Computer Science and Technology





运筹学基础

讲者：顾乃杰 教授、黄章进 副教授

计算机科学与技术学院

对偶理论与灵敏度分析

Chap.3 Duality theory & Sensitivity analysis

主要内容

- 3.1 单纯形法的矩阵描述
- 3.2 单纯形法的矩阵计算（改进单纯形法）
- 3.3 对偶问题的提出
- 3.4 线性规划的对偶理论
- 3.5 影子价格
- 3.6 对偶单纯形法
- 3.7 灵敏度分析
- 3.9 利用计算机工具求解本章问题

3.4.2 对偶问题的基本性质

- 1. 对称性：对偶问题的对偶是原问题。
- 证明：

$$P:\max z = cX \quad \begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$$D:\min \omega = Yb \quad \begin{cases} YA \ge c \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

$$\max -\omega = -Yb \quad \begin{cases} -YA \le -c \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

$$\min -z' = -cX' \quad \begin{cases} -AX' \ge -b \\ X' \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题的基本性质

– 2. 弱对偶性：若$\bar{X}$是原问题的可行解，$\bar{Y}$是对偶问题的可行解。

则存在：$C\bar{X} \le \bar{Y}b$

更准确的描述：求最大值问题的任何可行解的目标函数值总是小于或等于其对偶的求最小值问题的任何可行解的目标函数值。

– 证明：

设原问题是：$\max z = CX$ $\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$；对偶问题是：$\min \omega = Yb$ $\begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$

原问题的可行解$\bar{X}$满足：$A\bar{X} \le b \Rightarrow \bar{Y}A\bar{X} \le \bar{Y}b$

对偶问题的解$\bar{Y}$满足：$\bar{Y}A \ge C \Rightarrow \bar{Y}A\bar{X} \ge C\bar{X}$

则：$C\bar{X} \le \bar{Y}A\bar{X} \le \bar{Y}b$

- 这一性质说明：求最大值问题的目标函数值给出了其对偶的求最小值问题的最优值的下界，而后者的目标函数值是前者最优值的上界。不能简单理解为原问题的目标值不超过对偶问题的目标值。

对偶问题的基本性质

- 3. 无界性：若原问题(对偶问题)为无界解，则其对偶问题(原问题)无可行解。
- 证明：假定原问题有无界解，则存在可行解有：

$$C\overline{X} = M$$

由于M可以是无穷大（无界），若对偶问题有可行解，则一定可以找到适当的M，对一个对偶问题的可行解有：

$$\overline{Y}b < M$$

则存在

$$C\overline{X} > \overline{Y}b$$

这显然与弱对偶性相矛盾，因此当原问题(求最大值)无界解时，对偶问题无可行解。

对偶问题的基本性质

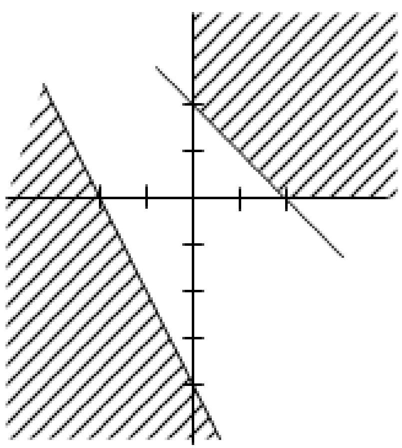
- 上述结论的逆不一定成立，即：原问题无可行解时，其对偶问题可能有可行的无界解，也可能无可行解。
  - 例如下述问题无可行解，而其对偶问题有无界解。

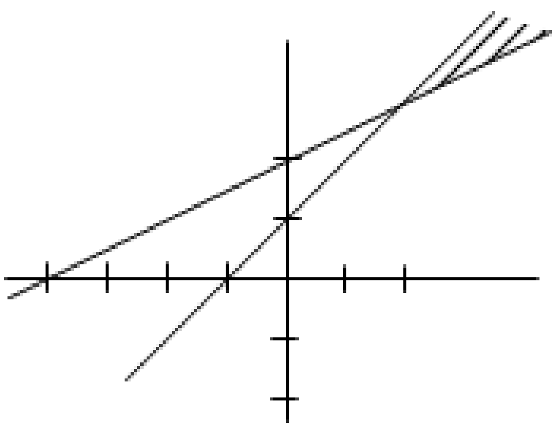
$$\min z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1、x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max \omega = 2y_1 + 2y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 \leq 1 \\ -\frac{1}{2}y_1 + y_2 \leq 2 \\ y_1、y_2 \geq 0 \end{cases}$$





