中国科学技术大学

数理方程复习指导

学　　院：信息科学技术学院

专　　业：信息安全

姓　　名：高源

指导教师：谢如龙老师

目录

写给数理方程 08 班的同学们的一封信

亲爱的 2020 春数理方程 08 班的同学们，你们好:

这本《数理方程复习指导》在几个月的努力下终于和大家见面了。这学期是我第一次当助教，而且由于特殊情况我们的课堂教学、习题课讨论等过程只能在线上进行。考虑到各种原因，这一个学期在和大家的交流中我也在一直寻找合适的方法能够尽自己所能为大家提供帮助，最终能够和大家一起顺利完成这门课程的学习。

综合各种考虑，我决定制作这本《数理方程复习指导》，希望能够和大家分享学习数理方程的方法、经验，以及遇到的困难。衷心希望这本复习指导能够对大家有所帮助，也希望大家都能够圆满地完成这学期的学习。

遇到我们这个大家庭的每一个成员都让我感到幸运，衷心希望能够和大家一起变得更好。

课程综述

2.1 课程主要内容

偏微分方程的基本概念

常见偏微分方程的通解的求解

数理方程的建立过程

三类常见方程及其对应的定解问题的书写及对应的物理意义

行波法求解一维无界区域波动方程问题的基本操作

延拓法的基本思想和应用

通解法求解一类定解问题的基本操作

分离变量法求解有界区域问题的基本操作

应用特殊函数实现分离变量法在柱坐标和球坐标系下分离变量得到的固有值问题求解

傅里叶变换法求解无界区域问题的基本操作

正余弦变换的应用

拉普拉斯变换求解半无界区域问题的基本操作

基本解方法求解定解问题的基本操作

2.2 课程学习目标

掌握数理方程的基本概念

理解数理方程的建立过程

理解三类重要方程及其对应的定解问题中的元素的物理意义

熟练掌握根据自然语言描述的物理过程书写定解问题的方法

熟练掌握各种定解问题求解方法的适用范围

熟练掌握各种定解问题求解方法的具体操作

2.3 课程学习方法

熟练掌握基本概念，并且能够对定解问题进行分类，明确我们的分类是和不同求解方法的使用条件相对应的

熟练掌握定解问题的各个组成元素对应的物理意义

熟练掌握三类重要方程及其定解问题的书写

熟练掌握求解定解问题的方法的使用条件和具体操作

2.4 课程学习中蕴含的转化思想

转化思想是数学学习中的重要思想之一，其根本想法是把不熟悉的问题和熟悉的问题建立联系，进而实现求解。在这门课程中，主要学习几类偏微分方程的求解方法，其中蕴含着转化的思想，理解了这一点会有助于知识体系结构的建立和对于各种求解方法的理解。

借鉴

行波法的转化思想体现在借鉴常微分方程的定值问题求解，首先求得泛定方程通解，进而根据定解条件得到解。但由于偏微分方程的通解我们只熟悉几类常见问题，其他问题求解难度较大，所以，我们要思考，其他的转化思路，以实现能够顺利求解三类重要方程对应的定解问题

转化为常微分方程

分离变量法和积分变换法的转化思想体现在把偏微分方程的定解问题求解转化为常微分方程定值问题求解，其中分离变量法通过将解和定解条件在固有函数系上展开实现转化操作，积分变换法通过使用积分变换并利用积分变换的性质实现转化操作

转化为特殊定解问题

基本解方法的转化思想体现在将一般的定解问题转化为特殊的定解问题，结合物理意义以及叠加原理，实现转化和求解

2.5 定解问题求解方法的使用条件

在这门课程的学习中，我们主要学习求解三类重要方程对应的定解问题的方法，每种方法都有其使用条件，因而明确每种方法的使用条件会有助于在遇到定解问题时选择合适的方法。

行波法

行波法用于求解一维无界区域的波动方程问题（注意，应用延拓法可以实现将一维半无界区域波动方程的问题求解转化为一维无界区域波动方程问题求解，进而可以使用行波法；另外球对称问题可以通过对球坐标系下的方程进行函数变换转化为一维半无界区域的波动方程问题，进而再利用延拓法课可以转化为一维无界区域的波动方程问题，进而使用行波法求解）

分离变量法

分离变量法用于求解有界区域的问题，其中有界是针对于形成固有函数系的变量来说的，所以对于球外空间，θ 的定义域是有界的，因而可以做分离变量操作。

分离变量法的直接应用要求齐次方程和齐次边界。但我们可以通过固有函数系展开法、齐次化原理、特解法等方法将非齐次方程转化为齐次方程，可以用基于叠加原理的特解法将非齐次边界转化为齐次边界，进而可以利用分离变量法求解。

积分变换法

傅里叶变换法用于求解无界区域的问题，一般用于坐标变量，并且要求对应的一系列函数值在无穷远点为零

正余弦变换法用于求解半无界区域的问题，本质上仍属于傅里叶变换法，一般用于坐标变量，分别对应第一类和第二类边界条件。注意在正反变换的时候，建议严格按照定义进行求解。

拉普拉斯变换法用于求解半无界区域的问题，一般用于时间变量，大多数情况下不能用于坐标变量，无法用于求解椭圆方程。

基本解方法

基本解方法用于求解无界区域的问题，其中对于椭圆方程可以求解有界区域的问题。

2.6 数理方程课程中的三步走战略

行波法的三步走

求解偏微分方程得到通解

将定解条件代入通解中建立已知函数和未知函数关系，并用已知函数表达通解中未知函数

带入通解得到原问题的解

分离变量法的三步走

将解写成分离变量形式，选定合适变量，求解固有值问题得到固有值和固有函数系

求解其他常微分方程得到形式解，即把解在定解条件上展开

把定解条件代入形式解中确定形式解的系数，即把定解条件在固有函数系上展开

积分变换法的三步走

选取合适积分变量，进行正变换，将偏微分方程转化为常微分方程

求解像函数满足的常微分方程得到像函数

对像函数反变换得到解

基本解方法的三步走

根据原问题对应写出格林函数满足的定解问题

应用镜像法、分离变量法、积分变换法等方法求解得到格林函数

把格林函数带入解的积分表达式得到解

第一章综合复习

3.1 主要内容

偏微分方程的基本概念

常见偏微分方程的通解的求解

偏微分方程特解的求解

数理方程的建立过程

三类常见方程的书写及其对应的物理意义

定解条件的个数、物理意义

行波法求解一维无界区域波动方程问题

延拓法求解一维半无界区域波动方程问题

通解法求解定解问题

叠加原理及其应用

齐次化原理及其应用

3.2 学习目标

掌握基本概念，如方程的阶、线性方程、齐次方程等

理解对方程分类的标准和求解方程的方法的适用条件是对应的

掌握对于偏微分方程的分类，并且熟练掌握三类偏微分方程通解的求解方法

理解数理方程的建立过程，对于微元法要有基本的了解

熟练掌握三类方程的书写，以及方程中元素对应的物理意义

熟练掌握定解问题的构成原则，定解条件的个数确定方法，定解条件的物理意义

熟练掌握行波法的使用条件，以及应用于求解定解问题的具体操作

掌握延拓法在求解一维半无界区域波动方程问题中的应用，了解延拓法的思想以及奇、偶延拓的选择原因

了解通解法求解定解问题的步骤

理解叠加原理的意义及其应用

熟练掌握齐次化原理在求解非齐次发展方程中的应用

3.3 学习方法

熟练掌握基本概念，并且能够对定解问题进行分类

熟练掌握求解定解问题的方法及其使用条件

对比不同方法在求解问题时的求解过程，明确方法选择

3.4 应用变量代换求解偏微分方程通解

$$u_{xx}+2u_{xy}-3u_{xy}=0$$

解：利用变量代换将方程转化为可以直接积分求解的偏微分方程。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y)=0$$

亦即

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+3\frac{\partial}{\partial y}\right)u(x,y)=0$$

引入变量代换 $x=x(\xi,\eta),y=y(\xi,\eta)$, 使

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial}{\partial\xi}&=\tfrac{\partial}{\partial x}\tfrac{\partial x}{\partial\xi}+\tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{\partial y}{\partial\xi}=\left(\tfrac{\partial}{\partial x}-\tfrac{\partial}{\partial y}\right)A\\ \tfrac{\partial}{\partial\eta}&=\tfrac{\partial}{\partial x}\tfrac{\partial x}{\partial\eta}+\tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{\partial y}{\partial\eta}=\left(\tfrac{\partial}{\partial x}+3\tfrac{\partial}{\partial y}\right)B\end{aligned}$$

其中,A 、B 为任意常数。可令

$$\begin{cases}x=\xi+\eta\\ y=-\xi+3\eta\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \xi = \frac{3x-y}{4} \\ \eta = \frac{x+y}{4} \end{cases}$$

则方程变为

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}u(\xi,\eta) = 0$$

此时已经完成转化目标，直接积分即可得到方程的解

$$u(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

其中，$f_1(\xi)$ 和 $f_2(\eta)$ 分别为 ξ 和 η 的任意函数。

3.5 定解问题的书写

在去年的期末考试试题中出现给出自然语言描述的物理问题，要求根据对于数理方程的理解，写出对应的定解问题。这类题目要求我们对数理方程的建立、三类典型方程的书写及其物理意义、定解条件的书写及物理意义都要有一定理解。

设有一厚壁圆筒, 其初始温度为 u_0, 并设它的内表面的温度增加与时间 t 成线性关系，外表面和温度为 u_1 的介质进行热交换, 试写出其温度分布满足的定解问题。

这类问题的求解首先要明确题目所述的物理问题属于哪类问题，尤其是对于温度分布类问题，要判断题目要求求解的是某一时间段的温度分布还是稳定时刻的温度分布。

解：

$$u_t = D\Delta u = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), u|_{t=0} = u_0$$

而内表面的温度为

$$u|_{r=r_1} = at + b$$

其中, a, b 为常数。由 $u|_{t=0} = u_0$ 可求得 $b = u_0$, 故有

$$u|_{r=r_1} = at + u_0$$

由题意知周围介质的温度为 u_1, 则由 Newton 冷却定律有

$$-ku_r|_{r=r_2} = H\left(u|_{r=r_2} - u_1\right)$$

即

$$(u+hu_r)|_{r=r_2}=u_1$$

其中, $h=\frac{k}{H}, k$ 和 H 分别为热传导系数和热交换系数.

