



运筹学基础

讲者：顾乃杰 教授、黄章进 副教授

计算机科学与技术学院

2020/5/4

整数线性规划

Chap. 6 Integer Linear Programming



主要内容

- **6.1** 整数线性规划问题的提出
- **6.2** 分支定界解法
- **6.3** 割平面解法
- **6.4** 0-1型整数线性规划
- **6.5** 指派问题
- **6.6** 使用计算机工具求解本章问题

6.1 整数线性规划问题的提出

- **整数规划**（IP: Integer Programming）是最近二十年来发展起来的规划论的一个分支。
- 整数规划是要求全部或部分决策变量为整数的规划，目前分为线性和非线性两类。
- 根据变量的取值性质可分为：
 - 当要求全部变量取整数值的称为**纯整数规划**（Pure Integer Programming）或**全整数规划**（All Integer Programming）；
 - 仅一部分变量限制为整数称为**混合整数规划**（Mixed Integer Programming）；
 - 整数规划一种特殊的形式是**0-1 整数规划**（Binary Integer Programming），它的变量取值仅限于0或1。

6.1 整数线性规划问题的提出

不考虑变量的所有整数或 0-1 约束条件而得到的线性规划问题称为原整数规划问题的**LP松弛问题**

- 任何**IP**都可以看做是**LP**松弛问题加上其他的约束条件——整数约束条件或**0-1**约束条件。**IP: 整数规划**
- 因此**LP**松弛问题是**IP**的约束性较少或比较松弛的版本。这意味着**IP**的可行域必定包含在对应的**LP**松弛问题的可行域内。
- 对于求**max**问题的**IP**，这意味着：

LP松弛问题的最优值 $z' \geq$ **IP**问题的最优值 z

6.1 整数线性规划问题的提出

- **例1** 某厂拟用集装箱托运甲乙两种货物，每箱的体积、重量、可获利润以及托运受限制如下表。问两种货物各托运多少箱，可使获得利润最大？

货物	体积 每箱 (米 ³)	重量 每箱 (百斤)	利润 每箱 (百元)
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24	13	

- 解：设 x_1 , x_2 分别为甲、乙两种货物的托运箱数，易得**纯整数线性规划模型**：

$$\max z = 20x_1 + 10x_2 \cdots \cdots (1)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 24 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 13 \cdots \cdots (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0 \cdots \cdots (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \text{ 是整数} \cdots \cdots (5) \end{cases}$$

左式与线性规划问题的区别仅在于最后的约束条件(5)。

6.1 整数线性规划问题的提出

— 暂不考虑条件(5)，求解LP松弛问题，得最优解为：

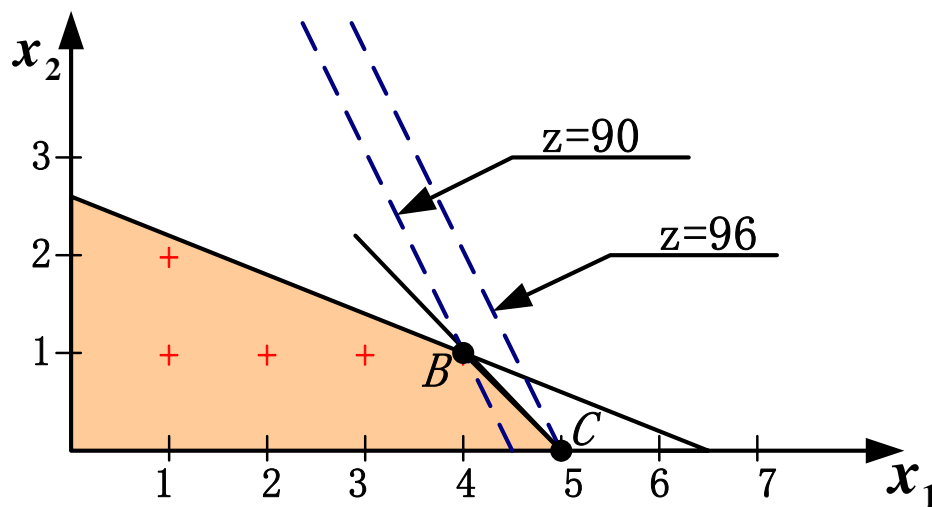
$$x_1=4.8, x_2=0, \max z=96$$

因为 x_1 表示的是托运甲种货物的箱数，所以不符合整数约束条件(5)的要求。

- 是不是可以把所得的非整数最优解经过“化整”就可得到合于条件(5)的整数最优解呢？
 - 如果将4.8的小数部分进位得到5，则 $5 \times 5 > 24$ ，不满足体积限制约束(2)，不是可行解；
 - 如果将4.8的小数部分舍去得到4，则利润 $z=80$ ，可行解但不是最优解。
 - 因为当 $x_1=4, x_2=1$ 时， $z=90$ 才是最优解。

