第七周综合整理

这一次的整理呢，主要分为两部分内容，一个是针对近期一些童鞋提出的关于理解第三章相关内容遇到的小困难，另外呢是整理一点关于勒让德函数部分的例题。

● **关于第三章的理解难点**

在说这个问题之前，我们首先回顾一下这门课程的体系结构（具体的呢请参见第五次习题课的讲稿）。

我们这门课主要学习的是基于物理模型构造定解问题以及对于由三类常见方程构成的定解问题的求解，其中以求解定解问题为主。那么，基于这样的认识，我们可以选择合适的学习方法。

对于这门课的主要内容——求解定解问题的方法，主要分为以下几种：

✧ 行波法

✧ 分离变量法

✧ 积分变换法

✧ 基本解方法

大家会发现，每种方法分别对应教材的一章内容，那，第三章嘞？

别急，今天要讨论的就是这个问题~

第三章呢，主要内容叫做特殊函数。我们通过广义幂级数法求解柱坐标系下的分离变量得到的固有值问题，并且得到了解，我们将其称作贝塞尔函数，并且基于母函数和展开式讨论其性质并得到递推公式。对于勒让德函数，我们通过学习了解到它是球坐标系下分离变量得到的固有值问题的解，并且同样通过母函数和展开式来研究其性质并且得到递推公式。

那么，应该怎样理解和学习这一章呢?

我们应该认识到，这一章的主要内容是关于柱坐标系和球坐标系下分离变量得到的固有值问题的求解，也就是说，这一章研究的内容仍然属于分离变量法，只不过是在讨论其中固有值问题的求解，所以理论基础仍然是施刘定理。而教材上所涉及的两类问题的时候给出了一些收敛性定理，其实也许也可以从施刘定理角度出发来认识这个问题。只要满足施刘定理，那么固有函数系就是完备的，也就是任何函数都可以在上面展开，展开式的级数形式是收敛的。

另外，关于母函数、递推公式等的应用，我的总结是：求解高阶函数及其导数的积分问题一般采用递推公式，对于无法应用递推式求解的问题一般会考虑应用母函数或者母函数的积分表达。

聊天室：

- 一堆递推公式，源少，我们应该怎么记忆鸭?

  我觉得呢，可以从递推公式来源出发，其实这些递推公式从根本上来讲，都是从对级数表达进行求导得到，特别地，对于勒让德函数，对母函数以及其级数表达的等式分别作两次求导，一次是关于 x，一次是关于 t。然后呢，我们作比较系数就可以得到两个基本的递推式，之后呢，对这两个递推式作恒等变形可以得到其他递推式，关于勒让德函数的递推式推导有在群里发过，大家如果有需要可以参考一下。

  虽然考试可能会给出，但是如果可以还是要尽量理解，这样考试的时候会更熟练，并且知道在给出的茫茫公式里怎样一眼发现它。

- 咋用递推公式嘞?

一般这个递推公式都是用在求解一些积分，那么，核心方法就是分部积分法。在做分部积分前我们要考虑怎样选择合适的组合以实现我们的目标，所以嘞，有的时候，我们会考虑用原函数和导函数的递推，把原函数替换掉，然后把导函数扔到微分算子后面。这样，就可以构成了一个积分递推式。

关于怎样利用分部积分法，以及怎么利用分部积分构造递推求解定积分，大家可以参考之前发的文件，比如积分技巧总结，或者之前的某一次的整理。

另外，特别地，大家要注意勒让德函数的奇偶性，在对称区间积分的时候奇函数的积分结果为 0。

- 呐，先聊到这，大家如果有啥问题可以随时联系~

- **例题**

例 9.5 计算积分 $\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_k'(x)\,\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{d}x$.

解 容易判断，当 $k+l$ 为奇数时积分一定为 0，故下面只需讨论 $k+l$ 为偶数的情形. 而且由于 k 和 l 的任意性，不妨假定 $k \geqslant l$. 于是，因为 $\mathrm{P}_l''(x)$ 是 $l-2$ 次多项式，故一定有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_k'(x)\,\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{P}_k(x)\,\mathrm{P}_l'(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_k(x)\,\mathrm{P}_l''(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{P}_k(x)\,\mathrm{P}_l'(x)\Big|_{-1}^{1}.\end{aligned}$$

为了求出 $\mathrm{P}_l'(\pm 1)$，可在 Legendre 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x}\right] + l(l+1)\mathrm{P}_l(x) = 0$$

