数学物理方程 B　第十周作业　4 月 23 日 周四

PB18151866 龚小航

3.1 在柱坐标系中对拉普拉斯方程进行变量分离，写出各常微分方程。

解：先写出柱坐标下的拉普拉斯方程：　$u = u(r,\theta,z)$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

直接对其尝试分离变量：令 $u = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$，将其带入方程：

$$R''(r)\Theta(\theta)Z(z) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta)Z(z) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta)Z(z) + R(r)\Theta(\theta)Z''(z) = 0$$

对该方程两边同时除以 $u = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$，并在两端同时乘以$r^2$，得到：

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + r^2\frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0$$

由于前两项仅含r，第三项仅含θ，第四项仅含z，因此他们都只能等于某个常数。

令 $\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda$，$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\mu^2$　则可得 $r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} = \mu^2 - \lambda r^2$

这样就得到了三个常微分方程：

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) - (\mu^2 - \lambda r^2)R(r) = 0 \\ \Theta''(\theta) + \mu^2\Theta(\theta) = 0 \\ Z''(z) + \lambda Z(z) = 0 \end{cases}$$

3.2 计算：$\frac{d}{dx}[xJ_1(ax)]$

解：利用贝塞尔函数的微分性质，可知：

$$\frac{d}{dx}[xJ_1(ax)] = \frac{1}{a}\frac{d}{dx}[(ax)^1J_1(ax)] = \frac{d}{d(ax)}[(ax)^1J_1(ax)] = (ax)^1J_0(ax) = \frac{ax}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x\sin\theta)\,d\theta$$

3.6 利用递推公式证明：$J_2(x) = J_0''(x) - \frac{1}{x}J_0'(x)$

解：先列出贝塞尔函数的两条递推公式：

$$\begin{cases} J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}J_\nu(x) \\ J_\nu'(x) = \frac{\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x) \end{cases}$$

在第二条递推公式中，令 $\nu = 1$，可得：

$$J_1'(x) = \frac{1}{x}J_1(x) - J_2(x) \quad \Rightarrow \quad J_2(x) = \frac{1}{x}J_1(x) - J_1'(x)$$

所以只需再求$J_1(x)$以及$J_1'(x)$：

在第二条递推公式中，令 $\nu = 0$，可得：

$$J_0'(x) = -J_1(x) \quad \Rightarrow \quad J_1(x) = -J_0'(x)$$

直接对上式两边求导，即可得：

$$J_1'(x) = -J_0''(x)$$

再将这两项带入$J_2(x)$表达式的右侧，可得：

$$J_2(x) = \frac{1}{x}J_1(x) - J_1'(x) = \frac{1}{x}\left(-J_0'(x)\right) + J_0''(x) = J_0''(x) - \frac{1}{x}J_0'(x)$$

原等式得证。

3.9 计算积分：$\int J_3(x)\;dx$

解：先写出贝塞尔函数满足的微分性质：

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x) \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu} \end{cases}$$

利用第二条性质：

$$\int J_3(x)\;dx = \int x^2\frac{J_3(x)}{x^2}\;dx = \int -x^2\;d\left(\frac{J_2(x)}{x^2}\right) = -J_2(x) - 2\int -\frac{J_2(x)}{x}\;dx = -J_2(x) - 2\int\;d\left(\frac{J_1(x)}{x}\right)$$

$$= -J_2(x) - 2\frac{J_1(x)}{x} + C \quad = \quad J_0(x) - \frac{4}{x}J_1(x) + C$$

其中利用了贝塞尔函数的递推公式：

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x)$$

3.12 设ω_n是$J_0(2\omega)=0$的正实根，把以下函数展开成贝塞尔函数$J_0(\omega_n x)$的级数。

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ \frac{1}{2}, & x=1\\ 0, & 1<x<2\end{cases}$$

解：要将$f(x)$展开成级数，则直接设它的级数表达式为：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n J_0(\omega_n x)$$

