011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

记2020科大樱花

——致敬为家国大义挺身而出的勇士

和默默奉献的英雄！

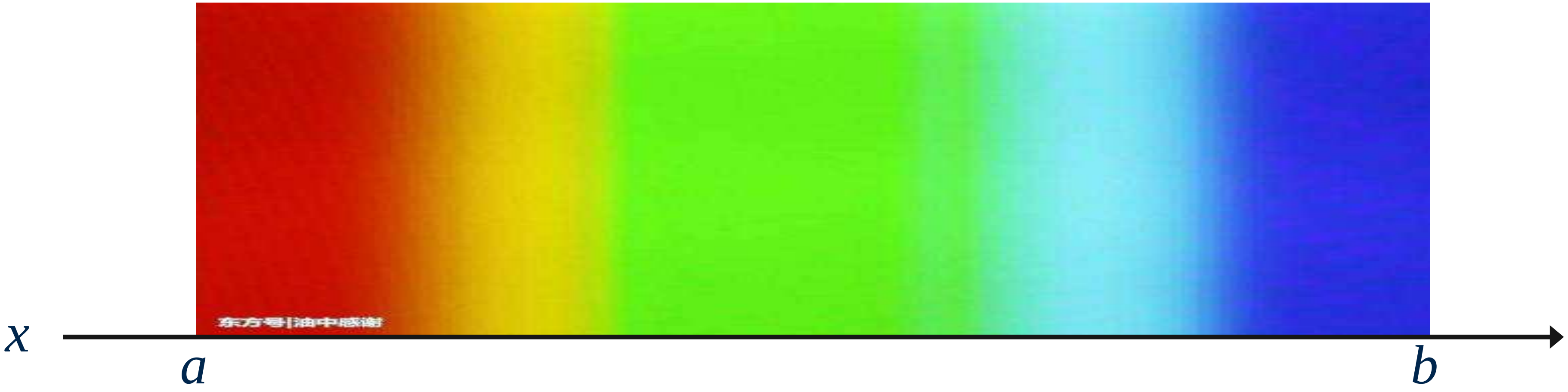
雨骤云积万物喑，绿澎红湃势无垠；

花开岂待三千客，直教春风一片新。

讨论：一阶逻辑的表示问题

❖ **例(无穷论域)** 雪是无色的：$\forall x \neg \mathrm{C}(\mathrm{snow}, x))$.

假设可见光的波长为实数区间$[a, b]$。若取$[a, b]$为论域，则任一颜色值实数$c \in [a, b]$代表一个个体。则命题$\forall x \neg \mathrm{C}(\mathrm{snow}, x))$为真当且仅当对每一个个体$c \in [a, b]$，$\neg \mathrm{C}(\mathrm{snow}, c)$为真。



讨论：一阶逻辑的表示问题

- **观察** 无穷论域的精确表示面临的挑战：
  - 语义推理法失效，推理效率降低；
  - 数据采集难度加大（越精确的数据，采集代价越大）；
  - 自动感知限制多（机器人需要精确感知$c\in[a, b]$的值，才能判断C(snow, c)的真假，但通常传感器精度有限）。
- **无穷论域离散化** 有时可以将无穷论域离散化为有穷集合。如将可见光波长区间$[a, b]$离散化为有穷颜色值集合$\{c_1,\ldots, c_n\}$，一阶公式$\forall x\neg C(\text{snow}, x)$简化为命题公式及命题逻辑推理：

$$\neg C(\text{snow}, c_1)\wedge\ldots\wedge\neg C(\text{snow}, c_n)$$

2.4 可证等价和前束范式

2.4 可证等价和前束范式

2.4.1 可证等价

❖ **定义(可证等价)** 若$\Gamma\vdash_K p\leftrightarrow q$，则称$p$与$q$在$\Gamma$下可证等价；若$p$与$q$在$\varnothing$下可证等价，则称$p$与$q$可证等价，记为$\vdash_K p\leftrightarrow q$。

❖ **性质1** 对任何K公式p, q, r有

1. $\vdash_K p\leftrightarrow p$；（自反性）
2. $\vdash_K p\leftrightarrow q$ 当且仅当 $\vdash_K q\leftrightarrow p$；（对称性）
3. 如果$\vdash_K p\leftrightarrow q$并且$\vdash_K q\leftrightarrow r$，则$\vdash_K p\leftrightarrow r$。（传递性）

◆ **观察** 可证等价是集合K(Y)上的一个等价关系。

2.4 可证等价和前束范式

❖ 性质2 $\Gamma\vdash_K p\leftrightarrow q$当且仅当$\Gamma\vdash_K p\rightarrow q$ 并且$\Gamma\vdash_K q\rightarrow p$。

◆ **证明** 依据K-L关系定理、$\leftrightarrow$定义及相关重言式。

❖ **定理(子公式等价可替换性)** 设q是p的子公式，用$q'\in K(Y)$替换p中q的一次出现所得结果记为p'。如果$\vdash_K q\leftrightarrow q'$，则$\vdash_K p\leftrightarrow p'$。