6.1 整数线性规划问题的提出

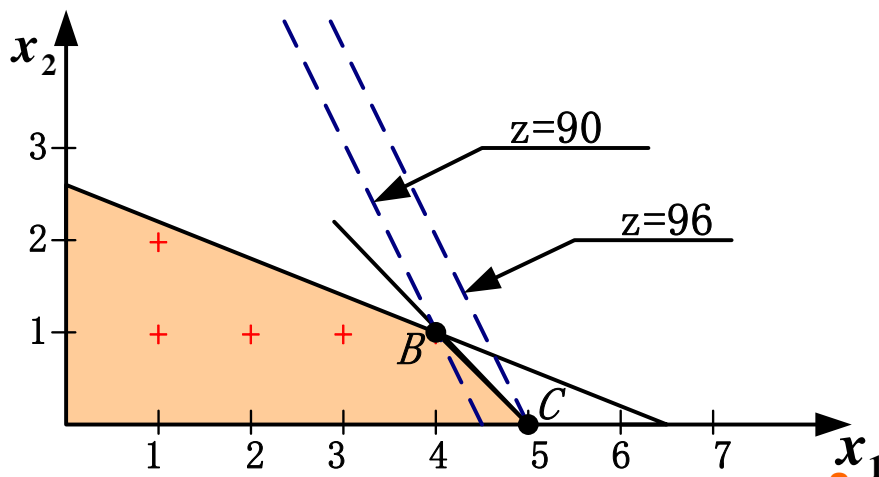
- 图中橙色区域为LP松弛问题的可行域，最优解在C(4.8,0)点达到
- 图中“+”号点表示可行整数解，可见纯整数规划问题的可行域就是其LP松弛问题可行域中的整数点集（或格点集）
- 为了满足题中要求，表示目标函数的等值线必须向原点平行移动，直到第一次碰到“+”号点B(4,1)点。这样，目标函数z的等值线由z=96变为z=90。



6.1 整数线性规划问题的提出

由上例看来，将其相应的线性规划的最优解“化整”来解原整数规划，虽然容易想到，但是常常得不到整数规划的最优解，甚至根本不是可行解。

- 但由上例也可以看出，如果一个纯IP的LP松弛问题的可行域是有界的，那么这个IP的可行域将由有限数量的点组成。
- 理论上通过枚举每个可行点的 z 值，然后确定具有最大 z 值的可行点，即可求解这样的IP问题。但是，即使可行域是有界的，当可行解较多时，枚举法的时间代价也难以承受，需要更好的方法。



6.2 分支定界解法

- 分支定界解法 (**Branch and Bound Method**)
 - 可用于解纯整数或混合的整数规划问题，上世纪六十年代初由 **Land Doig**和**Dakin**等人提出。
 - 设有最大化整数线性规划问题A，与它相应的线性规划记为问题B。从解问题B开始，若其最优解不符合A的整数条件，那么B的最优目标函数必是A的最优目标函数值 z^* 的**上界**，记作 \bar{z} ；而A的任意可行解的目标函数值将是 z^* 的一个**下界** \underline{z} 。
 - **分支定界法**就是将B的可行域分成子区域(称为**分支**)的方法，逐步减小 \bar{z} 和增大 \underline{z} ，最终求到 z^* 。
 - **分治思想**

6.2 分支定界解法

- 分支定界法求解整数规划（**最大化**）问题的步骤：
 - 1) 求整数规划问题**A**相应的线性规划问题**B**的最优解：
 - **B**没有可行解，说明**A**也没有可行解，计算结束；
 - **B**有最优解且符合问题**A**的整数条件，则**B**的最优解就是**A**的最优解，计算结束；
 - **B**有最优解，但不符合**A**的整数条件，记它的目标函数值为 \bar{z}_0 。
 - 2) 用**观察法**找问题**A**的一个整数可行解，一般可取 $x_j=0, j=1, \dots, n$ 试探，求得其目标函数值，并记作 \underline{z} 。以 z^* 表示问题**A**的最优目标函数值；这时有 $\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}_0$

6.2 分支定界解法

– 3) 进行迭代

第一步：**分支**，在B的最优解中任选一个不符合整数条件的**分支变量** x_j ，其值为 b_j ，以 $[b_j]$ 表示小于 b_j 的最大整数。构造两个约束条件

$$x_j \leq [b_j] \text{ 和 } x_j \geq [b_j] + 1$$

将这两个约束条件，分别加入问题B，求两个后继规划问题 B_1 和 B_2 。不考虑整数条件求解这两个后继问题。

第二步：**定界**，以每个后继问题为一分支标明求解的结果，与其他问题的解比较，找出最优目标函数值最大者作为新的**上界** \bar{z} 。从已符合整数条件的各分支中，找出目标函数值为最大者作为新的**下界** \underline{z} ；若无可行解， $\underline{z} = 0$ 。

第三步：**比较与剪支**，各分支的最优目标函数值中若有小于下界 \underline{z} 者，则剪掉这支(用打×表示)，即以后不再考虑了。若大于 \underline{z} ，且不符合整数条件，则重复第一、二步。一直到最后得到 $z^* = \underline{z}$ 为止，得最优整数解 x_j^* , $j=1, \dots, n$ 。

