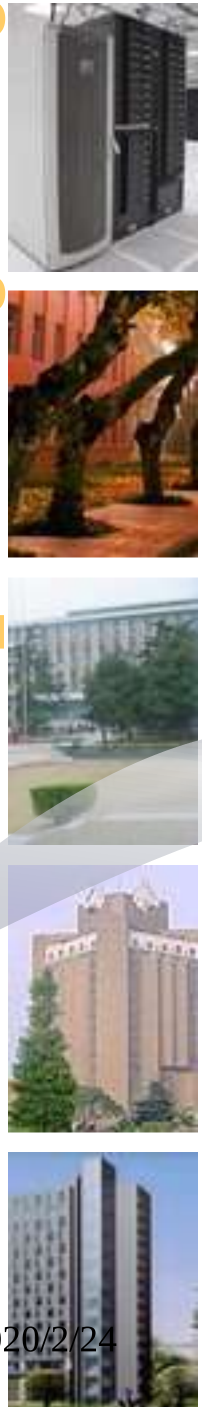
Computer Science and Technology



# 运筹学基础

讲者：顾乃杰 教授、黄章进 副教授

计算机科学与技术学院

2020-02-17

# 第2章　线性规划及单纯形法

# Chap.2 Linear Programming & Classical Simplex Methods

# 主要内容



- 2.1 线性规划问题及其数学模型
- 2.2 线性规划问题的几何意义
- 2.3 单纯形法
- 2.4 单纯形法的计算步骤
- 2.5 单纯形法的进一步讨论
- 2.6 应用举例
- 2.7 使用计算机工具求解线性规划问题

# 线性规划概论



- 线性规划（Linear Programming, LP）使用数学模型来描述相关问题
  - 线性（Linear）：意味着模型中所有的数学函数都是线性函数
  - 规划（Programming）：不是指计算机编程，实质上是“计划”（Planning）的同义词

- 线性规划通常解决下列两类问题：
  1. 当任务或目标确定后，如何统筹兼顾合理安排，用最少的资源（如资金、设备、原材料、人工、时间等）去完成确定的任务或目标
  2. 在一定的资源条件限制下，如何组织安排生产获得最好的经济效益（如产品品量最多、利润最大）

# 线性规划概论



- 1939年，前苏联数学家康托洛维奇在《生产组织与计划中的数学方法》一书中提出线性规划问题，但未引起注意
  - 1960年，康托洛维奇再次发表了《最佳资源利用的经济计算》一书后，才受到国内外的一致重视。
  - 1975年，获得了诺贝尔经济学奖。
- 求解方法
  - 单纯形法：1947年由美国人丹捷格（G.B. Dantzig）提出
    - 在最坏情况具有指数复杂性，但在平均意义下已经证明是一个多项式时间算法
  - 内点法：1979年苏联数学家卡奇扬（Khachian）提出椭球算法，1984年美籍印度裔数学家卡玛卡（Karmarkar）提出投影梯度法
    - 多项式时间算法

# 2.1 线性规划问题及其数学模型



- 2.1.1 问题的提出

实际问题→数学模型→ 求解模型 →原问题解。

- 2.1.2 图解法

对于低维问题，用图示的方法求解。

- 2.1.3 线性规划问题的标准形式

对于一般问题，需要用更为通用更一般性的方法，需要把问题统一描述，把不同类型的线性规划问题，用同一种格式描述，便于用统一的普适的方法去求解。

- 2.1.4 线性规划问题的解的概念

可行解、基、基可行解、可行基的根念，便于后面介绍单纯形方法。

# 2.1.1 问题的提出



- 例2.1 某工厂在计划期内要安排生产I、II两种产品，已知生产单位产品所需的设备台时及A、B两种原材料的消耗，如表所示。该工厂每生产一件产品I可获利 2元，每生产一件产品II可获利 3元，问应如何安排计划使该工厂获利最多?

| | 产品I | 产品II | 现有条件 |
|---|---|---|---|
| 设备 | 1台时/件 | 2台时/件 | 8台时 |
| 原材料A | 4kg/件 | 0 | 16kg |
| 原材料B | 0 | 4kg/件 | 12kg |

– 解：将一个实际问题转化为线性规划模型有以下几个步骤:

- 1．确定决策变量：$x_1$=生产I的数量 $x_2$=生产II的数量
- 2．确定目标函数：该工厂的目标是获利最大 $\max z = 2x_1 + 3x_2$
- 3．确定约束条件：$x_1 + 2x_2 \le 8$（台时数限制）

  $4x_1 \le 16$ $4x_2 \le 12$ （A、B材料限制）
- 4．变量取值限制：一般情况，决策变量只取正值（非负值）

  $x_1 \ge 0$，$x_2 \ge 0$

# 2.1.1 问题的提出



- 例2.1 某工厂在计划期内要安排生产I、II两种产品，已知生产单位产品所需的设备台时及A、B两种原材料的消耗，如表所示。该工厂每生产一件产品I可获利 2元，每生产一件产品II可获利 3元，问应如何安排计划使该工厂获利最多？

| | 产品I | 产品II | 现有条件 |
|---|---|---|---|
| 设备 | 1台时/件 | 2台时/件 | 8台时 |
| 原材料A | 4kg/件 | 0 | 16kg |
| 原材料B | 0 | 4kg/件 | 12kg |

– 解：将一个实际问题转化为线性规划模型有以下几个步骤：

- 1．确定决策变量：$x_1$=生产I的数量　$x_2$=生产II的数量

目标函数　　$\max \quad z=2x_1+3x_2$

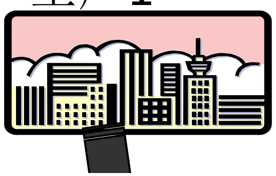
满足约束条件
$$\begin{cases} x_1+2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

# 例2：污水处理

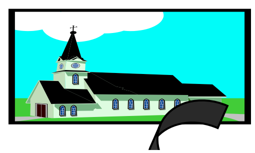


- 例2 河流1：每天流量500万$m^3$；河流2：每天流量200万$m^3$，水质要求：污水含量≤0.2%。工厂1每天排放2万$m^3$污水，工厂2每天排放1.4万$m^3$污水，污水从工厂1流向工厂2有20%可以净化。处理污水成本：工厂1是1000元/万$m^3$；工厂2是800元/万$m^3$。问两个工厂每天各处理多少污水总成本最少？

工厂1



工厂2



目标函数 $\min z = 1\,000x_1 + 800x_2$

满足约束条件 $\begin{cases} x_1 \geqslant 1 \\ 0.8x_1 + x_2 \geqslant 1.6 \\ x_1 \leqslant 2 \\ x_2 \leqslant 1.4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

