



运筹学基础

讲者：顾乃杰 教授、黄章进 副教授

计算机科学与技术学院

2020/3/15

2020-02-17

对偶理论与灵敏度分析

Chap. 3 Duality theory & Sensitivity analysis

- 3.1 单纯形法的矩阵描述
- 3.2 单纯形法的矩阵计算（改进单纯形法）
- 3.3 对偶问题的提出
- 3.4 线性规划的对偶理论
- 3.5 影子价格
- 3.6 对偶单纯形法
- 3.7 灵敏度分析
- 3.9 利用计算机工具求解本章问题

3.1 单纯形法的矩阵描述

2020/3/15

4


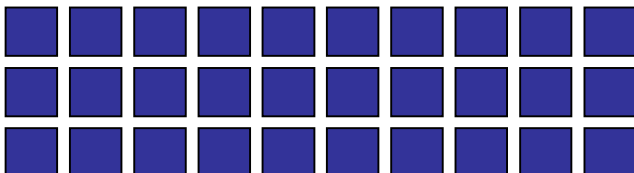

• 设线性规划问题： $\max z = CX$

$$\begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

– 其中：

$$C = [c_1, c_2, \dots, c_n]$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

| -z | X | RHS | |
|----|---|-----|--|
| 1 | C | 0 |  |
| 0 | A | b |  =  |

单纯形法的矩阵描述

2020/3/15

5

- 为了得到问题的标准形式，引入松弛变量 X_s :

$$\max z = CX + C_s X_s ; \quad AX + IX_s = b ; \quad X, X_s \geq 0 \quad (3-1)$$

$$X_s = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{约束变为}} [A, I] \begin{bmatrix} X \\ X_s \end{bmatrix} = b, \text{ 且 } \begin{bmatrix} X \\ X_s \end{bmatrix} \geq 0$$

其中 I 为 $m \times m$ 的单位矩阵, 零向量 O 有 $m + n$ 个元素

- 单纯形法的一般方法是为了得到一系列更优的基本可行解直到得到最优解，在上述的扩展形式中：

$n + m$ 个元素 $\begin{bmatrix} X \\ X_s \end{bmatrix}$ 中的 n 个非基变量被赋值为 0

剩下了含有 m 个未知数（基变量）的 m 个方程



单纯形法的矩阵描述

2020/3/15

6

*回顾

- 将目标函数与约束条件组成 $n+1$ 个变量 $m+1$ 个方程的方程组

$$\begin{aligned}
 x_1 &+ a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\
 x_2 &+ a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\
 &\vdots \\
 x_m &+ a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \\
 -z &+ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m + c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_nx_n = 0
 \end{aligned}$$

- 将方程组写成增广矩阵

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 -z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & b \\
 \hline
 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\
 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_n & 0
 \end{array}$$

| -z | X | RHS |
|----|-----|-----|
| 1 | C | 0 |
| 0 | A,I | b |



单纯形法的矩阵描述

2020/3/15 7

- 由上，在迭代中的每一步，系数矩阵 (A, I) 也可视为 (B, N) 两块，这里 N 是非基变量的系数矩阵。对应于 B 的变量是基变量，用向量 X_B 表示。其他的即为非基变量，用向量 X_N 表示。
- 同时将 C 也分成两块 (C_B, C_N) 。 C_B 是目标函数中 X_B 的系数行向量， C_N 是目标函数中 X_N 的系数行向量。
- 因此模型也可改写为：

$$\max z = [C_B, C_N] \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = C_B X_B + C_N X_N \quad (3-2)$$

$$\begin{cases} [B, N] \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = BX_B + NX_N = b \\ X_B, X_N \geq 0 \end{cases} \quad (3-3)$$

$$(3-4)$$



单纯形法的矩阵描述

$$\max z = C_B X_B + C_N X_N \quad (3-2)$$

$$\begin{cases} BX_B + NX_N = b \end{cases} \quad (3-3)$$

$$\begin{cases} X_B, X_N \geq 0 \end{cases} \quad (3-4)$$

- 将 (3-3) 式移项，再两边左乘 B^{-1} ，得到：

- $$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \quad (3-5)$$

- 将公式 (3-5) 代入目标函数 (3-2)，得到：

$$\begin{aligned} z &= C_B(B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_N X_N \\ &= C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N \end{aligned} \quad (3-6)$$

- 令非基变量 $X_N = 0$ ，得到：

一组基可行解：
$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$$
 目标函数：
$$z = C_B B^{-1}b + C_B X_B$$



单纯形法的矩阵描述---几点说明

- 用矩阵描述的 θ 规则:

$$\theta = \min \left[\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_k)_i} \mid (B^{-1}P_k)_i > 0 \right] = \frac{(B^{-1}b)_l}{(B^{-1}P_k)_l}$$