6.2 分支定界解法

• 例2 求解整数规划问题

$$\max z = 40x_1 + 90x_2 \quad ①$$

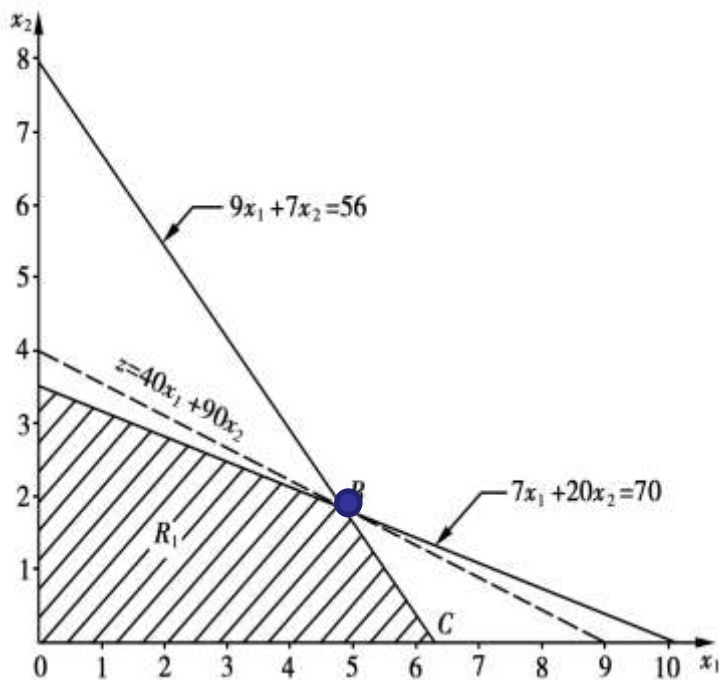
$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \leq 56 & ② \\ 7x_1 + 20x_2 \leq 70 & ③ \\ x_1, x_2 \geq 0 & ④ \\ x_1, x_2 \text{为整数} & ⑤ \end{cases}$$

— 解：先不考虑条件⑤，即解相应的线性规划B式①~④，得最优解

$$x_1=4.81, x_2=1.82, z_0=356$$

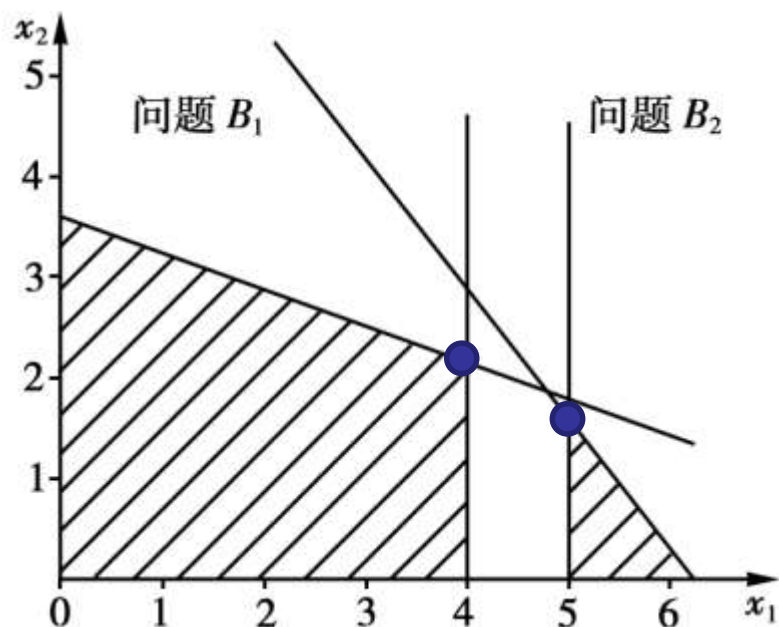
— 可见它不符合整数条件⑤。这时 $z_0=356$ 是问题A的最优目标函数值 z^* 的上界，记作 $z_0 = \bar{z}$ 。

— 而 $x_1=0, x_2=0$ 时，显然是问题A的一个整数可行解，这时 $z=0$ ，是 z^* 的一个下界，记作 $\underline{z}=0$ ，即 $0 \leq z^* \leq 356$



6.2 分支定界解法

- 分支定界法是基于LP松弛问题（问题B）的最优解中非整数变量进行分支的，如 $x_1=4.81$ 。
- 基于分支变量 x_1 ，在原问题中增加两个约束条件： $x_1 \leq 4$ 和 $x_1 \geq 5$ ，将原问题分解为两个子问题 B_1 和 B_2 (即两支)。



- 给每支增加一个约束条件后，如图所示，并不影响问题A的可行域。
- 仍然不考虑整数条件约束，解问题 B_1 和 B_2 ，得到最优解为：

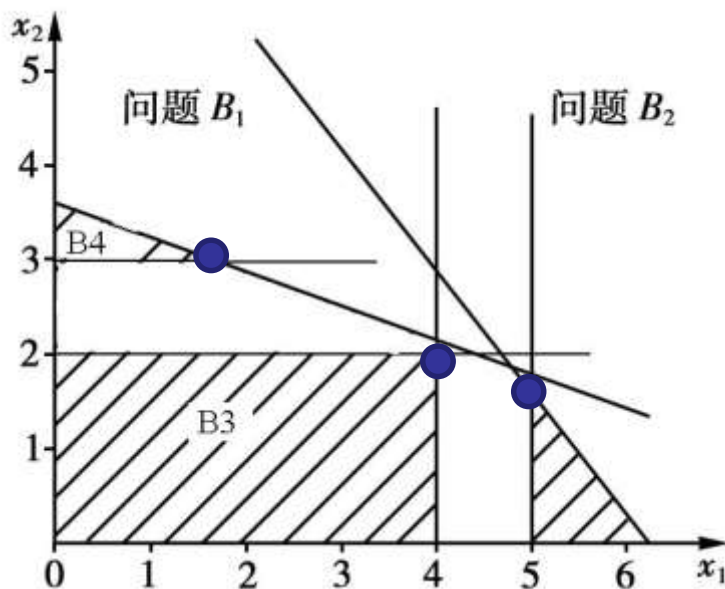
问题 B_1 : $x_1=4.00$, $x_2=2.10$, $z_1=349$