解：

决策变量：$x_1$ =工厂1每天处理的污水量

$x_2$ =工厂2每天处理的污水量

目标函数：$\min z = 1000x_1 + 800x_2$

约束条件：

$(2-x_1) / 500 \le 0.2\% \longrightarrow (2-x_1) \le 1$

$[(2-x_1)(1-20\%) + (1.4-x_2)] / 700 \le 0.2\%$

$x_1 \le 2$

$x_2 \le 1.4$

$x_1$、$x_2 \ge 0$

# 线性规划问题的特征



- 线性规划数学模型的特征：
  - 都用一组决策变量 $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 表示方案，这组决策变量的值代表一个具体方案
    - 一般这些变量的取值是非负且连续的
  - 都有资源、价值等有关数据，存在可以量化的约束条件，这些约束条件可以用一组线性等式或线性不等式来表示；
  - 都有一个要求达到的目标，可用决策变量及其相关价值系数的线性函数(称为目标函数)来表示。
    - 按问题的要求不同，要求目标函数实现最大化或最小化。
- 线性规划数学模型三要素：
  - 决策变量（**Decision variables**）
  - 约束条件（**Constraints**）
  - 目标函数（**Objective function**）

# 线性规划模型的一般形式



- 线性规划的数学模型的一般形式为：
  - 目标函数 max(min) $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$
  - 约束条件 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (或 =, \ge) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (或 =, \ge) b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (或 =, \ge) b_m \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

决策变量：$x_j$

价值系数：$c_j$

技术系数：$a_{ij}$

限额系数：$b_i$

  - 在实际中一般 $x_j \ge 0$，但有时 $x_j \le 0$ 或 $x_j$ 无符号限制。
  - 一般 $b_i \ge 0$

# 线性规划问题模型的隐含假设



- 比例性（Proportionality）：关于目标函数和约束条件
  - 每个决策变量在目标函数和约束条件中的贡献与其值成比例
- 可加性（Additivity）：关于目标函数和约束条件
  - 所有决策变量在目标函数和约束条件中的总贡献是各个变量各自贡献之和
- 可分性（Divisibility）：关于决策变量取值
  - 决策变量可取满足约束条件的任意值，即允许非整数值
  - 若部分或全部决策变量严格要求取整数值，则为整数线性规划
- 确定性（Certainty）：关于模型参数取值
  - 目标函数和约束条件中的系数（参数）的值为已知常量

# 线性规划问题模型的隐含假设



- Dorian汽车公司案例
  - Dorian汽车公司生产豪华汽车和卡车，该公司将客户定位于高收入的男性和女性。为了抓住这些群体，Dorian汽车公司实施了两个野心勃勃的电视广告计划，决定在两类节目上购买1分钟的商业广告时段：喜剧片和足球比赛。每个喜剧商业广告的观众可以达到700万名高收入女性和200万名高收入男性，费用是50000美元；每个足球商业广告的观众可以达到1200万名高收入男性和200万名高收入女性，费用是100000美元。Dorian公司希望这些商业广告能够被至少2800万名高收入女性和2400万名高收入男性看到。那么Dorian公司如何以最小的费用满足它的广告要求?
  - 易列出线性规划的数学模型如下：

$$\min z = 50000x_1 + 100000x_2$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \ge 28 \\ 2x_1 + 12x_2 \ge 24 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

# 线性规划问题模型的隐含假设



- 现在我们来看一下实际中的Dorian问题是否符合线性规划的四个假设：
  - 比例性假定：是否每增加一次喜剧广告的播出，就必定正好增加700万女性观众和200万男性观众？显然，这将和经验证据相矛盾，经验证据表明，在某一特征时刻以后，广告的收视率将下降。在播出了一定次数的汽车广告后，大多数人也许已经看过其中的一个广告，因此播出更多次广告的意义并不大。
  - 可加性假定：观众总人数=喜剧广告观众+足球广告观众，事实上许多情况是同一个人将观看两种广告；
  - 可分性假定：如果只提供1分钟广告，则Dorian公司购买广告的线性规划问题的解（3.6个喜剧广告,1.4个足球广告）就是不合理的；
  - 确定性假定：每种类型的广告将增加多少观众也并不确定。

# 线性规划问题模型的隐含假设



Dorian问题似乎违反了线性规划的所有假定，尽管存在这些缺点，分析人员还是使用类似的线性规划模型确定了它们的最佳媒体组合，并为公司节省了大笔费用。

可见，在生产、投资等实际应用中，绝大多数情况并不如理想状态下那样可以简单直观的列出线性规划问题模型，作为运筹分析人员需要做的是通过这样的模型和解，为解决实际问题提供参考和依据。

# 2.1.2 图解法

- 图解法
  - 图解法简单直观，有助于了解线性规划问题求解的基本原理，平面上作图适于求解二维问题。
  - 以例2.1为例进行图解：在以$x_1$，$x_2$为坐标轴的直角坐标系中，非负条件 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ 是指第一象限。

目标函数 $\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$

满足约束条件
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

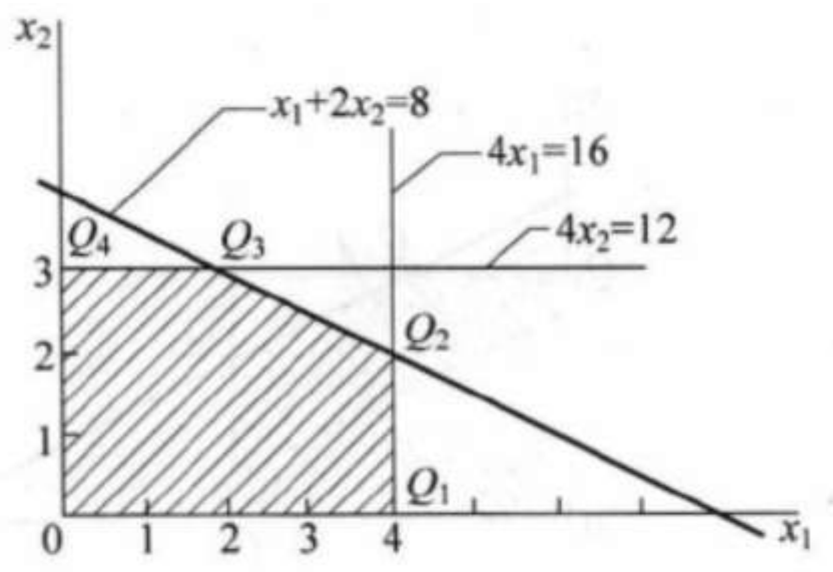



图 2-2

# 2.1.2 图解法

目标函数是以z作为参数的一组平行线：$x_2 = z/3 - (2/3)x_1$，当z值不断增加时，该直线沿着其法线方向向右上方移动。

- 图解法
  - 图解法简单直观，有助于了解线性规划问题求解的基本原理，平面上作图适于求解二维问题。
  - 以例2.1为例进行图解：在以$x_1$，$x_2$为坐标轴的直角坐标系中，非负条件 $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ 是指第一象限。

