

ریاضیات اول
برائے گیاریوں اور بارویں جماعت

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامیٹیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 1

جزو ضرب اور مضرب

مثال 1.1: عدم مساوات کو حل کریں $(x - 2)(x - 4) < 0$

پہلا طریقہ: $y = (x - 2)(x - 4)$ کی ترسیم کریں۔ یہ ترسیم x محور کو $x = 2$ اور $x = 4$ پر کاٹے گی۔ اب جب کہ x^2 کا عددی سر مثبت ہے، قطع مکانی اوپر کو جائے گا، جیسا کہ شکل 5-5 میں دکھایا گیا ہے۔

آپ کو x کی وہ قیمت معلوم کرنی ہے جہاں $y < 0$ ہو سکے۔ اس ترسیم سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تب ہو گا جب x 2 اور 4 کے درمیان ہو گا، یعنی $2 < x < 4$ اور $x < 4$ ۔ ہم جانتے ہیں کہ $x > 2$ کا مطلب بھی وہی ہے جو $x < 2$ کا ہے، لہذا ہم اسے $2 < x < 4$ لکھ سکتے ہیں۔ اس کا مطلب یہی ہو گا کہ x 2 سے بڑا اور 4 سے چھوٹا ہے۔ جب آپ $x < r$ اور $x < s$ قسم کی عدم مساوات کو $r < x < s$ کے انداز میں لکھتے ہیں تو اس کا لازمی مطلب یہ ہوتا ہے کہ $r < s$ ورنہ $3 < x < 7$ لکھنا تو بالکل ہی غلط ہے؛ بھلا ایسا کیسے ہو سکتا ہے کہ x سات سے بڑا بھی ہو اور تین سے چھوٹا بھی! □

باب 2

تفرق

2.1 اعداد کی مختلف اقسام

پہلے پہل اعداد کو صرف گنتی کے لیے استعمال کیا جاتا تھا اور $1, 2, 3, \dots$ یہ کافی تھا، انکو قدرتی اعداد یا مثبت اعداد کہا جاتا ہے تب یہ بات آشکار ہوئی کہ اعداد کو معیشت اور پیمائش کے لیے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اس مقصد کے لیے کسر بھی درکار تھے، کسر اور عدد صحیح مشترکہ طور پہ معقول اعداد بناتے ہیں۔ یہ وہ اعداد ہیں جو کہ $\frac{p}{q}$ کی صورت میں لکھے جاسکتے ہیں، بشرطیکہ p اور q صحیح اعداد ہوں اور q صفر نہ ہو۔

یونانیوں کی باقی دریافتوں میں ایک یہ بھی بہت اہم دریافت تھی کہ کئی ایسے اعداد تھے جن کا ہم اوپر بتائے گئے طریقے سے اظہار نہیں کج سکتے تھے۔ ایسے اعداد کو نا معقول اعداد کہا جاتا ہے، پہلا نا معقول عدد $\sqrt{2}$ تھا۔ جو کہ 1 اکائی لمبائی کے مربع کے وتر کی لمبائی ہے اور فیثاغورث کے قانون سے اسے معلوم کیا گیا۔ وہ اصول جسکی بنیاد پر یونانیوں نے یہ ثابت کیا کہ $\sqrt{2}$ کسر کی شکل میں نہیں لکھا جاسکتا اسی اصول کی بناء پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ کسی بھی مثبت عدد کی جزر، کعبی جزر اور دیگر یا تو صحیح عدد ہوں گی یا نا معقول۔ کئی دیگر نا معقول اعداد بھی ہمارے جانے پہچانے ہیں جن میں π زبان زد عام ہے۔

معقول اور نا معقول اعداد مجموعی طور پر حقیقی اعداد کہلاتے ہیں، صحیح اعداد، معقول و نا معقول اعداد اور حقیقی اعداد سب مثبت، منفی یا صفر ہو سکتے ہیں۔

جب معقول اعداد کو اعشاریہ میں لکھا جاتا ہے تو اسکے ہندسے یہ تو قنای ہوتے ہیں یہ خود کو بالترتیب دہرانا شروع کر دیتے ہیں مثال کے طور پر:

$$\frac{7}{10} = 0.7, \quad \frac{7}{11} = 0.6363\dots, \quad \frac{7}{12} = 0.5833\dots, \quad \frac{7}{13} = 0.53846153846153\dots$$

$$\frac{7}{14} = 0.5, \quad \frac{7}{15} = 0.466\ldots, \quad \frac{7}{16} = 0.4375, \quad \frac{7}{17} = 0.411764705882352941176\ldots$$

