第六周综合整理

- 利用递推公式计算积分

计算下列积分：(1) $\int_0^x \mathrm{J}_0(x)\cos x\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^x \mathrm{J}_0(x)\sin x\,\mathrm{d}x$.

解 (1) 先分部积分，

$$\begin{aligned}&\int_0^x \mathrm{J}_0(x)\cos x\,\mathrm{d}x\\&= x\mathrm{J}_0(x)\cos x\Big|_0^x - \int_0^x x\,[\mathrm{J}_0(x)\cos x]'\,\mathrm{d}x\\&= x\mathrm{J}_0(x)\cos x + \int_0^x x\,[\mathrm{J}_1(x)\cos x + \mathrm{J}_0(x)\sin x]\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x\mathrm{J}_1(x)] = x\mathrm{J}_0(x),$$

所以，上式右端积分中的被积函数

$$x\,[\mathrm{J}_1(x)\cos x + \mathrm{J}_0(x)\sin x] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x\mathrm{J}_1(x)\sin x],$$

由此即得

$$\int_0^x \mathrm{J}_0(x)\cos x\,\mathrm{d}x = x\,[\mathrm{J}_0(x)\cos x + \mathrm{J}_1(x)\sin x].$$

(2) 同样先分部积分，

$$\begin{aligned}&\int_0^x \mathrm{J}_0(x)\sin x\,\mathrm{d}x\\&= x\mathrm{J}_0(x)\sin x\Big|_0^x - \int_0^x x\,[\mathrm{J}_0(x)\sin x]'\,\mathrm{d}x\\&= x\mathrm{J}_0(x)\sin x + \int_0^x x\,[\mathrm{J}_1(x)\sin x - \mathrm{J}_0(x)\cos x]\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

又因为

$$x\,[\mathrm{J}_1(x)\sin x - \mathrm{J}_0(x)\cos x] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x\mathrm{J}_1(x)\cos x],$$

所以，

$$\int_0^x \mathrm{J}_0(x)\sin x\,\mathrm{d}x = x\,[\mathrm{J}_0(x)\sin x - \mathrm{J}_1(x)\cos x].$$

计算积分

$$\int_0^1 (1-x^2)\mathrm{N}_0(\mu x)\,x\,\mathrm{d}x,$$ 其中 μ 是 0 阶诺伊曼函数 $\mathrm{N}_0(x)$ 的零点.

分部积分，有

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x^2)\mathrm{N}_0(\mu x)\,x\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (1-x^2)\,\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x\mathrm{N}_1(\mu x)]\,\mathrm{d}x\\&= (1-x^2)\,\frac{x}{\mu}\mathrm{N}_1(\mu x)\Big|_0^1 + \frac{2}{\mu}\int_0^1 x^2\mathrm{N}_1(\mu x)\mathrm{d}x\\&= -\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\mu}\mathrm{N}_1(\mu x)\right] + \frac{2x^2}{\mu^2}\mathrm{N}_2(\mu x)\Big|_0^1\\&= -\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\mu}\mathrm{N}_1(\mu x) + \frac{2x^2}{\mu^2}\mathrm{N}_2(\mu x)\right] + \frac{2}{\mu^2}\mathrm{N}_2(\mu),\end{aligned}$$

再利用 $N_\nu(x)$ 在 $x\to 0$ 的渐近行为 (15.9b)，有

$$\lim_{x\to 0} x^\nu N_\nu(x) = -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}2^\nu,$$

就可以求得

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right) N_0(\mu x)\, x\, dx = \frac{1}{\mu^2}\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\mu^4}\frac{8}{\pi}+\frac{2}{\mu^2}N_2(\mu).$$

讨论　此结果还可以进一步化简．为此令递推关系

$$N_{\nu-1}(x)+N_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}N_\nu(x)$$

中 $\nu=1$，

$$N_0(x)+N_2(x)=\frac{2}{x}N_1(x),$$

并考虑到 $N_0(\mu)=0$，就有

$$N_2(\mu)=\frac{2}{\mu}N_1(\mu).$$

代入即得

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right) N_0(\mu x)\, x\, dx = \frac{1}{\mu^2}\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\mu^4}\frac{8}{\pi}+\frac{4}{\mu^3}N_1(\mu).$$

