概率理论基本概念

概率的加法定理：

若干互斥事件之和的概率等于概率之和。

$\forall i\neq j \quad A_iA_j=\emptyset \quad P(A_1+\cdots+)=P(A_1)+P\cdots$

条件概率：

$P(B)\neq 0$：在给定B发生条件下，A发生的概率：$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

（$P(B)=0$时，采用区间极限的方法处理）。

独立：

2个事件独立：$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$。

有限多/无穷多事件 $A_1\cdots A_n\cdots$
- 相互独立：从中任取有限个 $A_{i1}\cdots A_{im}$，都有 $P(A_{i1}\cdots A_{im})=P(A_{i1})\cdots P(A_{im})$
- 两两独立：从中任取2个不同的 A_i,A_j，都有 $P(A_iA_j)=P(A_i)\cdot P(A_j)$

相互独立 => 两两独立　　两两独立 推不出 相互独立。

例：4个完全相同的小球，分别在其上写上数字"1"、"2"、"3"、"1,2,3"，记A_i：任随机抽取一球，其上写有数字i

A_1、A_2、A_3两两独立，但不相互独立。

思考：独立是个概率学的概念，不能用现实生活中的逻辑定势来判断独立与否。

全概率公式：

完备事件群：$B_i\cap B_j=\emptyset \ (i\neq j)$，$B_1+\cdots+B_n=\Omega$（必然事件）。

$P(A)=P(AB_1)+\cdots+P(AB_n)=P(B_1)P(A|B_1)+\cdots+P(B_n)\cdot P(A|B_n)$

作用：构造完备事件群以辅助求解 $P(A)$。

人为增加条件。

贝叶斯公式：

$P(B_i|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{\sum_j P(B_j)\cdot P(A|B_j)}$

执果索因

主要之处在于：思想。

随机变量及其概率分布

随机变量："值随机会而定"的变量.

$\underbrace{\text{值随机会}}_{\text{概率}}\ \underbrace{\text{而定}}_{\text{试验结果}}$

离散型随机变量：只能取有限个（或可数无限个）值.

连续型随机变量：本质在于存在概率密度函数

分布函数：$P(X\le x)=F(x)$. $(x\in R)$.

概率密度函数：$f(x)=F'(x)$：$\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \\ \forall a<b.\ P(a\le X\le b) = \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \end{cases}$

重要离散型概率分布：

二项分布：$B(n,p)$　$P(X=i)=C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

泊松分布：$P(\lambda)$：$P(X=i)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^i}{i!}$　二项分布的"极限"形式　$n\to\infty,\ p\to 0,\ np\to\lambda$.

$$P(X=i)=\frac{n!}{i!(n-i)!}p^i(1-p)^{n-i} \longrightarrow \frac{n^i}{i!}\cdot p^i\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{(-\frac{n}{\lambda})\cdot(-\lambda)} \to e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^i}{i!}$$

重要 多项分布：$M(N;p_1,\dots p_n)$　$P(X_1=k_1\dots X_n=k_n)=\boxed{\frac{N!}{k_1!\dots k_n!}}\,p_1^{k_1}\dots p_n^{k_n}$ → 把N个相异物体排列的n值，各值依次有$k_1\dots$个的不同方法的个数

$A_1\dots A_n$是某一试验的完备事件群，A_i发生概率为p_i，将试验独立重复N次，X_i记N次试验中A_i发生次数.

重要连续型分布：

正态分布：$N(\mu,\sigma^2)$　$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$　$x\in R$.

指数分布：$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0. \end{cases}$

均匀分布：$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a\le x\le b \\ 0, & \text{else}. \end{cases}$

二维正态：$N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$：$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-a)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x_1-a)(x_2-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-b)^2}{\sigma_2^2}\right)}$

多维随机变量：如果每一维（分量）都是一维离散型随机~~变量~~ 变量 → X是离散型

连续：　　　　　　　　　　　　X是连续型

无论是一维还是多维，连续型随机变量的定义实质在于：存在概率密度函数$f(x)$.