其中ω_n是$J_0(2\omega)=0$的正实根。即有 $J_0(2\omega_n)=0$

则可由此计算展开式中的系数C_n：

$$C_n=\frac{1}{N_{01}^2}\int_0^2 f(x)xJ_0(\omega_n x)\ dx=\frac{1}{N_{01}^2}\left(\int_0^1 1*xJ_0(\omega_n x)\ dx+\int_1^2 0*xJ_0(\omega_n x)\ dx\right)=\frac{1}{N_{01}^2}\int_0^1 xJ_0(\omega_n x)\ dx$$

换元，令 $t=\omega_n x$：

$$C_n=\frac{1}{\omega_n^2 N_{01}^2}\int_0^{\omega_n} tJ_0(t)\ dt=\frac{1}{\omega_n^2 N_{01}^2}\left(tJ_1(t)\Big|_{t=0}^{\omega_n}\right)=\frac{J_1(\omega_n)}{N_{01}^2\omega_n}=\frac{J_1(\omega_n)}{2\,J_1^2(2\omega)\omega_n}$$

将其带入级数展开式中，即可得：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n J_0(\omega_n x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\omega_n)}{2\,J_1^2(2\omega)\omega_n}J_0(\omega_n x)$$

3.13 设ω_n是$J_1(x)=0$的正实根，把$f(x)=x\ (0<x<1)$ 展开成贝塞尔函数$J_1(\omega_n x)$的级数。

解：要将$f(x)$展开成级数，则直接设它的级数表达式为：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n J_1(\omega_n x)$$

其中ω_n是$J_1(x)=0$的正实根。即有 $J_1(\omega_n)=0$

则可由此计算展开式中的系数C_n：

$$C_n=\frac{1}{N_{11}^2}\int_0^1 xf(x)*J_1(\omega_n x)\ dx=\frac{1}{N_{11}^2}\int_0^1 x^2 J_1(\omega_n x)\ dx$$

换元，令 $t=\omega_n x$：

$$C_n=\frac{1}{N_{11}^2}\int_0^1 x^2 J_1(\omega_n x)\ dx=\frac{1}{\omega_n^2 N_{11}^2}\int_0^{\omega_n} t^2 J_1(t)\ dt=\frac{1}{\omega_n^2 N_{11}^2}\left(t^2 J_2(t)\Big|_{t=0}^{\omega_n}\right)=\frac{J_2(\omega_n)}{N_{11}^2\omega_n^2}=\frac{2}{J_2(\omega_n)\omega_n}$$

将系数带入级数表达式中，立刻得到：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n J_1(\omega_n x)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{J_2(\omega_n)\omega_n}J_1(\omega_n x)$$

3.16 半径为R的无限长圆柱体的侧表面保持一定的温度u_0（常数），柱内初始温度为零，求柱内的温度分布。

解：内部没有热源的热传导方程为：$u_t=a^2\Delta u$

由于本题有很强的对称性，显然$u=u(t,r)$.由题意叙述，可以列出u满足的方程：

$$\begin{cases}u_t=a^2\Delta u=a^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right)\\ u|_{t=0}=0\\ u|_{r=R}=u_0\end{cases}\quad 0\le r<R\,,t\ge 0$$

为解这个方程，先要将边界条件化为齐次条件：令 $u(t,r)=\omega(t,r)+u_0$，写出ω满足的方程：

$$\begin{cases}\omega_t=a^2\left(\omega_{rr}+\frac{1}{r}\omega_r\right)\\ \omega|_{t=0}=-u_0\\ \omega|_{r=R}=0\end{cases}\quad 0\le r<R\,,t\ge 0$$

以下求解这个关于ω的方程。尝试使用分离变量法，令$\omega(t,r)=\mathcal{R}(r)T(t)$，将其带入泛定方程：

$$\mathcal{R}(r)T'(t)=a^2\mathcal{R}''(r)T(t)+\frac{a^2}{r}\mathcal{R}'(r)T(t)\quad\Rightarrow\quad\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{\mathcal{R}''(r)+\frac{1}{r}\mathcal{R}'(r)}{\mathcal{R}(r)}=-\lambda$$

