Computer Science and Technology

运筹学基础

讲者：顾乃杰 教授、黄章进 副教授

计算机科学与技术学院

2020-02-17

对偶理论与灵敏度分析

Chap.3 Duality theory & Sensitivity analysis

主要内容

- 3.1 单纯形法的矩阵描述
- 3.2 单纯形法的矩阵计算（改进单纯形法）
- 3.3 对偶问题的提出
- 3.4 线性规划的对偶理论
- 3.5 影子价格
- 3.6 对偶单纯形法
- 3.7 灵敏度分析
- 3.9 利用计算机工具求解本章问题

3.2 单纯形法的矩阵计算

	基变量 X_B	非基变量 X_N		等式右边 RHS
系数矩阵	$B^{-1}B=I$	$B^{-1}N$	$B^{-1}P_{j,j\in N}$	$B^{-1}b$
检验数	$C_B-C_BB^{-1}B=0$	$C_N-C_BB^{-1}N$	$(-C_BB^{-1})_{j\in N}$	$-C_BB^{-1}b$

- 改进单纯形法的基本点是矩阵计算
  - 当用单纯形表求解线性规划问题时，每步迭代都要计算表中所有的数字。实际上,真正用到的数字是基变量的值、非基变量检验数和换人变量列的系数。
  - 表3—1中的 $B^{-1}b$，$(C_N - C_BB^{-1}N)$ 和 $B^{-1}N$ 中换入变量的列。
  - 最关键的是 B^{-1} 矩阵的计算。
  - 线索：初始单位矩阵的位置，经过迭代运算后，就是B^{-1}的位置。
  - 迭代中，利用本步中基的逆矩阵B^{-1}来计算下一步的逆矩阵B_{new}^{-1}

-z	X_B	X	X_S	RHS
1	0	$C-C_BB^{-1}A$	$-C_BB^{-1}$	$-C_BB^{-1}b$
O	I	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$

改进单纯形法

- 设 $a_{i,j}$，$a_{l,j}$ 为本次表中数字，$a'_{i,j}$，$a'_{l,j}$ 为迭代后表中数字，由第二章2.3.5节公式：

$$\begin{cases} a'_{i,j} = a_{i,j} - \dfrac{a_{l,j}}{a_{l,k}} a_{i,k} & (i \neq l) \\ a'_{l,j} = \dfrac{a_{l,j}}{a_{l,k}} & (i = l) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{l1} & \cdots & a'_{lm} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{m1} & \cdots & a'_{mm} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{c} \text{第 } l \text{ 列} \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & -a_{1k}/a_{lk} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/a_{lk} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -a_{mk}/a_{lk} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{lm} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

只需将换入变量对应列 $\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{lk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ 变换为 $\xi = \begin{pmatrix} -a_{1k}/a_{lk} \\ \vdots \\ 1/a_{lk} \\ \vdots \\ -a_{mk}/a_{lk} \end{pmatrix}$ 将其取代m×m的单位阵的第 l 列，再将其左乘本次表中基的逆 B^{-1}，即可新基对应的逆矩阵 B_1^{-1}

求逆矩阵B_1^{-1}

-z	X_B	X	X_S	RHS
1	0	$C-C_BB^{-1}A$	$-C_BB^{-1}$	$-C_BB^{-1}b$
O	I	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$

- B_1^{-1}的求得：
  - 单位矩阵 $I_m=(e_1,e_2,\cdots,e_m)$，e_i表示第i个位置的元素为1，而其他元素为0的单位列向量。
  - 设x_k为换入变量，X_B的第l个基变量为换出变量，则 $B_1^{-1}=EB^{-1}$，其中

$$B^{-1}P_k=[a_{1k},a_{2k},\cdots,a_{lk},\cdots,a_{mk}]^T,$$

$$\xi=\left[-a_{1k}/a_{lk},-a_{2k}/a_{lk},\cdots,1/a_{lk},\cdots,-a_{mk}/a_{lk}\right]^T$$

$$E=(e_1,e_2,\cdots,e_{l-1},\xi,e_{l+1},\cdots,e_m),$$

- 易验证

$$B_1B_1^{-1}=B_1EB^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & a_{1k} & \cdots & 0\\ & 1 & a_{2k} & & \\ & & \ddots & & \\ & & a_{lk} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & a_{mk} & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & -a_{1k}/a_{lk} & \cdots & 0\\ & 1 & -a_{2k}/a_{lk} & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1/a_{lk} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & -a_{mk}/a_{lk} & \cdots & 1\end{pmatrix}=I$$

  - 因此上述通过 $B_1^{-1}=EB^{-1}$ 求得下一步迭代的基的逆矩阵方式可行
    - 备注：上述验证步骤以 B=I 作为第一步验证，同学们可自行验证接下来的迭代按此计算是否正确。