- 贝塞尔函数展开式的应用

证明 $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x$

证　因为

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

所以

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\frac{1}{2}+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2}-1)(k+\frac{1}{2}-2)\cdots(k+\frac{1}{2}-k)\Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$\cdot\sqrt{\frac{2}{x}}\frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdots 1\cdot 2^k}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}x^{2k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)(2k-2)(2k-4)\cdots 2}{k!(2k+1)!2^k}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}x^{2k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^k k!}{k!(2k+1)!2^k}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}x^{2k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

● 柱坐标系下的定解问题

求空心圆柱内的稳定温度分布，柱体下底的温度为

$$u_0\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)\ln\frac{r}{a}$$

u_0 为已知常数，而其余面上的温度均保持为 0 .

解 取柱坐标系，原点在下底中心， z 轴即为柱轴. 令柱体的内半径为 a ，外半径为 b ，柱高为 h . 容易判断柱内温度与 θ 无关， $u=u(r,z)$. 定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\\ u\big|_{r=a}=0, \qquad u\big|_{r=b}=0,\\ u\big|_{z=0}=u_0\left(1-\dfrac{r^2}{b^2}\right)\ln\dfrac{r}{a}, \qquad u\big|_{z=h}=0.\end{cases}$$

令 $u(r,t)=R(r)T(t)$ ，分离变量，即得

$$Z''-\lambda Z=0;$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\lambda R=0,\\ R(a)=0, \qquad R(b)=0.\end{cases}$$

由此可以求得本征值

$$\lambda_i=\mu_i^2, \qquad i=1,2,3,\cdots,$$

其中 μ_i 是方程

$$\mathrm{N}_0(\mu_i a)\mathrm{J}_0(\mu_i b)-\mathrm{J}_0(\mu_i a)\mathrm{N}_0(\mu_i b)=0$$

的第 i 个正零点 (从小到大排列)，相应的本征函数为

$$R_i(r)=\mathrm{N}_0(\mu_i a)\mathrm{J}_0(\mu_i r)-\mathrm{J}_0(\mu_i a)\mathrm{N}_0(\mu_i r).$$

考虑到 $u\big|_{z=h}=0$ ，故一般解为

$$\begin{aligned}u(r,z)&=\sum_{i=1}^{\infty}A_i R_i(r)\frac{\sinh\mu_i(h-z)}{\sinh\mu_i z}\\&=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\left[\mathrm{N}_0(\mu_i a)\mathrm{J}_0(\mu_i r)-\mathrm{J}_0(\mu_i a)\mathrm{N}_0(\mu_i r)\right]\frac{\sinh\mu_i(h-z)}{\sinh\mu_i h}.\end{aligned}$$

代入 $z=0$ 端得边界条件

$$u(r,z)\big|_{z=0}=\sum_{i=1}^{\infty}A_i R_i(r)=u_0\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)\ln\frac{r}{a},$$

利用本征函数的正交性求出叠加系数

$$A_i=\frac{u_0\displaystyle\int_a^b\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)\ln\frac{r}{a}R_i(r)\,r\,\mathrm{d}r}{\displaystyle\int_a^b R_i^2(r)\,r\,\mathrm{d}r},$$

即可得到此定解问题的解.

下面分别计算分子和分母上的积分. 对于分子, 利用柱函数 $C_\nu(x)$ 的下列积分公式 (其中 α 均为积分常数)

$$
\begin{aligned}
&\int xC_0(x)\mathrm{d}x = xC_1(x)+\alpha,\\
&\int xC_0(x)\ln x\mathrm{d}x = xC_1(x)\ln x + C_0(x)+\alpha,\\
&\int x^3C_0(x)\mathrm{d}x = \left[x^3-4x\right]C_1(x)+2x^2C_0(x)+\alpha,\\
&\int x^3C_0(x)\ln x\mathrm{d}x = \left\{\left[x^3-4x\right]C_1(x)+2x^2C_0(x)\right\}\ln x\\
&\qquad\qquad\qquad - 4xC_1(x)+\left(x^2-4\right)C_0(x)+\alpha,
\end{aligned}
$$

以及本征函数所满足的递推关系，并且由贝塞耳函数与诺伊曼函数之间的朗斯基行列式

$$
\begin{vmatrix} \mathrm{J}_\nu(x) & \mathrm{J}'_\nu(x) \\ \mathrm{N}_\nu(x) & \mathrm{N}'_\nu(x) \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi x}
$$