得到两个方程：$\begin{cases}\mathcal{R}''(r)+\frac{1}{r}\mathcal{R}'(r)+\lambda\mathcal{R}(r)=0\\ T'(t)+\lambda a^2T(t)=0\end{cases}$ 先求解关于$\mathcal{R}(r)$的固有值问题：

显然这个方程是施图姆-刘维尔型的，$\lambda>0$，因此可设 $\lambda=\omega^2\ (\omega\ge 0)$

这种形式的方程具有通解：$\mathcal{R}(r)=AJ_0(\omega r)+BN_0(\omega r)$ 又由于$\mathcal{R}(0)$有限，可知$B=0$

再代入边界条件：$\mathcal{R}(R)=\ AJ_0(\omega R)=0$,该方程不可解，记其正根为$\omega_1,\omega_2\cdots\cdots\omega_n,\cdots\cdots$

因此得到：　固有值 $\lambda=\omega^2$；　固有函数：$\mathcal{R}_n(r)=AJ_0(\omega_n r)$

再将固有值 λ 带入确定 T 的常微分方程：　这时一阶常系数线性齐次微分方程，直接利用通解公式：

$$T'(t)+\omega_n^2a^2T(t)=0\quad\Rightarrow\quad T_n(t)=C_ne^{-(\omega_n a)^2t}$$

将$\mathcal{R}_n(R)$与$T_n(t)$相乘，并利用叠加原理：　$\omega_n(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-(\omega_n a)^2t}J_0(\omega_n r)$　　其中系数已经合并。

最后带入初始条件确定其系数：　$\omega(0,r)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_0(\omega_n r)=-u_0$

$$\Rightarrow\quad C_n=\frac{1}{N_{01}^2}\int_0^R -u_0 rJ_0(\omega_n r)\,dr=\frac{-2u_0}{R\omega_nJ_1(\omega_n R)}$$

因此，写出最终的解：ω_n是方程$J_0(\omega R)=0$的正根。

$$u(t,r)=\omega(t,r)+u_0=u_0-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2u_0}{R\omega_nJ_1(\omega_n R)}e^{-(\omega_n a)^2t}J_0(\omega_n r)$$

3.18 求解下列定解问题：

(1) $$\begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+u_{zz}=0 \\ u(a,z)=0 \\ u(r,0)=0,\quad u(r,l)=T_0(\text{常数}) \end{cases} \quad 0<r<a,\quad 0<z<l$$

(2) $$\begin{cases} u_{tt}+2hu_t=a^2\left(u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r\right) \\ u(0,t)\text{ 有限},\quad u_r(l,t)=0 \\ u(r,0)=\varphi(r),\ u_t(r,0)=0 \end{cases} \quad h\ll 1$$

解：(1) 直接对该方程尝试使用分离变量法：令 $u=u(r,z)=R(r)Z(z)$，将其代入泛定方程。

$$R''(r)Z(z)+\frac{1}{r}R'(r)Z(z)+R(r)Z''(z)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)}{R(r)}=-\frac{Z''(z)}{Z(z)}=-\lambda$$

先求解关于 $R(r)$ 的固有值问题：

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+\lambda r^2R(r)=0 \\ R(a)=0 \end{cases}$$

这时施图姆-刘维尔型方程, $\lambda>0$, 因此可设 $\lambda=\omega^2\ (\omega\geq 0)$ 这个方程的有界解为$R(r)=AJ_0(\omega r)$

在带入边界条件：$R(a)=AJ_0(\omega a)=0 \quad\Longrightarrow\quad J_0(\omega a)=0$

这个方程写不出显式解，记它的正根为$\omega_1,\omega_2\cdots\cdots\omega_n,\cdots\cdots$

至此，固有值：$\lambda=\omega^2$； 固有函数：$R_n(r)=AJ_0(\omega_n r)$

再将固有值 λ 带入确定 Z 的常微分方程：

$$Z''(z)-\omega^2Z(z)=0$$

这时二阶常系数线性齐次微分方程，利用特征方程求解，显然特征方程有两个不等的实根 r_1,r_2.