改进单纯形法的优点

- E很容易得到，一旦确定换入换出变量后，即可计算出ξ
- 计算矩阵的乘法比求矩阵的逆要容易得多，而且从上述推导中可以看出，矩阵中零元素较多，稀疏矩阵相乘会有更高效的算法实现
- 直接从上一步的B_i^{-1}推导出下一步迭代的B_{i+1}^{-1}，其中B_0^{-1}可直接获得
  - 中间不需要求出B_{i+1}，而且我们也并不需要B_{i+1}
- 因此，改进单纯形法在计算机中常作为优先选择的形式

改进单纯形法

- 改进单纯形法求解线性规划问题的计算步骤为
  - (1)初始化：根据给出的线性规划问题，在加入松弛变量和人工变量后，得到初始基变量X_B，求初始基矩阵B的逆矩阵B^{-1}，及 $B^{-1}b$
  - (2)最优性测试：计算非基变量X_N的检验数 $\sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N$
    - 若$\sigma_N \le 0$，已得到最优解 $[X_B, X_N]^T = [B^{-1}b, 0]^T$，停止计算；
    - 若有$\sigma_j > 0$，转下一步；
  - (3) 确定换入变量：根据$\max(\sigma_j > 0) = \sigma_k$，确定换入变量$x_k$，计算$B^{-1} P_k$
    - 若 $B^{-1} P_k \le 0$，那么问题有无界解，停止计算。否则，进入下一步；
  - (4) 确定换出变量：根据θ规则，计算

$$\theta = \min\left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_k)_i} \middle| (B^{-1}P_k)_i > 0 \right\} = \frac{(B^{-1}b)_l}{(B^{-1}P_k)_l},$$

    - X_B对应的第l个基变量为换出变量
  - (5)确定新的基可行解：计算新的基矩阵B_1的逆矩阵B_1^{-1}，及$B_1^{-1}b$，重复(2)-(5)

改进单纯形法例子

- 例1. 用改进单纯形法求解：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,5 \end{cases}$$

- 解：
  - 初始基变量是$X_{B_0} = (x_3, x_4, x_5)^T$，对应的系数为$C_{B_0} = (0,0,0)$,
  - 非基变量及其对应系数为：$X_{N_0} = (x_1, x_2)^T$，$C_{N_0} = (2,3)$。
  - 始基B_0是单位矩阵，其逆矩阵也是单位阵

$$B_0 = (P_3, P_4, P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1}$$

改进单纯形法例子

$$A+I=\begin{pmatrix}1&2&1&0&0\\4&0&0&1&0\\0&4&0&0&1\end{pmatrix}$$

– 初始基为： $B_0=(P_3,P_4,P_5)^T=I$

初始基变量 $X_{B_0}=(x_3,x_4,x_5)^T$，初始非基变量 $X_{N_1}=(x_1,x_2)^T$；

$C_{B_0}=(0,0,0)$， $C_{N_0}=(2,\ 3)$。

– 第一步：计算非基变量(x_1,x_2)的检验数

$$\sigma_{N_0}=C_{N_0}-C_{B_0}B_0^{-1}N_0=(2,3)-(0,0,0)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{N_0}{\begin{pmatrix}1&2\\4&0\\0&4\end{pmatrix}}=(2,3),$$

由此确定x_2为换入变量。

计算 $$\theta=\min\left\{\frac{(B_0^{-1}b)_i}{(B_0^{-1}P_2)_i}\middle|(B_0^{-1}P_2)_i>0\right\}=\min\{8/2,-,12/4\}=3,$$

对应的换出变量为x_5（l=3）。新的基为 $B_1=(P_3,P_4,P_2)$

新基变量 $X_{B_1}=(x_3,x_4,x_2)^T$，非基变量 $X_{N_1}=(x_1,x_5)^T$；

$C_{B_1}=(0,0,3)$， $C_{N_1}=(2,0)$。

改进单纯形法例子

由 $B_0^{-1}P_2=P2=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}\Rightarrow\xi=\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/4\end{pmatrix}\Rightarrow E_1=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}$;

于是，B_1的逆矩阵

$$B_1^{-1}=E_1B_0^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}$$

计算 $B_1^{-1}b=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\16\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\16\\3\end{pmatrix}$

非基变量 (x_1, x_5) 的系数矩阵： $N_1=\begin{pmatrix}1&0\\4&0\\0&1\end{pmatrix}$

变换为：

$$B_1^{-1}N_1=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\4&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1/2\\4&0\\0&1/4\end{pmatrix}$$

改进单纯形法例子

– 第二步，计算非基变量(x_1,x_5)的的检验数

$$\sigma_{N_1}=C_{N_1}-C_{B_1}B_1^{-1}N_1=(2,0)-(0,0,3)\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\4&0\\0&1\end{pmatrix}=(2,\ -3/4),$$