3.6 行波法求解一维无界区域弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \quad (-\infty<x<+\infty, t>0) \\ u(0,x)=\varphi(x), u_t(0,x)=\phi(x)(-\infty<x<+\infty) \end{cases}$$

利用上述变量代换法可以求得一维齐次波动方程的通解为

$$u=f(x-at)+g(x+at)$$

由所给的初始条件，就有

$$\begin{cases} u(0,x)=f(x)+g(x)=\varphi(x) \\ u_t(0,x)=-af'(x)+ag'(x)=\phi(x) \end{cases}$$

积分可得

$$-f(x)+g(x)=\frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi+c$$

联立上式，解得

$$\begin{aligned} f(x)=\tfrac{\varphi(x)}{2}-\tfrac{1}{2a}\textstyle\int_0^x \phi(\xi)\mathrm{d}\xi-\tfrac{c}{2} \\ g(x)=\tfrac{\varphi(x)}{2}+\tfrac{1}{2a}\textstyle\int_0^x \phi(\xi)\mathrm{d}\xi+\tfrac{c}{2} \end{aligned}$$

于是，我们得到了

$$\begin{aligned} u(t,x) &= f(x-at)+g(x+at) \\ &= \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\phi(\xi)\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

即为原问题的解。

3.7 一维半无界区域的弦振动方程的处理之通解法和延拓法

首先我们的想法很明确，即基于对行波法求解一维无界区域弦振动方程的理解，进行转化。有两类转化目标，即借鉴思想和直接转化为可处理的问题。这道例题的法一和法二分别是这两种思路的应用。

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0(0 < x < \infty, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

解：法一

泛定方程的通解为

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$$

故有

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

进而可得

$$af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x)$$

即

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + C$$

其中, $C = f_1(0) - f_2(0)$.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \tfrac{1}{2a}\textstyle\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \tfrac{C}{2} \\ f_2(x) &= \tfrac{1}{2}\varphi(x) - \tfrac{1}{2a}\textstyle\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi - \tfrac{C}{2} \end{aligned}$$

以上二式均是在 $0 \le x < \infty$ 的前题下推得的. 因为 $x + at$ 总是大于, 等于零的, 故有

$$f_1(x+at) = \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{C}{2}$$

至于 $x - at$ 就不一定大于零了。

(1) 若 $x - at \ge 0$, 则有

$$f_2(x-at) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{C}{2}$$

(2) 若 $x-at<0$, 则上式不能用。但将边界条件代入通解得

$$f_1'(at)+f_2'(-at)=0$$

令 $x=at$, 并对上式从 0 到 x 积分得

$$f_1(x)-f_2(-x)=C$$

即

$$f_2(-x)=f_1(x)-C(x\geq 0)$$

故

$$\begin{aligned}f_2(x-at)=&f_2[-(at-x)](at-x\geq 0)\\&=f_1(at-x)-C\\&=\frac{1}{2}\varphi(at-x)+\frac{1}{2a}\int_0^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-C\end{aligned}$$

$$u(x,t)=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\\x-at\geq 0\\\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right.\\\left.+\int_0^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right],x-at<0\end{array}\right.$$

法二:
设想将半无限长的杆, 延拓 (拼接) 成无限长的杆，并将原定解问题的初始条件看成无限长杆的纵振动的初始条件在 $0\leq x<\infty$ 中的部分 , 即将原定解问题转化为

$$\left\{\begin{array}{l}u_{tt}=a^2u_{xx}(-\infty<x<\infty,t>0)\\u(x,0)=\Phi(x)=\left\{\begin{array}{l}\varphi(x),0\leq x<\infty\\f(x),-\infty<x\leq 0\end{array}\right.\\u_t(x,0)=\Psi(x)=\left\{\begin{array}{l}\psi(x),0\leq x<\infty\\g(x),-\infty<x<0\end{array}\right.\\u_x(0,t)=0\end{array}\right.$$

则由 d'Alembert 公式立即可写出定解问题的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

其中, $f(x)$ 和 $g(x)$ 是未知的。
延拓的目标是要用延拓后的解来得到原问题的解，因此要让延拓后的解在原问题的定义域处的部分和原问题解相同。所以利用原问题的边界条件可以求得的 $u(x,t)$ 在 $0\leq$

$x < \infty$ 中的值即为原定解问题的解.

$$u_x(0,t) = \frac{1}{2}\left[\Phi'(0+at) + \Phi'(0-at)\right]$$

$$+\frac{1}{2a}[\Psi(0+at) - \Psi(0-at)] = 0$$

即

$$\frac{1}{2}\left[\Phi'(\xi) + \Phi'(-\xi)\right] + \frac{1}{2a}[\Psi(\xi) - \Psi(-\xi)] = 0(\xi \geq 0)$$

由此有 $\Phi(\xi) = \Phi(-\xi), \Psi(\xi) = \Psi(-\xi)$ 这说明满足边界条件的 Φ 和 Ψ, 均为偶函数。即

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), 0 \leq x < \infty \\ \varphi(-x), -\infty < x < 0 \end{cases}$$
$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), 0 \leq x < \infty \\ \psi(-x), -\infty < x < 0 \end{cases}$$

亦即

$$f(x) = \varphi(-x), g(x) = \psi(-x)$$

注意到 $x + at$ 总于大于等于零的, 于是有

$$\Phi(x+at) = \varphi(x+at)$$
$$\textstyle\int_0^{x+at} \Psi(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_0^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

而 $x - at$ 有可能大于, 等于或小于零。

(1) 若 $x - at \geq 0$, 则

$$\Phi(x-at) = \varphi(x-at)$$
$$\int_{x-at}^{0} \Psi(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{x-at}^{0} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

(2) 若 $x - at < 0$, 则

$$\Phi(x-at) = \varphi[-(x-at)] = \varphi(at-x)$$

$$\int_{x-at}^{0} \Psi(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{x-at}^{0} \psi(-\xi)\mathrm{d}\xi \overset{\eta=-\xi}{=} -\int_{at-x}^{0} \psi(\eta)\mathrm{d}\eta$$

即

$$\int_{x-at}^{0} \Psi(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{0}^{at-x} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

最后得到：

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi \\ x-at\geq 0 \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right. \\ \left.+\int_0^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right],x-at<0\end{cases}$$

即为原问题的解。

3.8 可以通过函数变换转化为一维无界区域波动方程问题

求圆锥杆的纵振动问题:

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x)\end{cases}$$

解: 泛定方程为：

$$\left(1-\frac{x}{h}\right)u_{xr}-\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{x}{h}\right)u_u-\frac{2}{h}u_x=0$$

我们发现这个方程并不是我们熟悉的方程，不能直接使用行波法求解。但考虑题目提示为杆的纵振动问题，并且是一维无界区域问题，所以考虑通过函数变换将方程转化为一维无界区域波动方程问题，进而可以使用行波法求解。（说明，对于这个问题，我们对方程进行分类后发现，也可以使用积分变换法或者基本解方法。只不过因为行波法求解比较简单，而且这个问题说明是一维无界区域的纵振动问题，所以考虑尝试一下通过转化来利用行波法求解。如果不想这样求解也可以直接进行积分变换等。）

考虑到各式的系数只是 x 的函数, 故可令

$$u(x,t)=w(x)v(x,t)$$

于是

$$u_x=w_xv+wv_x,u_{xx}=w_{xx}v+2w_xv_x+wv_{xx}$$
$$u_t=wv_t,u_u=wv_u$$

代入上式得

$$\left(1-\frac{x}{h}\right)wv_{tt}=a^2\left(1-\frac{x}{h}\right)wv_{xx}+\left[2a^2\left(1-\frac{x}{h}\right)w_x-\frac{2a^2}{h}w\right]v_x$$
$$+\left[a^2\left(1-\frac{x}{h}\right)w_{xx}-\frac{2a^2}{h}w_x\right]v$$

令此式中

$$2a^2\left(1-\frac{x}{h}\right)w_x-\frac{2a^2}{h}w=0$$

则

$$\frac{w_x}{w}=\frac{1}{h(1-x/h)}=\frac{1}{h-x}$$

即

$$\frac{dw}{w}=\frac{dx}{h-x}$$

两边积分，可得 w 的一个特解

$$w(x)=\frac{1}{(h-x)}$$

从而有

$$\begin{aligned}w_x&=\tfrac{1}{(h-x)^2}\\ w_{xx}&=\tfrac{2}{(h-x)^3}\end{aligned}$$

将 w 及其各阶导数代入作函数变换后的泛定方程中得到

$$v_n-a^2v_n=0$$

此方程的通解为

$$v(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)$$

于是原问题的泛定方程的通解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=w(x)v(x,t)\\&=\left[f_1(x+at)+f_2(x-at)\right]/(h-x)\end{aligned}$$

将定解条件代入泛定方程通解得

$$f_1(x)+f_2(x)=(h-x)\varphi(x)$$

和

$$a\left[f_1(x)-f_2(x)\right]/(h-x)=\psi(x)$$

即

$$f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}(h-\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+C$$

联立上式得

$$\begin{aligned}f_1(x)&=\tfrac{(h-x)\varphi(x)}{2}+\tfrac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}(h-\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+\tfrac{C}{2}\\ f_2(x)&=\tfrac{(h-x)\varphi(x)}{2}-\tfrac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}(h-\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-\tfrac{C}{2}\end{aligned}$$

所以，定解问题的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2(h-x)}\left[(h-x-at)\varphi(x+at)+(h-x+at)\varphi(x-at)+\int_{x-at}^{x+at}\frac{h-\xi}{a}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right]$$

3.9 通解法求解定解问题

通解的求解为类型：可通过函数变换转化为可直接积分类型

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=0\\ u(0,y)=\varphi(y),u(x,0)=\psi(x)\end{cases}$$

解：利用函数代换来求解泛定方程。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+u\right)=0$$

两边对 x 积分一次得

$$\frac{\partial u}{\partial y}+u=g(y)$$

其中, $g(y)$ 为任意函数, 故上述方程又可写为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{e}^{y}u\right)=\mathrm{e}^{y}g(y)$$

两边对 y 积分得

$$\mathrm{e}^{y}u=\int\mathrm{e}^{y}g(y)\mathrm{d}y+h(x)$$

于是得泛定方程的通解为

$$u(x,y)=f(y)+\mathrm{e}^{-y}h(x)$$

其中, $f(y)$ 和 $h(x)$ 为任意函数. 将定解条件代入通解，构建已知函数和未知函数的联系

$$\begin{cases}f(y)+\mathrm{e}^{-y}h(0)=\varphi(y)\\ f(0)+h(x)=\psi(x)\end{cases}$$

故有

$$h(x)=\psi(x)-f(0)$$
$$f(y)=\varphi(y)-\mathrm{e}^{-y}h(0)=\varphi(y)-\mathrm{e}^{-y}[\psi(0)-f(0)]$$

用已知函数表达未知函数并代入通解，得到定解问题的解为

$$u(x,y)=\varphi(y)+\mathrm{e}^{-y}[\psi(x)-\varphi(0)]$$

第二章综合复习

4.1 主要内容

分离变量法的基本概念以及想法来源

分离变量法的适用范围

分离变量法的具体操作

施刘方程的定义以及将一般二阶常微分方程转化为施刘方程的方法

施刘定理的成立条件

施刘定理的具体内容

非齐次方程的定解问题结合分离变量法求解

非齐次边界条件的定解问题结合分离变量法求解

非齐次方程和非齐次边界混合问题的求解

4.2 学习目标

理解分离变量法的想法来源，即转化思想

理解分离变量法的适用范围，有界区域，齐次方程，齐次边界

理解分离变量法的本质，把解和定解条件在固有函数系上展开

熟练掌握分离变量法的具体流程

熟练掌握固有值问题的书写以及求解，可以记忆不同边界条件对应的固有值问题的解

熟练掌握形式解的书写

熟练掌握利用正交性求解形式解中的系数的方法

了解施刘方程的定义以及一般二阶常微分方程转化为施刘方程的方法

了解施刘定理的成立条件

理解施刘定理的具体内容及其应用

熟练掌握非齐次问题的处理方法

4.3 学习方法

理解分离变量法所蕴含的转化思想，了解转化目标和方法

理解分离变量法的适用范围，以及具体操作

理解分离变量法的本质，把解和定解条件在固有函数系上展开

理解施刘定理的重要意义

4.4 明确齐次方程的基本概念

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} - \beta u = 0 (0 < x < l, t > 0) \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

解：遇到定解问题我们要首先明确其类型，进而选择合适的方法进行求解。首先根据 x 的定义域是有界区域判断满足分离变量法的要求。进一步看方程和边界条件是否齐次。这个问题的方程看起来会有一点点迷惑性，但是要注意，这是齐次的方程，只不过有了原函数项。而边界条件是齐次的。因此，经过分析我们确定，可以采用分离变量法。按照分离变量法的三步走战略，求解过程如下：

(1) 写出分离变量形式。令

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

代入泛定方程得

$$X(x)T'(t) - DX''(x)T(t) - \beta X(x)T(t) = 0$$

两边除 DXT 得

$$\frac{T'(t)}{DT(t)} - \frac{\beta}{D} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \mu$$

则得

$$\begin{cases} X'' - \mu X(x) = 0 \\ T'(t) - (\beta + \mu D)T = 0 \end{cases}$$

结合边界条件得

$$X(0) = 0, X(l) = 0$$

(2) 求解固有值问题得

$$\mu = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad X_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi}{l}x, n = 1, 2, \cdots$$