اس کا الٹ بھی ممکن ہے۔ اگر ایک اعشاری عدد ختم ہو جائے یا خود کو ہی دہرائے تو یہ ایک معقول عدد ہوگا۔ لہذا اگر ایک نامعقول عدد کو اعشاریہ کی صورت میں لکھا جائے ہندسوں کی ترتیب کبھی خود کو نہیں دہراتی چاہے آپ جتنا لمبا حساب کتاب کر لیں۔

غیر معقول جزر کی خصوصیات

جب آپ $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{8}$ یا $\sqrt{12}$ ایسے کلیہ کو آپ حساب کتاب کے آلہ کی مدد سے حل کر کے اعشاریہ کی شکل میں ضرور لکھتے ہوں گے۔ یقینی طور آپ نے کبھی لکھا ہوگا۔

$$\sqrt{2} = 1.414\ldots \text{ یا } \sqrt{2} = 1.414 \text{ جو اعشاریہ کے بعد تین ہندسوں } 1.414 \approx \sqrt{2} \text{ تک درست ہے}$$

یہ کلیہ $\sqrt{2} = 1.414$ غلط کیوں ہے؟

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{9} \text{ ایسے کلیوں کو ہی غیر معقول جزر کہتے ہیں۔}$$

اس ضمیمہ میں ہم ایسے ہی غیر معقول جزر حل کریں گے۔ یہ بات ذہن نشین کر لیں کہ \sqrt{x} کا مطلب ہمیشہ x کی مثبت جزر ہے یا صفر اگر x صفر ہو تو۔

غیر معقول جزر کی خصوصیات جو یہاں استعمال ہوں گی وہ درج ذیل ہیں۔

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \text{ اور } \sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$$

آپ یہ دیکھ سکتے ہیں کہ $x \times y = xy$ اور $(\sqrt{x} \times \sqrt{y}) \times (\sqrt{x} \times \sqrt{y}) = (\sqrt{x} \times \sqrt{x}) \times (\sqrt{y} \times \sqrt{y}) = x \times y = xy$ اور $\sqrt{x} \times \sqrt{y}$ مثبت ہے، یہ xy کی جزر ہے۔ اسی لیے $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ ۔ یہی وجہ آپ کو اس بات پر بھی قائل کرے گی کہ $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

درج ذیل مثال سے انہی خصوصیات کو واضح کرتی ہے۔

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}; \quad \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3};$$

$$\sqrt{18} \times \sqrt{2} = \sqrt{18 \times 2} = \sqrt{36} = 6; \quad \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3.$$

آپ کو اپنے طور پر بھی اوپر دیے گئے حساب کتاب کو دہرانا چاہیے۔

مثال 2.2.1

حل کریں ا

$$\sqrt{28} + \sqrt{63}$$

ب

$$\sqrt{5} \times \sqrt{10}$$

حل کرنے کے دو طریقے ہیں اور دونوں حصوں کو مختلف طریقوں سے حل کیا گیا ہے۔

$$\sqrt{28} + \sqrt{63} = (\sqrt{4} \times \sqrt{7}) + (\sqrt{9} \times \sqrt{7}) = 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$$

طریقہ 1 $\sqrt{5} \times \sqrt{10} = \sqrt{5} \times 2$ طریقہ $\sqrt{5} \times \sqrt{10} = \sqrt{5 \times 10} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$
 $(\sqrt{5} \times \sqrt{2}) = (\sqrt{5} \times \sqrt{5}) \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ بغل کسر میں نسب نما سے جزر کو ختم کرنا ہمارے لیے مفید ہوتا ہے،
 جیسا کہ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ آپ اسے با آسانی حل کر سکتے ہیں اگر آپ $\sqrt{2}$ سے ضرب بھی دیں اور تفریق بھی کریں۔ $\frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$y = x^2$$

$$(0.4, 0.16) \quad (0.7, 0.49)$$

$$y \ x \ \delta y \ \delta x \ \delta$$

یہ سبق کسی بھی ترسیم پر موجود نقطے کے ڈھلاؤ یا خط مماس معلوم کرنے کے بارے میں ہے۔ جب آپ یہ سبق مکمل کر لیں گے، آپ کو عبور حاصل ہوگا کہ:

آپ ایک سمتی مقدار پر ایک نقطہ پہ ڈھلاؤ معلوم کرنے کے لئے ایک کلیہ کا حساب لگائیں، اس کی مساوات بنائیں مربعی اور دیگر قسم کے خم پہ ایک نقطہ پر عین مطابق ڈھلاؤ کا حساب لگائیں

اس سبق کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ پھلے حصے میں ضمیمہ 6.1 تا 6.5 میں آپ تجربے کی بنیاد پر نتائج اخذ کرتے ہوئے خط مماس سے ترسیم تک کے مسائل حل کریں گے۔ دوسرے حصے میں ضمیمہ 6.6 تا 6.7 تجربے کی بنیاد اخذ پر نتائج کو ثابت کریں گے۔ آپ اگر چاہیں تو سبق کے دوسرے حصے کو نظر انداز کر سکتے ہیں لیکن آپ کو چاہئے کہ سبق کے اختتام پہ موجود مشق کو حل کریں۔

خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کرنا؛

ایک سادہ سے خم کے بارے میں سوچیں جیسے کے $y = x^2$ کی ترسیم۔ جیسے جیسے آپ کی نظر کی (x-axis) سمت بڑھتی ہے، کیا آپ بیان کر سکتے ہیں، ریاضی کی زبان میں، خم کی سمت کس طرح سے تبدیل ہوتی ہے۔

جیسے ایک سیدھی کلیئر کا ایک عددی ڈھلاؤ ہے، لہذا کوئی بھی خم، بشرطیکہ وہ کافی حد تک (سموٹھ) ہو ایک ڈھلوان یا ڈھلاؤ رکھتا ہے جو کہ کسی بھی ایک نکتے پر پے مایا جاسکتا ہے۔ فرق صرف اتنا ہے کہ خم کے لیے ڈھلاؤ کی سمت بھی بدلتی ہے جیسے جیسے آپ اس کے ساتھ چلتے ہیں۔ ریاضی دان اس ڈھلاؤ کی مدد سے خم کی سمت کا تعین کرتے ہیں۔

سبق نمبر 1 میں آپ سیکھ چکے ہیں کہ اگر آپ کے پاس ایک سیدھی کلیئر کے دو نکتوں کے محدود دستیاب ہوں تو آپ کیسے اس کا ڈھلاؤ معلوم کر سکتے ہیں۔ آپ اس طریقے کو براہ راست خم پر استعمال نہیں کر سکتے کیونکہ وہ ایک سیدھی کلیئر نہیں ہے۔ آپ اس خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کرتے ہیں جو کہ خم کے کسی بھی دو نکتوں کی مدد سے بنایا جائے گا۔ (جیسا کہ آپ تصویر 6.1 میں دیکھ رہے ہیں) کہ ایک نکتے پر خط مماس اور ڈھلاؤ کی ڈھلوان برابر ہے۔ تاہم یہاں ایک نیا مسئلہ کھڑا ہو گیا ہے، وہ یہ کہ آپ ایک کلیئر کا ڈھلاؤ صرف تب ہی معلوم کر سکتے ہیں جب آپ اس کے دو نکتوں کے محدود پتا ہوں۔

تصویر 6.2 میں ہم آہنگ کلیئر (سیدھی کلیئریں جو خم کے دو نکتوں میں سے گزریں) دکھائی گئی ہیں جو خط مماس کے قریب تر ہوتی جارہی ہیں، لہذا بہتر یہی ہے کہ ہم ان ہم آہنگ کلیئروں کی ڈھلوان معلوم کرنے سے ابتدا کریں، کیونکہ اس طریقے کو پہلے سبق میں سیکھ چکے ہیں۔

مثال 6.1.1

ایک ہم آہنگ کلیئر کی ڈھلوان اور مساوات معلوم کریں جو کہ $y = x^2$ کے خم کے دو نکتوں کو جوڑتی ہے، ان دو نکتوں کے محدود ہیں (0.4, 0.16) اور (0.7, 0.16)