目标函数 $\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$

满足约束条件
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

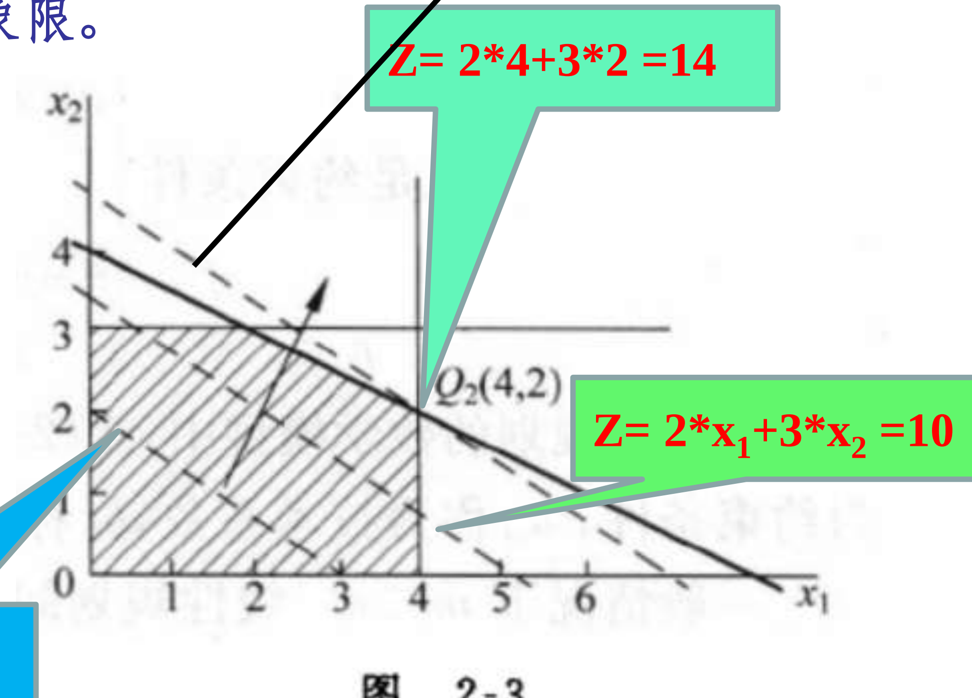



图 2-3

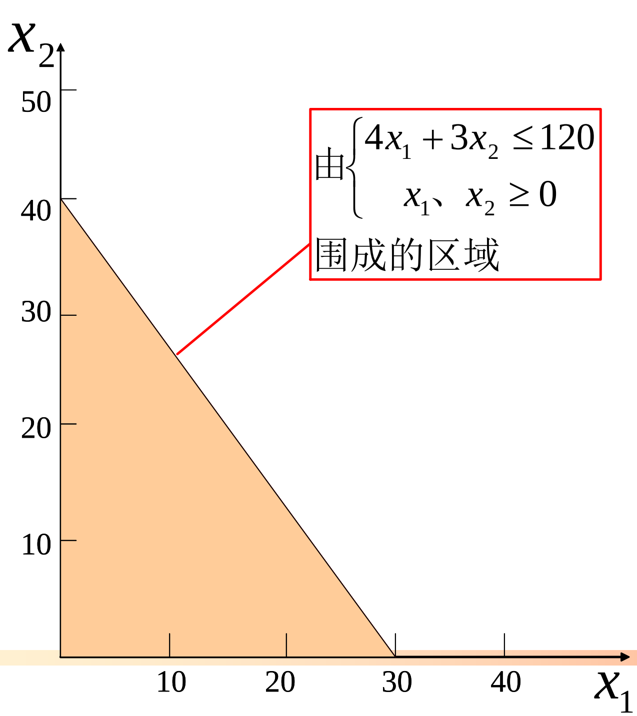
# 2.1.2 图解法

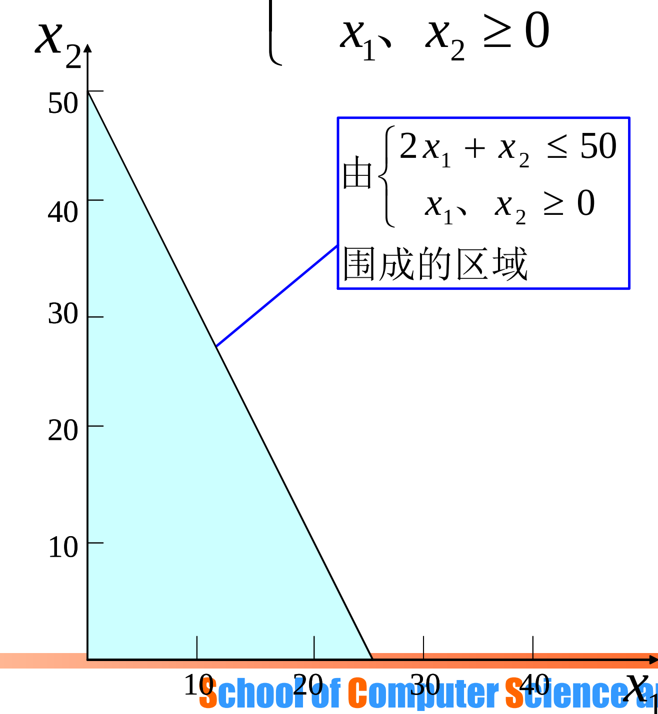


- 图解法
  - 图解法简单直观，平面上作图适于求解二维问题。
  - 节2.1补充例

$$\max z = 50x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 120 \\ 2x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases}$$

