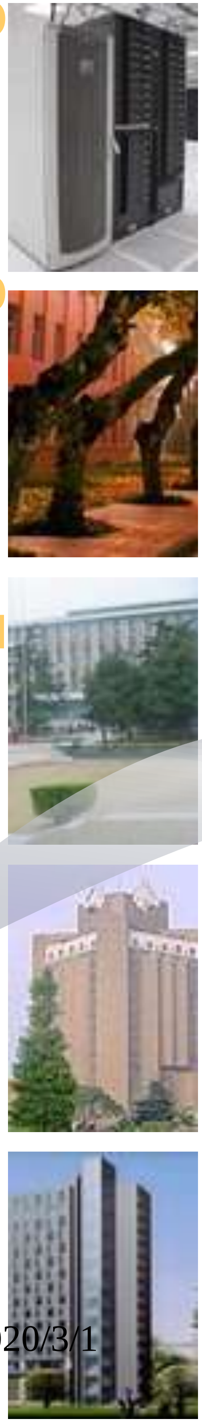
Computer Science and Technology



运筹学基础

讲者：顾乃杰 教授、黄章进 副教授

计算机科学与技术学院

2020-02-17

线性规划及单纯形法

Chap.2 Linear Programming & Classical Simplex Methods

2.3 单纯形法

- 2.3.1 举例
- 2.3.2 初始基可行解的确定
- 2.3.3 最优性检验与解的判断
- 2.3.4 基变换
- 2.3.5 迭代（旋转运算）

单纯形法

- 单纯形法求解线性规划问题:

一般线性规划问题具有线性方程组的变量数大于方程个数，这时有不定的解。（需要在众多解中找出最优解）

单纯形法是在高斯消去法的基础上，发展为求解变量数多于方程数，并且使目标函数值优化的方法。

从线性方程组中找出一个个的单纯形，每一个单纯形可以求得一组解，然后再判断该解使目标函数值是增大还是变小，决定下一步选择的单纯形，这就是迭代。直到目标函数实现最大值或最小值为止，这样问题就得到了最优解。

注意：单纯形是指0维中的点，一维中的线段，二维中的三角形，三维中的四面体，n维空间中的有n+1个顶点的多面体。例如在三维空间中的四面体，其顶点分别为(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)。

单纯形法

- 单纯形法是目前应用最广泛的求解线性规划问题的算法，是可按计算机标准程序求解线性规划模型的一般方法。
  - 代数形式的单纯形法：提供基本算法所依据的逻辑规则，适用于在电子计算机上进行求解运算；
  - 表格形式的单纯形法：将变量和数据列成表格，适用于笔算。
  - 算法形式的单纯形法：按代数形式的单纯形法，用伪代码形式表示，适合用计算机程序实现。

- 基本思路：

根据问题的标准形式，从可行域中某个基可行解（一个顶点）开始，转换到另一个基可行解（顶点），并且使目标函数达到最大时，问题就得到了最优解。

2.3.1 举例

- 例6 讨论 $\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$ 的求解。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 \geq 0 \end{cases}$$

- 解：约束方程组的系数矩阵为：

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 易看出松弛变量 x_3, x_4, x_5 的系数列向量 P_3, P_4, P_5 构成一个基

$$\mathbf{B} = (\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3.1 举例

- 对应于B的变量x_3, x_4, x_5 为基变量，把约束方程组中非基变量移到等式右侧，得到

$$x_3 = 8 - x_1 - 2x_2$$
$$x_4 = 16 - 4x_1$$
$$x_5 = 12 - 4x_2$$

- 代入目标函数， $\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$ 得到

$$z = 0 + 2x_1 + 3x_2$$

- 令非基变量 x_1=x_2=0，便得到 z=0。这时得到一个基可行解$X^{(0)}$

$$X^{(0)} = (0,\ 0,\ 8,\ 16,\ 12)^T$$

2.3.1 举例

- 目标函数 $z=0+2x_1+3x_2$ 式中的非基变量的系数都是正数，因此将非基变量变换为基变量，目标函数值就有可能增大。
- 确定换入变量
  - 一般选择正系数最大的那个非基变量x_2为换入变量，将它换到基变量中，同时还要确定基变量中哪一个换出来成为非基变量。
- 确定换出变量
  - 当将 x_2 定为换入变量后，必须从 x_3，x_4，x_5 中确定一个换出变量，并保证其余的变量仍然非负，即 $x_3, x_4, x_5 \geq 0$。
  - 当$x_1=0$时，