中代入 $x = \pm 1$，有

$$\pm 2\mathrm{P}_l'(\pm 1) = l(l+1)\mathrm{P}_l(\pm 1), \qquad \text{即} \qquad \mathrm{P}_l'(\pm 1) = (\pm)^{l-1}\frac{l(l+1)}{2}.$$

所以就求得

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_k'(x)\,\mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} l(l+1), & k+l = \text{偶数，且 } k \geqslant l, \\ k(k+1), & k+l = \text{偶数，且 } l \geqslant k, \\ 0, & k+l = \text{奇数}. \end{cases} \tag{9.118}$$

例 9.6 计算积分 $\int_0^1 x^\alpha \mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{d}x$，$\alpha > -1$.

解 本积分需要采用一种特殊的办法计算. 令

$$I_l = \int_0^1 x^\alpha \mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{d}x, \qquad J_l = \int_0^1 x^{\alpha+1} \mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{d}x,$$

利用递推关系

$$(2l-1)x\mathrm{P}_{l-1}(x) = l\mathrm{P}_l(x) + (l-1)\mathrm{P}_{l-2}(x),$$

就能得到

$$\begin{aligned} lI_l &\equiv l\int_0^1 x^\alpha \mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^\alpha \Big[(2l-1)x\mathrm{P}_{l-1}(x) - (l-1)\mathrm{P}_{l-2}(x)\Big]\mathrm{d}x \\ &= (2l-1)J_{l-1} - (l-1)I_{l-2}. \end{aligned} \tag{9.119a}$$

再利用递推关系 $l\mathrm{P}_l(x) = x\mathrm{P}_l'(x) - \mathrm{P}_{l-1}'(x)$，又能得到

$$\begin{aligned} lJ_l &\equiv l\int_0^1 x^{\alpha+1} \mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\alpha+1}\Big[x\mathrm{P}_l'(x) - \mathrm{P}_{l-1}'(x)\Big]\mathrm{d}x \\ &= x^{\alpha+2}\mathrm{P}_l(x)\Big|_0^1 - (\alpha+2)\int_0^1 x^{\alpha+1}\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad - x^{\alpha+1}\mathrm{P}_{l-1}(x)\Big|_0^1 + (\alpha+1)\int_0^1 x^\alpha \mathrm{P}_{l-1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -(\alpha+2)J_l + (\alpha+1)I_{l-1}, \end{aligned}$$

即

$$(l+\alpha+2)J_l = (\alpha+1)I_{l-1} \quad \text{或写成} \quad (l+\alpha+1)J_{l-1} = (\alpha+1)I_{l-2}. \tag{9.119b}$$

与 (9.119a) 式联立，消去 J_{l-1}，就得到 I_l 所满足的递推关系

$$(l+\alpha+1)I_l = -(l-\alpha-2)I_{l-2}. \tag{9.119c}$$

下面需要区分 l 为偶数与奇数两种情形:

$$\begin{aligned} I_{2l} &= -\frac{2l-\alpha-2}{2l+\alpha+1}I_{2l-2} = (-1)^2\frac{2l-\alpha-2}{2l+\alpha+1}\frac{2l-\alpha-4}{2l+\alpha-1}I_{2l-4} \\ &= \cdots = (-1)^l\frac{2l-\alpha-2}{2l+\alpha+1}\frac{2l-\alpha-4}{2l+\alpha-1}\cdots\frac{-\alpha}{\alpha+3}I_0, \qquad \alpha>-1; \\ I_{2l+1} &= -\frac{2l-\alpha-1}{2l+\alpha+2}I_{2l-1} = (-1)^2\frac{2l-\alpha-1}{2l+\alpha+2}\frac{2l-\alpha-3}{2l+\alpha}I_{2l-3} \\ &= \cdots = (-1)^l\frac{2l-\alpha-1}{2l+\alpha+2}\frac{2l-\alpha-3}{2l+\alpha}\cdots\frac{-\alpha+1}{\alpha+4}I_1, \qquad \alpha>-2. \end{aligned}$$