◆ **证明** 施归纳于p的结构（结构归纳法）。

（1）归纳基础：当p是原子公式时。这时p只有一个子公式q即p自身，所以$p=q$，$p'=q'$，$p\leftrightarrow p'$就是$q\leftrightarrow q'$，结论成立。

（2）归纳步骤：设结论对p的所有子公式成立，往证结论对p成立。根据K形成规则，有三种非平凡情况如下。

2.4 可证等价和前束范式

(i) $p = \neg r$ 时，q 是 r 的子公式，替换的结果是 $p' = \neg r'$. 由归纳假设，

$$\Gamma \vdash q \leftrightarrow q' \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash r \leftrightarrow r',$$

再利用下面的永真式及K-L关系和性质2，结论成立

$$(r \leftrightarrow r') \leftrightarrow (\neg r \leftrightarrow \neg r').$$

(ii) $p = r \to s$ 时，q 或是 r 的子公式 (此时 $p' = r' \to s$), 或是 s 的子公式 (此时 $p' = r \to s'$). 对于前者，用永真式

$$(r \leftrightarrow r') \to ((r \to s) \leftrightarrow (r' \to s));$$

对于后者，用永真式

$$(s \leftrightarrow s') \to ((r \to s) \leftrightarrow (r \to s')).$$

加上归纳假设，便得结果.

2.4 可证等价和前束范式

(iii) $p = \forall x r$ 时，$p' = \forall x r'$. 由归纳假设，有 $\Gamma \vdash r \leftrightarrow r'$. 为证 $\Gamma \vdash \forall x r \leftrightarrow \forall x r'$，考虑对称性，只用证一个方向：$\Gamma \vdash \forall x r \to \forall x r'$. 以下是 $\forall x r'$ 从 $\Gamma \cup \{\forall x r\}$ 的一个证明，注意，除了 x，没有其他概括变元，故进而可用演绎定理.

(1) $\forall x r$	假定
(2) $\forall x r \to r$	(K4)
(3) r	(1)，(2)，MP
(4) $r \to ((r \leftrightarrow r') \to r')$	永真式
(5) $(r \leftrightarrow r') \to r'$	(3)，(4)，MP
(6) $r \leftrightarrow r'$	由归纳假设
(7) r'	(5)，(6)，MP
(8) $\forall x r'$	(7)，UG

2.4 可证等价和前束范式

依归纳法原理，结论对一切$p \in K(Y)$成立。

- 对偶式设$p \in K(Y)$只出现原子公式及$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\forall$和$\exists$。将p中所有原子公式与其否定式互换，$\wedge$与$\vee$互换，$\forall$与$\exists$互换，所得结果记为p^*，称为p的对偶式。
- 例 $\forall x(\neg P(x, y) \wedge \exists y Q(y, z))$的对偶式为$\exists x(P(x, y) \vee \forall y \neg Q(y, z))$。
- 定理(对偶律) $\vdash_K \neg p \leftrightarrow p^*$。

◆证明 自修。

2.4 可证等价和前束范式

2.4.2 前束范式

❖ **定义(前束范式)** 前束范式是任何形为$Q_1x_1 \ldots Q_nx_n p$的一阶公式，其中Q_n(n=1, …, n)代表∀或∃，p中不出现任何量词，称为前束范式的母式。

❖ **注释** 化为前束范式后，可将母式进一步化为合取/析取范式。

❖ **注释** 一阶语言中还有其他种类的范式。前束范式与命题语言关系密切。

2. 4 可证等价和前束范式

❖ 定理(化前束范式) 令Q*为Q的对偶量词。

1. 若 y 不在 $p(x)$ 中出现，则 $\vdash Qx\,p(x) \leftrightarrow Qy\,p(y)$.
2. 若 x 不在 p 中自由出现，则 $\vdash (p \to Qx\,q) \leftrightarrow Qx(p \to q)$;
   若 x 不在 q 中自由出现，则 $\vdash (Qx\,p \to q) \leftrightarrow Q^*x(p \to q)$.
3. $\vdash \neg Qx\,p \leftrightarrow Q^*x\neg p$.
4. $\vdash (\forall x\,p \wedge \forall x\,q) \leftrightarrow \forall x(p \wedge q)$,
5. $\vdash (\exists x\,p \vee \exists x\,q) \leftrightarrow \exists x(p \vee q)$,
6. 若 x 不在 p 中自由出现，则
   $\vdash (p \vee Qx\,q) \leftrightarrow Qx(p \vee q)$, $\vdash (p \wedge Qx\,q) \leftrightarrow Qx(p \wedge q)$.

改名

量词外移

◆ 证明 略。

2.4 可证等价和前束范式

❖ **一阶公式化为可证等价的前束范式的推理过程**

1. 改名；
2. 量词外移。

◆ **注释** 对任何一阶公式，通过改名，可使量词外移所需条件（如“x不在p中自由出现”）得到满足，然后进行量词外移，从而得到与原公式可证等价的前束范式。

❖ **特殊约定** 简洁起见，化前束范式的推理过程可简化为：根据化前束范式定理中的可证等价关系，直接进行公式变换。

2.4 可证等价和前束范式

习题

2.3 p.74: 4(1); p.88: 1(1).

2.4 p.81: 3(4).