

1.3 命题演算的简单性质

❖ L的构成


- I 命题语言：符号表、公式
- II 推理设施：公理模式、推理规则
- III 形式证明、形式推理 (软件、硬件、算法……)
- IV 定义联结词： $\wedge, \vee, \leftrightarrow$

❖ “实验”

- 同一律 $\vdash p \rightarrow p$
- 否定前件律 $\vdash \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
-

❖ L的性质

1. 单调性：增加前提不减少结论
2. 紧致性：有限前提充分性
3. 平凡性：前提集安全性警示
4. 演绎定理：推理机制的原理
5. 系统需求、推理性能和运行原理
6. 归谬律：推理机制的原理
7. 双否律：推理机制的原理
8. 可证等价替换规则
-



011094, 中国科学技术大学, 2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

第1章 命题逻辑

1.4 命题演算L的语义

- ❖ 形式语义 在外延性原则之下，给L的所有语法对象赋予真值意义，包括：命题变元、联结词、公式、内定理、形式推理。
- ❖ 真值 真值 t, f 分别代表抽象的“真”和“假”，其中真/假的含义没有具体规定(形式语义)，要求：(1)符合矛盾律和排中律，(2)在L的每一项应用中(命题变元代表具体命题)，真/假的含义保持不变(保真性的前提条件之一)。
- ◆ 注释 外延性原则中的“外延”实际上落实到真值上，与外延的通常含义有差别。
- ◆ 观察 L语义学的设计使L语义学可适用于不同领域的应用。

1.4 命题演算L的语义

❖ 定义1（指派-命题变元的语义解释） $L(X)$ 的一个指派是一个映射 $v_0: X \rightarrow \{t, f\}$ 。

◆ 注释 命题符号被解释为真值。逻辑不考虑一个 v_0 “对不对”。

❖ 定义2（赋值-联结词的解释原则） $L(X)$ 的一个赋值 v 是一个满足下列条件的映射：

1. $v(\neg)$ 是一个一元函数 $\{t, f\} \rightarrow \{t, f\}$ ；

2. $v(\rightarrow)$ 是一个二元函数 $\{t, f\} \times \{t, f\} \rightarrow \{t, f\}$ ；

注释 联结词被解释为真值函数。

1.4 命题演算L的语义

❖ 定义3 (标准赋值) 标准赋值是满足下列条件的赋值 v :

1. $v(\neg) =_{df} f_{\neg}$,

$f_{\neg}(x)$ 的定义如下

t	f
f	t
x	$f_{\neg}(x)$
$\neg x$ 的真值	

2. $v(\rightarrow) =_{df} f_{\rightarrow}$,

$f_{\rightarrow}(x, y)$ 的定义如下

	t	f	y
t	t	f	
f	t	t	
x	$f_{\rightarrow}(x, y)$ $x \rightarrow y$ 的真值		

1.4 命题演算L的语义

❖ 定义4 (命题语言的标准解释) $L(X)$ 的一个(标准)解释 $I=(v_0, v)$ 是一个复合映射 $I: L(X) \rightarrow \{t, f\}$, 满足:

1. 对任何命题变元 x , $I(x) = v_0(x)$;
2. 对任何公式 p , $I(\neg p) = v(\neg)(I(p)) = f_{\neg}(I(p)) = t$ 如果 $I(p) = f$ | f 如果 $I(p) = t$;
3. 对任何公式 p 和 q , $I(p \rightarrow q) = v(\rightarrow)(I(p), I(q)) = f_{\rightarrow}(I(p), I(q)) = f$ 如果 $I(p)=t$ 并且 $I(q)=f$ | t 其他情况。

◆ 注释 语义解释中 v 固定、 v_0 可变, 公式的真值也随 v_0 可变。

1.4 命题演算L的语义

❖ 性质（语义解释的良定义性） 对命题演算L的任何公式 p 和任何解释 $I=(v_0, v)$ ，存在唯一的 $u \in \{t, f\}$ ，使得 $I(p)=u$ 。

证明 自修。

◆ 注释 符合标准解释的命题逻辑称为标准命题逻辑；否则称为非标准命题逻辑。

❖ 标准命题逻辑的演算都是等价的（内定理集合相同）；非标准命题逻辑系统相互不等价，也不等价于标准命题逻辑系统。

1.4 命题演算L的语义

❖ 例1 设 $v_0(x_1) = f$, $v_0(x_2) = t$, 则

$$\begin{aligned} I(\neg x_1 \rightarrow x_2) &= f_{\rightarrow}(I(\neg x_1), I(x_2)) \\ &= f_{\rightarrow}(v(\neg)(I(x_1)), I(x_2)) \\ &= f_{\rightarrow}(f_{\neg}(v_0(x_1)), v_0(x_2)) \\ &= f_{\rightarrow}(f_{\neg}(f), t) \\ &= f_{\rightarrow}(t, t) \\ &= t. \end{aligned}$$

1.4 命题演算L的语义

❖ 例1 (续) 用真值表法计算公式 $\neg x_1 \rightarrow x_2$ 在**所有**指派 v_0 下的真值:

x_1	x_2	$\neg x_1$	$\neg x_1 \rightarrow x_2$
t	t	f	t
t	f	f	t
f	t	t	t
f	f	t	f

❖ 公式的语义 $L(X)$ 公式在语义中被解释为**真值函数**。

1.4 命题演算L的语义

❖ 定义联结词的语义解释

1. $x \wedge y$

	t	f	y
t	t	f	
f	f	f	
x	$x \wedge y$ 的真值		

2. $x \vee y$

	t	f
t	t	t
f	t	f

3. $x \leftrightarrow y$

	t	f
t	t	f
f	f	t

1.4 命题演算L的语义

❖ 蕴涵词的实质蕴涵解释

◆ $x \rightarrow y$ 的实质蕴涵解释:

	t	f	y
t	t	f	
f	t	t	
x	$x \rightarrow y$ 的真值		

◆ 为什么采用实质蕴涵解释?

1. 总体上合理;
2. 直观合理性因人而异;
3. 经典数学采取实质蕴涵解释。

1.4 命题演算L的语义

习题

1.5 p.15: 1(7, 8); 2(3).