ضمیمہ 1.3 میں ہم آہنگ کلیئر کی ڈھلوان معلوم کرنے کے نسخہ کے مطابق؛

$$\frac{0.49 - 0.16}{0.7 - 0.4} = \frac{0.33}{0.3} = 1.1$$

ضمیمہ 1.5 میں ہم آہنگ کلیئر کی مساوات معلوم کرنے کے نسخہ کے مطابق؛

$$y - 0.16 = 1.1(x - 0.4),$$

جو کہ؛

$$y = 1.1x - 0.28$$

caption 6.3 figure

یہاں مددگار ہوگا کہ ہم کچھ فی علامات کیجیں، بڑھوتری کے لئے ہم یونانی علامت δ (ڈیلٹا) کا استعمال کرتے ہیں۔ لہذا x میں بڑھوتری کو δx اور y میں بڑھوتری کو δy سے ظاہر کرتے ہیں۔ ان مقداروں کو ضمیمہ 1.3 میں (x-step) اور (y-step) کہا گیا ہے۔ لہذا مثال 6.1.1

میں ہم آہنگ لکیر کے ایک سرے سے دوسرے (x-step) $0.7 - 0.4 = 0.3$ جبکہ (y-step) $0.49 - 0.16 = 0.33$ ہے۔ لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ؛

$$\delta x = 0.3, \quad \delta y = 0.33$$

اس علامت نویسی سے آپ کسی ہم آہنگ لکیر کی ڈھلوان کو $\frac{\delta y}{\delta x}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

ایک طبقہ δ کی بجائے Δ استعمال کرتا ہے، دونوں ہی صحیح ہیں۔ اس بات کا خیال رکھیں کہ اس $\frac{\delta y}{\delta x}$ میں آپ دونوں δ کو آپس میں کاٹ نہیں سکتے کیونکہ یہ اعداد نہیں ہیں۔ اب جبکہ ہم علامت کو استعمال کر رہے ہیں تو آپ عادت بنا لیں اسکو بازہوتزی کی شرح کہنے کی، اس طرح آپ اسکو الجبرا کی عام علامت نا سمجھیں۔ یاد رکھیں کہ δx یا δy منفی بھی ہو سکتے ہیں، اور ایسی صورت میں (y-step) اور (x-step) کم ہونگے۔ $O(\delta y)$

اگر ہم اس طریقے کو بروے کار لاتے ہوئے ہم آہنگ لکیروں کے ڈھلاؤ کو معلوم کریں تو مثال 6.1.1 کچھ ایسی دکھے گی؛

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{0.49 - 0.16}{0.7 - 0.4} = \frac{0.33}{0.3} = 1.1$$

مثال 6.1.2

نم $y = x^2$ کے دو نقتوں کو جوڑنے والی ہم آہنگ لکیر کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ جسکے x محدود 0.4 اور 0.41 ہیں۔ سب سے پہلے آپکو ان دونوں نقتوں پہ y محدود معلوم کرنا ہوگا جو کہ $0.4^2 = 0.16$ اور $0.41^2 = 0.1681$ ہیں۔

اس مثال کو بھی مثال 6.1.1 کی طرح حل کریں گے۔ $\delta x = 0.41 - 0.4 = 0.01$ اور $\delta y = 0.1681 - 0.16 = 0.0081$ تاہم ہم آہنگ لکیر کا ڈھلاؤ ہے؛

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{0.0081}{0.01} = 0.81$$

مثال 6.4 میں ہم آہنگ لکیر اور محدود x 0.4 پہ موجود خط مماس کو الگ پہچانتا مشکل ہے،))))))) یہاں ہمیں ایک طریقہ ملتا ہے کہ ہم محدود x 6.4 پہ خط مماس کا ڈھلاؤ کسطرہ معلوم کر سکتے ہیں۔))))) مثال 6.1.3 میں یہ نقطے مزید قریب آگئے ہیں۔

مثال 6.1.3 نم $y = x^2$ کے دو نقتوں کو جوڑنے والی ہم آہنگ لکیر کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ جسکے x محدود 0.4 اور 0.40001 ہیں۔ دونوں نقتوں کے محدود (0.4, 0.4²) اور (0.40001, 0.40001²) ہیں

$\delta x = 0.40001 - 0.4 = 0.00001$ اور $\delta y = 0.40001^2 - 0.4^2 = 0.0000080001$ لہذا ہم آہنگ لکیر کا ڈھلاؤ ہے؛ $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{0.0000080001}{0.00001} = 0.80001$

یہ نتیجہ چونکہ 0.8 کے بہت قریب ہے لہذا ایسا نظر آ رہا ہے کہ $y = x^2$ کے خم پہ محدود x 0.4 پہ موجود خط مماس کا ڈھلاؤ 0.8 ہے۔ لیکن اس سے یہ ثابت نہیں ہوتا کیونکہ آپ ابھی تک دو نقطوں کو ملانے والی خط مماس کی مساوات معلوم کر رہے ہیں، قطعی نظر اسکے کہ یہ نقطے کتنے قریب ہیں۔