导出

$$
\begin{aligned}
\mathrm{N}_0(\mu_i a)\mathrm{J}_1(\mu_i a)-\mathrm{J}_0(\mu_i a)\mathrm{N}_1(\mu_i a) &= \frac{2}{\pi\mu_i a},\\
\mathrm{N}_0(\mu_i a)\mathrm{J}_1(\mu_i b)-\mathrm{J}_0(\mu_i a)\mathrm{N}_1(\mu_i b) &= \frac{\mathrm{J}_0(\mu_i a)}{\mathrm{J}_0(\mu_i b)}\frac{2}{\pi\mu_i b},
\end{aligned}
$$

就可以求得

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)\ln\frac{r}{a}R_i(r)\,r\,\mathrm{d}r\\
&\quad= \int_a^b \left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)\ln\frac{r}{a}\left[\mathrm{N}_0(\mu_i a)\mathrm{J}_0(\mu_i r)-\mathrm{J}_0(\mu_i a)\mathrm{N}_0(\mu_i r)\right]r\,\mathrm{d}r\\
&\quad= \frac{8}{\pi}\frac{1}{\mu_i^4 b^2}\frac{\mathrm{J}_0(\mu_i b)}{\mathrm{J}_0(\mu_i a)}\ln\frac{b}{a}-\frac{8}{\pi}\frac{1}{b^2\mu_i^4}\left\{\frac{\mathrm{J}_0(\mu_i b)}{\mathrm{J}_0(\mu_i a)}-1\right\}.
\end{aligned}
$$

为了计算分母上的积分，即本征函数的模方

$$
\int_a^b R_i^2(r)r\mathrm{d}r = \int_a^b \left[\mathrm{N}_0(\mu_i a)\mathrm{J}_0(\mu_i r)-\mathrm{J}_0(\mu_i a)\mathrm{N}_0(\mu_i r)\right]^2 r\mathrm{d}r,
$$

不妨令

$$
R(r) = \mathrm{N}_0(\mu a)\mathrm{J}_0(\mu r)-\mathrm{J}_0(\mu a)\mathrm{N}_0(\mu r),
$$

将 $R(r)$ 和本征函数 $R_i(r)$ 满足的方程

$$
\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\mu^2 R = 0 \quad 和 \quad \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R_i}{\mathrm{d}r}\right)+\mu_i^2 R_i = 0,
$$

分别乘以 $rR_i(r)$ 和 $rR(r)$，相减，再积分，得

$$
\begin{aligned}
\int_a^b R(r)R_i(r)\,r\,\mathrm{d}r &= \frac{1}{\mu^2-\mu_i^2}\left[r\left(R(r)\frac{\mathrm{d}R_i(r)}{\mathrm{d}r}-R_i(r)\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)\right]_{r=a}^{r=b}\\
&= \frac{1}{\mu^2-\mu_i^2}bR(b)\left.\frac{\mathrm{d}R_i(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=b}\\
&= -\frac{1}{\mu^2-\mu_i^2}\frac{2R(b)}{\pi}\frac{\mathrm{J}_0(\mu_i a)}{\mathrm{J}_0(\mu_i b)}.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\int_a^b R_i^2(r)\,r\,\mathrm{d}r &= -\lim_{\mu\to\mu_i}\frac{1}{\mu^2-\mu_i^2}\frac{2R(b)}{\pi}\frac{\mathrm{J}_0(\mu_i a)}{\mathrm{J}_0(\mu_i b)}\\
&= -\frac{1}{\pi\mu_i}\frac{\mathrm{J}_0(\mu_i a)}{\mathrm{J}_0(\mu_i b)}\left.\frac{\partial R(b)}{\partial\mu}\right|_{\mu=\mu_i}\\
&= -\frac{1}{\pi\mu_i}\frac{\mathrm{J}_0(\mu_i a)}{\mathrm{J}_0(\mu_i b)}
\end{aligned}
$$

$$\times\left\{a\left[N_0'(\mu_i a)J_0(\mu_i b)-J_0'(\mu_i a)N_0(\mu_i b)\right]\right.$$
$$\left.+b\left[N_0(\mu_i a)J_0'(\mu_i b)-J_0(\mu_i a)N_0'(\mu_i b)\right]\right\}$$
$$=-\frac{2}{\pi^2\mu_i^2}\left\{1-\left[\frac{J_0(\mu_i a)}{J_0(\mu_i b)}\right]^2\right\},$$

