数理逻辑　第二周作业　2 月 27 日 周四

PB18151866 龚小航

1.1(Warson 实验)设有四张纸牌，每张纸牌的一面有⊗，另一面有⊕。⊕和⊗的颜色可红可蓝。

四张牌放在桌上:　　　红⊕　蓝⊗　红⊗　蓝⊕

有人提出猜测：“如果朝上的一面是红⊕，则另一面是蓝⊗。”要求通过翻牌检验此猜测。问应该翻哪几张牌？你的检验法能否确定此猜测的真假？

解：提出的命题的前提是“朝上的一面是红⊕”，这里“朝上的”是由观察者在观察实验的过程中得出的状态，描述的是提出这个命题时四张牌在实验桌上的状态，观察者本人也并未对四张牌有操作；检验环节是由某个检验者完成的，所以也不应该包含检验时翻动纸牌引起的朝向变化，否则整个命题的大前提发生改变，无法说明命题的真伪。

故第 2，3，4 张牌不符合题设，翻开以后既不能证实也不可以证伪，对该命题的研究没有意义。为检验此猜测，只需翻开第一张牌，若背面是蓝⊗，则该命题正确，若为红⊗，则这张牌能单独证伪。

2、写出以下公式在 L 中的“证明”（即证明它们是 L 的定理）.【练习 3　P22】

(1) $(x_1 \to x_2) \to ((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1))$

(2) $\big((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_2)\big) \to \big((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3)\big)$

解：(1) $(\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1)$ ………………………… $L3$

$\big((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1)\big) \to \big((x_1 \to x_2) \to ((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1))\big)$ … $L1$

$(x_1 \to x_2) \to \big((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1)\big)$ ………………………… MP

(2) $(x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3))$ ………………………… $L2$

$\big((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3))\big) \to$

$\Big(\big((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_2)\big) \to \big((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3)\big)\Big)$ …… $L2$

$\big((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_2)\big) \to \big((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3)\big)$ …………… MP

3、证明下面的结论：【练习 3　P22】

(3)$\{p \to q，\neg(q \to r) \to \neg p\} \vdash p \to r$

(4)$\{p \to (q \to r)\} \vdash q \to (p \to r)$

解：(3) ① $\neg(q \to r) \to \neg p$ ………………………… *前提*

② $(\neg(q \to r) \to \neg p) \to \big(p \to (q \to r)\big)$ ………………………… $L3$

③ $p \to (q \to r)$ ………………………… MP 1,2

④ $\big(p \to (q \to r)\big) \to \big((p \to q) \to (p \to r)\big)$ ………………………… $L2$

⑤ $(p \to q) \to (p \to r)$ ………………………… MP 3,4

⑥ $p \to q$ ………………………… *前提*

⑦ $p \to r$ ………………………… MP 5,6

(4) ① $p \to (q \to r)$ ………………………… *前提*

② $\big(p \to (q \to r)\big) \to \big((p \to q) \to (p \to r)\big)$ ………………………… $L2$

③ $(p \to q) \to (p \to r)$ ………………………… MP 1,2

④ $\big((p \to q) \to (p \to r)\big) \to \Big(q \to \big((p \to q) \to (p \to r)\big)\Big)$ ………………………… $L1$

⑤ $q \to \big((p \to q) \to (p \to r)\big)$ ………………………… MP 3,4

⑥ $\Big(q \to \big((p \to q) \to (p \to r)\big)\Big) \to \Big(\big(q \to (p \to q)\big) \to \big(q \to (p \to r)\big)\Big)$ ……… $L2$

⑦ $\big(q \to (p \to q)\big) \to \big(q \to (p \to r)\big)$ ………………………… MP 5,6

⑧ $q \to (p \to q)$ ………………………… $L1$

⑨ $q \to (p \to r)$ ………………………… MP 7,8

1.3 用直接证明和简化证明方法证明:

(1) $x_1 \to \left(x_2 \to (x_1 \to x_2)\right)$

(2) $\{\neg p\} \vdash p \to p$

解:（1）直接证明:

① $x_2 \to (x_1 \to x_2)$ …………………………………………………………………… $L1$

② $\left(x_2 \to (x_1 \to x_2)\right) \to \left(x_1 \to \left(x_2 \to (x_1 \to x_2)\right)\right)$ ……………………………… $L1$

③ $x_1 \to \left(x_2 \to (x_1 \to x_2)\right)$ ……………………………………………………… MP 1,2

简化证明:

① $x_2 \to (x_1 \to x_2)$ …………………………………………………………………… $L1$

② $\{x_1\} \vdash \left(x_2 \to (x_1 \to x_2)\right)$ ……………………………………… *上一步是L的定理*

③ $x_1 \to \left(x_2 \to (x_1 \to x_2)\right)$ ………………………………………………… *演绎定理*

（2）直接证明:

① $\neg p$ ……………………………………………………………………………………… *前提*

② $\neg p \to (\neg p \to \neg p)$ …………………………………………………………………… $L1$

③ $\neg p \to \neg p$ ……………………………………………………………………………… MP 1,2

④ $p \to p$ ……………………………………………………………………………………… $L3$

简化证明:（同一律是 L 的定理，任何前提都能成立）

① $p \to p$ ……………………………………………………………………………………… *同一律*