对偶问题的基本性质

- 下述问题则皆无可行解：

$P(D)$

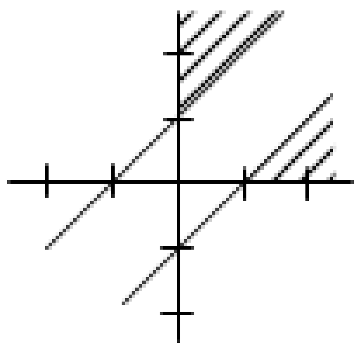
$$\min \omega = -x_1 - x_2$$

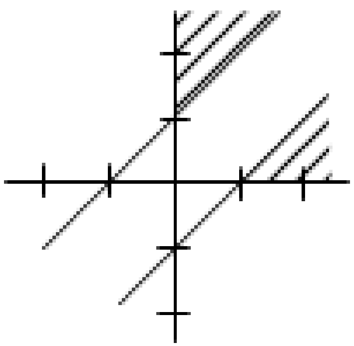
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1 \\ -x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$D(P)$

$$\max z = y_1 + y_2$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 \le -1 \\ -y_1 + y_2 \le -1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$





对偶问题的基本性质

- 4. 可行解是最优解时的性质：设 $\hat{X}$ 是原问题的可行解，$\hat{Y}$ 是对偶问题的可行解，当 $C\hat{X}=\hat{Y}b$ 时，$\hat{X},\hat{Y}$是最优解。

- 证明： 若$C\hat{X}=\hat{Y}b$，根据弱对偶性可知：

  对偶问题的所有可行解$\overline{Y}\neq\hat{Y}$都存在$\overline{Y}b\geq C\hat{X}=\hat{Y}b$，

  可见$\hat{Y}$是使目标函数最小的可行解，因而是最优解。

  同理，

  原问题的所有可行解$C\overline{X}\leq\hat{Y}b=C\hat{X}$，

  可见$\hat{X}$是使目标函数最大的可行解，因而是最优解。

对偶问题的基本性质

- 5. 对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相等。
- 证明：设$\hat{X}$是原问题的最优解，有$\hat{X}=B^{-1}b$

  它对应的基矩阵B必存在$C-C_BB^{-1}A\le 0$。

  有$C_BB^{-1}A\ge C$。令$\hat{Y}=C_BB^{-1}$，则有$\hat{Y}A\ge C$。

  可见$\hat{Y}$满足对偶问题的约束条件，是一组可行解。

  有：$\omega=\hat{Y}b=C_BB^{-1}b$

  又原问题的最优目标函数取值$z=C\hat{X}=C_BB^{-1}b$，由此得到$\hat{Y}b=C\hat{X}$，

  根据前面的“可行解是最优解时的性质”可知：

  $\hat{Y}$是对偶问题的最优解。

-z	X_B	X	X_S	RHS
1	0	$C-C_BB^{-1}A$	$-C_BB^{-1}$	$-C_BB^{-1}b$
O	I	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$

对偶问题的基本性质

– 6. 互补松弛性：若$\hat{X}$，$\hat{Y}$分别是原问题和对偶问题的可行解，那么$\hat{Y}X_s=0$和$Y_s\hat{X}=0$，当且仅当$\hat{X}$，$\hat{Y}$是最优解。

– 证明：设原问题和对偶问题的标准型是

原问题	对偶问题
$\max z=CX$	$\min \omega=Yb$
$AX+X_S=b$	$YA-Y_S=C$
$X,X_S\ge 0$	$Y,Y_S\ge 0$