因此这个方程的解具有形式：

$$Z_n(z)=C_1e^{r_1z}+C_2e^{r_2z}=C_n\cosh\omega_nz+D_n\sinh\omega_nz$$

将 $R_n(r)$ 和 $Z_n(z)$ 相乘，并利用叠加原理 2，可得u的级数解表达式：

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cosh\omega_nz+D_n\sinh\omega_nz)J_0(\omega_nr)$$

最后根据两个边界条件确定系数C_n,D_n：

$$u(r,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_0(\omega_nr)=0 \quad\Rightarrow\quad C_n=0$$

$$u(r,l)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sinh\omega_nl\ J_0(\omega_nr)=T_0 \quad\Rightarrow\quad D_n\sinh\omega_nl=\frac{1}{N_{01}^2}\int_0^a T_0rJ_0(\omega_nr)\,dr=\frac{2T_0}{a\omega_nJ_1(\omega_na)}$$

将这些系数带入，即可得原问题最终的解表达式： ω_n是$J_0(\omega a)=0$的正根

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2T_0}{a\omega_nJ_1(\omega_na)}\sinh\omega_nl\,J_0(\omega_nr)$$

(2) 由于方程和边界条件都是齐次的，尝试使用分离变量法求解。设 $u=u(r,t)=T(t)R(r)$.带入泛定方程：

$$T''(t)R(r)+2hT'(t)R(r)=a^2T(t)R''(r)+\frac{a^2}{r}T(t)R'(r)$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{T''(t)+2hT'(t)}{a^2T(t)}=\frac{R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)}{R(r)}=-\lambda$$

先解关于$R(r)$的固有值问题：

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+\lambda r^2R(r)=0 \\ |R(0)|<\infty,\quad R'(l)=0 \end{cases}$$

显然这时施图姆-刘维尔型方程，具有第二类边界条件。$\lambda>0$，因此可设 $\lambda=\omega^2\ (\omega\geq 0)$

这个方程具有解的形式：$R(r)=AJ_0(\omega r)+BN_0(\omega r)$，又由于$|R(0)|<\infty$，可知 $\mathrm{B}=0$

再代入另一个边界条件，可知：$R'(l)=-\omega AJ_1(\omega l)=0\quad\Longrightarrow\quad J_1(\omega l)=0$

这个方程写不出显式解，记它的正根为$\omega_1,\omega_2\cdots\cdots\omega_n,\cdots\cdots$ 且 $\omega_0=0$.

至此，固有值：$\lambda=\omega^2$； 固有函数：$R_n(r)=AJ_0(\omega_n r)\quad\big(n=0\text{ 时}R_0(r)=1\big)$

再将固有值 λ 带入确定 T 的常微分方程：

$$T''(t)+2hT'(t)+\omega^2a^2T(t)=0$$

这时二阶常系数线性齐次微分方程，利用特征方程求解，记特征方程的两个根为 p_1,p_2.

特征方程：$p^2+2hp+\omega^2a^2=0$，判别式：$\Delta=4(h^2-\omega^2a^2)$ 又有$h\ll 1\ \Longrightarrow\ \Delta<0\ (n\neq 0)$

$$p_1=-h+i\sqrt{\omega^2a^2-h^2}\quad,\quad p_2=-h-i\sqrt{\omega^2a^2-h^2}\quad;\quad p=\alpha+i\beta$$

因此这个方程的解具有形式：

$$T_n(t)=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)=e^{-ht}\left(C_n\cos\sqrt{\omega_n^2a^2-h^2}t+D_n\sin\sqrt{\omega_n^2a^2-h^2}t\right)$$

特别的，当$n=0$时，$T_0''(t)+2hT_0'(t)=0\quad\Longrightarrow\quad T_0(t)=C_0+D_0e^{-2ht}$

