

运筹学基础

讲者：顾乃杰 教授、黄章进 副教授



计算机科学与技术学院





存储论

Chap.14 Inventory



主要内容

- **14.1** 存储论的基本概念
- **14.2** 确定性存储模型
- **14.3** 随机性存储模型



14.1 存储论的基本概念

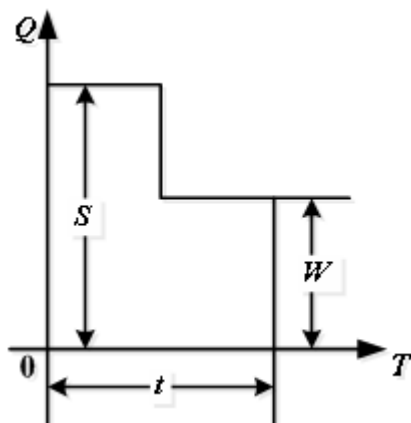
- 存储问题的提出
 - 人们在生产和日常生活活动中往往将所需的物资、用品和食物暂时的贮存起来，以备将来使用或消费。这种现象是为了解决供应（生产）与需求（消费）之间的不协调的一种措施，这种不协调性一般表现为供应量与需求量和供应时期与需求时期的不一致上，出现供不应求或供过于求。在供应与需求这两个环节之间加入贮存这个环节，可以缓解供应与需求之间的不协调。
 - 对这类有关存储问题进行研究的科学构成运筹学的一个分支，称为存储论。
- 存储论的基本概念
 - 工厂为了生产，必须贮存一些原料；商店必须贮存一些货物，把这些贮存物简称为存储。一般的说，存储量因需求而减少，因补充而增加。

14.1 存储论的基本概念

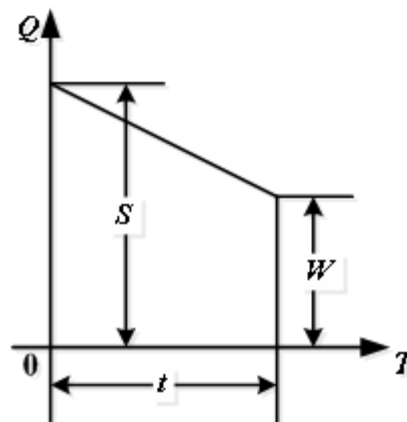
- 需求

- 对存储来说，由于需求，从存储中取出一定的数量，使存储量减少，这就是存储的输出。有的需求是间断式的，有的需求是连续均匀的。

间断式



连续式



- 有的需求是确定性的，有的需求是随机性的。对于随机性的需求，经过大量的统计之后，可能会发现统计规律，称之为有一定的随机分布的需求。

14.1 存储论的基本概念

- 补充（订货或生产）

- 存储由于需求而不断减少，必须加以补充，否则最终将无法需求。补充就是存储的输入。
- 补充的方法可能是向其他工厂购买，从订货到货物进入“存储”往往需要一段时间，称为**拖后时间**；从另一个角度看，为了在某一时刻能补充存储，必须提前订货，那么这段时间也可称之为**提前时间**（或称**备货时间**）。拖后时间可能很长，也可能很短；可能是随机性的，也可以是确定性的。
- 决定多少时间补充一次以及每次补充数量的策略称为**存储策略**。

- 费用

- 存储费：包括货物占用资金应付的利息以及使用仓库、保管货物、货物损坏变质等支出的费用；
- 订货费： $C_3 + KQ$
 - 订购费用 C_3 ：固定费用，与订货次数有关而与订货数量无关；
 - 成本费用：可变费用，与订货数量 K 以及货物本身的单位价格和运费 Q 有关。

一个好的存储策略，既可以使总费用最小，又可避免因缺货而影响生产（或对顾客失去信用）。

- 生产费：补充存储时，若不需向外厂订购而由本厂自行生产，则包括——
 - 装配费用（或称准备、结束费用）：固定费用
 - 与生产产品的数量有关的费用：可变费用，与生产产品的数量和每件产品的单价有关，如生产材料、加工费用等。
- 缺货费：当存储供不应求时所引起的损失。在不允许缺货的情况下，在费用上处理的方式是缺货费为无穷大。

— 存储策略

- t_0 -循环策略：每隔 t_0 时间补充存储量 Q ；
- (s, S) 策略：每当存储量 $x > s$ 时不补充，当 $x \leq s$ 时补充存储，补充量 $Q = S - x$ ；
- (t, s, S) 混合策略：每经过 t 时间检查存储量 x ，当 $x > s$ 时不补充，当 $x \leq s$ 时补充存储，补充量 $Q = S - x$ 。

— 存储模型

- 确定性模型：模型中的数据皆为确定的数值；
- 随机性模型：模型中含有随机变量，而不是确定的数值。

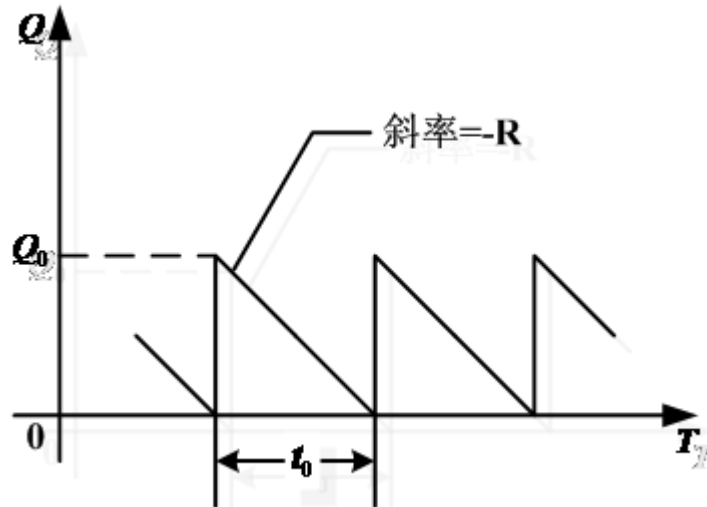
14.2 确定性存储模型

- 模型一：不允许缺货，生产时间很短

- 做如下假设：

- 缺货费用无穷大；
- 当存储降至零时，可以立即得到补充（即生产时间或拖后时间很短，可以近似看作为零）；
- 需求是连续的、均匀的，设需求速度 R （单位时间的需求量）为常数，则 t 时间的需求量为 Rt ；
- 每次订货量不变，订购费不变（每次生产量不变，装配费不变）；
- 单位存储费不变。

存储量变化情况





14.2 确定性存储模型

— 费用函数

假设每隔 t 时间补充一次存么订货量必须满足 t 时间的需求 $R \cdot t$,
记订货量为 Q , $Q = R \cdot t$, 订购费为 C_3 , 货物单价为 K , 则订货费为 $C_3 + K \cdot R \cdot t$.
 t 时间的平均订货费为 $C_3 / t + KR$, t 时间内的平均存贮量为:

$$\frac{1}{t} \int_0^t RTdT = \frac{1}{2} R \cdot t$$

单位存贮费用为 C_1 , t 时间内所需平均存贮费用为 $\frac{1}{2} R \cdot t \cdot C_1$.

t 时间内总的平均费用:

$$C(t) = C_3 / t + KR + \frac{1}{2} C_1 R t \quad (14.1)$$

为使费用最小, 令 $\frac{dC(t)}{dt} = -\frac{C_3}{t^2} + \frac{1}{2} C_1 R = 0$, 得

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} \quad (14.2)$$

即每隔 t_0 时间订货一次可使 $C(t)$ 最小。

14.2 确定性存储模型

$$\text{订货批量 } Q_0 = Rt_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} \quad (14.3)$$

- 公式 (14.3) 即为存储论中著名的经济订购批量(Economic ordering quantity)公式, 简称E.O.Q公式, 也称平方根公式, 或经济批量(Economic lot size)公式。
- 因 Q_0 、 t_0 皆与 K 无关, 所以在费用函数中略去 KR 这笔费用, 如无特殊需要不再考虑。公式(14.1)改为:

$$C(t) = \frac{C_3}{t} + \frac{1}{2}C_1R \cdot t \quad (14.4)$$

- 将 t_0 代入公式 (14.4) 得出最佳费用:

$$C_0 = C(t_0) = C_3 \sqrt{\frac{C_1R}{2C_3}} + \frac{1}{2}C_1R \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}} = \sqrt{2C_1C_3R}$$

$$C_0 = \min C(t) \quad (14.5)$$

14.2 确定性存储模型

- 从费用曲线也可以求出 Q_0 、 t_0 、 C_0

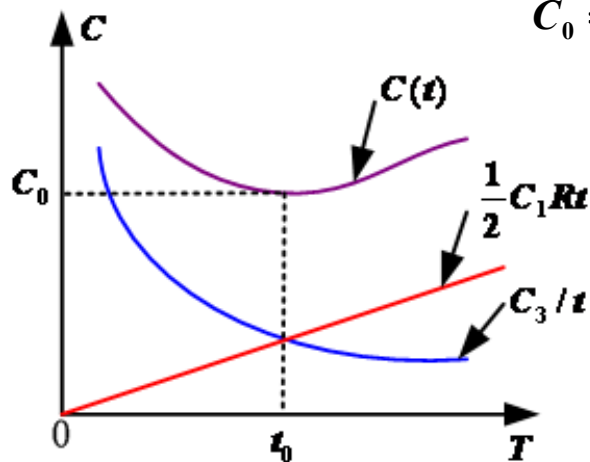
存贮费用曲线 $\frac{1}{2}C_1Rt$ ， 订购费用曲线 $\frac{C_3}{t}$ ， 总费用曲线 $C(t) = \frac{C_3}{t} + \frac{1}{2}C_1Rt$ (14.1')

- $C(t)$ 曲线的最低点 $\min C(t)$ 的横坐标 t_0 与存储费用曲线、订购费用曲线交点横坐标相同，即：

$$\frac{C_3}{t_0} = \frac{1}{2}C_1Rt_0$$

• 解得：
$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}} \quad (14.2') \quad Q_0 = Rt_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} \quad (14.3')$$

$$C_0 = \frac{C_3}{t_0} + \frac{1}{2}C_1Rt_0 = \sqrt{2C_1C_3R} \quad (14.4')$$



从图中可以看出 $C(t)$ 在 t_0 附近变化平稳， t 有变化时 $C(t)$ 变化不大。利用数学分析方法可以证明当 t 在 t_0 点有增量 Δt 时，总费用的增量 $C(t_0) \approx \frac{C_3}{t_0^3} (\Delta t)^2$ ，
 即当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时， ΔC 是 Δt 的高阶无穷小量。

