数学物理方程 B　第五周作业　3 月 17 日 周二

PB18151866 龚小航

1.1 (1)在极坐标系下，求方程 $\Delta_2 u = 0$ 的形如$u = u(r)$ $\quad (r = \sqrt{x^2+y^2} \neq 0)$ 的解；

(2)在球坐标系下，求方程 $\Delta_3 u + k^2 u = 0$ $(k > 0)$的形如$u = u(r)$的解。

解：(1) 先写出二维拉普拉斯方程的极坐标形式：

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

当解满足形式形如 $u = u(r)$ 时，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$. 记$\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{du}{dr} = u'$ ； $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \dfrac{d^2 u}{dr^2} = u''$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = u'' + \frac{1}{r}u' = 0$$

利用积分因子法，先写出u'的通解：

$$\frac{du}{dr} = u' = Ce^{-\int \frac{1}{r}dr} = Ce^{-\ln r} = \frac{C}{r}$$

再将变量分离，即可求解：(C、C'表示任意常数)

$$du = \frac{C}{r}dr \qquad \Rightarrow \qquad u = C\ln r + C'$$

(2) 先写出题中所给方程的球坐标形式：

$$\Delta_3 u + k^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + k^2 u = 0$$

当解满足形式形如 $u = u(r)$ 时,有：

$$\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0\ ;\ \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$$

带入化简方程：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + k^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) + k^2 u = \frac{1}{r^2}\left(2r\frac{du}{dr} + r^2\frac{d^2 u}{dr^2}\right) + k^2 u = 0$$

令 $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{du}{dr} = u'$ ； $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \dfrac{d^2 u}{dr^2} = u''$ 　得到一个微分方程：

$$u'' + \frac{2}{r}u' + k^2 u = 0$$

以下求解这个方程，直接观察出它的一个特解：

$$u^{(1)} = \frac{\sin kr}{r}$$

带入刘维尔公式，得到它另一个线性无关的解：

$$u^{(2)} = u^{(1)}\int \frac{1}{{u^{(1)}}^2}e^{-\int\frac{2}{r}dr}\,dr = \frac{\sin kr}{r}\int\left(\frac{r^2}{\sin^2 kr}\right) * \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{\sin kr}{r} * \frac{-1}{k\tan kx} = -\frac{\cos kr}{r}$$

因此，这个方程的解为：

$$u = \frac{C\sin kr + C'\cos kr}{r}$$

1.2 设$F(\xi),G(\xi)$是任意二次可微函数，λ_1,λ_2为常数且$\lambda_1 \neq \lambda_2$，验证：

$$u = F(x+\lambda_1 y) + G(x+\lambda_2 y) \quad 满足方程：$$

$$u_{yy} - (\lambda_1+\lambda_2)u_{xy} + \lambda_1\lambda_2 u_{xx} = 0$$

解：将各个u的微分写出：

$\cdot\, u_{xx} = F''(x+\lambda_1 y) + G''(x+\lambda_2 y)$；　　$\cdot\, u_{yy} = \lambda_1^2 F''(x+\lambda_1 y) + \lambda_2^2 G''(x+\lambda_2 y)$

$\cdot\, u_{xy} = \lambda_1 F''(x+\lambda_1 y) + \lambda_2 G''(x+\lambda_2 y)$

将这些带入方程左侧：

$$u_{yy} - (\lambda_1+\lambda_2)u_{xy} + \lambda_1\lambda_2 u_{xx} = (\lambda_1^2 F'' + \lambda_2^2 G'') - (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1 F'' + \lambda_2 G'') + \lambda_1\lambda_2(F''+G'')$$

$$= (\lambda_1^2 - (\lambda_1+\lambda_2)*\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2)F'' + (\lambda_2^2 - (\lambda_1+\lambda_2)*\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)G'' = 0$$

因此，给出的u满足方程，是方程的一个特解。

1.3 验证：

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \quad (t>0)$$

满足方程　$u_t = a^2 u_{xx}$　和　$\lim\limits_{t\to 0} u(t,x) = 0 \ (x \neq \xi)$

解：将u的各个微分写出：

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) * e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\right) * \frac{1}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} * e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t^2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

$$= t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \left(\frac{(x-\xi)^2}{4a^2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$u_{xx} = \frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-(x-\xi)}{2a^2 t} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\right) = \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}}{\sqrt{t}} * \left(\left(\frac{-(x-\xi)}{2a^2 t}\right)^2 + \frac{-1}{2a^2 t}\right)$$

$$= t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \left(\frac{(x-\xi)^2}{4a^4} - \frac{1}{2a^2}\right) = \frac{1}{a^2} u_t$$

显然有$\mathrm{u_t = a^2 u_{xx}}$；下证第二个结论：记$\frac{(\mathrm{x}-\xi)^2}{4\mathrm{a}^2} = \mathrm{n}\ (\mathrm{n} > 0)$　,同时令$p = \frac{1}{\sqrt{t}}$

$$\lim_{t\to 0} u(t,x) = \lim_{p\to\infty} u(p) = \lim_{p\to\infty} p e^{-np^2} < \lim_{p\to\infty} \frac{p}{e^{np}} = 0 \quad 得证$$

$$其中利用了\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} = 0 \ (\lambda > 0)$$