سوال نمبر 2 اور 3 میں سوالوں کو مختلف حصوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے، لہذا طلباء کی جماعت اکٹھے کام کرتے ہوئے ان تمام سوالوں کے جوابات حاصل کر لیں گے، اور پھر ان جوابات کو جمع کیا جاسکتا ہے،

question 1 سیدھی لکیر کی ایک مساوات بنائیں جو $y = x^2$ کے خم پہ دو نقطوں کو ملانے والی x کی قیمت 1 اور 2 ہو۔

question 2 اس سوال کے ہر حصے میں $y = x^2$ کے خم پہ درج ذیل x محدود کے دو نقطوں سے بننے والی ہم آہنگ لکیروں کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔

1 اور 1.001 اور 2 0.9999 اور 2 0.002 اور 3 1.999 اور 3 3.000001 اور 3 2.99999

3 question

اس سوال کے ہر حصے میں، $y = x^2$ کے خم پہ درج ذیل نقطے اور اسکے قریبی نقطے کی مدد سے بنی ہم آہنگ لکیر کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ بتائے گئے نقطے اور اسکے قریبی نقطے کے مابین فاصلے کو تبدیل کر کے اسی عمل کو دہرائیں، اس بات کا خیال رکھیں کہ کچھ نقطے بتائے گئے نقطے کی بائیں طرف بھی ہوں۔ $(1,1)$ ، $(-1,1)$ ، $(2,4)$ ، $(-2,4)$ ، $(10,100)$

question 4 سوال نمبر 2 اور 3 سے حاصل شدہ تجربے کی بنیاد $y = x^2$ کے خم پہ موجود کسی بھی نقطے پہ خط مماس کے ڈھلاؤ کا اندازہ کریں۔

question 5 part a سوال نمبر 2 سے 4 تک استعمال شدہ طریقے کی مدد سے $y = x^2 + 1$ اور $y = x^2 - 2$ کے خم پہ موجود کسی بھی نقطے پہ بنی خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ part b حصہ (i) میں حاصل شدہ تجربے کی بنیاد $y = x^2 + c$ ، جبکہ c ایک حقیقی عدد ہے، کے خم پہ بنی کسی بھی خط مماس کے ڈھلاؤ کو معلوم کرنے کا ایک عالمگیر اصول وضع کریں

خط مماس کا ڈھلاؤ جو کہ $y = x^2 + c$ کے خم پہ بنی ہو۔

اگر آپ مشتق 6A کے نتائج کو جمع کریں تو آپ کو یہ شبہ گزرے گا کہ کسی بھی نقطے پر $y = x^2$ کے خم پہ بنی خط مماس کا ڈھلاؤ x محدود کا دو گنا ہے، لب لباب یہ ہے کہ $y = x^2$ کے خم کے ڈھلاؤ کا کلیہ $2x$ ہے

مثال کے طور پر، $y = x^2$ کے خم پہ ایک نقطے $(-3,9)$ کا ڈھلاؤ $-6 = (-3) \times 2$ ہے، اسکا مطلب یہ ہوا کہ اس نقطے پہ بنی خط مماس کا ڈھلاؤ -6 ہوگا اور یہ نقطہ $(-3,9)$ سے گزرے گی۔ اس خط مماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے آپ ضمیمہ 1.5 کا سہارا لے سکتے ہیں۔ لکیر کی مساوات ہوگی؛

$$y - 9 = -6(x - (-3)),$$

جو کہ: $y = 6x - 18$ یا $y - 9 = 6x - 18$ ہے۔

نور کریں کہ ڈھلاؤ کا کلیہ $y = x^2 + c$ پر بھی لاگو ہو رہا ہے، جبکہ c مستقل ہے۔ پے x بھی ڈھلاؤ $2x$ ہی ہے۔ اسکی وجہ سادہ سی ہے کہ $y = x^2 + c$ کا خم بھی $y = x^2$ کے خم جیسا ہی ہے بس صرف y محور کی سمت تھوڑا منتقل ہو گیا ہے۔

ایک ثانیہ کے لیے یہ مان لیں کہ ان نتائج کو ثابت کیا جاسکتا ہے۔ آپکو ثبوت مل جائے گا ضمیمہ 6.6 میں۔