问题 B_2 : $x_1=5.00$, $x_2=1.57$, $z_2=341$

- 显然，仍没有得到全部变量是整数的解。因 $z_1 > z_2$ ，故将 \bar{z} 改为 349，从而 $0 \leq z^* \leq 349$

6.2 分支定界解法

继续对问题 B_1 和 B_2 进行分解。因 $z_1 > z_2$ ，故先分解 B_1 为两支。基于分支变量 x_2 ，增加条件 $x_2 \leq 2$ ，称为问题 B_3 ；增加条件 $x_2 \geq 3$ ，称为问题 B_4 。相当于再去掉 $2 < x_2 < 3$ 之间的区域，进行第二次迭代。



– 不考虑整数条件约束，解问题 B_3 和 B_4 ，得到最优解为：

问题 B_2 : $x_1=5.00$, $x_2=1.57$, $z_2=341$

问题 B_3 : $x_1=4.00$, $x_2=2.00$, $z_3=340$

问题 B_4 : $x_1=1.42$, $x_2=3.00$, $z_4=327$ (剪支)

– 可见问题 B_3 的解已都是整数，它的目标函数值 $z_3=340$ 取为 \underline{z}

– 从而， $340 \leq z^* \leq 341$

– 因 $\underline{z} = z_3 > z_4$ ，问题 B_4 没有分解的必要 (剪支)

6.2 分支定界解法

– 继续对问题 B_2 进行分解，增加两个约束条件 $x_2 \leq 1$ 和 $x_2 \geq 2$ ，得到问题 B_5 和 B_6 。

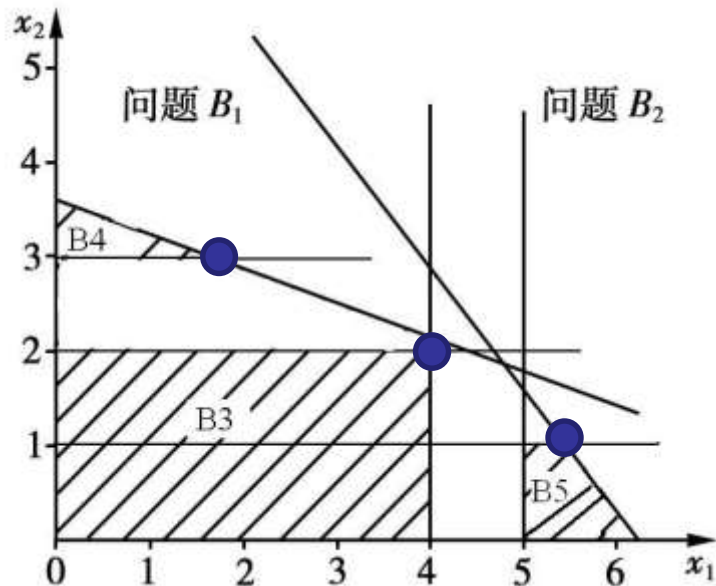
– 不考虑整数条件约束，解问题 B_5 和 B_6 ，得到最优解为：

问题 B_3 ： $x_1=4.00$ ， $x_2=2.00$ ， $z_3=340$

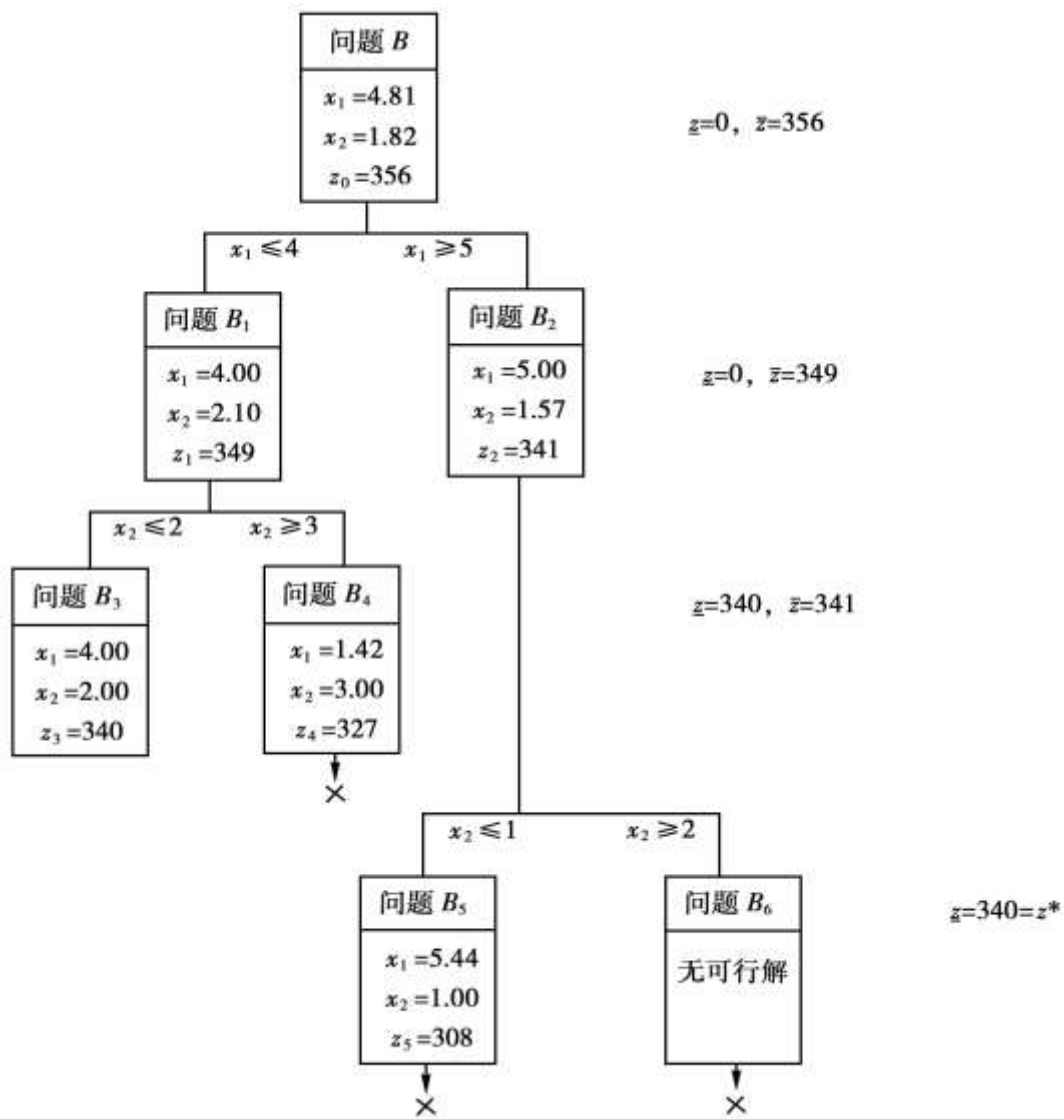
问题 B_5 ： $x_1=5.44$ ， $x_2=1.00$ ， $z_5=308$ ； 非整数解，且 $z_5 < 340$ (剪支)