– 由此确定 x_1 为换入变量。

计算 $$\theta=\min\left\{\frac{(B_1^{-1}b)_i}{(B_1^{-1}P_1)_i}\middle|(B_1^{-1}P_1)_i>0\right\}=\min\{2/1,16/4,-\}=2,$$

对应的换出变量为 x_3（$l=1$）。新的基为 $B_2=(P_1,P_4,P_2)$

新基变量 $X_{B_2}=(x_1,x_4,x_2)^T$，非基变量 $X_{N_2}=(x_3,x_5)^T$；
$C_{B_2}=(2,0,3)$，　$C_{N_2}=(0,0)$。

改进单纯形法例子

由

$$B_1^{-1}P_1=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\\0\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \xi=\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix};$$

于是，B_2的逆矩阵

$$B_2^{-1}=E_2B_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\-4&1&2\\0&0&1/4\end{pmatrix}$$

计算：

$$B_2^{-1}b=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\-4&1&2\\0&0&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\16\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\3\end{pmatrix}$$

非基变量 (x_3, x_5) 的系数矩阵：

$$N_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

变换为：

$$B_2^{-1}N_2=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\-4&1&2\\0&0&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1/2\\-4&2\\0&1/4\end{pmatrix}$$

改进单纯形法例子

– 第三步：计算非基变量(x_3,x_5)的检验数

$$\sigma_{N_2}=C_{N_2}-C_{B_2}B_2^{-1}N_2=(0,0)-(2,0,3)\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\-4&1&2\\0&0&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}=(-2,\ 1/4)$$

由此确定 x_5 为换入变量。

计算

$$\theta=\min\left\{\frac{(B_2^{-1}b)_i}{(B_2^{-1}P_5)_i}\middle|(B_0^{-1}P_5)_i>0\right\}=\min\left\{-,\ 8/2,\ \frac{3}{1/4}\right\}=4,$$

对应的换出变量为x_4（l=2）。新的基为：$B_3=(P_1,P_5,P_2)$

新基变量 $X_{B_3}=(x_1,x_5,x_2)^T$，非基变量 $X_{N_3}=(x_3,x_4)^T$；

$C_{B_3}=(2,0,3)$， $C_{N_3}=(0,\ 0)$。

改进单纯形法例子

由

$$B_2^{-1}P_5=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\-4&1&2\\0&0&1/4\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\2\\1/4\end{pmatrix}\Rightarrow \xi=\begin{pmatrix}1/4\\1/2\\-1/8\end{pmatrix};$$

于是，B_3的逆矩阵：

$$B_3^{-1}=E_3B_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&1/4&0\\0&1/2&0\\0&-1/8&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\-4&1&2\\0&0&1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/4&0\\-2&1/2&1\\1/2&-1/8&0\end{pmatrix}$$

计算：

$$B_3^{-1}b=\begin{pmatrix}0&1/4&0\\-2&1/2&1\\1/2&-1/8&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\16\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$$

非基变量 (x_3, x_4) 的系数矩阵： $N_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$

改进单纯形法例子

– 最优性检验：计算非基变量(x_3,x_4)的检验数

$$\sigma_{N_3} = C_{N_3} - C_{B_3} B_3^{-1} N_3 = (0,0) - (2,0,3)\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (-3/2,\ -1/8)$$

因检验数都是负值，得到最优解

$$X^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_2 \end{pmatrix} = B_3^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

目标函数的最优值为：

$$z^* = C_{B_3} B_3^{-1} b = (2,0,3)\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 14$$

改进单纯形法

原单纯形法不是很经济的算法。

1953年美国数学家G.B.丹齐克为了改进单纯形法每次迭代中积累起来的进位误差，提出改进单纯形法。其基本步骤和单纯形法大致相同，主要区别是在逐次迭代中不再以高斯消去法为基础，而是由旧基阵的逆去直接计算新基阵的逆，再由此确定检验数。

这样做可以减少迭代中的累积误差，提高计算精度，同时也减少了在计算机上的存储量。

3.3 对偶问题的提出

- 对偶是指对同一事物（问题）从不同的角度或立场观察，有两种对立的表述，如：
  - 周长一定，面积最大的矩形是正方形；
  - 面积一定，周长最小的矩形是正方形。
- 一个熟悉的例子
  - (第2章例1)工厂甲在计划期内要安排生产I、II两种产品，生产单位产品所需的设备台时及A、B两种原材料的消耗如下：

	产品I	产品II	资源限制
设备	1	2	8台时
原材料A	4	0	16
原材料B	0	4	12
单位利润	2	3	

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \qquad \le 16 \\ \qquad 4x_2 \le 12 \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题的提出(cont.)

- 换一种角度（立场）
  - 假如工厂甲自己不生产产品，而将现有的资源（机器台时、原材料A和B）出租给工厂乙，设台时和原材料的出租利润如下，那么资源的转让价格是多少才合理?