其中又用到了

$$N_0'(\mu_i a)J_0(\mu_i b)-J_0'(\mu_i a)N_0(\mu_i b)$$
$$=N_0'(\mu_i a)J_0(\mu_i b)-J_0'(\mu_i a)N_0(\mu_i a)\frac{J_0(\mu_i b)}{J_0(\mu_i a)}$$

$$=\frac{J_0(\mu_i b)}{J_0(\mu_i a)}\frac{2}{\pi\mu_i a}.$$

这样最后就求得叠加系数

$$A_i=\frac{4u_0\pi}{b}\frac{1}{\mu_i^3}\frac{J_0^2(\mu_i b)}{J_0^2(\mu_i a)-J_0^2(\mu_i b)}\frac{J_0(\mu_i b)}{J_0(\mu_i a)}\ln\frac{b}{a}$$
$$+\frac{4u_0\pi}{b}\frac{1}{\mu_i^3}\frac{J_0^2(\mu_i b)}{J_0(\mu_i a)}\frac{1}{J_0(\mu_i a)+J_0(\mu_i b)}.$$

半径为 a 高为 h 的均匀圆柱,上底温度保持为 $f(\rho)$,

下底温度为零度,而侧面在零度的空气中自由冷却,试求柱体内的稳定温度分布.

解 显然,其柱侧面具有第三类的边界条件,故其定解问题为

$$\begin{cases}\Delta u=0,\ \rho<a,\ 0<z<h & ① \\ u\mid_{z=0}=0, & ② \\ u\mid_{z=h}=f(\rho) & ③ \\ \left(u+H\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)\Big|_{\rho=a}=0 & ④\end{cases}$$

令

$$u(\rho,z)=R(\rho)Z(z)$$

则①式变为

$$\begin{cases}\rho^2R''+\rho R'+k^2\rho^2R=0,\ k^2=-\mu & ⑤ \\ Z''+\mu Z=0 & ⑥\end{cases}$$

②式变为

$$Z(0)=0 \qquad ⑦$$

④式变为

$$R(a)+HR'(a)=0 \qquad ⑧$$

下面,先求解由⑤和⑧式构成的本征值问题.由⑤式有

$$R(\rho)=J_0(k\rho),R'(\rho)=kJ'_0(k\rho)$$

将此二式代入边界条件⑧得

$$J_0(ka) + HkJ'_0(ka) = 0 \quad ⑨$$

令 $x = ka$，则方程⑨化为

$$J_0(x) + \frac{H}{a}xJ'_0(x) = 0 \quad ⑩$$

由 Bessel 函数表可查得方程⑩的根，记为 $x_m(m=1, 2, \cdots)$，则本征值问题⑤、⑧的本征值为

$$k_m = \frac{x_m}{a},\ m = 1, 2, 3, \cdots \quad ⑪$$

本征函数为

$$R_m(\rho) = J_0\left(\frac{x_m}{a}\rho\right) \quad ⑫$$

将 $\mu = -k_m^2 = -\left(\frac{x_m}{a}\right)^2$ 代入方程⑥并解方程⑥得

$$Z_m(z) = \left(c_m e^{\frac{x_m}{a}z} + d_m e^{-\frac{x_m}{a}z}\right)$$

代入边界条件②得

$$c_m + d_m = 0 \rightarrow d_m = -c_m$$

所以

$$Z_m(z) = 2c_m \operatorname{sh}\left(\frac{x_m}{a}z\right) \quad ⑬$$

由⑫和⑬式于是有

$$u(\rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sh}\left(\frac{x_m}{a}z\right)J_0\left(\frac{x_m}{a}\rho\right) \quad ⑭$$

代入边界条件③得

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sh}\left(\frac{x_m}{a}h\right)J_0\left(\frac{x_m}{a}\rho\right) = f(\rho)$$

故

$$A_m = \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{x_m}{a}h\right)N_m^2}\int_0^a \rho f(\rho)J_0\left(\frac{x_m}{a}\rho\right)d\rho \quad ⑮$$