(3) 将 μ 代入关于 T 的常微分方程并求解

$$T_n'(t) + \left(Dn^2\pi^2/l^2 - \beta\right)T_n(t) = 0, T_n(t) = b_n \mathrm{e}^{\left(\beta - D^2\pi^2/l^2\right)t}$$

于是

$$u_n(x,t) = a_n \mathrm{e}^{\left(\beta - Dn^2\pi^2/l^2\right)t} \sin\frac{n\pi}{l}x u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{\left(\beta - Dn^2\pi^2/l^2\right)t} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

将初始条件代入得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x), a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha \mathrm{d}\alpha$$

将求得的 a_n 代入上式, 即得原定解问题的解。

4.5 对于不满足施刘定理的问题的处理

我们这门课研究的主要是二阶的线性方程，一般分离变量得到的固有值问题都是满足施刘定理的。但是如果遇到不满足施刘定理的情形，也要了解这类特殊问题的处理方法。

$$\begin{cases} u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0 \\ u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

解: 令 $u(x,t)=X(x)T(t)$。代入方程得

$$X(x)T''(t)=-a^2X^{(4)}(x)T(t)$$

即

$$\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)}=-\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\lambda^2$$

进一步得到固有值问题和其他常微分方程

$$\begin{cases} X^{(4)}(x)-\lambda^2X(x)=0 \\ X(0)=X''(0)=0 \\ X(l)=X''(l)=0 \\ T''+a^2\lambda^2T(t)=0 \end{cases}$$

下面求解固有值问题

1. 若 $\lambda=0$, 则

$$X(x)=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3$$

将边界条件代入得 $C_1=C_3=0$, 所以

$$X(x)=C_2x+C_4x^3$$

$$\begin{cases} C_2+C_4l^2=0 \\ 6C_4l=0 \end{cases}$$

于是得 $C_4=0,C_2=0$, 即, 当 $\lambda=0$ 时 $X(x)\equiv0$, 故 $\lambda\neq0$

2. 若 $\lambda>0$, 则固有值问题的方程有通解

$$X(x)=C_1\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}x+C_2\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}x+C_3\cos\sqrt{\lambda}x+C_4\sin\sqrt{\lambda}x$$

将边界条件代入有

$$\begin{cases} C_1+C_3=0 \\ C_1\lambda-C_3\lambda=0 \end{cases}$$

解得 $C_1=0,C_3=0$,
所以

$$X(x)=C_2\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}x+C_4\sin\sqrt{\lambda}x$$

由边界条件得

$$\begin{cases} C_2 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} l + C_4 \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \\ C_2 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} l - C_4 \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \end{cases}$$

解得

$$C_2 = 0, C_4 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

所以

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0, \sqrt{\lambda} l = n\pi \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

所以固有值为为 $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, 固有函数为 $X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi}{l} x$
将 λ 代入 T 的方程得

$$T_n''(t) + \tfrac{a^2 n^4 \pi^4}{l^2} T_n(t) = 0$$
$$T_n(t) = A_n \cos \tfrac{n^2\pi^2 a}{l^2} t + B_n \sin \tfrac{n^2\pi^2 a}{l^2} t$$

从而有

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n^2\pi^2 a}{l^2} t + B_n \sin \frac{n^2\pi^2 a}{l^2} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

将初始条件代入得

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \mathrm{d}x, B_n = \frac{2l}{n^2\pi^2 a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \mathrm{d}x$$

3. 若 $\lambda < 0$, 类似上述讨论。

4.6 根据自然语言描述的物理问题书写定解问题并求解

长为 l 的杆, 侧面和 $x = 0$ 端绝热, 另一端 $x = l$ 与外界按 Newton 冷却定律交换热量 (设外界温度为 0), 初始时刻杆内温度为常数 u_0, 求杆内温度分布.
解: 其定解问题为

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, \quad [u + h u_x]_{x=l} = 0 \\ u(x,0) = u_0 \end{cases}$$

令

$$u(x,t) = X(x) T(t)$$

则由方程和边界条件得

$$
\begin{gathered}
T'(t)-\mu a^2T(t)=0\\
X''(x)-\mu X(x)=0\\
X'(0)=0,X(l)+hX'(l)=0
\end{gathered}
$$

求解固有值问题得

$$
\begin{cases}
\text{固有值}\quad \mu_n=-\frac{\lambda_n^2}{l^2}\\
\text{固有函数}\quad X_n(x)=C_n'\cos\frac{\lambda_n}{l}x
\end{cases}
\qquad n=1,2,\cdots
$$

其中，λ_n 由方程

$$
\cot\lambda_n=\lambda_nh/l
$$

给出。

解其他常微分方程得

$$
T_n'(t)+\frac{\lambda_n^2a^2}{l^2}T_n(t)=0,T_n(t)=A_n'\mathrm{e}^{-\left(\lambda_n^2a^2l^2\right)_t}
$$

进而得到形式解的第 n 项的表达式

$$
u_n(x,t)=A_n\mathrm{e}^{-\left(\lambda^2a^2/t^2\right)t}\cos\frac{\lambda_n}{l}x
$$

叠加得到形式解

$$
u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\mathrm{e}^{-\left(\lambda_n^2a^2\right)\left(t^2\right)t}\cos\frac{\lambda_n}{l}x
$$

结合初始条件解得

$$
\begin{aligned}
A_n&=\frac{u_0l^2}{\lambda_n}\frac{1}{\sqrt{l^2+\lambda_n^2h^2}}/\frac{l}{2}\left[\frac{l^2+\lambda_n^2h^2+hl}{l^2+\lambda_n^2h^2}\right]\\
&=\frac{2u_0}{\lambda_n}\frac{\sqrt{l^2+\lambda_n^2h^2}}{l^2+\lambda_n^2h^2+hl}
\end{aligned}
$$

进而得到解

$$
u(x,t)=2u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{l^2+\lambda_n^2h^2}}{l^2+\lambda_n^2h^2+hl}\mathrm{e}^{-\left(\lambda_n^2a^2/l^2\right)t}\cos\frac{\lambda_nx}{l}
$$

即为原问题的解。

4.7 验证固有值问题是否满足施刘定理使用条件

将一般方程转化为施刘方程以验证固有值问题是否满足施刘定理条件。
注意，转化为施刘方程形式只是为了判断是否固有值问题满足施刘定理条件，而不是为了求解。求解的时候仍然按照求解常微分方程的一般方法求解原方程。
解固有值问题

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + \lambda y = 0(1 < x < \mathrm{e}) \\ y(1) = y(\mathrm{e}) = 0 \end{cases}$$

解：题中方程不是施-刘型的, 所以为了验证是否满足施刘定理条件，要先转化为施刘方程。按照教材公式

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \frac{1}{x^2}\exp\left\{\int \frac{x}{x^2}\mathrm{d}x\right\} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

把方程两端乘以 $\rho(x)$, 即化成施-刘型方程

$$\frac{d}{dx}\left(xy'\right) + \frac{\lambda}{x}y = 0$$

系数 $k(x) = x, q(x) = 0, \rho(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上满足施-刘定理的条件, 且两端的边界条件都是第一类, 故 $\lambda > 0$. 记 $\lambda = \mu^2(\mu > 0)$ 题中的方程为欧拉方程，作替换 $x = \mathrm{e}^t$ 或 $t = \ln x$, 即可化为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \mu^2 y(t) = 0$$

因而

$$\begin{aligned} y &= A\cos\mu t + B\sin\mu t \\ &= A\cos(\mu\ln x) + B\sin(\mu\ln x) \end{aligned}$$

由 $y(1) = 0$, 有 $A = 0$; 由 $y(\mathrm{e}) = 0$, 有 $B\sin\mu = 0$, 因 B 不能再为零,
于是

$$\mu_n = n\pi(n = 1, 2, \cdots)$$

故

$$\lambda_n = \mu_n^2 = n^2\pi^2 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

相应的固有函数为

$$y_n = \sin(n\pi\ln x)$$

注意一般方程转化为施刘方程形式的方法，以及目的。

4.8 非齐次方程的求解

三种常用方法分别是：固有函数展开法、齐次化原理、特解法
注意三种方法的适用条件和使用方法。
长为 l 两端固定的弦线在单位长度的横向力 $f(x,t)=g(x)\sin\omega t$ 的作用下振动, 已知弦的初始位移和速度分别为 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$, 试求其振动规律。
解：定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=g(x)\sin\omega t(0<x<l,t>0) \\ u(0,t)=u(l,t)=0 \\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

这是一般的非齐次问题，由线性叠加原理, 我们可以令

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

其中 $v(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0 \\ v(0,t)=v(l,t)=0 \\ v(x,0)=\varphi(x),v_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

而 $w(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{xx}=g(x)\sin\omega t \\ w(0,t)=w(l,t)=0 \\ w(x,0)=0,w_t(x,0)=0 \end{cases}$$

关于 v 的定解问题的解为

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

关于 w 的定解问题的方程是非齐次的，需要首先进行处理。
法一：固有函数展开法
令：

$$\begin{cases} w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}\cdot x \\ g(x)\sin\omega t=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \end{cases}$$

代入定解问题得

$$\begin{cases} T_n''(t)+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t)=f_n(t) \\ T_n(0)=0,\quad T_n'(0)=0 \end{cases}$$

其中

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^1 g(x)\sin\omega t\sin\frac{n\pi}{l}\alpha \mathrm{d}\alpha$$

解关于 T 的方程得

$$\begin{aligned}
T_n(t) &= \frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(t-\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}\tau \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{2}{n\pi a}\int_0^t\int_0^l g(\alpha)\sin\omega(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha \mathrm{d}\alpha\sin\frac{n\pi a}{l}\tau \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{2}{n\pi a}\int_0^t \sin\omega(t-\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}\tau \mathrm{d}\tau\cdot\int_0^l g(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha \mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{2}{n\pi a}\cdot\frac{\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\int_0^l g(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha \mathrm{d}\alpha
\end{aligned}$$

于是得

$$w(x,t) = \frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{n\left[\omega^2-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\right]}$$

$$\int_0^1 g(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha \mathrm{d}\alpha\sin\frac{n\pi}{l}x$$

法二：齐次化原理

由于是非齐次发展方程，可以考虑齐次化原理。

$$\begin{cases}
v_{tt}-a^2v_{xx}=0\\
v(0,t;\tau)=0, v(l,t;\tau)=0\\
v(x,\tau)=0, v_t(x,\tau)=g(x)\sin\omega\tau
\end{cases}$$

作时间变量偏移得到

$$\begin{cases}
v_{TT}-a^2v_{xx}=0\\
v(0,T)=v(l,T)=0\\
v(x,0)=0, v_T(x,0)=g(x)\sin\omega\tau
\end{cases}$$

解得

$v(x,t;\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n\pi a}\sin\omega\tau\int_0^l g(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha \mathrm{d}\alpha\right]\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}$ 又

$$\int_0^l \sin\omega(t-\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}\tau \mathrm{d}\tau = \frac{\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}$$

利用齐次化原理的解的积分公式

$$w(x,t)=\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^l g(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}\mathrm{d}\alpha\left[\frac{\omega\sin\frac{n\pi at}{l}-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}$$

最后，叠加得到

$$
\begin{aligned}
u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[&\frac{2}{n\pi a}\cdot\frac{\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{w^2+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\int_0^l\varphi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\mathrm{d}\alpha\\
&+\frac{2}{l}\left(\int_0^l\varphi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\mathrm{d}\alpha\right)\cos\frac{n\pi a}{l}t\\
&+\frac{2}{n\pi a}\left(\int_0^l\psi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\mathrm{d}\alpha\right)\sin\frac{n\pi a}{l}t\Bigg]\sin\frac{n\pi}{l}x
\end{aligned}
$$