$$\left\{\begin{aligned} x_3 &= 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 &= 16 - 4x_1 \\ x_5 &= 12 - 4x_2 \end{aligned}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} x_3 &= 8-2x_2 \geq 0 \\ x_4 &= 16 \geq 0 \\ x_5 &= 12-4x_2 \geq 0 \end{aligned}\right.$$

  - 当x_2最大取何值时，还能满足非负要求呢？ $x_2 \leq 3$

2.3.1 举例

$$z = 0 + 2x_1 + 3x_2$$

- 最大取 $x_2=\min(8/2,-,12/4) = 3$ 时，非负条件仍能成立，此时基变量 $x_5=0$，这就决定用 x_2 去替换 x_5

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_5 = 12 \quad - 4x_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_3 + 2x_2 = 8 - x_1 & (1) \\ x_4 = 16 - 4x_1 & (2) \\ 4x_2 = 12 - x_5 & (3) \end{cases}$$

– 用高斯消元法，把 x_2 的系数列向量变换为单位列向量：

$$\begin{cases} x_3 = 2 - x_1 + \frac{1}{2}x_5 & (1)' \\ x_4 = 16 - 4x_1 & (2)' \\ x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_5 & (3)' \end{cases}$$

– 代入目标函数式，得到 $z = 9 + 2x_1 - \frac{3}{4}x_5$

– 令非基变量 $x_1=x_5=0$，得到 $z=9$，和另一个基可行解 $\mathbf{X}^{(1)} = (0,3,2,16,0)^T$

2.3.1 举例

$$z = 9 + \boxed{2}x_1 - \frac{3}{4}x_5$$

- 从目标函数的表达式可看到，非基变量x_1的系数是正的，说明目标函数值还可以增大，即$X^{(1)}$不一定是最优解。
- 确定x_1为换入变量。令 x_5=0时，则有

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 - x_1 \ge 0 \\ x_4 &= 16 - 4x_1 \ge 0 \quad \Rightarrow x_1 = \mathbf{min}\left(\frac{2}{1}, \frac{16}{4}, -\right) = 2 \\ x_2 &= 3 \ge 0 \end{aligned}$$

- 此时，x_3=0，用x_1替换x_3，得到：

$$\begin{cases} x_3 = 2 - x_1 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 2 - x_3 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_4 &= 8 + 4x_3 - 2x_5 \\ x_2 &= 3 - \frac{1}{4}x_5 \end{aligned}$$

- 将上式代入目标函数得到 $z = 13 - 2x_3 + \boxed{\frac{1}{4}}x_5$
- 令 $x_1=x_5=0$，得出另一个基可行解 $X^{(2)} = (2,3,0,8,0)^T$，此时 z=13

2.3.1 举例

$$z = 13 - 2x_3 + \boxed{\frac{1}{4}} x_5$$

- 根据目标函数表达式可以看出，非基变量x_5的系数是正的，说明目标函数值还有增大的可能，确定x_5为换入变量，设$x_3=0$，则有

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + \frac{1}{2}x_5 \ge 0 \\ x_4 &= 8 - 2x_5 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x_5 = \min\left(-, \frac{8}{2}, \frac{3}{1/4}\right) = 4 \\ x_2 &= 3 - \frac{1}{4}x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

- 此时，$x_4=0$，用x_5替换x_4，得到：

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - x_3 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_4 &= 8 + 4x_3 - 2x_5 \\ x_2 &= 3 - \frac{1}{4}x_5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 4 - \frac{1}{4}x_4 \\ x_5 &= 4 + 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 &= 2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{8}x_4 \end{aligned}$$

- 将上式代入目标函数得到 $z = 14 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{8}x_4$