	产品I	产品II	资源限制	出租利润
设备	1	2	8台时	y_1
原材料A	4	0	16	y_2
原材料B	0	4	12	y_3
自己生产所得利润	2	3		

- 工厂甲出租台时和资源获得的利润，不应少于自己生产产品获得的利润。

$$y_1 + 4y_2 \geq 2$$

$$2y_1 + 4y_3 \geq 3$$

- 出租台时和资源的价格不能太高，否则工厂乙不接受：

$$\min \omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

对偶问题的提出(cont.)

- 模型从原问题可衍生为以下形式：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\min \omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3 \qquad \begin{cases} y_1 + 4y_2 \ge 2 \\ 2y_1 + 4y_3 \ge 3 \\ y_1、y_2、y_3 \ge 0 \end{cases}$$

- 可以看出，右侧的模型同样是一个线性规划模型，我们称该线性规划问题是原生产计划问题的对偶问题。

原问题的各系数矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; C = (2,3); b = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

对偶问题的各系数矩阵为：

$$A_\omega = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A^T;$$

$$C_\omega = (8,16,12) = b^T; b_\omega = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = C^T$$

3.4 线性规划的对偶理论

- 3.4.1 原问题与对偶问题的关系
- 3.4.2 对偶问题的基本性质

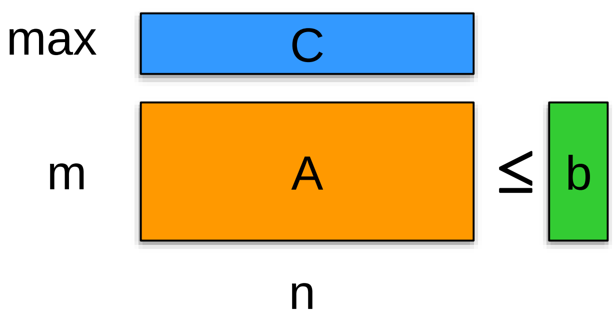
3.4.1 原问题与对偶问题的关系

- 原问题

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0$$

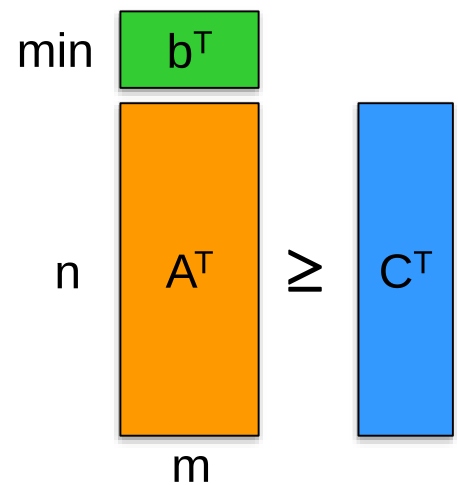


- 对偶问题

$$\min \omega = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$$

$$(y_1, y_2, \cdots, y_m)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \ge (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_m \ge 0$$



原问题与对偶问题的关系

- 标准形式原问题与对偶问题的关系表
  - 正面看是原问题，转90度后看是对偶问题

x_j \ y_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	原关系	$\min\omega$
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	$\le$	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	$\le$	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	$\le$	b_m
对偶关系	$\ge$	$\ge$	$\cdots$	$\ge$		
$\max z$	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	$\max z =$	$\min\omega$

- 对称形式：目标函数求极大值时，所有约束条件为≤号，变量非负；目标函数求极小值时，所有约束条件为≥号，变量非负。
  - 对称形式的线性规划的对偶问题亦是对称形式。

求对偶问题的例子

- 例2：根据表3-3写出原问题与对偶问题的表达式：

表 3-3

y_i \ x_j	x_1	x_2	b
y_1	1	2	8
y_2	4	0	16
y_3	0	4	12
c	2	3	

- 解：原问题

该问题是对称形式的线性规划问题，其对偶问题亦是对称形式

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \qquad\quad \le 16 \\ \qquad 4x_2 \le 12 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\min \ \omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 \qquad \ge 2 \\ 2y_1 \qquad + 4y_3 \ge 3 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0 \end{cases} \qquad (3\text{-}11)$$

原问题与对偶问题的关系

– 一般线性规划问题中遇到非对称形式时，处理如下：

- 原问题的约束条件中含有等式约束条件：

步骤1：等式约束条件分解为两个不等式约束条件

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1,2,\ldots,m$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,n$$

$\longrightarrow$

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \qquad i = 1,2,\ldots,m$$
$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq -b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m$$
$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