将原问题目标函数中的系数向量C用C=YA-Y_S代替后，得到

$$z=(YA-Y_S)X=YAX-Y_SX \qquad (3\text{-}15)$$

将对偶问题的目标函数中系数列向量b，用$b=AX+X_S$代替后，得到

$$\omega=Y(AX+X_S)=YAX+YX_S \qquad (3\text{-}16)$$

对偶问题的基本性质

(1) 若 $Y_S\hat{X}=0, \hat{Y}X_S=0$; 则 $\hat{Y}b=\hat{Y}A\hat{X}=C\hat{X}$, 由性质4可知 $\hat{X},\hat{Y}$是最优解。

(2) 若 $\hat{X},\hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的最优解，根据性质5，有

$$\max z=C\hat{X}=\hat{Y}A\hat{X}=\hat{Y}b=\min\omega,$$

由式(3-15)和(3-16)可知，必有 $Y_S\hat{X}=0, \hat{Y}X_S=0$

互补松弛性定理也可这样描述：

最优化时，假如一个问题的某个变量为正数，则相应的对偶问题的约束条件必取等式（即松弛变量为0），或者一个问题的中的约束条件为绝对不等式，则相应的对偶问题中的变量必为零。

对偶问题的基本性质

– 7. 原问题检验数与对偶问题解的关系

设原问题是

$$\max z=CX;\quad AX+X_S=b;\quad X, X_S\geq 0$$

它的对偶问题是

$$\min w=Yb;\quad YA-Y_S=C;\quad Y, Y_S\geq 0$$

则原问题单纯形表的检验数行对应其对偶问题的一个基解，其对应关系如下：

原问题	X_B	X_N	X	X_S
检验数行	0	$C_N-C_BB^{-1}N$	$C-C_BB^{-1}A$	$-C_BB^{-1}$
对偶问题	$-Y_{S1}$	$-Y_{S2}$	$-Y_S$	$-Y$

- 其中：Y_{S1}对应原问题中基变量X_B的剩余变量；Y_{S2}对应原问题中非基变量X_N的剩余变量。

对偶问题的基本性质

– 证明：

设B是原问题的一个可行基，于是$A=(B,N)$;

则有 $\begin{cases} \max z = C_B X_B + C_N X_N \\ BX_B + NX_N \le b \\ X_B, X_N \ge 0 \end{cases}$，相应的对偶问题可表示为：$\begin{cases} \min \omega = Yb \\ YB \ge C_B \\ YN \ge C_N \\ Y \ge 0 \end{cases}$，

即 $\begin{cases} \min \omega = Yb \\ YB\text{-}Y_{s1} = C_B \\ YN\text{-}Y_{s2} = C_N \\ Y, Y_{s1}, Y_{s2} \ge 0 \end{cases}$，其中$Y_{s1}$为对应原问题基变量$X_B$的剩余变量，

Y_{s2}为对应原问题非基变量X_N的剩余变量。

对偶问题的基本性质

当求得原问题的一个解：$X_B = B^{-1}b$，

其相应的检验数为$C_N - C_B B^{-1} N$与$-C_B B^{-1}$。

令$Y = C_B B^{-1}$，代入对偶问题模型：

$$\begin{cases} YB\text{-}Y_{s1} = C_B \\ YN\text{-}Y_{s2} = C_N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_B B^{-1} B\text{-}Y_{s1} = C_B \\ C_B B^{-1} N\text{-}Y_{s2} = C_N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_{s1} = 0 \\ -Y_{s2} = C_N - C_B B^{-1} N \end{cases}$$

表中的对应关系得证。

原问题	X_B	X_N	X_S
检验数行	0	$C_N\text{-}C_B B^{-1} N$	$\text{-}C_B B^{-1}$
对偶问题	Y_{S1}	$\text{-}Y_{S2}$	$\text{-}Y$

对偶理论的应用

- 例4 已知如下线性规划问题，

$$\max z = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

试用对偶理论证明该线性规划问题无最优解。

- 证明：首先该问题存在可行解，例如X=(0,0,0)。上述问题的对偶问题为：

$$\min \omega = 2y_1 + y_2$$
$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 \ge 1 \\ y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1 - y_2 \ge 0 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

由第一约束条件可知对偶问题无可行解。因为无最优解，由此原问题也无最优解。

– 例5 已知线性规划问题

$$\min \omega = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \ge 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \ge 3 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