将 $R_n(r)$ 和 $T_n(t)$ 相乘，并利用叠加原理 2，可得u的级数解表达式：

$$u(r,t)=C_0+D_0e^{-2ht}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-ht}\left(C_n\cos\sqrt{\omega_n^2a^2-h^2}t+D_n\sin\sqrt{\omega_n^2a^2-h^2}t\right)J_0(\omega_n r)$$

最后根据初始条件确定系数C_n,D_n：

$$\begin{cases} u(r,0)=C_0+D_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_0(\omega_n r)=\varphi(r) \\ u_t(r,0)=-2hD_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\omega_n^2a^2-h^2}D_n-hC_n\right)J_0(\omega_n r)=0\ \Longrightarrow\ D_0=0,\ \sqrt{\omega_n^2a^2-h^2}D_n-hC_n=0 \end{cases}$$

再将第二个方程算出的结果带回第一个方程，得到：

$$C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_0(\omega_n r)=\varphi(r)$$

利用展开式的系数，可得：

$$\begin{cases} C_0=\frac{2}{l}\int_0^l r\varphi(r)\,dr \\ C_n=\frac{1}{N_{02}^2}\int_0^r r\varphi(r)J_0(\omega_n r)\,dr=\frac{2}{l^2J_0^2(\omega_n l)}\int_0^r r\varphi(r)J_0(\omega_n r)\,dr \end{cases}$$

将这些算得的系数带入解的表达式中，可得：

$$u(r,t)=\frac{2}{l}\int_0^l r\varphi(r)\,dr+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-ht}\left(C_n\cos\sqrt{\omega_n^2a^2-h^2}t+D_n\sin\sqrt{\omega_n^2a^2-h^2}t\right)J_0(\omega_n r)$$

其中：

$$C_n=\frac{2}{l^2J_0^2(\omega_n l)}\int_0^r r\varphi(r)J_0(\omega_n r)\,dr$$

$$D_n=\frac{h}{\sqrt{\omega_n^2a^2-h^2}}\frac{2}{l^2J_0^2(\omega_n l)}\int_0^r r\varphi(r)J_0(\omega_n r)\,dr$$

3.19 圆柱的半径为R,高为h，侧面在温度为 0 的空气中自由冷却，下底温度恒为 0，上底温度为$f(r)$ 求圆柱内部的温度分布。

解：由给出的提示，该问题可以归结为定解问题：

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=0 \\ u(0,z)\text{ 有限,}\quad u_r(R,z)+ku(R,z)=0 \\ u(r,0)=0,\quad u(r,h)=f(r) \end{cases}$$

对其尝试使用分离变量法。令 $u(r,z)=\mathcal{R}(r)Z(z)$，带入泛定方程：

$$\mathcal{R}''(r)Z(z)+\frac{1}{r}\mathcal{R}'(r)Z(z)+\mathcal{R}(r)Z''(z)=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathcal{R}''(r)+\frac{1}{r}\mathcal{R}'(r)}{\mathcal{R}(r)}=-\frac{Z''(z)}{Z(z)}=-\lambda$$

先求解关于$\mathcal{R}(r)$的固有值问题：

$$\begin{cases} r^2\mathcal{R}''(r)+r\mathcal{R}'(r)+\lambda r\mathcal{R}(r)=0 \\ |\mathcal{R}(0)|<\infty,\quad \mathcal{R}'(R)+k\mathcal{R}(R)=0 \end{cases}$$

显然这是施图姆-刘维尔型方程，具有第三类边界条件。$\lambda>0$，因此可设 $\lambda=\omega^2\ (\omega\geq 0)$

这种形式的方程具有通解：$\mathcal{R}(r)=AJ_0(\omega r)+BN_0(\omega r)$，又由于$|\mathcal{R}(0)|<\infty$，因而$B=0$

带入边界条件，有：

$$\mathcal{R}'(R)+k\mathcal{R}(R)=-A\omega J_1(\omega R)+kAJ_0(\omega R)=0 \quad\Longrightarrow\quad kJ_0(\omega R)=\omega J_1(\omega R)$$