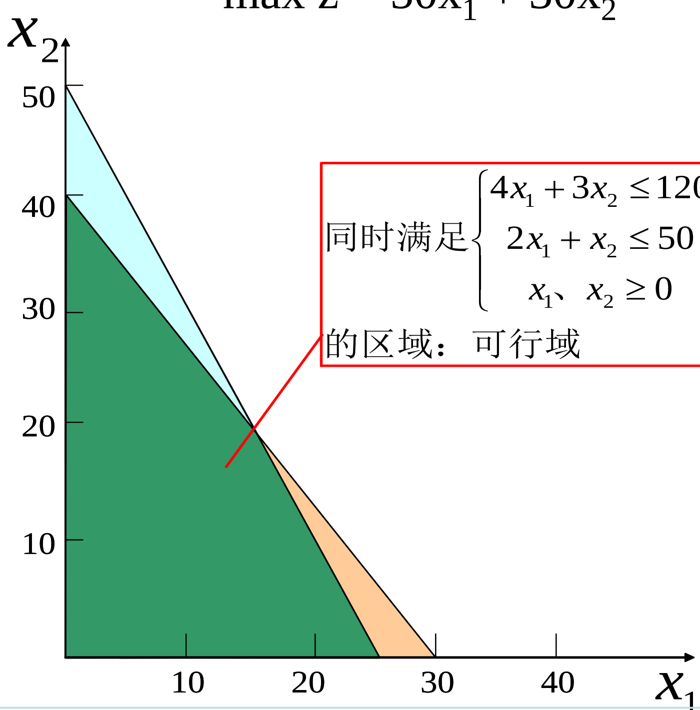


# 图解法(cont.)

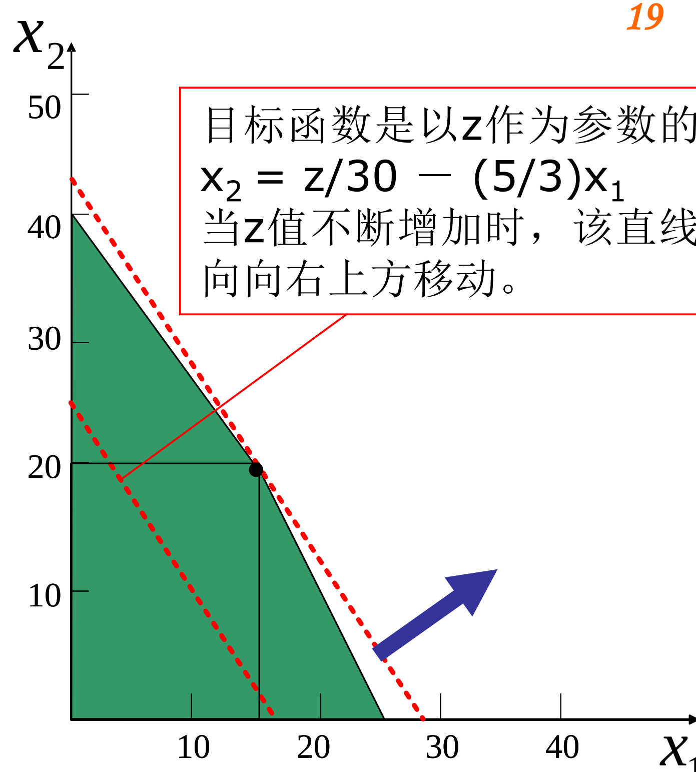


max $z = 50x_1 + 30x_2$




同时满足$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 120 \\ 2x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases}$

的区域：可行域




目标函数是以z作为参数的一组平行线：

$x_2 = z/30 - (5/3)x_1$

当z值不断增加时，该直线沿着其法线方向向右上方移动。

可行域是由约束条件围成的区域（图中绿色区域），该区域内的每一点都是可行解，它的全体组成问题的解集合。

当该直线移到点**(15,20)**时，**z**（目标函数）值达到最大：

**Max z=50*15+30*20=1350**

此时最优解=（**15**，**20**）

# 图解法(cont.)

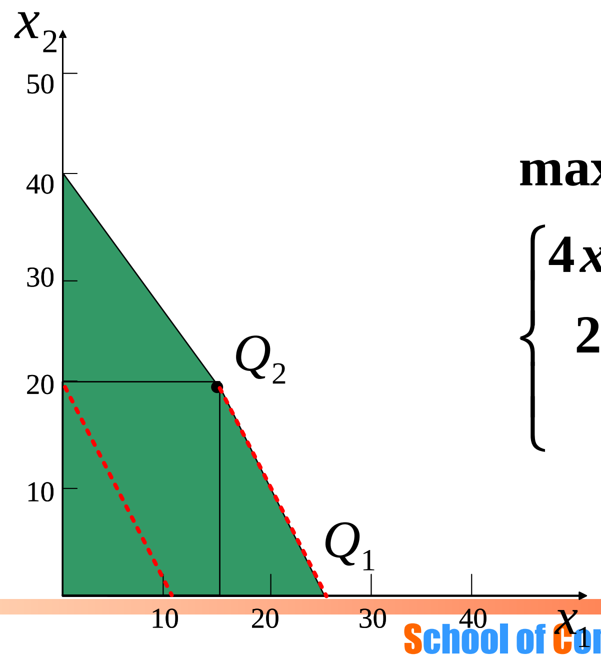


– 对于一般线性规划问题，求解结果可能出现以下情况：

1. 唯一最优解
- 求解得到的问题的最优解是唯一的，如例1

2. 无穷多最优解（多重解）
- 若将节2.1补充例中的目标函数变为同约束条件边界线平行的直线，例如 将目标函数由 $\max z = 50x_1 + 30x_2$ 改为： $\max z = 60x_1 + 30x_2$

当z值从小变大时，将与线段$Q_1Q_2$重合，此时该线段上的任意一点都使z取得相同的最大值。




$$\max z = 60x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 120 \\ 2x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases}$$

# 图解法(cont.)

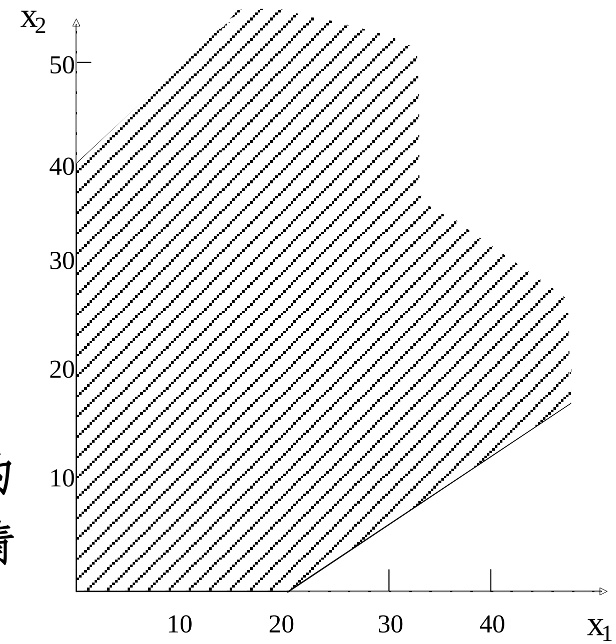


**3.** 无界解

- 例：

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 40 \\ x_1 - x_2 \le 20 \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases}$$