14.2 确定性存储模型

- 应用举例

- **例：**某厂按合同每年需提供 D 个产品，不许缺货。假设每一周期工厂需装配费 C_3 元，存储费每年每单位产品为 C_1 元，问全年应分几批供货才能使装配费、存储费两者之和最少。
- **分析：**设全年分 n 批供货，每批生产量 $Q = D/n$ ，周期为 $1/n$ 年。

每个周期内平均存贮量为 $\frac{1}{2}Q$ ；每个周期内的平均存贮费用为 $C_1 \cdot \frac{1}{2}Q \cdot \frac{1}{n} = \frac{C_1 Q}{2n}$ ；

全年所需存贮费用 $\frac{C_1 Q}{2n} \cdot n = \frac{C_1 Q}{2}$ ；全年所需装配费用 $C_3 n = C_3 \cdot \frac{D}{Q}$ ；

全年总费用（以年为单位的平均费用）： $C(Q) = \frac{C_1 Q}{2} + \frac{C_3 D}{Q}$ ；

求最小费用，使 $\frac{dC(Q)}{dQ} = \frac{C_1}{2} - \frac{C_3 D}{Q^2} = 0 \Rightarrow Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3 D}{C_1}}$ 即： $\min C(Q) = C(Q_0)$

最佳批次 $n_0 = \frac{D}{Q_0} = \sqrt{\frac{C_1 D}{2C_3}}$ （取近似整数），全年分 n_0 次供货可使费用最小。

14.2 确定性存储模型

- 例：某轧钢厂每月按计划需产角钢 30 000吨，每吨每月需存储费 53 元，每次生产需调整机器设备等，共需装配费 250 000元。
- 分析：

每月需总费用： $53 \times \frac{1}{2} \times 30\,000 + 250\,000 = 1045\,000$ (元/月)

全年需费用： $1045\,000 \times 12 = 12\,540\,000$ (元/年)

按 E.O.Q. 公式计算每次生产批量：

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2 \times C_3(\text{装配费}) \times D(\text{需求速度})}{C_1(\text{存贮费})}} = \sqrt{\frac{2 \times 250\,000 \times 30\,000}{53}} = 16\,823 \text{ (吨)}$$

全年生产批次 $n_0 = \frac{D}{Q_0} = \frac{30\,000 \times 12}{Q_0} \approx 21.4$ (次)，两次生产相隔时间 $t_0 = \frac{365}{21.4} \approx 17$ (天)

17天单位存贮费 $\frac{53}{30} \times 17 \approx 30.00$ (元/吨)，共需费用 $\frac{1}{2} \times \frac{53}{30} \times 17 \times 16823 + 250000 \approx 502\,562$ (元)

按全年生产21.5次(两年共43次)计算，全年共需费用 $502562 \times 21.5 = 10\,806\,438$ (元/年)

两者相比，该厂在利用 E.O.Q. 公式求出的经济批量进行生产后可节省资金：

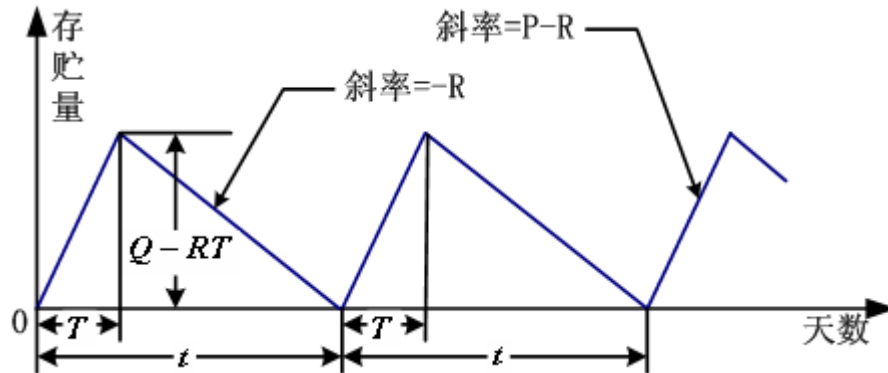
$$12\,540\,000 - 10\,806\,438 = 1\,733\,562 \text{ (元)}$$

14.2 确定性存储模型

- 模型二：不允许缺货，生产需一定时间

- 做如下假设：

- 除生产需要一定时间条件外，其余皆与模型一相同；
- 设生产批量为 Q ，所需生产时间为 T ，则生产速度为 $P=Q/T$ ；
- 已知需求速度 R ($R<P$)，生产的产品一部分满足需求，剩余部分才作为存储，存储变化如图所示。



- 在 $[0, T]$ 区间内，存储以 $(P-R)$ 速度增加，在 $[T, t]$ 区间内以速度 R 减少。 T 与 t 皆为待定数。从上图可知 $(P-R)T=R(t-T)$ ，即 $PT=Rt$ ，表示以速度 P 生产 T 时间的产品等于 t 时间内的需求。 $T=Rt/P$ 。

14.2 确定性存储模型

- t 时间内的平均存贮量为： $\frac{1}{2}(P-R)T$
- t 时间内所需存贮费为： $\frac{1}{2}C_1(P-R)Tt$
- t 时间内所需装配费为： C_3
- 单位时间总费用 (平均费用):

$$C(t) = \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2} C_1 (P-R) T t + C_3 \right] = \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2} C_1 (P-R) \frac{Rt^2}{P} + C_3 \right]$$

设 $\min C(t) = C(t_0)$, 令 $\frac{dC(t)}{dt} = 0$ 可得最佳周期: $t_0 = \sqrt{\frac{2C_3P}{C_1R(P-R)}}$ (14.6)

相应的生产批量: $Q_0 = E.O.Q. = \sqrt{\frac{2C_3RP}{C_1(P-R)}}$ (14.7)

$$\min C(t) = C(t_0) = \sqrt{2C_1C_3R \frac{(P-R)}{P}} \quad (14.8)$$

最佳生产时间: $T_0 = \frac{Rt_0}{P} = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1P(P-R)}}$

14.2 确定性存储模型

— 两种模型的对比

• 模型一

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}}$$

$$Q_0 = R t_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}}$$

模型二

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3 P}{C_1 R(P-R)}}$$

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R P}{C_1(P-R)}}$$

- 可见它们之间只差一个因子 $\sqrt{\frac{P}{P-R}}$ 。当 P 相当大时 $\frac{P}{P-R}$ 趋近于 1，则两组公式就相同了。

- 进入存贮的最高数量

$$S_0 = Q_0 - R T_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R P}{C_1(P-R)}} - R \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1 P(P-R)}} = \sqrt{\frac{2C_3 R(P-R)}{C_1 P}} \quad (14.9)$$

14.2 确定性存储模型

— 应用举例

- 例：某厂每月需甲产品1000件，每月生产率为5000件，每批装配费为500元，每月每件产品存储费为20元，求E.O.Q.及最低费用。
- 分析：

可知 $C_3 = 500$, $C_1 = 20$, $P = 5000$, $R = 1000$, 代入公式(14.7)、(14.8)得：

$$E.O.Q. = \sqrt{\frac{2C_3RP}{C_1(P-R)}} = 250 \text{ 件}$$

$$C_0 = \sqrt{2C_1C_3R \frac{(P-R)}{P}} = 4000 \text{ 元}$$

即每次生产批量为 250 件，每次生产所需装配费及存贮费最低为 4000 元。

14.2 确定性存储模型

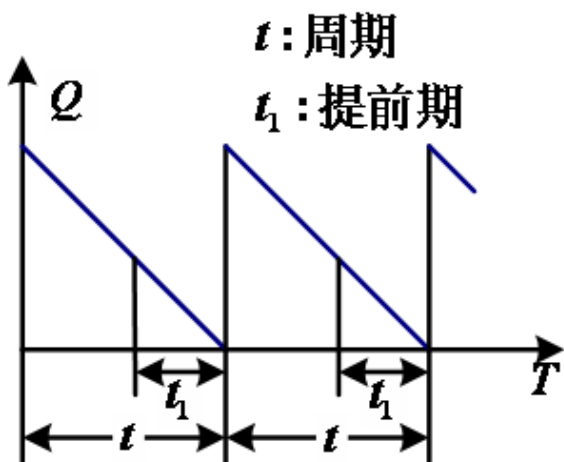
- 例：某商店经售甲商品成本单价500元，年存储费用为成本的20%，年需求量365件，需求速度为常数，甲商品的订购费用为20元，提前期为10天，求E.O.Q.及最低费用。
- 分析：此例题从表面分析似乎应按模型二处理，因为提前期似乎与生产时间意义类似。其实不然，将本题存贮变化情况用图像表示如图，发现与模型一完全相同。本题只需在存贮降低至 0 时提前 10 天订货即可保证需求，即存贮降低至10时就要订货。

解：

$$C_1 = 500 \times 20\% = 100, \quad C_3 = 20$$

$$E.O.Q. = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 20 \times 365}{100}} = \sqrt{146} \approx 12$$

$$\min C(Q) = C(Q_0) = \sqrt{2C_1C_3R} \approx 1208 \text{ 元}$$



- 一般设 t_1 为提前期， R 为需求速度，当存贮降至 $L=Rt_1$ 的时候即订货， L 称为“订购点”（或称“订货点”）。
- 不考虑 t_0 ，只要存贮降至 L 即订货，订货量为 Q_0 ，称这种存贮策略为“定点订货”；相对的，每隔 t_0 时间订货一次为“定时订货”，每次订货量不变则称为“定量订货”

