数学物理方程 B　第十四周作业　5 月 28 日 周四

PB18151866 龚小航

5.3 解下列定解问题：

(1) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(t,0) = u(t,l) = 0\,; \quad 0 < x < l,\ t > 0,\ 0 < \xi < l \\ u(0,x) = \delta(x-\xi) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0 \qquad ; \quad 0 < x < l,\ \ t > 0,\ \ 0 < \xi < l \\ u(0,x) = 0,\ u_t(0,x) = \delta(x-\xi) \end{cases}$

解：(1) 仍然使用分离变量法求解：$u = u(t,x)$，分离变量令 $u = T(t)X(x)$，带入泛定方程：

$$T'(t)X(x) = a^2T(t)X''(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

先求解关于$X(x)$的固有值问题：

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

已经多次解过这个固有值问题，直接写出其结果：

固有值：$\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \ \ n \in \mathbb{N}^+$；　　　固有函数：$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi x}{l} \ \ n \in \mathbb{N}^+$

再将固有值带入确定$T(t)$的常微分方程中去，可得：

$$T'(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2T(t) = 0$$

这是一阶常系数线性齐次微分方程，直接利用通解公式，得：

$$T_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}$$

利用叠加原理 2，将u的含n解相加，即得到级数形式解：

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

最后再根据初始条件确定系数A_n即可：

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \delta(x-\xi)$$

根据展开式的系数，可得：

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \delta(x-\xi)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}$$

其中利用了性质：

$$\int_a^b \delta(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) \quad \big(0 \in (a,b)\big)$$

因此原定解问题的解为：

$$u = u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

(2) 使用分离变量法求解：$u = u(t,x)$，分离变量令 $u = T(t)X(x)$，带入泛定方程：

$$T''(t)X(x) = a^2T(t)X''(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

先求解关于$X(x)$的固有值问题：

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

已经多次解过这个固有值问题，直接写出其结果：

固有值：$\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \ \ n \in \mathbb{N}^+$；　　　固有函数：$X_n(x) = B_n \cos\frac{n\pi x}{l} \ \ n \in \mathbb{N}^+$

特别的，$n = 0$时，$\lambda = 0$，$X_0(x) = A_0x + B_0$，再根据边界条件，$X_0 = B_0$

再将固有值带入确定$T(t)$的常微分方程中去，可得：

$$T''(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2T(t) = 0$$

这是二阶常系数线性齐次微分方程，可以利用特征方程来求解：

$$r^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \alpha + i\beta, \qquad r_1 = \frac{n\pi a}{l}i\,,\ r_2 = -\frac{n\pi a}{l}i$$

其通解为：

$$T_n(t) = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t) = C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t + D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

$$T_0(t) = C_0t + D_0$$

利用叠加原理 2，将u的含n解相加，即得到级数形式解：(其中系数已经合并)

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = C_0t + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t + D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\cos\frac{n\pi x}{l}$$

最后再根据初始条件确定系数即可：

$$u(0,x) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos\frac{n\pi x}{l} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad D_0 = C_n = 0$$

$$u_t(0,x) = C_0 + \frac{n\pi a}{l}\sum_{n=1}^{\infty} D_n\cos\frac{n\pi x}{l} = \delta(x-\xi)$$

根据傅里叶展开式的系数，可得：

$$2C_0 = \frac{\int_0^l \delta(x-\xi)\,\mathrm{d}x}{\int_0^l \cos^2\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x} = \frac{2}{l} \qquad \Longrightarrow \qquad C_0 = \frac{1}{l}\,;$$

$$\frac{n\pi a}{l}D_n = \frac{2}{l}\int_0^l \delta(x-\xi)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l} \qquad \Longrightarrow \qquad D_n = \frac{2}{n\pi a}\cos\frac{n\pi\xi}{l} \ \ (n \in \mathbb{N}^+)$$

再将这些系数带入解的级数表达式中，可得：

$$u = u(t,x) = \frac{t}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi a}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

5.4 利用拉普拉斯方程的基本解，求下列方程的基本解：

(1) $u_{xx}+\beta^2 u_{yy}=0$；($\beta>0$ 且为常数)

(2) $\Delta_2\Delta_2 u=0$；（二维双调和方程）

解：(1) 求方程的基本解，即是求：

$$u_{xx}+\beta^2 u_{yy}=\delta(x,y)$$

为将其化为标准的二维拉普拉斯方程，令 $y=\beta t$，即 $u_{tt}=\beta^2 u_{yy}$

$$\Longrightarrow \quad u_{xx}+\beta^2 u_{yy}=\delta(x,y) \quad \Longrightarrow \quad u_{xx}+u_{tt}=\delta(x,\beta t)=\delta(x,t)$$