- 令$x_3=x_4=0$，得出另一个基可行解 $\mathbf{X}^{(3)} = (4,2,0,0,4)^T$，此时 $z=14$

2.3.1 举例

$$z = 14 - 1.5x_3 - 0.125x_4 \le 14$$

- 此时，所有非基变量 x_3, x_4 的系数都是负数。当 $x_3=x_4=0$时，目标函数达到最大值，所以 $\mathbf{X}^{(3)} = (4,2,0,0,4)^T$ 是最优解
  - 当产品I生产4件，产品II生产2件时，工厂可以得到最大利润 z=14
- 例1中线性规划问题是二维的，即两个变量 x_1, x_2; 当加入松弛变量 x_3, x_4, x_5后，变换为高维的，这时可以想象，满足所有约束条件的可行域是高维空间的凸多面体(凸集)。这凸多面体上的顶点，就是基可行解。

2.3.1 举例

- 回到平面坐标的情况，将每步迭代得到的结果与图解法做对比：
- 初始基可行解 $X^0=(0,0,8,16,12)^T$ 就相当于图2-2中的原点 (0, 0)；

  $X^1=(0,3,2,16,0)^T$ 相当于图2-2中的Q_4点(0, 3);

  $X^2=(2,3,0,8,0)^T$ 相当于图2-2中的Q_3点(2, 3);

  最优解 $X^3=(4,2,0,0,4)^T$ 相当于图2-2中的Q_2点(4, 2);
- 从初始基可行解X^0开始迭代，依次得到X^1、X^2、X^3。这相当于图2-2中的目标函数平移时，从O点开始，首先碰到Q_4，然后碰到Q_3，最后达到Q_2。
- 单纯形法迭代过程即凸集顶点间的跳转

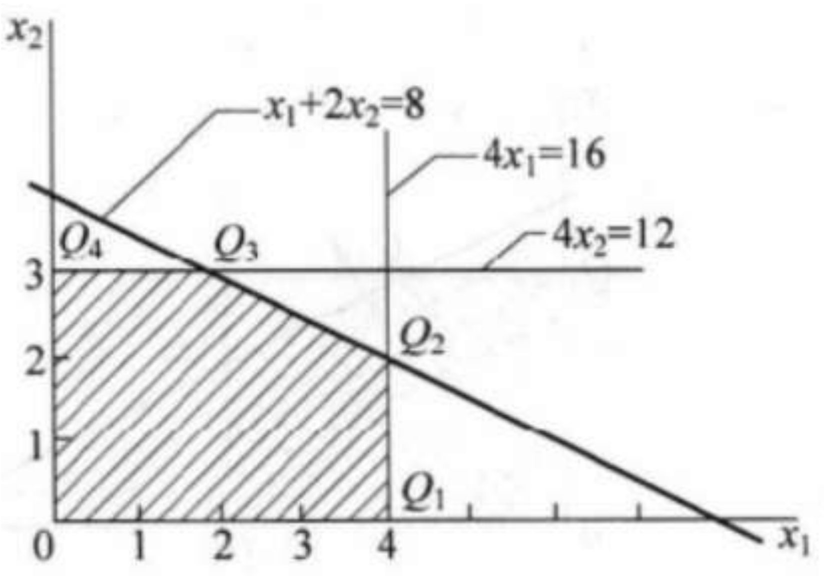


图 2-2

2.3.2 初始基可行解的确定

- 为了确定初始基可行解，要首先找出**初始可行基**，其方法如下：
  1. 直观判断
  2. 加松弛变量
  3. 加人工变量

1. 直观判断

- 从线性规划问题：

$$\max z = \sum_{j=i}^{n} c_j x_j \qquad (2-20)$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b \qquad (2-21)$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

其系数构成的列向量P_j (j=1,2,…,n)中，通过直接观察，找出一个初始可行基

$$\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots \mathbf{P}_m) = \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & \\ & 1 & \cdots & \\ & & \ddots & \\ & & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2. 加松弛变量

- 对所有约束条件为"≤"形式的不等式，利用化标准型的方法，在每个约束条件的左端加上一个松弛变量。
- 经过整理，重新对x_j及a_{ij} $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$进行编号，则可得下列方程组（$x_1,x_2,\ldots,x_m$ 为松弛变量）：

$$
\begin{cases}
x_1 \qquad\qquad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\quad x_2 \qquad\quad + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad \ddots \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\qquad\qquad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\cdots,n
\end{cases} \qquad (2-22)
$$