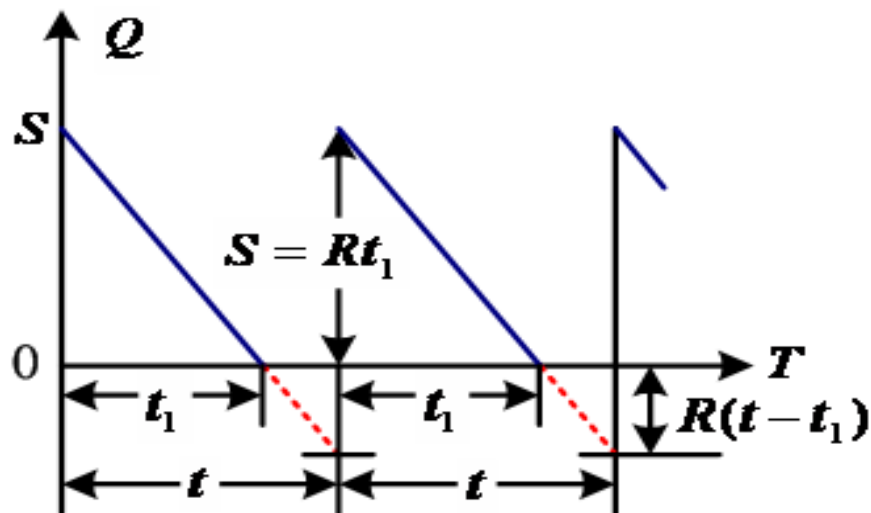
14.2 确定性存储模型

- 模型三：允许缺货（缺货需补足），生产时间很短

— 假设：

- 除允许缺货外，其余条件皆与模型一相同；
- 设单位存储费用为 C_1 ，
- 每次订购费为 C_3 ，
- 缺货费为 C_2 （单位缺货损失），
- R 为需求速度。

— 存储变化如图所示：



14.2 确定性存储模型

- 假设最初存贮量为 S ，可以满足时间 t_1 的需求，
 t_1 时间的平均存贮量为 $\frac{1}{2}S$ ，在 $(t-t_1)$ 时间的存贮为零，

平均缺货量为 $\frac{1}{2}R(t-t_1)$ 。

由于 S 仅能满足时间 t_1 的需求 $S = Rt_1$ ，有 $t_1 = S/R$

在 t 时间内所需存贮费：
$$C_1 \cdot \frac{1}{2}St_1 = \frac{C_1S^2}{2R}$$

在 t 时间内的缺货费：
$$C_2 \cdot \frac{1}{2}R(t-t_1)^2 = \frac{C_2(Rt-S)^2}{2R}$$

订购费为： C_3

平均总费用：
$$C(t, S) = \frac{1}{t} \left[\frac{C_1S^2}{2R} + \frac{C_2(Rt-S)^2}{2R} + C_3 \right]$$

利用多元函数求极值的方法求 $C(t, S)$ 的最小值：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial S} &= \frac{1}{t} \left[\frac{C_1S}{R} - \frac{C_2(Rt-S)}{R} \right] = 0 \\ R &\neq 0, \quad t \neq 0, \quad C_1S - C_2(Rt-S) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S = \frac{C_2Rt}{C_1 + C_2} \quad (14.10)$$

14.2 确定性存储模型

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{1}{t^2} \left[\frac{C_1 S^2}{2R} + \frac{C_2 (Rt - S)^2}{2R} + C_3 \right] + \frac{1}{t} [C_2 (Rt - S)] = 0 \\ R \neq 0, \quad t \neq 0 \\ S = \frac{C_2 Rt}{C_1 + C_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2C_3(C_1 + C_2)}{C_1 R C_2}} \quad (14.11)$$

将(14.11)代入(14.10)得:

$$S_0 = \sqrt{\frac{2C_2 C_3 R}{C_1 (C_1 + C_2)}} \quad (14.12)$$

$$\min C(t, S) = \sqrt{\frac{2C_1 C_2 C_3 R}{C_1 + C_2}} \quad (14.13)$$

当 C_2 很大时意味着不许缺货:

$$C_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{C_2}{C_1 + C_2} \rightarrow 1 \Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}}, \quad S_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}}, \quad C_0 = \sqrt{2C_1 C_3 R}$$

与前面模型一求得的相同。

- 模型三中由于允许缺货周期 t_0 为不允许缺货周期 t 的 $\sqrt{\frac{C_2 + C_1}{C_2}}$ 倍,

又由于 $\frac{C_2 + C_1}{C_2} > 1$, 所以两次订货间隔时间延长了。

14.2 确定性存储模型

- 在不允许缺货情况下, 为满足 t_0 时间内的需求, 订货量 $Q_0 = Rt_0$

即:

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2RC_3}{C_1} \cdot \frac{(C_1 + C_2)}{C_2}} \quad (14.14)$$

在允许缺货的情况下, 存贮论只需达到 S_0 即可, $S_0 = \sqrt{\frac{2RC_3C_2}{C_1(C_1 + C_2)}}$

显然 $Q_0 > S_0$, 它们的差值:

$$Q_0 - S_0 = \sqrt{\frac{2RC_3}{C_1} \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_2}} - \sqrt{\frac{2RC_3}{C_1} \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2}} = \sqrt{\frac{2RC_3C_1}{C_2(C_1 + C_2)}}$$

表示在 t_0 时间内的最大缺货量。

在允许缺货的条件下, 经过研究而得出的存贮策略是隔 t_0 时间订货一次, 订货量为 Q_0 , 用 Q_0 中的一部分补足所缺货物, 剩余部分 S_0 进入存贮。

- 显然, 在相同的时间段里, 允许缺货的订货次数比不允许缺货时订货次数减少了。



14.2 确定性存储模型

– 例：已知需求速度 $R=1000$ 件， $C_1=40$ 元， $C_2=15$ 元， $C_3=500$ 元，求 S_0 以及 C_0 。

• 分析：

利用公式 (14.12)、(14.13) 直接计算：

$$S_0 = \sqrt{\frac{2C_2C_3R}{C_1(C_1+C_2)}} = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 15 \times 500}{40 \times (40 + 15)}} \approx 83 \text{ (件)}$$

$$C_0 = \sqrt{\frac{2C_1C_2C_3R}{C_1+C_2}} = \sqrt{\frac{2 \times 40 \times 15 \times 500 \times 1000}{40 + 15}} \approx 3302.89 \text{ (元)}$$

14.2 确定性存储模型

- 模型一、二、三之间的关系

一：不允许缺货、生产时间很短

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}}$$

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}}$$

$$S_0 = Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}}$$

二：不允许缺货、生产需一定时间

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P-R}}$$

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P-R}}$$

$$S_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{P-R}{P}}$$

三：允许缺货、生产时间很短

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}}$$

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}}$$

$$S_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}}$$

- 可以看出模型二、三是以模型一的存贮策略乘以相应的因子，另：

$$\text{模型一中: } \frac{1}{2} Q_0 t_0 = \frac{1}{2} S_0 t_0 = \frac{C_3}{C_1}$$

$$\text{模型二中: } \frac{1}{2} S_0 t_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{P-R}{P}} \cdot \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P-R}} = \frac{C_3}{C_1}$$

$$\text{模型三中: } \frac{1}{2} S_0 t_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}} \cdot \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}} = \frac{C_3}{C_1}$$

- 上面三个是同一个数值，这样就得出它们的差别与内在联系。

14.2 确定性存储模型

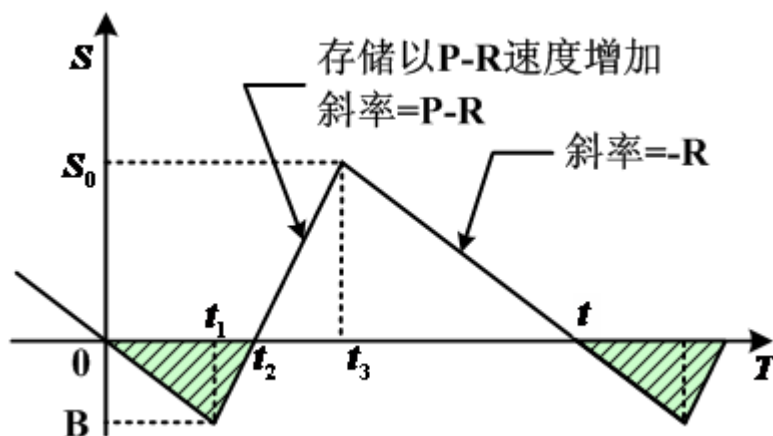
— 对于允许缺货（缺货需补足）生产需要一定时间的模型：

- 根据上面三种模型之间的差别与内在联系，可以推断出它的存储策略是：

在模型一的存贮策略上乘上 $\sqrt{\frac{P}{P-R}}$ 和 $\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}$ 两个因子

同样的，它也有 $\frac{1}{2}S_0t_0 = \frac{C_3}{C_1}$

- 模型四：允许缺货（需补足缺货）、生产需一定时间
 - 假设条件除允许缺货生产需一定时间外，其余条件皆与模型一相同。
 - 存储变化如图：



14.2 确定性存储模型

- 取 $[0, t]$ 为一个周期，设 t_1 时刻开始生产。
 $[0, t_2]$ 时间内存贮为零， B 表示最大缺货量；
 $[t_1, t_2]$ 时间内除满足需求外，补足 $[0, t_1]$ 时间内的缺货；
 $[t_2, t_3]$ 时间内满足需求后的产品进入存贮，存贮量以 $(P - R)$ 速度增加， S 表示存贮量， t_3 时刻存贮量达到最大， t_3 时刻停止生产；
 $[t_3, t]$ 时间存贮量以需求速度 R 减少。

由上图可知：最大缺货量 $B = Rt_1 = (P - R)(t_2 - t_1)$ ，得 $t_1 = \frac{(P - R)}{P} t_2$ (14.15)

最大存贮量： $S = (P - R)(t_3 - t_2) = R(t - t_3)$ ，得 $t_3 - t_2 = \frac{R}{P}(t - t_2)$ (14.16)

在 $[0, t]$ 时间内所需费用：

存贮费： $\frac{1}{2} C_1 (P - R)(t_3 - t_2)(t - t_2) = \frac{1}{2} C_1 (P - R) \frac{R}{P} (t - t_2)^2$ (将(14.16)代入)

缺货费： $\frac{1}{2} C_2 R t_1 t_2 = \frac{1}{2} C_2 R \frac{(P - R)}{P} t_2^2$ (将(14.15)代入)