即为原问题的解。

4.9 非齐次边界的处理

$$
\begin{cases}
u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x)(0<x<l,t>0)\\
u(0,t)=A,u(l,t)=B\\
u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x)
\end{cases}
$$

解: 由于分离变量法直接应用求解问题时要求边界条件是齐次的，如果边界条件非齐次，一定要先将边界条件齐次化。一般是利用基于叠加原理的特解法处理。

令

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x)$$

$$
\begin{cases}
v_{tt}-a^2v_{xx}=a^2w''(x)+f(x)\\
v(0,t)=A-w(0),v(l,t)=B-w(l)
\end{cases}
$$

故为使 $v(x,t)$ 的方程和边界条件均为齐次, 应选 $w(x)$ 使之满足

$$
\begin{cases}
a^2w''(x)=-f(x)\\
w(0)=A,w(l)=B
\end{cases}
$$

对 x 积分得

$$w(x)=\int_0^x\mathrm{d}\beta\int_0^\beta-\frac{1}{a^2}f(\alpha)\mathrm{d}\alpha+C_1x+C_2$$

将边界条件代入得

$$\begin{cases} w(0) = C_2 = A \\ w(l) = \int_0^l \mathrm{d}\beta \int_0^\beta -\frac{1}{a^2} f(\alpha)\mathrm{d}\alpha + C_1 l + C_2 = B \end{cases}$$

由此得

$$C_2 = A, C_1 = \frac{1}{l}(B-A) + \frac{1}{a^2 l}\int_0^l \mathrm{d}\beta \int_0^\beta f(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

所以

$$w(x) = A + \frac{B-A}{l}x + \frac{1}{a^2 l}\int_0^l \mathrm{d}\beta \int_0^\beta f(\alpha)\mathrm{d}\alpha - \frac{1}{a^2}\int_0^x \mathrm{d}\beta \int_0^\beta f(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

求解关于 $v(x,t)$ 的方程得

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + B_n \sin\frac{n\pi a}{l}t\right]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$\begin{cases} A_n = \frac{2}{l}\int_0^l [\varphi(\alpha) - w(\alpha)]\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\mathrm{d}\alpha \\ B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\mathrm{d}\alpha \end{cases}$$

最后叠加即可得原问题的解 $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$。

第三章综合复习

5.1 主要内容

贝塞尔方程的定义及其来源

贝塞尔方程的广义幂级数方法求解

贝塞尔函数的定义

贝塞尔函数的母函数、展开式

贝塞尔函数的性质、递推关系

应用贝塞尔函数求解柱坐标系下分离变量得到的固有值问题

勒让德方程的定义及其来源

勒让德多项式的定义

勒让德多项式的母函数、展开式

勒让德多项式的性质、递推关系

应用勒让德多项式求解球坐标系下分离变量得到的固有值问题

5.2 学习目标

理解贝塞尔函数和勒让德多项式的定义

掌握贝塞尔函数和勒让德多项式的母函数和展开式

熟练掌握给定函数的贝塞尔级数展开和勒让德级数展开

熟练掌握贝塞尔函数和勒让德多项式的性质、递推关系

熟练掌握利用贝塞尔函数和勒让德多项式进行积分求解

熟练掌握柱坐标系和球坐标系下分离变量得到的固有值问题的求解

5.3 学习方法

熟练掌握两类特殊函数的定义、性质、递推关系

理解本章的主要目的是通过对两类特殊函数的分析进而实现求解柱坐标、球坐标系下固有值问题

联系第二章所学分离变量法的知识以及施刘定理的理论支持，理解关于两类固有值问题的基本问题

5.4 应用贝塞尔函数的母函数及其积分表示进行积分求解

计算积分 $I = \int_0 \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x$, 这里 a, b 是实数且 $a > 0$ 。并求拉普拉斯变换 $L[\mathrm{J}_0(t)], L[\mathrm{J}_1(t)]$

解: 把 $J_0(bx)$ 的积分表达式代入所给积分中, 并交换积分次序, 得

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{ibx\sin\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty}\exp\{-ax+\mathrm{i}bx\sin\theta\}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

因

$$\left|\int_0^{+\infty}\exp\{-ax+\mathrm{i}bx\sin\theta\}\mathrm{d}x\right| \le \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$$

无穷积分对 $-\pi \le \theta \le \pi$ 一致收敛，从而交换积分次序是合理的（本课程我们对于这部分内容并不特别要求，可以先默认成立）。于是

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{-a+ib\sin\theta}\exp\{-ax+ibx\sin\theta\}\Big|_{x=0}^{+\infty}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a-\mathrm{i}b\sin\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a+\mathrm{i}b\sin\theta}{a^2+b^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{a^2+b^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

上面最后一个积分利用留数定理计算。（这个积分建议大家自己动手算一下）当

$Rep>0$ 时，由定义知

$$\begin{aligned} L\left[\mathrm{J}_0(t)\right] &= \int_0^{+\infty} \mathrm{J}_0(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \end{aligned}$$

又由分部积分法及 $\mathrm{J}_0'(x) = -\mathrm{J}_1(x), \mathrm{J}_0(0) = 1$, 得

$$\begin{aligned} L\left[\mathrm{J}_1(t)\right] &= \int_0^{+\infty} \mathrm{J}_1(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \\ &= -\left.\mathrm{J}_0(t)\mathrm{e}^{-pt}\right|_0^{+\infty} - p\int_0^{+\infty} \mathrm{J}_0(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \\ &= 1 - \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}} \end{aligned}$$

5.5 利用贝塞尔函数的递推关系进行积分求解

计算积分

$$\int x^n J_{n+1}(x)\mathrm{d}x$$

解：对于这类积分问题，首先明确积分的求解主要的思路有一般换元法、分部积分法以及基于分部积分构造积分递推公式进行求解。求解时主要应用贝塞尔函数的递推关系，要根据目标和求解方法明确采用哪个递推关系。

由题意知，我们需要通过分部积分对贝塞尔函数的阶数进行降阶，所以选择递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(x)\right] = -x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$$

进而得

$$\begin{aligned} &\textstyle\int x^n\mathrm{J}_{n+1}(x)\mathrm{d}x = \int x^{2n}\left[x^{-n}\mathrm{J}_{n+1}(x)\right]\mathrm{d}x \\ &\quad = -x^n\mathrm{J}_n(x) + 2n\textstyle\int x^{n-1}\mathrm{J}_n(x)\mathrm{d}x \\ &\quad = -x^n\mathrm{J}_n(x) - 2nx^{n-1}\mathrm{J}_{n-1}(x) + 2^2n(n-1)\textstyle\int x^{n-2}\mathrm{J}_{n-1}(x)\mathrm{d}x \\ &\quad = \cdots \\ &\quad = -x^n\mathrm{J}_n(x) - 2nx^{n-1}\mathrm{J}_{n-1}(x) - 2^2n(n-1)x^{n-2}\mathrm{J}_{n-2}(x) - \cdots \\ &\quad -2^{n-1}[n(n-1)\cdots 2]x\mathrm{J}_1(x) + 2^n n!\textstyle\int \mathrm{J}_1(x)\mathrm{d}x \\ &\quad = -\textstyle\sum_{k=0}^{n} 2^k\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\mathrm{J}_{n-k}(x) + C \end{aligned}$$

其中 C 为积分常数。

5.6 给定函数的贝塞尔级数展开

设 $\omega_n(n=1,2,\cdots)$ 是方程 $\mathrm{J}_0(x)=0$ 的所有正根, 试将函数 $f(x)=1-x^2(0<x<1)$ 展开成贝塞尔函数 $\mathrm{J}_0\left(\omega_n x\right)$ 的级数.

解：由题意知

$$1-x^2=\sum_{n=1}^{+\infty} C_n J_0\left(\omega_n x\right)$$

则

$$\begin{aligned}
C_n &=\frac{1}{N_{01}^2} \int_0^1\left(1-x^2\right) x J_0\left(\omega_n x\right) \mathrm{d} x \\
&=\frac{1}{N_{01}^2 \omega_n^2} \int_0^{\infty_n} t\left(1-\frac{t^2}{\omega_n^2}\right) \mathrm{J}_0(t) \mathrm{d} t \quad \left(\text{令} t=\omega_n x\right) \\
&=\frac{1}{N_{01}^2 \omega_n^2}\left[\left.\left(1-\frac{t^2}{\omega_n^2}\right) t J_1(t)\right|_0^{\omega_n}+\frac{2}{\omega_n^2} \int_0^{\omega_n} t^2 \mathrm{J}_1(t) \mathrm{d} t\right] \\
&=\frac{2}{\omega_n^2 \mathrm{J}_1^2\left(\omega_n\right)} \cdot\left.\frac{2}{\omega_n^2} t^2 \mathrm{J}_2(t)\right|_0^{\omega_n} \\
&=\frac{4 \mathrm{J}_2\left(\omega_n\right)}{\omega_n^2 \mathrm{J}_1^2\left(\omega_n\right)}
\end{aligned}$$

又由递推关系 $\mathrm{J}_2(x)=\frac{2}{x} \mathrm{J}_1(x)-\mathrm{J}_0(x)$ 及 $\mathrm{J}_0\left(\omega_n\right)=0$, 得

$$\mathrm{J}_2\left(\omega_n\right)=\frac{2 \mathrm{J}_1\left(\omega_n\right)}{\omega_n}$$

因而

$$C_n=\frac{8}{\omega_n^3 \mathrm{J}_1\left(\omega_n\right)}$$

所以

$$1-x^2=\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{\omega_n^3 \mathrm{J}_1\left(\omega_n\right)} \mathrm{J}_0\left(\omega_n x\right)$$

5.7 使用分离变量法结合贝塞尔函数求解定解问题

圆柱体底面半径为 a, 高为 h, 底面温度为 0，柱面上温度为 $Az\left(1-\frac{z}{h}\right)$。求解圆柱体内部的温度分布。

解：由题意写出定解问题

$$\left\{\begin{array}{ll}
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 & \\
\left.u\right|_{r=0} \text{ 有界}, & \left.u\right|_{r=a}=A z\left(1-\frac{z}{h}\right) \\
\left.u\right|_{z=0}=0, & \left.u\right|_{z=h}=0
\end{array}\right.$$

令 $u(r,z)=R(r)Z(z)$, 分离变量，得到

$$\begin{cases} Z''+\lambda Z=0 \\ Z(0)=0, \quad Z(h)=0 \end{cases}$$
$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R=0$$
$$\begin{cases} \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 & n=1,2,3,\cdots, \\ Z_n(z)=\sin\frac{n\pi}{h}z \end{cases}$$
$$R_n(r)=\mathrm{I}_0\left(\frac{n\pi}{h}r\right), \quad n=1,2,3,\cdots$$

因此定解问题的形式解为

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\mathrm{I}_0\left(\frac{n\pi}{h}r\right)\sin\frac{n\pi}{h}z$$

这里已经应用了有界条件 $u|_{r=0}$ 有界。由柱面上的边界条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\mathrm{I}_0\left(\frac{n\pi}{h}a\right)\sin\frac{n\pi}{h}z=Az\left(1-\frac{z}{h}\right)$$

利用正交性求解系数

$$c_n=\frac{2A}{h}\frac{1}{\mathrm{I}_0\left(\frac{n\pi}{h}a\right)}\int_0^h z\left(1-\frac{z}{h}\right)\sin\frac{n\pi}{h}z\mathrm{d}z=\frac{4Ah}{(n\pi)^2}\frac{1-(-1)^n}{\mathrm{I}_0\left(\frac{n\pi}{h}a\right)}$$

最后得到解

$$u(r,z)=\frac{8Ah}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{\mathrm{I}_0\left(\frac{2n+1}{h}\pi r\right)}{\mathrm{I}_0\left(\frac{2n+1}{h}\pi a\right)}\sin\frac{2n+1}{h}\pi z$$

5.8 应用勒让德多项式的性质和递推关系求解积分

计算积分 $\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_k'(x)\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{d}x$