确定初始可行基

- (2-22)式中含有一个$m \times m$阶单位矩阵，初始可行基B即可取该单位矩阵。

$$\mathbf{B}=\left(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots\mathbf{P}_m\right)=\begin{pmatrix} 1 & & \cdots & \\ & 1 & \cdots & \\ & & \ddots & \\ & & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- 将(2-22)式每个等式中的非基变量项移到等号右侧，得

$$\begin{aligned} x_1 \quad &= b_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - \cdots\cdots - a_{1n}x_n \\ x_2 \quad &= b_2 - a_{2,m+1}x_{m+1} - \cdots\cdots - a_{2n}x_n \\ \ddots \quad & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \qquad (2-23) \\ x_m &= b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - \cdots\cdots - a_{mn}x_n \end{aligned}$$

初始基可行解

- 令非基变量$x_{m+1}=x_{m+2}=\ldots=x_n=0$，由(2-23)式可得一个基解

$$x_i=b_i \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

- 又因 $b_i \geq 0$，所以得到一个初始基可行解：

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_m,\underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{n-m\text{个}})^{\mathrm{T}}$$

$$=(b_1,b_2,\ldots,b_m,\underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{n-m\text{个}})^{\mathrm{T}}$$

3. 加人工变量

- 对所有约束条件为“≥”形式的不等式及等式约束情况，若不存在单位矩阵时，可采用人造基方法。
  - 对不等式约束，减去一个非负的剩余变量，再加上一个非负的人工变量；
  - 对于等式约束，加上一个非负的人工变量
- 这样，总能在新的约束条件系数构成的矩阵中得到一个单位矩阵。

2.3.3 最优性检验与解的判别

- 对线性规划问题的求解结果可能出现唯一最优解、无穷多最优解、无界解和无可行解，四种情况，需要建立对解的判别准则。
- 一般情况下，经过迭代后(2-23)式变成

$$x_i = b_i' - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}' x_j, \quad (i = 1,2,\cdots m) \qquad (2-24)$$

- 代入目标函数式 $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$，整理后得

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i (b_i' - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}' x_j) + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i' - \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}' x_j + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i' - \sum_{j=m+1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}' x_j + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i' + \sum_{j=m+1}^{n} \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}' \right) x_j \qquad (2-25)$$

1. 最优解的判别规则

- 令 $$z_0=\sum_{i=1}^{m}c_i b_i',\ z_j=\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij}',\ j=m+1,\cdots,n$$

于是
$$z=z_0+\sum_{j=m+1}^{n}\left(c_j-z_j\right)x_j \qquad (2-26)$$

设：

检验数 $$\sigma_j=c_j-z_j \qquad j=m+1,\cdots,n$$

则
$$z=z_0+\sum_{j=m+1}^{n}\sigma_j x_j \qquad \left(2-27\right)$$

- 最优解的判别规则
  - 若 $X^{(0)}=\left(b_1',b_2',\cdots,b_m',0,\cdots,0\right)^T$ 为对应于基 B 的一个基可行解，且对于一切 $j=m+1,\ldots,n$，有 $\sigma_j\leq 0$，则 $X^{(0)}$ 为最优解。称 σ_j 为检验数。

2.

$$X^{(0)} = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_m, 0, \ldots, 0)$$

$$\to X^{(1)} = (b''_1, \ldots, b''_{l-1}, 0, b''_{l+1}, \ldots, b''_m, 0, \ldots, b''_{m+k}, \ldots, 0)$$

$$z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j \qquad (2-27)$$

- 无穷多最优解判别准则：
  - 若 $X^{(0)} = (b_1^{'}, b_2^{'}, \cdots, b_m^{'}, 0, \cdots, 0)^T$ 为一个基可行解，对于一切 $j= m+1, \ldots, n$，有 $\sigma_j \le 0$，又存在某个非基变量的检验数 $\sigma_{m+k}=0$，则线性规划问题有无穷多最优解。
  - 证：只需将非基变量 x_{m+k} 换入基变量中，找到一个新基可行解 $X^{(1)}$。因 $\sigma_{m+k}=0$，由(2-27)知 $z=z_0$，故 $X^{(1)}$ 也是最优解。由2.2.2节的定理3可知，$X^{(0)}$ 和 $X^{(1)}$ 连线上所有点都是最优解。

$$x_i = b_i^{'} - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}^{'} x_j, \quad (i = 1,2,\cdots m) \qquad (2-24)$$