问题 B_6 ： 无可行解 (剪支)

– 于是可以断定 $z_3 = \underline{z} = z^* = 340$ ，问题 B_3 的解 $x_1=4.00$ ， $x_2=2.00$ ， $z_3=340$ 为整数规划问题A的最优整数解



6.2 分支定界解法



6.2 分支定界解法

- 它比穷举法优越，因为它仅在一部分可行解的整数解中寻求最优解，计算量比穷举法小。
 - 但是，若变量数目很大，其计算工作量也是很大的。
- 问题：给定多个可供选择的子问题时，如何确定下一个求解的子问题以及分支变量？
 - 仅有一些启发式的想法，但理论上仍没有一个统一的结果
- 分支定界法可扩展到求解混合整数规划问题：
 - 算法中永远不会选择连续型变量作为分支变量
 - 求解一个子问题之后，如果在最优解中对应离散变量的值都是整数并且目标函数值改进了当前目标函数的界，那么用该子问题的最优值作为目标函数新的界。

6.3 割平面解法

- 割平面法是 R.E.Gomory 提出来的，因此又称为 Gomory 的割平面法。
 - 割平面解法也是将求解整数线性规划的问题化为一系列普通线性规划问题求解，这一点与分支定界法的相同。
 - 本节仅讨论纯整数规划的情形
- 割平面解法的思路：
 - 首先不考虑变量 x_i 是整数这一条件，仍然先解相应的 LP 松弛问题
 - 若得到非整数的最优解，则增加能割去非整数解的线性约束条件 (用几何术语，称为割平面)，使得由原可行域被切割掉一部分
 - 切割掉的部分只包含非整数解，即没有切割掉任何整数可行解。
 - 割平面法指出怎样找到适当的割平面（不见得一次就找到），使切割后的可行域，它的一个有整数坐标的极点恰好是问题的最优解。

6.3 割平面解法

• 例3 求解

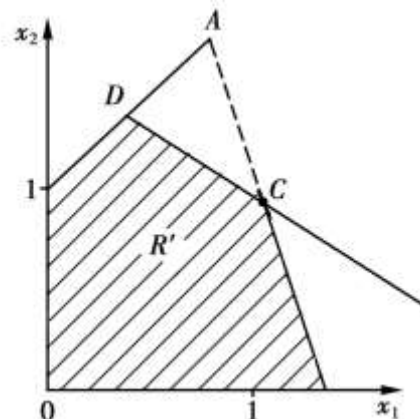
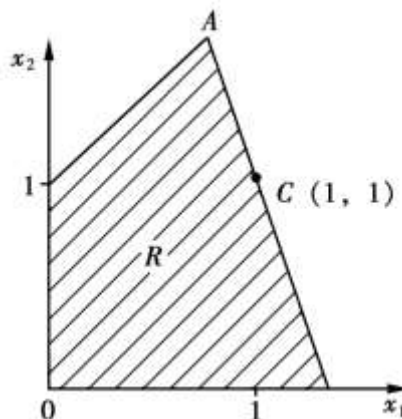
$$\max z = x_1 + x_2 \quad ①$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 & ② \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 & ③ \\ x_1, x_2 \geq 0 & ④ \\ x_1, x_2 \text{ 整数} & ⑤ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 4 & ③ \\ x_1, x_2 \geq 0 & ④ \\ x_1, x_2 \text{ 整数} & ⑤ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0 & ④ \\ x_1, x_2 \text{ 整数} & ⑤ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \text{ 整数} & ⑤ \end{cases}$$



— 不考虑条件⑤，容易求得相应的线性规划的最优解

$$x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = \frac{7}{4}, \max z = \frac{10}{4}$$

为域R的极点A，不满足整数条件。

— 如能找到像CD那样的直线去切割域R，去掉三角形域ACD，那么C点(1,1)就是域R'的一个极点。如在R'上求解①~④，而得到的最优解又恰巧在C点，就得到原问题的整数解。

