Computer Science and Technology

运筹学基础

讲者：顾乃杰 、黄章进

计算机科学与技术学院

2020/4/27

线性目标规划

Chap.5 Linear Goal Programming

主要内容

- 5.0 目标规划的提出
- 5.1 目标规划的数学模型
- 5.2 解目标规划的图解法
- 5.3 解目标规划的单纯形法
- 5.4 应用举例
- 5.5 使用计算机工具求解线性目标规划

5.0 目标规划的提出

- 最优和满意
  - 在现实经济生活中，没有最优（max，min）只有满意
    - 西方某些经济学家的一个基本假设就是认为企业的决策者是“经济人”，他们的行为只受“最大化”的行为准则所支配，只以追求最大经济利益（利润）为唯一目标。
    - 社会的发展已经证明，“经济人”的假设根本不适应现代管理的需要。
    - H. A. 西蒙着眼于现代企业的管理职能，否定了“经济人”概念和“最大化”行为准则，提出了“管理人”的概念和“令人满意”的行为准则。由于西蒙教授对现代经济管理的决策科学进行了开创性的研究，荣获了1978年诺贝尔经济学奖。他提出满意行为模型要比最大化行为模型丰富得多。从而现代管理决策所追求的不是绝对意义下的最优解，而是相对意义下的满意解。
    - 目标规划的有关概念和模型最早在1961年由美国学者A.查恩斯和W.库伯在他们合著的《管理模型和线性规划的工业应用》一书中提出，以后这种模型又先后经尤吉·艾吉里、杰斯基莱恩和桑·李不断完善改进。1976年伊格尼齐奥发表了《目标规划及其扩展》一书，系统归纳总结了目标规划的理论和方法。

5.0 目标规划的提出

- 线性规划的不足
  - 线性规划只研究在满足一定条件下，单一目标函数取得最优解，而在企业管理中，经常遇到多目标决策问题，如拟订生产计划时，不仅考虑总产值，同时要考虑利润，产品质量和设备利用率等。这些指标之间的重要程度（即优先顺序）也不相同，有些目标之间往往相互发生矛盾。
  - 线性规划致力于某个目标函数的最优解，这个最优解若是超过了实际的需要，很可能是以过分地消耗了约束条件中的某些资源作为代价。
  - 线性规划把各个约束条件的重要性都不分主次地等同看待，这也不符合实际情况。
  - 求解线性规划问题，首先要求约束条件必须相容，如果约束条件中，由于人力、设备等资源条件的限制，使约束条件之间出现了矛盾，就得不到问题的可行解，但生产还得继续进行，这将给人们进一步应用线性规划方法带来困难。

5.0目标规划的提出

- 目标规划的提出
  - 为了弥补线性规划问题的局限性，解决有限资源和计划指标之间的矛盾，在线性规划基础上，建立目标规划方法，从而使一些线性规划无法解决的问题得到满意的解答。
  - 在实际问题中，可能会同时考虑几个方面都达到最优：产量最高，成本最低，质量最好，利润最大，环境达标，运输满足等。多目标规划能更好地兼顾统筹处理多种目标的关系，求得更切合实际要求的解。
  - 目标规划可根据实际情况，分主次地、轻重缓急地考虑问题。

5.1目标规划的数学模型

– 例1 某工厂生产I，II两种产品，已知有关数据见下表，试求获利最大的方案。

	I	II	拥有量
原材料（kg）	2	1	11
设备（台时）	1	2	10
利润（元/件）	8	10	

- 解：这是一个求获利最大的单目标的规划问题，用x_1，x_2 分别表示Ⅰ,Ⅱ产品的产量，其线性模型表述为：

$$\max z = 8x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- 用图解法求得最优决策方案为： $x_1^* = 4, x_2^* = 3, z^* = 62$元

5.1目标规划的数学模型

- 实际上工厂在做决策时，要依次考虑市场等一系列其他条件，如：
  1. 根据市场信息，产品I的销售量有下降趋势，故考虑产品I的产量不能高于产品II；
  2. 超过计划供应的原材料时，需用高价采购，这就使成本增加；
  3. 应尽可能充分利用设备台时，但不希望加班；
  4. 应尽可能达到并超过计划利润指标56元。
- 这样，在考虑产品决策时，就是多目标决策问题。目标规划方法是解决这类决策问题的方法之一。

5.1目标规划的数学模型

- 某企业在计划期内生产甲乙丙三种产品，这些产品分别需要在设备A、B上加工，需要消耗材料I和II，单件产品需要消耗的原料、台时及利润如下表，为该企业制定生产计划。

资源 \ 消耗 \ 产品	甲	乙	丙	现有资源
原材料I(千克)	3	1	2	200
原材料II(千克)	2	2	4	200
设备A(台时)	4	5	1	360
设备B(台时)	2	3	5	300
利润（元/件）	40	30	50	

$$\max z = 40x_1 + 30x_2 + 50x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 200 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 200 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 \le 360 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 300 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解得上述线性规划问题的最优解为：

$$z = 3400, X = (50,30,10)$$

5.1目标规划的数学模型

– 现在决策者根据企业的实际情况和市场需求，需要重新定制经营目标：
  - 利润不少于3200元；
  - 产品甲与产品乙的产量比例尽量不超过1.5；
  - 提高产品丙的产量使之达到30件；
  - 设备加工能力不足可以加班解决，但能不加班最好不加班；
  - 受到企业资金限制，只能使用现有材料而不能再购进。
– 加入上述条件，可得不等式组：

$$\begin{cases} 40x_1+30x_2+50x_3 \ge 3200 \\ x_1-1.5x_2 \le 0 \\ x_3 \ge 30 \\ 3x_1+x_2+2x_3 \le 200 \\ 2x_1+2x_2+4x_3 \le 200 \\ 4x_1+5x_2+x_3 \le 360 \\ 2x_1+3x_2+5x_3 \le 300 \\ x_1,x_2,x_3 \ge 0 \end{cases}$$

