011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

记2020科大樱花

——致敬为家国大义挺身而出的勇士

和默默奉献的英雄！

雨骤云积万物喑，绿澎红湃势无垠；

花开岂待三千客，直教春风一片新。

杨金龙摄

2.6 K的可靠性和完全性

回顾：2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定义(M有效)** 设p是K(Y)公式，M是K(Y)的一个一阶结构。若对一切V，p在I=(M, V, v)下有I(p)=t，则称p是**M有效的**，称M为p的一个模型，记为M$\models p$。

❖ **例(续)** 设K_0(Y)不含函数符号，只含个体常元c和谓词符号P。

1\. 取一阶结构M_N=(N, ∅, {>})，其中N是自然数集，>是大于关系，c^M为0，P^M为>。则P(x, c)和$\forall x$P(x, c)都不是M_N有效的。

2\. 取一阶结构**M'$_N$**=(N, ∅, {≥})，其中N是自然数集，≥是自然数集上的大于等于关系，c^M为0，P^M为≥。则P(x, c)和$\forall x$P(x, c)都是M'$_N$有效的。

回顾：2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定理(语义性质)**

1. M $\models p$当且仅当M $\models \forall x p$当且仅当M $\models \forall p$。

❖ **观察** 假如以“M有效”作为一种“真”，则开公式如P(x, c)与其全称闭式如$\forall x$P(x, c)有相同的“真假”。

❖ **推论** 任给闭式p和一阶结构M，M $\models p$和M $\models \neg p$有且仅有一个成立。

❖ **观察** 假如以“M有效”作为一种“真”，则开公式如P(x, c)与其全称闭式如$\forall x$P(x, c)都有真假。

回顾：2.5 一阶逻辑的语义

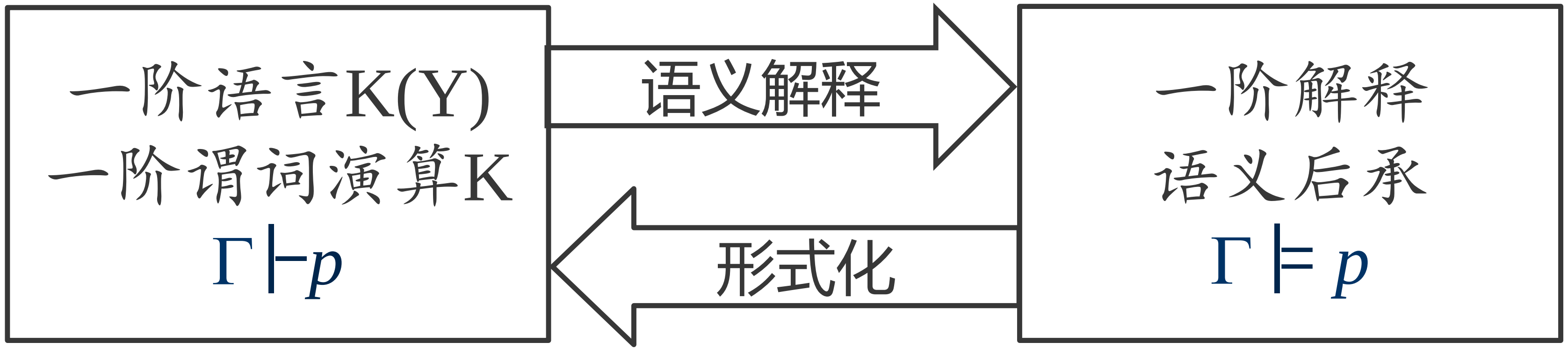
❖ **定义(语义后承)** 设$\Gamma \subseteq K(Y)$，$p \in K(Y)$。p称为Γ的语义后承，记为$\Gamma \models p$，如果对任何一阶结构M，只要$M \models \Gamma$，则有$M \models p$。

◆ **注释** 语义后承$\Gamma \models p$的直观含义是：如果Γ真，则p真；其中，"真"定义为"M有效"。

◆ **注释** 以"M有效"作为一种"真"，意味着对任意公式p，为了判断p的"真假"，要给出一个一阶结构M，并且针对这个M和M上的所有V，$I(p)=t$，$I=(M, V, v)$。

❖ **注释** 一个M=(**D**, **F**, **P**)代表一个具体的应用领域；因此，$\Gamma \models p$反映了Γ与p之间跨领域有效的逻辑推导关系。

2.6 讨论：一阶逻辑的语法部分和语义部分



$\Gamma\vdash p$ 当且仅当 $\Gamma\vDash p$？

2.6 K的可靠性定理

❖ **K的可靠性** 如果$\Gamma\vdash p$，则$\Gamma\models p$。

❖ **引理** K的公理都是逻辑有效的。

◆ **证明** 由K-L关系定理，易证引理对K1-K3成立。

考虑K4。要证当项u对$p(x)$中x自由时，有$\models \forall x\, p(x)\to p(u)$，即对任何一阶结构M=(**D**, **F**, **P**)，有$M\models \forall x p(x)\to p(u)$，又等价于对一切解释I=(M, V, v)，如果I($\forall x\, p(x)$)=t，则I($p(u)$)=t。对任意解释I，假设I($\forall x\, p(x)$)=t，则依定义，对一切d$\in$**D**有$\mathrm{I}_{x/d}(p(x))$=t。设I(u)=d'$\in$**D**，于是I($p(u)$)=$\mathrm{I}_{x/d'}(p(x))$=t，故I($\forall x\, p(x)\to p(u)$)=t。由I之任意性，引理成立。K5类似可证。引理得证。

2. 6 K的可靠性定理

❖ **定理(可靠性)** 如果$\Gamma \vdash p$，则 $\Gamma \models p$。

◆**证明** 设$\Gamma \vdash p$，则存在推理$p_1, \ldots, p_n = p$。施归纳于n。

1. n=1时。有两种情况。第一，$p \in \Gamma$，依语义后承定义，结论成立；第二，p是公理，由引理结论成立。

2. n>1时。有四种情况。第一、二种同1。第三种，p_n由p_i和p_j (i, j<n)用MP得到，即$p_j = p_i \to p_n$。由归纳假设有$\Gamma \models p_i$和$\Gamma \models p_j$。由MP有效性，得$\Gamma \models p_n$。第四种，$p_n = \forall x\, p_i$，i<n。由归纳假设有$\Gamma \models p_i$。由UG有效性，得$\Gamma \models \forall x p_i$，即$\Gamma \models p_n$。

依归纳法原理，结论对一切n成立。

2.6 K的可靠性定理

❖ **推论**（K相容性） 对任何$p\in K(Y)$，$\vdash p$ 和$\vdash \neg p$不同时成立。

◆ **证明** 反证。假设$\vdash p$和$\vdash \neg p$同时成立。于是，根据可靠性定理，$\models p$和$\models \neg p$同时成立，即p和$\neg p$都是逻辑有效式。这是不可能的。

◆ **注释** 在一阶谓词演算K自身中不可能推出矛盾。

2.6 K的可靠性定理

❖ **推论** 对任何$\Gamma\subseteq K(Y)$，如果Γ有模型，则Γ是相容的。

◆ **证明** 反证。假设Γ不相容并且有模型M。于是，存在一个公式$p\in K(Y)$使得$\Gamma\vdash p$ 和$\Gamma\vdash\neg p$同时成立。根据可靠性定理，有$M\models p$和$M\models\neg p$同时成立。根据M有效的定义，这是不可能的。

◆ **注释** 对任何$\Gamma\subseteq K(Y)$，只要Γ有一个模型，则在K中，从Γ不可能推出矛盾。