装配费： C_3

14.2 确定性存储模型

- 在 $[0, t]$ 时间内总平均费用为：

$$\begin{aligned}
 C(t, t_2) &= \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2} C_1 (P - R) \frac{R}{P} (t - t_2)^2 + \frac{1}{2} C_2 R \frac{(P - R)}{P} t_2^2 + C_3 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(P - R)R}{P} \left[C_1 t - 2C_1 t_2 + (C_1 + C_2) \frac{t_2^2}{t} \right] + \frac{C_3}{t} \\
 \frac{\partial C(t, t_2)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{(P - R)R}{P} \left[C_1 + (C_1 + C_2) t_2^2 \left(-\frac{1}{t^2} \right) \right] - \frac{C_3}{t^2} \quad (14.17)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C(t, t_2)}{\partial t_2} = \frac{1}{2} \frac{(P - R)R}{P} \left[-2C_1 + 2(C_1 + C_2) t_2 \cdot \frac{1}{t} \right] \quad (14.18)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial C(t, t_2)}{\partial t_2} &= \frac{1}{2} \frac{(P - R)R}{P} \left[-2C_1 + 2(C_1 + C_2) t_2 \cdot \frac{1}{t} \right] = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} t \quad (14.19) \\
 \frac{\partial C(t, t_2)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{(P - R)R}{P} \left[C_1 + (C_1 + C_2) t_2^2 \left(-\frac{1}{t^2} \right) \right] - \frac{C_3}{t^2} = 0
 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{(P - R)R}{P} \left[C_1 - (C_1 + C_2) \frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2} \right] - \frac{C_3}{t^2} = 0$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P - R}}, \quad \text{记作 } t_0$$

14.2 确定性存储模型

由(14.19)得：

$$t_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} t_0 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} \cdot \sqrt{\frac{(C_1 + C_2)}{C_2}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P - R}}$$

即 $C(t, t_2)$ 在 $t = t_0$, $t_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} t_0$ 时有最小值。

相应的得到：

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P - R}} \quad (14.20)$$

$$Q_0 = R \cdot t_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P - R}} \quad (14.21)$$

$$\begin{aligned} S_0(\text{最大存贮量}) &= R(t_0 - t_3) = R(t_0 - \frac{R}{P} t_0 - \frac{P - R}{P} t_2) = R(t_0 - \frac{R}{P} t_0 - \frac{(P - R)}{P} \cdot \frac{C_1}{(C_1 + C_2)} t_0) \\ &= R \cdot \frac{(P - R)}{P} \cdot \frac{C_2}{(C_1 + C_2)} \cdot t_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}} \cdot \sqrt{\frac{P - R}{P}} \end{aligned} \quad (14.22)$$

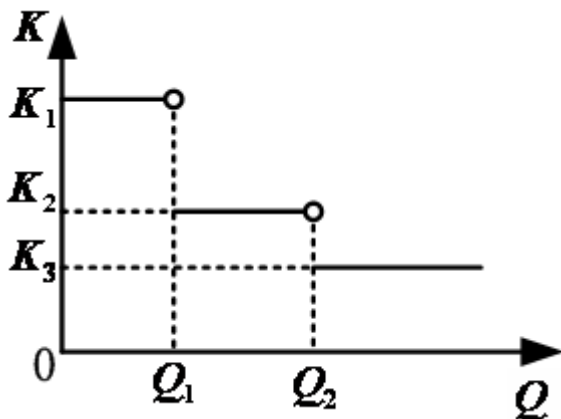
$$B_0(\text{最大缺货量}) = R \cdot t_1 = \frac{R(P - R)}{P} \cdot t_2 = \sqrt{\frac{2C_1 C_3 R}{(C_1 + C_2) C_2}} \cdot \sqrt{\frac{P - R}{P}} \quad (14.23)$$

$$\min C(t_0, t_2) = C_0 = \sqrt{2C_1 C_3 R} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}} \cdot \sqrt{\frac{P - R}{P}} \quad (14.24)$$

14.2 确定性存储模型

- 价格有折扣的存储问题

- 货物单价随订购（或生产）数量而变化的存储策略。一种商品有零售价、批发价和出厂价。一般情况下购买数量越多，商品单价就越低，在少数情况下，某种商品限额供应，超过限额部分的商品单价要提高。其余条件皆与模型一相同。
- 设货物单价为 $K(Q)$ ，按三个数量等级变化如图：



$$K(Q) = \begin{cases} K_1 & 0 \leq Q < Q_1 \\ K_2 & Q_1 \leq Q < Q_2 \\ K_3 & Q_2 \leq Q \end{cases}$$

14.2 确定性存储模型

- 当订购量为 Q 时，一个周期内所需费用为：

$$\frac{1}{2}C_1Q\frac{Q}{R} + C_3 + K(Q)Q$$

$$Q \in [0, Q_1): \quad \frac{1}{2}C_1Q\frac{Q}{R} + C_3 + K_1Q$$

$$Q \in [Q_1, Q_2): \quad \frac{1}{2}C_1Q\frac{Q}{R} + C_3 + K_2Q$$

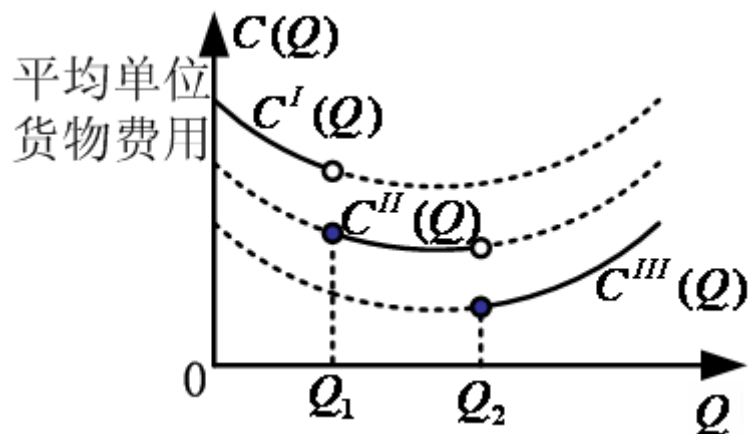
$$Q \geq Q_2: \quad \frac{1}{2}C_1Q\frac{Q}{R} + C_3 + K_3Q$$

- 平均每单位货物所需费用如图：

$$Q \in [0, Q_1): \quad \frac{1}{2}C_1\frac{Q}{R} + \frac{C_3}{Q} + K_1$$

$$Q \in [Q_1, Q_2): \quad \frac{1}{2}C_1\frac{Q}{R} + \frac{C_3}{Q} + K_2$$

$$Q \geq Q_2: \quad \frac{1}{2}C_1\frac{Q}{R} + \frac{C_3}{Q} + K_3$$



14.2 确定性存储模型

- 若不考虑 $C^I(Q)$ 、 $C^{II}(Q)$ 、 $C^{III}(Q)$ 的定义域，则它们之间只差一个常数，因此它们的导函数相同，无法判断求得的 Q_0 落在哪个区间。

- 步骤如下：(1)对 $C^I(Q)$ (不考虑定义域)求得极值点为 Q_0 ;

(2)若 $Q_0 < Q_1$ ，分别计算 $C^I(Q_0) = \frac{1}{2}C_1 \frac{Q_0}{R} + \frac{C_3}{Q_2} + K_1$,

$$C^{II}(Q_1) = \frac{1}{2}C_1 \frac{Q_1}{R} + \frac{C_3}{Q_1} + K_2, \quad C^{III}(Q_2) = \frac{1}{2}C_1 \frac{Q_2}{R} + \frac{C_3}{Q_2} + K_3$$

由 $\min\{C^I(Q_0), C^{II}(Q_1), C^{III}(Q_2)\}$ 得到单位货物最小费用的订购批量 Q^* 。

(3)若 $Q_1 \leq Q_0 < Q_2$ ，计算 $C^{II}(Q_0)$ 、 $C^{III}(Q_2)$ ，由 $\min\{C^{II}(Q_0), C^{III}(Q_2)\}$ 决定 Q^* 。

(4)若 $Q_2 \leq Q_0$ ，取 $Q^* = Q_0$ 。

- 以上步骤可以推广到单价折扣分 m 个等级的情况，订购量为 Q ，单价为 $K(Q)$ ：

$$K(Q) = \begin{cases} K_1 & 0 \leq Q < Q_1 \\ K_2 & Q_1 \leq Q < Q_2 \\ \vdots & \\ K_j & Q_{j-1} \leq Q < Q_j \\ \vdots & \\ K_m & Q_{m-1} \leq Q \end{cases}$$

14.2 确定性存储模型

- 以上步骤可以推广到单价折扣分 m 个等级的情况，订购量为 Q ，单价为 $K(Q)$ ：

$$K(Q) = \begin{cases} K_1 & 0 \leq Q < Q_1 \\ K_2 & Q_1 \leq Q < Q_2 \\ \vdots & \\ K_j & Q_{j-1} \leq Q < Q_j \\ \vdots & \\ K_m & Q_{m-1} \leq Q \end{cases}$$

- 对应的平均单位货物所需费用为：

$$C^j(Q) = \frac{1}{2} C_1 \frac{Q}{R} + \frac{C_3}{Q} + K_j, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

对 $C^1(Q)$ 求得极值点为 Q_0 。

若 $Q_{j-1} \leq Q_0 < Q_j$ ，计算 $C^j(Q_0)$ 、 $C^{j+1}(Q_j)$ 、 \dots 、 $C^m(Q_{m-1})$ ，

由 $\min\{C^j(Q_0), C^{j+1}(Q_j), \dots, C^m(Q_{m-1})\}$ 决定 Q^* ，

若得到的最小值为 $C^l(Q_{l-1})$ ，则取 $Q^* = Q_{l-1}$

14.2 确定性存储模型

— 应用举例

- 例：某厂每年需某种元件30000个，每次订购费 $C_3=1000$ 元，保管费每件每年 $C_1=100$ 元，不允许缺货。元件单价 K 随采购数量不同而有变化。

$$K(Q) = \begin{cases} 200 \text{ 元} & Q < 1500 \\ 198 \text{ 元} & Q \geq 1500 \end{cases}$$

