解 63. 记$Y(X)=\cos(2X-\pi)$, $Z(X)=\left|X-\dfrac{\pi}{2}\right|$, 则

$Y(0)=-1,\ Y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,\ Y(\pi)=-1,\ Y\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=1;\ Z(0)=\dfrac{\pi}{2},\ Z\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0,\ Z(\pi)=\dfrac{\pi}{2},\ Z\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\pi$

$P(Y=-1)=\dfrac{1}{2},\ P(Y=1)=\dfrac{1}{2};\ P(Z=0)=\dfrac{1}{3},\ P\left(Z=\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2},\ P(Z=\pi)=\dfrac{1}{6}$

Y的分布列为:

Y	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Z的分布列为:

Z	0	$\frac{\pi}{2}$	π
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

解 22. 由概率密度函数的归一性有:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-2x^2+2xy-y^2}dxdy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}d(y-x)\\&=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\\&=A\pi=1\end{aligned}$$

解得$A=\dfrac{1}{\pi}$

$f_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ 故$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2}$

解 29. *(1).*

$$f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x} & 0<x<1,0<y<x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

(2). 由于区域$D:\{0<x<1,\ 0<y<x\}$又可以表示为$D:\{y<x<1,0<y<1\}$

故$0<y<1$时, $f_Y(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^1\frac{9y^2}{x}dx=-9y^2\ln y$

$$f_Y(y)=\begin{cases}-9y^2\ln y & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

解 30. *(1).* 由题意知$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{1}{x}$, 当$0<y<x$时.

故$f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)=e^{-x}$, 当$x>0,\ 0<y<x$时. 即:

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x} & 0<y<x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

(2). 区域$D:\{x>0,\ 0<y<x\}$又可以表示为$D:\{y>0,\ x>y\}$

对随机变量Y, 当在区域D内时$f_Y(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-y}$, 在区域$D$外时$f_Y(y)=0$

即有

$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

解 37. 记$D:\{(x,y)||x+y|\le 1,|x-y|\le 1\}$.

(1). 由于(X,Y)在D上服从均匀分布, 故$f(x,y)=\dfrac{1}{|D|}$, 其中$f(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的联合密度函数,

$|D|$为区域D的面积. 则$f(x,y)=\dfrac{1}{2}$.

在$-1\le x<0$时, $f_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-x-1}^{x+1}\frac{1}{2}dy=x+1$

在$0\le x\le 1$时, $f_X(x)=\displaystyle\int_{-infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{x-1}^{-x+1}\frac{1}{2}dy=1-x$

即:

$$f_X(x)=\begin{cases}x+1 & -1\le x<0\\ 1-x & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

同理有:

$$f_Y(y)=\begin{cases}y+1 & -1\le y<0\\ 1-y & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

(2). 显然有$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$, 故X,Y不独立.

(3). $X=x$时, 由$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$, 有:

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-x)} & x-1\le y\le -x+1,\ 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

解 58. *(1)*. X,Y的边缘密度函数分别为:

当$|x|<1$时, $f_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}dy=\frac{1}{2}$. 当$|x|\ge 1$时, $f_X(x)=0$

即:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & |x|<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

同理有

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & |y|<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

而$f_X(x)f_Y(y)=\dfrac{1}{4}\ne f(x,y)$, 故$X,Y$不独立.

(2). 令$G(x,y)=P(X^2\le x,Y^2\le y)$, 由于$P(X^2\le x)=P(-\sqrt{x}\le X\le\sqrt{x})$

$P(Y^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le Y\le\sqrt{y})$. 即:

$0\le x<1,\ 0\le y<1$时, $G(x,y)=\displaystyle\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(u,v)dudv$

$0\le x<1,\ y\ge 1$时, $G(x,y)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(u,v)dudv$

$x\ge 1,\ 0\le y<1$时, $G(x,y)=\displaystyle\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{-1}^{1}f(u,v)dudv$

$x\ge 1,\ y\ge 1$时, $G(x,y)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(u,v)dudv$

即得:

$$G(x,y)=\begin{cases}\sqrt{xy} & 0\le x<1,0\le y<1\\ \sqrt{x} & 0\le x<1,y\ge 1\\ \sqrt{y} & 0\le y<1,x\ge 1\\ 1 & x\ge 1,y\ge 1\end{cases}$$

而$G_X(x)=P(X^2\le x)=P(-\sqrt{x}\le X\le\sqrt{x})$, $G_Y(y)=P(Y^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le Y\le\sqrt{y})$, 故:

$$G_X(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

$$G_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{y} & 0\le y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$$

显然有$G(x,y)=G_X(x)G_Y(y)$, 故X^2,Y^2相互独立.

注：以上通过分布函数求密度函数，也可利用（随机向量）密度变换公式求得（联合）密度函数。

解 64. *(1).* 由分布函数的定义有$F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$. 即得:

$\begin{cases}a-\frac{\pi}{2}b=0\\ a+\frac{\pi}{2}b=1\end{cases}$ 解得$a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{\pi}$

(3). 设随机变量Y的分布函数为$G(Y)=P(Y\le y)$. 则有:

$G(y)=P(3-\sqrt[3]{X}\le y)=P(X\ge(3-y)^3)=1-P(X\le(3-y)^3)+P(X=(3-y)^3)=1-P(X\le(3-y)^3)$

而$P(X\le(3-y)^3)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arctan(3-y)^3$, 故$G(y)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\arctan(3-y)^3$