خم کے کسی نقتے پر عمودی لکیر۔

وہ لکیر جو خم اور خط مماس کے باہمی ملاپ کے نقتے سے کچھ اس طرح گزرے کہ خط مماس کے ساتھ 90° زاویہ بنائے اس نقتے پر خم کی عمودی لکیر کہلاتی ہے۔

90°

اگر آپکو کسی ایک نقتے پر خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم ہے تو آپ ضمیمہ 1.9 کے نتیجے سے عمودی خط کا ڈھلاؤ معلوم کر سکتے ہیں۔ اگر خط مماس کا ڈھلاؤ m ہے تو عمودی لکیر کا ڈھلاؤ $-\frac{1}{m}$ ہوگا، بشرطیکہ $m \neq 0$

مثال 6.3.1

$y = x^2$ کے خم پہ عمودی لکیر کی ایک مساوات معلوم کریں جبکہ اس نقتے پہ $x = -3$ اور $x = 0$ ہے۔

ضمیمہ 6.2 میں ہم نے $(-3, 9)$ پے خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کیا تھا جو کہ -6 تھا۔ اسی طرح عمودی خط کا ڈھلاؤ $\frac{1}{6} = \frac{1}{-6} -$ اور یہ بھی $(-3, 9)$ سے ہی گزرتا ہے۔ لہذا عمودی خط کی مساوات، $y - 9 = \frac{1}{6}(x - (-3))$ جسکی سادہ شکل $6y = x + 57$ ہے۔

نقتے $(0, 0)$ پر خط مماس کا ڈھلاؤ 0 ہے۔ لہذا خط مماس x محور کے مساوی بڑھتی رہے گی۔ اسی وجہ سے عمودی خط y محور کے مساوی بڑھتی رہے گی۔ اسکی مساوات کچھ یوں ہے۔ $x = 0$ جب عمودی خط $(0, 0)$ سے گزرتی ہے تو اسکی مساوات ہوگی $x = 0$

اگر آپکے پاس ترسیم کاری کا آلہ موجود ہے تو، آپ $y = x^2$ کے خم کو، $y = -6x - 9$ کے خط مماس کو، $6y = x + 57$ کے عبوری خط کا مشاہدہ کریں، آپ نتائج سے حیران ضرور ہوں گے۔

آپکو یہ بات سمجھنی ہوگی کہ اگر آپ ایک ہی نقتے پر خم، خط مماس اور خط عمودی کشید کریں تو خط عمودی صرف اسی صورت 90° زاویے پر ہوگا جب x اور y محور دونوں پہ پیمانہ ایک سا ہو، خط مماس پر کوئی فرق نہیں پڑے گا۔

اس موقع پر آپکو سمجھنا ہوگا کہ آپکو اس نتیجے کو دیگر مساوات کے لئے بھی علمگیر کرنا ہوگا۔ ضمیمہ 6.2 میں آپ نے دیکھا کہ $y = x^2 + c$ کے خم میں کسی بھی x پہ موجود خط مماس کا ڈھلاؤ $2x$ کے برابر ہوگا۔

مشق 6B

سوال نمبر 9 سے 12 میں سوالوں کو مختلف حصوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے، لہذا طلباء کی جماعت اکٹھے کام کرتے ہوئے ان تمام سوالوں کے جوابات حاصل کر لیں گے، اور پھر ان جوابات کو جمع کیا جاسکتا ہے،

درج ذیل x محدود کی مدد سے $y = x^2$ کے خم پے بننے والے خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ 1-04 1-2-0.2-3.5-2p

درج ذیل x محدود کی مدد سے $y = x^2 - 2$ کے خم پے بننے والے خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ 1-04 1-2-0.2-3.5-2p

خم $y = x^2 + 5$ پہ ایک نقطہ p کا y محدود 9 ہے۔ اسی نقطہ پے خط مماس کے ڈھلاؤ کی دو ممکن مقداریں معلوم کریں۔ بتائے گئے خم کے دیئے گئے x یا y محدود سے معرض وجود میں آنے نکتے پر بنی خط مماس کی مساوات معلوم کریں۔ $y = x^2$ جبکہ $x = 2 + 2x = 2$ جبکہ $x = 2 - 2x = -1$ جبکہ $y = -2$