边缘分布：只关心多维随机变量中一部分分量的分布情况：

研究方法：离散：对无关"变分量求和.

连续：……求积分.

边缘概率: 二维正态 $N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

正态的边缘分布还是正态

$X_1 \sim N(a,\sigma_1^2)$ $X_2 \sim N(b,\sigma_2^2)$.

条件概率分布:

离散: $P(X_1=a_i \mid X_2=b_j)=\dfrac{P(X_1=a_i, X_2=b_j)}{P(X_2=b_j)} = \dfrac{p_{ij}}{\sum_k p_{kj}}$

连续: $f_2(x_2 \mid x_1)=\dfrac{f(x_1,x_2)}{f_1(x_1)}$.

$(X_1,X_2) \sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

$$f_2(x_2 \mid x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\cdot\left[x_2-\left(b+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-a)\right)\right]^2}.$$

即: $X_2 \mid X_1=x_1 \sim N\left(b+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-a),\ \sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$

正态的条件概率分布还是正态

随机变量的独立性:

$(X_1,\cdots X_n)$: $f(x_1\cdots x_n)$:

独立: $f(x_1\cdots x_n)=f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)$.

判断方法: 如果: $f(x_1\cdots x_n)=g_1(x_1)\cdots g_n(x_n)$ 其中 g_i 只依赖 x_i, 则说明独立.

$X_1\cdots X_n$ 独立,

$Y_1=g_1(X_1\cdots X_m)$ $Y_2=g_2(X_{m+1}\cdots X_n)$ $\Rightarrow$ Y_1、Y_2 独立.

二维正态: $\rho=0 \Rightarrow X_1\ X_2$ 独立.

$\rho=0 \Rightarrow X_1\ X_2$ 独立.

随机变量的函数的概率分布:

离散: 把: $Y=g(X_1\cdots X_n)$ 可以取的不同值找出来, 把与这个值对应的概率加起来.

连续:

一元函数: $P(Y\le y)=P(\cancel{g(X)\le y})$ $P(\underbrace{g(X)\le y}_{\Omega})=\int_{\Omega} f(x)dx$.

二元函数:

$Y_1=g_1(X_1,X_2)$ $Y_2=g_2(X_1,X_2)$.

$X_1=h_1(Y_1,Y_2)$, $X_2=h_2(Y_1,Y_2)$.

记 $J(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$

$P((Y_1,Y_2)\in A)=P((X_1,X_2)\in B)=\iint_B f(x_1,x_2)dx_1dx_2$.

$$P((Y_1,Y_2)\in A)=\iint_A f(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2))\,|J(y_1,y_2)|\,dy_1\,dy_2.$$

注意：先看定义后求里.

注意变换后的$\boxed{\text{取值范围}}$.

有时要求：$Y_1=g_1(X_1,X_2)$ 的分布：

一种方法：找出：$\{Y_1\le y\}$ 对应 (X_1,X_2) 平面上区域 A_y：$P(Y_1\le y)=\iint_{A_y} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$

另一种方法：补上另一个函数：$Y_2=g_2(X_1,X_2)$ 使 $(X_1,X_2)\longleftrightarrow(Y_1,Y_2)$ 一一对应.

求出 (Y_1,Y_2) 的联合概率密度函数 $l(y_1,y_2)$

$$l(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} l(y_1,y_2)\,dy_2.$$

重要结论：

X_1,X_2 独立，$X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X_1+X_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

$(X_1,X_2)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$. $X_1+X_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)$

$X_1\cdots X_n$ 相互独立. $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$：$X_1+\cdots+X_n\sim N(\mu_1+\cdots+\mu_n,\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2)$.

正态的和，仍是正态.

重要函数：

$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt\quad(x>0)$，$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\quad(x,y>0)$.

重要结论：

X_1, X_2 独立，$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

$(X_1, X_2) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)$

$X_1 \cdots X_n$ 相互独立，$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$：$X_1+\cdots+X_n \sim N(\mu_1+\cdots+\mu_n, \sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2)$.