由上例模方的公式⑯有

$$N_m^2 = \frac{a^2}{2}\{[J'_0(x_m)]^2 + J_0^2(x_m)\}$$

而由本例⑨式有

$$J'_0(x_m) = -\frac{1}{Hk_m}J_0(x_m) = -\frac{a}{Hx_m}J_0(x_m)$$

故

$$N_m^2 = \frac{a^2}{2}\left[1 + \frac{a^2}{Hx_m^2}\right]J_0^2(x_m) \quad ⑯$$

将⑯式代入⑮式后，再将⑮式代入⑭式，最后得本例的解为

$$u(\rho,\ z)=\frac{2}{a^{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1+\dfrac{a^{2}}{Hx_{m}^{2}}}\,\frac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{x_{m}}{a}z\right)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{x_{m}}{a}h\right)}\cdot\int_{0}^{a}\rho f(\rho)$$

$$\times\,\mathrm{J}_{0}\left(\frac{x_{m}}{a}\rho\right)\mathrm{d}\rho\cdot\frac{\mathrm{J}_{0}\left(\dfrac{x_{m}}{a}\rho\right)}{\mathrm{J}_{0}^{2}(x_{m})}$$

关于柱坐标系下定解问题中涉及的模长计算，还是需要多练习，尽量熟练的。

- 极坐标系下的发展方程

半径为 R 的圆形膜，边缘固定，在单位质量上受周期力 $f(r,t)=A\sin\omega t$ 的作用，求解膜的受迫振动，设初位移和初速度均为 0 .

解 圆膜的振动位移与 θ 无关， $u=u(r,t)$ ，定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{a^2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)=A\sin\omega t,\\ u\big|_{r=0}\text{有界}, \qquad u\big|_{r=R}=0,\\ u\big|_{t=0}=0, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.\end{cases}$$

方法一：将方程和边条件同时齐次化. 设

$$u(r,t)=v(r,t)+w(r,t),$$

其中 $v(r,t)=g(r)\sin\omega t$ 满足非齐次方程和齐次边界条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\dfrac{a^2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)=A\sin\omega t,\\ v\big|_{r=0}\text{有界}, \qquad v\big|_{r=R}=0,\end{cases}$$

即

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}g(r)}{\mathrm{d}r}\right)+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 g(r)=-\frac{A}{a^2},$$

$$g(0)\text{有界}, \qquad g(R)=0.$$

解之即得

$$g(r)=-\frac{A}{\omega^2}\left[1-\frac{\mathrm{J}_0\left(\frac{\omega}{a}r\right)}{\mathrm{J}_0\left(\frac{\omega}{a}R\right)}\right].$$

在此条件下 $w(r,t)$ 即满足定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\dfrac{a^2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)=0,\\ w\big|_{r=0}\text{有界}, \qquad w\big|_{r=R}=0,\\ w\big|_{t=0}=0, \qquad \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=-\omega g(r).\end{cases}$$

因此，一般解为

$$w(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_i}{R}r\right)\left[A_i\sin\frac{\mu_i}{R}at+B_i\cos\frac{\mu_i}{R}at\right],$$

其中 μ_i 是零阶贝塞耳函数 $\mathrm{J}_0(x)$ 的第 i 个正零点 (从小到大排列)，$i=1,2,3,\cdots$. 代入初条件即可定出

$$A_i=-\frac{2\mu}{\mu_i}\frac{1}{R^2\mathrm{J}_1^2(\mu_i)}\int_0^R g(r)\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_i}{R}r\right)r\,\mathrm{d}r,\qquad B_i=0,$$

其中 $\mu=\omega R/a$.

