概率论与数理统计 B　第七周作业　3 月 31 日 周二

PB18151866 龚小航

4.26 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = 2(x-1),\ 1 < x < 2$,

试求随机变量 $Y = e^X$ 和 $Z = \frac{1}{X}$ 的数学期望.

解：由连续性随机变量函数期望的性质，可得：令 $t = x - 1, 0 < t < 1$

$$E(Y) = \int_1^2 e^x * 2(x-1)\,dx = 2e\int_0^1 te^t\,dt = 2e\left(te^t\Big|_{t=0}^{1} - \int_0^1 e^t\,dt\right) = 2e$$

$$E(Z) = \int_1^2 \frac{1}{x} * 2(x-1)\,dx = 2\int_1^2 \frac{x-1}{x}dx = 2 - 2\ln 2$$

4.29 某鲜花店为了迎接情人节的销售高峰期，决定购进一批玫瑰花. 已知在情人节期间，每出售一束玫瑰花会获利 a 元，若未售出，最终则会亏损 b 元，该店预测玫瑰花情人节期间的销售量(单位：束)会服从 $[m,n]$ 上的均匀分布. 试问为了平均获利最大，该店应购进多少束玫瑰花?

解：记随机变量 X：情人节期间，市场需要的鲜花数量。X服从 $[m,n]$ 上的均匀分布。

记随机变量 Y：店家实际进货数量

记随机变量 Z：店家实际获利

X为整数，共有 n − m + 1 个可能取值，所以 $P(X=x) = \frac{1}{n-m+1}\ \ (m \le x \le n,\ x \in \mathbb{Z})$

当$y < m\ or\ y > n$时，这两种情况必不是最大获利，不用考虑，因为有：

$$Z(y<m) = ay < am = Z(y=m); \qquad Z(y>n) = an - b(y-n) < an = Z(y=n)$$

因此，考虑 $m \le y \le n$：

$$E(Z) = E\left(\sum Z|(X=x)\right) = \sum_{i=m}^{n} z(y, x=i) * P(X=i)$$

其中，$z(y,x=i) = \begin{cases} ay & ,\ x \ge y \\ ai - b(y-i) = (a+b)i - by & ,\ x < y \end{cases}$

$$E(Z) = \sum_{i=m}^{y} z(y,x=i) * P(X=i) + \sum_{i=y+1}^{n} z(y,x=i) * P(X=i) = \frac{1}{n-m+1}\left(\sum_{i=m}^{y}\big((a+b)i - by\big) + \sum_{i=y+1}^{n} ay\right)$$

$$= \frac{(a+b)y^2 - \big(2na + 2mb - (a+b)\big)y + (a+b)m(m-1)}{-2(n-m+1)}$$

显然这是二次函数，当进货为$y = \frac{-b}{2a} = \frac{2na + 2mb - (a+b)}{2(a+b)} = \frac{na+mb}{a+b} - \frac{1}{2}$时，平均利润最大。

由于 y 应该取整数，上述结果不能保证恰好是整数，($a.b$也不一定是整数)所以实际进货应取离上述结果最近的整数，向上取整或向下取整。这是由二次函数的对称性决定的。

4.31. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad -\infty<x<\infty.$$

试求 $E[min\{|X|,1\}]$.

解：直接由连续性随机变量函数的期望公式，有：

$$E[min\{|X|,1\}]=\int_{-\infty}^{-1}1\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx+\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx+\int_{1}^{\infty}1\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx$$

$$=2\int_0^1\frac{x}{\pi(1+x^2)}dx+2\int_1^{\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=2\left(\frac{\ln(x^2+1)}{2\pi}\bigg|_{x=0}^{1}+\frac{\arctan x}{\pi}\bigg|_{x=1}^{\infty}\right)=\frac{\ln 2}{\pi}+\frac{1}{2}$$

4.32. (2014 年全国考研试题) 设随机变量 X 的分布为 $P(X=1)=P(X=2)=1/2$, 在 给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)$ （$i=1,2$).

(1) 求 Y 的分布函数；　　(2) 求期望 $E(Y)$.