- 分析：利用 E.O.Q. 公式计算：

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 30000}{100}} = 775 \text{ 个}$$

- 分别计算每次订购775个和1500个元件平均单位元件所需费用：

$$\left. \begin{aligned} C(775) &= \frac{1}{2} \times 100 \times \frac{775}{30000} + \frac{1000}{775} + 200 \approx 202.582 \text{ (元/个)} \\ C(1500) &= \frac{1}{2} \times 100 \times \frac{1500}{30000} + \frac{1000}{1500} + 198 = 201.167 \text{ (元/个)} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow C(775) > C(1500), \text{ 因此最佳定购量 } Q = 1500$$



14.3 随机性存储模型

- 特点：
 - 需求为随机的，其概率或分布为已知；
 - 不允许缺货的条件只能从概率的意义方面理解；
 - 存储策略的优劣通常以赢利的期望值的大小作为衡量的标准。
- 可供选择的策略：
 - **定期订货法**：定期订货，但订货数量需要根据上一个周期末剩下货物的数量决定订货量。剩下的数量少，可以多订货；剩下的数量多，可以少订或不订货。
 - **定点订货法**：存储降到某一确定的数量时即订货，不再考虑间隔的时间，这一数量称为订货点，每次订货的数量不变。
 - **(s,S)存储策略**：把定期订货与定点订货综合起来的方法，隔一定时间检查一次存储，若存储数量高于一个数值s，则不定货；小于s时则订货补充存储，订货量要使存储量达到S。

14.3 随机性存储模型

例：某商店拟在新年期间出售一批日历画片，每售出一千张可赢利700元，若在新年期期间不能售出，必须削价处理，作为画片出售。由于削价，一定可以售完，此时每千张赔损400元。根据以往的经验，市场需求的概率见下表，问每年只订货一次，问应订购日历画片多少才能使获利的期望值最大？

需求量 r (单位千张)	0	1	2	3	4	5
概率 $P(r)$ ($\sum_{r=0}^5 P(r) = 1$)	0.05	0.10	0.25	0.35	0.15	0.10

- 分析：若该店订购4千张，计算获利的可能值如下：

当市场需求为0时获利为： $-400 \times 4 = -1600$ 元

当市场需求为1时获利为： $-400 \times 3 + 700 = -500$ 元

当市场需求为2时获利为： $-400 \times 2 + 700 \times 2 = 600$ 元

当市场需求为3时获利为： $-400 \times 1 + 700 \times 3 = 1700$ 元

当市场需求为4时获利为： $-400 \times 0 + 700 \times 4 = 2800$ 元

当市场需求为5时获利为： $-400 \times 0 + 700 \times 4 = 2800$ 元

14.3 随机性存储模型

- 订购量为4千张时获利的期望值：

$$E[C(4)] = (-1600) \times 0.05 + (-500) \times 0.10 + 600 \times 0.25 + 1700 \times 0.35 + 2800 \times 0.15 + 2800 \times 0.10 = 1315 \text{ (元)}$$

- 按上述算法列出下表：（单位：百元）

获利		需求量						获利的期望值
		0	1	2	3	4	5	
订货量	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	-4	7	7	7	7	7	6.45
	2	-8	3	14	14	14	14	11.80
	3	-12	-1	10	21	21	21	14.40
	4	-16	-5	6	17	28	28	13.15
	5	-20	-9	2	13	24	35	10.25

- 获利期望值最大者为**1440**元，即订购**3**千张日历画片获利期望值最大。
- 本例还可以从相反的角度考虑求解，当订货量为**Q**时，可能发生滞销赔损或因缺货而失去销售机会的损失，把这两种损失合起来考虑取损失期望值最小者所对应的**Q**值即可。

14.3 随机性存储模型

- 当该店订购量为2千张时，计算其损失可能：

1. 供货大于需求时的滞销赔损：

当市场需求为0时滞销损失为： $-400 \times 2 = -800$ 元

当市场需求为1时滞销损失为： $-400 \times 1 = -400$ 元

当市场需求为2时滞销损失为：0元

2. 供货小于需求时失去销售机会而少获利的损失：

当市场需求为3时缺货损失为： $-700 \times 1 = -700$ 元

当市场需求为4时缺货损失为： $-700 \times 2 = -1400$ 元

当市场需求为5时缺货损失为： $-700 \times 3 = -2100$ 元

3. 损失期望值为：

$$E[C(2)] = (-800) \times 0.05 + (-400) \times 0.10 + 0 \times 0.25 + (-700) \times 0.35 + (-1400) \times 0.15 \\ + (-2100) \times 0.10 = 1315 \text{元}$$

订货量（单位：千张）	0	1	2	3	4	5
损失的期望值	-19.25	-12.8	-7.45	-4.85	-6.1	-9

其中 **-4.85** 为最小的损失期望值，因此和第一种方法求得结果一样，订货**3**千张获利最大。

14.3 随机性存储模型

- 模型五：需求是随机离散的

- 报童问题：报童每天售报数是一个随机变量，报童每售出一份报纸赚 k 元，如报纸未能售出每份赔 h 元。每日售出报纸份数 r 的概率 $P(r)$ 根据以往经验是已知的，问报童每日最好准备多少份报纸？

- 分析：用计算损失期望值最小的方法求解

设售出报纸数量为 r ，其概率 $P(r)$ 为已知， $\sum_{r=0}^{\infty} P(r) = 1$ 。

设报童订购报纸数量为 Q ：

供过于求时 ($r \leq Q$)，这时报纸因不能出售而承担的损失期望值为 $\sum_{r=0}^Q h(Q-r)P(r)$

供不应求时 ($r > Q$)，这时因缺货而少赚钱的损失期望值为 $\sum_{r=Q+1}^{\infty} k(r-Q)P(r)$

综合上述两种情况，当订货量为 Q 时，损失的期望值为：

$$C(Q) = \sum_{r=0}^Q h(Q-r)P(r) + \sum_{r=Q+1}^{\infty} k(r-Q)P(r)$$

14.3 随机性存储模型

由于报童订购报纸的份数只能取整数， r 是离散变量，设报童每日订购报纸份数最佳为 Q ，其损失期望值满足：

$$(1) C(Q) \leq C(Q+1) \quad (2) C(Q) \leq C(Q-1)$$

- 从(1)推导出：

$$\begin{aligned} h \sum_{r=0}^Q (Q-r)P(r) + k \sum_{r=Q+1}^{\infty} (r-Q)P(r) &\leq h \sum_{r=0}^{Q+1} (Q+1-r)P(r) + k \sum_{r=Q+2}^{\infty} (r-Q-1)P(r) \\ \Rightarrow (k+h) \sum_{r=0}^Q P(r) - k &\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{r=0}^Q P(r) \geq \frac{k}{k+h} \end{aligned}$$

- 从(2)推导出：

$$\begin{aligned} h \sum_{r=0}^Q (Q-r)P(r) + k \sum_{r=Q+1}^{\infty} (r-Q)P(r) &\leq h \sum_{r=0}^{Q-1} (Q-1-r)P(r) + k \sum_{r=Q}^{\infty} (r-Q+1)P(r) \\ \Rightarrow (k+h) \sum_{r=0}^{Q-1} P(r) - k &\leq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{r=0}^{Q-1} P(r) \leq \frac{k}{k+h} \end{aligned}$$

- 报童应准备的报纸量最佳数量 Q 应按照下列不等式确定：

$$\sum_{r=0}^{Q-1} P(r) < \frac{k}{k+h} \leq \sum_{r=0}^Q P(r) \quad (14.25)$$

14.3 随机性存储模型

- 从(1)推导得:

$$\sum_{r=0}^Q [kr - h(Q-r)]P(r) + \sum_{r=Q+1}^{\infty} kQP(r) \geq \sum_{r=0}^{Q+1} [kr - h(Q+1-r)]P(r) + \sum_{r=Q+2}^{\infty} k(Q+1)P(r)$$

$$\Rightarrow kP(Q+1) - h \sum_{r=0}^Q P(r) + k \sum_{r=Q+1}^{\infty} P(r) \leq 0 \Rightarrow \sum_{r=0}^Q P(r) \geq \frac{k}{k+h}$$

- 同理从(2)推导得: $\sum_{r=0}^{Q-1} P(r) \leq \frac{k}{k+h}$
- 即用不等式: $\sum_{r=0}^{Q-1} P(r) < \frac{k}{k+h} \leq \sum_{r=0}^Q P(r)$

确定Q的值。该公式与前面用损失期望值最小的方法求出的(14.25)式相同。

— 应用举例

- 利用公式(14.25)求解上述商店购买日历画片问题:

已知: $k = 7, h = 4, \frac{k}{k+h} = 0.637, P(0) = 0.05, P(1) = 0.10, P(2) = 0.25, P(3) = 0.35,$

$\sum_{r=0}^2 P(r) = 0.40 < 0.637 < \sum_{r=0}^3 P(r) = 0.75$ 。即: 应该订购 3 千张日历画片。

14.3 随机性存储模型

- 例：某店拟出售甲商品，每单位甲商品成本200元，售价280元。如不能售出必须减价为160元，减价后一定可以售出。已知售货量 r 的概率服从泊松分布：

$$P(r) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^r}{r!} \quad (\lambda \text{ 为平均售出数})$$

根据以往经验，平均售出数为6单位 ($\lambda=6$)，问该店订购量应为多少单位？

- 分析：

该店缺货损失为 $k=280-200=80$ 元，滞销损失为 $h=200-160=40$ 元。

$$\frac{k}{k+h} = 0.667 \qquad P(r) = \frac{e^{-6} 6^r}{r!}$$

$\sum_{r=0}^Q P(r)$ 记作 $F(Q)$ ，可查统计表得：

$$F(6) = 0.6063, \quad F(7) = 0.7440, \quad \text{即：} F(6) < \frac{k}{k+h} < F(7)$$