其对偶问题的最优解为： $y_1^* = 4/5,\ y_2^* = 3/5;\ z = 5$

试用对偶理论找出原问题的最优解。

解：步骤1，写出原问题的对偶问题：

$$\max z = 4y_1 + 3y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \le 2 \\ y_1 - y_2 \le 3 \\ 2y_1 + 3y_2 \le 5 \\ y_1 + y_2 \le 2 \\ 3y_1 + 5y_2 \le 3 \\ y_1、y_2 \ge 0 \end{cases}$$

对偶理论的应用

– 步骤2：将对偶问题的解 $y_1^*=4/5,\ y_2^*=3/5$ 代入得到

$$\begin{cases} y_1^*+2y_2^*=2 & (1)\\ y_1^*-y_2^*<3 & (2)\\ 2y_1^*+3y_2^*<5 & (3)\\ y_1^*+y_2^*<2 & (4)\\ 3y_1^*+5y_2^*=3 & (5)\end{cases}$$

– 其中(2)(3)(4)为严格不等式，即剩余变量>0，由互补松弛性可以得到 $x_2^*=0, x_3^*=0, x_4^*=0$

– 又由于对偶问题的解不为零，因此可由互补松弛性得到原问题的两个约束条件的松弛变量为零，即应取等式，综合可得：

$$\begin{cases} x_1^*+3x_5^*=4\\ 2x_1^*+x_5^*=3\end{cases}$$

原问题的解为：$x_1^*=1,\ x_2^*=0,\ x_3^*=0,\ x_4^*=0,\ x_5^*=1$

再看性质6

- 当X，Y分别是原问题和对偶问题的最优解时，

$$Y_S X = Y X_S = 0$$

  - Y_S（或Y）的分量>0，则对应的X（或X_S）分量的检验数<0，于是对应的X（或X_S）分量为非基变量=0
  - X（或X_S） 的分量>0，则该分量为基变量，检验数=0，对应的Y_S（或Y）分量=0

原问题	X_B	X_N	X	X_S
检验数行	0	$C_N - C_B B^{-1} N$	$C - C_B B^{-1} A$	$-C_B B^{-1}$
对偶问题	$-Y_{S1}$	$-Y_{S2}$	$-Y_S$	$-Y$

对偶问题的基本性质

- (1) 对称性：对偶问题的对偶是原问题；
- (2) 弱对偶性：若X是原问题的可行解，Y是对偶问题的可行解。则存在$CX\le Yb$;
- (3) 无界性：若原问题(对偶问题)为无界解，则其对偶问题(原问题)无可行解;
- (4) 可行解是最优解的充分条件：当CX=Yb时，X,Y都是最优解;
- (5) 对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相等;
- (6) 互补松弛性；
- (7) 原问题检验数对应对偶问题的一个基解。

3.5 影子价格

- 在单纯形法的每步迭代中，目标函数取值 $z=C_B B^{-1} b$，和检验数 $(C_N - C_B B^{-1} N)$ 中都有乘子 $Y=C_B B^{-1}$，那么Y的经济意义是什么?

