概率论与数理统计 B　第八周作业　4 月 7 日 周二

PB18151866 龚小航

4.62. 掷两颗均匀骰子，以 X 表示第一颗骰子掷出的点数，Y 表示两颗骰子所掷出的点数中的最大值.

(1) 求 X,Y 的数学期望与方差.　　(2) 求 $Cov(X,Y)$.

解：由于骰子掷出的点数只有六种情况，且一个骰子掷出的点数是等可能的，则可列出X,Y取各值的概率：

$$P(X=i)=\frac{1}{6}\ ,\quad i=1,2,3,4,5,6$$

记第一个骰子掷出点数为随机变量A_1，第二个骰子掷出点数为随机变量A_2：取值集合记为(A_1,A_2)

$$P(Y=1)=P(A_1=1,A_2=1)=\frac{1}{6}*\frac{1}{6}=\frac{1}{36}\ ;\quad P(Y=2)=P\big((2,1),(2,2),(1,2)\big)=\frac{1}{36}*3=\frac{1}{12}$$

$$P(Y=3)=P\big((3,1),(3,2),(3,3),(2,3),(1,3)\big)=\frac{1}{36}*5=\frac{5}{36}\ ;$$

$$P(Y=4)=P\big((4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(3,4),(2,4),(1,4)\big)=\frac{1}{36}*7=\frac{7}{36}$$

$$P(Y=5)=P\big((5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(4,5),(3,5),(2,5),(1,5)\big)=\frac{1}{36}*9=\frac{1}{4}$$

$$P(Y=6)=P\big((6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),(5,6),(4,6),(3,6),(2,6),(1,6)\big)=\frac{1}{36}*11=\frac{11}{36}$$

离散型随机变量的每个取值的概率都已写出，直接利用定义计算其期望与方差：

$$E(X)=\sum_{i=1}^{6} i*P(X=i)=\frac{1}{6}*\sum_{i=1}^{6} i=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{6} i*P(Y=i)=\frac{161}{36}$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{6} i^2*P(X=i)=\frac{1}{6}*\sum_{i=1}^{6} i^2=\frac{91}{6}$$

$$E(Y^2)=\sum_{i=1}^{6} i^2*P(Y=i)=\frac{791}{36}$$

$$\Longrightarrow\quad Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{35}{12}\ ;\quad Var(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{2555}{1296}$$

再计算X,Y的协方差：

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

其中：

$$E(XY)=\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} i*j*P(X=i,Y=j)=E\big(E(XY|X)\big)=\frac{1}{36}(1*(1*1+2+3+4+5+6)+$$

$$2*(2*2+3+4+5+6)+\cdots\cdots+6*(6*6))=154/9$$

因此，

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{154}{9}-\frac{7}{2}*\frac{161}{36}=\frac{35}{24}$$

4.69. 投资组合是将总资本按一定比例分配于各种投资，以分散和降低风险，所谓风险通常以方差来度量. 现假设某两种投资的回报率 X, Y 都是随机变量，投资的风险(即方差)为 $Var(X) = Var(Y) = \sigma^2$. 假设 $\rho_{XY} = -0.5$，即两种投资呈负相关. 记投资组合中两种投资的比例分别为 π 和 $1-\pi$，则投资组合的回报率为 $Z = \pi X + (1-\pi)Y$.

(1) 试证明该投资组合 Z 的风险小于将所有资本投资于其中一个的风险.

(2) 求使得投资组合风险最小的分配比例π.

解：(1) 若将所有资本投资于其中的一个，则有$Z = Y$或$Z = X$，而X, Y的风险（方差）均为σ^2.

故需要证明的是： $Var(Z) < \sigma^2$ ；而X, Y两种投资方案不是独立随机变量：

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma^2} \equiv -\frac{1}{2} \implies Cov(X,Y) = -\frac{1}{2}\sigma^2$$

$$\begin{aligned} Var(Z) = Var(\pi X + (1-\pi)Y) &= Var(\pi X) + Var\big((1-\pi)Y\big) + Cov(\pi X, (1-\pi)Y) \\ &= \pi^2 Var(X) + (1-\pi)^2 Var(Y) + \pi(1-\pi)Cov(X,Y) \\ &= \pi^2\sigma^2 + (1-\pi)^2\sigma^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\pi(1-\pi) \\ &= \sigma^2\left(\pi^2 + (1-2\pi+\pi^2) - \frac{1}{2}(\pi-\pi^2)\right) \\ &= \frac{5}{2}\sigma^2\left(\left(\pi - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{20}\right) \quad 0 \le \pi \le 1 \end{aligned}$$

这是二次函数，在定义域内，$\pi = 1\ or\ 0$时，$Var(Z)_{MAX} = \sigma^2$

由二次函数的性质，$0 < \pi < 1$时满足$Var(Z) < \sigma^2$

因此该投资组合 Z 的风险小于将所有资本投资于其中一个的风险.