用图解法求解如右图，可以看出该问题的目标函数值可以增大到无穷大，称这种情况为无界解。

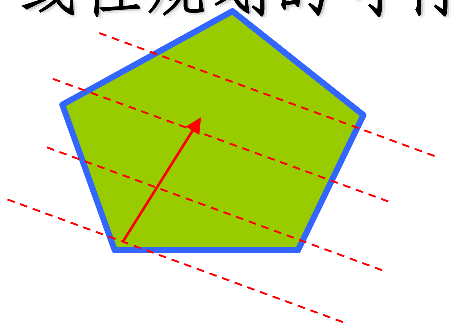
**4.** 无可行解

用图解法求解得到的可行域为空集，即无可行解，也不存在最优解。

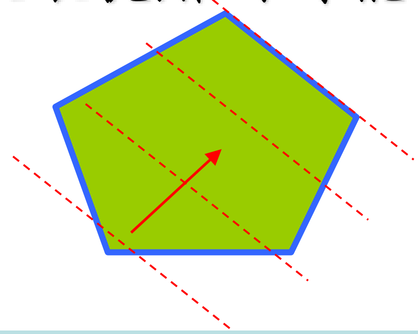
# 可行域与解的种类



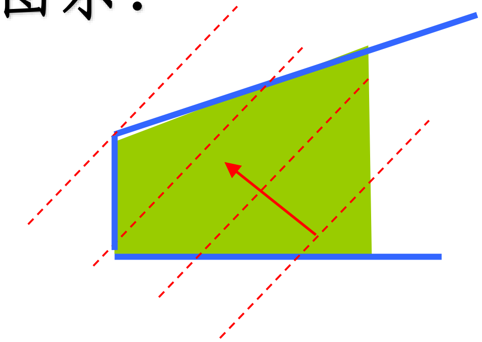
- 线性规划的可行域及最优解的可能结果图示：



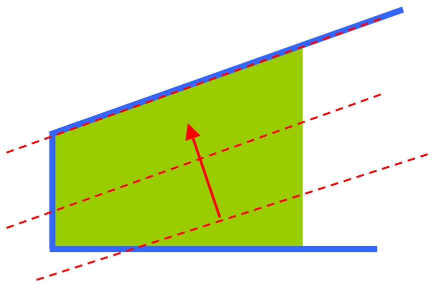
(a)可行域封闭，唯一最优解



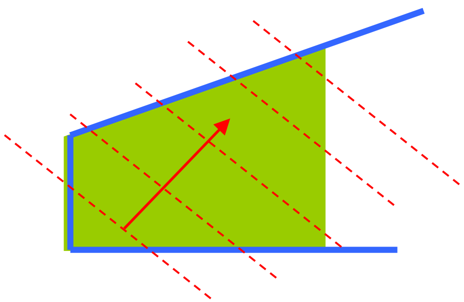
(b)可行域封闭，多个最优解



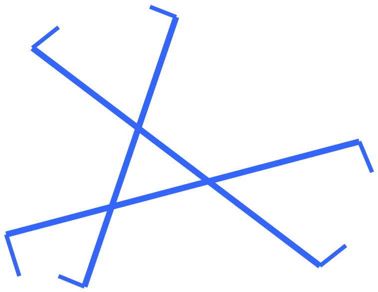
(c)可行域开放，唯一最优解



(d)可行域开放，多个最优解



(e)可行域开放，目标函数无界



(f) 可行域为空集

# 图解法(cont.)



- 出现无界解和无可行解两种情况时，一说般明线性规划问题的数学模型有错误。
  - 前者缺乏必要的约束条件，后者是有矛盾的约束条件。
- 从图解法可直观地见到
  - 当线性规划问题的可行域非空时，它是有界或无界凸多边形。
  - 若线性规划问题存在最优解，它一定在有界可行域的某个顶点得到
  - 若在两个顶点同时得到最优解，则它们连线上的任意一点都是最优解，即有无穷多最优解
  - 图解对于多维问题显得无能为力，需要用其它更一般的方法，需要给线性规划一种统一的描述形式----标准型。

# 2.1.3 线性规划问题的标准形式



- 在用单纯法求解线性规划问题时，为了讨论问题方便，需将线性规划模型化为统一的标准形式。

- 线性规划问题的**标准型**为
  - 目标函数求最大值（有时求最小值）
  - 约束条件都为等式方程
  - 变量$x_j$为非负
  - 常数$b_i$都大于或等于零

# 2.1.3 线性规划问题的标准形式

- 标准形式：

$$M_1:$$

$$\text{目标函数}: \max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{约束条件}: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

- 规定约束条件的右端项 $b_i \geq 0$，否则等式两端乘以-1

# 2.1.3 线性规划问题的标准形式



- 标准形式：

$$(M_1')\qquad \max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0, & j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

# 矩阵表示的标准形式



- 矩阵表示：

$$M_1'' : \text{目标函数}: \max z = CX$$

$$\text{约束条件}: \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{系数矩阵：} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (P_1, P_2, \cdots P_n) ;$$

$$\text{零向量}: 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{资源向量：} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\text{决策变量向量：} \quad X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

$$\text{价值向量：} \quad C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

# 变换为标准型



- 如何将一般问题化为标准型：
  - 若目标函数是求最小值：min z = CX
    - 令 z’ =－z，则 max z’ =－CX
  - 若约束条件是不等式，化为等式
    - 若约束条件是“≤”不等式，在不等式左端加入非负松弛变量

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i$$

$y_i \geq 0$是非负的松弛变量

    - 若约束条件是“≥”不等式，在不等式左端减去非负剩余变量

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - z_i = b_i$$

$z_i \geq 0$是非负的剩余变量

# 变换为标准型



- 若约束条件右端的某一常数项 $b_i<0$
  - 在 $b_i$ 相对应的约束方程两边乘上－1
- 若存在取值无约束的变量 $x_k$
  - 引进两个非负变量 $x_k'$，$x_k'' \geq 0$，令 $x_k = x_k' - x_k''$

# 线性规划问题的标准型



- 例4 将下列问题化成标准型：

$$\min z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1、x_2 \ge 0，x_3\text{为无约束} \end{cases}$$

- 解：步骤为：

1. 用$x_4 - x_5$替换$x_3$，其中$x_4$、$x_5 \ge 0$；
2. 在第一个约束不等式左端加入松弛变量 $x_6$；
3. 在第二个约束不等式左端减去剩余变量 $x_7$；
4. 令z'＝－z，把求min z改为求max z'，即可得到标准型：

$$\max z' = x_1 - 2x_2 + 3(x_4 - x_5) + 0x_6 + 0x_7$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (x_4 - x_5) + x_6 = 7 \\ x_1 - x_2 + (x_4 - x_5) - x_7 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2(x_4 - x_5) = 5 \\ x_1、x_2、x_4、x_5、x_6、x_7 \ge 0 \end{cases}$$

# 线性规划问题的标准型

- 例 将节2.1补充例 的问题化成标准型。
- 解：

节2.1补充例的数学模型为：

$$\max z = 50x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 120 \\ 2x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases}$$

