календарного плана периодического технического обслуживания. Кроме того, необходимо заказать трубопровод и клапаны. Точные чертежи отсутствуют – их нужно изготовить. Линия расположена в верхней части установки, поэтому для операции замены нужно возвести подмости. Предполагается, что работы ведутся круглосуточно. Порядок следования операций приведен в таблице 17.

Таблица 17

Операция	Описание	Непосредственно предшествующая операция	Множество последующих работ
начало		-	Q, R
Q	Подготовительные операции	Начало	A
R	Подготовка линии к отключению	начало	F
A	Измерение и изготовление чертежей	Q	B
B	Составление перечня материалов	A	C, D, F, G
C	Закупка трубопровода	B	E
D	Закупка клапанов	B	K
E	Изготовление секций	C	I
F	Отключение линии	B,R	H, K
G	Сооружение подмостей	B	H, K
H	Снятие старого трубопровода и клапанов	F, G	I
I	Установка нового трубопровода	E, H	J
J	Сварка трубопровода	I	L, N
K	Установка клапанов	D, F, G	L, N
L	Подгонка трубопровода и клапанов	J, K	M, O
M	Проверка на герметичность	L	P
N	Нанесение изоляции	J, K	-
O	Разборка подмостей	L, N	-
P	Уборка территории	M, O	окончание
окончание	-	P	нет

1.6. Строительная организация пытается составить план работ, связанных со строительством дома по заказу. В таблице

18 приведены данные о последовательности работ и отношениях предшествования.

Таблица 18

Операция	Описание	Непосредственно предшествующая операция
A	Начало	-
B	Рытье котлована и заливка основания	A
C	Заливка бетонного фундамента	B
D	Сооружение деревянного каркаса, в том числе и крыши	C
E	Выполнение кирпичной кладки	D
F	Укладка канализационных и водосточных труб в подвальном помещении	C
G	Заливка пола подвального помещения	F
H	Установка водопроводных труб	F
I	Прокладка проводов	D
J	Установка отопления и вентиляции	D, G
K	Крепление штукатурных плит и штукатурные работы (в том числе и высушивание)	I, J, K
L	Кладка покрытия пола	K
M	Установление кухонной арматуры	L
N	Завершение слесарно-водопроводных работ	L
P	Завершение плотницких работ	E
Q	Кровельные работы и нанесение гидроизоляции	P
R	Крепление водосточных желобов и водосточных труб	C
S	Кладка коллектора ливневых вод	O, T
T	Циклевание и покрытие полов лаком	M, N
U	Покраска	T

Продолжение таблицы 18

V	Завершение установки электрооборудования	Q, R
O	Земляные работы	S, R
W	Заливка пешеходных дорожек и благоустройство территории	O
X	Окончание	S, U, W

1.7. Пусть необходимо установить мачту на фундамент. Известен комплекс операций, а также отношения их предшествования (таблица 19).

Таблица 19

Операция	Описание	Непосредственно предшествующая операция
1.	Заказ фундаментного блока	-
2.	Изготовление блока	1
3.	Доставка блока на место	2
4.	Земляные работы	-
5.	Устройство опалубки	4
6.	Бетонирование	5
7.	Твердение бетона	6
8.	Установка фундаментного блока	3, 6
9.	Изготовление мачты	-
10.	Доставка мачты на место	9
11.	Установка мачты	8, 10

1.8. Строительство гидроэнергетического комплекса состоит из следующих работ: A – строительство дорог; B – подготовка карьеров к эксплуатации и закладка фундамента; C – строительство поселка; D – заказ оборудования; E – строительство завода; F – строительство плотины; G – строительство галереи и подводных трубопроводов; H – соединение завода и трубопроводов; I – предварительные испытания (таблица 20).

Таблица 20

Операция	Непосредственно предшествующая операция	Множество последующих работ
A	-	B, G
B	A	F, E
C	-	F, E
D	-	H
E	C, B	H
F	C, B	I
G	A	H
H	D, G, E	I
I	F, H	

1.9. Информация о проекте задана перечнем работ и последовательностью их выполнения (таблица 21).