该不等式组无解，即使令设备B加班10小时仍然无解。而在实际生产过程中，生产方案总是存在的，无解只能说明在现有资源条件下，不可能完全满足所有的经营目标。

5.1目标规划的数学模型

– 1：正、负偏差变量d^+，d^-：

- 设x_1、x_2为决策变量，此外，引进正、负偏差变量d^+，d^-，这两个偏差变量均≥0。
- 正偏差分量d^+表示决策值超过目标值的部分；负偏差分量d^-表示决策值未达到目标值的部分。
- 设例1中，d^-为未达到利润目标的差值，d^+为超出利润目标的差值
- 当利润小于56时，$d^->0$且$d^+=0$，有$8x_1+10x_2+d^-=56$成立
- 当利润大于56时，$d^-=0$且$d^+>0$，有$8x_1+10x_2-d^+=56$成立
- 当利润等于56时，$d^-=0$且$d^+=0$，有$8x_1+10x_2=56$成立
- 实际利润只有上述三种情况之一发生，即决策值不可能既超过目标值同时又未达到目标值，因此恒有$d^+\times d^-=0$。因而可以将三个等式写成一个等式：

$$8x_1+10x_2+d^--d^+=56$$

- 利润尽可能达到并超过56元，理解为即使不能达到也要尽可能接近56，即：

$$min\ d^-$$

– 2：绝对约束和目标约束

- 绝对约束是指必须严格满足的等式约束和不等式约束。
- 目标约束是目标规划特有的，可把约束右端项看作要追求的目标值，在达到目标值时允许发生正或负偏差。
- 因此线性规划问题在约束条件或目标函数中加入正、负偏差变量可变换为目标约束。
- 以例1说明：
  - 目标函数 $z=8x_1+10x_2$

  可变换为目标约束 $8x_1+10x_2+d_1^- - d_1^+ = 56$

  约束条件 $2x_1+x_2\leq 11$

  可变换为目标约束 $2x_1+x_2+d_2^- - d_2^+ = 11$

5.1目标规划的数学模型

– 3：优先因子（优先等级）与权系数

- 一个规划问题常常有若干目标，但决策者在要求达到这些目标时，是有主次、轻重、缓急的不同。
- 凡要求第一位达到的目标赋予优先因子P_1，次位的赋予P_2，…，并规定 $P_k >> P_{k+1}$，$k=1,2,\cdots,K$。表示 P_k 比 P_{k+1} 有更大的优先权，即首先保证高级别优先因子的目标的实现，这时可不考虑次级目标；而P_2级目标是在实现P_1 级目标的基础上考虑的；以此类推。
- 若要区别具有相同优先因子的两个目标，可分别赋予它们不同的权系数 ω_j。

– 4: 目标规划的目标函数

- 目标规划的目标函数（准则函数）是按各目标约束的正、负偏差变量和赋予相应的优先因子而构造的。当每一目标值确定后，决策者的要求是尽可能缩小偏差量。目标规划的目标函数基本形式有三种：

(1)要求恰好达到目标值，即正、负偏差变量都要尽可能的小，这时：

$$\min z = f(d^+ + d^-)$$

(2)要求不超过目标值，即允许达不到目标值，即正偏差变量要尽可能的小，这时：

$$\min z = f(d^+)$$

(3)要求超过目标值，即超过量不限，但负偏差变量要尽可能的小，这时：

$$\min z = f(d^-)$$

目标规划是按事先制定的目标顺序逐项检查，尽可能使得结果达到预定目标，即使不能达到目标，也应使得离目标的差距最小。
这就是目标规划的求解思路，对应的解称为满意解。

5.1目标规划的数学模型

– 例2 将例1依次考虑以下目标：产品II的产量不低于产品I；充分利用台时不加班；利润额不小于56元，求决策方案。

- 解：

原问题线性规划模型：

$$\max z = 8x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

按目标顺序分别赋予三个目标优先因子：P_1, P_2, P_3。

数学模型为：

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

d_1^+ 尽可能小

$d_2^- + d_2^+$ 尽可能小

d_3^- 尽可能小

5.1目标规划的数学模型

- 目标规划的一般数学模型为：

$$\min z=\sum_{l=1}^{L}P_l\left(\sum_{k=1}^{K}(\omega_{lk}^{-}d_k^{-}+\omega_{lk}^{+}d_k^{+})\right)$$

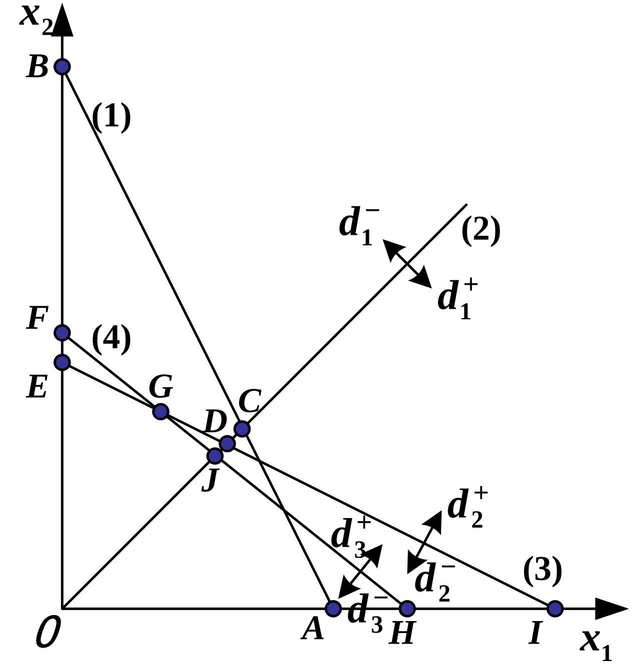
$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}c_{k,j}x_j+d_k^{-}-d_k^{+}=g_k, & k=1,2,\ldots,K \quad \text{目标约束}\\ \sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j\le(=,\ge)\,b_i, & i=1,2,\ldots,m \quad \text{绝对约束}\\ x_j\ge 0, & j=1,2,\ldots,n\\ d_k^{-},d_k^{+}\ge 0, & k=1,2,\ldots,K\end{cases}$$