下面就来计算积分

$$\int_0^R g(r)\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_i}{R}r\right)r\,\mathrm{d}r=-\frac{AR^2}{\omega^2}\int_0^1\left[1-\frac{\mathrm{J}_0(\mu x)}{\mathrm{J}_0(\mu)}\right]\mathrm{J}_0(\mu_i x)\,x\,\mathrm{d}x,$$

由贝塞耳函数的递推关系可以求得

$$\int_0^1 \mathrm{J}_0(\mu_i x)\,x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\mu_i}\mathrm{J}_1(\mu_i),$$

用类似于例 15.5 中计算 $\int_a^b R(r)R_i(r)\,r\,\mathrm{d}r$ 的方法又能求得

$$\int_0^1 \mathrm{J}_0(\mu x)\mathrm{J}_0(\mu_i x)\,x\,\mathrm{d}x=\frac{\mu_i}{\mu_i^2-\mu^2}\mathrm{J}_0(\mu)\mathrm{J}_1(\mu_i),$$

所以

$$\int_0^1 g(Rx)\mathrm{J}_0(\mu_i x)\,x\,\mathrm{d}x=A\left(\frac{\mu}{\omega}\right)^2\frac{1}{\mu_i}\frac{1}{\mu_i^2-\mu^2}\mathrm{J}_1(\mu_i).$$

因此

$$A_i=-2A\mu\left(\frac{\mu}{\omega}\right)^2\frac{1}{\mu_i^2}\frac{1}{\mu_i^2-\mu^2}\frac{1}{\mathrm{J}_1(\mu_i)}.$$

最后就得到

$$w(r,t)=-2A\mu\left(\frac{\mu}{\omega}\right)^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^2}\frac{1}{\mu_i^2-\mu^2}\frac{1}{\mathrm{J}_1(\mu_i)}\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_i}{R}r\right)\sin\frac{\mu_i}{R}at,$$

$$\begin{aligned}u(r,t)=&-\frac{A}{\omega^2}\left[1-\frac{\mathrm{J}_0(\mu r/R)}{\mathrm{J}_0(\mu)}\right]\sin\omega t\\&-2A\mu\left(\frac{\mu}{\omega}\right)^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^2}\frac{1}{\mu_i^2-\mu^2}\frac{1}{\mathrm{J}_1(\mu_i)}\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_i}{R}r\right)\sin\frac{\mu_i}{R}at.\end{aligned}$$

上面的计算中其实也给出了 $v(r,t)$ 的展开式

$$\begin{aligned}v(r,t)&=-\frac{A}{\omega^2}\left[1-\frac{\mathrm{J}_0(\mu r/R)}{\mathrm{J}_0(\mu)}\right]\sin\omega t\\&=\frac{2A}{\omega^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu^2}{\mu_i^2-\mu^2}\frac{1}{\mu_i\mathrm{J}_1(\mu_i)}\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_i}{R}r\right)\sin\omega t,\end{aligned}$$

所以还可以将解改写成

$$\begin{aligned}u(r,t)=&\frac{2A}{\omega^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu^2}{\mu_i^2-\mu^2}\frac{1}{\mu_i\mathrm{J}_1(\mu_i)}\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_i}{R}r\right)\sin\omega t\\&-2A\mu\left(\frac{\mu}{\omega}\right)^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu^2}{\mu_i^2-\mu^2}\frac{1}{\mu_i^2\mathrm{J}_1(\mu_i)}\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_i}{R}r\right)\sin\frac{\mu_i}{R}at\\=&2A\left(\frac{\mu}{\omega}\right)^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^2-\mu^2}\frac{1}{\mu_i\mathrm{J}_1(\mu_i)}\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_i}{R}r\right)\left[\sin\omega t-\frac{\mu}{\mu_i}\sin\frac{\mu_i}{R}at\right].\end{aligned}$$

方法二：按相应齐次问题本征函数展开. 前面已经给出了相应齐次问题的本征函数. 于是，令

$$u(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}T_i(t)\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_i}{R}r\right).$$

代入方程及初条件，得

$$T_i''(t)+\left(\frac{\mu_i}{R}a\right)^2 T_i(t)=\frac{2A}{\mu_i \mathrm{J}_1(\mu_i)}\sin\omega t,$$

$$T_i(0)=0,\qquad T_i'(0)=0.$$

解之得

$$T_i(t)=\frac{2A}{\mu_i \mathrm{J}_1(\mu_i)}\left(\frac{R}{a}\right)^2\frac{1}{\mu_i^2-\mu^2}\left[\sin\omega t-\frac{\mu}{\mu_i}\sin\frac{\mu_i}{R}at\right],$$

其中 $\mu=\omega R/a$. 由此即得

$$u(r,t)=2A\left(\frac{R}{a}\right)^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^2-\mu^2}\frac{1}{\mu_i \mathrm{J}_1(\mu_i)}\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_i}{R}r\right)$$

$$\times\left[\sin\omega t-\frac{\mu}{\mu_i}\sin\frac{\mu_i}{R}at\right].$$

正如预料的那样，两种解法得到的结果完全相同.