原问题与对偶问题的关系

– 一般线性规划问题中遇到非对称形式时，处理如下：

- 原问题的约束条件中含有等式约束条件：

步骤2：按对称形式变换关系可写出它的对偶问题

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le -b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

$$\min \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i' + \sum_{i=1}^{m} (-b_i y_i'')$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i' + \sum_{i=1}^{m} (-a_{ij} y_i'') \ge c_j, \; j = 1,2,\ldots,n$$

$$y_i', y_i'' \ge 0, i = 1,2,\ldots,m$$

原问题与对偶问题的关系

– 一般线性规划问题中遇到非对称形式时，处理如下：
  - 原问题的约束条件中含有等式约束条件：

步骤3：整理得出对偶问题，设 $y_i = y_i' - y_i''$， y_i为无约束， $i = ,1,2,\dots,m$

$$\min \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i' + \sum_{i=1}^{m} (-b_i y_i'')$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i' + \sum_{i=1}^{m} (-a_{ij} y_i'') \ge c_j, j = 1,2,\dots,n$$
$$y_i', y_i'' \ge 0, i = 1,2,\dots,m$$

$\longrightarrow$

$$\min \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = 1,2,\dots,n$$
y_i为无约束， $i = 1,2,\dots,m$

原问题与对偶问题的关系

– 一般线性规划问题中遇到非对称形式时，处理如下：

- 原问题的约束条件中含有等式约束条件：

1：

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,2,\ldots,m$$
$$x_j\geq 0,\ j=1,2,\ldots,n$$

步骤1：等式约束条件分解为两个不等式约束条件

2：

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leq b_i,\ i=1,2,\ldots,m$$
$$-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leq -b_i,\ i=1,2,\ldots,m$$
$$x_j\geq 0,\ j=1,2,\ldots,n$$

步骤2：按对称形式变换关系可写出它的对偶问题

3：

$$\min \omega=\sum_{i=1}^{m}b_i y_i'+\sum_{i=1}^{m}(-b_i y_i'')$$
$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i'+\sum_{i=1}^{m}(-a_{ij}y_i'')\geq c_j,\ j=1,2,\ldots,n$$
$$y_i',y_i''\geq 0,\ i=1,2,\ldots,m$$

步骤3：整理得出对偶问题

4：

设$y_i=y_i'-y_i''$

$$\min \omega=\sum_{i=1}^{m}b_i y_i$$
$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\geq c_j,\ j=1,2,\ldots,n$$
y_i为无约束, $i=1,2,\ldots,m$

原问题与对偶问题的关系

- 上述等式类型约束条件的对偶问题也可写成：

$$P: \max z = cx \qquad D: \min \ \omega = yb$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} yA \ge c \\ y\text{无限制} \end{array}$$

- 综合考虑更通用的情况：

$$P: \max z = cx$$

$$\begin{cases} A_1 x \ge b_1 \\ A_2 x = b_2 \\ A_3 x \le b_3 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$$P: \max z = cx + 0x_s + 0x_t$$

$$\begin{cases} A_1 x - Ix_s = b_1 \cdots\cdots y_1 \\ A_2 x = b_2 \cdots\cdots\cdots\cdots y_2 \\ A_3 x + Ix_t = b_3 \cdots\cdots y_3 \\ x, x_s, x_t \ge 0 \end{cases}$$

$$P: \min \omega = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3$$

$$\begin{cases} y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 \ge c \\ -Iy_1 \ge 0 \\ Iy_3 \ge 0 \\ y_1, y_2, y_3\text{无限制} \end{cases}$$

$$P: \min \omega = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3$$

$$\begin{cases} y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 \ge c \\ -Iy_1 \ge 0 \\ Iy_3 \ge 0 \\ y_1 \le 0, y_2\text{无限制}，\ y_3 \ge 0 \end{cases}$$

原问题与对偶问题的关系

- 线性规划的原问题与对偶问题的对应关系：

原问题(或对偶问题)	对偶问题(或原问题)
目标函数 max z	目标函数 min ω
变量：n 个	约束条件：n 个
变量：$\geqslant 0$	约束条件：$\geqslant$
变量：$\leqslant 0$	约束条件：$\leqslant$
变量：无约束	约束条件：$=$
约束条件：m 个	变量：m 个
约束条件：$\leqslant$	变量：$\geqslant 0$
约束条件：$\geqslant$	变量：$\leqslant 0$
约束条件：$=$	变量：无约束
约束条件右端项	目标函数变量的系数
目标函数变量的系数	约束条件右端项

求对偶问题的例子

- 例3 求下述线性规划问题的对偶问题

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 & (1) \Rightarrow y_1 \\ 2x_1 \quad + 2x_3 - x_4 \leq 4 & (2) \Rightarrow y_2 \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 = 6 & (3) \Rightarrow y_3 \\ x_1 \leq 0,\ x_2, x_3 \geq 0,\quad x_4\text{无约束} \end{cases}$$

- 解：由原问题和对偶问题的对应关系，直接可得

$$\max \omega = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \quad \geq 2 \\ y_1 \quad + y_3 \leq 3 \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 \leq -5 \\ y_1 - y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3\text{无约束} \end{cases}$$