解：在处理对称区间积分的时候要注意被积函数奇偶性。基于对勒让德多项式的了解，当 $k+l$ 为奇数时积分一定为 0，故下面只需讨论 $k+l$ 为偶数的情形。又由于 k 和 l 的任意性，不妨假定 $k\geq l$. 因此

$$\int_{-1}^{1}P_k'(x)P_l'(x)\mathrm{d}x=P_k(x)P_l'(x)|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l''(x)dx$$

因为 $\mathrm{P}''_l(x)$ 是 $l-2$ 次多项式，次数低于 k, 因此积分

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l''(x)\mathrm{d}x=0$$

再代入勒让德多项式的函数值

$$P_k(1)=1, \quad P_k(-1)=(-1)^k$$

同时在勒让德方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{dP}_l(x)}{\mathrm{d}x}\right]+l(l+1)\mathrm{P}_l(x)=0$$

中令 $x=\pm 1$ 又可得到

$$\mathrm{P}_l'(1)=\frac{1}{2}l(l+1), \quad \mathrm{P}_l'(-1)=\frac{(-1)^{l-1}}{2}l(l+1)$$

并注意 $k+l$ 为偶数，因此最后就得到

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_k'(x)\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{d}x=l(l+1), \quad k+l= \text{ 偶数}, \quad \text{且} k\geq l$$

注意勒让德多项式的奇偶性在求解对称区间积分中的应用。

5.9 勒让德多项式的重要积分

这个积分在勒让德多项式积分求解题目中经常会用到，建议大家理解这个积分的求解，并且记住结论。

设 $m\geq 1, n\geq 1$. 试证明

$$(m+n+1)\int_0^1 x^m p_n(x)\mathrm{d}x=m\int_0^1 x^{m-1}p_{n-1}(x)\mathrm{d}x$$

证明：由勒让德多项式的递推关系得

$$\begin{aligned}
n\int_0^1 x^m p_n(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1 x^m\left[xp_n'(x)-p_{n-1}'(x)\right]\mathrm{d}x\\
&=x^{n+1}p_n(x)\big|_0^1-\int_0^1(m+1)x^m p_n(x)\mathrm{d}x\\
&\quad -x^m p_{n-1}(x)\big|_0^1+\int_0^1 mx^{n-1}p_{n-1}(x)\mathrm{d}x\\
&=-(m+1)\int_0^1 x^m p_n(x)\mathrm{d}x\\
&\quad +m\int_0^1 x^{m-1}p_{n-1}(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

把此等式左边的积分记作 $f(m,n)$, 再将等式变形，可得计算这个积分的递推关系

$$f(m,n)=\frac{m}{m+n+1}f(m-1,n-1)$$

5.10 给定函数的勒让德级数展开

将函数 $P_l'(x)$ 按勒让德多项式展开。

解：$P_l'(x)$ 是一个 $l-1$ 次多项式, 并且只含 $x^{l-1},x^{l-3},x^{l-5},\cdots$ 等项，因此

$$\mathrm{P}_l'(x)=\sum_{k=0}^{[(l-1)/2]}c_{l-2k-1}\mathrm{P}_{l-2k-1}(x)$$

其中

$$c_{l-2k-1}=\frac{2l-4k-1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{P}_{l-2k-1}(x)\mathrm{d}x$$

由于

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{P}_{l-2k-1}(x)\mathrm{d}x\\&=\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l-2k-1}(x)|_{-1}^{1}-\textstyle\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l-2k-1}'(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

在上式右端第一项中代入

$$\mathrm{P}_l(1)=1,\quad \mathrm{P}_{l-2k-1}(1)=1$$

$$\mathrm{P}_l(-1)=(-1)^l,\quad \mathrm{P}_{l-2k-1}(-1)=(-1)^{l-2k-1}$$

即可求得此项的数值为 2 。又因 $P_{l-2k-1}'(x)$ 是 $l-2k-2$ 次多项式, 所以它和 l 次勒让德多项式的乘积在对称区间上的积分为 0 。所以

$$\int_{-1}^{1}P_l'(x)P_{l-2k-1}(x)dx=2$$

因此, $c_{l-2k-1}=2l-4k-1$

$$\mathrm{P}_l'(x)=\sum_{k=0}^{[(l-1)/2]}(2l-4k-1)\mathrm{P}_{l-2k-1}(x)$$

5.11 利用分离变量法结合勒让德函数求解定解问题

接地导体球半径为 a ，距离球心 b 处放一点电荷 q，求球内的电势分布。

解: 取球坐标系，原点位于球心，极轴 $(\theta=0)$ 指向点电荷，则球内静电势与 ϕ 无关

$$u(r,\theta)=u_1(r,\theta)+u_2(r,\theta)$$

$u_1(r,\theta)$ 是点电荷 q 产生的静电势

$$u_1(r,\theta)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}$$

$u_2(r,\theta)$ 是球面上的感生电荷所产生的静电势满足定解问题

$$\begin{array}{l}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u_2}{\partial\theta}\right)=0\\ u_2|_{\theta=0}\text{ 有界}, \quad u_2|_{\theta=\pi}\text{ 有界},\\ u_2|_{r=0}\text{ 有界}, \quad u_2|_{r=a}=-\,u_1|_{r=a}\end{array}$$

利用分离变量法求解，得到形式解

$$u_2(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

结合边界条件得

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\infty}A_l a^l \mathrm{P}_l(\cos\theta)&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}\\&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^l \mathrm{P}_l(\cos\theta)\end{aligned}$$

利用固有函数系的正交性求解系数

$$A_l=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^{l+1}}\left(\frac{b}{a}\right)^l$$

因此

$$u_2(r,\theta)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^l\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta)$$

利用叠加原理即可得，球内的电势分布为

$$\begin{aligned}u(r,\theta)=&\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\\&-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^l\left(\frac{r}{a}\right)^l \mathrm{P}_l(\cos\theta)\end{aligned}$$

第四章综合复习

6.1 主要内容

傅里叶变换、正余弦变换、拉普拉斯变换的基本概念

傅里叶变换、正余弦变换、拉普拉斯变换的性质

积分变换法求解定解问题的使用条件

积分变换法求解定解问题的具体操作

6.2 学习目标

熟练掌握傅里叶变换、正余弦变换、拉普拉斯变换的基本概念和性质

理解积分变换法求解定解问题所蕴含的转化思想

熟练掌握积分变换法求解定解问题的使用条件

熟练掌握积分变换法求解定解问题的具体操作

了解同时使用傅里叶变换和拉普拉斯变换进行求解的方法

6.3 学习方法

复习傅里叶变换和拉普拉斯变换相关知识

复习留数定理求解积分的方法

复习拉普拉斯反变换的方法，尤其是利用反演公式结合留数定理进行求解

熟练掌握积分变换法求解定解问题的使用条件

熟练掌握积分变换法求解定解问题的具体流程

6.4 利用傅里叶变换求解定解问题

请使用傅里叶变换法求解定解问题。

解：如果我们首先看定解问题，会发现这是一个一维无界区域的弦振动问题。我们知道，如果遇到一维无界区域弦振动问题，那最好使用行波法，因为操作起来很方便，只需要带入公式即可。但是，这个想法的正确性是有前提的，即，如果题目没用指定求解方法，我们可以根据需要，自己选择合适方法进行求解。但是，如果题目指定，则一定要按照题目要求，使用指定的方法。

$$
\begin{cases}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 (t > 0) \\
u|_{t=0} = u_0 \mathrm{e}^{-(x/a)^2} \\
\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0
\end{cases}
$$

令 $u(x,t)$ 的傅里叶换为 $U(k,t)$

$$U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x$$

附加上自然边界条件

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$$

则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x = -k^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x$$

所以，原来的偏微分方程，经傅里叶变换后，变为常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 U(k,t)}{\mathrm{d}t^2} + k^2 c^2 U(k,t) = 0$$

初始条件也作相应的变换。因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x/a)^2} \mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} a \mathrm{e}^{-(ka/2)^2}$$

故 $U(k,t)$ 满足的初始条件为

$$U(k,0) = \frac{u_0 a}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-(ka/2)^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}U(k,t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = 0$$

由此可以求出

$$U(k,t) = \frac{u_0 a}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-(ka/2)^2} \cos kct$$

代入反演公式，就求得

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} U(k,t)\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}k \\
&= \frac{u_0 a}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(ka/2)^2}\cos kct\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \\
&= \frac{u_0 a}{4\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(ka/2)^2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+ct)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ct)}\right]\mathrm{d}k \\
&= \frac{u_0}{2}\left\{\mathrm{e}^{-[(x+ct)/a]^2}+\mathrm{e}^{-[(x-ct)/a]^2}\right\}
\end{aligned}
$$

可以再使用行波法进行求解，比较两种方法的求解过程。我们会发现，行波法只能求解一维无界区域波动方程问题和可以转化为一维波动方程问题的类型，优点是求解非常简单，直接利用公式就可以求解，计算很便捷，节约大脑 CPU 开销，但是能够求解的问题比较有限。行波法可以求解的这类问题，都可以采用傅里叶变换求解，积分变换法的优点是适用范围比较广，但是在求解过程上和行波法比比较繁琐。

6.5 利用正余弦变换求解定解问题

请用余弦变换求解定解问题。

$$
\begin{cases}
u_t = a^2 u_{xx} \quad (x>0, t>0) \\
u(0,x)=0, u_x(t,0)=Q(Q \text{ 为常数}) \\
u(t,+\infty)=u_x(t,+\infty)=0
\end{cases}
$$

解：以 x 为积分变量, 作余弦变换, 即令

$$
\bar{u}(t,\lambda)=\int_0^{+\infty} u(t,x)\cos\lambda x\mathrm{d}x
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_x &= \int_0^{+\infty} u_{xx}(t,x)\cos\lambda x\mathrm{d}x \\
&= u_x\cos\lambda x|_0^{+\infty}+\lambda\int_0^{+\infty} u_x\sin\lambda x\mathrm{d}x \\
&= -Q+\lambda u\sin\lambda x|_0^{+\infty}-\lambda^2\int_0^{+\infty} u\cos\lambda x\mathrm{d}x \\
&= -Q-\lambda^2\bar{u}
\end{aligned}
$$

因而，原定解问题成为常微分方程的初始问题

$$
\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}t}+a^2\lambda^2\bar{u}=-a^2Q \\
\bar{u}(\lambda,0)=0
\end{cases}
$$

易求得

$$\begin{aligned}\bar{u}(t,\lambda) &= \frac{Q}{\lambda^2}\left[\exp\left\{-a^2\lambda^2 t\right\}-1\right]\\ &= -a^2 Q\int_0^t \exp\left\{-a^2\lambda^2\tau\right\}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

作反余弦变换, 得

$$\begin{aligned}u(t,x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\bar{u}(t,\lambda)\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda\\ &= -\frac{2a^2Q}{\pi}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_0^{+\infty}\exp\left\{-a^2\lambda^2\tau\right\}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda\\ &= -\frac{2a^2Q}{\pi}\int_0^t\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2\tau}\right\}\mathrm{d}\tau\\ &= -\frac{aQ}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\tau}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2\tau}\right\}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

令 $y=\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}$, 则

$$\tau=\frac{x^2}{4a^2y^2}$$

$$\mathrm{d}\tau=-\frac{x^2}{2a^2y^3}\mathrm{d}y$$

所以问题的解为

$$\begin{aligned}u(t,x) &= -\frac{aQ}{\sqrt{\pi}}\int_{+\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}\left(-\frac{x}{ay^2}\mathrm{e}^{-y^2}\right)\mathrm{d}y\\ &= -\frac{Qx}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

注意正弦变换和余弦变换，做正反变换的时候建议严格按照定义进行求解。

6.6 利用拉普拉斯变换求解定解问题

求解定解问题。

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0<x<l,t>0)\\ u(t,0)=0,u_x(t,l)=A\sin\omega t\\ u(0,x)=0,u_t(0,x)=0\end{cases}$$