Таблица 21

Операция	Каким работам непосредственно предшествует
1.	4, 5, 6
2.	4, 5, 6
3.	5, 6
4.	8
5.	8
6.	7
7.	8
8.	-

1.10. Информация о проекте задана перечнем работ и последовательностью их выполнения (таблица 22).

Таблица 22

Операция	Каким работам непосредственно предшествует	Операция	Каким работам непосредственно предшествует
1.	11, 15	9.	5
2.	1, 13	10.	-
3.	9, 14	11.	5
4.	10	12.	1, 13
5.	-	13.	9, 14
6.	3, 4	14.	10
7.	8, 2	15.	9, 14
8.	11, 15		

1.11. Последовательность операций при подготовке и проведении вечера, посвященного творчеству писателя, приведена в таблице 23.

Таблица 23

Операция	Описание	Непосредственно предшествующая операция	Множество последующих работ
1.	Предварительное обсуждение программы вечера, выделение ответственных лиц по разделам	-	2-4
2.	Определение индивидуальных исполнителей, продумывание их выступлений	1	5
3.	Обсуждение плана подготовки сцен из пьес автора, подбор исполнителей	1	5

Продолжение таблицы 23

4.	Выяснение возможности приглашения известных артистов, поэтов, писателей, показа фильма	1	6
5.	Составление плана обеспечения вечера (оформление зала, реквизит для спектакля)	3, 4	6, 7, 9, 12, 13
6.	Окончательное обсуждение и согласование программы и сроков проведения вечера, списка приглашений	4, 5	14, 16, 17
7.	Подготовка индивидуальных выступлений	5	8
8.	Репетиция индивидуальных выступлений	7	15
9.	Подготовка ролей в спектакле	5	10
10.	Первая репетиция сцен	9	11
11.	Вторая репетиция сцен	10	15
12.	Подготовка костюмов	5	15
13.	Подготовка декораций и стендов для оформления зала		14
14.	Оформление зала	6, 13	15
15.	Генеральная репетиция	8, 11, 12, 14	18
16.	Доставка кинофильма	6	18
17.	Приглашение на вечер	6	18
18.	Проведение вечера	15-17	-

1.12. Располагая приведенной ниже информацией, построить сетевой график.

а). Операции U и R могут выполняться параллельно, являясь при этом начальными в проекте.

б). Операция К должна следовать за Е.

в). Операция Х не зависит ни от Q, ни от К.

г). Ни F ни G не могут начаться раньше, чем закончится операция R, причем F и G могут выполняться параллельно.

д). Операция U должна предшествовать Е и Q.

е). Операция Q должна предшествовать I.

ж). Операция C не зависит ни от F, ни от G и следует за операцией K.

з). Операции Е и Q могут выполняться параллельно.

и). Операция Н может начаться только после завершения операций C, X и I.

к). Операция Н является последней.

л). Операция Х зависит от F и G.

1.13. При подключении абонента к телефонной сети выполняются следующие операции:

а) получение от абонента заявки на подключение;

б) выяснение возможности подключения на АТС;

в) проверка технических возможностей на месте;

г) резервирование рабочего канала связи в магистральной сети АТС;

д) резервирование рабочего канала связи в местном распределительном устройстве;

е) получение нужного оборудования;

ж) монтаж проводки на месте;

з) проверка новой цепи;

и) принятие абонента на обслуживание;

к) установка оборудования;

л) регулировка оборудования.

Операции б) и в) следуют за операцией а); г), д) и е) – за операциями б) и в); операция ж) следует за операцией д) и предшествует операции з); операция з) предшествует операции и); операция е) предшествует операции к); операция л) следует за операцией к); операции и) и л) являются последними.

1.14. Последовательность работ при разработке и внедрении задачи (программного комплекса) в АСУ приведена в таблице 24. Построить сетевую модель.