在各不等式中加入松弛变量$x_3$、$x_4$，得到标准型：

$$\max z = 50x_1 + 30x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 120 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 50 \\ x_1、x_2、x_3、x_4 \ge 0 \end{cases}$$

# 2.1.4 线性规划问题解的概念



- 一般线性问题的标准型为：一般 m<n

$$\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i=1,2,\cdots,m & (2.5) \\ x_j \ge 0, j=1,2,\cdots,n & (2.6) \end{cases}$$

  - 满足约束条件(2.5) (2.6)的解 $X=(x_1,x_2, \ldots, x_n)^T$，称为线性规划问题的可行解。
  - 使目标函数达到最大（即：满足条件(2.4)）的可行解叫最优解。

# 线性规划问题解的概念



- 基：设A是约束方程组的m×n (m<n)维系数矩阵，其秩为m。B是A中m×m阶非奇异的子矩阵（|B|≠0），则称矩阵B为该线性规划问题的一个基。
  - 矩阵B是由m个线性无关的列向量组成，不失一般性，可设

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}=(P_1,P_2,\cdots P_m)$$

- 基向量：矩阵B的列向量 $P_j$ 称为对应基B的基向量
- 基变量：与基向量 $P_j$ 相对应的变量 $x_j$ 就称为基变量，其余的变量就称为非基变量。

# 线性规划问题解的概念



- 约束方程组(2. 5)的求解问题，假设该方程组系数矩阵A的秩为m ，因m< n，故它有无穷多个解。假设前二个变量的系数列向量是线性独立的。这时式(2. 5) 可写成:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix} x_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \vdots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix} x_{m+1} - \cdots - \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n \quad (2.7)$$

或者写成:

$$\sum_{j=1}^{m} P_j x_j = b - \sum_{j=m+1}^{n} P_j x_j$$

# 线性规划问题解的概念



- 方程组 (2. 7) 的一个基是:

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}=(P_1,P_2,\cdots P_m)$$

- 设$X_B$是对应于这个基的基变量: $X_B=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T$
- 若令式(2. 7)的非基变量全为0, $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$ ，这时变量的个数等于线性方程的个数。用高斯消去法，求出解：

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^T$$

- 该解的非零分量的数目不大于方程个数，称X为基解。

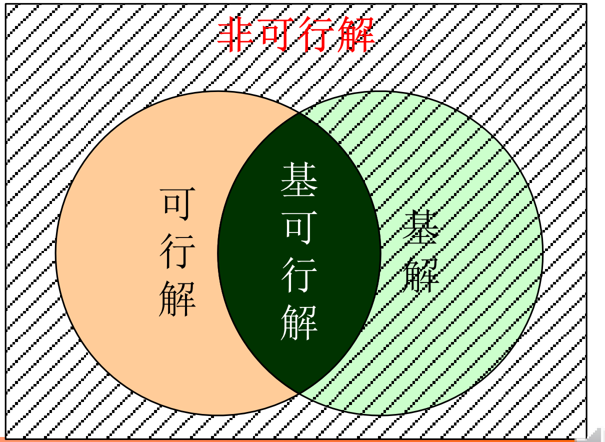
# 线性规划问题解的概念



- **基解**：对于某一特定的基B，非基变量取0值时，求解约束线性方程组 AX=b 得到的解（无$x_i \geq 0$的要求）。
  - 基解的非零分量的数目不大于方程个数m
- **基可行解**：满足非负约束条件的基解
  - 基可行解的非零分量的数目也不大于m, 并且都是非负的。

注意基可行解和基解的差异

- **可行基**：对应于基可行解的基
  - 约束方程组（2.5）具有基解的数目最多是 $C_n^m$ ，一般基可行解的数目要小于基解的数目。
  - 基解中的非零分量的个数小于m个时，该基解是退化解。在后面讨论中假设不出现退化的情况。
- 几种解之间的关系图



# 基解与基可行解



- 例：

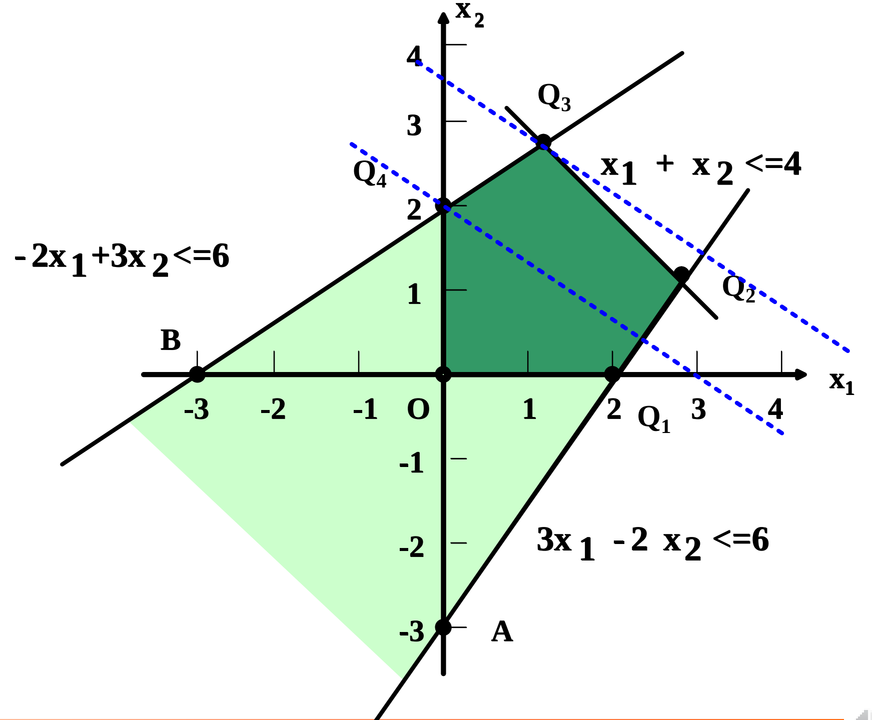
$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + x4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x5 = 4 \\ x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 \ge 0 \end{cases}$$

解：满足约束条件**1~3**与坐标系$x_1,x_2=0$的交点(O, A, B, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$)都代表基解。

注意：A和B并不满足条件$x_1, x_2 \ge 0$

满足所有约束条件1～4的交点(O，$Q_1$，$Q_2$，$Q_3$，$Q_4$)都是代表基可行解。点(O，$Q_1$，$Q_2$，$Q_3$，$Q_4$)刚好是可行域（暗绿色区域）的顶点。



