

011094, 中国科学技术大学, 2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

第1章 命题逻辑

导 言

- ❖ 演绎逻辑从低到高分三层：命题逻辑、一阶逻辑、高阶逻辑。
- ❖ 一种形式逻辑通常包含三个方面/部分：
 1. 形式逻辑的**语法学** (演算)： **不带直观含义**的公理系统，系统内进行不依赖于任何应用领域具体内容的纯形式化推理。
 2. 形式逻辑的**语义学**：给演算赋予**含义**、使形式公理系统与现实世界相互关联的理论方法。
 3. 形式逻辑的元理论：研究形式公理系统的**语法学与语义学之间关系**的理论方法。
- ❖ 命题逻辑的构成：命题演算、命题语义学、命题逻辑元理论。

1.1 命题逻辑基础：命题与联结词

❖ 命题 命题是有真假的陈述句。

➤ 例1 (简单命题)

(1) 雪是白的。 (经验命题)

(2) $1+1=2$ 。 (数学命题)

(3) 5000年前太阳从西边升起。 (时态命题)

(4) 他相信911事件是伪造的。 (模态命题)

(5) 你吃了吗? (不是命题, 可用命题逻辑处理)

(6) 别说话! (不是命题, 可用命题逻辑处理)

1.1 命题逻辑基础：命题与联结词

➤ 例1 (简单命题)

(7) 本命题是假的。

解：(7)不是命题，因为陈述句(7)没有真假。证明：

- 假设(7)是真的，那么它说的是对的，它说自己是假的，所以(7)是假的，矛盾；

- 假设(7)是假的，那么它说的是错的，它说自己是假的，所以(7)是真的，矛盾。

◆观察：命题的界定以矛盾律、排中律为预设前提。

1.1 命题逻辑基础：命题与联结词

- ❖ 逻辑常项 常见的有四种：联结词、量词、时态词、模态词。
- ❖ **命题逻辑中的逻辑常项** 命题逻辑的逻辑常项只有联结词。
 - 命题逻辑忽略命题中存在的其他逻辑常项；如例1中(3)、(4)。
- ❖ 命题的分类
 - 不含联结词的命题是简单命题/原子命题；
 - 包含联结词的命题是复合命题。

◆ **注意！** 逻辑常项是可能在命题中出现的符号；而在演绎推理中，不允许推出符号 \vdash 在命题中出现。

1.1 命题逻辑基础：命题与联结词

❖ 命题逻辑的5个常用联结词

符 号	名 称	读 法
\neg	否定词	$\neg p$ 读作非 p
\rightarrow	蕴涵词	$p \rightarrow q$ 读作 p 蕴涵 q
\wedge	合取词	$p \wedge q$ 读作 p 且 q
\vee	析取词	$p \vee q$ 读作 p 或 q
\leftrightarrow	等值词	$p \leftrightarrow q$ 读作 p 等值于 q

1.1 命题逻辑基础：命题与联结词

➤ 例2 (复合命题)

- (8) 并非雪是白的。 (否定命题)
- (9) 雪是白的并且 $1+1=2$ 。 (合取命题)
- (10) 雪是白的或者 $1+1=2$ 。 (析取命题)
- (11) 雪是白的蕴涵 $1+1=2$ 。 (条件句命题)
- (12) 雪是白的等值于 $1=1=2$ 。 (等值句命题)

◆ 观察 复合命题的构成遵守外延性原则。

◆ 观察 在逻辑等严谨的理论体系中，原则必须坚持到底。

1.1 命题逻辑基础：命题与联结词

❖ 命题逻辑中联结词的含义

- 命题演算的构成和其中推理不需要借助于命题联结词的含义；
- 联结词的含义在命题语义学中严格定义；
- 联结词含义在命题语义学中的定义与联结词（否定、蕴涵、并且、或者、等值）在自然语言中的含义不完全一致。

◆ 对比：《几何原本》中的形式逻辑系统是实质公理系统（带有几何学直观含义）；命题演算是形式公理系统（不带直观含义）。

◆ 形式公理系统是人类抽象思维在20世纪达到的新高峰。

1.1 命题逻辑基础：命题与联结词

思考题

1.1 试用复合命题表达自然语言条件句“如果...则...”。

习题

1.1 (Warson实验)设有四张纸牌，每张纸牌的一面有 \oplus ，另一面有 \otimes 。 \oplus 和 \otimes 的颜色可红可蓝。四张牌放在桌上：

