数理逻辑　第四周作业　3 月 10 日 周二

PB18151866 龚小航

1. 证明以下几条语义后承的定理：.
   (1) 若 $\Gamma \subseteq \Gamma'$ 且 $\Gamma \vDash p$，则 $\Gamma' \vDash p$;　　（语义后承单调性）
   (2) 若 $\Gamma \vDash p$ 且 $\Gamma \vDash p \to q$，则 $\Gamma \vDash q$；（语义 MP）
   (3) $\Gamma \vDash p \to q \iff \Gamma \cup \{p\} \vDash q$；　（语义演绎定理）
   (4) p是重言式当且仅当 $\emptyset \vDash p$　　　　（p是内定理当且仅当$\emptyset \vDash p$）

解：(1) 由已知条件，$\Gamma \subseteq \Gamma'$ 且 $\Gamma \vDash p$，取一个使 Γ 中所有公式都成真的指派ν，由定义，得指派ν也是p的成真指派。再取一个使 Γ' 中所有公式都成真的指派ν',由于$\Gamma' = \Gamma \cup (\Gamma' - \Gamma)$ 显然ν'也会令Γ'中本属于Γ的一部分都成为成真指派，由条件$\Gamma \vDash p$，可得任意ν'都是p的成真指派。由定义，可知$\Gamma' \vDash p$

(2) 直接从定义出发，任取一个使 Γ 中所有公式都成真的指派 ν，由语义后承的意义，得：

$$\nu(p) = t; \qquad \nu(p \to q) = t$$

再由真值指派的性质，得到在这个指派下q的真值：

$$\nu(q) = t \to \nu(q) = \nu(p) \to \nu(q) = \nu(p \to q) = t$$

所以指派 ν 也是q的成真指派，再由ν的任意性，即有：

$$\Gamma \vDash q$$

(3) ①先证明充分性 " $\Rightarrow$ "：已知条件为$\Gamma \vDash p \to q$，取一个使 Γ 中所有公式都成真的指派ν，由已知条件，得到 $\nu(p \to q) = t$;即 $\nu(p) \to \nu(q) = t$。在从所有满足上述条件的ν的集合 A 中，挑选出那些令$\nu(p) = t$的指派，令这些指派全体构成集合 B。显然集合 B 中的所有元素就是所有令$\Gamma \cup \{p\}$ 成真的指派，从 B 中任选一个指派 ν'，$\nu' \in B \subseteq A$,所以有：

$$\nu'(p) \to \nu'(q) = t \quad \Longrightarrow \quad t \to \nu'(q) = t \quad \Longrightarrow \quad \nu'(q) = t$$

因此ν'是在前提集$\Gamma \cup \{p\}$ 下使q成真的指派，由ν'的任意性，该命题的充分性得证。

②再证明其必要性" $\Leftarrow$ ":已知条件为$\Gamma \cup \{p\} \vDash q$。取一个使 Γ 中所有公式都成真的指派ν，由已知条件，这个指派作用在p上仅有两种可能：

如果 $\nu(p) = t$ 则得到 $\nu(q) = t$，即$\nu(p) \to \nu(q) = \nu(p \to q) = t$；

如果 $\nu(p) = f$ 则得到 $\nu(p) \to \nu(q) = f \to \nu(q) = t$ 。

因此，这个指派总能让$\nu(q) = t$，由定义可证，该命题的必要性成立

综上，这个命题两侧是等价的。

(4) ①先证明充分性 " $\Rightarrow$ "：已知p是重言式，那么由重言式的定义，任何指派ν都能让公式p的真值函数取值为t。所以任何一个使前提集$\emptyset$中的公式都成真的指派ν都是p的成真指派，由定义，可知$\emptyset \vDash p$。该命题的充分性得证。

②再证明其必要性" $\Leftarrow$ ":已知$\emptyset \vDash p$，任取一个使 $\emptyset$ 中所有公式都成真的指派ν，由定义，可知ν是公式p的成真指派；而前提集是$\emptyset$，所有ν的集合就是$L(X)$的所有指派。因此，任何一个指派ν都是公式p的成真指派。由重言式的定义，可知p是重言式。该命题的充分性得证。

综上，这个命题两侧是等价的。

数理逻辑　第四周作业　3 月 12 日 周四

PB18151866 龚小航

1、证明以下公式是等值的：　　【练习 9　P49】

$p \to q$　和　$\neg q \to \neg p$

解：直接列真值表，把所有指派枚举比较即可。

p	$\to$	q
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	t	f

$\neg$	q	$\to$	$\neg$	p
f	t	t	f	t
t	f	f	f	t
f	t	t	t	f
t	f	t	t	f

直接就能看出，对同一个指派v，$v(p \to q) = v(\neg q \to \neg p)$.
因此他们具有相同的真值函数，是等值公式。

1、求以下公式的等值主析取范式：　　【练习 10　P53】

$$(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$$

解：题中所给公式的成真指派是$(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow (0,0,1), (0,1,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)$
分别写出与这五个成真指派相对应的基本合取式：

$$(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3), (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3), (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3), (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3), (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

以他们为支构成析取范式，即得所求：

$$(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$