数学物理方程 B　第九周作业　4 月 14 日 周二

PB18151866 龚小航

2.10 解下列非齐次定解问题：

(2) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(t,0)=0,\ u_x(t,l)=-\dfrac{q}{k} \\ u(0,x)=u_0 \end{cases}$ ，并求 $\lim\limits_{t\to\infty} u(t,x)$；

(5) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}+g\ (\text{常数}) \\ u(t,0)=0,\ u_x(t,l)=E\ (\text{常数}) \\ u(0,x)=Ex,\ u_t(0,x)=0; \end{cases}$

解：(2) 观察方程，其泛定方程为齐次的，边界条件非齐次，故应先将边界条件齐次化：

令$v(x)=Ax+B$，并将其带入边界条件：

$$\begin{cases} v(0)=B\equiv 0 \\ v'(l)=A\equiv -\dfrac{q}{k} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=-\dfrac{q}{k} \\ B=0 \end{cases}$$

因此可令 $u(t,x)=\omega(t,x)-\dfrac{q}{k}x$，即有 $\begin{cases} \omega_t=a^2\omega_{xx} \\ \omega(t,0)=0,\ \omega_x(t,l)=0 \\ \omega(0,x)=u_0+\dfrac{q}{k}x \end{cases}$

再利用分离变量法求解关于ω的定解问题：　令$\omega(t,x)=T(t)X(x)$，带入泛定方程，可得：

$$T'(t)X(x)=a^2T(t)X''(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

先求解关于$X(x)$的固有值问题：

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0,\ X'(l)=0 \end{cases}$$

显然这个固有值问题是施图姆-刘维尔型问题，具有第一类和第二类边界条件。其固有值λ具有非负性，且不满足$\lambda=0$的条件。因此可知其固有值$\lambda>0$.可令$\lambda=k^2\ (k>0)$

此时这类常微分方程解的形式为：$X(x)=A\cos kx+B\sin kx$，带入边界条件$X(0)=X'(l)=0$：

$$\begin{cases} A=0 \\ -kA\sin kl+kB\cos kl=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=0 \\ \cos kl=0 \end{cases} \ (B\text{不可以再为 }0) \quad \Rightarrow \quad k_n=\frac{(n+1/2)\pi}{l}\ \ (n\in\mathbb{N}^+)$$

因此固有值 $\lambda_n=k_n^2=\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2 (n\in\mathbb{N})$，对应的固有函数 $X_n=B_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\ (B_n\in\mathbb{R})$

再将固有值λ带入确定$T(t)$的常微分方程：

$$T'(t)+\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2 a^2T(t)=0$$

这是一阶常系数线性齐次微分方程，直接利用通解公式，可得：

$$T_n(t)=C_n e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right)^2 t}$$

将$X(x)$与$T(t)$相乘，得到$\omega(t,x)$。并利用叠加原理，可以得到解为：

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right)^2 t}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

最后根据初始条件确定系数C_n：

$$\omega(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x=u_0+\frac{q}{k}x$$

根据傅里叶展开的系数，可知：

$$C_n=\frac{\int_0^l\left(u_0+\frac{q}{k}x\right)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\ dx}{\int_0^l\sin^2\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\ dx}=\frac{2}{l}\int_0^l\left(u_0+\frac{q}{k}x\right)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\ dx=\frac{4(2n+1)k\pi u_0+8ql\cos n\pi}{(2n+1)^2\pi^2k}$$

将所有已知系数带入，可得：

$$u(t,x)=\omega(t,x)-\frac{q}{k}x=-\frac{q}{k}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4k\pi u_0(2n+1)+8ql(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2\pi^2k}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right)^2 t}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

特别的，$\lim\limits_{t\to\infty}u(t,x)=-\frac{q}{k}x$

(5) 先求一个满足泛定方程和边界条件的$v(x)$，再令$u(t,x)=\omega(t,x)+v(x)$

将$v(x)$直接带入泛定方程，可得： $0=v''(x)+g$

这时二阶常系数齐次线性微分方程，这种形式的方程具有解的形式：$v(x)=Ax^2+Bx+C$

带入泛定方程，并同时有： $X(0)=0,\ X'(l)=E$

可得 $A=-g/2,\ \ B=E+gl$，$C=0$

因此$v(x)=-\dfrac{g}{2}x^2+(E+gl)x$

再令$u(t,x)=\omega(t,x)+v(x)$，重新列出$\omega(t,x)$满足的方程：

$$\begin{cases}\omega_{tt}=\omega_{xx}\\ \omega(t,0)=0,\quad \omega_x(t,l)=0\\ \omega(0,x)=Ex-v(x),\quad \omega_t(0,x)=0\end{cases}$$

