数理逻辑　第十一周作业　4 月 30 日 周四

PB18151866 龚小航

1、试验证自然数的 Peano 定义与 von Neumann 定义的一致性。

解：皮亚诺定义规定了自然数集 $\mathbb{N}$，和自然数集上的后继函数 $'$，即 $+1$.

因此，皮亚诺定义可以看为：

规定 $0 \in \mathbb{N}$,　$1 = 0' = 0 + 1 \in \mathbb{N}$,　$2 = 1' = 1 + 1 \in \mathbb{N}$, ⋯⋯

再看冯诺依曼定义：这种定义以集合元素的个数定义自然数。

定义 $0 = \{\,\}$;　$1 = 0 \cup \{0\} = \{\,\} \cup \{0\} = \{\,\} + \{0\} = 0 + 1 = 0'$

$2 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0\} + \{\{0\}\} = \{0\} + \{\{\,\} + \{0\}\} = 1 + (0 + 1) = 1'$

按如此进行下去，可以看出冯诺依曼定义和皮亚诺定义所描述的内容具有一致性，两者的定义没有根本上的不同。

2.完成以下定理的证明：

任给$K^+(Y)$的一阶结构$M = (D, F, P)$，若 $=^M$ 是D上的相等关系，则有 $M \vDash K^+$

解：需要分 $E1, E2, E3$ 三种情况分别说明：

对于情况$E1$：

设$M = (D, F, P)$是一个$K^+(Y)$的一阶结构，并且$=^M$是D上的相等关系=. 考虑$E1$. 对任何一阶解释$I = (M, V, v)$，由I良定义性，对任何项u，存在唯一的$d \in D$使得$I(u) = d$. 由于$I(u\ =\ u) = t$当且仅当$I(u) = I(u)$当且仅当$d = d$，故$I(u = u) = t$. 由u和I的任意性，$u = u$是M有效的。

对于情况$E2$：

对任何一阶解释$I = (M, V, v)$，由I良定义性，对任何项u，存在唯一的$d \in D$使得$I(u) = d$. 对等词公设$E2$，令前件为真，即设$I(u_k\ =\ u) = t$，即$I(u_k) = I(u)$. 那么：

$$I\big(g(u_1, u_2 \cdots\cdots u_k \cdots\cdots u_n)\big) = g\big(I(u_1), I(u_2), \cdots\cdots, I(u_k), \cdots\cdots, I(u_n)\big)$$
$$= g\big(I(u_1), I(u_2), \cdots\cdots, I(u), \cdots\cdots, I(u_n)\big) = I\big(g(u_1, u_2 \cdots\cdots u \cdots\cdots u_n)\big)$$

从上式立即可知：$I\big(g(u_1, u_2 \cdots\cdots u_k \cdots\cdots u_n)\ =\ g(u_1, u_2 \cdots\cdots u \cdots\cdots u_n)\big) = t$

即$E2$是M有效的。

对于情况$E3$：

对任何一阶解释$I = (M, V, v)$，由I良定义性，对任何项u，存在唯一的$d \in D$使得$I(u) = d$. 对等词公设$E3$，令前件为真，即设$I(u_k\ =\ u) = t$，即$I(u_k) = I(u)$. 那么，再令后件的前件为真：

即设 $I\big(P(u_1, u_2 \cdots\cdots u_k \cdots\cdots u_n)\big) = t \quad \Rightarrow \quad I(u_1), I(u_2), \cdots\cdots I(u_k), \cdots\cdots, I(u_n) \in P$

$\Rightarrow \quad I(u_1), I(u_2), \cdots\cdots I(u), \cdots\cdots, I(u_n) \in P \quad \Rightarrow \quad I\big(P(u_1, u_2 \cdots\cdots u \cdots\cdots u_n)\big) = t$

从上式即可得出：

$$I\big(g(u_1, u_2 \cdots\cdots u_k \cdots\cdots u_n) \to\ g(u_1, u_2 \cdots\cdots u \cdots\cdots u_n)\big) = t$$

这说明$E3$也是M有效的。

综上三种情况，可知在满足题给条件时，均有$M \vDash K^+$

3. 【P110 练习 23】在例 1 的K的解释域N中，若等词≈改为解释成“有不同的奇偶性”，那么等词公理在N中是否都恒真？是否都恒假？

例 1 设 K 中 $C = \varnothing, F = \varnothing, R = \{\approx\}$, 则等词公理集 E 中只包含

(E1) $x \approx x$,

(E3) $x \approx y \to (x \approx z \to y \approx z)$,

$x \approx y \to (z \approx x \to z \approx y)$,

其中 x, y, z 是任意变元. 此外没有其他形式的等词公理.

考察此 K 的一个解释域 $\mathbf{N}$ (自然数集)，其中等词“≈”解释为“>”. $\mathbf{N}$ 不是 E 的模型. 事实上，对任意项解释 φ, 总有

$$|x \approx x|(\varphi) = 0;$$

当项解释 φ 满足 $\varphi(x) = 3, \varphi(y) = 1, \varphi(z) = 2$ 时，

$$|x \approx y \to (x \approx z \to y \approx z)|(\varphi) = 0.$$

解：需要分 $E1, E2, E3$ 三种情况分别说明：

对于情况$E1$：

对任何的 $d \in \mathbb{N}$，d与其自身一定是同奇偶的，因此$d \approx d$恒不成立因此$E1$型公设恒假。

对于情况$E2$：

$K^+(Y)$中没有函数符号，这种形式的公理不恒真也不恒假，无法判断。

对于情况$E3$：

$E3$在本题中的形式为：

$$u_k \approx u \to (u_1 \approx u_k \to u_1 \approx u)$$

假设前件为真，后件的前件也为真，验证后件的后件即可：

令$I(u_k \approx u) = t,\ I(u_1 \approx u_k) = t$，即$u, u_1$同奇偶，与$u_k$不同奇偶。因此$I(u_1 \approx u) = f$，此时$E3$为假。同时，若前件为假时，$E3$也可以为真。因此无法判断$E3$是否恒真恒假。它可真可假。