# 2.2 线性规划问题的几何意义

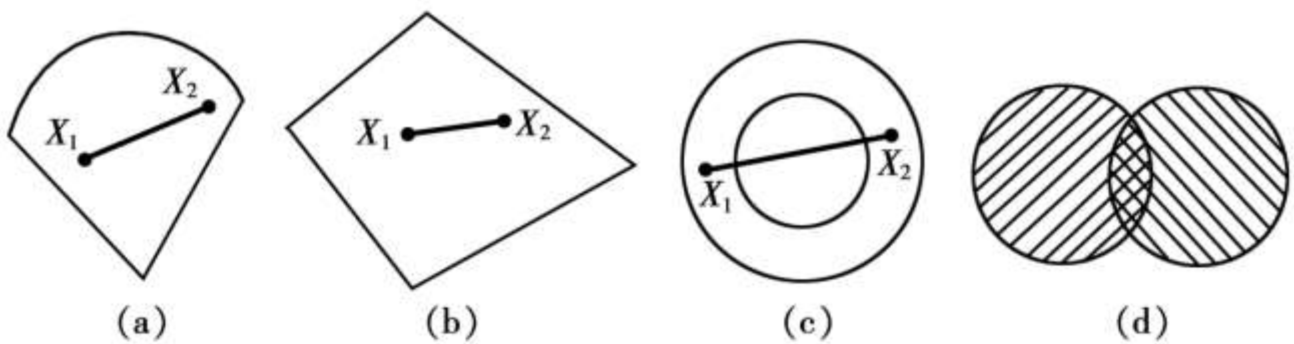


- 2.2.1 基本概念
- 2.2.2 几个定理

# 2.2.1 基本概念



- 凸集：
  - 设K是n维欧氏空间$R_n$的一个点集，若K中的任意两点$x^{(1)}$，$x^{(2)}$的连线上的所有点x仍在K中，则称K为凸集。
    - 即：若K中的任意两点$x^{(1)}$，$x^{(2)} \in K$，对于任意$0 \le \alpha \le 1$使得$x = \alpha x^{(1)} + (1-\alpha) x^{(2)} \in K$，则称K为凸集。
    - 任何两个凸集的交集是凸集，但两个凸集的并不一定是凸集，见图d。




(a)(b)是凸集，(c) 不是凸集

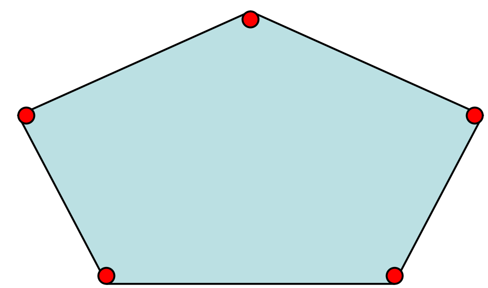
# 凸组合与顶点



- 凸组合
  - 设$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，…，$X^{(k)}$是$n$维欧氏空间$E^n$中的$k$个点。若存在$\mu_1$，$\mu_2$，…，$\mu_k$，且$0 \le \mu_i \le 1$，$i=1,2,\ldots,k$；$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1$，

  使 $$X = \mu_1 X^{(1)} + \mu_2 X^{(2)} + \ldots + \mu_k X^{(k)}$$

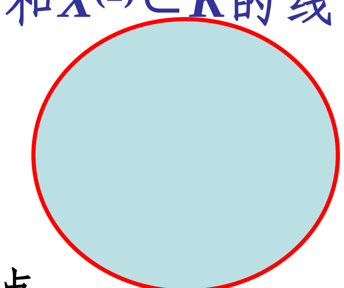
  则称$X$为$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，…，$X^{(k)}$的一个凸组合。
  - 当$0<\mu_i<1$时，称为严格凸组合。



- 顶点
  - 设$K$是凸集，$X \in K$；若$X$不能用不同的两点$X^{(1)} \in K$和$X^{(2)} \in K$的线性组合表示为

  $$X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha) X^{(2)}, \quad (0<\alpha<1)$$

  则称$X$为$K$的一个顶点(或极点)。
    - 凸多边形上的顶点是凸集的顶点，圆周上的点都是顶点



# 2.2.2 几个定理



- **定理1** 若线性规划问题存在可行域，则其可行域

$$D=\left\{X\,\middle|\,\sum_{j=1}^{n}P_jx_j=b\ ,\quad x_j\geq 0\right\}$$ 是凸集。

证：

设$X^{(1)}=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_n^{(1)})^T$，$X^{(2)}=(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\cdots,x_n^{(2)})^T$是$D$内的任意两点，$X^{(1)}\neq X^{(2)}$。

则有$\sum_{j=1}^{n}P_jx_j^{(1)}=b, x_j^{(1)}\geq 0, j=1,2,\cdots,n,\sum_{j=1}^{n}P_jx_j^{(2)}=b, x_j^{(2)}\geq 0, j=1,2,\cdots,n$。

令$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$为$X^{(1)}X^{(2)}$连线上的任意一点，

则：$X$的每一个分量为$x_j=\alpha x_j^{(1)}+(1-\alpha)x_j^{(2)}$,代入约束条件得到：

$$\sum_{j=1}^{n}P_jx_j=\sum_{j=1}^{n}P_j[\alpha x_j^{(1)}+(1-\alpha)x_j^{(2)}]$$

$$=\alpha\sum_{j=1}^{n}P_jx_j^{(1)}+\sum_{j=1}^{n}P_jx_j^{(2)}-\alpha\sum_{j=1}^{n}P_jx_j^{(2)}=\alpha b+b-\alpha b=b$$

X的非负性？

由此可见，$X\in D$，$D$是凸集。

# 几个定理(cont.)



- 引理1 线性规划问题的可行解$X=(x_1,x_2,\dots, x_n)^T$为基可行解的充要条件是：$X$的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。
- 证明：(1) 必要性：因为$X$是基可行解，故$X$的正分量就是各个基变量，而各个基变量对应的系数列向量就是各个基向量。根据基的定义，它们线性无关。

  (2) 充分性：若向量$P_1,P_2,\cdots,P_k$线性独立，则必有$k \le m$；

  当$k = m$时；它们恰构成一个基，

  从而$X = (x_1,x_2,\cdots,x_k,0\cdots0)$为相应的基可行解。

  当$k < m$时，则一定可以从其余的列向量中取出$m-k$个与$P_1,P_2,\cdots,P_k$构成最大线性独立向量组，

  其对应的解恰为$X$，所以根据定义它是基可行解。

# 几个定理(cont.)



- 定理2 线性规划问题的基可行解$X$对应于可行域$D$的顶点。
- 证明： 不失一般性，假设基可行解$X$的前$m$个分量为正。故$\sum_{j=1}^{m} P_j x_j = b$ (2.3)。