其中ω_{lk}^{-}，ω_{lk}^{+}为权系数

5.2 解目标规划的图解法

- 对只具有两个决策变量的目标规划的数学模型，可以用图解法来分析求解。
- 以例2说明：绝对约束条件的作图与线性规划相同。作目标约束时，先令 $d_i^-, d_i^+ = 0$ ，作相应的直线，然后在这直线旁标上 d_i^-, d_i^+，表明目标约束可以沿着 d_i^-, d_i^+ 所示的方向平移。

$$
\begin{cases}
2x_1 + x_2 \le 11 & (1) \\
x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & (2) \\
x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & (3) \\
8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & (4) \\
x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3
\end{cases}
$$



5.2 解目标规划的图解法

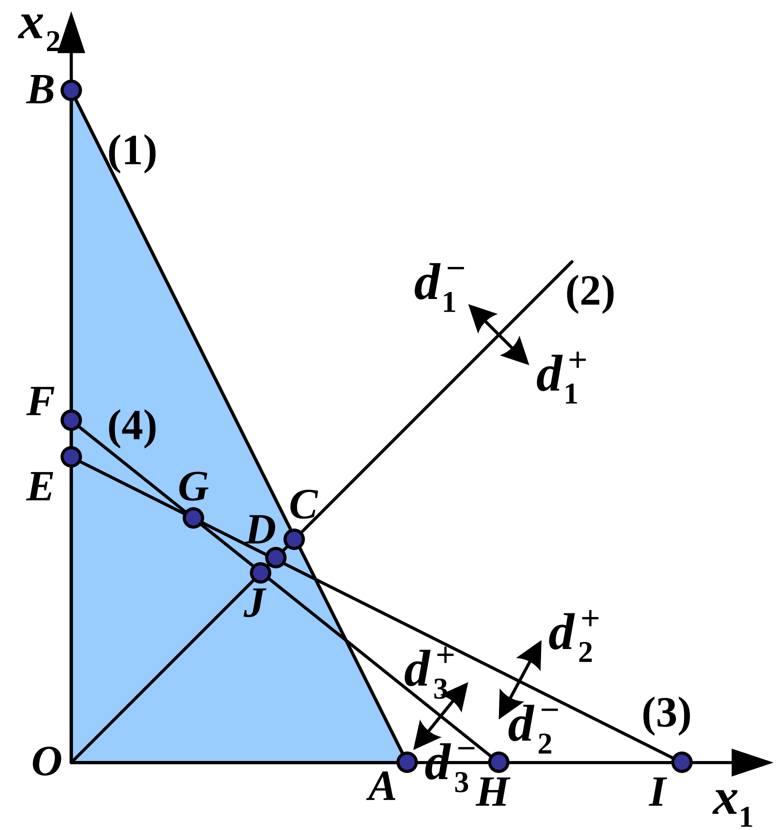
– 首先考虑绝对约束条件，满足绝对约束的可行域为三角形**OAB**

按目标顺序分别赋予三个目标优先因子：P_1, P_2, P_3。

数学模型为：

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 & (1) \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & (3) \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$



5.2 解目标规划的图解法

再考虑具有P_1优先因子的目标的实现，

在目标函数中要求实现$\min d_1^+$，

从图中看出，x_1, x_2在ΔOBC的边界

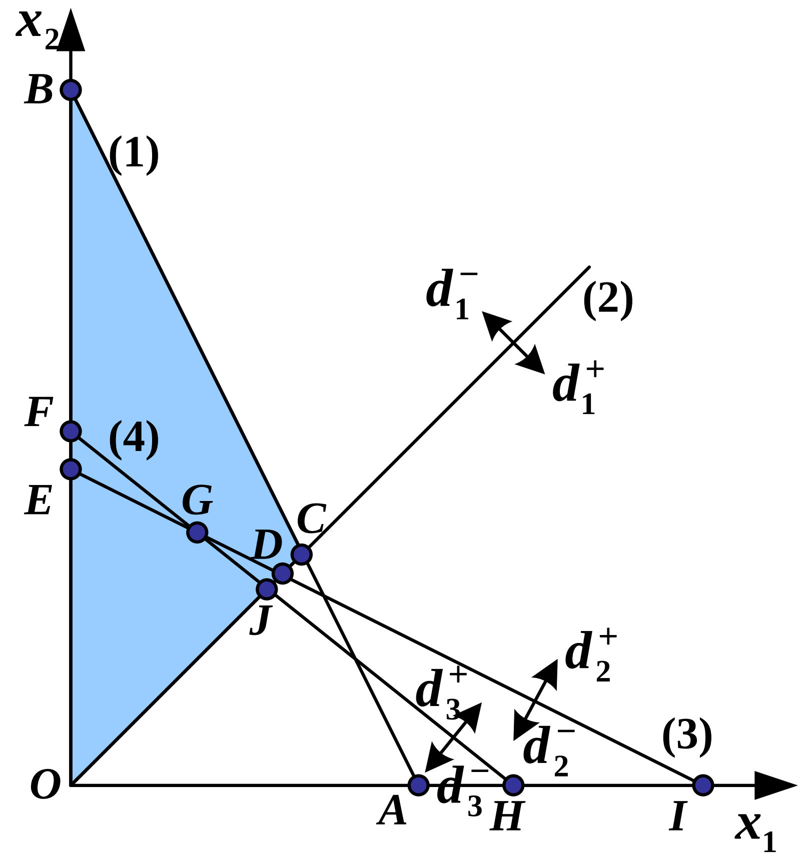
和内部取值才能满足$d_1^+ = 0$。

按目标顺序分别赋予三个目标优先因子：P_1, P_2, P_3。

数学模型为：

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 & (1) \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & (3) \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$