这里 ,$\omega \neq \frac{2k-1}{2l} a\pi (k=1,2,3,\cdots)$
解：令 $U(p,x)=L[u(t,x)]$, 即得

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 \frac{\mathrm{d}^2 U(p,x)}{\mathrm{d}x^2} = p^2 U(p,x) \\ U(p,x)\big|_{x=0} = 0,\, \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\big|_{x=l} = A\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \end{array}\right.$$

方程的通解为

$$U = C_1 \operatorname{ch} \frac{px}{a} + C_2 \operatorname{sh} \frac{px}{a}$$

定出常数后，即得像函数

$$U(p,x) = \frac{Aa\omega \operatorname{sh} \frac{px}{a}}{p\left(p^2+\omega^2\right) \operatorname{ch} \frac{pl}{a}}$$

分母 $p\left(p^2+\omega^2\right) \operatorname{ch} \frac{pl}{a}$ 关于 p 的零点为

$$p = 0, \pm\omega \mathrm{i}, \pm\frac{2k-1}{2l} a\pi \mathrm{i} (k=1,2,\cdots)$$

而且它们都是 1 级零点, 在这些点中, 除 $p=0$ 是 $U(p,x)$ 的可去奇点外, 其他的点都是 $U(p,x)$ 的 1 级极点。由拉普拉斯变换反演公式，结合留数定理，得所求解为

$$\begin{aligned} u(t,x) &= L^{-1}[U(p,x)] \\ &= \sum \operatorname{Res}\left[\frac{Aa\omega \operatorname{sh} \frac{px}{a}}{p\left(p^2+\omega^2\right) \operatorname{ch} \frac{pl}{a}} \mathrm{e}^{pt}\right] \end{aligned}$$

这里，和式 $\sum$ 对所有极点求和. 可以利用复变函数留数定理部分介绍的公式进行求解。最后得到解

$$u(t,x) = \frac{Aa}{\omega} \frac{1}{\cos \frac{\omega l}{a}} \sin \frac{\omega x}{a} \sin \omega t + \frac{16 a\omega A l^2}{\pi}$$
$$\cdot \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2k-1)a\pi t}{2l}}{(2k-1)\left[4l^2\omega^2 - a^2(2k-1)^2\pi^2\right]}$$

注意在求解拉普拉斯反变换的时候，可能会用到反演公式。

6.7 利用傅里叶变换和拉普拉斯变换进行求解

联合使用拉普拉斯变换和傅里叶变换求解无界弦的横振动问题

$$\left\{\begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \phi(x) \end{array}\right.$$

解: 先作傅里叶变换。令

$$U(k,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{l}\Phi(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\\ \Psi(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\end{array}$$

则有

$$\begin{array}{l}\frac{\mathrm{d}^2U(k,t)}{\mathrm{d}t^2}+k^2a^2U(k,t)=0\\ U(k,0)=\Phi(k),\quad \left.\frac{\mathrm{d}U(k,t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\Psi(k)\end{array}$$

再作拉普拉斯变换,

$$\bar{U}(k,p)=\int_0^{\infty}U(k,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

则 $U(k,t)$ 满足的常微分方程初值问题转化为代数方程

$$p^2\bar{U}(k,p)+k^2a^2\bar{U}(k,p)=p\Phi(k)+\Psi(k)$$

所以,

$$\bar{U}(k,p)=\frac{p\Phi(k)+\Psi(k)}{p^2+k^2a^2}$$

然后，求两次反演，得

$$\begin{aligned}U(k,t)=&\Phi(k)\cos kat+\frac{1}{ka}\Psi(k)\sin kat\\ u(x,t)=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\Phi(k)\cos kat+\frac{1}{ka}\Psi(k)\sin kat\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\\ =&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(k)\cos kat\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\\ &+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(k)\left[\int_0^t\cos ka\tau\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\\ =&\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(k)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+at)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-at)}\right]\mathrm{d}k\\ &+\int_0^t\mathrm{d}\tau\left\{\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(k)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+a\tau)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-a\tau)}\right]\mathrm{d}k\right\}\end{aligned}$$

由于

$$\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k=\phi(x)\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k=\psi(x)\end{array}$$

所以

$$\begin{aligned}
u(x,t) =& \frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)] \\
&+\frac{1}{2}\int_0^t[\psi(x+a\tau)+\psi(x-a\tau)]\mathrm{d}\tau \\
=&\frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

第五章综合复习

7.1 主要内容

δ 函数的定义及性质

δ 函数的傅里叶变换与反变换

δ 的广义积分表达（经常用 δ 函数代换这类广义积分）

基本解方法的概念

基本解方法的适用范围

基本解方法的具体操作

格林函数的镜像法求解

格林函数的分离变量法和积分变换法求解

解的积分表达式

7.2 学习目标

掌握 δ 函数的基本概念和性质，尤其要明确其作为广义函数实质是定义了一种运算

理解基本解方法的思想

熟练掌握求解格林函数的镜像法

理解格林函数所满足的定解问题本质是定解问题，因此可以用各种求解定解问题的方法进行求解

熟练掌握解的积分表达式

熟练掌握基本解方法求解定解问题的具体操作

7.3 学习方法

熟练掌握基本概念

复习曲线积分和曲面积分

熟练掌握格林函数的求解

熟练掌握解的积分表达式

7.4 关于 δ 函数的等式的证明

这类问题的处理的时候要注意 δ 函数的本质是定义了一种运算，所以这类等式的证明要利用其定义的运算性质来进行处理。

试证明 $x\delta'(x) = -\delta(x)$。

证明：首先任取一检验函数 $\varphi(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\delta'(x)\varphi(x)dx = -\left.(x\varphi(x))'\right|_{x=0} = -\varphi(x) - \left.x\varphi'(x)\right|_{x=0} = -\varphi(0)$$

而根据 δ 函数的运算性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -\delta(x)\varphi(x)dx = -\left.\varphi(x)\right|_{x=0} = -\varphi(0)$$

比较得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\delta'(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -\delta(x)\varphi(x)dx$$

所以得到

$$x\delta'(x) = -\delta(x)$$

7.5 δ 函数积分表示的应用

设 $f(t)$ 是已知连续函数，计算积分

$$I = \frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_0^t f(\tau)\sin\lambda x \sin a\lambda(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

这里，a 为正常数, $at > x > 0$，并假定所给的累次积分可交换次序。
解：利用三角函数积化和差公式和 δ 函数的积分表达式，得

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda x\sin a\lambda(t-\tau)\mathrm{d}\lambda &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\{\cos\lambda[x-a(t-\tau)]-\cos\lambda[x+a(t-\tau)]\}\mathrm{d}\lambda \\ &= \delta[x-a(t-\tau)]-\delta[x+a(t-\tau)] \\ &= \delta[x-a(t-\tau)]\end{aligned}$$

最后一个等号成立是由于 $x+a(t-\tau)>0$, 所以 $\delta[x+a(t-\tau)]=0$
于是，交换积分次序后得

$$I = a\int_0^t \delta[x-a(t-\tau)]f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

令 $s = x-a(t-\tau)$, 得

$$I = \int_{x-at}^{x}\delta(s)f\left[\frac{1}{a}(s-x+at)\right]\mathrm{d}s$$

因 $x-at<0, x>0$, 所以

$$\begin{aligned}I &= f\left[\frac{1}{a}(s-x+at)\right]\Big|_{s=0} \\ &= f\left(t-\frac{x}{a}\right)\end{aligned}$$

注意 δ 函数的尺度变换性质。

7.6 利用镜像法求解格林函数

试求层状空间 $0<z<h$ 的格林函数

$$\begin{cases}\Delta_3 G = -\delta\left(M-M_0\right)(0<z<h) \\ G|_{z=0} = G|_{z=h} = 0\end{cases}$$

解: 利用镜像法，设在 $0<z<h$ 中的 $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 点放置正电荷 ε_0 则为使 $G|_{z=0}=0$, 需在 M_0 关于 $z=0$ 的像点 $M_0'\left(x_0,y_0,-z_0\right)$ 置一相反的电荷 $-\varepsilon_0$, 此时在 $0<z<h$ 中任一点 $M(x,y,z)$ 处的电势为

$$g_0 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_0'}\right)$$

其中

$$\begin{aligned}r_0 &= \sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2} \\ r_0' &= \sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z+z_0\right)^2}\end{aligned}$$

且 $g_0|_{z=0}=0$, 满足边界条件, 但 $g_0|_{z=h}\neq 0$, 不满足边界条件。
为使电势在 $z=h$ 上满足边界条件，我们相对于 $z=h$ 分别取 M_0 和 M_0' 的像点 $M_1'(x_0,y_0,2h-z_0)$ 和 $M_1(x_0,y_0,2h+z_0)$ 并在 M_1' 和 M_1 上分别放置点电荷 $-\varepsilon_0$ 和 $+\varepsilon_0$, 则此时 M 处的电势为

$$g_1=\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_0'}\right)+\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1'}\right)\right]$$

其中

$$r_1=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+[z-(2h+z_0)]^2}$$

$$r_1'=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+[z-(2h-z_0)]^2}$$

且 $g_1|_{z=h}=0$ 满足边界条件, 但 $g_1|_{z=0}\neq 0$ 又不满足边界条件. 于是, 再相对于 $z=0$ 分别取 M_0,M_1' 和 M_1 的像点 ,M_0'，$M_{-1}(x_0,y_0,-2h+z_0)$ 和 $M_{-1}'(x_0,y_0,-2h-z_0)$ 并在 M_{-1} 和 M_{-1}' 分别放置点电荷 $+\varepsilon_0$ 和 $-\varepsilon_0$, 得电势

$$g_{-1}=\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_0'}\right)+\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1'}\right)+\left(\frac{1}{r_{-1}}-\frac{1}{r_{-1}'}\right)\right]$$

其中

$$r_{-1}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+[z-(-2h+z_0)]^2}$$
$$r_{-1}'=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+[z-(-2h-z_0)]^2}$$

类似地继续下去得 M 点电势为 $g_2,g_{-2},\cdots$, 于是满足定解条件的格林函数为

$$G=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{r_n}-\frac{1}{r_n'}\right)$$

其中

$$r_n=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+[z-(2nh+z_0)]^2}$$
$$r_n'=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+[z-(2nh-z_0)]^2}$$

又

$$\lim_{n\to\pm\infty}\left|\frac{1}{r_n}-\frac{1}{r_n'}\right|\approx\left|\frac{1}{2nh+z_0}-\frac{1}{2nh-z_0}\right|$$
$$=\frac{z_0}{2n^2h^2}=\frac{z_0}{2h^2}\cdot\frac{1}{n^2}\to 0$$

说明级数收敛，即解有意义。所以上述所得即为格林函数。

7.7 利用分离变量法求解格林函数

求矩形域 $D: 0<x<a, 0<y<b$ 内狄氏问题的格林函数，即解定解问题

$$\begin{cases} \Delta_2 G = -\delta(x-\xi, y-\eta)((x,y)\in D, (\xi,\eta)\in D) \\ G|_{x=0} = G|_{x=a} = G|_{y=0} = G|_{y=b} = 0 \end{cases}$$

解：考虑定解问题

$$\begin{cases} \Delta_2\varphi + \lambda\varphi = 0 \\ \varphi(0,y) = \varphi(a,y) = 0 \\ \varphi(x,0) = \varphi(x,b) = 0 \end{cases}$$

令 $\varphi = X(x)Y(y)$, 经分离变量后得到固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases}$$

且 $\lambda = \mu + \nu$. 解上述两个方程, 得固有值及相应的固有函数分别为

$$\begin{aligned} &\mu_m = \left(\tfrac{m\pi}{a}\right)^2 (m = 1, 2, \cdots) \\ &X_m(x) = \sin\tfrac{m\pi x}{a}(m = 1, 2, \cdots) \\ &\nu_n = \left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2 (n = 1, 2, \cdots) \\ &Y_n(y) = \sin\tfrac{n\pi y}{b}(n = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