用反证法：

(1)假设$X$不是基可行解，则它一定不是可行域$D$的顶点。

若$X$不是基可行解，则其正分量所对应的系数列向量$P_1, P_2, \cdots, P_m$线性相关，

即存在一组不全为零的数$\alpha_i, i = 1,2,\cdots,m$使得

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_m P_m = 0 \qquad (2.4)$$

用一个数$\mu > 0$乘(2.4)式分别与(2.3）式相加减，得：

$$(x_1 - \mu\alpha_1)P_1 + (x_2 - \mu\alpha_2)P_2 + \cdots + (x_m - \mu\alpha_m)P_m = b$$

$$(x_1 + \mu\alpha_1)P_1 + (x_2 + \mu\alpha_2)P_2 + \cdots + (x_m + \mu\alpha_m)P_m = b$$

现取$X^{(1)} = [(x_1 - \mu\alpha_1),(x_2 - \mu\alpha_2),\cdots,(x_m - \mu\alpha_m),0,\cdots,0]$

$$X^{(2)} = [(x_1 + \mu\alpha_1),(x_2 + \mu\alpha_2),\cdots,(x_m + \mu\alpha_m),0,\cdots,0]$$

由$X^{(1)}$，$X^{(2)}$可以得到$X = \frac{1}{2}X^{(1)} + \frac{1}{2}X^{(2)}$，即$X$是$X^{(1)}$，$X^{(2)}$连线的中点。

# 几个定理(cont.)



当$\mu$充分小时，可保证$x_i \pm \mu\alpha_i \geq 0, i=1,2,\cdots,m$

即$X^{(1)}, X^{(2)}$是可行解。所以$X$不是可行域$D$的顶点。

(2)若$X$不是可行域$D$的顶点,故在可行域$D$中可找到不同的两点：

$$X^{(1)}=(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})^T$$

$$X^{(2)}=(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)})^T$$

使$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)} \quad 0<\alpha<1$

设$X$是基可行解，对应向量组$P_1, P_2, \cdots, P_m$线性独立。

当$j>m$时，有$x_j=x_j^{(1)}=x_j^{(2)}=0$，由于$X^{(1)}, X^{(2)}$是可行域的两点。

应满足$\sum_{j=1}^{m} P_j x_j^{(1)}=b$与$\sum_{j=1}^{m} P_j x_j^{(2)}=b$。

将上述两式相减，即得$\sum_{j=1}^{m} P_j(x_j^{(1)}-x_j^{(2)})=0$

因为$X^{(1)} \neq X^{(2)}$，所以上式系数$(x_j^{(1)}-x_j^{(2)})$不全为零，

故向量组$P_1, P_2, \cdots, P_m$线性相关，与假设矛盾。即$X$不是基可行解。

# 几个定理(cont.)



- 引理2 若$K$是有界凸集，则任何一点$X \in K$可表示为$K$的顶点的凸组合（证明：略）
  - 例5 设X是三角形中任意一点，$X^{(1)}$，$X^{(2)}$和$X^{(3)}$是三角形的三个顶点，试用三个顶点的坐标表示X。

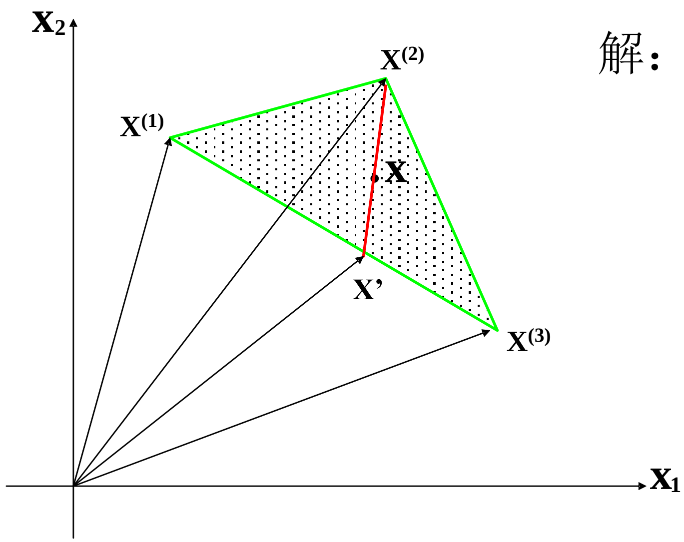



图2.8 例2.5作图说明

解：做连线$XX^{(2)}$，并延长交$X^{(1)}X^{(3)}$于$X'$，可表示为：

$$X' = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(3)} \quad 0 < \alpha < 1$$

又因$X$是$X'X^{(2)}$上的一点，可表示为：

$$X = \mu X' + (1-\mu)X^{(2)} \quad 0 < \mu < 1$$

将该式代入第一个等式得到：

$$X = \mu[\alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(3)}] + (1-\mu)X^{(2)}$$

$$= \mu\alpha X^{(1)} + (1-\mu)X^{(2)} + \mu(1-\alpha)X^{(3)}$$

因为$0 < \alpha < 1, 0 < \mu < 1$，所以$0 < \mu\alpha$、$1-\mu$、$\mu(1-\alpha) < 1$，

且$\mu\alpha + 1 - \mu + \mu(1-\alpha) = 1$

# 几个定理(cont.)



- 定理3 若可行域有界，线性规划问题的目标函数一定可以在其顶点上达到最优。
- 证明：设$X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(k)}$是可行域的顶点，若$X^{(0)}$不是顶点，且目标函数在$X^{(0)}$处达到最优：$z^* = CX^{(0)}$。

因$X^{(0)}$不是顶点，所以可以用$D$的顶点线性表示为：

$$X^{(0)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X^{(i)}, \quad \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

因此$CX^{(0)} = C\sum_{i=1}^{k} \alpha_i X^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i CX^{(i)} \qquad (2-10)$

在所有的顶点中必能找到某个顶点$X^{(m)}$，使$CX^{(m)}$是所有$CX^{(i)}$中的最大者。

并且将$X^{(m)}$代替$(2-10)$中的所有$X^{(i)}$，得到

$$CX^{(0)} \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i CX^{(m)} = CX^{(m)}$$

根据假设$CX^{(0)}$是最大值，所以只有$CX^{(0)} = CX^{(m)}$，

即目标函数在顶点$X^{(m)}$处也能达到最大值。

# 基本结论



- 线性规划问题的所有可行解构成的可行域是凸集，且有有限个顶点
  - 顶点数不大于 $C_n^m$ 个
  - 可能为无界域
- 线性规划问题的每个基可行解对应可行域的一个顶点。
- 若线性规划问题有最优解，必可在某顶点上得到。
  - 有时目标函数也可能在多个顶点上达到最优值。这些顶点的凸组合也是最优解。（有无穷多最优解）
  - 求解思路：枚举法