- 乘子 $Y=C_B B^{-1}$的经济意义：

设B是$\{\max z = CX \mid AX \le b, X \ge 0\}$的最优基，则$z^* = C_B B^{-1} b = Y^* b$

由此$\dfrac{\partial z^*}{\partial b} = C_B B^{-1} = Y^*$

所以变量的经济意义是在其它条件不变的情况下，

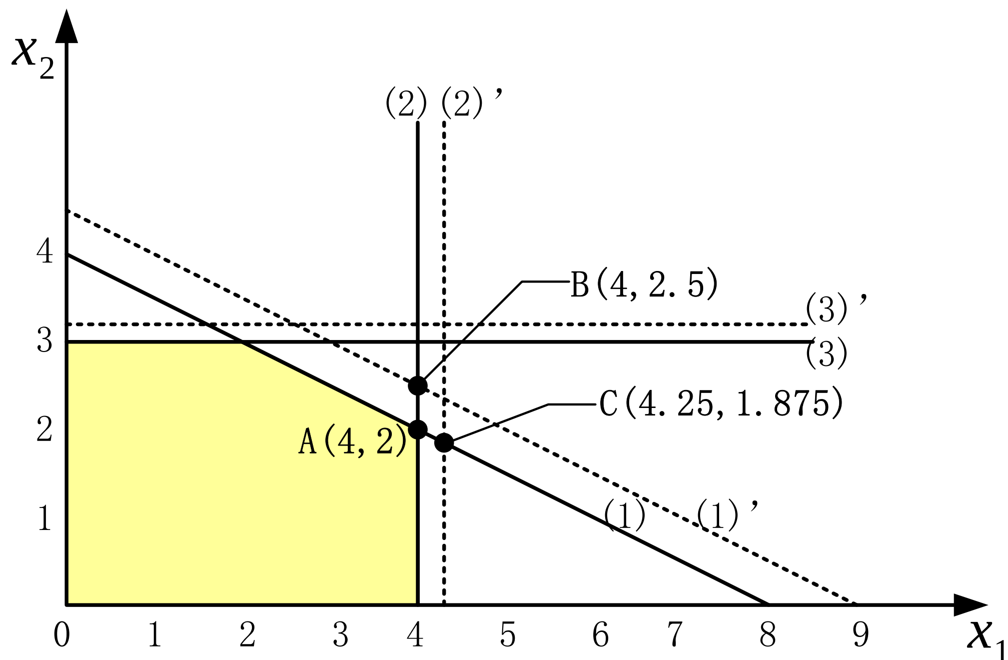
单位资源变化所引起的目标函数的最优值的变化。

影子价格

- 以例3.1为例：
  - 在其他条件不变的情况下：
    - 设备增加一台，可多获利 1.5元；（直线1移至直线1’）；
    - 原材料 A 增加 1kg，可多获利 0.125 元；（直线2移至2’ ）；
    - 原材料 B 增加 1kg时，最优解不变。（直线3移至3’）.

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \qquad \leqslant 16 \\ \qquad 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$



3.5 影子价格

- 原始问题是利润最大化的生产计划问题

总利润(元)　单位产品的利润(元/件)　产品产量(件)　单位产品消耗的资源(吨/件)

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} &= b_2 \\ & \cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots & \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m \\ & x_j \ge 0,\ j = 1,\cdots,n+m & \end{aligned}$$

消耗的资源(吨)　剩余的资源(吨)　资源限量(吨)

原始问题中各个项的经济意义 (一种解释)

- 对偶问题中各项的含义：

总利润(元)　资源限量(吨)　资源价格(元/吨)

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min & \omega = & b_1y_1 & +b_2y_2 & \cdots & +b_my_m & & & & \\
s.t. & & a_{11}y_1 & +a_{21}y_2 & \cdots & +a_{m1}y_m & -y_{m+1} & & & =c_1 \\
 & & a_{12}y_1 & +a_{22}y_2 & \cdots & +a_{m2}y_m & & -y_{m+2} & & =c_2 \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
 & & a_{1n}y_1 & +a_{2n}y_2 & \cdots & +a_{mn}w_m & & & -y_{m+n} & =c_n \\
 & & y_1 & y_2 & \cdots & y_m & y_{m+1} & y_{m+2} \; \cdots & y_{m+n} & \geq 0
\end{array}
$$

– **影子价格(Shadow price):** 原始线性规划问题考虑的是充分利用现有资源，以产品的数量和单位产品的收益来决定企业的总收益，没有考虑到资源的价格，但实际在构成产品的收益中，不同的资源对收益的贡献也不同，它是企业生产过程中一种隐含的潜在价值，经济学中称为影子价格，即对偶问题中的决策变量 y_i 的值。

影子价格

- 影子价格越大，说明这种资源越是相对紧缺；影子价格越小，说明这种资源相对不紧缺。
- 如果最优生产计划下某种资源有剩余，这种资源的影子价格一定等于0。
- 企业可利用影子价格调节生产规模。

例如，目标函数 Z 表示利润（或产值 ），当第 i 种资源的影子价格大于零（或高于市场价格）时，表示有利可图，企业应购进该资源扩大生产规模，当影子价格等于零（或低于市场价格），企业不能增加收益，这时应将资源卖掉或出让，缩小生产规模。

应当注意， $y_i = \partial z^* / \partial b$ 是在最优基 B 不变的条件下有上述经济含义，当某种资源增加或减少后，最优基 B 可能发生了变化，这时 y_i 的值也随之变化。