5.2 解目标规划的图解法

接着考虑P_2，要求实现$\min(d_2^+ + d_2^-)$，

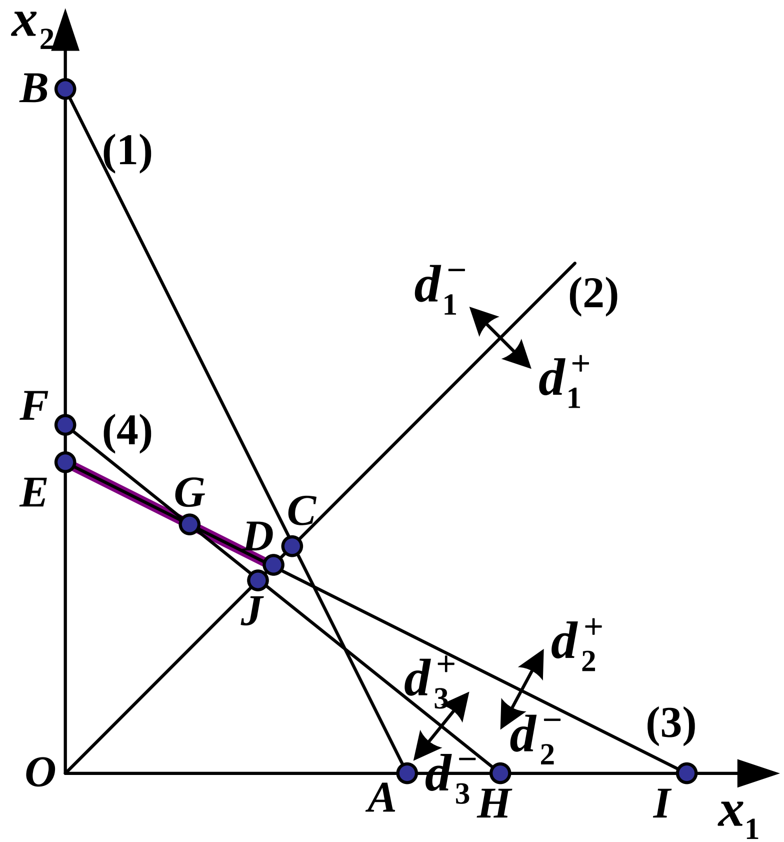
当$d_2^+, d_2^- = 0$时，x_1, x_2可在线段ED上取值。

按目标顺序分别赋予三个目标优先因子：P_1, P_2, P_3。

数学模型为：

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 & (1) \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & (3) \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$



5.2 解目标规划的图解法

最后考虑P_3，要求实现$\min d_3^-$，当$d_3^-=0$时，使x_1, x_2的取值范围缩小到线段GD上取值。

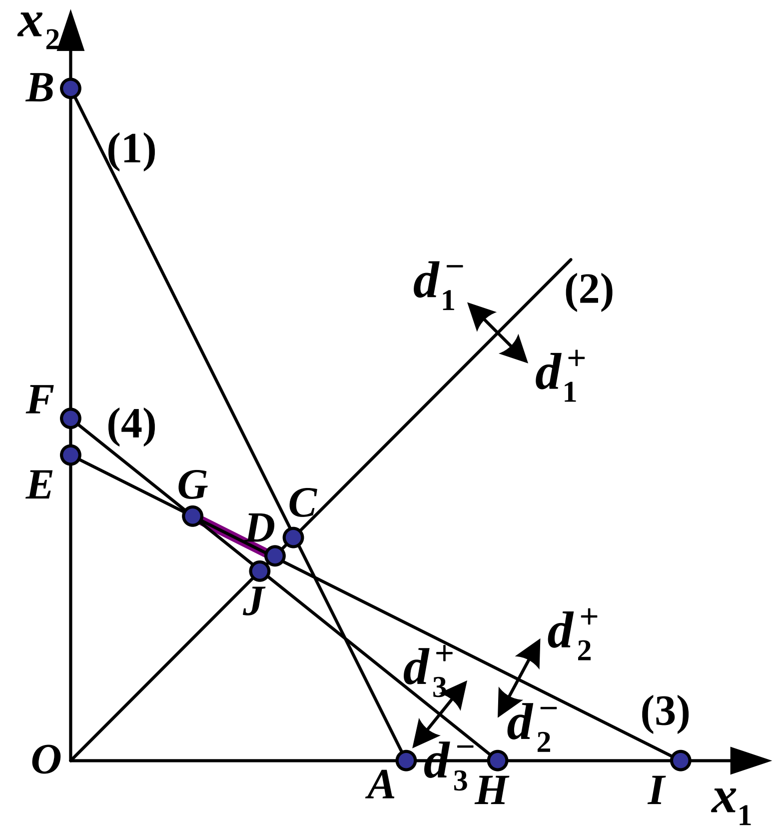
最终可求得：G的坐标为(2,4)，D的坐标为(10/3,10/3)，G、D的凸线性组合都是该目标规划问题的满意解。

按目标顺序分别赋予三个目标优先因子：P_1, P_2, P_3。

数学模型为：

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 & (1) \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & (3) \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$