再写出二维拉普拉斯方程的基本解：

$$u=\frac{1}{4\pi}\ln(x^2+t^2)=\frac{1}{4\pi}\ln\left(x^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2\right)$$

这就是原方程的基本解。

(2) 求方程的基本解，即是求：

$$\Delta_2\Delta_2 u=\delta(x,y)$$

令 $\Delta_2 u=v$，则有$\Delta_2 v=\delta(x,y)$，即$\Delta_2 u=v=\frac{1}{2\pi}\ln r$，$\Delta_2 u=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)$

联立之，整理可得：

$$r^2u''+ru'=\frac{r^2}{2\pi}\ln r \quad \Longrightarrow \quad \text{解：}\ u=\frac{r^2}{8\pi}\ln r-\frac{1}{8\pi}r^2+C_1\ln r+C_2$$

再将这个结果代回原方程，可得：

$$\Delta_2\Delta_2 u=\Delta_2\Delta_2\left(\frac{r^2}{8\pi}\ln r-\frac{1}{8\pi}r^2+C_1\ln r+C_2\right)$$

将其拆项，可以进一步化简u：

$$\Delta_2\Delta_2\left(-\frac{1}{8\pi}r^2+C_2\right)=0; \quad \Delta_2\Delta_2(C_1\ln r)=\Delta_2\big(C\delta(x,y)\big)=0$$

减去两项，最终的结果为：

$$u=\frac{r^2}{8\pi}\ln r$$

5.5 利用傅里叶变换，求三维亥姆霍兹（Helmhotz）方程的基本解：

$$\text{亥姆霍兹方程：}\Delta_3 u + k^2 u = 0$$

解：求方程的基本解，即是求：

$$\Delta_3 u + k^2 u = \delta(x,y,z)$$

对方程两边做傅里叶变换：

$$\overline{u}(\lambda,\mu,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y,z)e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$F[\Delta_3 u] = -(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\overline{u}\ ;\quad F[k^2 u] = k^2\overline{u}\ ;\quad F[\delta(x,y,z)] = 1$$

因此得到变换后的方程为：

$$-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\overline{u} + k^2\overline{u} = 1$$

可以解出：

$$\overline{u} = \frac{1}{k^2-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}$$

再对其作傅里叶逆变换就可得解：

$$u = F^{-1}[\overline{u}] = F^{-1}\left[\frac{1}{k^2-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}\right] = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu$$

为求解这个逆变换,先需要对其换元：令

$$\begin{cases}\lambda = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \mu = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ \nu = \rho\cos\theta\end{cases},\qquad \text{其中}\rho^2 = \lambda^2+\mu^2+\nu^2$$

$\lambda x+\mu y+\nu z = \vec{\rho}\cdot\vec{r} = \rho r\cos\theta$. 积分就变换为：

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{k^2-\rho^2}e^{-i\rho r\cos\theta}\ \rho^2\sin\theta\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\rho^2}{k^2-\rho^2}e^{-i\rho r\cos\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{\rho^2}{k^2-\rho^2}\left(\int_0^{\pi}e^{-i\rho r\cos\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{\rho^2}{k^2-\rho^2}\left(\int_0^{\pi}e^{-i\rho r\cos\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^{\infty}\frac{\rho\sin(\rho r)}{k^2-\rho^2}\mathrm{d}\rho\end{aligned}$$

为求解这个积分，考察积分：

$$I = \int_0^{\infty}\frac{x\sin(xr)}{x^2-k^2}\mathrm{d}x$$

利用留数定理求解： 令

$$f(z) = \frac{ze^{irz}}{(z+k)(z-k)}$$

显然奇点为 $z=-k,\ z=k$.在复平面的上半平面作半圆积分，半圆的直径在实轴(x 轴)上，且在$k,-k$两点附近以小圆弧绕开。大半圆的半径为R，小半圆的直径也在实轴上，从负向正方向与实轴的焦点依次为$-r_2,-r_1,r_1,r_2$. 以逆时针方向为积分方向。积分回路内部无奇点，由柯西积分公式：

$$\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

再由若尔当引理：

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z}{(z+k)(z-k)} = 0 \ \Longrightarrow\ \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{ze^{irz}}{(z+k)(z-k)}\mathrm{d}z = 0$$

