第一章 概率论基础

1. (1) $\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,\ldots,6\}$,
   $A = \{(i,j) : i > j, i = 2,\ldots,6, j = 1,\ldots,5\}$,
   $B = \{(i,i) : i = 1,\ldots,6\}$,
   $C = \{(i,j) : i+j = 10, i,j = 1,\ldots,6\} = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$.
   (2) $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$,
   $A = \{THH, THT, TTH, TTT\}$,
   $B = \{HHT, HTH, THH\}$,
   $C = \{TTT, HHH\}$.
   (3) $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$
   $A = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1/4\}$
   $B = \{(x,y) : 1/9 < x^2+y^2 < 1/4\}$.

2. 略

3. (1) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$,
   (2) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$,
   (3) $A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$,
   (4) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$.

4. (1) $\emptyset$, (2)$\Omega = [0,2]$, (3) $\bar{A} = \{0 \le x \le 1/2\} \cup \{1 < x \le 2\}$, (4) $B = \{1/4 < x \le 3/2\}$

5. (1) $A \subset B$, 0.7 (2)$A \cup B = \Omega$, 0.5

6. 3/4

7. $4/11!$, $4/A_{11}^7$

8. 略（加法定理）

11. 考虑a + b个不同的球排成一列，第k个球恰好为白球的概率。a + b个球不同排列方式数|Ω| = (a + b)!，第k个球为白球的排列方式个数|A| = a * (a + b - 1)!
则P(A) = ｜A｜/｜Ω｜=a / (a+b)
（组合方法亦可）

9. $41/63$

10. $1-\frac{\binom{365}{50}50!}{365^{50}}$

11. $\frac{a}{a+b}$

12. $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{100}{2}}=1/1650, \frac{\binom{97}{2}}{\binom{100}{2}}=776$

13. $\frac{\binom{4}{m}3^{4-m}}{4^4}, m=0,\ldots,4.$

14. 3.1554

15. $1/4$　　[图片]

19. $|\Omega| = C_{18}^{6}C_{12}^{6}C_{6}^{6}$ （有编号的分组）

$|A| = C_3^1 \cdot C_4^2 C_{14}^4 \cdot C_2^1 C_{10}^5 \cdot C_1^1 C_5^5$ （从3个组中选出1个组来接收三年级的2个班）

故 $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{17}$

$\boxed{注:}$ 若有疑惑，可简化问题：一年级1个班，二年级1个班，三年级4个班，分成3组，求每组都有三年级班的概率．

按照上述思路，可列举出样本空间以及事件的样本点，从而验证上述 C_3^1 该不该乘。

16. $1/8$

17. 0.504

18. $\frac{12!}{6^{12}2^6}$

19. 9/17

20. 0.0033

21. 0.7806

22. (1) 0.25, (2) 0.35, (3) 0.55, (

23、三局两胜：甲胜概率 $p_1 = C_3^2(p)^2(1-p) + C_3^3p^3 = 3p^2(1-p)+p^3 = 3p^2-2p^3$

五局三胜：甲胜概率 $p_2 = C_5^3p^3(1-p)^2 + C_5^4p^4(1-p) + C_5^5p^5 = 10p^3(1-2p+p^2) + 5(p^4-p^5) + p^5$

$= 10p^3 - 20p^4 + 10p^5 + 5p^4 - 5p^5 + p^5$

$= 10p^3 - 15p^4 + 6p^5$

$p_1 - p_2 = 3p^2 - 2p^3 - 10p^3 + 15p^4 - 6p^5$　令：$y = 2p^3 - 5p^2 + 4p - 1$

$= -6p^5 + 15p^4 - 12p^3 + 3p^2$　$y' = 6p^2 - 10p + 4$

$= 3(-2p^5 + 5p^4 - 4p^3 + p^2)$　$= 2(3p^2 - 5p + 2)$

$= -3p^2(2p^3 - 5p^2 + 4p - 1) < 0.$　$\Rightarrow y > 0$ （$p > \frac{1}{2}$ 时）

∴五局三胜甲赢的概率大.

23. 五局三胜更好

24. (1) $N \geq 2n-1, \frac{\binom{N-n+1}{n}}{\binom{N}{n}}$ (2) $N \geq 3n/2-1, n\,mod\,2=0, \frac{\binom{N-n+1}{n/2}}{\binom{N}{n}}; n\,mod\,2=1, 0.$
(3) $N\,mod\,2=0, \frac{\binom{N/2}{n}2^n}{\binom{N}{n}}; N\,mod\,2=1, \frac{\binom{(N-1)/2}{n-1}2^{n-1}}{\binom{N}{n}}$

25. $19/36$, $1/18$

26. $5/11$

27. $3/11$

31. 投两枚骰子共36种情况，投掷一次，和为7或11的情况有8种，概率$\frac{2}{9}$；和为2，3，或12的情况4种，概率$\frac{1}{9}$；其他24种，概率$\frac{2}{3}$。玩家赢的概率P(A) = $\frac{2}{9}+\frac{2}{3}*\frac{2}{9}+(\frac{2}{3})^2*\frac{2}{9}+\ldots=\frac{2}{9}\Sigma_{k=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^k=\frac{2}{9}*\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$

28. $5/12$

29. $\frac{\binom{19}{8}11!}{19^8}$

30. (1) $\binom{11}{8}8!/11^8$ (2) $1/11^7$ (3) $\binom{8}{3}\binom{10}{5}5!/11^8$

31. 2/3