影子价格

- 产品的机会成本:

增加单位资源可以增加的利润

$$
\begin{array}{lllllllll}
\max\ z = & c_1x_1 & +c_2x_2 & \cdots & +c_jx_j & \cdots & +c_nx_n & & \\
\text{s.t.} & a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1j}x_j & \cdots & +a_{1n}x_n & \le b_1 & y_1 \\
 & a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & +a_{2j}x_j & \cdots & +a_{2n}x_n & \le b_2 & y_2 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \cdots & +a_{mj}x_j & \cdots & +a_{mn}x_n & \le b_m & y_m \\
 & x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_n & \ge 0 &
\end{array}
$$

减少一件产品可以节省的资源

机会成本 $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{ij}y_i + \cdots + a_{mj}y_m$

表示减少一件产品所节省的资源可以增加的利润

- 产品的差额成本（Reduced Cost）

机会成本　　差额成本　　利润

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min & \omega = & b_1 y_1 & +b_2 y_2 & \cdots & +b_m y_m & & & & \\
s.t. & & a_{11} y_1 & +a_{21} y_2 & \cdots & +a_{m1} y_m & -y_{m+1} & & & =c_1 \\
 & & a_{12} y_1 & +a_{22} y_2 & \cdots & +a_{m2} y_m & & -y_{m+2} & & =c_2 \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots \\
 & & a_{1n} y_1 & +a_{2n} y_2 & \cdots & +a_{mn} y_m & & & -y_{m+n} & =c_n \\
 & & y_1 & y_2 & \cdots & y_m & y_{m+1} & y_{m+2} \cdots & y_{m+n} & \geq 0
\end{array}
$$

$$y_{m+j} = (y_1 a_{1j} + y_2 a_{2j} + \cdots + y_m a_{mj}) - c_j = Y^T a_j - c_j$$

差额成本=机会成本 - 利润

影子价格

- 影子价格反映资源对目标函数的边际贡献，即资源转换成经济效益的效率：
  - 资源的影子价格不同，随着资源量的变化，可行域也发生变化；
  - 当某资源量的不断增加超过某值时，需要重新计算目标函数的最优解（将在第3.7节灵敏度分析中继续讨论）。
  - 现有资源，以产品的数量和单位产品的收益来决定企业的总收益，没有考虑到资源的变化对收益的影响。
- 影子价格反映了资源的稀缺程度
  - 在不发生退化的情况下，$y_1^*=1.5$，$y_2^*=0.125$，$y_3^*=0$，对应资源的剩余量，也即剩余变量的值是：$x_3=0$，$x_4=0$，$x_5=4$，
  - 当某种资源的 $y_i^*>0$，表示此种资源短缺；
  - 当某种资源的 $y_i^*=0$，表示此种资源有剩余，不短缺；
  - 决策者要增加收入，应该优先注重影子价格高的资源。

影子价格

- 影子价格反映了资源的边际使用价值
  - 资源占用者赋予资源的一个内部价格，与资源的市场价格无直接关系。影子价格可以计算出经济活动的成本，它不是市场价格,不能与资源的市场价格的概念等同；
  - 市场价格与影子价格之间存在内在关系。

- 影子价格有三种理论
  - 资源最优配置理论；
  - 机会成本和福利经济学理论；
  - 全部收益和全部费用理论。

3.6 对偶单纯形法

X_B	X_N	X	X_S	RHS
0	$C_N - C_B B^{-1} N$	$C - C_B B^{-1} A$	$-C_B B^{-1}$	$-C_B B^{-1} b$
I	$B^{-1} N$	$B^{-1} A$	B^{-1}	$B^{-1} b$
$-Y_N$	$-Y_B$	$-Y_S$	$-Y$	

- 对偶单纯形法
  - 在单纯形表中进行迭代时，在**b**列中得到的是原问题的基可行解，而在检验数行得到的是对偶问题的基解*。
    - [思考：为什么不一定是基可行解？]
  - 通过逐步迭代，当在检验数行得到对偶问题的解也是基可行解时，可知已得到最优解*，即原问题和对偶问题都是最优解。
    - [思考：为什么对偶问题的解是基可行解时即为最优解？]
  - 根据对偶问题的对称性可知：若保持对偶问题的解是基可行解，即$c_j - C_B B^{-1} P_j \le 0$；而原问题在非可行解的基础上通过逐步迭代也达到了基可行解，这样也可以得到最优解。
    - 其优点是原问题的初始解不一定要是基可行解，可从非基可行解开始迭代。