则随机变量Y的密度函数为$p(y)=(G(y))'=\dfrac{3(3-y)^2}{\pi[1+(3-y)^6]}$

解 65. 由于$X\sim U(0,1)$, 故随机变量X的密度函数为$f(x)=1$. 分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x & 0\le x\le 1\\ 1 & x>1\end{cases}$

(1). 设随机变量Y_1的分布函数为$G_1(y)$. 则:

$G_1(y)=P(Y_1\le y)=P(e^X\le y)=P(X\le\ln y)=F(\ln y)$. 故 $G_1(y)=\begin{cases}0 & 0<y<1\\ \ln y & 1\le y\le e\\ 1 & y>e\end{cases}$

则随机变量Y_1的密度函数为 $g_1(y)=(G_1(y))'=\begin{cases}\dfrac{1}{y} & 1\le y\le e\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(2). 设随机变量Y_2的分布函数为$G_2(y)$. 则：$G_2(y)=P(Y_2\le y)=P(X^{-1}\le y)$

$Y=X^{-1}$, 解得$X=Y^{-1}$, 故$g_1(y)=f(y^{-1})|y^{-1}|'$

$X<0$时, $g_1(y)=0$, $y\in(-\infty,0)$. $0<X<1$时, $g_2(y)=\dfrac{1}{y^2}$, $y\in(1,+\infty)$. $X\ge 1$时, $g_3(y)=0$.

故综上, 令$p(y)=\sum\limits_{i=1}^{3}p_i(y)$, 得随机变量$Y$的密度函数为:

$$p(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2} & y>1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

(3). 设随机变量Y_3的分布函数为$G_3(y)$. 则:

$G_3(y)=P(Y_3\le y)=P(-\dfrac{1}{\lambda}\ln X\le y)=P(X\ge e^{-\lambda y})=1-P(X\le e^{-\lambda y})=1-F(e^{-\lambda y})$

$G_3(y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda y} & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$
则随机变量Y_3的密度函数为

$$g_3(y)=(G_3(y))'=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y} & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

解 68. 由于随机变量X服从参数为1的指数分布，则 $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$, $F(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$

(1). 设随机变量Y_1的分布函数为$G_1(y)$. 则
$G_1(y)=P(Y_1\leq y)=P(X^2\leq y)=P(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y})=F(\sqrt{y})-F(-\sqrt{y})=1-e^{-\sqrt{y}}$, 其中$y>0$.
$y\leq 0$时, $G_1(y)=0$. 故随机变量Y_1的密度函数为

$$g_1(y)=(G_1(y))'=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}} & y>0\\ 0 & y\leq 0\end{cases}$$

(2). 设随机变量Y_2的分布函数为$G_2(y)$. 则
$G_2(y)=P(Y_2\leq y)=P(1-e^{-X}\leq y)=P(X\leq-\ln(1-y))$. 故可得

$$G_2(y)=\begin{cases}y & 0<y<1\\ 0 & y\leq 0\end{cases}$$

故随机变量Y_2的密度函数为

$$g_2(y)=(G_2(y))'=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & y\leq 0\end{cases}$$

解 71.

解法1:

由于随机变量X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$

当$X\leq 0$时, $Y=-X^2$, 解得$X=-\sqrt{-Y}$, 故此时$p_1(y)=f(-\sqrt{-y})|-\sqrt{-y}|'=0,\ y\in(-\infty,0)$
当$0<X<1$时, $Y=-X^2$, 解得$X=\sqrt{-Y}$, 故此时$p_2(y)=f(\sqrt{-y})|\sqrt{-y}|'=\dfrac{\lambda}{2\sqrt{-y}}e^{-\lambda\sqrt{-y}},\ y\in(-1,0)$
当$X\geq 1$时, $Y=X$, 解得$X=Y$, 故此时$p_3(y)=f(y)|y|'=\lambda e^{-\lambda y},\ y\in[1,+\infty)$
故综上, 令$p(y)=\sum_{i=1}^{3}p_i(y)$, 得随机变量$Y$的密度函数为:

$$p(y)=\begin{cases}\frac{\lambda}{2\sqrt{-y}}e^{-\lambda\sqrt{-y}} & -1<y<0\\ \lambda e^{-\lambda y} & y\geq 1\end{cases}$$

解法2:

随机变量X的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\lambda e^{-\lambda x} & x>1\\ 0 & x\leq 1\end{cases}$

$$
\begin{aligned}
P(Y\le y) &= P(X\le y)(X\ge 1\text{时})+P(-X^2\le y)(X<1\text{时})\\
&= P(1\le X\le y)+P(\sqrt{-y}\le X<1)+P(X\le -\sqrt{-y})\\
&= P(X\le y)(y\in(1,+\infty))-P(X<1)+(P(X<1)-P(X<\sqrt{-y}))(y\in(-1,0))\\
&\quad +P(X\le -\sqrt{-y})(y\in(-\infty,0))\\
&= (1-e^{-\lambda y})(y\in(1,+\infty))-(1-e^{-\lambda\sqrt{-y}})(y\in(-1,0))
\end{aligned}
$$

即随机变量Y的分布函数$G(y)=P(Y\le y)$为

$$
G(y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda y} & y>1\\ 1-e^{-\lambda\sqrt{-y}} & -1<y<0\end{cases}
$$

对$G(y)=P(Y\le y)$求导得密度函数$p(y)$:

$$
p(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y} & y>1\\ \dfrac{\lambda}{2\sqrt{-y}}e^{-\lambda\sqrt{-y}} & -1<y<0\end{cases}
$$