数理逻辑　第七周作业　4 月 23 日 周四

PB18151866 龚小航

习题 2.8.在证明K的完全性定理中，证明引理：

对$K^+(Y)$的所有闭式q，有：

$$\Gamma^* \vdash q \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash q$$

解：运用数学归纳法，对闭式q在$K^+(Y)$中的层数k进行归纳证明：

归纳基础：当$k=0$时，q是原子公式。设$q=P(t_1,t_2\cdots\cdots t_n)$. 对任何原子公式$q$有：

$$I\big(P(t_1,t_2\cdots\cdots t_n)\big)=\begin{cases} t\ , & I(t_i)\in P^M \\ f\ , & I(t_i)\notin P^M \end{cases} \quad \text{因此有：}$$

$$\Gamma^* \vdash q \quad \Leftrightarrow \quad (t_1,t_2\cdots\cdots t_n)\in P^M \quad \Leftrightarrow \quad \big(I(t_i)\big)\in P^M \quad \Leftrightarrow \quad I\big(P(t_1,t_2\cdots\cdots t_n)\big)=t$$

以上的证明都是可逆的，因此$k=0$时，需要证明的引理成立。

归纳假设：假设$k-1$层时引理成立现需要证明$k=k$时引理依然成立。

归纳递推：当$k=k$时，需要分四种情况分别证明引理：

① 情形 1：$q=\neg r$，其中r也是闭式。

由Γ^*的无矛盾性和完备性，可知 $\Gamma^*\vdash \neg r \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma^* \nvdash r$

再由归纳假设，可知 $\Gamma^* \nvdash r \ \Leftrightarrow\ M \nvDash r \ \Leftrightarrow \quad M\vDash \neg r$

将q代回，即可得 $\Gamma^*\vdash q \quad \Leftrightarrow \quad M\vDash q$

② 情形 2：$q=r\to s$，其中r,s均为闭式。

由Γ^*的无矛盾性和完备性，可知 $\Gamma^* \nvdash (r\to s) \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma^*\vdash \neg(r\to s)$

以下利用三个重言式：

$$\begin{cases} \neg(r\to s)\to r \\ \neg(r\to s)\to \neg s \\ r\to(\neg s\to\neg(r\to s)) \end{cases} \quad \text{且任意前提集都能推出重言式}$$

由MP规则可以得出：$\Gamma^*\vdash\neg(r\to s) \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma^*\vdash r\text{，}\Gamma^*\vdash\neg s \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma^*\vdash r\text{，}\Gamma^*\nvdash s$

其中已经利用了Γ^*的无矛盾性和完备性。再由归纳假设：

$$\Gamma^*\vdash r\text{，}\Gamma^*\nvdash s \quad \Leftrightarrow \quad M\vDash r,\ M\nvDash s \quad \Leftrightarrow \quad M\nvDash(r\to s)$$

这样就得到了下式：

$$\Gamma^*\nvdash q \quad \Leftrightarrow \quad M\nvDash q$$

此即 $\Gamma^*\vdash q \quad \Leftrightarrow \quad M\vDash q$

③ 情形 3：$q=\forall x r$，且r是闭式。

由K_4，有 $\forall xr\to r$；由UG规则，又有 $r\to\forall xr$；再由MP规则，有 $\Gamma^*\vdash\forall xr \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma^*\vdash r$

直接由归纳假设，可得：

$$\Gamma^*\vdash r \quad \Leftrightarrow \quad M\vDash r \quad \Leftrightarrow \quad M\vDash\forall xr$$

此即 $\Gamma^*\vdash\forall xr \quad \Leftrightarrow \quad M\vDash\forall xr$，即为 $\Gamma^*\vdash q \quad \Leftrightarrow \quad M\vDash q$.

④ 情形 4：$q=\forall x\, r(x)$，其中x在$r(x)$中自由出现。

由于q是闭式，因此$r(x)$只含有一个自由出现的变元x.

这种情况需要将待证命题两个方向分别证明。

设$r(x)=p_m(y_m)$，$y_m=x$，则$q=\forall y_m p_m(y_m)$

i）先证明充分性" $\Longrightarrow$ "

利用反证法，设 $\Gamma^*\vdash\forall y_m p_m(y_m) \quad \Longrightarrow \quad M\nvDash\forall y_m p_m(y_m)$:

那么必然存在一个解释I_0，使$I_0(\forall y_m p_m(y_m)0)=f$. 设$I_0(y_m)=u$

既然$u\in M$那么u是K^+的闭项且有 $I_0(u)=u \quad \Longrightarrow \quad I_0(y_m)=I_0(u)$

于是有$I_0\big(p_m(y_m)\big)=I_0\big(p_m(u)\big)$；

结合前面得到的$I_0(\forall y_m p_m(y_m)0)=f$，可知$M\nvDash p_m(u)$

从另一方面考虑：由K_4和MP规则可知：$\Gamma^*\vdash p_m(u)$由归纳假设得到$M\vDash p_m(u)$

显然这两个方面得出的结论相互矛盾，假设不成立，因此有充分性成立：

$$\Gamma^*\vdash q \quad \Longrightarrow \quad M\vDash q$$

ii）再证明其必要性" $\Longleftarrow$ "：

若有$M\vDash\forall y_m p_m(y_m)$成立，则由$K_4$可知：$\forall y_m p_m(y_m)\to p_m\big(b_{i_m}\big)$.

而K_4是公理，公理都是有效式，因此有：$M\vDash\Big(\forall y_m p_m(y_m)\to p_m\big(b_{i_m}\big)\Big)$成立

所以有 $M\vDash p_m\big(b_{i_m}\big)$

由归纳假设，知 $\Gamma^*\vdash p_m\big(b_{i_m}\big)$.结合$\Gamma^*$中$r_n$的定义，即得到：

$$\Gamma^*\vdash\Big(p_m\big(b_{i_m}\big)\to\forall y_m p_m(y_m)\Big)$$

因此立即得到 $\Gamma^*\vdash\forall y_m p_m(y_m)$ 必要性成立。

由此，情况 4 下均有$\Gamma^*\vdash q \quad \Leftrightarrow \quad M\vDash q$成立。

综上四种情况，穷举了所有闭式q的情况。因此当$k=k$时，$\Gamma^*\vdash q \quad \Leftrightarrow \quad M\vDash q$成立。

由数学归纳法，可知所证引理成立。即对$K^+(Y)$的所有闭式q，有：

$$\Gamma^*\vdash q \quad \Leftrightarrow \quad M\vDash q$$