再计算两个小半圆围道的积分，令左半圆为C^-，右半圆为C^+

$$\lim_{r_1,r_2\to k}\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -i\pi\lim_{z\to -k}\frac{ze^{irz}}{(z-k)} = -\frac{i\pi}{2}e^{-irk}$$

$$\lim_{r_1,r_2\to k}\int_{C^+} f(z)\,\mathrm{d}z = -i\pi\lim_{z\to k}\frac{ze^{irz}}{(z+k)} = -\frac{i\pi}{2}e^{irk}$$

令 $r_1,r_2\to k,\ R\to\infty$,即可得到：

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - i\pi\cos kr \ \Longrightarrow\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = i\pi\cos kr$$

取虚部，再取半区间，即可得：

$$I = \frac{\pi}{2}\cos kr$$

最后将这个结果带回逆变换得到的表达式：

$$u = \frac{1}{2\pi^2 r}(-I) = -\frac{1}{4\pi r}\cos kr$$

5.6 求下列空间区域内第一边值问题的格林函数：

(1) 四分之一空间：$x>0,\ y>0$；

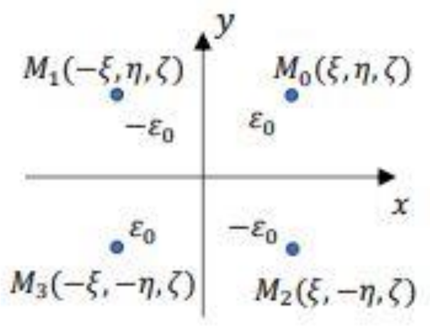
(2) 上半球内：$x^2+y^2+z^2<a^2,\ z>0$；

(3) 层状空间：$0<z<H$

解：(1) 由题意，该问题等价于求解：

$$\begin{cases}\Delta G=-\delta(x-\xi\,,y-\eta\,,\ z-\zeta) \\ G|_{x=0}=G|_{y=0}=0\end{cases}\quad x,y>0$$

令$M_0(\xi,\eta,\zeta)$是四分之一空间内的任意一点，设在该点有一个点电荷ε_0.为满足边界条件，在对称点放入三个像电荷，分别位于 xy 平面的第二三四象限



如左图，添加像电荷M_1,M_2,M_3，电量均在图中标出

令点 $M=(x,y,z)$

$$r(M,M_0)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$
$$r(M,M_1)=\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$
$$r(M,M_2)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$
$$r(M,M_3)=\sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

再由点电荷产生的势能公式：

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

则本题中四个电荷在M点产生的总势能为：

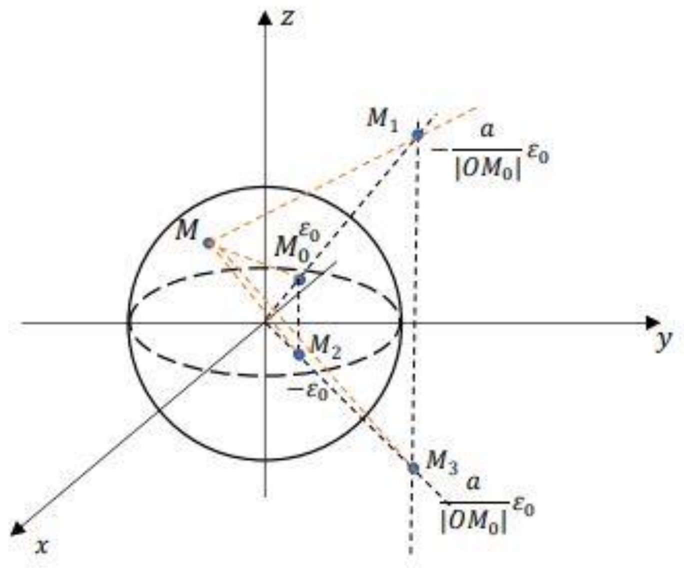
$$\varphi=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{1}{r(M,M_1)}-\frac{1}{r(M,M_2)}+\frac{1}{r(M,M_3)}\right)$$

函数$G=\varphi$满足题设方程和边界条件，因此这就是所求的格林函数。

(2) 由题意，该问题等价于求解：

$$\begin{cases}\Delta G=-\delta(x-\xi\,,y-\eta\,,\ z-\zeta) \\ G|_{x^2+y^2+z^2=R^2}=G|_{z=0}=0\end{cases}\quad x^2+y^2+z^2<a^2,\ z>0$$