3. 无界解判别规则

$$x_i = b_i^{'} - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}^{'} x_j,\quad (i = 1,2,\cdots m) \qquad (2-24)$$

$$z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j \qquad (2-27)$$

- 无界解判别规则
  - 若 $X^{(0)} = (b_1^{'}, b_2^{'}, \cdots, b_m^{'}, 0, \cdots, 0)^T$ 为一基可行解，有一个$\sigma_{m+k}>0$，并且对$i=1,2,\ldots$，m，有$a'_{i,m+k}\le 0$，那么该线性规划问题具有无界解(或称无最优解)。
- 若选x_{m+k}为换入变量，但无换出变量：换入变量可以无限增加，而不会破坏造成当前任何一个基变量为负值，即不会破坏非负约束。
- 这种情况下，解空间（可行域）和最优目标值都是无界的。
- 可能是由于模型构造得不合理：一种可能是，一个或多个非多余约束没有考虑在内；另一种可能是，一些约束的参数（常数）没有得到正确的估计。

3. 无界解判别规则

$$z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j \qquad (2-27)$$

$$x_i = b_i' - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}' x_j, \quad (i = 1,2,\cdots m) \qquad (2-24)$$

- 证：构造一个新的解 $X^{(1)}$，它的分量为：

$$x_i^{(1)} = b_i' - \lambda a_{i,m+k}' \quad (\lambda > 0) \quad i=1,2,\ldots,\ m$$

$$x_{m+k}^{(1)} = \lambda$$

$$x_j^{(1)} = 0; \quad j = m+1,\cdots,n, \text{并且} j \neq m+k$$

因 $a_{i,m+k}' \leq 0$（$i=1,2,\ldots,\ m$），所以对任意的$\lambda>0$都是可行解，把$x^{(1)}$代入目标函数内，得到：$z = z_0 + \lambda\sigma_{m+k}$

因$\sigma_{m+k}>0$，故当$\lambda\to+\infty$，则$z\to+\infty$，故该问题目标函数无界.

其他情形

$$z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j \qquad (2-27)$$

- 当要求目标函数**极小化**时
  - 一种情况是将其化为标准型
  - 如果不化为标准型，只需在上述1，2点中把$\sigma_j \leq 0$改为$\sigma_j \geq 0$，第3点中将$\sigma_{m+k} > 0$改写为$\sigma_{m+k} < 0$即可。

- **无可行解**的判别将在2.5.2节中讨论

2.3.4 基变换

- 若初始基可行解$X^{(0)}$不是最优解及不能判别无界时，需要找一个新的基可行解。
- 具体做法
  - 从原可行解基中换一个列向量(当然要保证线性独立)，得到一个新的可行基，称为基变换。
  - 为了换基，先要确定换入变量，再确定换出变量，让它们相应的系数列向量进行对换，就得到一个新的基可行解。

1. 换入变量的确定

$$z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j \qquad (2-27)$$

- 由(2-27)式可知，当某些 $\sigma_j > 0$时，若 x_j 增大，则目标函数值还可以增大。这时需要将某个非基变量 x_j 换到基变量中去(称为换入变量)
- 若有两个以上的 $\sigma_j > 0$，那么选哪个非基变量作为换入变量呢?
  - 为了使目标函数值增加得快，从直观上看应选 $\sigma_j > 0$ 中的较大者，即由

$$\max_j (\sigma_j > 0) = \sigma_k$$

应选择 x_k 为换入变量。

2. 换出变量的确定

$$\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}_j x_j = b \qquad (2-21)$$

- 设P_1，P_2，…，P_m是一组线性独立的向量组，它们对应的基可行解是$X^{(0)}$，将它代入约束方程组(2-21)得到

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{(0)}\mathbf{P}_i = b \qquad (2-28)$$