- 其中, $B^{-1}b$ 为约束等式右端项, $(B^{-1}b)_i$ 表示 $B^{-1}b$ 的第 i 个分量; $B^{-1}P_k$ 为换入变量 X_k 对应的系数列向量, $(B^{-1}P_k)_l$ 是其第 l 个分量, 其对应的换出变量为 X_l ;

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \quad (3 - 5)$$



单纯形法的矩阵描述---几点说明

$$\max z = CX + C_s X_s \quad (3-1)$$

$$\max z = C_B X_B + C_N X_N \quad (3-2)$$

$$z = C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N \quad (3-6)$$

- X_s 对应的系数:

- 在初始状态, 由于 X_s 在式(3-1)中的系数 C_s 是 0, 在式(3-6)中隐含基变量 X_s 的系数 $(C_B - C_B B^{-1}B) = 0$, 若 X_s 的元素都为基变量时, 即 X_s 的检验数为0。
- 若迭代运算后, X_s 的部分元素是属于基变量, 其对应的系数是0, 属于非基变量的部分元素, 其对应的系数是非零。



单纯形法的矩阵描述---几点说明

$$\max z = CX + C_s X_s \quad (3-1)$$

$$\max z = C_B X_B + C_N X_N \quad (3-2)$$

$$z = C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N \quad (3-6)$$

- X_N 对应的系数:

- 从式 (3-6) 可知非基变量的 X_N 系数是 $(C_N - C_B B^{-1}N)$ ，非基变量的系数 $(C_N - C_B B^{-1}N)$ 就是第 2 章中用符号 $c_j - z_j (j=1, 2, \dots, n)$ 表示的检验数。
- 如果有 X_s 的某元素 $X_j (j \in N)$ 属于非基变量时，因为 $c_{s_{j \in N}} = 0$ ， $P_{s_{j \in N}}$ 是松弛变量单位向量，所以对应的系数是 $(-C_B B^{-1})$ 。
- 因此所有检验数可以用 $(C - C_B B^{-1}A)$ ，与 $(-C_B B^{-1})$ 表示。

单纯形表与矩阵表示的关系

2020/3/15

12

例：矩阵表示示例

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

初始：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

N **B**

某步迭代后：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/8 & 0 \end{bmatrix}$$

B **N** **B**

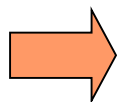


单纯形表与矩阵表示的关系

将约束方程中的 NX_N 右移，同时两边同乘以 B^{-1} 。

即：

$$\begin{aligned} \max z &= CX + C_s X_s \\ \begin{cases} AX + IX_s = b \\ X, X_s \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3-1)$$



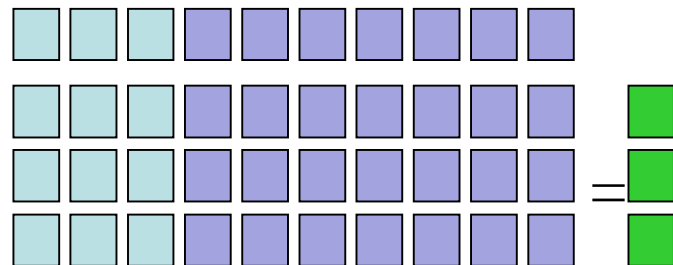
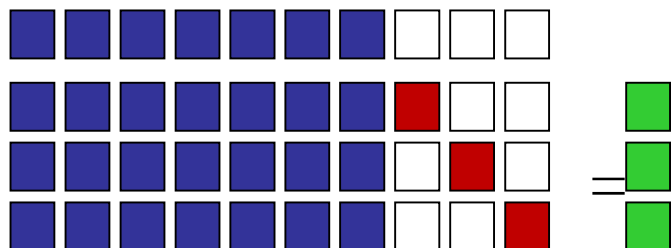
$$\max z = C_B X_B + C_N X_N \quad (3-2)$$

$$\begin{cases} BX_B + NX_N = b \end{cases} \quad (3-3)$$

$$\begin{cases} X_B, X_N \geq 0 \end{cases} \quad (3-4)$$

| -z | X | X_s | RHS |
|----|---|-------|-----|
| 1 | C | C_s | 0 |
| 0 | A | I | b |

| -z | X_B | X_N | RHS |
|----|-------|-------|-----|
| 1 | C_B | C_N | 0 |
| 0 | B | N | b |



单纯形表与矩阵表示的关系

2020/3/15

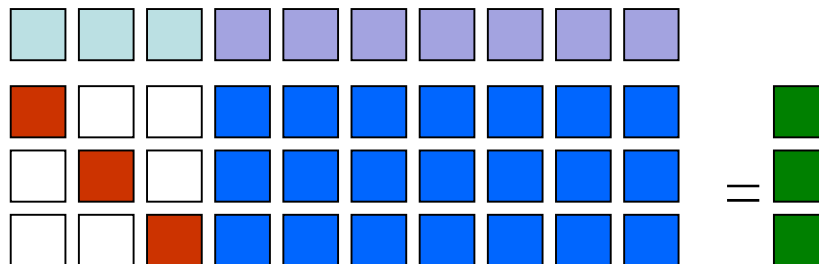
14

$$\max z = C_B X_B + C_N X_N$$

$$\begin{cases} IX_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \\ X_B, X_N \geq 0 \end{cases} \quad (3-5)$$