故订货量应为什么7个单位，此时损失的期望值最小。

14.3 随机性存储模型

• 例：上例中若缺货损失为 40 元，滞销损失为 80 元，则：

• 分析：

$$\frac{k}{k+h} = 0.333$$

查统计表，可得：

$$F(4) = 0.2851 < \frac{k}{k+h} < F(5) = 0.44587$$

故订货量应为什么 5 个单位，此时损失的期望值最小。

- 模型五只解决一次订货问题，对报童问题实际上每日订货策略问题也应当认为解决了。
- 但模型中有一个严格的规定，即两次订货之间没有联系，都看作独立的一次订货。
- 模型五描述的这种存储策略称之为定期定量订货。

14.3 随机性存储模型

- 模型六：需求是连续的随机变量

- 设货物单位成本为 K ，货物单位售价为 P ，单位存贮费为 C_1 ，需求 r 是连续的随机变量，密度函数为 $\varphi(r)$ ， $\varphi(r)dr$ 表示随机变量在 r 与 $r+dr$ 之间的概率，其分布函数 $F(a) = \int_0^a \varphi(r)dr (a > 0)$ ，生产或订购的数量为 Q 。

- 分析：考虑当订购数量为 Q 时，实际销售量应该是 $\min[r, Q]$ ，也就是当需求 $r \leq Q$ 时，实际销售量为 r ；当 $r > Q$ 时，实际销售量是 Q 。

$$\text{需支付的存贮费用 } C_1(Q) = \begin{cases} C_1(Q-r), & r \leq Q \\ 0, & r > Q \end{cases}$$

货物的成本为 KQ ，本阶段订购量为 Q ，赢利为 $W(Q)$ ，赢利的期望值记作 $E[W(Q)]$ ：

$$W(Q) = P \cdot \min[r, Q] - KQ - C_1(Q)$$

即：

$$(\text{赢利}) = (\text{实际销售货物的收入}) - (\text{货物成本}) - (\text{支付的存储费用})$$

14.3 随机性存储模型

赢利的期望值:

$$\begin{aligned}
 E[W(Q)] &= \int_0^Q P \cdot r \cdot \varphi(r) dr + \int_Q^\infty PQ\varphi(r) dr - KQ - \int_0^Q C_1(Q-r)\varphi(r) dr \\
 &= \int_0^\infty P\varphi(r)rdr - \int_Q^\infty P\varphi(r)rdr + \int_Q^\infty PQ\varphi(r) dr - KQ - \int_0^Q C_1(Q-r)\varphi(r) dr \\
 &= \underbrace{PE(r)}_{\text{常量 (称为平均盈利)}} - \left\{ \underbrace{P \int_Q^\infty (r-Q)\varphi(r) dr}_{\text{因缺货失去销售机会损失的期望值}} + \underbrace{\int_0^Q C_1(Q-r)\varphi(r) dr}_{\text{因滞销受到损失的期望值 (只考虑了存贮费)}} + \underbrace{KQ}_{\text{常量}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\text{记: } E[C(Q)] = P \int_Q^\infty (r-Q)\varphi(r) dr + C_1 \int_0^Q (Q-r)\varphi(r) dr + KQ$$

- 为使赢利期望值极大化, 有下列等式:

$$\max E[W(Q)] = PE(r) - \min E[C(Q)] \quad (14.26)$$

$$\max E[W(Q)] + \min E[C(Q)] = PE(r) \quad (14.27)$$

- (14.26)式表明了赢利最大与损失极小所得出的Q值相同; (14.27)式表明最大赢利期望值与损失极小期望值之和是常数。

14.3 随机性存储模型

- 根据上面的分析，求赢利极大可以转化为求 $E[C(Q)]$ （损失期望值）极小，当 Q 可以连续取值时， $E[C(Q)]$ 是 Q 的连续函数，则：

$$\begin{aligned}\frac{dE[C(Q)]}{dQ} &= \frac{d}{dQ} \left[P \int_Q^\infty (r - Q) \varphi(r) dr + \int_0^Q C_1 (Q - r) \varphi(r) dr + KQ \right] \\ &= C_1 \int_0^Q \varphi(r) dr - P \int_Q^\infty \varphi(r) dr + K\end{aligned}$$

$$\text{令 } \frac{dE[C(Q)]}{dQ} = 0, \text{ 记 } F(Q) = \int_0^Q \varphi(r) dr, \text{ 即:}$$

$$C_1 F(Q) - P[1 - F(Q)] + K = 0 \Rightarrow F(Q) = \frac{P - K}{C_1 + P}$$

解出 Q ，记作 Q^* ， Q^* 为 $E[C(Q)]$ 的驻点。又因：

$$\frac{d^2 E[C(Q)]}{dQ^2} = C_1 \varphi(Q) + P \varphi(Q) > 0$$

可知 Q^* 为 $E[C(Q)]$ 的极小值点。

- 式中只考虑了失去销售机会的损失，如果缺货时要付出的费用 $C_2 > P$ 时，应有

$$E[C(Q)] = C_2 \int_Q^\infty (r - Q) \varphi(r) dr + C_1 \int_0^Q (Q - r) \varphi(r) dr + KQ \quad (14.28)$$

- 推导得：
$$F(Q) = \int_0^Q \varphi(r) dr = \frac{C_2 - K}{C_1 + C_2}$$

14.3 随机性存储模型

— 模型五及模型六都是只解决一个阶段的问题。从一般情况考虑，上一个阶段未售出的货物可以在第二个阶段继续出售。此时定制的存储策略如下：

- 分析：假设上一阶段未能售出的货物数量为 I ，作为本阶段初的存储，有：

$$\begin{aligned}\min E[C(Q)] &= K(Q - I) + C_2 \int_Q^\infty (r - Q)\varphi(r)dr + C_1 \int_0^Q (Q - r)\varphi(r)dr \\ &= -KI + \underbrace{\min \left\{ C_2 \int_Q^\infty (r - Q)\varphi(r)dr + C_1 \int_0^Q (Q - r)\varphi(r)dr + KQ \right\}}_{\text{与(14.28)式相同}}\end{aligned}$$

- 利用 $F(Q) = \int_0^Q \varphi(r)dr = \frac{C_2 - K}{C_1 + C_2}$ 求出 Q^* 值，相应的存贮策略为：

- 1) 当 $I \geq Q^*$ 时，本阶段不订货；
- 2) 当 $I < Q^*$ 时，本阶段应订货，订货量为 $Q = Q^* - I$ ，使本阶段的存贮达到 Q^* ，这时赢利期望值最大。

— 这种策略也可以称作定期订货，订货量不定的存储策略。

14.3 随机性存储模型

- 模型七：(s,S)型存储策略

- 需求为连续的随机变量

- 设货物单位成本为 K ，货物单位售价为 P ，单位存贮费为 C_1 ，单位缺货费为 C_2 ，每次订购费为 C_3 ，需求 r 是连续的随机变量，密度函数为 $\varphi(r)$ ， $\int_0^\infty \varphi(r)dr = 1$ ，其分布函数 $F(a) = \int_0^a \varphi(r)dr (a > 0)$ ，期初存贮为 I ，订购量为 Q ，此时期初存贮达到 $S = I + Q$ 。

- **分析：**期初存储 I 在本阶段中为常量，**本阶段需订货费：** $C_3 + KQ$ ，

需付存储费用的期望值为： $\int_0^{I+Q=S} C_1(S-r)\varphi(r)dr$

需付缺货费用的期望值为： $\int_{S=I+Q}^\infty C_2(r-S)\varphi(r)dr$

本阶段所需订货费、存贮费以及缺货费期望值之和为：

$$\begin{aligned} C(I+Q) &= C_3 + KQ + \int_0^S C_1(S-r)\varphi(r)dr + \int_S^\infty C_2(r-S)\varphi(r)dr \\ &= C_3 + K(S-I) + \int_0^S C_1(S-r)\varphi(r)dr + \int_S^\infty C_2(r-S)\varphi(r)dr \end{aligned}$$

14.3 随机性存储模型

- Q 可以连续取值, $C(S)$ 是 S 的连续函数:

$$\frac{dC(S)}{dS} = K + C_1 \int_0^S \varphi(r) dr - C_2 \int_S^\infty \varphi(r) dr$$

- 令 $\frac{dC(S)}{dS} = 0$, 有:

$$F(S) = \int_0^S \varphi(r) dr = \frac{C_2 - K}{C_1 + C_2} \quad (14.29)$$

- $\frac{C_2 - K}{C_1 + C_2}$ 严格小于1, 称为临界值, 以 N 表示: $\frac{C_2 - K}{C_1 + C_2} = N$ 。

由 $\int_0^S \varphi(r) dr = N$ 确定 S 的值, 订货量 $Q = S - I$ 。

- 原存储量 I 达到什么量可以不订货, 假设这个量是 s , 当 $I > s$ 时可以考虑不订货, 否则要订货, 使存储达到 S 。

14.3 随机性存储模型

- 本模型中有订购费 C_3 ，若本阶段不订货可以节省订购费 C_3 ，考虑是否存在一个数值 s ($s \leq S$)使下面的不等式成立：

$$\begin{aligned}
 & Ks + C_1 \int_0^s (s-r)\varphi(r)dr + C_2 \int_s^\infty (r-s)\varphi(r)dr \\
 & \leq C_3 + KS + C_1 \int_0^S (S-r)\varphi(r)dr + C_2 \int_S^\infty (r-S)\varphi(r)dr
 \end{aligned}$$

- ——当 $s=S$ 时，不等式显然成立；
- ——当 $s<S$ 时，不等式右端存贮费用期望值大于左端存贮费用期望值，右端缺货费用期望值小于左端缺货费用期望值；一增一减后仍然有可能使不等式成立。若有不只一个 s 的值使下列不等式成立，则选其中最小者作为本模型 (s,S) 存贮策略的 s 。

$$\begin{aligned}
 & C_3 + K(S-s) + C_1 \left[\int_0^S (S-r)\varphi(r)dr - \int_0^s (s-r)\varphi(r)dr \right] + \\
 & C_2 \left[\int_S^\infty (r-S)\varphi(r)dr - \int_s^\infty (r-s)\varphi(r)dr \right] \geq 0
 \end{aligned}$$