• 解法的关键：怎样构造一个这样的“割平面”CD？



6.3 割平面解法

- 构造切割方程的步骤:

- 1) 令 x_i 是LP松弛问题最优解中为分数值的一个基变量, 由单纯形表得最终表得到

$$x_i + \sum_k a_{ik} x_k = b_i \quad (1)$$

其中, $i \in Q$ (Q 为基变量下标的集合), $k \in K$ (K 为非基变量下标的集合)

- 2) 将 b_i 和 a_{ik} 都分解成整数部分 N 与非负真分数 f 之和, 即

$$b_i = N_i + f_i, \quad \text{其中 } 0 < f_i < 1$$

$$a_{ik} = N_{ik} + f_{ik}, \quad \text{其中 } 0 \leq f_{ik} < 1$$

而 N 表示不超过 b 的最大整数。例如: 若 $b = -0.45$, 则 $N = -1, f = 0.55$

代入式(1), 移项得到

$$x_i + \sum_k N_{ik} x_k - N_i = f_i - \sum_k f_{ik} x_k \quad (2)$$

6.3 割平面解法

$$x_i + \sum_k N_{ik} x_k - N_i = f_i - \sum_k f_{ik} x_k \quad (2)$$

- **3)** 所有变量（包括松弛变量）都是非负整数，所以上式左端是整数，而右端 $\leq f_i < 1$ ，所以有

$$f_i - \sum_k f_{ik} x_k \leq 0 \quad (3)$$

这就是一个**切割方程**（或割平面）。

- 一些说明：

- 切割方程没有割掉整数解，这是因为**LP**松弛问题的任意整数可行解都满足该不等式。
- 切割方程只是得到整数解的一个**必要条件**，使得最优解向满足整数要求的方向移动。
- **重要假设**：所有变量（包括松弛变量和剩余变量）都要求是（非负）整数。
 - 引入松弛变量和剩余变量之前，在原始约束两边乘以适当常数，使相关的系数都变为整数。

6.3 割平面解法

- 在例3原问题的两个不等式中加入非负松弛变量 x_3 、 x_4 ，使两式变成等式约束：

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad (6)$$

$$3x_1 + x_2 + x_4 = 4 \quad (7)$$

$$\max z = x_1 + x_2 \quad (1)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 4 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \text{ 整数} & (5) \end{cases}$$

- 不考虑整数条件⑤，用单纯形表可解得非整数最优解：

	c_j			1	1	0	0
	C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
初始 计算 表	0	x_3	1	-1	1	1	0
	0	x_4	4	3	1	0	1
	$c_j - z_j$		0	1	1	0	0
最终 计算 表	1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4
	1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4
	$c_j - z_j$		-5/2	0	0	-1/2	-1/2

6.3 割平面解法

— 考虑非整数变量，由最终计算表得到相应的关系式：

$$x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4}$$

$$x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{7}{4}$$

— 将系数和常数项都分解成整数和非负真分数之和，移项得到：

$$(1+0)x_1 + (-1 + \frac{3}{4})x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 0 + \frac{3}{4}$$

$$x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 1 + \frac{3}{4}$$



$$x_1 - x_3 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \right)$$

$$x_2 - 1 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \right)$$

— 考虑整数条件， x_1 和 x_2 为非负整数，由条件⑥、⑦可知 x_3 、 x_4 也都是非负整数。那么从上式得知，因为等式左边为整数，而等式右边的括号内都是非负数，所以等式右边必定是非正数。就是说，右边的整数最大是零。

6.3 割平面解法

— 因此，整数条件⑤可由下式代替：

$$\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \right) \leq 0 \quad \text{即} \quad -3x_3 - x_4 \leq -3$$

— 这就得到了一个**切割方程**，将它作为增加约束条件，引入松弛变量 x_5 ，得到等式：

$$-3x_3 - x_4 + x_5 = -3$$

— 将该约束方程加到上面得到的最终计算表中，得到下表：

c_j			1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4	0
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4	0
0	x_5	-3	0	0	[-3]	-1	1
$c_j - z_j$		-5/2	0	0	-1/2	-1/2	0

6.3 割平面解法

- 从上表的**b**列中可以看出，这时得到的是非可行解，于是需要用**对偶单纯形法**继续进行计算，选择 **x_5** 为**换出变量**，计算

$$\theta = \min_j \left(\frac{c_j - z_j}{a_{lj}} \mid a_{lj} < 0 \right) = \min \left(\frac{-1/2}{-3}, \frac{-1/2}{-1} \right) = \frac{1}{6}$$

- 将 **x_3** 作为**换入变量**，进行迭代得到下表，由于 **x_1** 、 **x_2** 的值都是整数，解题完成。

c_j			1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	1	1	0	0	1/3	1/12
1	x_2	1	0	1	0	0	1/4
0	x_3	1	0	0	1	-1	-1/3
$c_j - z_j$		-2	0	0	0	-1/3	-1/6