5.2 解目标规划的图解法

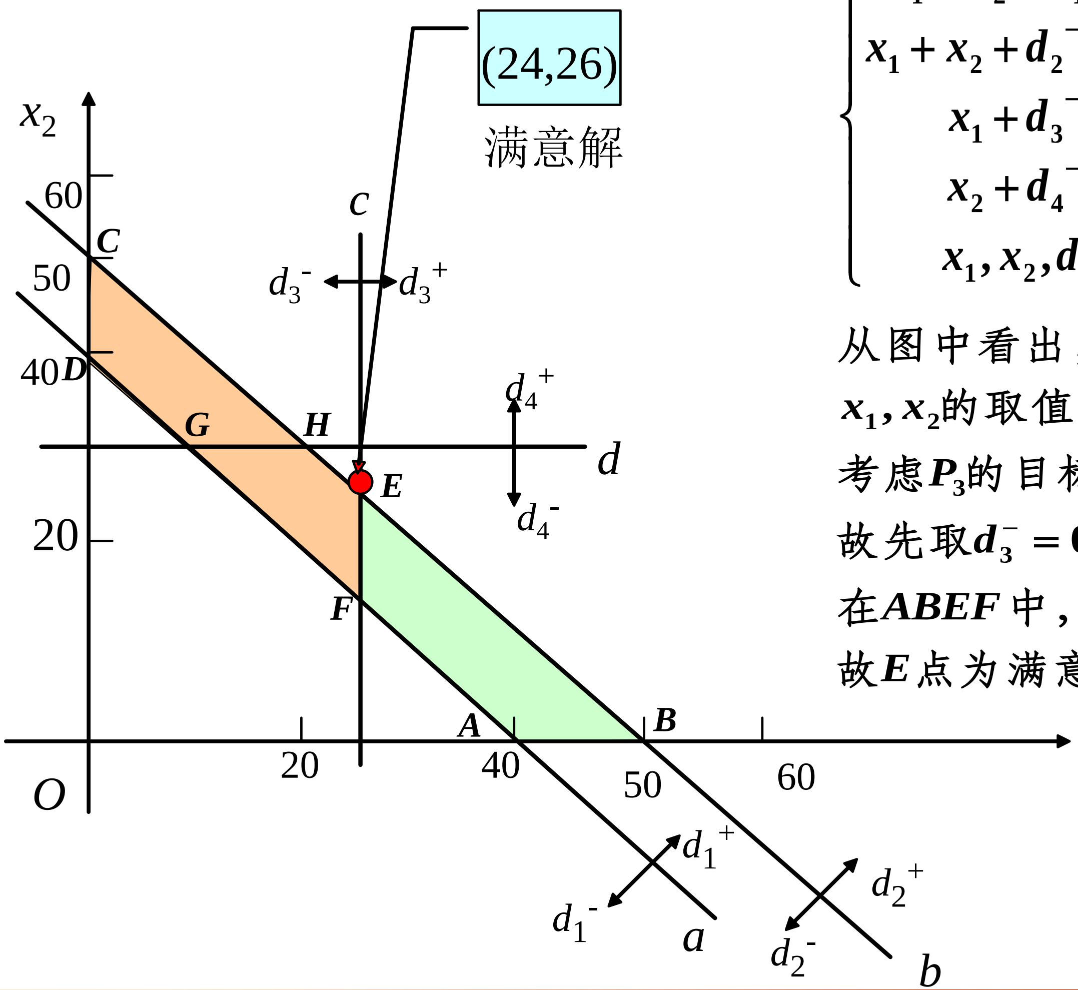
目标规划问题求解时，把绝对约束作最高优先级考虑。但在大多数问题中可能出现某些约束得不到满足，故将目标规划问题的最优解称为满意解。

- 例3 某电视厂装配黑白、彩色两种电视，每装配一台电视占用装配线1小时，装配线每周计划开动40小时。预计市场每周彩色电视销量是24台，每台可获利80元；黑白是30台，每台可获利40元。该厂确定的目标为：
  - 第一优先级：充分利用装配线，每周计划开动40小时；
  - 第二优先级：允许装配线加班，但加班时间每周不超过10小时；
  - 第三优先级：装配电视的数量尽量满足市场需求，因彩色电视利润高，所以其权系数为2；
- 试建立这个问题的目标规划模型，并求解黑白和彩色电视的产量。

5.2 解目标规划的图解法

- 解：其目标规划模型为： $\min z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3(2d_3^- + d_4^-)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40 & (a) \\ x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 50 & (b) \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ = 24 & (c) \\ x_2 + d_4^- - d_4^+ = 30 & (d) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 & (i = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$



从图中看出，在考虑P_1, P_2的目标实现后，x_1, x_2的取值范围为$ABCD$。

考虑P_3的目标要求时，因d_3^-的权系数大于d_4^-，故先取$d_3^- = 0$，这时x_1, x_2的取值范围为$ABEF$。

在$ABEF$中，只有E点使d_4^-取值最小，故E点为满意解。

5.3 解目标规划的单纯形法

- 目标规划的数学模型与线性规划基本相同，所以用单纯形法求解时的方法步骤也基本相同。但要考虑目标规划的一些特点，作以下规定：
  1. 因目标规划问题的目标函数都是最小化，以 $c_j - z_j \geq 0$, j=1,2,⋯,n 为最优准则；
  2. 因非基变量的检验数中含有不同等级的优先因子，即：

$$c_j - z_j = c_j - C_B\mathrm{B}^{-1}\mathrm{P}_j = \sum a_{kj}P_k \quad j = 1,2,\cdots,n; k = 1,2,\cdots,K$$

因权重 $P_1 >> P_2 >> \ldots >> P_K$，故从每个检验数的整体来看，检验数的正、负首先决定于P_1的系数α_{1j}的正、负；若$\alpha_{1j}=0$，则此检验数的正、负就决定于P_2的系数α_{2j}的正、负；下面依此类推。

5.3 解目标规划的单纯形法

- 解目标规划问题的单纯形法的计算步骤：
  - (1) 建立初始单纯形表，在表中将检验数行按优先因子个数分别列成*K*行，置*k*=1，即对应优先因子行中的第1行开始计数；
  - (2) 检查该行中是否存在负数，且对应的前*k*-1行的系数是0：若有取其中最小者对应的变量为换入变量，转(3)；若无负数，则转(5)；
  - (3) 按最小比值规则确定换出变量，当存在两个或两个以上相同的最小比值时，选取具有较高优先级别的变量为换出变量；
  - (4) 按单纯形法进行基变换运算，建立新的计算表，返回(2)；
  - (5) 当*k*=*K*时，计算结束，表中的解即为满意解。否则置*k*=*k*+1，返回到(2)。
- 注：当有非基变量的检验数为0时，该问题有多重解。

