概率论与数理统计 B　第三周作业　3 月 3 日 周二

PB18151866 龚小航

4. 在一闯关游戏中一共有 4 道关卡，若每道关卡某选手能以 2/3 的概率顺利通过然后进入下一关，或以 1/3 的概率被淘汰出局(设每道关卡的通过情况相互独立)，以 X 表示该选手能顺利通过关卡的数目，试求 X 的分布律.

解：选手挑战每一关都是独立事件，记通过挑战为事件 A，不通过挑战为事件$\overline{A}$。事件 A 在一次试验中发生的概率为 2/3，把该试验独立的重复 X 次。由于只要$\overline{A}$发生一次试验就会结束，所以 X 的可能值情况如下所示。

$$P(X=0)=\frac{1}{3} \qquad P(X=1)=\frac{2}{3}*\frac{1}{3}=\frac{2}{9} \qquad P(X=2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2*\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$$

$$P(X=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3*\frac{1}{3}=\frac{8}{81} \qquad P(X=4)=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

将 X 分布律以分布表的形式展示如下:

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{16}{81}$

8. 设某游乐场的一部设备在一天内发生故障的概率为 20%，设备一旦发生故障则全天无法工作. 若一周五个工作日内无故障可以获利 10 万元，只发生一次故障可以获利 5 万元，发生两次故障获利 0 元，发生三次或三次以上故障则亏损 2 万元. 试求一周内该游乐场在这台设备上的毛利润的分布律.

解：以 X 表示一周内游乐场在这台设备上的毛利润（万元）。由题目描述，X 为离散型随机变量，全部的可能取值为 $a_0=10 \quad a_1=5 \quad a_2=0 \quad a_3=-2$

由于每天该设备是否发生故障是独立随机事件，一周五个工作日即为五次独立重复试验，以 Y 表示游乐场一周内发生的故障总次数。显然 Y 服从二项分布。

定义事件 A：在一次试验(一天)中，这台设备发生了故障。由题意，$P(A)=p=0.2$

$$P(Y\ =\ k)\ =\mathrm{C}_5^k\,p^k(1-p)^{n-k}, k\ =\ 0,1,2,3,4,5$$

带入 p，依次算得 Y 的分布，将 Y 分布律以分布表的形式展示如下:

Y	0	1	2	3	4	5
$P(Y)$	$\frac{1024}{3125}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{128}{625}$	$\frac{32}{625}$	$\frac{4}{625}$	$\frac{1}{3125}$

依据 Y 的分布，可简单的写出收益 X 的分布律:

$X(万元)$	10	5	0	-2
$P(X)$	$\frac{1024}{3125}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{128}{625}$	$\frac{181}{3125}$

15. 一篮球运动员连续投篮四次，且假设每次的结果相互独立. 若至少投进一球的概率为 80/81，则该运动员投篮的命中率为多少?

解：以 X 表示该篮球运动员完成四次投篮后的命中数。显然 X 为离散型随机变量，将每次投篮作为一次独立试验，记事件 A：在一次试验中投篮命中。令$P(A) = p_A$

$$P(X=0) = P(\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}) = P(\overline{A})P(\overline{A})P(\overline{A})P(\overline{A}) = \overline{p}_A^4 = 1 - P(X \geq 1) = 1 - \frac{80}{81}$$

$$p_A = 1 - \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{2}{3}$$

16. 若随机变量 X 和 Y 分别服从二项分布$B(2,p)$和$B(3,2p)$，且$P(X \geq 1) = 0.51$. 试求 $P(Y \geq 1)$.

解：随机变量 X 服从二项分布$B(2,p)$，所以 X 的分布如下：

$$P(X = k) = C_2^k\, p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,2$$

将 X 分布律以分布表的形式展示如下：

X	0	1	2
$P(X)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

易见 $P(X \geq 1) = p^2 + 2p(1-p) = 0.51$ 解方程，得$p = 0.3\ \ or\ \ 1.7(reject)$

因此，随机变量 Y 服从二项分布$B(3\,,0.6)$，所以 Y 的分布如下：

$$P(Y = k) = C_3^k\, p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,2,3$$

Y	0	1	2	3
$P(Y)$	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

易见 $P(Y \geq 1) = \frac{117}{125} = 0.936$

20. 有两支篮球队进行友谊杯赛, 假定每一场甲乙两队获胜的概率分别是 0.6 和 0.4, 且各场胜负情况相互独立. 如果规定先胜 4 场者为冠军, 求甲队经过 $i\ (i = 4,5,6,7)$ 场比赛而成为冠军的概率 p_i. 再问与"三场两胜"制比较, 采取哪种赛制对乙队更有利?