这个方程写不出显式解，记它的正根为$\omega_1,\omega_2\cdots\cdots\omega_n,\cdots\cdots$

至此，固有值：$\lambda=\omega^2$； 固有函数：$\mathcal{R}_n(r)=AJ_0(\omega_n r)$

再将固有值 λ 带入确定 Z 的常微分方程：

$$Z''(z)-\omega^2 Z(z)=0$$

这时二阶常系数线性齐次微分方程，利用特征方程求解，显然特征方程有两个不等的实根 r_1,r_2.

因此这个方程的解具有形式：

$$Z_n(z)=C_1e^{r_1z}+C_2e^{r_2z}=C_n\cosh\omega_n z+D_n\sinh\omega_n z$$

将 $R_n(r)$ 和 $Z_n(z)$ 相乘，并利用叠加原理 2，可得u的级数解表达式：

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cosh\omega_n z+D_n\sinh\omega_n z)J_0(\omega_n r)$$

最后根据两个边界条件确定系数C_n,D_n：

$$u(r,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_0(\omega_n r)=0 \quad\Longrightarrow\quad C_n=0$$

$$u(r,h)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sinh\omega_n h\ J_0(\omega_n r)=f(r)$$

根据展开式的系数，立即可得：

$$D_n\sinh\omega_n h=\frac{1}{N_{03}^2}\int_0^R rf(r)J_0(\omega_n r)\,dr=\frac{2}{R^2\left(1+\frac{k^2}{\omega_n^2}\right)J_0^2(\omega_n^2 R)}\int_0^R rf(r)J_0(\omega_n r)\,dr$$

将这些算得的系数带入解的级数表达式中，即有：

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{R^2\left(1+\frac{k^2}{\omega_n^2}\right)J_0^2(\omega_n^2 R)}\int_0^R rf(r)J_0(\omega_n r)\,dr\ \sinh\omega_n z\ J_0(\omega_n r)$$

3.20 求 $p_n(0)$ 以及 $p_n'(0)$ 的值。

解：先写出$p_n(x)$的表达式：

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{M}\frac{(2n-2k)!}{2^n k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}x^{n-2k}\quad 其中M=\left[\frac{n}{2}\right]$$

从表达式可知，n为偶数时$p_n(x)$为偶函数，n为奇数时$p_n(x)$为奇函数。

显然，$n=0$时，$p_0(x)=1$；当$n=2k+1$ ($k\in\mathbb{N}$) 时，$p_{2k+1}(0)=0$

$$n=2k时，p_{2k}(0)=\frac{(-1)^k(2k)!!}{2^{2k}k!\,k!}=\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

由此可以写出$p_n(0)$：

$$p_n(0)=\begin{cases}0\ , & n=2k+1\\ \dfrac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}\ , & n=2k\end{cases}$$

再计算 $p_n'(0)$. 写出其表达式：

$$p_n'(x)=\sum_{k=0}^{M}\frac{(-1)^k(2n-2k)!\,(n-2k)}{2^n k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}x^{n-2k-1}\quad 其中M=\left[\frac{n}{2}\right]$$

从表达式可知，n为偶数时$p_n(x)$为奇函数，n为奇数时$p_n(x)$为偶函数。

显然 $n=2k$ ($k\in\mathbb{N}$) 时，$p_{2k}'(0)=0$

$$n=2k+1\ \ (k\in\mathbb{N})\ 时，p_{2k+1}'(0)=\frac{(-1)^k(2k+2)!}{2^{2k+1}k!\,(k+1)}=\frac{(-1)^k(2k+1)!!}{(2k)!!}$$

由此可以写出$p_n'(0)$：

$$p_n'(0)=\begin{cases}0\ , & n=2k\\ \dfrac{(-1)^k(2k+1)!!}{(2k)!!}\ , & n=2k+1\end{cases}\quad (k\in\mathbb{N})$$