红 \oplus 蓝 \otimes 红 \otimes 蓝 \oplus

有人提出猜测：“如果朝上的一面是红 \oplus ，则另一面是蓝 \otimes 。”要求通过翻牌检验此猜测。问应该翻哪几张牌？你的检验法能否确定此猜测的真假？

1.2 命题演算

❖ 命题演算L是命题逻辑的一个形式公理系统；这个系统与经典命题逻辑中的其他形式公理系统是相互等价的。

❖ 命题演算L的构成

I 命题语言

Ia 符号表

- 命题符号/命题变元 x_1, x_2, \dots (可数无穷多个)
- 基本联结词 \neg, \rightarrow
- 辅助符号 $(,)$

1.2 命题演算

I 命题语言

Ib 公式

1. 任何命题符号是公式，称为原子公式；
2. 若 p 是公式，则 $\neg p$ 是公式，称为否定式；
3. 若 p, q 是公式，则 $p \rightarrow q$ 是公式，称为蕴涵式；
4. 只有经过有限次应用以上步骤生成的是公式。

- 这四条规则称为形成规则。
- 其中 p, q 本身不是命题语言的公式。

◆ 记号 令 X 为全体命题符号的集合， $L(X)$ 为命题语言中全体公式的集合；令 $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ ， $L(X_n)$ 为只出现命题符号 x_1, \dots, x_n 的所有命题公式的集合。

1.2 命题演算

II 推理设施

IIa 公理模式

(L1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$;

(L2) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$;

(L3) $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$.

IIb 推理规则

(MP) 从 p 和 $p \rightarrow q$ 推出 q . (分离规则)

每一条公理模式不是公理，
代表无穷多条公理，其中
 p, q, r 代表任意命题公式。

1.2 命题演算

❖ 命题演算L中的形式推理/证明

I 形式证明

$p_n = p$ 表示=左右是同一个命题公式。

定义1(形式证明) 任给公式 p 。 p 在 $L(X)$ 中的一个证明是 $L(X)$ 中的一个公式序列 $p_1, \dots, p_n (p_n = p)$, 满足对任何 $k (1 \leq k \leq n)$:

1. p_k 是一条公理; 或者
2. 存在 $p_i, p_j (i, j < k)$ 使得 $p_j = p_i \rightarrow p_k$ 。

例如, 如果 p_1 是公理, $p_1 \rightarrow p_3$ 是公理, 则 p_3 满足定义1条件2。

◆ 记号 若存在 p 的一个证明, 称 p 可证, p 是L内定理, 记为 $\vdash p$ 。

1.2 命题演算

❖ 例1 试证 $\vdash (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1)$.

证明 只需给出公式 $(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1)$ 在 $L(X)$ 中的一个证明 p_1, \dots, p_n 。下面是一个证明：

1. $x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1)$

2. $(x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1))$

3. $(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1)$.

证毕。

证明根据

(L1)

(L2)

MP1, 2

◆ 要求 证明中必须写出所有步骤中的证明根据！

1.2 命题演算

❖ 命题演算L中的形式推理/证明

II 形式推理

定义2(形式推理) 任给公式 p 和公式集 Γ 。 p 的一个从 Γ 的形式推理是 $L(X)$ 中的一个公式序列 p_1, \dots, p_n ($p_n = p$)，满足对任何 k ($1 \leq k \leq n$):

1. p_k 是一条公理；或者
2. $p_k \in \Gamma$ ；或者
3. 存在 p_i, p_j ($i, j < k$)使得 $p_j = p_i \rightarrow p_k$ 。

◆ 记号 若存在 p 的一个从 Γ 的推理，称 p 从 Γ 可推，记为 $\Gamma \vdash p$ 。

◆ 观察 推理是带前提的证明；证明是无前提的推理。

1.2 命题演算

❖ 例2 试证 $\{x_1\} \vdash x_2 \rightarrow x_1$.

证明 只需给出公式 $x_2 \rightarrow x_1$ 的一个从 $\{x_1\}$ 的推理。下面是一个这样的推理：

1. x_1

2. $x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1)$

3. $x_2 \rightarrow x_1$.

证毕。

证明根据

前提

(L1)

MP1, 2

◆ 要求 形式推理同样必须写出证明根据！

1.2 命题演算

❖ 例3(同一律) 试证 $\vdash p \rightarrow p$.

❖ 例4(否定前件率) 试证 $\vdash \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$.

——自修

0.2 学习数理逻辑的意义

思考题

1.2 同一律的证明是否必须使用(L1)? 证明你的结论。

习题

1.2 p.22: $2(1, 2); 3(3, 4)$.