正态的和，仍是正态.

重要函数：

$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x>0)$.　　$B(x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad (x, y>0)$.

$\Gamma(1) = 1$　　$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$　　$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$；

$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

重要分布：$X_1 \cdots X_n$ iid $N(0,1)$　$Y = X_1^2+\cdots+X_n^2 \sim \chi_n^2$：自由度为 n 的卡方分布.

$$K_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n-2}{2}}, & x>0. \end{cases}$$

* $X \sim Exp(\lambda)$　则：$2\lambda X \sim \chi_2^2$．即 $\rightarrow \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \ (x>0)$.

X_1, X_2 独立，$X_1 \sim \chi_n^2$，$X_2 \sim N(0,1)$　$Y = \frac{X_2}{\sqrt{X_1/n}} \sim t_n$：自由度为 n 的 t 分布.

$t_n(y) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} (1+\frac{y^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} \quad (y \in R)$　（关于原点对称．$EX=0$）.

X_1, X_2 独立，$X_1 \sim \chi_n^2$，$X_2 \sim \chi_m^2$，$Y = \frac{X_2/m}{X_1/n} \sim F_{mn}$：自由度为 (m,n) 的 F 分布.

$f_{mn}(y) = m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{m-2}{2}} \cdot (my+n)^{-\frac{m+n}{2}} \quad (y>0)$.

$X_1 \cdots X_n$ iid $N(\mu, \sigma^2)$，$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$，$S^2 = \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$.

则有：$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 \rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$

$\bar{X}$ 和 $\sum(X_i-\bar{X})^2$ 独立.

$\rightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1}$

附录：几个重要结论的思考过程

*二维正态随机变量的两个分量的和仍服从正态分布

$$(X_1, X_2) \sim N(a, b, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho).$$

$$Y = X_1 + X_2 \sim N(a+b, \sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)$$

$$l(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\underbrace{\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-a)(y-x-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-x-b)^2}{\sigma_2^2}}_{*}\right)}$$

$$(*) = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \cdot \left(\sigma_2^2(x-a)^2 - \sigma_1\sigma_2 \cdot 2\rho \cdot (x-a)(y-x-b) + \sigma_1^2(y-x-b)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \cdot \left(\sigma_2^2(x^2-2ax+a^2) - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \cdot (-x^2+(y-b+a)x - a(y-b)) + \sigma_1^2(x^2+(y-b)^2-2x(y-b)) \right)$$

$$= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \cdot \left((\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)x^2 - 2\cdot(a\sigma_2^2+\rho\sigma_1\sigma_2(a+y-b)+(y-b)\cdot\sigma_1^2)x + a^2\sigma_2^2 + (y-b)^2\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 a(y-b) \right)$$

$$= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \cdot \left(\left(\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2} \cdot x - \frac{a\sigma_2^2+\rho\sigma_1\sigma_2(a+y-b)+(y-b)\sigma_1^2}{\boxed{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2}}}\right)^2 + ** \right.$$

$$** : \frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2} \cdot \left((\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)\cdot(a^2\sigma_2^2+(y-b)^2\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2 a(y-b)) - (a\sigma_2^2+\rho\sigma_1\sigma_2(a+y-b)+(y-b)\sigma_1^2)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2} \left(a^2\sigma_1^2\sigma_2^2 + a^2\sigma_2^4 + 2\rho\sigma_1\sigma_2^3 a^2 + (y-b)^2\cdot\sigma_1^4 + (y-b)^2\cdot\sigma_1^2\sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1^3\sigma_2(y-b)^2 \right.$$

$$\sigma_2^2(x^2-2ax+a^2) - 2\rho\sigma_1\sigma_2\cdot(-x^2+(y-b+a)x - a(y-b)) + \sigma_1^2(x^2+(y-b)^2-2x(y-b)))$$