进而得到

$$\begin{aligned} &\lambda_{mn} = \mu_m + \nu_n = \pi^2\left(\tfrac{m^2}{a^2} + \tfrac{n^2}{b^2}\right) \\ &\varphi_{mn} = \sin\tfrac{m\pi x}{a}\sin\tfrac{n\pi y}{b} \end{aligned}$$

令

$$G = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn}\varphi_{mn}$$

代入方程得到

$$\begin{aligned}\Delta_2 G &= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn}\Delta_2\varphi_{mn}\\ &= -\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn}\lambda_{mn}\varphi_{mn}\\ &= -\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}a_{mn} &= \frac{1}{\lambda_{mn}\left\|\varphi_{nm}\right\|^2}\int_0^a\int_0^b \delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{4ab}{\pi^2\left(m^2b^2+n^2a^2\right)}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\end{aligned}$$

所以

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{4ab}{\pi^2}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2b^2+n^2a^2}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\varphi_{mn}$$

即为格林函数。

7.8 利用基本解方法求解定解问题

求解定解问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t} - 2u(t>0, -\infty<x<+\infty, a>0)\\ u|_{t=0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

解：首先判断定解问题的类型。无界区域问题，不能采用分离变量法；不是一维无界区域弦振动问题的标准形式，不能直接用行波法；由于没有说明无穷远点的函数值情况，不能用傅里叶变换法。问题满足基本解方法的使用条件，因此选择用基本解方法进行求解。以上只是分析过程，不需要在试卷上详细说明。

首先先求出基本解，即求解定解问题

$$\begin{cases}U_{tt} = a^2U_{xx} - 2U_t - 2U\\ U|_{t=0}=0,\ U_t|_{t=0}=\delta(x)\end{cases}$$

对 x 进行傅里叶变换

$$\begin{cases}\frac{d^2\bar{U}}{dt^2} + 2\frac{d\bar{U}}{dt} = -\left(\lambda^2a^2+2\right)\bar{U}\\ \bar{U}\Big|_{t=0}=0,\ \frac{d\bar{U}}{dt}\Big|_{t=0}=1\end{cases}$$

解得

$$\bar{U} = e^{-t}\frac{\sin\sqrt{\lambda^2a^2+1}t}{\sqrt{\lambda^2a^2+1}}$$

反变换得

$$U = \frac{e^{-t}}{2a}J_0\left(\frac{1}{a^2}\sqrt{a^2t^2-x^2}\right)h(at-|x|)$$

所以定解问题的解为

$$u = U(t,x) * \psi(x) = \frac{e^{-t}}{2a}\int_{-at}^{at} J_0\left(\frac{1}{a^2}\sqrt{a^2t^2-\xi^2}\right)\psi(x-\xi)d\xi$$

期末模拟试卷

中国科学技术大学

2019-2020 学年第二学期

数理方程 **B** 期末模拟试卷

数理方程 08 班制作，仅供学习交流使用

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
评阅人								

一、（本题 10 分）求一维弦振动问题的解。

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}(-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x,-x) = \varphi(x) \\ u(x,x) = \psi(x) \end{cases}$$

二、（本题 10 分）求右行单波方程初值问题的解。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0(-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

三、（本题 20 分）求解热传导问题的解。已知定解问题描述的是一个长为 l 的均匀杆的温度变化问题，请说明定解条件所表达的物理意义。

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 (0 < x < l, t > 0) \\ u(0,t) - h u_x(0,t) = u_1, u(l,t) + h u_x(l,t) = u_2 \\ u(x,0) = u_0 \end{cases}$$

四、（本题 15 分）求高维波动方程的解。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u (0 < x, y, z < 1, t > 0) \\ u(x, y, z; 0) = \sin \pi x \sin \pi y \sin \pi z \\ u_t(x, y, z; 0) = 0 \\ u(0, y, z; t) = u(1, y, z; t) = 0 \\ u(x, 0, z; t) = u(x, 1, z; t) = 0 \\ u(x, y, 0; t) = u(x, y, 1; t) = 0 \end{cases}$$

五、（本题 15 分）有一个内径为 a，外径为 $2a$ 的均匀球壳，其内、外表面温度分别为 0 和 u_0。试求球壳内的温度分布。

六、（本题 15 分）求解定解问题。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta_3 u (t > 0, r > 0) \\ u|_{r=0} \text{ 有界}, r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = (1+r^2)^{-2} \end{cases}$$

七、（本题 15 分）请写出定解问题对应的格林函数，并利用基本解方法求解定解问题。

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = A\sin\omega t (0 < x < l, t > 0) \\ u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

参　考　公　式

1. 拉普拉斯算子 Δ_3 在各个坐标系下的表达形式

$$
\begin{aligned}
\Delta_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\\
&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}
\end{aligned}
$$

2.Legendre 方程: $\left[\left(1-x^2\right)y'\right]'+\lambda y=0; n$ 阶 Legendre 多项式
$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n$
Legendre 多项式的母函数: $\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n, |t|<1;$
Legendre 多项式的模平方: $\|P_n(x)\|^2=\frac{2}{2n+1}$

3. ν 阶 Bessel 方程 : $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0; \nu$ 阶 Bessel 函数:
$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$; Bessel 函数的母函数: $e^{\frac{x}{2}\left(\zeta-\zeta^{-1}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\zeta^n$
Bessel 函数在三类边界条件下的模平方: $N_{\nu 1n}^2=\frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2\left(\omega_{1n}a\right),\quad N_{\nu 2n}^2=\frac{1}{2}\left[a^2-\frac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}\right]J_\nu^2\left(\omega_{2n}a\right),\quad N_{\nu 3n}^2=\frac{1}{2}\left[a^2-\frac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}+\frac{a^2\alpha^2}{\beta^2\omega_{3n}^2}\right]J_\nu^2\left(\omega_{3n}a\right)$

4. 傅里叶变换和逆变换: $\mathcal{F}[f](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x; \mathcal{F}^{-1}[F](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda$
$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\lambda^2}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$

5. 拉普拉斯变换: $L[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t, p=\sigma+is; L\left[e^{\alpha t}\right]=\frac{1}{p-\alpha}$
$L\left[t^\alpha\right]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, L[\sin t]=\frac{1}{p^2+1}, L[\cos t]=\frac{p}{p^2+1}, L\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\right]=\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$

6. 拉普拉斯方程 $\Delta_3 u=\delta(M)$ 的基本解:
二维, $U(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$
三维, $U(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

7. 设 $G\left(M;M_0\right)$ 是三维 Poisson 方程第一边值问题

$$
\left\{\begin{array}{l}
\Delta_3 u=-f(M),(M=(x,y,z)\in V)\\
u|s=\varphi(M)
\end{array}\right.
$$

对应的格林函数, 则
$u\left(M_0\right)=-\iint_S\varphi(M)\frac{\partial G}{\partial n}\left(M;M_0\right)dS+\iiint_V f(M)G\left(M;M_0\right)dM\cdot\left(\text{其中}M_0=(\xi,\eta,\zeta)\right)$

8. 积分公式

$$
\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\omega}
$$

期末模拟试卷参考答案

中国科学技术大学

2019-2020 学年第二学期

数理方程 **B** 期末模拟试卷参考答案

数理方程 08 班制作, 仅供学习交流使用

一、（本题 10 分）求一维弦振动问题的解。

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}(-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, -x) = \varphi(x) \\ u(x, x) = \psi(x) \end{cases}$$

解：泛定方程的通解为

$$u(x, t) = f_1(x + t) + f_2(x - t)$$

由定解条件可知

$$\begin{aligned} f_1(0) + f_2(2x) = \varphi(x) \\ f_1(2x) + f_2(0) = \psi(x) \end{aligned}$$

........................(5 分)

令 $2x = y$, 则上式变为

$$\begin{cases} f_1(0) + f_2(y) = \varphi\left(\frac{y}{2}\right) \\ f_1(y) + f_2(0) = \psi\left(\frac{y}{2}\right) \end{cases}$$

其中，- $\infty < y < \infty$，上述方程可化为

$$\begin{cases} f_1(y) = \psi\left(\frac{y}{2}\right) - f_2(0) \\ f_2(y) = \varphi\left(\frac{y}{2}\right) - f_1(0) \end{cases}$$

所以

$$f_1(x+t)=\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)-f_1(0), f_2(x-t)=\varphi\left(\frac{x-t}{2}\right)-f_2(0)$$

因此

$$u(x,t)=\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x-t}{2}\right)-[f_1(0)+f_2(0)]$$

在上述解得关于 $f_1(y)$ 和 $f_2(y)$ 的等式中令 $y=0$ 可得

$$f_1(0)+f_2(0)=\frac{1}{2}[\varphi(0)+\psi(0)]$$

所以，此定解问题的解为

$$u(x,t)=\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x-t}{2}\right)+\frac{\varphi(0)+\psi(0)}{2}$$

........................(10 分)

二、（本题 10 分）求右行单波方程初值问题的解。

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0(-\infty<x<\infty,t>0)\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$$

解：将泛定方程两边分别对 t 和 x 求导，得

$$u_{tt}+au_{xt}=0$$
$$u_{tx}+au_{xx}=0$$

整理两个等式得一维波动方程

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$$

方程的通解为

$$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)$$

........................(5 分)

将通解代入原泛定方程中，得

$$af_1'(x+at)-af_2'(x-at)+af_1'(x+at)+af_2'(x-at)=0$$

即

$$2af_1'(x+at)=0$$

由此可得

$$f_1(x+at)=C$$

将定解条件代入通解，得

$$f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x)$$

即

$$f_2(x)=\varphi(x)-f_1(x)$$

因此可得

$$f_2(x-at)=\varphi(x-at)-C$$

将 $f_1(x+at)=C$ 和 $f_2(x-at)=\varphi(x-at)-C$ 代入方程通解得

$$u(x,t)=\varphi(x-at)$$

........................(10 分)

三、（本题 20 分）求解热传导问题的解。已知定解问题描述的是一个长为 l 的均匀杆的温度变化问题，请说明定解条件所表达的物理意义。

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0(0<x<l,t>0) \\ u(0,t)-hu_x(0,t)=u_1, u(l,t)+hu_x(l,t)=u_2 \\ u(x,0)=u_0 \end{cases}$$

解：首先求解定解问题。根据定解问题可知，利用分离变量法求解。由于边界条件非齐次，所以先将边界条件齐次化
令

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

其中

$$w(x,t)=\tfrac{u_2-u_1}{l+2h}(h+x)+u_2$$

........................(5 分)

则，$v(x,t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0 \\ v(0,t) - h v_x(0,t) = 0 \\ v(l,t) + h v_x(l,t) = 0 \\ v(x,0) = u_0 - u_2 + \frac{u_1-u_2}{l+2h}(h+x) \end{cases}$$

分离变量得固有值问题和关于 t 的常微分方程

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) - hX'(0) = 0, X(l) + hX'(l) = 0 \\ T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \end{cases}$$

........................(10 分)

由施刘定理可知，有可数个非负固有值 λ 满足

$$\tan\sqrt{\lambda}l = \frac{2h\sqrt{\lambda}}{h^2\lambda-1}$$

进一步得固有函数

$$X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x + h\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x$$

将固有值代入关于 t 的常微分方程并解之得

$$T_n(t) = a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n a^2 t}$$

整理得形式解

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n a^2 t}(\sin\sqrt{\lambda_n}x + h\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x)$$

........................(15 分)