因为

$$I_0 = \int_0^1 x^{\alpha} \mathrm{P}_0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}, \qquad \alpha > -1, \tag{9.120a}$$

$$I_1 = \int_0^1 x^{\alpha} \mathrm{P}_1(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+2}, \qquad \alpha > -2, \tag{9.120b}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{\alpha} \mathrm{P}_{2l}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{(-1)^l}{2} \frac{\Gamma\left(l-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(l+\dfrac{\alpha+3}{2}\right)} \\ &= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{\alpha+1}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(l-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(l+\dfrac{\alpha+3}{2}\right)} \sin\frac{\pi\alpha}{2}, \quad \alpha > -1, \end{aligned} \tag{9.121a}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{\alpha} \mathrm{P}_{2l+1}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{(-1)^l}{2} \frac{\Gamma\left(l-\dfrac{\alpha-1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\dfrac{\alpha-1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}+1\right)}{\Gamma\left(l+\dfrac{\alpha}{2}+2\right)} \\ &= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{\alpha+1}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(l+\dfrac{1-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(l+2+\dfrac{\alpha}{2}\right)} \cos\frac{\pi\alpha}{2}, \quad \alpha > -2, \end{aligned} \tag{9.121b}$$

或者合并成

$$\int_0^1 x^{\alpha} \mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2^{\alpha+1}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\dfrac{l-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{l+\alpha+3}{2}\right)} \sin\frac{l+\alpha}{2}\pi. \tag{9.121c}$$

不妨列出 α 取特殊值的几种情形:

$$\int_0^1 x^{-1/2} \mathrm{P}_{2l}(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^l \frac{2}{4l+1}, \tag{9.122a}$$

$$\int_0^1 x^{1/2} \mathrm{P}_{2l}(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{l+1} \frac{2}{(4l-1)(4l+3)}, \tag{9.122b}$$

$$\int_0^1 x^{-3/2} \mathrm{P}_{2l+1}(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^l 2, \tag{9.122c}$$

$$\int_0^1 x^{-1/2} \mathrm{P}_{2l+1}(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^l \frac{2}{4l+3}, \tag{9.122d}$$

$$\int_0^1 x^{1/2} \mathrm{P}_{2l+1}(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^l \frac{2}{(4l+1)(4l+5)}. \tag{9.122e}$$

下面介绍另一种做法[1]. 其特点是只用到不多的简单计算，而更多的是运用逻辑推理. 这反映了我们对于此积分结果的更深理解.

我们首先注意到 $\mathrm{P}_l(x)$ 是 l 次多项式，且只含偶次幂或奇次幂，共 $[l/2]+1$ 项：

$$\mathrm{P}_l(x)=a_0x^l+a_1x^{l-2}+a_2x^{l-4}+\cdots,$$

所以一定有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^\alpha \mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{a_0}{\alpha+l+1}+\frac{a_1}{\alpha+l-1}+\frac{a_2}{\alpha+l-3}+\cdots\\ &= \frac{f(\alpha)}{(\alpha+l+1)(\alpha+l-1)(\alpha+l-3)\cdots},\end{aligned}$$

其中的分母是 α 的 $[l/2]+1$ 次多项式，分子 $f(\alpha)$ 是 α 的 $[l/2]$ 次多项式. 但因为 $\mathrm{P}_l(1)=1$，所以 $a_0+a_1+a_2+\cdots=1$，即 $f(\alpha)$ 的最高次幂 $\alpha^{[l/2]}$ 的系数必为 1. 再注意当 $\alpha=l-2, l-4,\cdots$ 时，

$$\int_0^1 x^\alpha \mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 x^\alpha \mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

因此 $f(\alpha)$ 作为 α 的多项式，就一定含有 $(\alpha-l+2), (\alpha-l+4),\cdots$ 等因子，即

$$f(\alpha)=(\alpha-l+2)(\alpha-l+4)\cdots,$$

这里的连乘积正好是 $[l/2]$ 个因子相乘，最后一项为 α 或 $\alpha-1$，视 l 为偶数或奇数而定. 所以我们就得到

$$\int_0^1 x^\alpha \mathrm{P}_{2l}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{(\alpha-2l+2)(\alpha-2l+4)\cdots\alpha}{(\alpha+2l+1)(\alpha+2l-1)\cdots(\alpha+1)}, \tag{9.123a}$$

$$\int_0^1 x^\alpha \mathrm{P}_{2l+1}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{(\alpha-2l+1)(\alpha-2l+3)\cdots(\alpha-1)}{(\alpha+2l+2)(\alpha+2l)\cdots(\alpha+2)}. \tag{9.123b}$$

容易将这些结果化为 (9.121) 式的形式.