$$= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\cdot\left((\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)x^2 - 2\cdot(a\sigma_2^2+\rho\sigma_1\sigma_2(a+y-b)+(y-b)\cdot\sigma_1^2)x + a^2\sigma_2^2+(y-b)^2\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2 a(y-b)\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\cdot\left(\left(\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2}\,x - \frac{a\sigma_2^2+\rho\sigma_1\sigma_2(a+y-b)+(y-b)\sigma_1^2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2}}\right)^2 + \text{常数}\right).$$

$$\text{常数}: \frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2}\cdot\left((\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)\cdot(a^2\sigma_2^2+(y-b)^2\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2 a(y-b)) - (a\sigma_2^2+\rho\sigma_1\sigma_2(a+y-b)+(y-b)\sigma_1^2)^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2}\Big(a^2\sigma_1^2\sigma_2^2 + a^2\sigma_2^4 + 2\rho\sigma_1\sigma_2^3\cdot a^2 + (y-b)^2\cdot\sigma_1^4 + (y-b)^2\cdot\sigma_1^2\sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1^3\sigma_2(y-b)^2$$

$$+ 2\rho\cdot\sigma_1^3\sigma_2 a(y-b) + 2\rho\cdot\sigma_1\sigma_2^3\cdot a(y-b) + 4\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2 a(y-b).$$

$$- a^2\sigma_2^4 - (y-b)^2\cdot\sigma_1^4 - \rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2(a^2+(y-b)^2+2a(y-b)) - 2a(y-b)\sigma_1^2\sigma_2^2$$

$$- 2\rho\cdot\sigma_1\sigma_2^3\cdot(a^2+a(y-b)) - 2\rho\cdot\sigma_1^3\sigma_2(a(y-b)+(y-b)^2)\Big)$$

$$= \frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2}\cdot\sigma_1^2\sigma_2^2\cdot(1-\rho)^2\cdot(y-b-a)^2.$$

$$(※): \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\cdot\left(\left(\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2}\,x - \frac{a\sigma_2^2+\rho\sigma_1\sigma_2(a+y-b)+(y-b)\sigma_1^2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2}}\right)^2 + \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2}(y-b-a)^2\right)$$

$$\text{令}: \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2}\,x - \frac{a\sigma_2^2+(y-b)\sigma_1^2+\rho\sigma_1\sigma_2(a+y-b)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2}}}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = t.$$

$$\text{则}: f(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{-\frac{(y-a-b)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2}}\,dt.$$

$$= \frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2}}\cdot e^{-\frac{(y-a-b)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)}}\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{=\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2}}\cdot e^{-\frac{(y-a-b)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)}}$$

注意：框标志处为易错点，配方的时候x前系数不为1时注意常数项的大小。

*独立标准正态随机变量平方和服从卡方分布

首先，利用随机变量函数的概率分布的求解方法，得到随机变量和的分布的计算方法。因为求和项数为未知常数n，即要采用归纳法来求解。首先从n=1开始，逐步增加n，将得到的概率密度函数做比较，找到规律，之后利用数学归纳法进行验证。

$X_1 \cdots X_n$ iid $N(0,1)$ $\quad Y = X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi_n^2$

$$k_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}) \cdot 2^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n-2}{2}}, & x > 0. \end{cases}$$

归纳： $n=1$时： $Y = X_1^2$：

$y<0$时： $P(Y \le y) = 0$

$y>0$时： $P(Y \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$l(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} - \left(-\frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \quad (y>0)$

$n=2$时：

$Y = X_1^2 + X_2^2$

$l(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y-x) dx = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y-x}{2}} \frac{1}{\sqrt{y-x}} dx$

$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \int_0^y \frac{1}{\sqrt{x(y-x)}} dx$ $\quad \cancel{x=yt} \quad \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{y}{2}} \cdot \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt$

其中： $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1} = \pi$

$l(y) = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{y}{2}} \cdot \pi = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \quad (y>0)$

$n=3$时： $Y = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$

其中: $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1} = \pi$

$f(y) = \frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{y}{2}}\cdot\pi = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} \quad (y>0)$

$n=3$时:

$Y = X_1^2+X_2^2+X_3^2$.