Таблица 24

Операция	Описание	Непосредственно предшествующая операция	Множество последующих работ
1.	Предварительное определение перечня и структуры выдаваемых документов, информационных массивов и характер их использования	-	2
2.	Разработка общей схемы решения задачи, утверждение перечня и форм выдаваемых документов, выдача задания на программирование, корректировку базовых массивов, первичных документов и т.д.	1	3, 4
3.	Определение структур данных и способов кодирования информации	2	5, 7, 9
4.	Обеспечение формирования первичных документов	2	6, 10
5.	Обеспечение формирования нормативных массивов	3	6
6.	Обеспечение формирования базовых массивов	4, 5	8
7.	Разработка программного обеспечения	3	8
8.	Отладка программ	6, 7	11
9.	Техническое обеспечение решения задачи	3	11
10.	Организационное обеспечение решения задачи	4	11
11.	Опытно-промышленная проверка	8, 9, 10	12
12.	Корректировка по результатам проверки	11	-

1.15. Построить сетевую модель комплекса работ по благоустройству автострады. Порядок следования работ приведен в таблице 25.

Таблица 25

Операция	Описание	Непосредственно предшествующая операция	Множество последующих работ
1.	Заказ асфальта	-	18
2.	Заказ материала для мощения	-	16
3.	Получение цемента	-	11
4.	Установка камнедробилки	-	11
5.	Подготовка к работе	-	9, 10
6.	Получение семян для газона	-	22
7.	Заказ ограды безопасности	-	23
8.	Заказ дорожных знаков	-	24
9.	Установка асфальтобитумной печи	1	11
10.	Расчистка территории и земляные работы	1	12, 14
11.	Отладка асфальтобитумной печи	3, 4, 9	16
12.	Насыпка грунта 1	10	13
13.	Устройство подушки 1	12	16
14.	Насыпка грунта 2	10	15
15.	Устройство подушки 2	14	19
16.	Предварительное мощение 1	2, 11, 13	7, 19
17.	Чистовое мощение 1	16	18
18.	Укладка асфальта 1	1, 17	21
19.	Предварительное мощение 2	16, 15	20
20.	Чистовое мощение 2	19	21
21.	Укладка асфальта 2	18, 20	22
22.	Устройство газона	21, 6	23
23.	Установка ограды безопасности	22, 7	24

Продолжение таблицы 25

24.	Установка дорожных знаков	23, 8	25
25.	Сворачивание работ	24	-

1.16. Построить сетевую модель проекта, если для этого необходимо выполнить следующие операции:

а) операции A, B и C – начальные операции проекта;

б) операции D, E и F начинаются сразу после окончания операции A;

в) операции I и G начинаются после завершения операций B и D;

г) операция H начинается после окончания операций C и G;

д) операции K и L следуют за операцией I;

е) операция J следует как за операцией E, так и за операцией H;

ж) операции M и N следуют за операцией F, но не могут начаться, пока не завершатся операции E и H;

з) операция O следует за операциями M и I;

и) операция P следует за J, L и O;

к) операции K, N и P являются завершающими операциями проекта.

2. Рассчитать временные параметры сетевого графика, представленного на рисунке 98. Найти критический путь. Исходные данные для расчетов представлены в таблице 26.