3.4.2 对偶问题的基本性质

- 1. 对称性：对偶问题的对偶是原问题。
- 证明：

$$P:\max z = cX \quad \begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$$D:\min \omega = Yb \quad \begin{cases} YA \ge c \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

$$\max -\omega = -Yb \quad \begin{cases} -YA \le -c \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

$$\min -z' = -cX' \quad \begin{cases} -AX' \ge -b \\ X' \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题的基本性质

– 2. 弱对偶性：若$\bar{X}$是原问题的可行解，$\bar{Y}$是对偶问题的可行解。

则存在：$C\bar{X} \le \bar{Y}b$

更准确的描述：求最大值问题的任何可行解的目标函数值总是小于或等于其对偶的求最小值问题的任何可行解的目标函数值。

– 证明：

设原问题是：$\max z = CX$，$\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$；对偶问题是：$\min \omega = Yb$，$\begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$

原问题的可行解$\bar{X}$满足：$A\bar{X} \le b \Rightarrow \bar{Y}A\bar{X} \le \bar{Y}b$

对偶问题的解$\bar{Y}$满足：$\bar{Y}A \ge C \Rightarrow \bar{Y}A\bar{X} \ge C\bar{X}$

则：$C\bar{X} \le \bar{Y}A\bar{X} \le \bar{Y}b$

- 这一性质说明：求最大值问题的目标函数值给出了其对偶的求最小值问题的最优值的下界，而后者的目标函数值是前者最优值的上界。不能简单理解为原问题的目标值不超过对偶问题的目标值。

对偶问题的基本性质

- 3. 无界性：若原问题(对偶问题)为无界解，则其对偶问题(原问题)无可行解。
- 证明：假定原问题有无界解，则存在可行解有：

$$C\overline{X} = M$$

由于M可以是无穷大（无界），若对偶问题有可行解，则一定可以找到适当的M，对一个对偶问题的可行解有：

$$\overline{Y}b < M$$

则存在

$$C\overline{X} > \overline{Y}b$$

这显然与弱对偶性相矛盾，因此当原问题(求最大值)无界解时，对偶问题无可行解。

对偶问题的基本性质

– 上述结论的逆不一定成立，即：原问题无可行解时，其对偶问题可能有可行的无界解，也可能无可行解。

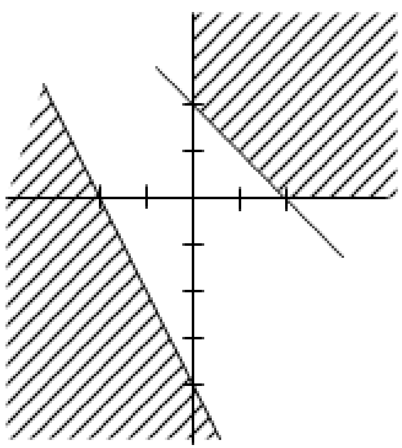
- 例如下述问题无可行解，而其对偶问题有无界解。

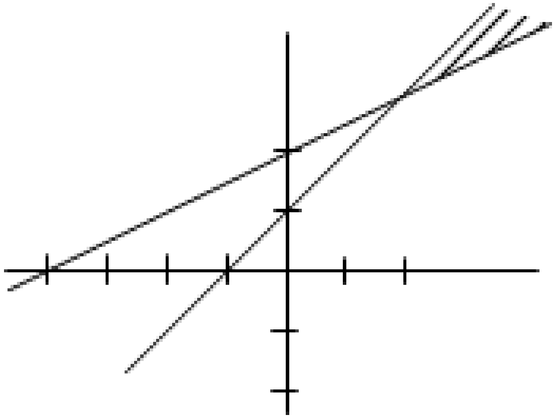
$$\min z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1、x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max \omega = 2y_1 + 2y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 \leq 1 \\ -\dfrac{1}{2}y_1 + y_2 \leq 2 \\ y_1、y_2 \geq 0 \end{cases}$$





对偶问题的基本性质

- 下述问题则皆无可行解：

$P(D)$

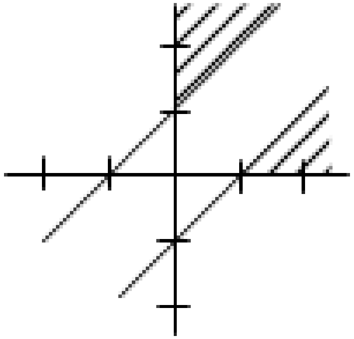
$$\min \omega = -x_1 - x_2$$

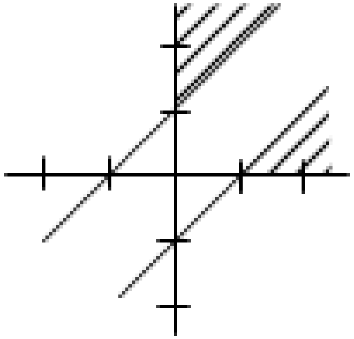
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1 \\ -x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$D(P)$

$$\max z = y_1 + y_2$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 \le -1 \\ -y_1 + y_2 \le -1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$