尝试使用分离变量法求解。令$\omega(t,x)=T(t)X(x)$，并将其带入泛定方程：

$$T''(t)X(x)=T(t)X''(x)\quad\Rightarrow\quad\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

先求解关于$X(x)$的固有值问题：

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ X(0)=0,\quad X'(l)=0\end{cases}$$

这与上一问的固有值问题完全相同，直接写出固有值和固有函数：

固有值 $\lambda_n=\left(\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2\ (n\in\mathbb{N})$，对应的固有函数 $X_n=B_n\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x\ \ (B_n\in\mathbb{R})$

再将固有值λ带入确定$T(t)$的常微分方程：

$$T''(t)+\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2T(t)=0$$

这是二阶常系数线性齐次微分方程，先写出其特征方程：

$$r^2+\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2=0$$

特征方程有一对共轭复根：

$$r_1=\frac{(2n+1)\pi}{2l}i\,,\ r_2=-\frac{(2n+1)\pi}{2l}i\ \ ;\quad r=\alpha+i\beta$$

这种情况下方程有通解形式：

$$T_n(t)=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)=C_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}t+D_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}t$$

将$X(x)$与$T(t)$相乘，得到$\omega(t,x)$。并利用叠加原理，可以得到解为：

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}t+D_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}t\right)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

最后根据初始条件确定系数C_n，D_n：

$$\omega(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\equiv Ex-v(x)=\frac{g}{2}x^2-glx$$

$$\omega_t(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)\pi}{2l}D_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\equiv 0$$

由傅里叶展开的系数，可知：

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\left(\frac{g}{2}x^2-glx\right)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\ dx=-\frac{16gl^2}{(2n+1)^3\pi^3}$$

$$D_n=0$$

将已知系数全部带入，可得原问题的解为：

$$u(t,x)=\omega(t,x)+v(x)=-\frac{g}{2}x^2+(E+gl)x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16gl^2}{(2n+1)^3\pi^3}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}t\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

2.11 在下列条件下，求环域$a < r < b$内泊松方程$\Delta_2 u = A$（常数)的解：

$$u(a,\theta) = u_1,\ \frac{\partial u(b,\theta)}{\partial n} = u_2$$

解：先将题目中描述的问题写出：

$$\begin{cases} \Delta_2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = A \\ u(a,\theta) = u_1 \\ \dfrac{\partial u(b,\theta)}{\partial n} = u_2 \implies u_r(b,\theta) = u_2 \end{cases}$$

为化为齐次方程求解，先求满足原方程和边界条件的一个特解$v(r)$：

$$v'' + \frac{1}{r}v' = A\ ;\quad v(a) = u_1$$

这是二阶变系数齐次线性微分方程，试探其解，令$v(r) = Mr^2 + Nr + P$，带入其中，

可解出$v(r) = \frac{A}{4}(r^2 - a^2) + u_1$

特解已经给出，再令 $u(r,\theta) = \omega(r,\theta) + v(r)$，重新写出关于$\omega(r,\theta)$满足的方程：

$$\begin{cases} \Delta_2 \omega = \omega_{rr} + \dfrac{1}{r}\omega_r + \dfrac{1}{r^2}\omega_{\theta\theta} = 0 \\ \omega(a,\theta) = 0 \\ \omega_r(b,\theta) = u_2 - v'(b) \end{cases}$$

在极坐标形式下，拉普拉斯方程的解已经解过，用级数表示：

$$u(r,\theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k r^k + B_k r^{-k})(C_k \cos k\theta + D_k \sin k\theta)$$

再带入边界条件，确定未知系数：

$$\omega(a,\theta) = A_0 + B_0 \ln a + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k a^k + B_k a^{-k})(C_k \cos k\theta + D_k \sin k\theta) \equiv 0$$

显然要满足上式恒等于 0 当且仅当 $C_k = D_k = 0$. 且$A_0 + B_0 \ln a = 0 \implies A_0 = -B_0 \ln a$

所以解的形式简化为：

$$u(r,\theta) = -B_0 \ln a + B_0 \ln r = B_0 \ln\frac{r}{a}$$

带入另一个边界条件：

$$\omega_r(b,\theta) = u(r,\theta) = \frac{B_0}{b} \equiv u_2 - v'(b) = u_2 - \frac{A}{2}b \quad \implies B_0 = b\left(u_2 - \frac{A}{2}b\right)$$

带入所有求出的系数，可得原方程的解为：

$$u(r,\theta) = \omega(r,\theta) + v(r) = \frac{A}{4}(r^2 - a^2) + u_1 + b\left(u_2 - \frac{A}{2}b\right)\ln\frac{r}{a}$$