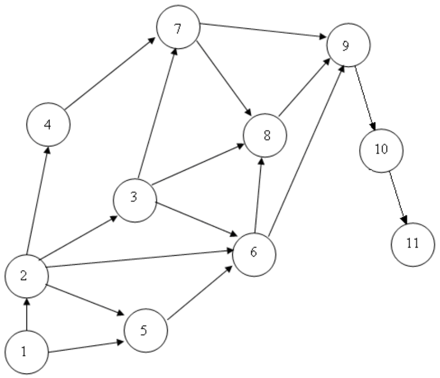


Рисунок 98

Таблица 26

Варианты		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Начало дуги	Конец дуги	Длительности операций											
1	2	3	13	12	2	4	11	9	14	8	2	2	3
1	5	15	14	9	7	4	3	4	12	1	6	5	1
2	3	5	3	4	6	12	3	12	15	5	1	13	1
2	4	9	1	14	1	13	4	7	1	1	5	5	10
2	5	4	4	9	10	3	4	3	13	1	5	2	12
2	6	10	3	9	5	3	11	8	15	12	2	12	7
3	6	3	11	7	13	4	3	2	5	4	9	1	13
3	7	2	15	10	12	5	3	6	1	9	7	1	13
3	8	14	11	3	14	13	10	15	1	1	13	14	11
4	7	14	4	11	14	11	14	10	7	3	6	11	12
5	6	7	12	12	10	13	11	3	9	15	4	3	12
6	8	9	9	9	7	12	12	8	4	1	9	8	3
6	9	12	1	14	11	12	13	5	6	9	2	11	6
7	8	2	1	5	11	15	5	14	12	7	6	8	3
7	9	3	7	10	11	7	4	9	5	2	10	11	13
8	9	14	5	14	2	8	15	4	11	4	15	8	3
9	10	5	14	7	14	10	12	10	8	11	11	15	1
10	11	4	3	15	10	4	4	6	4	8	9	9	4

5. Имитационное моделирование

Пример 13. Используя метод Монте-Карло, найти гамильтонов контур минимальной длины для заданной матрицы расстояний.

	1	2	3	4	5	6
1	∞	20	28	12	39	32
2	21	∞	15	9	17	27
3	30	25	∞	45	29	47
4	7	52	40	∞	15	1
5	60	46	11	5	∞	34
6	11	45	14	21	30	∞

Решение [22]. Разместим исходные данные с длинами дуг на рабочем листе так, как на рисунке 99. Знак ∞ заменен числом 1000.

	W	X	Y	Z	AA	AB	AC
1		1	2	3	4	5	6
2	1	1000	31	15	19	8	55
3	2	19	1000	22	31	7	35
4	3	25	43	1000	53	57	16
5	4	5	50	49	1000	39	9
6	5	24	24	33	5	1000	14
7	6	34	26	6	3	38	1000

Рисунок 99

Так как каждая вершина графа должна войти в контур, то можно считать, например, что обход вершин контура начинается в вершине с номером 1 и в ней же заканчивается. Порядок обхода вершин определяется содержимым ячеек столбцов B–H. В ячейки B2 и H2 помещаются единицы, а номера остальных вершин выбираются равновероятно на отрезке [2, 6] с помощью датчика случайных чисел по формуле (5.1).

=ЦЕЛОЕ(СЛЧИС()*5+2) (5.1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	длина	1	2	3	4	5	6	7	длина1	длина2	длина3	длина4	длина5	длина6	условие	в0	в2	в3	в4	в5	в6
2	1087	1	3	6	6	3	6	1	15	16	1000	6	16	34	0	1000	0	2	0	0	3
3	141	1	2	3	6	4	2	1	31	22	16	3	50	19	0	1000	2	1	1	0	1
4	142	1	2	5	2	6	2	1	31	7	24	35	26	19	0	1000	3	0	0	1	1
5	3018	1	5	5	4	4	4	1	8	1000	5	1000	1000	5	0	1000	0	0	3	2	0
6	1103	1	5	6	6	5	2	1	8	14	1000	38	24	19	0	1000	1	0	0	2	2
7	106	1	3	2	4	6	4	1	15	43	31	9	3	5	0	1000	1	1	2	0	1
8	129	1	3	2	4	6	3	1	15	43	31	9	6	25	0	1000	1	2	1	0	1
9	2103	1	5	3	3	2	2	1	8	33	1000	43	1000	19	0	1000	2	2	0	1	0
10	158	1	3	5	4	2	5	1	15	57	5	50	7	24	0	1000	1	1	1	2	0
11	108	1	2	5	6	3	6	1	31	7	14	6	16	34	0	1000	1	1	0	1	2

Рисунок 100

Формула (5.1) вводится в ячейку C2 и распространяется на диапазон C2:G2. Длина первой дуги контура вычисляется по формуле вида (5.2). Формула вводится в ячейку I2 и затем распространяется на диапазон J2:N2. Длина контура вычисляется в ячейке A2 по формуле (5.3) (рис. 100).