بتائے گئے خم کے دیئے گئے x یا y محدود سے معرض وجود میں آنے نکتے پر بننے عمودی خط کی مساوات معلوم کریں $y = x^2$ جبکہ $x = 1$ $y = x^2 + 1$ جبکہ $x = -2$ $y = x^2 + 1$ جبکہ $x = 0$ $y = x^2 + c$ جبکہ $x = \sqrt{c}$ خم $y = x^2$ کے ایک نکتے P پر خط مماس کا ڈھلاؤ 3 ہے۔ اس نکتے P پر عمودی خط کی مساوات بتائیں۔

خم $y = x^2 + 1$ کے ایک نکتے P پر عمودی خط کا ڈھلاؤ 1 ہے۔ اس نکتے P پر خط مماس کی مساوات بتائیں۔ خم $y = x^2$ میں محدود $(2, 4)$ پہ بننے والا عمودی خط دوبارہ اس خم سے گزرتا ہے، اس نکتے کی نشاندہی کریں۔

سوال کے ہر حصے میں درج ذیل خموں کو بروئے کار لاتے ہوئے $y = 2x^2$ ، $y = 3x^2$ اور $y = -x^2$ بتائے گئے x محدود سے بننے والے نکتوں سے معرض وجود میں آنے والی ہم آہنگ لکیر کا ڈھلاؤ معلوم کریں 1 1.001 اور 2 0.99999 اور 2 2.002 اور 3 3.000001 اور 3 2.99999 اس سوال کے ہر حصے میں، $y = \frac{1}{2}x^2$ اور $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ کے خم پہ درج ذیل x محدود سے بننے والے نکتے اور اسکے قریبی نکتے کی مدد سے بنی ہم آہنگ لکیر کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ بتائے گئے نکتے اور اسکے قریبی نکتے کے مابین فاصلے کو تبدیل کر کے اسی عمل کو دہرائیں، اس بات کا خیال رکھیں کہ کچھ نکتے بتائے گئے نکتے کی بائیں طرف بھی ہوں۔ 1-102

سوال نمبر 9 اور 10 سے حاصل شدہ تجربے کی بنیاد $y = ax^2 + c$ اور $y = ax^2 + c$ ، جبکہ ایک حقیقی عدد ہے، کے خم پے موجود کسی بھی نکتے پے خط مماس کے ڈھلاؤ کا اندازہ کریں۔

question 5 part a سوال نمبر 9 سے 11 تک استعمال شدہ طریقے کی مدد سے $y = x^2 + 3x$ اور $y = x^2 - 2x$ کے خم پے موجود کسی بھی نقطہ پہ بنی خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کرنے کا طریقہ وضع کریں۔ part b حصہ (i) میں حاصل شدہ تجربے کی بنیاد پہ $y = x^2 + bx$ ، جبکہ b ایک حقیقی عدد ہے، کے خم پہ بنی کسی بھی خط مماس کے ڈھلاؤ کو معلوم کرنے کا ایک عالمگیر اصول وضع کریں

دو درجی ترسیم کے ڈھلاؤ کا کلیہ؛ سبق 3 میں عام دو درجی ترسیم کا تذکرہ کیا گیا، جسکی مساوات کچھ ایسی $y = ax^2 + bx + c$ ہے، جبکہ a، b اور c مستقل ہیں۔ ایسے خم کی خط مماس کے ڈھلاؤ کے بارے میں آپکا کیا خیال ہے؟

مشق 6B کے سوالات کے حل سے آپکو اندازہ ہوا ہوگا $y = ax^2$ کے ڈھلاؤ کا کلیہ $2ax$ ہے۔ اسکا مطلب، مثال کے طور پر، $y = 3x^2$ کے خم کا ڈھلاؤ x کی ہر مقدار پر تین گناہ زیادہ ہوگا اگر اسکے مقابل خم x^2 کا ہو۔ آپنے اس بات کا بھی مشاہدہ کیا ہوگا کہ $y = bx^2 + x^2$ کے ڈھلاؤ کا کلیہ $2x + b$ ہے، لب لباب تمام کلام کا یہ ہے کہ $y = x^2 + 4x$ کے ڈھلاؤ کا کلیہ $2x + 4$ ہے۔ جو کہ x^2 اور $4x$ کے ڈھلاؤ کے کلیوں کے جمع کے برابر ہے۔

آپکو اس بات کا پہلے سے ہی علم ہے کہ $y = x^2$ اور $y = x^2 + c$ دونوں کے ڈھلاؤ کا کلیہ ایک ہی ہے، c کی مقدار جتنی بھی ہو اس سے فرق نہیں پڑتا۔

