011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平
计算机科学与技术学院

再记2020科大樱花
——向新世界的建设者致敬！

枝展花妍又遇寒，殷殷遥望玉门难。
春风奋起千钧力，不度阳关终不还。

第三章 一阶理论

3 一阶理论

❖ **逻辑的研究内容**

1. 基础逻辑观点：研究推理的正确形式；
2. 判定/计算观点：研究推理的能行过程；
3. AI逻辑观点：大规模问题的知识表示和自动推理。

❖ **回顾** 一阶谓词演算是一阶语言范围内演绎推理的形式公理化；为领域知识的形式化奠定了逻辑基础。

❖ **一阶理论** 用一阶逻辑实现数学分支的形式化，并研究数学分支形式化的系统性理论。

❖ **注释** 一阶理论开创了应用领域形式化研究之先河。

3 一阶理论

❖ **回顾** 基础逻辑观点的主要研究内容：

1. 语法方面：演算/演绎推理的形式公理系统；
2. 语义方面：语义解释、语义后承、逻辑有效式/重言式；
3. 元理论：可靠性、完全性等关联语法-语义的性质。

$$\boxed{\Gamma \vdash p \text{ 当且仅当 } \Gamma \models p}$$

◆ **观察** 一阶逻辑对知识表示(如Γ的构造)有哪些研究？

3 一阶理论

❖ 回顾 基础逻辑观点下知识表示方面的主要研究结果：

1. 表示语言：L(X)，K(Y)；
2. 紧致性定理：从Γ可推的都是从Γ的有穷子集可推的；
3. 相容集定义：可推出矛盾的Γ是不相容的；
4. 平凡性定理/不相容集的推理性质：一个不相容集可推出任何结论。
5. 模型：被表示的对象。

3 一阶理论

❖ **回顾(模型/M有效)** 设$p\in K(Y)$，M是K(Y)的一个一阶结构。若对一切V，p在I=(M，V，v)下有I(p)=t，则称p是M有效的，称M为p的一个模型，记为M$\models p$。

◆ **注释** 模型是一种“真”：若M是p的模型，则p在M中为真。

❖ **记号(模型)** 设$\Gamma\subseteq K(Y)$，M是K(Y)的一个一阶结构。如果对所有$p\in\Gamma$，有M$\models p$，则称M是Γ的一个模型，记为M$\models\Gamma$。

❖ **推论** 对任何$p\in K(Y)$，如果$\Gamma\vdash p$并且M$\models\Gamma$，则M$\models p$。

◆ **证明** 设$\Gamma\vdash p$，由K的可靠性，得$\Gamma\models p$。又因为M$\models\Gamma$，依$\Gamma\models p$及语义后承定义，得M$\models p$。

3 一阶理论

❖ **推论** 对任何$p\in K(Y)$，如果$\Gamma\vdash p$并且$M\models\Gamma$，则$M\models p$。

❖ **观察(推理的应用)** 任给一个应用领域M，将M的基础性知识表示为公式集Γ，使得：(1)$M\models\Gamma$，(2)通过推理$\Gamma\vdash p$可得M的其他知识p (即$p\notin\Gamma$并且$M\models p$)，则称Γ是M的一阶形式化理论。

◆ **例** 以初等数论M=(**N**, **F**, **P**)为应用领域，其中**N**是自然数集，**F**和**P**是**N**上运算集和关系集。若M的形式化理论为Γ，通过$\Gamma\vdash p$可解答初等数论问题。例如，素分解问题“c是不是两个素数的积？”归结为推理：$\Gamma\vdash\exists x\exists y(P(x)\wedge P(y)\wedge(x\times y\mathbf{=}c))$，其中$P(x)$表示$x$是素数，**=**(黑体)是自然数的相等关系。

3 一阶理论

❖ **观察** 考虑到已经开发了众多强大推理机，待解决的主要问题是：如何将一个给定的应用领域M的基础性知识形式化为适当的Γ，使得M⊨Γ，并且通过推理Γ⊢p，可以得到M的其他知识p (p∉Γ并且M⊨p)。

◆ **例(续)** 初等数论领域M=(**N, F, P**)的基础性知识包含自然然的定义，以及自然数集上的一些运算和关系的定义。

◆ **例**《欧氏几何》中的基础性知识是几何公设。

❖ **观察** 应用领域的推理只有公理和推理规则是不够的。

3 一阶理论

❖ **观察** 局限于纯逻辑(公理+推理规则)无法解决、需要借助于领域知识形式化加以解决的问题举例：

1. 自然数定义和计算的数学理论、其他数学分支的形式化；
2. 计算机程序的定义和推理(如安全性验证、功能验证等)；
3. 自然语言的表示、理解和推理(如信息检索、自动问答等)；
4. 智能系统的工作原理、构建方法和性能分析(如机器人、无人车等)； ……

❖ **注释** 现代数学基础研究试图通过形式化消除数学潜在的矛盾；有关成果为自动推理和人工智能的研究奠定了理论基础。

3.1 自然数的形式定义问题

3.1自然数的形式定义问题

❖ **自然数的定义** 自然数的三种经典数学定义。

1. Peano定义（《算术的新说明法原理》，1889）

(1) $0 \in \mathbf{N}$.