令$M_0(\xi,\eta,\zeta)$是上半球空间内的任意一点，设在该点有一个点电荷ε_0. 为满足边界条件，还需要引入一系列像电荷。



如左图，先作M_0点关于球面的对称点M_1，再分别做M_0,M_1关于平面$z=0$的对称点M_2,M_3，令$|OM_0|=\rho_0$

$$\rho_0=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

为满足$G|_{x^2+y^2+z^2=R^2}=0$，需要有：

$$|OM_0|\cdot|OM_1|=a^2$$

再任在球面上取一点M',利用$\varphi(M')=0$来求解M_1,M_3的电量。显然有三角形相似：

$$\Delta OM'M_0\sim\Delta OM_1M',\quad \Delta OM'M_2\sim\Delta OM_3M'$$

由相似比，可得：

$$\frac{r(M',M_1)}{r(M',M_0)}=\frac{a}{|OM_0|}=\frac{r(M',M_3)}{r(M',M_2)}$$

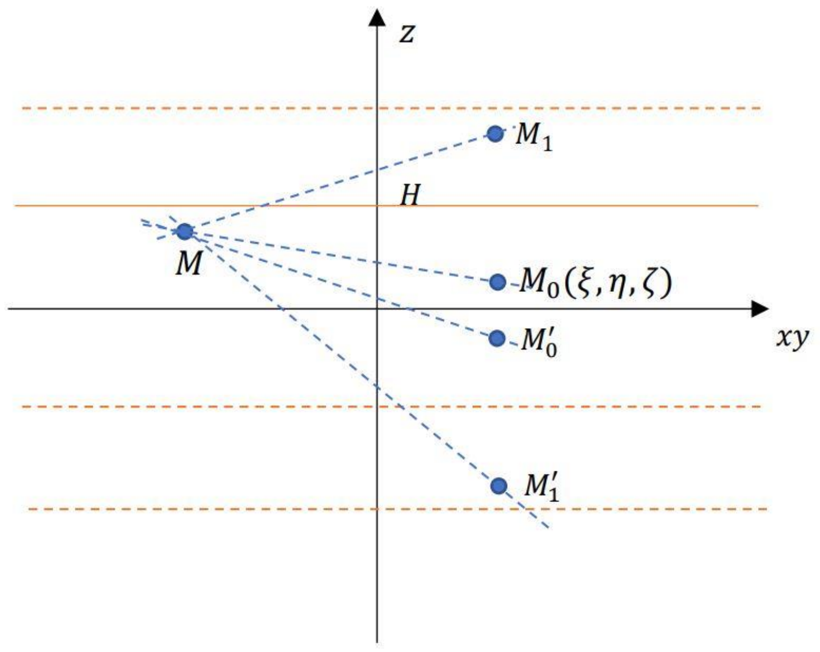
由此M_2,M_3的电量可以确定，标在图中。

最后写出$M=(x,y,z)$点的电势即可：

$$G=\varphi(M)=\sum_{i=0}^{3}\varphi(M_i)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{a}{|OM_0|}\frac{1}{r(M,M_1)}-\frac{1}{r(M,M_2)}+\frac{a}{|OM_0|}\frac{1}{r(M,M_3)}\right)$$

(3) 由题意，该问题等价于求解：

$$\begin{cases}\Delta G=-\delta(x-\xi\,,y-\eta\,,\ z-\zeta) \\ G|_{z=0}=G|_{z=H}=0\end{cases}\quad 0<z<H$$



如左图，令$M_0(\xi,\eta,\zeta)$是层状空间内的任意一点，设在该点有一个点电荷ε_0. 为满足边界条件，还需要引入一系列像电荷。为同时满足$G|_{z=0}=G|_{z=H}=0$，就必须加入像电荷使M_0引起的电势变化都被中和。做法是将所有得到的电荷不断地以$z=0$和$z=H$两个平面作对称，每做一步都能消除上一步得到的所有电荷引起的势能变化，但是又引入了新的电荷，就必须继续加入像电荷以平衡它们。

重复以上步骤无数次，重新标记，令放置正电荷的点$M_0,M_1\cdots\cdots M_n$，放置负电荷为$M_1',M_2',\cdots\cdots M_n'$

$$M_n=(\xi,\eta,\zeta+2nH)\ ;\quad M_n'=(\xi,\eta,2nH-\zeta)$$

在层状空间内任取一点$M=(x,y,z)$，易知：

$$r(M,M_n)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-2nH-\zeta)^2}$$
$$r(M,M_n')=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-2nH+\zeta)^2}$$