6.3 割平面解法

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad (6)$$

$$3x_1 + x_2 + x_4 = 4 \quad (7)$$

- 考察新的约束条件（**切割方程**）：

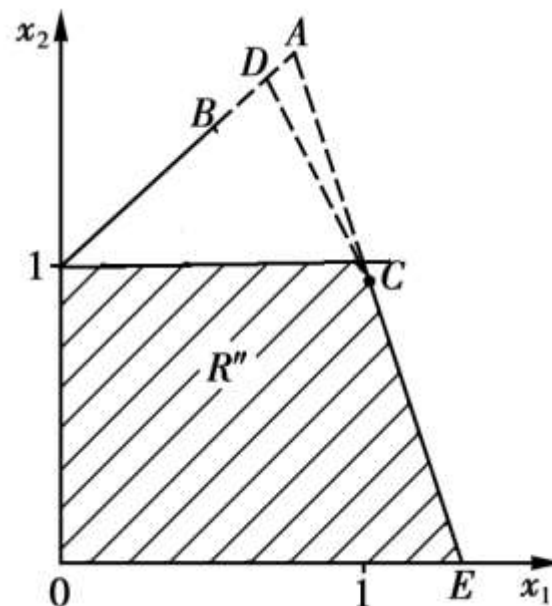
$$-3x_3 - x_4 \leq -3$$

- 如果用 x_1 、 x_2 表示，由⑥、⑦式得

$$3(1+x_1-x_2)+(4-3x_1-x_2) \geq 3$$

- 得： $4 - 4x_2 \geq 0$ ，即 $x_2 \leq 1$

- 新的可行域**为包括平行于 x_1 轴的直线 $x_2=1$ 和这直线下的可行区域，整数点都在其中，没有被切割掉。



6.4 0-1型整数线性规划

- **0-1型整数规划**是整数规划中的特殊形式，它的变量 x_i 仅取值**0**或**1**。这时 x_i 称为**0-1变量**，或称**二进制变量**。

– x_i 仅取值**0**或**1**这个条件可由下述约束条件所代替：

$$\begin{cases} x_i \leq 1 \\ x_i \geq 0, \text{整} \end{cases}$$

- 如果变量 x_i 取其他范围的非负整数，可用二进制记数法将它用若干个**0-1**变量来表示：给定整数型变量 x ，有有限上界 u （即 $0 \leq x \leq u$ ），那么

$$x = 2^0 y_0 + 2^1 y_1 + 2^2 y_2 + \dots + 2^k y_k$$

- 其中 y_0, y_1, \dots, y_k 变量都是二进制变量，下标 k 是满足 $2^{k+1}-1 \geq u$ 的最小整数。

6.4.1 引入0-1变量的实际问题

• 1. 投资场所的选定——相互排斥的计划

- 例4 某公司拟在市东、西、南三区建立门市部。拟议中有7个位置（点） A_i ($i=1,2,\dots,7$) 可供选择，规定

在东区，由 A_1, A_2, A_3 三个点中至多选两个；

在西区，由 A_4, A_5 两个点中至少选一个；

在南区，由 A_6, A_7 两个点中至少选一个。

如选用 A_i 点的设备投资为 b_i 元，每年可获利 c_i 元，但投资总额不超过 B 元。问应选择哪几个点可使年利润最大？

- 分析：引入0-1变量 x_i ($i=1,2,\dots,7$)，令

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{当 } A_i \text{ 点被选用} \\ 0, & \text{当 } A_i \text{ 点没被选用} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 7$$

- 于是问题可列成：

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{i=1}^7 c_i x_i \\ \begin{cases} \sum_{i=1}^7 b_i x_i \leq B \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_4 + x_5 \geq 1 \\ x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_i = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases} \end{aligned}$$

6.4.1 引入0-1变量的实际问题

• 2. 相互排斥的约束条件

— 例6.5 某厂拟用集装箱托运甲乙两种货物，运货有两种方式，车运方式每箱的体积分别为5米³和4米³，总体积不得超过24米³；船运方式每箱体积分别为7米³和3米³，总体积不得超过45米³。

— 分析：运货有两种方式：车运和船运，这两条件是互斥的，即一单位货物如采用船运就不会同时采用车运。

— 引入0-1变量 y ，令

$$y = \begin{cases} 0, & \text{采用车运方式} \\ 1, & \text{采用船运方式} \end{cases}$$

— 得到约束条件：

$$5x_1 + 4x_2 \leq 24 + yM$$

$$7x_1 + 3x_2 \leq 45 + (1 - y)M$$

— 其中 M 是非常大的数， y 的引入不必出现在目标函数内，因此目标函数表达式中 y 的系数为0。

6.4.1 引入0-1变量的实际问题

- 如果有 m 个互相排斥的约束条件(\leq 型):

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{in}x_n \leq b_i, \quad i=1,2,\dots,m$$

- 为了保证这 m 个约束条件只有一个起作用, 引入 m 个0-1变量 y_i ($i=1,2,\dots,m$)和一个充分大的常数 M , 而下面这一组 $m+1$ 个约束条件

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{in}x_n \leq b_i + y_i M \quad i=1,2,\dots, m \quad (6-13)$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_m = m - 1 \quad (6-14)$$

就符合上述要求。因为 m 个 y_i 中只有一个能取0值。

6.4.1 引入0-1变量的实际问题

• 3. 关于固定费用的问题 (Fixed Cost Problem)

- 在讨论线性规划时，有些问题是要求成本最小，那时总设固定成本为常数，并在线性规划模型中不必明显列出。但有些固定费用的问题不能用一般线性规划来描述，可改变为混合整数规划问题来解决。
- **例5** 某工厂为了生产某种产品，有三种不同的生产方式可供选择，如选定的生产方式投资高（如选用自动化程度高的设备），由于产量大，因为分配到每件产品的变动成本就低；反之，如选定的生产方式投资低，将来分配到每件产品的变动成本可能增加。