$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y-x)dx = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2}e^{-\frac{y-x}{2}}dx$

$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\cdot\int_0^y\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y}{2}}\cdot\sqrt{y} \quad (y>0)$

$n=4$时:

$Y = X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2$

$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y-x)dx = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y-x}{2}}\sqrt{y-x}\,dx$

$= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y}{2}}\int_0^y \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{y-x}\,dx}_{*}$

$*$: $\int_0^y\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{y-x}\,dx \xlongequal{令x=yt} \int_0^1\frac{1}{\sqrt{yt}}\sqrt{y(1-t)}\,y\,dt$

$= y\cdot\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt = y\cdot B(\frac{1}{2},\frac{3}{2}) = y\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)}$

$= y\cdot\frac{\sqrt{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{1} = \frac{\pi}{2}\cdot y$

$f(y) = \frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{y}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}y = \frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{y}{2}}\cdot y \quad (y>0)$

$n=1$时: $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \boxed{e^{-\frac{y}{2}}}\ \boxed{\frac{1}{\sqrt{y}}}$

$n=2$时: $f(y) = \frac{1}{2}\ \boxed{e^{-\frac{y}{2}}}\ \boxed{y^0}$

$n=3$时: $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \boxed{e^{-\frac{y}{2}}}\ \boxed{\sqrt{y}}$

$n=4$时: $f(y) = \frac{1}{4}\ \boxed{e^{-\frac{y}{2}}}\ \boxed{y}$

~~奇数含π~~
~~偶数不含~~

考虑$\Gamma(\frac{n}{2})$. $\quad e^{-\frac{y}{2}} \quad y^{\frac{n-2}{2}}$.

$\Gamma(\frac{1}{2})\ \sqrt{\pi} \longrightarrow \sqrt{2\pi}$

$\Gamma(1)\ 1 \longrightarrow \frac{1}{2}$. $\quad\Rightarrow 2^{\frac{n}{2}}$ $\quad\Rightarrow f(y) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{y}{2}}y^{\frac{n-2}{2}} \quad (y>0)$

$\Gamma(\frac{3}{2})\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \longrightarrow \sqrt{2\pi}$

$\Gamma(\frac{4}{2})\ 1 \longrightarrow 4$.

$\Gamma(\frac{1}{2})$ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\rightarrow$ $\sqrt{2\pi}$ $\Rightarrow 2^{\frac{n}{2}}$ $\Rightarrow L(y)=\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{y}{2}}y^{\frac{n-2}{2}}\ (y>0)$.

$\Gamma(\frac{3}{2})$ 1 $\rightarrow$ 4.

验证：

① $n=1$时 命题成立.

② 假设$n=k$时命题成立. 即:

$\cancel{Y=X_1^2+\cdots+X_k^2}$

$X_1\cdots X_k \overset{iid}{\sim} N(0,1)$ $Y=X_1^2+\cdots+X_k^2 \sim \chi_k^2$

$$L(y)=\frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}}\cdot e^{-\frac{y}{2}}y^{\frac{k-2}{2}}\quad (y>0)$$

当$n=k+1$时,

$$Y=X_1^2+\cdots+X_k^2+X_{k+1}^2$$

$$L(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y-x)dx=\int_0^y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}}\cdot e^{-\frac{y-x}{2}}(y-x)^{\frac{k-2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}}e^{-\frac{y}{2}}\cdot\int_0^y\frac{1}{\sqrt{x}}(y-x)^{\frac{k-2}{2}}\ *$$

$*$: 令$x=yt$ $=\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{k-2}{2}}\cdot y^{\frac{k-2}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}\cdot y\,dt=y^{\frac{k-1}{2}}B(\frac{1}{2},\frac{k}{2})$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k+1}{2})}\cdot y^{\frac{k-1}{2}}$$

$$L(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k+1}{2})}e^{-\frac{y}{2}}y^{\frac{k-1}{2}}=\frac{1}{\Gamma(\frac{k+1}{2})2^{\frac{k+1}{2}}}e^{-\frac{y}{2}}y^{\frac{k-1}{2}}\quad(y>0)$$

由①②知：命题对$\forall n\in N^*$都成立.