5.3 解目标规划的单纯形法

– 例4 试用单纯形法求解例2。
  - 解：标准化数学模型为：

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_s = 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, x_s, d_i^-, d_i^+ \geq 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

(1)取x_s, d_1^-, d_2^-, d_3^-为初始基变量，列初始单纯形表：

c_j							P_1	P_2	P_2	P_3		θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	X_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	x_s	11	2	1	1							
	d_1^-	0	1	−1		1	−1					
P_2	d_2^-	10	1	[2]				1	−1			10/2
P_3	d_3^-	56	8	10						1	−1	
$c_j - z_j$		P_1					1					
		P_2	−1	−2					2			
		P_3	−8	−10							1	

5.3 解目标规划的单纯形法

– 检验数的求法：

$$\sigma_1 = c_1 - z_1 = 0 - (0,0,P_2,P_3)\begin{bmatrix}2\\1\\1\\8\end{bmatrix} = -P_2 - 8P_3$$

$$\sigma_2 = c_2 - z_2 = 0 - (0,0,P_2,P_3)\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\10\end{bmatrix} = -2P_2 - 10P_3$$

$$\sigma_5 = c_5 - z_5 = P_1 - (0,0,P_2,P_3)\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\0\end{bmatrix} = P_1$$

以下略，可求得$\sigma_7 = 2P_2, \sigma_9 = P_3$

5.3 解目标规划的单纯形法

– 例4 试用单纯形法求解例2。
  - 解：标准化数学模型为：

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_s = 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, x_s, d_i^-, d_i^+ \geq 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

(1)取x_s, d_1^-, d_2^-, d_3^-为初始基变量，列初始单纯形表：

c_j							P_1	P_2	P_2	P_3		θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	X_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	x_s	11	2	1	1							
	d_1^-	0	1	−1		1	−1					
P_2	d_2^-	10	1	[2]				1	−1			10/2
P_3	d_3^-	56	8	10						1	−1	
$c_j - z_j$	P_1						1					
	P_2		−1	−2					2			
	P_3		−8	−10							1	

5.3 解目标规划的单纯形法

(2)取$k=1$，检查检验数的P_1行，因该行无负检验数，故转(5);

(5)因$(k=1)<K(=3)$，置$k=k+1=2$，返回到(2);

(2)查出检验数P_2行中有$-1,-2$，取$\min(-1,-2)=-2$。

它对应的变量x_2为换入变量，转入(3);

(3)在上表中计算最小比值：$\theta=\min(11/1,-,10/2,56/10)=10/2$

它对应的变量d_2^-为换出变量，转入(4);

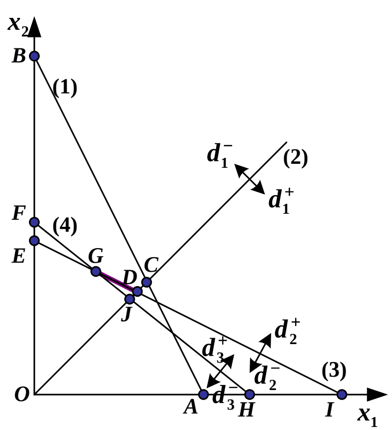
(4)进行基变换，得到下表。

c_j							P_1	P_2	P_2	P_3		θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	x_s	6	3/2		1			−1/2	1/2			
	d_1^-	5	3/2			1	−1	1/2	−1/2			
	x_2	5	1/2	1				1/2	−1/2			
P_3	d_3^-	6	[3]					−5	5	1	−1	6/3
c_j-z_j		P_1					1					
		P_2						1	1			
		P_3	−3					5	−5		1	

5.3 解目标规划的单纯形法

- 以次类推，直到得到最终表（见下表）为止。

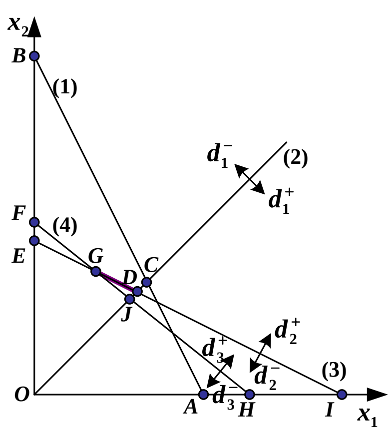
c_j							P_1	P_2	P_2	P_3		θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	x_s	3			1			2	-2	$-1/2$	$1/2$	
	d_1^-	2				1	-1	3	-3	$-1/2$	$1/2$	
	x_2	4		1				$4/3$	$-4/3$	$-1/6$	$1/6$	
	x_1	2	1					$-5/3$	$5/3$	$1/6$	$-1/3$	
$c_j - z_j$		P_1					1					
		P_2						1	1			
		P_3								1		



- 上表中得到的解$x_1^*=2$，$x_2^*=4$相当于例2图解法中的G点。检查上表中的检验数行，发现非基变量d_3^+的检验数为0，这表示存在多重解。以非基变量d_3^+为换入变量，d_1^-为换出变量，经迭代可得另一最终表。

5.3解目标规划的单纯形法

c_j							P_1	P_2	P_2	P_3		θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_s	$\boxed{d_1^-}$	$\boxed{d_1^+}$	$\boxed{d_2^-}$	$\boxed{d_2^+}$	$\boxed{d_3^-}$	d_3^+	
	x_s	1			1	−1	1	−1	1			
	d_3^+	4				2	−2	6	−6	−1	1	
	x_2	10/3		1		−1/3	1/3	1/3	−1/3			
	x_1	10/3	1			2/3	−2/3	1/3	−1/3			
$c_j - z_j$		P_1					1					
		P_2						1	1			
		P_3								1		



- 上表中得出另一个解$x_1^*=10/3$，$x_2^*=10/3$就是例2图解法中的D点。
- G、D两点的凸线性组合都是上例的满意解。

5.4 应用举例

– 例5 某单位领导在考虑本单位职工的升级调资方案时，依次遵守以下规定：
  - 不超过年工资总额3000万元；
  - 每级的人数不超过定编规定的人数；
  - II，III级的升级面尽可能达到现有人数的20%，且无越级提升；
  - III级不足编制的人数可录用新职工，又I级的职工中有10%要退休。