=ВПР(B2;$W$2:$AC$7;C2+1) (5.2)

=СУММ(I2:N2) (5.3)

Так как получение гамильтоновых контуров при таком способе их формирования не гарантировано, отберем из множества полученных контуров только те, которые проходят через каждую вершину графа только по одному разу. В ячейке Q2 по формуле (5.4) вычисляется количество вхождений числа 2 в диапазон $C2:$G2. Аналогичные формулы для вычисления количества вхождений 3, 4, 5 и 6 в этот диапазон вводятся в ячейки R2:U2 (рис. 100). В ячейку O2 вводится формула (5.5), а в ячейку P2 – формула(5.6).

=СЧЁТЕСЛИ($C2:$G2;2) (5.4)

=Q2*R2*S2*T2*U2 (5.5)

=ЕСЛИ(O2=1;A2;1000) (5.6)

Далее распространяем формулы на диапазон A3:U10001 (всего выбирается 10000 случайных наборов). Минимум по столбцу с длинами контуров определяется по формуле (5.7).

	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK
10														
11	74	1	3	6	4	6	3	1	15	16	3	9	6	25
12														

Рисунок 101

$$=\text{МИН}(P2:P10001) \quad (5.7)$$

$$=\text{ВПР}(\$X\$11;\$A\$2:\$P\$10001;\text{СТОЛБЕЦ}(B1);\text{ЛОЖЬ}) \quad (5.8)$$

Для вывода наилучшего для данной серии испытаний контура используется формула (5.8), которая вводится в ячейку Y11 и затем распространяется на диапазон Z11:AK11 (рис. 101).

Пример 14. Вычислить число π, используя метод Монте-Карло.

Решение. Рассмотрим круг с центром в точке (1; 1) радиуса 1. Его площадь равна π. Поместим этот круг в квадрат так, как показано на рисунке 102. «Вбрасывая» случайную точку с координатами $(x;y)$, при x и y, равномерно распределенных между 0 и 2, получаем, что при достаточно большом числе таких вбрасываний отношение количества K точек, попавших в круг, к количеству всех точек N будет приблизительно равно отношению площади круга к площади квадрата. Следовательно, $\pi \approx 4*K/N$. Точность вычислений зависит от количества точек N.

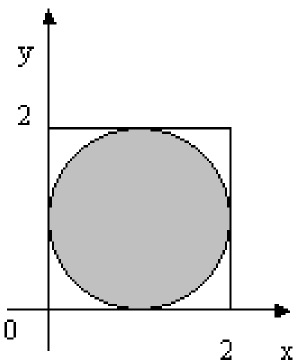


Рисунок 102

На рабочем листе в ячейках A2:B10001 с помощью функции =СЛЧИС()*2 получены случайные числа, равномерно распределенные между 0 и 2. Рассмотрим решение за-

дачи для N, изменяющегося от 100 до 10000 (рис. 103, диапазон E3:E21). На рисунке 103 слева приведен фрагмент диапазонов со случайными значениями x и y. В ячейку C2 помещена формула (5.9).

В случае попадания точки с координатами $(x;\ y)$ в заданный круг в соответствующей ячейке столбца C появляется значение 1, а в противном случае − 0. Формула распространяется затем на весь диапазон C3:C10001. Количество значений, удовлетворяющих формуле (5.9), вычисляется формулой (5.10). Она вводится в ячейку F3 и затем распространяется на диапазон F4:F21.

На рисунках 104–105 графически изображены случайные точки $(x;\ y)$ для N =1000 и N =10000 и вариант их попадания в указанную область.