求解时候的技巧：利用重要积分函数Gamma函数和Beta函数进行求解。

*自由度为n的t分布

X_1、X_2 独立. $X_1\sim\chi_n^2$, $X_2\sim N(0,1)$

$$Y=X_2/\sqrt{X_1/n}\sim t_n.$$

$$t_n(y)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}(1+\frac{y^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

$\sqrt{X_1/n}\geq 0$:

$$L(y)=\int_0^{\infty}x\cdot f(x,yx)dx.$$

$Z=\sqrt{X_1/n}$: 故 $P(Z\leq z)=P(\sqrt{X_1/n}\leq z)=P(X_1\leq nz^2)\Rightarrow$

$$g(z)=2n\cdot z\cdot k_n(nz^2)\quad(z>0).$$

$$L(y)=\int_0^{\infty}x\cdot f(x,yx)dx=\int_0^{\infty}x\cdot 2nx\cdot\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}\cdot e^{-\frac{nx^2}{2}}(nx^2)^{\frac{n-2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(yx)^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2n\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}\cdot n^{\frac{n-2}{2}}\cdot\int_0^{\infty}e^{-\frac{n+y^2}{2}x^2}x^n dx\qquad 令\ \frac{n+y^2}{2}x^2=t.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}2n\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}n^{\frac{n-2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{n+y^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{n+y^2}}\right)^n\cdot\underbrace{\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}dt}_{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\cdot\sqrt{n\pi}}\cdot(1+\frac{y^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

*自由度为（m，n）的F_{mn}分布

X_1、X_2独立，$X_1 \sim \chi^2_n$，$X_2 \sim \chi^2_m$，$Y = \dfrac{X_2/m}{X_1/n} \sim F_{mn}$.

$$f_{mn}(y) = m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot y^{\frac{m-2}{2}} \cdot (my+n)^{-\frac{m+n}{2}} \quad (y>0).$$

$\underline{X_1/n > 0}$： $Z = X_1/n$. $P(Z \le z) = P(X_1/n \le z) = P(X_1 \le nz)$.

$g(z) = n \cdot k_n(nz)$.

X_2/m： $g(z) = m \cdot k_m(mz)$.

$$l(y) = \int_0^\infty x \cdot f(x, yx)\,dx = \int_0^\infty x \cdot n \cdot k_n(nx) \cdot m\, k_m(myx)\,dx = m \cdot n \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2}) 2^{\frac{m+n}{2}}} \cdot \int_0^\infty x \cdot e^{-\frac{nx}{2}} (nx)^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{myx}{2}} (myx)^{\frac{m-2}{2}} dx$$

$$= m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot 2^{-\frac{m+n}{2}} \cdot y^{\frac{m-2}{2}} \cdot \underbrace{\int_0^\infty e^{-\frac{my+n}{2}x} x^{\frac{m+n-2}{2}} dx}_{= \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{\frac{m+n-2}{2}} \left(\frac{2}{my+n}\right)^{\frac{m+n-2}{2}} \left(\frac{2}{my+n}\right) dt} \quad \text{令} \frac{my+n}{2}x = t.$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} y^{\frac{m-2}{2}} (my+n)^{-\frac{m+n}{2}} \quad (y>0)$$

*关于独立同分布随机变量均值、方差的重要结论

$X_1 \cdots X_n$ iid $N(\mu, \sigma^2)$ $\bar{X} = \dfrac{\sum X_i}{n}$：

$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/n} \sim N(0,1)$

$\dfrac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$\bar{X}$与$\sum(X_i-\bar{X})^2$独立.

取一正交方阵A. A的第一行各元素都为$\frac{1}{\sqrt{n}}$.

作正交变换：$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$.