例 9.7 计算积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{P}_{2l}(x)}{(1+kx^2)^{l+3/2}}\mathrm{d}x$，其中 l 为自然数，$-1<k<1$.

解 将被积函数中的 $(1+kt^2)^{-(l+3/2)}$ 作 Taylor 展开，并逐项积分，得

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{P}_{2l}(x)}{(1+kx^2)^{l+3/2}}\mathrm{d}x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-k)^m}{m!}\frac{\Gamma(l+m+3/2)}{\Gamma(l+3/2)}\int_0^1 x^{2m}\mathrm{P}_{2l}(x)\,\mathrm{d}x.$$

因为

$$\int_0^1 x^{2m}\mathrm{P}_{2l}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 x^{2m}\mathrm{P}_{2l}(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad m<l,$$

所以

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{P}_{2l}(x)}{(1+kx^2)^{l+3/2}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-k)^{l+n}}{(l+n)!}\frac{\Gamma(2l+n+3/2)}{\Gamma(l+3/2)}\int_0^1 x^{2(l+n)}\mathrm{P}_{2l}(x)\,\mathrm{d}x.$$

代入例 9.6 中的结果，并将级数求和，即得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{P}_{2l}(x)}{(1+kx^2)^{l+3/2}}\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-k)^{l+n}}{(l+n)!}\frac{\Gamma(2l+n+3/2)}{\Gamma(l+3/2)}\cdot\frac{1}{2}\frac{(l+n)!}{n!}\frac{\Gamma(l+n+1/2)}{\Gamma(2l+n+3/2)}\\ &= \frac{(-1)^k}{2l+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-k)^n}{n!}\frac{\Gamma(l+n+1/2)}{\Gamma(l+1/2)}\\ &= \frac{(-1)^l}{2l+1}\frac{k^l}{(1+k)^{l+1/2}}.\end{aligned} \tag{9.124}$$

例 9.8 计算积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_{l+1}(x)\,\mathrm{d}x$.

解 可以直接计算此积分. 当 l 为偶数 $2n$ 时，将 Legendre 多项式的递推关系

$$(4n+1)x\mathrm{P}_{2n}(x) = (2n+1)\mathrm{P}_{2n+1}(x)+2n\mathrm{P}_{2n-1}(x)$$

代入原积分，有

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{P}_{2n}(x)\,\mathrm{P}_{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1\left[\frac{4n+1}{2n+1}\mathrm{P}_{2n}(x) - \frac{2n}{2n+1}\frac{1}{x}\mathrm{P}_{2n-1}(x)\right]\mathrm{P}_{2n}(x)\,\mathrm{d}x,$$

因为 $\mathrm{P}_{2n-1}(x)/x$ 是 $2n-2$ 次多项式，它一定与 $\mathrm{P}_{2n}(x)$ 正交，所以

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{P}_{2n}(x)\,\mathrm{P}_{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4n+1}{2n+1}\int_{-1}^1\left[\mathrm{P}_{2n}(x)\right]^2\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}. \tag{9.126a}$$

若 l 为奇数 $2n+1$，则因为 $\mathrm{P}_{2n+1}(x)/x$ 是 $2n$ 次多项式，与 $\mathrm{P}_{2n+2}(x)$ 正交，所以

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{P}_{2n+1}(x)\,\mathrm{P}_{2n+2}(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{9.126b}$$

的递推关系

$$I_l = \int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{P}_l(x)\left[\frac{2l+1}{l+1}x\mathrm{P}_l(x) - \frac{l}{l+1}\mathrm{P}_{l-1}(x)\right]\mathrm{d}x = \frac{2}{l+1} - \frac{l}{l+1}I_{l-1},$$

或者再重复应用此式于 I_{l-1}，从而进一步得到 I_l 与 I_{l-2} 之间的递推关系

$$I_l = \frac{2}{l+1} - \frac{l}{l+1}\left(\frac{2}{l} - \frac{l-1}{l} I_{l-2}\right) = \frac{l-1}{l+1} I_{l-2}.$$

所以

$$I_{2l} = \frac{2l-1}{2l+1} I_{2l-2} = \frac{2l-1}{2l+1}\frac{2l-3}{2l-1} I_{2l-4} = \cdots = \frac{1}{2l+1} I_0,$$
$$I_{2l+1} = \frac{2l}{2l+2} I_{2l-1} = \frac{2l}{2l+2}\frac{2l-2}{2l} I_{2l-3} = \cdots = \frac{2}{2l+2} I_1.$$

直接求出 I_0 与 I_1：

$$I_0 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x} \mathrm{P}_0(x)\,\mathrm{P}_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2,$$

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x} \mathrm{P}_1(x)\,\mathrm{P}_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_2(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

同样也能得到 (9.126) 式的结果.