– 有关资料在下表中，问该领导应如何拟定一个满意方案。

等级	工资额（万元/年）	现有人数	编制人数
I	10	100	120
II	7.5	120	150
III	5	150	150
合计		370	420

5.4 应用举例

– 解：

设x_1, x_2, x_3分别表示提升到I, II级和新录用到III级的新职工人数。

对各条目标确定优先权因子为：

P_1——不超过年工资总额3000万元；

P_2——每级的人数不超过定编规定的人数；

P_3——II，III级的升级面尽可能达到现有人数的20%

– 建立目标约束为：

$P1$：年工资总额不超过3000万元

$$10(100-100\times 10\% + x_1) + 7.5(120 - x_1 + x_2) + 5(150 - x_2 + x_3) + d_1^- - \boxed{d_1^+} = 3000$$

$$(10-7.5)x_1 + (7.5-5)x_2 + 5x_3 + d_1^- - d_1^+ = 3000 - 900 - 900 - 750$$

$$2.5x_1 + 2.5x_2 + 5x_3 + d_1^- - d_1^+ = 450$$

5.4 应用举例

– 每级的人数不超过定编规定的人数:

$$I级:100(1-10\%)+x_1+d_2^- - \boxed{d_2^+} = 120 \qquad x_1+d_2^- - d_2^+ = 30$$

$$II级:120-x_1+x_2+d_3^- - \boxed{d_3^+} = 150 \quad \Rightarrow \quad -x_1+x_2+d_3^- - d_3^+ = 30$$

$$III级:150-x_2+x_3+d_4^- - \boxed{d_4^+} = 150 \qquad -x_2+x_3+d_4^- - d_4^+ = 0$$

– II，III级升级面尽可能达到现有人数的20%:

$$II级: x_1+\boxed{d_5^-}-d_5^+ = 120\times 20\% \quad \Rightarrow \quad x_1+d_5^- - d_5^+ = 24$$

$$III级: x_2+\boxed{d_6^-}-d_6^+ = 150\times 20\% \qquad x_2+d_6^- - d_6^+ = 30$$

– 目标函数:

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2\left(d_2^+ + d_3^+ + d_4^+\right) + P_3\left(d_5^- + d_6^-\right)$$

– 整理得到如下的目标规划模型：

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^+ + d_3^+ + d_4^+) + P_3(d_5^- + d_6^-)$$

$$\begin{cases} 2.5x_1 + 2.5x_2 + 5.0x_3 + d_1^- - d_1^+ = 450 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 30 \\ -x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 30 \\ -x_2 + x_3 + d_4^- - d_4^+ = 0 \\ x_1 + d_5^- - d_5^+ = 24 \\ x_2 + d_6^- - d_6^+ = 30 \\ x_1, x_2, x_3, d_i^-, d_i^+ \geqslant 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, 6) \end{cases}$$

5.4 应用举例

– 可用单纯形法求解该目标规划模型得到满意解（过程略）如下：

变量	含义	解
x_1	晋升到I级的人数	24
x_2	晋升到II级的人数	30
x_3	新招收到III级的人数	30
d_1^-	工资总额的结余额	16.5（万元）
d_2^-	I级缺编人数	6
d_3^-	II级缺编人数	24
d_4^-	III级缺编人数	0
d_5^+	II级超编人数	0
d_6^+	III级超编人数	0

5.4 应用举例

例6 已知有三个产地给四个销地供应某种产品，产销地之间的供需量和单位运价如下表。有关部门在研究调运方案时依次考虑以下七项目标，并规定其相应的优先等级：

- P_1——B_4是重点保护单位，必须全部满足要求；
- P_2——A_3向B_1提供的产量不少于100；
- P_3——每个销地的供应量不小于其需要量的80%；
- P_4——所订调运方案的总运费不超过最小运费调运方案的10%；
- P_5——因路段问题，尽量避免安排将A_2的产品运往B_4；
- P_6——给B_1和B_3的供应率要相同；
- P_7——力求总运费最省。

– 试求满意的调度方案。

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	5	2	6	7	300
A_2	3	5	4	6	200
A_3	4	5	2	3	400
销量	200	100	450	250	900/1000

5.4 应用举例

– 解：先用表上作业法求得最小运费方案，此时最小运费为2950元。

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	200	100			300
A_2	0		200		200
A_3			250	150	400
虚设点				100	100
销量	200	100	450	250	1000/1000

– 供应约束：

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 300$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\le 200$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\le 400$$

– 需求约束：

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+d_1^- - d_1^+ = 200$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+d_2^- - d_2^+ = 100$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+d_3^- - d_3^+ = 450$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+d_4^- - d_4^+ = 250$$

P_1: B_4是重点保护单位，必须全部满足要求；

5.4 应用举例

– A_3向B_1提供的产量不少于100：　$x_{31}+d_5^- - d_5^+ = 100$

– 每个销地的供应量不少于其需求量的80%：

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+d_6^- - d_6^+ = 200\times 80\%$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+d_7^- - d_7^+ = 100\times 80\%$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+d_8^- - d_8^+ = 450\times 80\%$$

$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+d_9^- - d_9^+ = 250\times 80\%$$

– 调运方案的总运费不超过最小运费的10%：

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij}+d_{10}^- - d_{10}^+ = 2950\times(1+10\%)$$

– 因路段问题，尽量避免安排将A_2的产品运往B_4：

$$x_{24}+d_{11}^- - d_{11}^+ = 0$$

– 给B_1和B_3的供应率要相同：

$$(x_{11}+x_{21}+x_{31})-\frac{200}{450}(x_{13}+x_{23}+x_{33})+d_{12}^- - d_{12}^+ = 0$$