- 对偶单纯形法的计算步骤：
  - 原问题：

$$\max z = CX$$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

- 从单纯形表的角度来说，若检验数 $c_j - z_j \leq 0$
- 则 $c_j - z_j = c_j - c_B B^{-1} a_j = c_j - Y a_j \leq 0$
- 这意味着 $Ya_j \geq c_j$ 即 $Ya \geq c$
- 说明单纯形法的最优准则对应着对偶问题的可行性。

对偶单纯形法是从一个具有对偶可行性的对偶基可行解出发，当右端 $b^* = B^{-1}b \geq 0$ 时，原问题也获得了基可行解，因而得到最优解。

对偶单纯形法

- 对偶问题：

$$\min \omega = Yb$$

$$\begin{cases} YB\text{-}Y_{s1} = C_B \\ YN\text{-}Y_{s2} = C_N \\ Y, Y_{s1}, Y_{s2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow YB = C_B + Y_{s1} \Rightarrow Y = C_B B^{-1} + Y_{s1} B^{-1}$$

代入目标函数

$$\omega = (C_B B^{-1} + Y_{s1} B^{-1})b = C_B \boxed{B^{-1}b} + Y_{s1} B^{-1}b$$

原问题在单纯形表中的右端项$B^{-1}b$，同时也可以看出来它也是对偶问题非基变量对应的检验数，当它小于零的时候意味着对偶问题的目标值还有继续减小可能，因此以此来判断变量的换出和换入。

原问题和对偶问题变量的对应关系

-z	X_B	X_N	X	X_S	RHS
1	0	$C_N-C_BB^{-1}N$	$C-C_BB^{-1}A$	$-C_BB^{-1}$	$-C_BB^{-1}b$
O	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
	$-Y_N$	$-Y_B$	$-Y_S$	-Y	

- 原问题和对偶问题变量的对应关系
  - 决策变量X 对应到剩余变量Y_S（n个）
    - X的检验数 = $C-C_BB^{-1}A = -Y_S$
  - 松弛变量X_S 对应到决策变量Y（m个）
    - X_S的检验数 = $-C_BB^{-1} = -Y$
  - 原问题的基变量X_B对应到对偶问题的非基变量Y_N（m个）
    - $X_B = B^{-1}b$为对偶问题非基变量的检验数
    - X_B的检验数 = 0为对偶问题非基变量值（的相反数）
  - 原问题的非基变量X_N对应到对偶问题的基变量Y_B（n个）
    - $X_N = 0$为对偶问题基变量的检验数
    - X_N的检验数 = $C_N-C_BB^{-1}N$为对偶问题基变量值的相反数

计算步骤

- (1) 对线性规划问题进行变换，使列出的初始单纯形表中所有检验数$\sigma_j \le 0,(j=1,2,\dots,n)$，即对偶问题为基可行解。
- (2) 检查b列的数字，若都为非负，又检验数都为非正，则已得到最优解。停止计算。若检查b列的数字时，至少还有一个负分量，检验数保持非正，那么进行以下计算。
- (3) 确定换出变量。按 $\min\{(B^{-1}b)_i \mid (B^{-1}b)_i<0\}=(B^{-1}b)_l$ 对应的基变量 x_l 为换出变量。
- (4) 确定换入变量。在单纯形表中检查x_l所在行的各系数$\alpha_{lj}(j=1,2,\dots,n)$。若所有$\alpha_{lj}\ge 0$，则无可行解，停止计算。若存在$\alpha_{lj}<0$ $(j=1,2,\dots,n)$，计算

$$\theta=\min_j\left(\frac{c_j-z_j}{a_{lj}}\middle| a_{lj}<0\right)=\frac{c_k-z_k}{a_{lk}}$$

  - 按θ规则所对应的列的非基变量 x_k 为换入变量，这样才能保持得到的对偶问题解仍为可行解。
- (5) 以α_{lk}为主元素，按原单纯形法在表中进行迭代运算，得到新的计算表。重复步骤(2)～(5)。