解：每一场比赛为一次独立试验。记事件 A：在一次试验中甲队取胜。$p_A = 0.6$

定义事件 W：甲队最终获胜

记总共进行了 i 次独立试验，其中 A 恰发生 4 次且最后一次试验 A 发生。

$$P(W|n=i) = \mathrm{C}_{\mathrm{i-1}}^{3}\ p_A^4(1-p_A)^{i-4}$$

$$\therefore P(i=4) = p_A^4 = \frac{81}{625} \approx 0.130\ ;$$

$$P(i=5) = \mathrm{C}_4^3\ p_A^4(1-p_A) = \frac{648}{3125} \approx 0.207\ ;$$

$$P(i=6) = \mathrm{C}_5^3\ p_A^4(1-p_A)^2 = \frac{648}{3125} \approx 0.207\ ;$$

$$P(i=7) = \mathrm{C}_6^3\ p_A^4(1-p_A)^3 = \frac{2592}{15625} \approx 0.166$$

若采用三局两胜制，若甲获得胜利，则甲胜 2 局，可记为 甲 甲，且最后一局必定是甲获胜。仍用插空法，向其中插入至多个乙。故按照乙的个数，分为 2 种情况。

·乙胜 0 局，共进行 2 局，这种情况概率为：$P(W_1') = p_A * p_A = {p_A}^2 = 0.36$

·乙胜 1 局，共 4 局，这种情况概率为：

$$P(W_2') = p_A * p_A * (1-p_A) * \mathrm{C}_2^1 = 2{p_A}^2(1-p_A) = 0.288$$

故采用三局两胜，甲获胜的概率为：

$$P(W') = P(W_1') + P(W_2') = 0.648$$

而采用题目中描述的方法，甲队获胜的概率为：

$$P(W) = \sum_{k=4}^{7} P(i=k) = 0.71 > P(W')$$

所以采用三局两胜制更有利于乙队。

概率论与数理统计 B　第三周作 4 业　3 月 6 日 周五

PB18151866 龚小航

23. 设随机变量 X 服从参数为λ的 Poisson 分布，且已知 $P(X = 1) = P(X = 2)$，试求 X 等于 3 的概率.

解：写出泊松分布的概率分布表达式：

$$P(X=i)=\frac{\lambda^i}{e^\lambda * i!}$$

由题设条件$P(X = 1) = P(X = 2)$，列出以下等式：

$$\frac{\lambda^1}{e^\lambda * 1!}=\frac{\lambda^2}{e^\lambda * 2!} \quad (e^\lambda \neq 0 \ ,\lambda>0)$$

易知 $\lambda=2$,因此该分布的概率分布表达式为

$$P(X=i)=\frac{2^i}{e^2 * i!}$$

将 $i=3$ 带入，知

$$P(X=3)=\frac{2^3}{e^2 * 3!}=\frac{4}{3e^2}$$

26. 一个系统包含了 1000 个零件，各个零件出故障是相互独立的并且在一个月内出故障的概率为 0.001. 试利 Poisson 分布求系统在一个月内正常运转(即没有零件出故障)的概率.

解：每个零件出故障是独立事件，故事件X_i（共有i个零件出现故障）服从二项分布。

本例中，$n=1000 \gg 20$, $p=0.001 \ll 0.05$,所以本例条件是泊松分布的一个很好的近似，可以用泊松分布直接近似求解。该系统的泊松分布为：

$$P(X=i)=\frac{\lambda^i}{e^\lambda * i!}$$

将 $i=0$ 带入，其中λ是 X 的期望，$\lambda=1000*0.001=1$

$$P(X=0)=\frac{\lambda^0}{e^\lambda * 0!}=\frac{1}{e}$$

33. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0\ , & x<0\\ a\sin x\ , & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 1\ , & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

试求常数 a 的值及概率 $P(X>\frac{\pi}{6})$.

解：由于分布函数具有右连续性，故$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=F\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=1$，将 $x=\frac{\pi}{2}$ 带入，有：

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\sin(\frac{\pi}{2})=a=1$$

同时，有下式成立：

$$P\left(X>\frac{\pi}{6}\right)=1-P\left(X\le\frac{\pi}{6}\right)=1-F\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=0.5$$

39. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2}\ ,\quad -\infty<x<\infty$$

试求： (1)常数 a; (2)分布函数 $F(x)$; (3) 概率 $P(\,|X|<\ 1\,)$.

解：(1) 连续型随机变量的密度函数必须符合下式:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1$$

将本例中的密度函数带入计算，可得：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{1+x^2}\ dx=a\int_{-\infty}^{\infty}d\tan^{-1}x=\pi a=1$$

$$\Rightarrow\quad a=\frac{1}{\pi}$$

(2) $F(x)=P(X\le x)$; 因此：

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}d\tan^{-1}x=\frac{1}{2}+\frac{\arctan x}{\pi}$$

(3) $P(\,|X|<\ 1\,)=P(\,-1<X<\ 1\,)=P(\,-1<X\le\ 1\,)$,由此，

$$P(\,|X|<\ 1\,)=F(1)-F(-1)=\frac{\arctan 1-\arctan -1}{\pi}=\frac{2\arctan 1}{\pi}=\frac{2}{\pi}*\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

44. (2011 年全国考研试题) 设 $F1(x), F2(x)$为两个分布函数，其相应密度 $f1(x), f2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是(D).

$(A)\ f1(x)f2(x)$ $(B)\ 2\,f2(x)F1(x)$

$(C)\ f1(x)F2(x)$ $(D)\ f1(x)F2(x)+f2(x)F1(x)$

解：$f=F'$，显然 D 选项的原函数$F_D(x)=F1(x)*F2(x)\le 1$且$F_D(x)$递增（$F1, F2$递增），又 $f1(x), f2(x)$为连续函数，则可知$F_D(x)$连续。故$F_D(x)$满足分布函数的特性，D 项必满足概率密度函数的性质

46. 某城际列车从早上六点整开始每 15 分钟发出一趟列车，假设某乘客达到车站的时间服从七点到七点半的均匀分布，若忽略买票等其它时间，试求该乘客等车少于 5 分钟的概率.

解：如下图，黑色部分为乘客到达车站的可能时间，上方橙色时间点为列车发车时间。若乘客希望等待时间少于 5 分钟，则到达时间中黄色的两段符合题意

记题目中定义的事件为 A

$$P(A)=\frac{5+5}{30}=\frac{1}{3}=0.33$$