- 相应的存储策略是：每阶段初期检查存储，当库存 $I < s$ 时，需订货，订货数量为 $Q=S-I$ 。当库存 $I > s$ 时，本阶段不订货。
- 这种存储策略是：定期订货但订货量不确定。订货量的多少视期末库存 I 来决定。
- 对于不易清点数量的存储，一般把存储分为两堆，堆A的数量为 s ，其余的放在另一堆B。平时从B堆中取用，当动用了堆A时，期末即订货；若未动用，期末则可不订货。这种方法俗称两堆法。

14.3 随机性存储模型

– 需求是离散的随机变量

- 设需求 r 取值为 r_0, r_1, \dots, r_m , ($r_i < r_{i+1}$), 其概率为 $P(r_0), P(r_1), \dots, P(r_m)$,

$$\sum_{i=0}^m P(r_i) = 1, \text{ 原有存贮量为 } I (\text{在本阶段内为常量})。$$

- 当本阶段开始时订货量为 Q , 存贮量达到 $I + Q$ 。

- 本阶段所需的各种费用:

订货费: $C_3 + KQ$

存贮费的期望值: $\sum_{r \leq I+Q} C_1(I+Q-r)P(r)$

- 1) 需求 $r < I+Q$ 时, 未能售出的存贮部分需付存贮费;
- 2) 需求 $r \geq I+Q$ 时, 不需要付存贮费;
- 3) 需求 $r = I+Q$ 时, 不付存贮费及缺货费。

缺货费用期望值: $\sum_{r > I+Q} C_2(r-I-Q)P(r)$

当需求 $r > I+Q$ 时, $(r-I-Q)$ 部分需付缺货费。

14.3 随机性存储模型

- 本阶段所需费用期望值之和：

$$C(I+Q) = C_3 + KQ + \sum_{r \leq I+Q} C_1(I+Q-r)P(r) + \sum_{r > I+Q} C_2(r-I-Q)P(r)$$

$I+Q$ 表示存贮所达到的水平，记 $S = I+Q$ ，则上式可写为：

$$C(S) = C_3 + K(S-I) + \sum_{r \leq S} C_1(S-r)P(r) + \sum_{r > S} C_2(r-S)P(r)$$

- 求解使 $C(S)$ 最小的 S 值：

1) 将需求 r 的随机变量按大小顺序排列为：

$$r_0, r_1, \dots, r_i, r_{i+1}, \dots, r_m, \quad r_i < r_{i+1}, \quad r_{i+1} - r_i = \Delta r_i \neq 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

2) S 只从 r_0, r_1, \dots, r_m 中取值，当 S 取值为 r_i 时，记作 S_i ：

$$\Delta S_i = S_{i+1} - S_i = r_{i+1} - r_i = \Delta r_i \neq 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

3) 求 S 的值使 $C(S)$ 最小，有：

$$a) \quad C(S_{i+1}) - C(S_i) \geq 0$$

$$b) \quad C(S_{i-1}) - C(S_i) \geq 0$$

14.3 随机性存储模型

从 a) 推导得:

$$\begin{aligned}\Delta C(S_i) &= C(S_{i+1}) - C(S_i) = \left[C_3 + K(S_{i+1} - I) + \sum_{r \leq S_{i+1}} C_1(S_{i+1} - r)P(r) + \sum_{r > S_{i+1}} C_2(r - S_{i+1})P(r) \right] \\ &\quad - \left[C_3 + K(S_i - I) + \sum_{r \leq S_i} C_1(S_i - r)P(r) + \sum_{r > S_i} C_2(r - S_i)P(r) \right] \\ &= K\Delta S_i + C_1\Delta S_i \sum_{r \leq S_i} P(r) - C_2\Delta S_i \left[1 - \sum_{r \leq S_i} P(r) \right] = K\Delta S_i + (C_1 + C_2)\Delta S_i \sum_{r \leq S_i} P(r) - C_2\Delta S_i \geq 0 \\ \therefore \Delta S_i \neq 0 \quad \therefore K + (C_1 + C_2) \sum_{r \leq S_i} P(r) - C_2 \geq 0 &\Rightarrow \sum_{r \leq S_i} P(r) \geq \frac{K - C_2}{C_1 + C_2} = N\end{aligned}$$

由 b) 可推导出:

$$\sum_{r \leq S_{i-1}} P(r) \leq \frac{K - C_2}{C_1 + C_2} = N$$

综合以上两式, 得到确定 S_i 的不等式:

$$\sum_{r \leq S_{i-1}} P(r) < N = \frac{C_2 - K}{C_1 + C_2} \leq \sum_{r \leq S_i} P(r) \quad (14.30)$$

取满足上式的 S_i 为 S 。本阶段订货量为 $Q = S - I$

14.3 随机性存储模型

— 应用举例：

- 例：设某公司利用塑料做原料制成产品出售，已知每箱塑料购价为1600元，订购费 $C_3=300$ 元，存储费每箱 $C_1=80$ 元，缺货费每箱 $C_2=2100$ 元，原有存储量 $I=20$ 箱，已知对原料需求的概率： $P(r=30\text{箱})=0.20$ ， $P(r=40\text{箱})=0.20$ ， $P(r=50\text{箱})=0.40$ ， $P(r=60\text{箱})=0.20$ ，求该公司订购原料的最佳订购量。

- 分析：计算临界值：
$$N = \frac{2100 - 1600}{2100 + 80} = 0.229$$

- 选择使不等式 (14.30) 成立的 S_i 最小值做 S ：

$$P(60) = 0.20 < 0.229 < P(60) + P(80) = 0.40$$

因此， $S_i=80$ ，原存储 $I=20$ ，故最优订货量为 $Q=60$ 。

验证：分别计算 $S=60/80/100$ 所需订费及存储费期望值、缺货费三者期望值之和。

S	I	$Q=S-I$	订货费 $C_3 + KQ$	存储费期望值 $C_1 \sum_{r \leq S} (S-r)P(r)$	缺货费期望值 $C_2 \sum_{r > S} (r-S)P(r)$	总计
60	20	40	64300	0	62700	131500
80	20	60	96300	320	33600	130220
100	20	80	128300	960	8400	137660

14.3 随机性存储模型

— 本模型还有另一方面的问题：原存储量 I 达到什么水平可以不订货。

- 假设该水平为 s ，当 $I > s$ 时可以不订货，当 $I \leq s$ 时要订货，使存储达到 S ，订货量 $Q = S - I$ 。
- 考察下面的不等式：

$$\begin{aligned} Ks + \sum_{r \leq s} C_1(s - r)P(r) + \sum_{r > s} C_2(r - s)P(r) \\ \leq C_3 + KS + \sum_{r \leq S} C_1(S - r)P(r) + \sum_{r > S} C_2(r - S)P(r) \end{aligned} \quad (14.31)$$

- s 只从 r_0, r_1, \dots, r_m 中取值，使上式成立的 r_i ($r_i \leq S$) 的值中最小者定为 s ，当 $s < S$ 时，上式左端缺货费用的期望值会增加，订货费及存储费会减少，即不等式有可能成立。在最不利的情况下 $s = S$ 时不等式成立（因 $0 < C_3$ ）。因此一定能找到 s 值。

14.3 随机性存储模型

— 应用举例

- 例：在上例基础上，计算s：
- 分析：因为已经算出S，所以s只能有两个值60和80，
- 将60作为s值代入(14.31)式的左端得：

$$1600 \times 60 + 2100 \times [(80 - 60) \times 0.2 + (100 - 60) \times 0.4 + (120 - 60) \times 0.2] = 163200$$

- 将80作为S值代入(14.31)式右端得：

$$300 + 1600 \times 80 + 80 \times [(80 - 60) \times 0.2] + 2300 \times [(100 - 80) \times 0.4 + (120 - 80) \times 0.2] = 163220$$

可见不等式成立，60是s可以取的最小值，因此 s=60。

- 上例的存储策略为每个阶段开始检查存储量 I，I>60 时不必补充存储，当 I≤60 时补充存储量到80。

14.3 随机性存储模型

• 例：某厂对原料需求量的概率为： $P(r=160)=0.1$, $P(r=170)=0.2$, $P(r=180)=0.3$, $P(r=190)=0.3$, $P(r=200)=0.1$ ；订货费 $C_3=6000$ 元， $K=1500$ 元，存储费 $C_1=100$ 元（在本阶段的费用），缺货费 $C_2=2200$ 元（在本阶段的费用）。求该厂存储策略。

• 分析：

1) 计算临界值：
$$N = \frac{2200 - 1500}{2200 + 100} = 0.304$$

2) 求出 S 值：
$$\sum_{r \leq 170} P(r) = 0.3 < 0.304 < \sum_{r \leq 180} P(r) = 0.6 \quad \text{可知 } S=180$$

3) $S=180$ ，公式 (14.31) 右端值为：

$$6000 + 1500 \times 180 + 100 \times [(180 - 160) \times 0.1 + (180 - 170) \times 0.2 + (180 - 180) \times 0.3] + 2200 \times [(190 - 180) \times 0.3 + (200 - 180) \times 0.1] = 287400$$

4) 求出 s 值： $S=180$ ，取 $s=180$ 、 170 、 160 ，代入 (14.31) 得： $s=160$ ，此时公式 (14.31) 左端值为 286200 ，小于 $S=180$ 时的右端值。

5) 即该厂存储策略为每当库存不大于 160 时补充存储量达到 180 ，当库存大于 160 时，不需订货补充库存。

14.3 随机性存储模型

例：某市石油公司，下设销售站，石油存放在该公司自己的油库中，需要补充时由油库送至各销售站。公司希望为其中销售量较多的一种柴油确定一种补充存储的策略，以确定应贮存的油量。经调查后知每月柴油出售量服从指数分布，平均销售量每月为一百万斤，其密度

$$f(r) = \begin{cases} 0.000001e^{-0.000001 \times r} & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases}$$

柴油每升 6 元，不需订购费。由于该公司自己掌管油库，因此油池灌满与未满时的管理费用实际上没有差别，故可以认为存储费用为零。如缺货就从邻市调用，缺货费 9 元/升。求存储策略。