$$=((A2\text{-}1)\text{^}2+(B2\text{-}1)\text{^}2<=1)*1 \quad (5.9)$$

$$=\text{СУММ}(\text{СМЕЩ}(\$C\$2;0;0;E3;1))/E3*4 \quad (5.10)$$

	A	B	C	D	E	F
1	x	y	значение			
2	0,5934	1,83379	1			π
3	0,4489	0,16639	1		100	3,080000
4	0,77888	1,7483	1		200	3,140000
5	0,94142	1,16422	1		300	3,066667
6	1,82484	0,91317	1		400	3,120000
7	1,54679	0,82132	1		500	3,128000
8	0,73996	1,52732	1		600	3,113333
9	1,91614	1,9777	0		700	3,068571
10	1,1453	1,9266	1		800	3,040000
11	0,1063	0,37755	0		900	3,084444
12	1,89353	1,43523	1		1000	3,076000
13	0,13618	0,79718	1		2000	3,070000
14	1,90402	0,06742	0		3000	3,094667
15	0,47065	0,34911	1		4000	3,124000
16	1,53114	0,95368	1		5000	3,114400
17	0,99534	0,30232	1		6000	3,116000
18	1,79845	1,76086	0		7000	3,130857
19	1,51543	1,58718	1		8000	3,134500
20	0,41965	0,19459	1		9000	3,137333
21	0,78457	1,82482	1		10000	3,133600

Рисунок 103

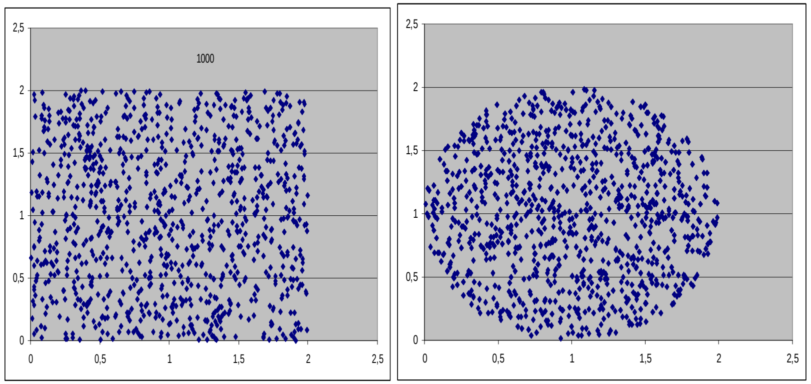


Рисунок 104

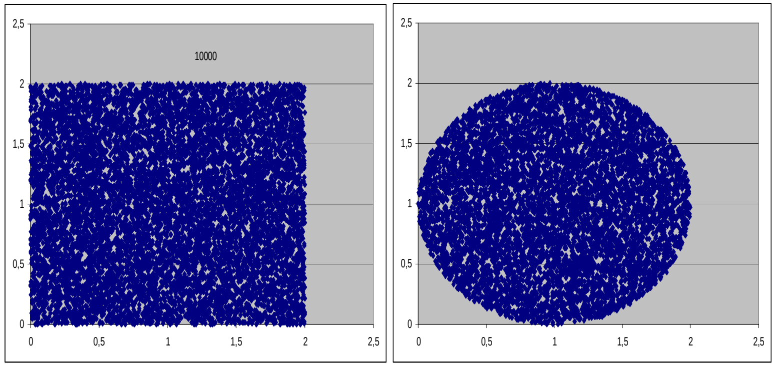


Рисунок 105

Пример 15. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{0,1}^{1,5} \frac{1}{\sin(x)\cdot\cos(x)}\,dx\,,$$

используя метод Монте-Карло.

Решение. На рисунке 106 приведен график функции $y = \dfrac{1}{\sin(x)\cdot\cos(x)}$ в промежутке от x=0,1 до x=1,5. Расположим исходные данные так, как на рисунке 107. Здесь a и b − минимальное и максимальное значения по x соответственно, c и d − минимальное и максимальное зна-

чения по y. Вводим в ячейки G44 и H44 формулы (5.11) и (5.12). В ячейке I44 фиксируется факт попадания случайной точки (x, y) в область под кривой (рис 106, формула (5.13)). Распространяем формулы диапазона G44:I44 вниз до строки 1043.