| -z | X_B | X_N | RHS |
|----|-------|-----------|-----------|
| 1 | C_B | C_N | 0 |
| 0 | I | $B^{-1}N$ | $B^{-1}b$ |

任意一步迭代后得到的单纯形表形式



- 将前页 (3-5) 式中的 X_B 代入目标函数表达式:

$$\max z = C_B(B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_N X_N = C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N$$

$$\begin{cases} IX_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \\ X_B, X_N \geq 0 \end{cases}$$

| -z | X_B | X_N | RHS |
|----|-------|---------------------|----------------|
| 1 | 0 | $C_N - C_B B^{-1}N$ | $-C_B B^{-1}b$ |
| 0 | I | $B^{-1}N$ | $B^{-1}b$ |

目标函数和约束条件表达式中不再包含 X_B ，就像 ch2 例1 中那样

$$\begin{aligned} z &= 0 + 2x_1 + 3x_2 \\ x_3 &= 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 &= 16 - 4x_1 \\ x_5 &= 12 - 4x_2 \end{aligned}$$



单纯形表与矩阵表示的关系

2020/3/15

16

- 最终得到了仅用非基变量表示的目标函数

$$\max z = C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) X_N$$

令非基变量全为0，得到一个基可行解：

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

目标函数值为：

$$z = C_B B^{-1} b$$

从目标函数的表达式可以看出，目标函数的值能否再进一步增大，将完全取决于其中非基变量 X_N 的系数：

$$C_N - C_B B^{-1} N$$

这也就是上一章中的“检验数”的另外一种表示形式——矩阵形式。

单纯形表与矩阵表示的关系

2020/3/15

17

— 回到标准型

$$\max z = CX + C_s X_s$$

$$\begin{cases} AX + IX_s = b \\ X, X_s \geq 0 \end{cases}$$

| -z | X | X_s | RHS |
|----|---|-------|-----|
| 1 | C | 0 | 0 |
| 0 | A | I | b |

- 想从上述的系数矩阵中得到一组基**B**以及对应的基变量，将这组基**B**单独列在左侧。为了方便得到 X_B 的值，将目标函数全部以**非基变量表示**，做矩阵变换：

| -z | X_B | X | X_s | RHS |
|----|-------|---|-------|-----|
| 1 | C_B | C | 0 | 0 |
| 0 | B | A | I | b |

← 初始单纯形表

迭代多次后的单纯形表



| -z | X_B | X | X_s | RHS |
|----|-------|-------------------|---------------|----------------|
| 1 | 0 | $C - C_B B^{-1}A$ | $-C_B B^{-1}$ | $-C_B B^{-1}b$ |
| 0 | I | $B^{-1}A$ | B^{-1} | $B^{-1}b$ |

单纯形表与矩阵表示的关系

2020/3/15

18

| -z | X_B | X | X_S | x_k | RHS |
|----|-------|--------------------|---------------|--------------|-----------------|
| 1 | 0 | $C - C_B B^{-1} A$ | $-C_B B^{-1}$ | | $-C_B B^{-1} b$ |
| 0 | I | $B^{-1} A$ | B^{-1} | $B^{-1} P_k$ | $B^{-1} b$ |

— 从而有： $\max z = C_B B^{-1} b + (C - C_B B^{-1} A) X + (-C_B B^{-1}) X_S$

$$= C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) X_N$$

- 构造标准型时引入的松弛变量对应的检验数为： $-C_B B^{-1}$
- 原问题决策变量对应的检验数为： $C - C_B B^{-1} A$

— 单纯形表与矩阵表示的关系（表3-1）

| | 基变量 X_B | 非基变量 X_N | | 等式右边 RHS |
|------|--------------------------|----------------------|---------------------------|-----------------|
| 系数矩阵 | $B^{-1} B = I$ | $B^{-1} N$ | $B^{-1} P_{j \in N}$ | $B^{-1} b$ |
| 检验数 | $C_B - C_B B^{-1} B = 0$ | $C_N - C_B B^{-1} N$ | $(-C_B B^{-1})_{j \in N}$ | $-C_B B^{-1} b$ |

— 用矩阵描述的 θ 规则： $\theta = \min \left[\frac{(B^{-1} b)_i}{(B^{-1} P_k)_i} \mid (B^{-1} P_k)_i > 0 \right] = \frac{(B^{-1} b)_l}{(B^{-1} P_k)_l}$

- 其中， $B^{-1} b$ 为约束等式右端项， $B^{-1} P_k$ 为换入变量 x_k 对应的系数列向量