由正交变换性质：$\sum X_i^2 = \sum Y_i^2$ $|J| = 1$

又由第一行元素都为$\frac{1}{\sqrt{n}}$：则$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum X_i = \sqrt{n}\bar{X}$

$$f(x_1 \cdots x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (\sum(x_i - \mu)^2)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (\sum x_i^2 - 2\mu \cdot \sum x_i + n\mu^2)}$$

$$g(y_1 \cdots y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (\sum y_i^2 - 2\mu \cdot \sqrt{n} y_1 + n\mu^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y_1 - \sqrt{n}\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{n-1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=2}^n y_i^2}$$

故：$Y_1 \cdots Y_n$独立. $Y_1 \sim N(\sqrt{n}\mu, \sigma^2)$ $Y_i \sim N(0, \sigma^2)$ $(i=2, \cdots n)$

则：Y_1与$Y_2^2 + \cdots + Y_n^2$独立.

$$Y_2^2 + \cdots + Y_n^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - Y_1^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

所以：$\dfrac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$，$\bar{X}$与$\sum(X_i - \bar{X})^2$独立.

注意：自由度的大小

随机变量的数字特征

在讨论数学期望相关的问题时，第一步要做的是要检查期望是否存在！
记住：先有意义后求量！

数学期望：

在研究数学期望时，首先要判断：$\boxed{EX\text{是否存在}}$

若：X只能取有限个值，$a_1 \cdots a_n$ 对应概率 $p_1 \cdots p_n$，则 EX存在，$EX=\sum_{i=1}^{n} a_i p_i$

若 X 为离散型变量，取无穷多值，则：当：$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| p_i < \infty$ 时，EX存在，$EX=\sum_{i=1}^{\infty} a_i p_i$

若 X 为连续型随机变量，则当：$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,dx < \infty$ 时 EX存在，$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

$X \sim P(\lambda)$，$EX=\lambda$.

$X \sim Exp(\lambda)$，$\boxed{EX=\frac{1}{\lambda}}$，对于指数分布，注意说法：参数为 λ 的指数分布（←→ 期望为 $\frac{1}{\lambda}$ 的指数分布）

期望为 λ …（←→ 参数为 $\frac{1}{\lambda}$）

数学期望性质：

若干随机变量和的期望等于期望的和。（不要求独立）

$$E(X_1+\cdots+X_n)=EX_1+\cdots+EX_n$$

→ 分解成若干个$\boxed{\text{示性变量}}$ → $X_i=\begin{cases}1, & A_i\text{发生}\\ 0, & A_i\text{不发生}\end{cases}$ 去求 EX.

若干$\boxed{\text{独立}}$随机变量之积的期望等于期望之积。

$$E(X_1\cdots X_n)=EX_1\cdots EX_n$$

随机变量函数的期望：

当：$\sum |g(a_i)| p_i < \infty$ 时：$E(g(X))=\sum g(a_i)p_i$.

当：$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f(x) < \infty$ 时：$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$.

$X \sim \chi^2_n$，$EX=n$.　$X \sim t_n$　$EX=0$（当 $n>1$ 时 EX存在）.

$X \sim F_{m,n}$.　$EX=\frac{n}{n-2}$（$n>2$ 时 EX存在）.

例：$X \sim B(n,p)$，求：EX.

X为n次独立试验中，A发生次数.

记 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{次试验中 A发生}\\ 0, & \cdots\text{不}\cdots\end{cases}$

$X=X_1+\cdots+X_n$.

$EX=EX_1+\cdots+EX_n$.

$EX_i=1\cdot p+0\cdot(p-1)=p$.

则 $EX=np$.

条件期望.

$$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f(y|x)\,dy.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}E(Y|X=x)\cdot f_1(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot\frac{f(x,y)}{f_1(x)}dy\right)\cdot f_1(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_2(y)\,dy=EY.$$

$\Rightarrow$. $EY=E(E(Y|X))$ 全期望公式

利用条件期望求期望: $E(Y|x)=g(x)\rightarrow$ 以 X 代替 x 得 $g(X)\rightarrow$ 求: $\underline{E(g(X))}$ EY.

例: $(X,Y)\sim(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 求 EXY.

$\rho=0$ 时, $EXY=EXEY=ab$.