Формируем диапазон K45:K54, включающий количество точек, для которых осуществляется вычисление интеграла. В ячейку L45 вводим формулу (5.14) и распространяем ее на диапазон L46: L54. Формула (5.14) учитывает тот факт, что $\dfrac{I}{S_{прямоугольника}} \approx \dfrac{n}{N}$, где n − количество случайных точек (x, y), попавших под кривую $y = \dfrac{1}{\sin(x)\cdot\cos(x)}$, а N − количество испытаний. Следовательно,

$$I \approx \frac{n}{N} * S_{прямоугольника}\,.$$

=СЛЧИС()*($G$41-$G$40)+$G$40 (5.11)

=СЛЧИС()*$J$41 (5.12)

=(1/SIN(G44)/COS(G44)>=H44)*1 (5.13)

=СУММ(СМЕЩ($I$44;0;0;K45;1))/K45*($G$41-$G$40)*$J$41 (5.14)

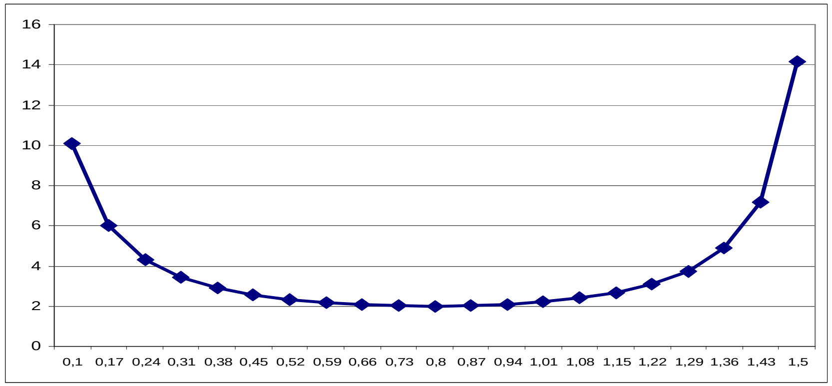


Рисунок 106

	F	G	H	I	J	K	L
40	a	0,1		c	0		
41	b	1,5		d	14,17233		
42							
43		x	y				
44	1	1,0163826	8,437276	0		Монте-Карло	
45	2	1,1245063	8,360548	0		100	5,1587299
46	3	1,1710333	12,13642	0		200	4,4642855
47	4	0,3545885	8,667015	0		300	4,6296294
48	5	1,4375906	9,163418	0		400	4,8115077
49	6	0,8468347	0,391336	1		500	4,7619045
50	7	1,3889101	7,128714	0		600	4,9272484
51	8	0,7412438	3,307416	0		700	4,9319725
52	9	0,5962549	9,374064	0		800	4,9603172
53	10	0,3500444	4,873832	0		900	5,0044089
54	11	0,2421042	8,57895	0		1000	4,8809521

Рисунок 107

Заметим, что истинное значение данного интеграла можно вычислить по формуле (5.15).

$$\int_{0,1}^{1,5} \frac{1}{\sin(x)\cdot\cos(x)}dx = \ln|tg(1,5)| - \ln|tg(0,1)| \approx 4,94552. \qquad (5.15)$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Используя метод Монте-Карло, найти решение задачи коммивояжера для условий, приведенных в задании 2 раздела 3.
2. Используя метод Монте-Карло, вычислить приближенно определенные интегралы, приведенные в таблице 27.

Таблица 27

Продолжение таблицы 27

№ варианта	интеграл	№ варианта	интеграл
1.	$\int_0^2 \frac{x}{(x+3)^2}$	11.	$\int_1^2 \frac{x^2}{(2x+0,3)^2}$
2.	$\int_{0,2}^1 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$	12.	$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2+0,25}}.$
3.	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x;$	13.	$\int_0^1 x^2 \sin x$
4.	$\int_0^1 2^{3x}$	14.	$\int_3^5 \frac{x}{0,5x+0,1}.$
5.	$\int_1^5 \frac{\ln^2 x}{x}$	15.	$\int_{-2}^0 (x^2+5x+6)\cos 2xdx.$
6.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x$	16.	$\int_{-2}^0 (x^2-4)\cos 3xdx.$
7.	$\int_1^3 \frac{x^2}{2x+3}$	17.	$\int_{-1}^0 (x^2+4x+3)\cos xdx.$
8.	$\int_1^4 x^2\sqrt{x+2}$	18.	$\int_{-2}^0 (x+2)^2 \cos 3xdx.$
9.	$\int_2^3 xe^{0,8x}$	19.	$\int_{-4}^0 (x^2+7x+12)\cos xdx.$
10.	$\int_{0,2}^1 \frac{x}{\sin^2 3x}$	20.	$\int_0^{\pi} (2x^2+4x+7)\cos 2xdx.$