- 其他的向量P_{m+1}, P_{m+2}, …, P_{m+t},…,P_n都可以用P_1，$\mathbf{P}_2$，…，P_m 线性表示。

- 若确定非基变量x_{m+t}为换入变量，必然可以找到一组不全为0的数 (i=1,2,…,m)使得

$$\mathbf{P}_{m+t} = \sum_{i=1}^{m}\beta_{i,m+t}\mathbf{P}_i \quad \text{或} \quad \mathbf{P}_{m+t} - \sum_{i=1}^{m}\beta_{i,m+t}\mathbf{P}_i = 0 \qquad (2-29)$$

2. 换出变量的确定

- 在(2-29)式两边同乘一个正数θ，然后将它加到(2-28)式上，得到：

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{(0)} P_i + \theta\left(P_{m+t} - \sum_{i=1}^{m} \beta_{i,m+t} P_i \right) = b \quad \text{或}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left(x_i^{(0)} - \theta\beta_{i,m+t} \right) P_i + \theta P_{m+t} = b \qquad (2-30)$$

- 于是 $\mathbf{X}^{(1)} = \left(x_1^{(0)} - \theta \cdot \beta_{1,m+t}, \cdots, x_m^{(0)} - \theta \cdot \beta_{m,m+t}, 0, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第}m+t\text{个分量}}}{\theta}, \cdots, 0 \right)$

为约束方程组的一个解。

2. 换出变量的确定

- 当 θ 取适当值时，使得$X^{(1)}$成为一个新的基可行解：
  - 使 $\left(x_i^{(0)} - \theta \cdot \beta_{i,m+t}\right)$, $i = 1, 2, \cdots, m$ 中的某一个为零
  - 同时，保证其余的分量为非负

- 最小比值规则或θ规则

$$\theta = \min_i \left(\frac{x_i^{(0)}}{\beta_{i,m+t}} \middle| \beta_{i,m+t} > 0 \right) = \frac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}}$$

选择为 x_l 为换出变量

2. 换出变量的确定

- 新的基可行解为

$$\mathbf{X}^{(1)} = \Big(x_1^{(0)} - \frac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}} \cdot \beta_{m,m+t}, \cdots, \underset{\text{第}l\text{个分量}}{\overset{\downarrow}{0}}, \cdots, x_{m1}^{(0)} - \frac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}} \cdot \beta_{m,m+t}, \cdots, 0, \underset{\text{第}m+t\text{个分量}}{\underset{\uparrow}{\frac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}}}}, \cdots, 0, \Big)$$

- 由此得到由$X^{(0)}$转换到$X^{(1)}$的各分量的转换公式：

$$x_i^{(1)} = \begin{cases} x_i^{(0)} - \dfrac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}} \cdot \beta_{i,m+t} & i \neq l \\ \dfrac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}} = \theta & i = m+t \end{cases}$$

  - 这里 $x_i^{(0)}$ 是原基可行解$\mathbf{X}^{(0)}$的分量； $x_i^{(1)}$ 是新基可行解$X^{(1)}$的各分量
  - $\beta_{i,m+t}$ 是换入向量$\mathbf{P}_{m+t}$对应原可行解的坐标。

2. $$\mathbf{P}_{m+t}=\sum_{i=1}^{m}\beta_{i,m+t}\mathbf{P}_i \quad 或 \quad \mathbf{P}_{m+t}-\sum_{i=1}^{m}\beta_{i,m+t}\mathbf{P}_i=0 \qquad (2-29)$$

- 问题：新解 $X^{(1)}$ 的m个非零分量对应的列向量是否独立?
- 证明： $\mathbf{X}^{(0)}$的第 l 个分量对应于$X^{(1)}$的相应分量是零，即

$$x_l^{(1)}=x_l^{(0)}-\theta\,\beta_{l,m+t}=0$$

其中, $x_l^{(0)}$, θ均不为零，根据θ规则(最小比值), $\beta_{l,m+t}\neq 0$

$X^{(1)}$的m个非零分量对应的列向量是$\mathbf{P}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m, j\neq l$)和$\mathbf{P}_{m+t}$。若这组向量不是线性独立，则一定可以找到不全为零的数α_j, 使得：

$$\mathbf{P}_{m+t}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{m}a_j\mathbf{P}_j, \qquad (2-31)$$