对偶单纯形法例子

例6 用对偶单纯形法求解

$$\min \omega = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- 解：先将问题化为如下形式：

$$\max z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$
$$-x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3$$
$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

建立初始 → 单纯形表

$c_j \rightarrow$			−2	−3	−4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	x_4	−3	−1	−2	−1	1	0
	x_5	−4	[−2]	1	−3	0	1
$c_j - z_j$			−2	−3	−4	0	0

- 可以看出，检验数行对应的对偶问题的解是可行解，因 b 列数字为负，所以需进行迭代运算。
- 换出变量：按照步骤3计算min(-3,-4)=-4，故x_5为换出变量；
- 换入变量：按照步骤4计算θ=min{-2/-2,－,-4/-3}=-2/-2=1，故x_1为换入变量。换入、换出变量的所在行、列交叉处“-2”为主元素

对偶单纯形法例子

- 按单纯形法计算步骤进行迭代，得下表：

$c_j \to$			-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-1	0	[-5/2]	1/2	1	-1/2
-2	x_1	2	1	-1/2	3/2	0	-1/2
$c_j - z_j$			0	-4	-1	0	-1

对偶问题仍为可行解，b列中仍有负分量，故重复上述迭代得：

$c_j \to$			-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_2	2/5	0	1	-1/5	-2/5	1/5
-2	x_1	11/5	1	0	7/5	-1/5	-2/5
$c_j - z_j$			0	0	-9/5	-8/5	-1/5

- 此时b列数字全为非负，检验数全为非正，故原问题最优解为：**$X^* = (11/5, 2/5, 0, 0, 0)^T$**
- 对偶问题最优解为：**$Y^* = (8/5, 1/5)$**

标准单纯形法vs对偶单纯形法

	标准单纯形法	对偶单纯形法
初始化	$B^{-1}b \geq 0$，原问题有基可行解	$C_N - C_B B^{-1} N \leq 0$，对偶问题有基可行解
最优性检验	$C_N - C_B B^{-1} N \leq 0$	$B^{-1}b \geq 0$
迭代过程	确定换入变量：最大正检验数max $[(C_N - C_B B^{-1} N)_j \mid (C_N - C_B B^{-1} N)_j > 0]$ 对应的非基变量x_k	确定换出变量：最小负值 $\text{Min}[(B^{-1}b)_i \mid (B^{-1}b)_i < 0]$ 对应的基变量x_l
	若x_k对应的列系数a_{ik}都≤0，则有无界解	若x_l对应的行系数a_{lj}都≥0，则无可行解
	确定换出变量：最小列比值对应的基变量x_l（保持基可行） $\min_i \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_k)_i} \middle\vert (B^{-1}P_k)_i > 0 \right\} = \frac{(B^{-1}b)_l}{(B^{-1}P_k)_l}$，	确定换入变量：最小行比值对应的非基变量x_k（保持对偶基可行） $\min_j \left(\frac{(C_N - C_B B^{-1} N)_j}{a_{lj}} \middle\vert a_{lj} < 0 \right) = \frac{c_k - z_k}{a_{lk}}$
	高斯消元法：以a_{lk}为主元素进行初等行变换	

对偶单纯形法

– 对偶单纯形法的优点：
  - 初始解可以是非可行解，当检验数都为负数时，就可以进行基变换，这时不需要加入人工变量，因此可以简化计算。
  - 当变量多于约束条件的线性规划问题，用对偶单纯形法计算可以减少计算工作量，因此对变量较少而约束条件很多的线性规划问题，可先将它变换成对偶问题，然后用对偶单纯形法求解。
  - 在灵敏度分析及**6.3**节求解整数规划的割平面法中，有时需要用对偶单纯形法使问题的处理简化。

– 注意：
  - 对偶单纯形法的换基顺序是先确定换出变量，再确定换入变量，而普通单纯形法则顺序相反；
  - 对偶单纯形法是求解线性规划的一种求解方法，而不是去求对偶问题的最优解；
  - 对大多数线性规划问题，很难找到一个初始可行基，因而这种方法在求解线性规划问题时很少单独使用。