对偶问题的基本性质

– 4. 可行解是最优解时的性质：设 $\hat{X}$ 是原问题的可行解，$\hat{Y}$ 是对偶问题的可行解，当 $C\hat{X}=\hat{Y}b$ 时，$\hat{X}, \hat{Y}$是最优解。

– 证明： 若$C\hat{X}=\hat{Y}b$，根据弱对偶性可知：

对偶问题的所有可行解$\bar{Y}\neq\hat{Y}$都存在$\bar{Y}b\geq C\hat{X}=\hat{Y}b$，

可见$\hat{Y}$是使目标函数最小的可行解，因而是最优解。

同理，

原问题的所有可行解$C\bar{X}\leq\hat{Y}b=C\hat{X}$，

可见$\hat{X}$是使目标函数最大的可行解，因而是最优解。

对偶问题的基本性质

– 5. 对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相等。

– 证明：设$\hat{X}$是原问题的最优解，有$\hat{X}=B^{-1}b$

它对应的基矩阵B必存在$C-C_BB^{-1}A\le 0$。

有$C_BB^{-1}A\ge C$。令$\hat{Y}=C_BB^{-1}$，则有$\hat{Y}A\ge C$。

可见$\hat{Y}$满足对偶问题的约束条件，是一组可行解。

有：$\omega=\hat{Y}b=C_BB^{-1}b$

又原问题的最优目标函数取值$z=C\hat{X}=C_BB^{-1}b$，由此得到$\hat{Y}b=C\hat{X}$，

根据前面的“可行解是最优解时的性质”可知：

$\hat{Y}$是对偶问题的最优解。

-z	X_B	X	X_S	RHS
1	0	$C-C_BB^{-1}A$	$-C_BB^{-1}$	$-C_BB^{-1}b$
O	I	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$

对偶问题的基本性质

- 6. 互补松弛性：若$\hat{X}$，$\hat{Y}$分别是原问题和对偶问题的可行解，那么$\hat{Y}X_s=0$和$Y_s\hat{X}=0$，当且仅当$\hat{X}$，$\hat{Y}$是最优解。
- 证明：设原问题和对偶问题的标准型是

原问题	对偶问题
$\max z = CX$	$\min \omega = Yb$
$AX + X_S = b$	$YA - Y_S = C$
$X, X_S \geq 0$	$Y, Y_S \geq 0$

将原问题目标函数中的系数向量C用C=YA-Y_S代替后，得到

$$z = (YA - Y_S)X = YAX - Y_SX \qquad (3\text{-}15)$$

将对偶问题的目标函数中系数列向量b，用$b=AX+X_S$代替后，得到

$$\omega = Y(AX+X_S) = YAX + YX_S \qquad (3\text{-}16)$$

对偶问题的基本性质

(1) 若 $Y_S\hat{X}=0, \hat{Y}X_S=0$; 则 $\hat{Y}b=\hat{Y}A\hat{X}=C\hat{X}$, 由性质4可知 $\hat{X},\hat{Y}$是最优解。

(2) 若 $\hat{X},\hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的最优解，根据性质5，有

$$\max z = C\hat{X} = \hat{Y}A\hat{X} = \hat{Y}b = \min \omega,$$

由式(3-15)和(3-16)可知，必有 $Y_S\hat{X}=0, \hat{Y}X_S=0$

互补松弛性定理也可这样描述:

最优化时，假如一个问题的某个变量为正数，则相应的对偶问题的约束条件必取等式（即松弛变量为0），或者一个问题的中的约束条件为绝对不等式，则相应的对偶问题中的变量必为零。

对偶问题的基本性质

– 7. 原问题检验数与对偶问题解的关系

设原问题是

$$\max z=CX;\quad AX+X_S=b;\quad X, X_S\geq 0$$

它的对偶问题是

$$\min w=Yb;\quad YA-Y_S=C;\quad Y, Y_S\geq 0$$

则原问题单纯形表的检验数行对应其对偶问题的一个基解，其对应关系如下：

原问题	X_B	X_N	X	X_S
检验数行	0	$C_N-C_BB^{-1}N$	$C-C_BB^{-1}A$	$-C_BB^{-1}$
对偶问题	$-Y_{S1}$	$-Y_{S2}$	$-Y_S$	$-Y$