解：(1) Y 服从 $(0,X)$ 上的均匀分布,所以$f(y)=1/X$，因此，在$0<y\le x$时，有：

$$F(y)=P(Y\le y)=P(Y\le y|X=1)P(X=1)+P(Y\le y|X=2)P(X=2)$$

$$F(y)=\begin{cases}0\ , & y<0\\ \frac{1}{2}*\frac{y-0}{1-0}+\frac{1}{2}*\frac{y-0}{2-0}=\frac{3}{4}y\ , & 0\le y\le 1\\ \frac{1}{2}*1+\frac{1}{2}*\frac{y-0}{2-0}=\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}\ , & 1<y\le 2\\ 1\ , & y>2\end{cases}$$

(2) 先求其概率密度函数$f(y)$：

$$f(y)=F'(y)=\begin{cases}0\ , & y<0\\ \frac{3}{4}\ , & 0\le y\le 1\\ \frac{1}{4}\ , & 1<y\le 2\\ 0\ , & y>2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}yf(y)\,dy=\int_0^1\frac{3}{4}y\,dy+\int_1^2\frac{1}{4}y\,dy=\frac{3}{4}$$

4.81. (1) 设随机变量 X 与 Y 独立，均服从泊松分布，参数分别为λ与μ. 对任何给定的非负整数$k \le m$，求 $P(X=k|X+Y=m)$ 及 $E(X|X+Y=m)$.

(2) 设随机变量 X 与 Y 独立，均服从二项分布 $B(n,p)$，对任何给定的非负整数$k \le m$,求 $P(X=k|X+Y=m)$ 及 $E(X|X+Y=m)$.

解：(1) 先写出X,Y服从的泊松分布：

$$P(X=i)=\frac{\lambda^i}{e^{\lambda}i!}\ ;\quad P(Y=j)=\frac{\mu^j}{e^{\mu}j!}$$

直接利用条件分布与联合分布的关系,并利用X,Y互相独立的条件：

$$P(X=k|X+Y=m)=\frac{P(X=k,X+Y=m)}{P(X+Y=m)}=\frac{P(X=k)P(Y=m-k)}{P(X+Y=m)}$$

其中，$P(X+Y=m)$利用全概率公式计算：

$$P(X+Y=m)=\sum_{t=0}^{\infty}P(Y=m-t)*P(X=t)=\sum_{t=0}^{m}P(Y=m-t)*P(X=t)=\sum_{t=0}^{m}\frac{\mu^{m-t}}{e^{\mu}(m-t)!}*\frac{\lambda^t}{e^{\lambda}t!}$$

$$=\frac{1}{m!\ e^{\mu+\lambda}}\sum_{t=0}^{m}\frac{m!}{t!\,(m-t)!}*\lambda^t\mu^{m-t}=\frac{1}{m!\ e^{\mu+\lambda}}\sum_{t=0}^{m}C_m^t*\lambda^t\mu^{m-t}$$

注意到这个求和式恰好是一个二项式展开，因此：

$$P(X+Y=m)=\frac{1}{m!\ e^{\mu+\lambda}}*(\lambda+\mu)^m$$

将这个结果代会原式计算，得：

$$P(X=k|X+Y=m)=\frac{P(X=k)P(Y=m-k)}{P(X+Y=m)}=\frac{\frac{\lambda^k}{e^{\lambda}k!}*\frac{\mu^{m-k}}{e^{\mu}(m-k)!}}{\frac{1}{m!\ e^{\mu+\lambda}}*(\lambda+\mu)^m}=\frac{m!}{k!\,(m-k)!}\frac{\lambda^k\mu^{m-k}}{(\lambda+\mu)^m}$$

·然后再求其均值。直接由离散型随机变量函数的均值，可得：（$k=0$时求和式为 0，故 k 可从 1 开始计）

$$E(X|X+Y=m)=\sum_{k=0}^{m}k*P(X=k|X+Y=m)=\sum_{k=1}^{m}k*\frac{m!}{k!\,(m-k)!}\frac{\lambda^k\mu^{m-k}}{(\lambda+\mu)^m}$$

$$=\frac{m\lambda}{(\lambda+\mu)^m}\sum_{k-1=0}^{m-1}\frac{(m-1)!}{(k-1)!\,\big((m-1)-(k-1)\big)!}\lambda^{k-1}\mu^{(m-1)-(k-1)}=\frac{m\lambda}{\mu(\lambda+\mu)^m}*(\lambda+\mu)^{m-1}=\frac{m\lambda}{\lambda+\mu}$$