最后表示出M点的电势即可：

$$G=\varphi(M)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{r(M,M_n)}-\frac{1}{r(M,M_n')}\right)$$

5.7 求下列平面区域内第一边值问题的格林函数:

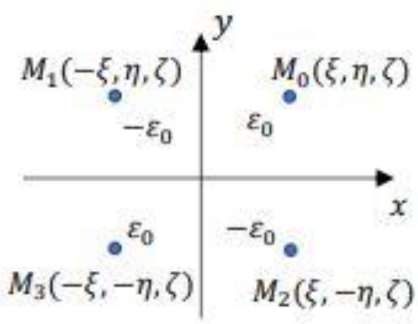
(1) 四分之一平面：$x>0,\ y>0$；

(2) 二分之一单位圆内：$x^2+y^2<1,\ y>0$；

解:（1）由题意，该问题等价于求解:

$$\begin{cases}\Delta G=-\delta(x-\xi\,,y-\eta\,)\\ G|_{x=0}=G|_{y=0}=0\end{cases}\ x,y>0$$

令$M_0(\xi,\eta,\zeta)$是四分之一平面内的任意一点，设在该点有一根无限长直导线，其带电线密度为$\rho_0=\varepsilon_0$. 为满足边界条件，在对称点放入三根无限长直导线，分别位于 xy 平面的第二三四象限。



如左图，相比较于空间中的问题，只需把第三个纵坐标去除，再将电量改为带电密度即可。

令点 $M=(x,y)$

$$r(M,M_0)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$
$$r(M,M_1)=\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}$$
$$r(M,M_2)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}$$
$$r(M,M_3)=\sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2}$$

再由无限长直导线产生的势能公式:（令$r=1$处为势能零点）

$$\varphi=\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0}\ln r$$

则本题中四个电荷在M点产生的总势能为:

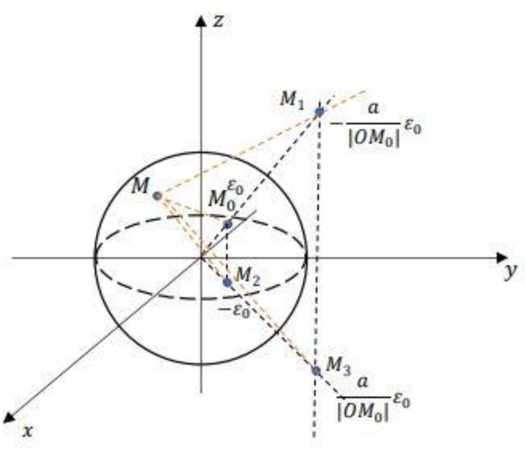
$$\varphi=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r(M,M_0)}-\ln\frac{1}{r(M,M_1)}-\ln\frac{1}{r(M,M_2)}+\ln\frac{1}{r(M,M_3)}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r(M,M_1)r(M,M_2)}{r(M,M_0)r(M,M_3)}$$

函数$G=\varphi$满足题设方程和边界条件，因此这就是所求的格林函数。

(2) 由题意，该问题等价于求解:

$$\begin{cases}\Delta G=-\delta(x-\xi\,,y-\eta)\\ G|_{x^2+y^2=1}=G|_{y=0}=0\end{cases}\ x^2+y^2<1,\ \ y>0$$

令$M_0(\xi,\eta,\zeta)$是二分之一单位圆平面内的任意一点，设在该点有一根无限长直导线，其带电线密度为$\rho_0=\varepsilon_0$.为满足边界条件，在对称点放入三根无限长直导线:



同立体情形，只不过此时所有点都在同一平面内，点电荷变成了带电无限长直导线。

为确定M_1,M_3的带电线密度，在半圆周上任选一点M'，由边界条件$\varphi(M')=0$即可得出:

此时仍然有两对三角形相似:

$$\Delta OM'M_0\sim\Delta OM_1M',\quad \Delta OM'M_2\sim\Delta OM_3M'$$

由相似比可得:

$$\frac{r(M',M_1)}{r(M',M_0)}=\frac{1}{|OM_0|}=\frac{r(M',M_3)}{r(M',M_2)}$$

最后同上一题，利用无限长直导线的电势分布，写出半圆内部任一点$M(x,y,z)$的电势即可:

$$G=\varphi(M)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r(M,M_0)}-\ln\frac{1}{|OM_0|\cdot r(M,M_1)}-\ln\frac{1}{r(M,M_2)}+\ln\frac{1}{|OM_0|\cdot r(M,M_3)}\right)$$

其中 $|OM_0|=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$