- 其中：Y_{S1}对应原问题中基变量X_B的剩余变量；Y_{S2}对应原问题中非基变量X_N的剩余变量。

对偶问题的基本性质

– 证明：

设B是原问题的一个可行基，于是$A=(B,N)$；

则有$\begin{cases} \max z = C_B X_B + C_N X_N \\ BX_B + NX_N \le b \\ X_B, X_N \ge 0 \end{cases}$，相应的对偶问题可表示为：$\begin{cases} \min \omega = Yb \\ YB \ge C_B \\ YN \ge C_N \\ Y \ge 0 \end{cases}$，

即$\begin{cases} \min \omega = Yb \\ YB\text{-}Y_{s1} = C_B \\ YN\text{-}Y_{s2} = C_N \\ Y, Y_{s1}, Y_{s2} \ge 0 \end{cases}$，其中$Y_{s1}$为对应原问题基变量$X_B$的剩余变量，

Y_{s2}为对应原问题非基变量X_N的剩余变量。

对偶问题的基本性质

当求得原问题的一个解：$X_B = B^{-1}b$，

其相应的检验数为$C_N - C_B B^{-1} N$与$-C_B B^{-1}$。

令$Y = C_B B^{-1}$，代入对偶问题模型：

$$\begin{cases} YB\text{-}Y_{s1} = C_B \\ YN\text{-}Y_{s2} = C_N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_B B^{-1} B\text{-}Y_{s1} = C_B \\ C_B B^{-1} N\text{-}Y_{s2} = C_N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_{s1} = 0 \\ -Y_{s2} = C_N - C_B B^{-1} N \end{cases}$$

表中的对应关系得证。

原问题	X_B	X_N	X_S
检验数行	0	$C_N-C_BB^{-1}N$	$-C_BB^{-1}$
对偶问题	Y_{S1}	$-Y_{S2}$	$-Y$

对偶理论的应用

– 例4 已知如下线性规划问题，

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

试用对偶理论证明该线性规划问题无最优解。

- 证明：首先该问题存在可行解，例如X=(0,0,0)。上述问题的对偶问题为：

$$\min \omega = 2y_1 + y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 \ge 1 \\ y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1 - y_2 \ge 0 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

由第一约束条件可知对偶问题无可行解。因为无最优解，由此原问题也无最优解。

对偶理论的应用

– 例5 已知线性规划问题 $\min \omega = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

其对偶问题的最优解为： $y_1^* = 4/5$, $y_2^* = 3/5$; $z = 5$

试用对偶理论找出原问题的最优解。

$$\max z = 4y_1 + 3y_2$$

解：步骤1，写出原问题的对偶问题：

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 2 \\ y_1 - y_2 \leq 3 \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 5 \\ y_1 + y_2 \leq 2 \\ 3y_1 + 5y_2 \leq 3 \\ y_1、y_2 \geq 0 \end{cases}$$

对偶理论的应用

- 步骤2：将对偶问题的解 $y_1^*=4/5,\ y_2^*=3/5$ 代入得到

$$\begin{cases} y_1^*+2y_2^*=2 & (1) \\ y_1^*-y_2^*<3 & (2) \\ 2y_1^*+3y_2^*<5 & (3) \\ y_1^*+y_2^*<2 & (4) \\ 3y_1^*+5y_2^*=3 & (5) \end{cases}$$

- 其中(2)(3)(4)为严格不等式，即剩余变量>0，由互补松弛性可以得到 $x_2^*=0, x_3^*=0, x_4^*=0$
- 又由于对偶问题的解不为零，因此可由互补松弛性得到原问题的两个约束条件的松弛变量为零，即应取等式，综合可得：

$$\begin{cases} x_1^*+3x_5^*=4 \\ 2x_1^*+x_5^*=3 \end{cases}$$

原问题的解为：$x_1^*=1,\ x_2^*=0,\ x_3^*=0,\ x_4^*=0,\ x_5^*=1$

再看性质6

- 当X，Y分别是原问题和对偶问题的最优解时，

$$Y_S X = Y X_S = 0$$

  - Y_S（或Y）的分量>0，则对应的X（或X_S）分量的检验数<0，于是对应的X（或X_S）分量为非基变量=0
  - X（或X_S） 的分量>0，则该分量为基变量，检验数=0，对应的Y_S（或Y）分量=0

原问题	X_B	X_N	X	X_S
检验数行	0	$C_N - C_B B^{-1} N$	$C - C_B B^{-1} A$	$-C_B B^{-1}$
对偶问题	$-Y_{S1}$	$-Y_{S2}$	$-Y_S$	$-Y$

T对偶问题的基本性质

- (1)对称性：对偶问题的对偶是原问题；
- (2) 弱对偶性：若X是原问题的可行解，*Y*是对偶问题的可行解。则存在$CX \le Yb$;
- (3)无界性：若原问题(对偶问题)为无界解，则其对偶问题(原问题)无可行解;
- (4)可行解是最优解的充分条件：当CX=Yb时，X,Y都是最优解;
- (5) 对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相等;
- (6)互补松弛性；
- (7)原问题检验数对应对偶问题的一个基解。