

数理逻辑 第三周作业 3月3日 周二

PB18151866 龚小航

1、下面哪些符号串是谓词演算的公式？其中有没有闭式？ 【练习 14 P66】

- (1) $\forall x_1 R_1^2(f_1^1(x_1), x_1)$
- (2) $f_1^3(x_1, x_3, x_4)$
- (3) $R_1^1(x_2) \rightarrow R_1^3(x_3, c_1)$
- (4) $\neg \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$
- (5) $\forall x_2 R_1^1(x_1) \rightarrow \neg R_1^1(x_2)$
- (6) $R_1^3(f_2^3(x_1, c_2, x_2))$
- (7) $\neg R_1^1(x_1) \rightarrow R_1^1(x_2)$
- (8) $R_1^3(c_1, c_2, f_1^1(c_3))$

解：公式的形成规则是：

- ① 每个原子公式是公式；
- ② 若 p, q 是公式，则 $\neg p, p \rightarrow q, \forall x_i p$ 都是公式；
- ③ 任一公式都是上两步复合而成。

将谓词演算公式的形成规则用于本题的判断，显然：

- (2) 不是公式，没有原子公式，也没有谓词 R
 - (3) 不是公式， R_1^3 是三元谓词，但只给出两个项
 - (6) 不是公式， R_1^3 是三元谓词，但只给出一个项
- 其他 5 个都是谓词演算的公式。

在五个公式中，寻找闭式（不含自由出现的变元的公式）：

- (1) 和 (8) 是闭式,其余三个公式不是闭式。

2.在以下公式中，哪些 x_1 的出现是自由的/约束的？项 $f_1^2(x_1, x_3)$ 对这些公式中的 x_2 是不是自由的？

- (1) $\forall x_2 (R_1^2(x_1, x_2) \rightarrow R_2^2(x_2, c_1))$
- (2) $R_1^1(x_3) \rightarrow \neg \forall x_1 \forall x_2 R_1^3(x_1, x_2, c_1)$
- (3) $\forall x_1 R_1^1(x_1) \rightarrow \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$
- (4) $\forall x_2 R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \rightarrow \forall x_1 R_2^2(x_3, f_2^2(x_1, x_2))$

解：(1) 有一个 x_1 出现，它是自由的。 $f_1^2(x_1, x_3)$ 对这个公式中的 x_2 是自由的（ x_2 在其中不自由出现）
(2) 有 2 个 x_1 出现，都是约束的。 $f_1^2(x_1, x_3)$ 对这个公式中的 x_2 是自由的（ x_2 在其中不自由出现）
(3) 有 3 个 x_1 出现，前两个是约束的，最后一个自由的。
 $f_1^2(x_1, x_3)$ 对这个公式中的 x_2 是自由的（ x_2 在其中不自由出现）
(4) 有 4 个 x_1 出现，前两个是自由的，后两个是约束的。
 $f_1^2(x_1, x_3)$ 对这个公式中的 x_2 （后一个）是不自由的（ x_1 在后件中约束出现）

3. 设 t 是项 $f_1^2(x_1, x_3)$ ； $p(x_1)$ 是下面的公式。确定 t 对 $p(x_1)$ 中的 x_1 是否自由？如果是自由的，写出 $p(t)$ 。

- (1) $\forall x_1 R_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow R_1^1(x_1)$
- (2) $\forall x_1 \forall x_3 (R_1^1(x_3) \rightarrow R_1^1(x_1))$
- (3) $\forall x_2 R_1^1(f_1^1(x_2)) \rightarrow \forall x_3 R_1^3(x_1, x_2, x_3)$
- (4) $\forall x_2 R_1^3(x_1, f_1^1(x_1), x_2) \rightarrow \forall x_3 R_1^1(f_1^2(x_1, x_3))$

解：(1) t 对 $p(x_1)$ 中的 x_1 自由, $p(t) = \forall x_1 R_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow R_1^1(t)$ (约束的 x_1 不可代换)
(2) t 对 $p(x_1)$ 中的 x_1 自由, $p(t) = \forall x_1 \forall x_3 (R_1^1(x_3) \rightarrow R_1^1(x_1))$ (约束的 x_1 不可代换，但却是自由的)
(3) t 对 $p(x_1)$ 中的 x_1 不自由, t 代换入以后 x_3 是被约束的
(4) t 对 $p(x_1)$ 中的 x_1 不自由, t 代换入以后 x_3 是被约束的