又因（2-29）式：

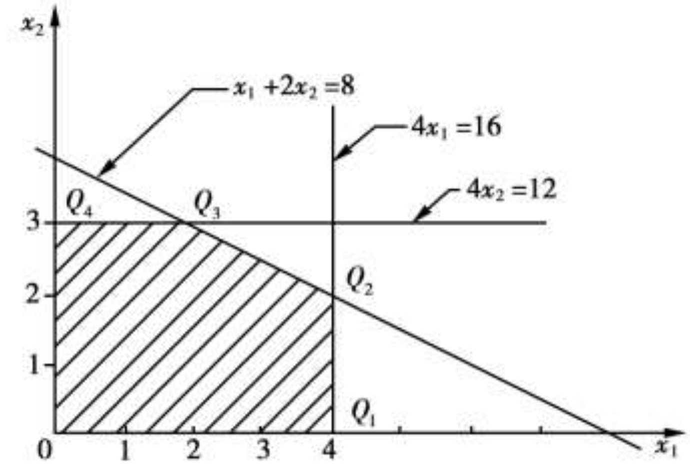
$$\mathbf{P}_{m+t}=\sum_{j=1}^{m}\beta_{j,m+t}\mathbf{P}_j, \qquad (2-32)$$

2. 换出变量的确定

将式(2-32)减去(2-31)，得到：
$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{m}(\beta_{j,m+t}-a_j)\mathbf{P}_j+\beta_{l,m+t}\mathbf{P}_l=0$$

至少有 $\beta_{l,m+t}\neq 0$，所以上式表明 $P_1, P_2, \ldots, P_m$是线性相关，这与假设相矛盾。

- $X^{(1)}$的m个非零分量对应的列向量$P_j(j=1,2,\ldots,m,j\neq l)$与$P_{m+t}$是线性独立的，即经过基变换得到的解是基可行解。
  - 从一个基可行解到另一个基可行解的变换，就是进行一次基变换。
  - 从几何意义上讲，就是从可行域的一个顶点转向另一个顶点。（见图2-2）



2.3.5 迭代（旋转运算）

2020/3/1

- 上述讨论的基可行解的转换方法是用向量方程描述的，在实际计算时不太方便，因此下面介绍系数矩阵法
- 考虑以下形式的约束方程组：

$$
\begin{array}{llllll}
x_1 & & + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & \\
\quad x_2 & & + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & \\
\quad\quad \ddots & & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\
\quad\quad\quad x_l & & + a_{l,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{lk}x_k + \cdots + a_{ln}x_n = b_l & (2-33) \\
\quad\quad\quad\quad \ddots & & & \\
& x_m & + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mk}x_k + \cdots + a_{m}x_n = b_m &
\end{array}
$$

  - 设$x_1,x_2,\ldots,x_m$为基变量，对应的系数矩阵是$m\times m$单位阵I，它是可行基。
  - 令非基变量$x_{m+1},x_{m+2},\ldots,x_n$为零，即可得到一个基可行解。

2.3.5 迭代（旋转运算）

2020/3/1

- 若它不是最优解，则要另找一个使目标函数值增大的基可行解（基变换）。
  - 从非基变量中确定x_k为换入变量。这时θ为

$$\theta = \min_i \left(\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0 \right) = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

  - 按θ规则确定x_l为换出变量，x_k, x_l的系数列向量分别为

$$P_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{lk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}; \quad P_l = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第}l\text{个分量}$$

2.3.5 迭代（旋转运算）

2020/3/1

- 为了使 x_k 与 x_l 进行对换，须把 P_k 变为单位向量 P_l，这可以通过(2-33)式系数矩阵的增广矩阵进行初等变换来实现

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} x_1 & \cdots & x_l & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n & & b \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
1 & & & & & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} & & b_1 \\
 & \ddots & & & & \vdots & & & & & & \\
 & & 1 & & & a_{l,m+1} & \cdots & a_{lk} & \cdots & a_{ln} & & b_l \\
 & & & \ddots & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} & & b_m
\end{array}\right)
\end{array} \qquad (2-34)$$

$$\left(0,\cdots,\frac{1}{a_{lk}},0,\cdots,0,\frac{a_{l,m+1}}{a_{lk}},\cdots,1,\cdots,\frac{a_{ln}}{a_{lk}}\;\middle|\;\frac{b_l}{a_{lk}}\right) \qquad (2-35)$$