例 9.9 计算积分 $\int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^n}{(1-2xt+t^2)^{n+1/2}}\mathrm{d}x$，其中 n 为自然数，$|t| \neq 1$.

解 先假设 $t \neq 0$，于是

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^n}{(1-2xt+t^2)^{n+1/2}}\mathrm{d}x &= \frac{1}{(2n-1)t}\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{n-1/2}}(1-x^2)^n\Big|_{-1}^{1} \\
&\quad - \frac{1}{(2n-1)t}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{n-1/2}}\frac{\mathrm{d}(1-x^2)^n}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{(2n-1)t}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{n-1/2}}\frac{\mathrm{d}(1-x^2)^n}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^2}{(2n-1)(2n-3)}\frac{1}{t^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{n-3/2}}\frac{\mathrm{d}^2(1-x^2)^n}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x \\
&= \cdots \\
&= \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!}\frac{1}{t^n}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}^n(1-x^2)^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2^n n!}{(2n-1)!!}\frac{1}{t^n}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{P}_n(x)}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

当 $|t| < 1$ 时，利用 Legendre 多项式的生成函数展开式，就可以得到

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^n}{(1-2xt+t^2)^{n+1/2}}\mathrm{d}x &= \frac{2^n n!}{(2n-1)!!}\frac{1}{t^n}\sum_{l=0}^{\infty} t^l \int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2^{n+1} n!}{(2n+1)!!} = 2^{2n+1}\frac{n!\,n!}{(2n+1)!}. \qquad (9.127\mathrm{a})
\end{aligned}$$

直接计算可以证明，当 $t = 0$ 时此结果亦成立. 若 $|t| > 1$，同样可得

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^n}{(1-2xt+t^2)^{n+1/2}}\mathrm{d}x &= \frac{2^n n!}{(2n-1)!!}\frac{1}{t^n}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{t^{l+1}} \int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2^{n+1} n!}{(2n+1)!!}\frac{1}{t^{2n+1}} = 2^{2n+1}\frac{n!\,n!}{(2n+1)!}\frac{1}{t^{2n+1}}. \qquad (9.127\mathrm{b})
\end{aligned}$$

半球的球面保持温度 u_0,半球底面保持绝热,试求这个半球里的稳定温度分布.

解 其定解问题为

$$\begin{cases}\Delta u = 0,\ \left(r < a,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2},\ 0 < \varphi < 2\pi\right) & ① \\ u\mid_{r=a} = u_0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} & ② \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 & ③\end{cases}$$

这仍是一轴对称的问题.其方程①的解为 Legendre 多项式的展开式,其展开区间是 $x\in[-1,1]$,故应将该半球问题延拓为全球问题来求解.即,考虑

$$\begin{cases}\Delta u = 0,\ r < a & ④ \\ u\mid_{r=a} = f(\theta) = \begin{cases} u_0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ u_0,\ \dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi \end{cases} & ⑤ \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 & ⑥\end{cases}$$

其中,边界条件②经延拓后之所以成⑤式的形式,是因为在边界 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 上有第二类齐次边界条件 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0$,故类似于第二篇行波法一章中半无界问题的处理,此时应将上半球上的 $u|_{r=a}=u_0$,偶延拓到下半球.当然,若 $u|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0$ 则应奇延拓到下半球.即

$$f(\theta)=\begin{cases} u_0,\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2} \\ -u_0,\ \dfrac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi \end{cases}.$$

现求解定解问题④~⑥.由④式有

$$u(r,\ \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

代入边界条件⑤得

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l a^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) = u_0$$

比较两边系数得

$$c_0 = u_0;\ c_l = 0,\ l \neq 0.$$

于是定解问题④~⑥的解为

$$u(r,\ \theta) = c_0 r^0 \mathrm{P}_0(\cos\theta) = u_0,$$

而①~③式的解即为④~⑥式的解在上半球里的部分,即

$$u(r,\ \theta) = u_0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$