- 分析：从上述条件可知： $C_1=0$ ， $C_3=0$ ， $K=6$ ， $C_2=9$ 。计算临界值：

$$N = \frac{9-6}{9+0} = 0.333$$

由于密度函数连续，利用积分求出S：

$$\begin{aligned} \int_0^S f(r)dr &= \int_0^S 0.000001e^{-0.000001 \times r} dr = 0.333 \\ \Rightarrow e^{-0.000001 \times S} &= 0.667 \Rightarrow S = 405000 \end{aligned}$$

14.3 随机性存储模型

- 利用(14.31)式可以求出s，只需要把相应的求和部分利用积分计算即可：

$$\begin{aligned} 2 \times s + \int_0^{405000} 0 \times (s - r) f(r) dr + 3 \int_{405000}^{\infty} (r - s) f(r) dr \\ \leq 2 \times 405000 + \int_0^{405000} 0 \times (S - r) f(r) dr + 3 \int_{405000}^{\infty} (r - S) f(r) dr \end{aligned}$$

- 即：

$$2 \times s + 3 \int_{405000}^{\infty} (r - s) f(r) dr \leq 2 \times 405000 + 3 \int_{405000}^{\infty} (r - 405000) f(r) dr$$

- 观察可知，它有唯一解 $s=S$ ，所以当库存柴油下降到405000斤以下时就需要订购使库存达到405000斤。

出现 $s=S$ 的原因在于订购费为 0，可以频繁订货，又存储费为0，存储量多一些也不会增加费用。

14.3 随机性存储模型

- 模型八：需求和拖后时间都是随机离散的

若 t 时间内的需求量 r 是随机的，其概率 $\varphi_t(r)$ 已知，单位时间内的平均需求 ρ 也是已知的，则 t 时间内的平均需求为 ρt ，拖后时间 x 是随机的，其概率 $P(x)$ 已知。

C_1 : 单位货物年存贮费用；

C_2 : 每阶段单位货物缺货费用；

C_3 : 每次订购费用为，

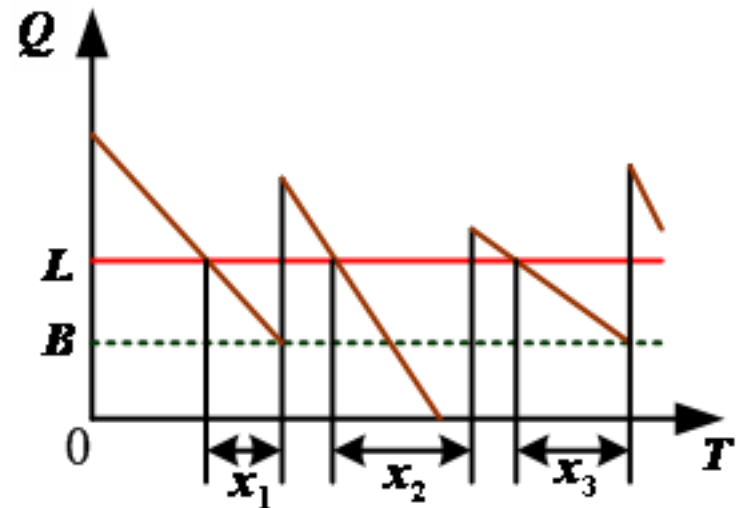
D : 年平均需求；

L : 订货点；

x_1, x_2, \dots : 拖后时间；

B : 缓冲存贮量。

由于需求、拖后时间都是随机的，应有缓冲(安全)存贮量，以减少发生缺货现象。



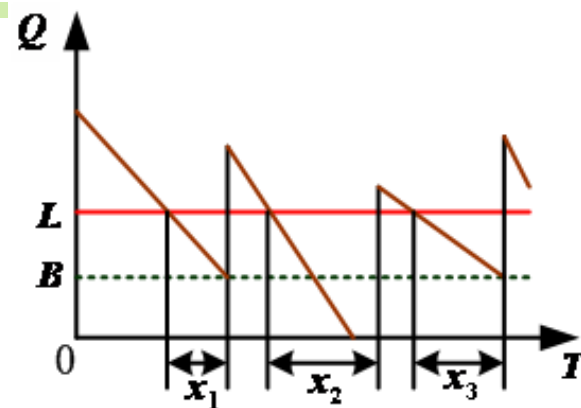
如何确定 B 、 L 以及订货量 Q ，使总费用最小

14.3 随机性存储模型

- 先按确定性模型求出**E.O.Q.**，以及最佳批次 **n_0** ：

$$Q_0 = E.O.Q. = \sqrt{\frac{2C_3D}{C_1}}, \quad n_0 = \frac{D}{Q_0}$$

- 存储策略**：全年分 **n_0** 次订货，每次订货量为 **Q_0** 。



订购点 L 的确定方法除应满足拖后时间内的平均需求 D_L 还要求维持缓冲存储量 B ，由于拖后时间是随机的，设平均拖后时间为 μ 。则：

$$L = D_L + B = \mu\rho + B$$

当存贮量降至 L 时订货，由于拖后时间延长，或因需求增加而引起缺货的概率记作 P_L ：

$$P_L = \sum_x P(x)F_x(L)$$

其中： $P(x)$ 表示拖后时间为 x 天的概率， $F_x(L)$ 表示订货点为 L （即存贮量为 L 时）而在 x 天内需求 $r > L$ 的概率。

$$F_x(L) = \sum_{r>L} \varphi_x(r)$$

14.3 随机性存储模型

— 记缺货的期望值为 $C_2 P_L$, n_0 次缺货费的期望值为 $n_0 C_2 P_L$, 每年的存贮费用为:

$$(\frac{1}{2}Q_0 + B)C_1$$

- 由于 Q_0 是根据存贮费用和订购费用权衡后得出的最佳值, 因此只需要考虑维持缓冲存贮量的存贮费用以及缺货费用期望值两者之和最小。即令 $n_0 C_2 P_L + C_1 B$ 最小以确定 L 和 B 。

— 应用举例

- 例12 (模型八) 某厂生产中需用钢材, t 时间内需求的概率服从泊松分布:

$$\varphi_t(r) = \frac{e^{-\rho t} (\rho t)^r}{r!}$$

- 每天平均需求为1吨, $\rho=1$, 年平均需求量 D 为365吨, 则 t 时间内需求为 r 的概率:

$$\varphi_t(r) = \frac{e^{-t} t^r}{r!}$$

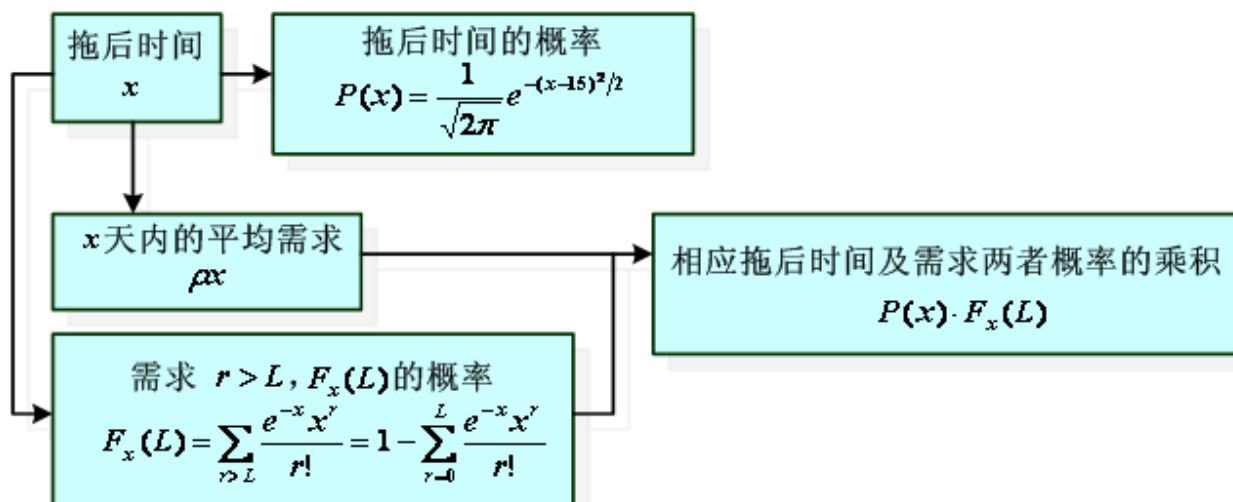
- 拖后时间为 x 天的概率服从正态分布:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

14.3 随机性存储模型

- 已知平均拖后时间 $\mu=15$ 天, 方差 $\sigma^2=1$, 则: $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-15)^2/2}$
- 年存储费用每吨为50元, 每次订购费为1500元, 缺货费用每吨5000元, 问每年应分多少批次? 又订购量 Q 、缓冲存储量 B 、订货点 L 各为何值才使费用最少? ($C_1 = 50$, $C_3 = 1500$, $D = 365$)
- 分析:

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2 \times 365 \times 1500}{50}} = 148 \text{ 吨}, \quad n_0 = \frac{D}{Q_0} = 2.5 \text{ 次}$$
- 计算 L 及 B 各步骤如下: (计算表略, 见P427表14-2)



14.3 随机性存储模型

- 书中取 $x=13\sim17$ ，因为拖后时间大于18者或小于13者概率很小，故略去；
- L 的选值可以多一些；若能保证可以选到最优值， L 的选值也可以取少一些。
- 根据前面的计算表可以算出 P_L 、 B 和费用的各种数值：

L	$L=15$	$L=21$	$L=22$	$L=23$	$L=24$	$L=25$	$L=26$	$L=31$
P_L	0.423	0.056	0.036	0.021	0.012	0.007	0.004	0
B	0	6	7	8	9	10	11	16
费用	52.875	10.00	8.00	6.63	6.00	5.88	6.00	8.00

- 本例计算后可得当 $L=25$ ， $B=10$ 时费用5.88为最小。即该厂的存贮策略为：
订购批量为148吨，订购点为25吨，每年订货2.5次（两年订货5次），缓冲存贮量为10吨。
- 当清点存贮困难时，常把存贮物分成三堆存放：将缓冲存贮量放在III堆，平均拖后时间内的平均需求量放在II堆，III+II即等于订货点 L 的大小，其余存贮物放在I堆。平日从I堆取用，当I堆用完开始动用II堆时，立即订货；动用III堆时，即需采取措施以防缺货。



本章完