5.4 应用举例

– 力求总运费最省：

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} + d_{13}^{-} - d_{13}^{+} = 2950$$

– 目标函数为：

$$\min z = P_1 d_4^{-} + P_2 d_5^{-} + P_3 (d_6^{-} + d_7^{-} + d_8^{-} + d_9^{-}) + P_4 d_{10}^{+} + P_5 d_{11}^{+} + P_6 (d_{12}^{-} + d_{12}^{+}) + P_7 d_{13}^{+}$$

– 计算结果可得：（过程略）

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1		100		200	300
A_2	90		110		200
A_3	100		250	50	400
虚设点	10		90		100
销量	200	100	450	250	1000/1000

– 总运费：3X90+4X100+2X100+4X110+2X250+7X200+3X50

= 3360元

5.5 使用计算机工具求解线性目标规划

- 5.5.1 使用编程语言
- 5.5.2 使用Matlab

5.5.1 使用编程语言

- 使用编程语言：

与单纯形法的编程语言实现类似。

- 输入：

1. 目标规划的初始单纯形表
2. K的值
3. 初始基变量选择

- 输出：

1. 目标规划的一个满意解。

- 本质：

将单纯形法的计算步骤通过编程实现

- 解目标规划问题的单纯形法的计算步骤：
  - (1) 建立初始单纯形表，在表中将检验数行按优先因子个数分别列成*K*行，置*k*=1；
  - (2) 检查该行中是否存在负数，且对应的前*k*-1行的系数是0：若有取其中最小者对应的变量为换入变量，转(3)；若无负数，则转(5)；
  - (3) 按最小比值规则确定换出变量，当存在两个或两个以上相同的最小比值时，选取具有较高优先级别的变量为换出变量；
  - (4) 按单纯形法进行基变换运算，建立新的计算表，返回(2)；
  - (5) 当*k*=*K*时，计算结束，表中的解即为满意解。否则置*k*=*k*+1，返回到(2)。

使用编程语言

- Java简单例子（注意与第二章单纯形法的区别）

```
while (true) {
        min = mini(a[0], k);//前k行最小的检验数（2）
        if (min == 0) {//所有检验数都大于等于0（5）
                if (k == K) break;
                k++;//k加一
                continue;//加一之后继续计算（转2）
        }
        calculateth(a, th, min);//计算θ的值（3）
        minth = mini(th); //确定换出变量（3）
        //if (min == 0) {//对应的系数矩阵是否全部小于等于0
        //      writer.write("无界解\r\n");//返回无界解
        //      break;
        //} //删除关于无界解的判断
        transform(a, min, minth, x);//根据换入换出变量对单纯
                                    //形表进行变换（4）
}
```

5.5.2 使用Matlab

- 使用MATLAB
  - 例2 将例1依次考虑以下目标：产品II的产量不低于产品I；充分利用台时不加班；利润额不小于56元，求决策方案。
    - 解：

原问题线性规划模型：

$$\max\ z = 8x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 11 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

化为标准型：

$$\min\ z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_s = 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, x_s, d_i^-, d_i^+ \geqslant 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

使用Matlab

(0) 初始化算法

```
[m, n] = size(A); % m ×n
assert(n>m);
K = priors; % 优先因子的个数
P = sym('P%d', [1,K]); % 创建符号变量
c_ = sym(zeros(1, n));
for i = 1 : n
    if c(i) ~= 0
        c_(i) = P(c(i));
    end
end
k = 1;
```

使用Matlab

(1) 建立初始单纯形表，在表中将检验数行按优先因子个数分别列成K行，置k=1

```
C_B = c_(X_B); % value coeff. of X_B
z_j= C_B * A; % 1×n
sigma_j= c_ - z_j; % 1×n

%产生不同优先因子下的检验数
sigma = zeros(K, n);
tmp= eye(K);
for t1 = 1:K
    for t2 = 1:n
        sigma(t1, t2) = subs(sigma_j(t2), P(1:K), tmp(t1,:));
    end
end
```

使用Matlab

(2) 检查该行中是否存在负数，且对应列的前k-1行的系数是0.若有负数，取其中最小者对应的变量为换入变量，转(3)。若无负数，则转(5)。

```
if k==1
    idxs = find(sigma(k,:)<0);
else
    idxs = find(sigma(k,:)<0 & all(sigma(1:k-1,:)==0, 1));
end
l_in = find(sigma(k,:) == min(sigma(k,idxs))); % 换入变量
```

使用Matlab

(3) 按最小比值规则确定换出变量，当存在两个和两个以上相同的最小比值时，选取具有较高优先级的变量为换出变量。

```
Theta = zeros(m, 1);
for i = 1 : m
    if (A(i, l_in) > 0)
        Theta(i) = b(i) / A(i, l_in);
    else
        Theta(i) = inf;
    end
end
% 有多个最小比值相同时，取较高优先级的变量
l_out_can = find(Theta == min(Theta));
[~, w] = max(subs(C_B(l_out_can), P(1:K), 1:K));
l_out = l_out_can(w);
X_B(l_out) = l_in;
```

使用Matlab

(4) 按单纯形法进行基变换运算，建立新的计算表，返回(2)。

```
E = [b,A];
E(l_out, :) = E(l_out, :) / E(l_out, l_in+1);
for i = 1:m
     if(i == l_out)
          continue;
     end
     while(1)
          E(i,:) = E(i, :) - E(i, l_in+1) * E(l_out, :);
          if(E(i, l_in+1) == 0)
               break;
          end
     end
     b = E(1:m, 1);
     A = E(1:m, 2:n+1);
end
```

使用Matlab

(5) 当k=K时，计算结束。表中的解即为满意解。否则置k=k+1，返回(2)

```
while(min(sigma(k,:)) >= 0)
    if(k == K)
        X = zeros(1,n);
        for i=1:m
            X(X_B(i)) = b(i);
        end
        z = (c_.*X);
        break;
    else
        k = k+1;
        continue;
    end
end
```

本章完