- 分析：

x_j 表示采用第 j 种方式时的产量；

c_j 表示采用第 j 种方式时每件产品的变动成本；

k_j 表示采用第 j 种方式时的固定成本。

采用各种生产方式的总成本分别为：

$$P_j = \begin{cases} k_j + c_j x_j, & \text{当 } x_j > 0 \\ 0, & \text{当 } x_j \leq 0 \end{cases} \quad j = 1, 2, 3$$

6.4.1 引入0-1变量的实际问题

- 在构成目标函数时，为了统一在一个问题中讨论，引入**0-1**变量 y_j ，令：

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{当采用第}j\text{种生产方式, 即}x_j > 0\text{时} \\ 0, & \text{当不采用第}j\text{种生产方式, 即}x_j = 0\text{时} \end{cases}$$

- 上式可由下述**3**个线性约束条件规定：

$$x_j \leq y_j M, \quad j = 1, 2, 3$$

其中**M**是个充分大的常数。上面的约束条件说明，当 **$x_j > 0$** 时 **y_i** 必须为**1**；当 **$x_j = 0$** 时 **y_i** 为**0**才有意义。

- 于是目标函数

$$\min z = (k_1 + c_1 x_1) y_1 + (k_2 + c_2 x_2) y_2 + (k_3 + c_3 x_3) y_3$$



6.4.2 0-1型整数规划的解法

- 0-1型整数规划的解法

- 在用穷举法时，需要检查变量取值的 2^n 个组合，若变量个数 n 较大（例如 $n>10$ ），这几乎是不可能的。因此常设计一些方法只检查变量取值的一部分就能求到问题的最优解，称为隐枚举法（Implicit Enumeration）。
- 分支定界法也是一种隐枚举法。

6.4.2 0-1型整数规划的解法

— 例6 解整数规划

$$\max z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \quad \textcircled{1}$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 4 \quad \textcircled{2}$$

$$x_1 + x_2 \leq 3 \quad \textcircled{3}$$

$$4x_1 + x_3 \leq 6 \quad \textcircled{4}$$

$$x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ 或 } 1 \quad \textcircled{5}$$

- 解：先通过试探法找出一个可行解，易看出上述规划问题的解 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ 就是符合上述约束条件的解，此时相应的目标函数值 $z = 3$ 。
- 因为是求极大化问题的最优解，希望 $z \geq 3$ ，于是增加约束条件：

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 3 \quad \textcircled{6}$$

- 上面后加的约束条件称为过滤条件 (Filtering Constraint)。这样原问题的线性约束条件就变成5个。
- 若用枚举方法，3个变量共有 $2^3 = 8$ 个解，原来4个约束条件共需 32 次运算，现在需要40次运算！

6.4.2 0-1型整数规划的解法

- 现在增加了过滤条件⑤，将5个条件按照①~⑤排好，对每个解依次代入约束条件左侧求出数值，看看是否符合不等式条件，如某一条件不合适，同行以下各条件就不必再检查，因而减少了运算次数。

点	条件					满足条件 是(✓)否(✗)	z值
	①	②	③	④	⑤		
(0,0,0)	0					✗	
(0,0,1)	5	-1	1	0	1	✓	5
(0,1,0)	-2					✗	
(0,1,1)	3	1	5			✗	
(1,0,0)	3	1	1	1	0	✓	3
(1,0,1)	8	0	2	1	1	✓	8
(1,1,0)	1					✗	
(1,1,1)	6	2	6			✗	

- 可以看出，实际只做了24次运算，求得最优解： $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$ ， $\max z = 8$ 。
- 在计算过程中，若遇到z值已超过条件①右边的值，应修改条件①，使右边为迄今为止最大者，然后继续做。

6.4.2 0-1型整数规划的解法

- 例如，当检查点(0,0,1)时， $z=5(>3)$ ，所以应将条件⑥换成：

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 5$$

这种对过滤条件的改进，更可减少计算量。

- 应该注意的是，一般常常重新排列 x_i 的顺序，使目标函数中的系数是**递增（不减）**的，这样最优解容易比较早的发现。再结合过滤条件的改进，更可使计算简化。
- 仍以上题为例：**变量顺序重排**后变为：

$$\begin{aligned} \max z &= -2x_2 + 3x_1 + 5x_3 \\ \begin{cases} -2x_2 + 3x_1 + 5x_3 \geq 3 & \text{⑥} \\ 2x_2 + x_1 - x_3 \leq 2 & \text{①} \\ 4x_2 + x_1 + x_3 \leq 4 & \text{②} \\ x_2 + x_1 \leq 3 & \text{③} \\ 4x_1 + x_3 \leq 6 & \text{④} \end{cases} \end{aligned}$$

6.4.2 0-1型整数规划的解法

求解

点 (x_2, x_1, x_3)	条件					满足条件 是(✓)否(✗)	z值
	①	②	③	④	⑤		
(0,0,0)	0					✗	
(0,0,1)	5	-1	1	0	1	✓	5

因为 $z=5(>3)$,

改进过滤条件, 继续进行。

点 (x_2, x_1, x_3)	条件					满足条件 是(✓)否(✗)	z值
	①	②	③	④	⑤		
(0,1,0)	3					✗	
(0,1,1)	8	0	2	1	1	✓	8

因为 $z=8(>5)$,

改进过滤条件, 继续进行。

z值已经无法改进, $\max z=8$

点 (x_2, x_1, x_3)	条件					满足条件 是(✓)否(✗)	z值
	①	②	③	④	⑤		
(1,0,0)	2					✗	
(1,0,1)	3					✗	
(1,1,0)	1					✗	
(1,1,1)	6					✗	