Список рекомендуемой литературы

1. Вагнер, Г. Основы исследования операций. В 3-х томах/ Г.Вагнер. – М., Мир, 1972.
2. Вентцель, Е.С. Исследование операций / Е.С.Вентцель. – М.: Сов. радио,1972.
3. Иванов, Н.Н. Методические указания и лабораторным работам по курсу «Исследование операций» для студентов специальности 01.01 / Н.Н.Иванов, И.Н.Ревчук. – Гродно: ГрГУ, 1988. – 56 с.
4. Костевич, Л.С., Лапко А.А. Теория игр. Исследование операций / Л.С.Костевич, А.А. Лапко. – Минск : Высшая школа, 1982. – 231 с.
5. Конвей, Р.В. Теория расписаний / Р.В. Конвей, В.Л. Максвелл, Л.В. Миллер. – М.: Наука, 1975. – 360 с.
6. Леонников, А.В. Решение задач оптимизации в среде MS EXCEL / А.В. Леонников. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 704 с.
7. Майника, Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / Э. Майника. – М.: Мир, 1981. – 323 с.
8. Танаев, В.С. Введение в теорию расписаний / В.С. Танаев, В.В. Шкурба. – М.: Наука, 1975. – 256 с.
9. Таха, Х. Введение в исследование операций: в 2 т. / Х. Таха. – М.: Мир, 1985. – 2 т.
10. Уокенбах, Д. Подробное руководство по созданию формул в Excel 2002/ Д. Уокенбах. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2002. – 624 с.
11. Филлипс, Д. Методы анализа сетей / Д. Филлипс, А. Гарсиа-Диас. – М.: Мир, 1984. – 496 с.
12. Форд, Л. Потоки в сетях / Л. Форд, Д. Фалкерсон. – М.: Мир, 1966. – 276 с.
13. Ревчук, И.Н. Прикладная математика/ И.Н.Ревчук, В.К.Пчельник. – Гродно: ГрГУ, 2007. –120 с.
14. Ревчук, И.Н. Прикладная математика/ И.Н.Ревчук, В.К.Пчельник. – http://exponenta.ru/educat/systemat/revchuk/index.asp
15. Ревчук, И.Н. Прикладная математика/ И.Н.Ревчук, В.К.Пчельник. – http://window.edu.ru/window/library?p_rid=54384
16. Ревчук, И.Н. Автоматизация офисной деятельности / И.Н. Ревчук, В.К. Пчельник. – Гродно: ГрГУ, 2004. – 128 с.
17. Ревчук, И.Н. Автоматизация офисной деятельности / И.Н. Ревчук, В.К. Пчельник. – http://window.edu.ru/window_catalog/files/r60072/revchuk4.pdf
18. Ревчук, И.Н. Автоматизация офисной деятельности / И.Н. Ревчук, В.К. Пчельник. – http://www.exponenta.ru/educat/systemat/revchuk/work2.rar
19. Ревчук, И.Н. Реализация алгоритма Дейкстры в электронных таблицах/ И.Н. Ревчук, В.К. Пчельник. – http://www.rusedu.ru/detail_2404.html. 2009. – 7 с.

20. Ревчук, И.Н. Реализация алгоритма поиска кратчайших путей в электронных таблицах / И.Н. Ревчук, В.К. Пчельник. – http://www.exponenta.ru/educat/systemat/revchuk/index4.asp. 2009. – 7 с.
21. Ревчук, И.Н. Реализация алгоритма Прима в электронных таблицах MS EXCEL / И.Н. Ревчук, В.К. Пчельник. – http://www.rusedu.ru/detail_3396.html, 2009. – 4 с.
22. Ревчук, И.Н. Решение задачи коммивояжера методом статистических испытаний в MS EXCEL / И.Н. Ревчук, В.К. Пчельник. – http://www.exponenta.ru/educat/systemat/revchuk/index6.asp 2009. – 7 с.

СОДЕРЖАНИЕ