讨论 总结以上求解过程，重要的步骤有：

(1) 寻找合适的齐次化函数 $v(r,\phi,t)$;

(2) 求相应齐次问题的本征函数;

(3) 将非齐次项和初始条件按照相应齐次问题的本征函数展开，计算展开系数 $h_{mi1}(t), h_{mi2}(t)$ 和 p_{mi1}, p_{mi2} ;

(4) 解常微分方程，求出 $T_{mi1}(t)$ 及 $T_{mi2}(t)$.

在这些步骤中，关键是第一步寻找合适的齐次化函数 $v(r,\phi,t)$ ，因为这将直接影响到后面计算的简繁. 选取不恰当的齐次化函数，甚至会引起不必要的计算困难. 由于在真实的物理问题中， $f(\phi,t)$ 也应当是周期函数，可作傅里叶展开，因此可以只讨论

$$f(\phi,t)=\psi(t)\cos k\phi \qquad \text{或} \qquad f(\phi,t)=\psi(t)\sin k\phi$$

的特殊情形. 为了叙述的方便，下面只分析 $f(\phi,t)=\psi(t)\cos k\phi$ 的情形. 这时不妨取

$$v(r,\phi,t)=r^n\cos k\phi\,\psi(t),$$

因此，

$$g(r,\phi,t)=r^n\cos k\phi\,\psi'(t)-\kappa\left(n^2-m^2\right)r^{n-2}\cos k\phi\,\psi(t),$$

这样在计算 $h_{mi1}(t), h_{mi2}(t)$ 和 p_{mi1}, p_{mi2} 时就会遇到积分

$$\int_0^a \mathrm{J}_k\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r\right)r^{n\pm1}\,\mathrm{d}r.$$

但只有当 $k\pm n=$ 偶数时，才能用递推关系算出这种类型的积分. 这是在选择齐次化函数 $v(r,\phi,t)$ 时需要考虑的原则. 否则会引起不必要的麻烦.

对于其他形式的 $f(\phi,t)$ ，原则不变：在选择齐次化函数 $v(r,\phi,t)$ 时，同样要预见到后面计算 $h_{mi1}(t), h_{mi2}(t)$ 和 p_{mi1}, p_{mi2} 时可能遇到的困难.

当然，在可能的条件下，选择齐次化函数 $v(r,\phi,t)$ ，还应当使 $w(r,\phi,t)$ 满足的微分方程尽量简单，例如，尽可能使得 $w(r,\phi,t)$ 满足齐次偏微分方程，也就是说，使边界条件和方程同时齐次化.

- 特殊积分（无法直接应用递推公式）

$$I=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x,\ a,\ b\ \text{为实数},a>0$$

解 由于 $\mathrm{J}_0(bx)$不可能写成另一 Bessel 函数的微分，所以不便用分部积分做，考虑到 Bessel 函数有积分表达式

$$\mathrm{J}_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\sin\theta-n\theta)}\mathrm{d}\theta$$

故

$$I=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ibx\sin\theta}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b\sin\theta)x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{a-\mathrm{i}b\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

这是一三角函数有理式的积分. 由留数理论一章的处理方法

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则 $\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z,\ \sin\theta=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}$

于是

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{1}{a-\frac{b(z^2-1)}{2z}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{1}{bz^2-2az-b}\mathrm{d}z$$

被积函数的奇点为单极点

$$z_{1,2}=\frac{a}{b}\pm\frac{1}{b}\sqrt{a^2+b^2}$$

且

$$|z_1|=\left|\frac{a}{b}-\frac{1}{b}\sqrt{a^2+b^2}\right|<1$$

$$\mathrm{res}\left[\frac{1}{bz^2-2az+b},\ z_1\right]=\frac{1}{2bz-2a}\bigg|_{z=z_1}=-\frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

所以

$$I=\frac{1}{-\pi\mathrm{i}}\cdot 2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{res}\left[\frac{1}{bz^2-2az-b},\ z_1\right]$$

$$=-2\cdot\frac{-1}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$