2.3.5 迭代（旋转运算）

- 变换的步骤：（高斯消元法）

1. 将增广矩阵(2-34)式中的第 l 行除以a_{lk}，得到

$$\left(0,\cdots,\frac{1}{a_{lk}},0,\cdots,0,\frac{a_{l,m+1}}{a_{lk}},\cdots,1,\cdots,\frac{a_{ln}}{a_{lk}}\,\middle|\,\frac{b_l}{a_{lk}}\right) \quad (2-35)$$

2. 将(2-34)式中x_k列的各元素，除a_{lk}变换为1以外，其他都应变换为零。其他行的变换是将(2-35)式乘以a_{ik} $(i\neq l)$后，从(2-34)式的第i行减去，得到新的第i行。

$$\left(0,\cdots\underset{\substack{\uparrow\\ 第i个}}{1},\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ 第l个}}{-\frac{a_{ik}}{a_{lk}}},0,\cdots,0,a_{i,m+1}-\frac{a_{l,m+1}}{a_{lk}}a_{ik},\cdots,0,\cdots,a_{in}-\frac{a_{ln}}{a_{lk}}a_{ik}\,\middle|\,b_i-\frac{b_l}{a_{lk}}a_{ik}\right)$$

2.3.5 迭代（旋转运算）

3. 经过初等变换后的新增广矩阵是

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
x_1 & \cdots & x_l & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n & b
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & -\dfrac{a_{1k}}{a_{lk}} & \cdots & 0 & a'_{1,m+1} & \cdots & 0 & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & +\dfrac{1}{a_{lk}} & \cdots & 0 & a'_{l,m+1} & \cdots & 1 & \cdots & a'_{ln} & b'_l \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & -\dfrac{a_{mk}}{a_{lk}} & \cdots & 1 & a'_{m,m+1} & \cdots & 0 & \cdots & a'_{mn} & b'_m
\end{pmatrix}
\quad (2-36)
$$

这里，a'_{ij}, b'_i 是变换后的新元素：

$$
a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik} & i \neq l \\ \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} & i = l \end{cases} ; \quad b'_i = \begin{cases} b_i - \dfrac{a_{ik}}{a_{lk}} b_i & i \neq l \\ \dfrac{b_l}{a_{lk}} & i = l \end{cases}
$$

2.3.5 迭代（旋转运算）

4. 由(2-36)式中可以看到$x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots$，$x_m$的系数列向量构成$m\times m$单位矩阵;它是可行基。当非基变量$x_{m+1},\ldots$，$x_l,\ldots,x_n$为零时，就得到一个基可行解$X^{(1)}$

$$X^{(1)}=\left(b_1',\cdots,b_{l-1}',0,b_{l+1}',\cdots,b_m',0,\cdots,b_l',0,\cdots0\right)^T$$

- 在上述系数矩阵的变换中，元素 a_{lk} 称为主元素（也称为枢元素或旋转元），它所在列称为主元列，它所在行称为主元行。
- 元素 a_{lk} 位置变换后为 1。

2.3.5 迭代（旋转运算）

- 例7. 试用上述方法计算例6的一次基变换
- 解：将例6的约束方程组的系数矩阵写成增广矩阵

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

  - 以 x_3,x_4,x_5 为基变量，x_1, x_2 为非基变量，令 $x_1,x_2=0$，可得到一个基可行解 $X^{(0)}=(0, 0, 8, 16, 12)^T$
  - 用 x_2 去替换 x_5，于是将 x_3,x_4,x_2 的系数矩阵变换为单位矩阵，经变换后为：

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 3 \end{array}\right)$$

  - 令非基变量 $x_1,x_5=0$，得到新的基可行解 $X^{(1)}=(0,3,2,16,0)^T$