لہذا اس بات میں کوئی یجید نہیں ہے کہ؛

مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کے خم کے ڈھلاؤ کا کلیہ $2ax + b$ ہے،

یہ نتیجہ اس طرح بھی اہم ہے کہ ہم ایک ایسے تفاعل کا ڈھلاؤ معلوم کر سکتے ہیں جو کی حصوں پر مشتمل ہو، اور ایسا کرنے کے لیے ہم ان تمام حصوں کے ڈھلاؤ کو باہمی طور پر جمع کر دیتے ہیں۔ آپ ایک ایسے تفاعل کا ڈھلاؤ بھی معلوم کر سکتے ہیں جسکے ساتھ کوئی مستقل عدد ضرب کھا رہا ہو، اور ایسا کرنے کے لیے ہمیں اس تفاعل کے ڈھلاؤ کو بھی اسے عدد سے ضرب دینی ہوگی۔

ضمیمہ 6.6 میں ہم اس بات کا مشاہدہ کریں گے کہ ہم ان نتائج کو ثابت کر سکتے ہیں، وقت ضائع نہ کرتے ہوئے یہاں ان کے استعمال کی چند مثالیں دی گئی ہیں، لیکن اس سے قبل ہمیں علامت نویسی کو دیکھنا ہوگا۔

مان لیں کے ایک خم کی مساوات $y = f(x)$ ہے، اسکے ڈھلاؤ کا کلیہ $f'(x)$ ہوگا، اور اسکو f ڈیٹش x پڑھا جائے گا۔

کسی بھی خم کے خط مماس کے ڈھلاؤ کو معلوم کرنا تفریق کاری کہلاتا ہے، اور جب ہم اس عمل کو انجام دے رہے ہوتے ہیں تو دراصل ہم تفریق کاری کر رہے ہوتے ہیں۔

جیسے $f(2)$ سے مراد وہ مقدار ہے جب $x = 2$ ہو، اسی طرح $f'(2)$ اس ڈھلاؤ کے لیے استعمال ہوتا ہے جب $y = f(x)$ اور $x = 2$ ہو۔ لہذا (ڈیٹش) جو $f'(x)$ پے بنی ہے ہمیں تفریق کا بتاتی ہے، اس علامت کو دیکھتے ہی آپ جس x پے ڈھلاؤ معلوم کرنا چاہتے اسکے x کے متبادل سے x کو بدل دیتے ہیں۔

مقدار $f'(2)$ کو تفاعل $f(x)$ کا تفرق کہا جائے گا جب $x = 2$ ہوگا۔

پس جب بھی ہمیں مساوات $y = f(x)$ کے خم کا $x = 2$ پے ڈھلاؤ معلوم کرنا ہو، ہم $f'(x)$ معلوم کریں گے اور پھر x کو اسکے متبادل مقدار یعنی یہاں 2 سے بدل دیں گے، نتیجے کے طور پر ہمیں $f'(2)$ ملے گا۔

مثال 6.4.1

مساوات $3x^2 - 2x + 5$ کو تفریق کریں۔ خم $3x^2 - 2x + 5$ کے خط مماس اور عمودی خط کے ڈھلاؤ کی مساوات بتائیں، جبکہ اس نکتے پر $x = 1$ ہو۔

مان لیں کہ $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ ، اس تفاعل کے مطابق $a=3$ ، $b=-2$ اور $c=5$ ہے۔ اس تفاعل کا اگر تفرق معلوم کریں،

$$f'(x) = 2 \times 3 \times x - 2 = 5x - 2$$

وہ نقطہ جس پہ $x=1$ اسکا y محدود برابر ہوگا $6=3-2+5$

جب $x=1$ ہوگا تو خط مماس کا ڈھلاؤ ہوگا، $f'(1) = 6 \times 1 - 2 = 4$

اسی لیے خط مماس کی مساوات کچھ یوں بنے گی، $y - 6 = 4(x - 1)$ یا $y = 4x + 2$

عمودی خط، خط مماس کے ساتھ عمودی ہوتا ہے اس لیے اسکا ڈھلاؤ $-\frac{1}{4}$ ہوگا، اسی لیے عمودی خط کے ڈھلاؤ کی مساوات $y - 6 = -\frac{1}{4}(x - 1)$ ہوگی جسکی سادہ شکل کچھ یوں $x + 4y = 25$ ہے۔

جوابات