1.4 求方程 $u_{xx}-4u_{yy}=e^{2x+y}$的一个形如 $u=axe^{2x+y}$ 的特解。

解：该方程有这种形式的特解时，待定系数a：

$$u_{xx}=a\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xe^{2x+y})=a\ \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{2x}(2xe^{y}+e^{y})\right)=4a(x+1)e^{2x+y}$$

$$u_{yy}=a\frac{\partial^2}{\partial y^2}(xe^{2x+y})=a\ \frac{\partial}{\partial x}(xe^{2x+y})=axe^{2x+y}$$

带入已知方程，得：

$$u_{xx}-4u_{yy}=4a(x+1)e^{2x+y}-4axe^{2x+y}=4ae^{2x+y}\equiv axe^{2x+y}$$

对比等式两端，即可得 $\mathrm{a}=\frac{1}{4}\quad(e^{\lambda}\neq 0)$

$$\Rightarrow u=\frac{1}{4}xe^{2x+y}$$

1.5 证明：$u=f(xy)$ 满足方程 $xu_x-yu_y=0$.

解：先写出$u=f(xy)$的各个微分：

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=yf'(xy)\,;\qquad\qquad u_y=\frac{\partial u}{\partial y}=xf'(xy)$$

直接将他们带入方程左端：

$$xu_x-yu_y=x*yf'(xy)-y*xf'(xy)=0$$

所以这个解满足方程条件，是该方程的一个特解

1.6 设$u = u(x,y,z)$，求下列方程的通解：

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial y} + a(x,y)u = 0$

(2) $u_{xy} + u_y = 0$

解：(1) 该方程能够直接分离变量：

$$\frac{\partial u}{u} = -a(x,y)\partial y \qquad \text{两边积分，得到：}$$

$$\ln u = -\int a(x,y)\,dy + f(x,z) \quad \Rightarrow \quad u = e^{f(x,z)-\int a(x,y)\,dy}$$

其中 $f(x,z)$ 是一个关于x,z的任意函数。

(2) 将原方程写成微分形式：$u_{xy} + u_y = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

$$\text{对两边积分，得：} \frac{\partial u}{\partial x} + u + f(x,z) = 0$$

这是一阶常系数非齐次方程，直接利用积分因子法，写出他的通解为：

$$u = e^{-\int 1\,dx}\left(\int -f(x,z)e^{\int 1\,dx}\,dx + g(y,z)\right) = e^{-x}\left(g(y,z) + \int -f(x,z)e^{x}\,dx\right)$$

其中 $g(y,z)$ 和 $f(x,z)$ 是任意的。

1.7 设有一根具有绝热的侧表面的均匀细杆，它的初始温度为 $\varphi(x)$ 两端满足下列边界条件之一：

(1)一端$(x=0)$绝热，另一端$(x=l)$保持常温u_0；

(2)两端分别有恒定的热流密度 q_1 与 q_2 进入；

(3)一端$(x=0)$温度为 $\mu(t)$，另一端$(x=l)$与温度为 $\theta(t)$的介质有热交换；

分别写出上述三种热过程的定解问题。

解：这是一维热传导问题，先写出一维热传导方程：令$u = u(x,t)$

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \left(a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}\right) \qquad \text{且有} \quad u(x,0) = \varphi(x)$$

本题只需要给出问题的描述，所以只需要给出在上面方程基础上还需引入的边界条件：

(1) $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$ ； $u(l,t) = u_0$

(2) $-k\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = q_1$ ； $k\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = q_2$

(3) $u(0,t) = \mu(t)$； $k\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} + h(l,y,z)u = h(l)\theta(t)$ $\quad h = h(x,y,z)$为热交换系数

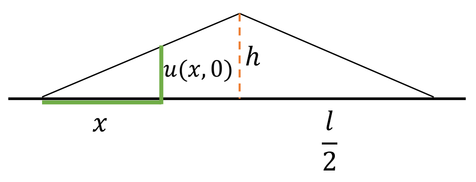
1.8 一根长为l而两端$(x = 0\ and\ x = l)$固定的弦，用手把它的中点朝横向拨开距离h，然后放手任其自由振动，试写出此弦振动的定解问题。

解：先写出自由振动方程： 令其振动方程为 $u = u(x,t)$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \left(a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\right)$$

端点约束为： $u(0,t) = 0$； $u(l,t) = 0$

在求其初始情况的约束：$t = 0$：



如左图，初始时中心偏离平衡位置h，列出x与$u(x)$关系：

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2h}{l}x\,, & 0 \le x \le \dfrac{l}{2} \\ \dfrac{2h}{l}(l-x)\,, & \dfrac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$$

另外，初始时刻速度为0：

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$$

综上，该问题可以表述为：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \left(a = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}\right) \\ u(0,t) = 0\ ; \qquad u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2h}{l}x\,, & 0 \le x \le \dfrac{l}{2} \\ \dfrac{2h}{l}(l-x)\,, & \dfrac{l}{2} \le x \le l \end{cases} \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$