将定解条件在固有函数系上展开，并比较对应项系数得

$$a_n = \frac{1}{N_n^2}\left\{\left[(u_0-u_2) + \frac{(u_1-u_2)h}{l+2h}\right]\frac{2}{\sqrt{\lambda_n}} + \frac{u_1-u_2}{l+2h}\frac{l}{\sqrt{\lambda_n}}\right\} = \frac{2u_0+u_1-3u_2}{N_n^2\sqrt{\lambda_n}} = \frac{4u_0+2u_1-6u_2}{\sqrt{\lambda_n}[l(h^2\lambda_n+1)+2h]}$$

代入形式解，得到关于 $v(x,t)$ 的解。将求得的 $v(x,t)$ 与 $w(x,t)$ 相加，得定解问题的解

$$u(x,t) = u_2 + \frac{u_2-u_1}{l+2h}(h+x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4u_0+2u_1-6u_2}{\sqrt{\lambda_n}[l(h^2\lambda_n+1)+2h]}\mathrm{e}^{-\lambda_n a^2 t}\cdot(\sin\sqrt{\lambda_n}x + h\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x)$$

........................(18 分)

由题意知，定解问题描述长为 l 的均匀杆的温度变化问题，由定解条件可知，表达的物理意义为：杆的初始温度为 u_0, 杆的侧面绝热，两端分别与温度为 u_1 和 u_2 的介质进行热交换。

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(20 分)

四、（本题 15 分）求高维波动方程的解。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u(0 < x, y, z < 1, t > 0) \\ u(x, y, z; 0) = \sin\pi x\sin\pi y\sin\pi z \\ u_t(x, y, z; 0) = 0 \\ u(0, y, z; t) = u(1, y, z; t) = 0 \\ u(x, 0, z; t) = u(x, 1, z; t) = 0 \\ u(x, y, 0; t) = u(x, y, 1; t) = 0 \end{cases}$$

解：由题知，利用分离变量法求解。令

$$u(x, y, z; t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$$

代入方程整理得

$$\tfrac{T''}{a^2T} = \tfrac{X''}{X} + \tfrac{Y''}{Y} + \tfrac{Z''}{Z}$$

进一步，得

$$\begin{cases} T''(t) - a^2\mu T(t) = 0 \\ X''(x) - \alpha X(x) = 0 \\ Y''(y) - \beta Y(y) = 0 \\ Z''(z) - \gamma Z(z) = 0 \end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(5 分)

解关于 x、y、z 的固有值问题得

$$\alpha = -m^2\pi^2, X_m(x) = a_m\sin m\pi x, m = 1, 2, \cdots$$
$$\beta = -n^2\pi^2, Y_n(y) = b_n\sin n\pi y, n = 1, 2, \cdots$$
$$\gamma = -l^2\pi^2, Z_l(z) = c_l\sin l\pi z, l = 1, 2, \cdots$$

将 $\mu = \alpha + \beta + \gamma = -(m^2 + n^2 + l^2)\pi^2$ 带入关于 T 的常微分方程得

$$T'' + a^2\left(n^2 + m^2 + l^2\right)T = 0$$

记

$$a^2\left(m^2 + n^2 + l^2\right)\pi^2 = \omega^2$$

于是得

$$T_{m,n,l}(t) = A'_{mnl}\cos\omega t + B'_{mnl}\sin\omega t$$

因此，方程的形式解为

$$u(x,y,z;t) = \sum_{m,n,l=1}^{\infty}\left(A_{mnl}\cos\omega t + B_{mnl}\sin\omega t\right)\cdot\sin m\pi x\sin n\pi y\sin l\pi z$$

........................(10 分)

将定解条件在固有函数系上展开，比较对应项系数，得

$$A_{111} = 1, A_{mnl} = 0(m,n,l\neq 1), B_{mnl} = 0$$

因此，定解问题的解为

$$u(x,y,z;t) = \cos\sqrt{3}\pi at\sin\pi x\sin\pi y\sin\pi z$$

........................(15 分)

五、（本题 15 分）有一个内径为 a，外径为 $2a$ 的均匀球壳，其内、外表面温度分别为 0 和 u_0。试求球壳内的温度分布。

解：首先根据问题描述写出定解问题

$$\begin{cases}\Delta u = 0, a < r < 2a\\ u|_{r=a} = 0, u|_{r=2a} = u_0\end{cases}$$

........................(5 分)

由题意知：u 只和 r 有关，所以，定解问题可以转化为

$$\begin{cases}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) = 0\\ u|_{r=a} = 0, u|_{r=2a} = u_0\end{cases}$$

........................(10 分)

进而得到方程解为

$$u(r,\theta) = u(r) = 2u_0\left(1-\frac{a}{r}\right)$$

........................(15 分)

说明：由于问题具有对称性，因此可以直接转化为关于 r 的常微分方程求解，而不需要分离变量利用特殊函数进行求解，这一点值得注意。

六、（本题 15 分）求解定解问题。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta_3 u(t>0, r>0) \\ u|_{r=0} \text{ 有界}, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ u|_{t-0}=0, u_t|_{t-0}=(1+r^2)^{-2} \end{cases}$$

解：由于定解问题具有对称性，只和 r 相关，所以定解问题可以写作

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)u(t>0, r>0) \\ u|_{r=0} \text{ 有界}, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ u|_{t-0}=0, u_t|_{t-0}=(1+r^2)^{-2} \end{cases}$$

........................(3 分)

对 t 做拉普拉斯变换得

$$L\left[u_{tt}\right]=p^2U-pU(0,r)-u_t(0,r)=p^2U-\left(1+r^2\right)^{-2}$$

得到常微分方程

$$p^2U-\left(1+r^2\right)^{-2}=a^2\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2a^2}{r}\frac{dU}{dr}$$

........................(7 分)

利用常数变易法求解常微分方程，并作反变换得

$$u=\frac{t}{[1+(r-at)^2][1+(r+at)^2]}$$

........................(15 分)

七、（本题 15 分）请写出定解问题对应的格林函数，并利用基本解方法求解定解问题。

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=A\sin\omega t(0<x<l, t>0) \\ u_x|_{x=0}=0, u_x|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=0 \end{cases}$$

解：由题意知，格林函数满足固有值问题

$$\begin{cases} G_t-a^2G_{xx}=\delta\left(x-x_0\right)\delta\left(t-t_0\right) \\ G_x|_{x=0}=0, G_x|_{x=l}=0 \\ G|_{t=0}=0 \end{cases}$$

........................(3 分)

利用固有函数展开法, 令

$$G\left(x, t ; x_0, t_0\right)=\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{n \pi}{l} x$$

其中 $T_n(t)$ 满足

$$\left\{\begin{array}{l}T_n^{\prime}(t)+\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_n(t)=\delta\left(t-t_0\right) \frac{2}{l} \cos \frac{n \pi x_0}{l} \\ T_n(0)=0\end{array}\right.$$

解得

$$T_n(t)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{2}{l} \cos \frac{n \pi x_0}{l} \mathrm{e}^{-\left(\frac{n \pi a}{l}\right)^2\left(t-t_0\right)}, & t \geq t_0 \\ 0, & t<t_0\end{array}\right.$$

进而得到格林函数为

$$G\left(x, t ; x_0, t_0\right)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n \pi x_0}{l} \cos \frac{n \pi x}{l} \mathrm{e}^{-\left(\frac{n \pi}{l}\right)^2\left(t-t_0\right)}, & t \geq t_0 \\ 0, & t<t_0\end{array}\right.$$

……………………(10 分)

由定解问题形式知，解的积分表达式为

$$u(x, t)=\int_0^t \int_0^l A \sin \omega t_0 G\left(x, t ; x_0, t_0\right) \mathrm{d} x_0 \mathrm{d} t_0$$

所以，定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &=\int_0^t \int_0^l A \sin \omega t_0 \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n \pi x_0}{l} \cos \frac{n \pi x}{l} \mathrm{e}^{-\left(\frac{n x u}{l}\right)^2\left(t-t_0\right)} \mathrm{d} x_0 \mathrm{d} t_0 \\ &=\frac{2 A}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{m \pi a}{l}\right)^2} \cos \frac{n \pi x}{l} \int_0^t \mathrm{e}^{\left(\frac{n \pi \alpha}{l}\right)^2 t_0} \sin \omega t_0 \mathrm{d} t_0 \int_0^l \cos \frac{n \pi x_0}{l} \mathrm{d} x_0\end{aligned}$$

又

$$\int_0^1 \cos \frac{n \pi x_0}{l} \mathrm{d} x_0=\left\{\begin{array}{l}l, n=0 \\ 0, n \neq 0\end{array}\right.$$

所以，解为

$$u(x, t)=\frac{2 A}{l} \int_0^t \sin \omega t_0 \mathrm{d} t_0 \cdot l=\frac{A}{\omega}(1-\cos \omega t)$$

……………………(15 分)

总结

数理方程是一门关于基于物理问题抽象而来的数学方程模型的求解方法的课程，主要内容是关于三类重要数理方程的求解。学习一门课程最重要的是根据课程特点找到合适的学习方法，基于对课程特点的分析，我们可以总结出一种相对有效的学习方法。掌握数理方程的基本概念进而可以能够对题目所给出的问题进行分类，掌握每种方法的适用范围进而能够面对给定的问题选择合适的方法，掌握每种方法的具体操作进而能够实现求解。

在学习这门课程的过程中，一个重要的思想是转化的思想，这种思想也是数学思想中重要的一种。转化的思想本质是希望利用已知来求解未知。具体的操作是：首先选择合适的转化目标，进而研究转化方法，之后求解转化后的问题，最后根据转化后的问题和原问题的关系得到原问题的解。这门课程主要研究偏微分方程的求解，因而一个直观的想法是，利用以往所学关于常微分方程的知识来求解偏微分方程问题。有了这样的认识，对于课程中要学习的几类方法会有更深入的理解。

致谢

首先要感谢教授我这门课程的谢老师。谢老师在专业方面有着深厚的功底，在教学方面善于引导我们以更加轻松的方式来理解问题，并且注重向我们传授数学思想和理念，引导我们建立良好的知识体系结构。在课堂上，谢老师以清晰的讲述让我们能够清楚地把握每一部分知识中的重点，并理解当前所述知识点的具体内容。在课下，谢老师会非常耐心地为我们答疑，帮助我们解决理解上遇到的误区和学习中遇到的困难。正是因为有了谢老师的专业讲授和耐心指导，我能够相对清晰地理解这门课程的知识体系以及细节知识点，顺利地完成这门课程的学习。

衷心地感谢一路走来遇到的每一位老师。感谢有你们的教授和指导，让我能够用丰富的知识来充实自己，并且能够找到适合自己的学习方法和知识体系建构的方法；感谢有你们的鼓励和支持，让我有勇气和信心去面对学习和生活中遇到的各种困难。

感谢爱我的每一位亲人和朋友，是你们给予我爱与被爱的力量，教会我热爱生活，张开怀抱去拥抱阳光。

作为课程助教，我要感谢这学期数理方程 08 班的另一位助教张舒博，我们互相配合，尽自己所能为班级同学们解决遇到的困难。衷心地感谢数理方程 08 班的每一位同学的支持和认可。第一次的助教经历，初见时充满了期待，也充满了紧张。期待这次全新的体验，也为自己是否能够胜任这份工作而紧张。在经历了几次习题课以及日常和同学们的交流后，经验在逐渐丰富，也始终在努力希望能够做得更好。感谢班级的每一位同学一直以来的鼓励和支持，也希望我们都能够继续努力下去，成为更好的自己。

在这份《数理方程复习指导》的编写过程中，主要参考了在谢老师班的课堂笔记、严镇军老师编著的《数学物理方法》、姚端正老师编著的《数学物理方法学习指导》和吴崇试老师编著的《数学物理方法习题指导》等资料。在此，郑重地向谢如龙老师、严镇军老师、姚端正老师、吴崇试老师表示衷心地感谢。

最后，再次感谢谢老师一直以来的帮助和支持，感谢所有老师、亲人、朋友的支持和鼓励，感谢助教张舒博的帮助和配合，感谢 2020 春数理方程 08 班的每

一位同学的鼓励和支持以及所付出的努力。