(2) 为使Z的方差最小，直接观察其表达式：显然当$\pi = 0.5$时，二次函数取极小值。

$$Var(Z)_{MAX} = \frac{5}{2}\sigma^2\left(0 + \frac{3}{20}\right) = \frac{3}{8}\sigma^2 \quad \pi = \frac{1}{2}$$

5.2. 设 X, Y为两个非负随机变量，具有有限的期望 $E[X] = 2$，$E[Y] = 3$和协方差$Cov(X,Y) = -5$. 则类似切比雪夫不等式可得到概率 $P(XY > \epsilon)$，$\epsilon > 0$.求这个概率的上界.

解：由协方差的性质：

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \implies E(XY) = Cov(X,Y) + E(X)E(Y) = 1$$

由于X, Y均非负，对任给的常数$\epsilon > 0$，都有马尔可夫不等式成立：

$$P(XY \ge \epsilon) \le \frac{E(XY)}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}$$

所以这个概率的上界为$1/\epsilon$.

5.4. 设 $(X_1, Y_1) \dots, (X_n, Y_n), \dots$ 是一列独立同分布的二维随机变量，均值均为 2， 方差均为 2，设$\forall n \in N$ $Cov(X_n, Y_n) = 1$, 记 $Zn = \dfrac{X_1Y_1 + \cdots + X_nY_n}{n}, n \in N$

求 Zn 依概率收敛与何处.

解：由独立同分布的意义和协方差的性质：其中$Cov(X_i, Y_i) = 1$; $E(X_i) = E(Y_i) = 2$

$$Cov(X_i, Y_i) = E(X_i, Y_i) - E(X_i)E(Y_i)$$

$$\implies E(X_i, Y_i) = Cov(X_i, Y_i) + E(X_i)E(Y_i) = 5$$

由大数定律，可得：

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{X_1Y_1 + \cdots + X_nY_n}{n} = E(X,Y) = 5$$

5.8. 假设某地区的房屋入住率是20%,以 X 表示随机抽查 100 个房屋中有人居住的户数. 求有人居住的户数不少于 15 户且不多于 25 户的概率的近似值.

解：每一幢房屋是否有人居住是一次独立重复试验，成功率为20%，因此X是一个n重贝努利试验。

$$\Longrightarrow \quad X \sim B(100\,,0.2)\;;\;\; E(X)=np=20\;,Var(X)=npq=16$$

利用中心极限定理 4.3，认为$n=100$近似的为无穷。有：

$$P\left(\frac{15-20}{\sqrt{16}} \le \frac{X-20}{\sqrt{16}} \le \frac{25-20}{\sqrt{16}}\right)=\Phi\left(\frac{5}{4}\right)-\Phi\left(-\frac{5}{4}\right)=2\Phi\left(\frac{5}{4}\right)-1 \approx 78.9\%$$

5.16. 设某生产线上组装每件产品的时间服从指数分布，平均需要 10 分钟，且各产品的组装时间是相互独立.

(1) 试求组装 100 件产品需要 15 小时至 20 小时的概率.

(2) 保证有 95% 的可能性，问 16 小时内最多可以组装多少件产品.

解：(1) 设组装一件产品所需时间为随机变量X，X服从指数分布，因此X的概率密度函数为：

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\quad,\;\; x>0$$

利用连续性随机变量的均值定义，求其均值：

$$E(X)=\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\left(-xe^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{\infty}\right)+\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx=\frac{1}{\lambda}\equiv 10 \quad \Longrightarrow \quad \lambda=\frac{1}{10}$$

因此组装一件产品的用时X服从概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}x}\quad,\;\; x>0\;\;;\;\; Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}=100\;,\sigma=10$$

记生产线上组装第i件产品所需要的时间为随机变量X_i：利用中心极限定理 4.2

$$P\left(15*60 \le \sum_{i=1}^{100} x_i \le 20*60\right)=P\left(\frac{900-100*10}{\sqrt{100}*10} \le \frac{\sum X_i - n*a}{\sqrt{n}*\sigma} \le \frac{1200-100*10}{\sqrt{100}*10}\right)$$

$$=\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)+\Phi(1)-1=0.81855$$

(2) 记在 16 小时内，最多可以组装n件产品。在恰好满足95%概率的边界情况下，有：

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le 16*60=960\right)=0.95$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \le 960\right)=P\left(\frac{\sum X_i - n*a}{\sqrt{n}*\sigma} \le \frac{960-n*10}{\sqrt{n}*10}\right)=\Phi\left(\frac{960-10n}{10\sqrt{n}}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \Phi\left(\frac{960-10n}{10\sqrt{n}}\right)=0.95 \quad \text{查表：}$$

$$\frac{960-10n}{10\sqrt{n}} \approx 1.65 \;\text{解方程得} \Longrightarrow \sqrt{n}=9.0076 \;\; or\; -10.6576(\text{舍})$$

$$\Rightarrow \;\; n=[9.0076^2]=81$$

因此满足题意得情况下 16 小时最多可以组装 81 件产品.