(2) 若 $x \in \mathbf{N}$, 则 x 有且只有一个后继 $x' \in \mathbf{N}$.

(3) 对任意 $x \in \mathbf{N}, x' \neq 0$.

(4) 对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{N}$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则 $x_1' \neq x_2'$.

(5) 设 $M \subseteq \mathbf{N}$. 若 $0 \in M$, 且当 $x \in M$ 时也有 $x' \in M$, 则 $M = \mathbf{N}$.

其中，**N**是自然数集合，′是自然数集合上的后继函数（+1）。

3.1自然数的形式定义问题

2. Frege定义（《算术基础》，1884，第46节）改编版：

(1) 0是不等于自身的事物的集合；

(2) 1是仅由0组成的集合；

(3) 2是仅由0和1组成的集合；

(4) 3是仅由0、1、2组成的集合；

……

◆**注释** 如果“等于自身”是一个逻辑概念，则Frege定义实现了自然数的纯逻辑定义，使得自然数与联结词、量词同类。

3. 1自然数的形式定义问题

3. von Neumann定义：

(1) $0 =_{df} \{\}$;

(2) $x' =_{df} x \cup \{x\}$.

◆性质 von Neumann定义与Frege定义一致，验证：

$0 = \{\}$;

$1 = 0 \cup \{0\} = \{\} \cup \{0\} = \{0\}$;

$2 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$;

$3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$; ……

◆性质 von Neumann定义与Peano定义一致（习题）。

3.1自然数的形式定义问题

❖ Peano定义的形式化尝试

1. 取一个特定的一阶语言$K_1(Y)$，包含个体常元**0**、一元后继函数符号′，一元谓词符号N，分别代表预期语义解释中的自然数0、一元后继函数（+1）和一元关系“是自然数”。

2. 参照Peano定义构建公式集Γ，使得在Γ的每一个模型M中，个体常元**0**、一元后继函数符号′，一元谓词符号N分别解释为自然数0、一元后继函数（+1）和一元关系“是自然数”。

3. 建立Peano定义的一阶形式化理论Γ。

3.1自然数的形式定义问题

◆Peano定义的形式化理论：

(P1) $\mathrm{N}(\mathbf{0})$;

(P2) $\forall x(\mathrm{N}(x)\rightarrow\exists y!(y = x' \wedge \mathrm{N}(y)))$;

(P3) $\forall x((\mathrm{N}(x)\rightarrow\neg(\mathbf{0} = x'))$;

(P4) $\forall x\forall y((x' = y' \rightarrow x = y))$;

(P5) $p(\mathbf{0})\wedge\forall x(p(x)\rightarrow p(x'))\rightarrow\forall x p(x)$, 其中$p$是任意一阶公式。

其中，$\exists y!$代表“存在唯一的y”。

$0\in\mathbf{N}$.

若 $x\in\mathbf{N}$, 则 x 有且只有一个后继 $x'\in\mathbf{N}$.

对任意 $x\in\mathbf{N}, x'\neq 0$.

对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{N}$, 若 $x_1\neq x_2$, 则 $x_1'\neq x_2'$.

设 $M\subseteq\mathbf{N}$. 若 $0\in M$, 且当 $x\in M$ 时也有 $x'\in M$, 则 $M=\mathbf{N}$.

◆**注释** 以上尝试中使用了等词 **=**（黑体），代表自然数上的相等关系。**=**是一阶语言中的符号，而K和L形式证明/形式推理的定义中使用的等号=不是一阶语言中的符号。

3.1自然数的形式定义问题

Peano定义的形式化理论(尝试):

(P1) $N(\mathbf{0})$;

(P2) $\forall x(N(x)\rightarrow\exists y!(y\mathbf{=}x'\wedge N(y)))$，其中$\exists y!$代表“存在唯一的y”；

(P3) $\forall x((N(x)\rightarrow\neg(\mathbf{0}\mathbf{=}x'))$;

(P4) $\forall x\forall y((x'\mathbf{=}y'\rightarrow x\mathbf{=}y))$;

(P5) $p(\mathbf{0})\wedge\forall x(p(x)\rightarrow p(x'))\rightarrow\forall x p(x)$, 其中$p$是任意一阶公式。

- **观察** 假设以Γ={(P1), (P2), (P3), (P4), (P5)}作为Peano定义的形式化理论。由于Γ中二元谓词**=**没有定义，因此在Γ的任何模型M中，**=**的解释是不确定的，甚至可能不是自然数集上的相等关系。为此，需要首先建立等词**=**的形式化定义。

3. 1自然数的形式定义问题

❖ 习题

3.1 试验证自然数的Peano定义与von Neumann定义的一致性。

❖ 思考题

3.1 本节尝试给出的Γ_N={(P1), (P2), (P3), (P4), (P5)}是否完全表达了自然数的Peano定义？