$\rho\neq0$ 时: $E(XY|X=x)=x\cdot E(Y|X=x)=x\cdot\underbrace{(b+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-a))}=g(x)$

$$E(g(X))=E\left(X(b+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X-a))\right)=ab+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}EX^2-a^2\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

$X\sim N(a,\sigma_1^2)$. $Z=\frac{X-a}{\sigma_1}\sim N(0,1)\rightarrow X=\sigma_1 Z+a$

$EX^2=E(\sigma_1 Z+a)^2=\sigma_1^2EZ^2+\underline{2a\sigma_1EZ}+a^2$ $\quad EZ=0,\ EZ^2=1$

$=a^2+\sigma_1^2$

则 $E(XY)=ab+\rho\sigma_1\sigma_2$

中位数: $P(X\le m)=F(m)=\frac{1}{2}$.

方差: $\mathrm{Var}X=E(X-EX)^2=EX^2-(EX)^2$.

(独立随机变量和的方差等于方差的和.

$$\mathrm{Var}(X_1+\cdots+X_n)=\mathrm{Var}X_1+\cdots+\mathrm{Var}X_n.$$

矩: $E(X-c)^k$: X关于c的k阶矩:

$c=0$ 原点矩 $\quad c=EX$ 中心矩.

协方差:

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E((X-EX)(Y-EY))=EXY-EXEY.$$

~~EX~~ $(\mathrm{Cov}(X,Y))^2\le\sigma_1^2\sigma_2^2$.

相关系数: 标准化的协方差 表征随机变量之间的线性相关程度

两个随机变量独立=>相关系数为0 逆命题不一定成立

相关系数：$Corr(X,Y)=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}$.

描述 线性 相关程度.

~~$Corr(X,Y)=0$ $\not\to$ 独立~~.

独立 $\longrightarrow$ $Corr(X,Y)=0$.

$Corr(X,Y)=0$ $\xrightarrow[\text{一般不能}]{\times}$ 独立.

特例：$(X,Y)\sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ $Corr(X,Y)=\rho$.

此时：$Corr(X,Y)=0$ 即 $\rho=0$ $\to$ 独立.

大数定理：

$X_1\cdots X_n$ i.i.d. $EX=a$, $VarX=\sigma^2$.

对 $\forall\varepsilon>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}P(|\bar{X}_n-a|\geq\varepsilon)=0$

$\bar{X}_n$ 依概率收敛到：EX

马尔科夫不等式：~~$P(Y\geq a)\leq\frac{E(Y)}{a}$~~.

Y：只取非负值.

则对 $\forall\varepsilon>0$：$P(Y\geq\varepsilon)\leq\dfrac{EY}{\varepsilon}$.

契比雪夫不等式：若 $VarY$ 存在，则 $P(|Y-EY|\geq\varepsilon)\leq\dfrac{VarY}{\varepsilon^2}$.

令 以 $(Y-EY)^2$ 代替上式中 Y：

$P((Y-EY)^2\geq\varepsilon)\leq\dfrac{VarY}{\varepsilon^2}$

$\Updownarrow$

$P(|Y-EY|\geq\varepsilon)$

则：

$P(|\bar{X}_n-EX|\geq\varepsilon)\leq\dfrac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2}\to0$ $(n\to\infty)$.

特例：$\lim\limits_{n\to\infty}P(|p_n-p|\geq\varepsilon)=0$. 频率收敛于概率.

中心极限定理：

$X_1 \dots X_n$ iid $EX=a$. $\mathrm{Var}X=\sigma^2$ $(0<\sigma^2<\infty)$

则有：$\forall x\in R$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum X_i - n\cdot a}{\sqrt{n}\,\sigma}\le x\right)=\Phi(x)$$

依分布收敛到正态分布.

特例：$X_1 \dots X_n$ iid $(0,1)$ 分布：

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right)=\Phi(x)$$

为 二项分布的"极限" $n\to\infty$.

大数定理和中心极限定理分别提出了依概率收敛和依分布收敛的概念。