(2) 同样的，写出X,Y服从的二项分布：

$$P(X=i)=C_n^ip^i(1-p)^{n-i}\ ;\qquad P(Y=j)=C_n^jp^j(1-p)^{n-j}$$

直接利用条件分布与联合分布的关系,并利用X,Y互相独立的条件：

$$P(X=k|X+Y=m)=\frac{P(X=k,X+Y=m)}{P(X+Y=m)}=\frac{P(X=k)P(Y=m-k)}{P(X+Y=m)}$$

其中，$P(X+Y=m)$利用全概率公式计算：

$$P(X+Y=m)=\sum_{t=0}^{\infty}P(Y=m-t)*P(X=t)=\sum_{t=0}^{\infty}C_n^{m-t}p^{m-t}(1-p)^{n-(m-t)}*C_n^tp^t(1-p)^{n-t}$$

$$=p^m(1-p)^{2n-m}\sum_{t=0}^{\infty}C_n^{m-t}C_n^t$$

将这个结果代会原式计算，得：

$$P(X=k|X+Y=m)=\frac{P(X=k)P(Y=m-k)}{P(X+Y=m)}=\frac{C_n^kp^k(1-p)^{n-k}*C_n^{m-k}p^{m-k}(1-p)^{n-m+k}}{p^m(1-p)^{2n-m}\sum_{t=0}^{\infty}C_n^{m-t}C_n^t}$$

$$=\frac{C_n^kC_n^{m-k}}{\sum_{t=0}^{\infty}C_n^{m-t}C_n^t}$$

·然后再求其均值。直接由离散型随机变量函数的均值，可得：

$$E(X|X+Y=m)=\sum_{k=0}^{m}k*P(X=k|X+Y=m)=\sum_{k=0}^{m}k*\frac{C_n^kC_n^{m-k}}{\sum_{t=0}^{\infty}C_n^{m-t}C_n^t}=\frac{\sum_{k=0}^{m}kC_n^kC_n^{m-k}}{\sum_{t=0}^{\infty}C_n^{m-t}C_n^t}$$

化简上式需要利用组合数的性质：(且$k=0$时分子为 0，故可以从$k=1$开始求和)

$$C_{m+n}^r=C_m^0C_n^r+C_m^1C_n^{r-1}+\cdots\cdots+C_m^rC_n^0\ ;\quad n*C_m^n=m*C_{m-1}^{n-1}$$

$$\text{所以上式分母}=\sum_{t=0}^{\infty}C_n^{m-t}C_n^t=C_{2n}^m\ ;\ \text{分子}=\sum_{k=1}^{m}kC_n^kC_n^{m-k}=\sum_{k=1}^{m}nC_{n-1}^{k-1}C_n^{m-k}=nC_{2n-1}^{m-1}$$

$$\Rightarrow\ E(X|X+Y=m)=\frac{nC_{2n-1}^{m-1}}{C_{2n}^m}=n*\frac{\frac{(2n-1)!}{(m-1)!\,(2n-m)!}}{\frac{(2n)!}{m!\,(2n-m)!}}=\frac{m}{2}$$

概率论与数理统计 B　第七周作业　4 月 3 日 周五

PB18151866 龚小航

4.7. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = ce^{-x^2+x}, -\infty < x < \infty$. 试求常数 c，及 $Var(X)$.

解：概率密度函数满足在全区间上积分值为 1：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} ce^{x^2+x}\,dx = ce^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x-\frac{1}{2}\right) = ce^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi} \equiv 1$$

$$\Longrightarrow\quad c = \frac{1}{e^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}}$$

带入c，可以写出X的概率密度函数：

$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}}e^{-x^2+x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} \sim N\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

由正态分布的性质，可知 $\mathrm{Var(X)} = \sigma^2 = \frac{1}{2}$

4.11. 设随机变量 X 服从参数为λ的指数分布，试求 $P\left(X > \sqrt{Var(X)}\right)$.

解：先写出X服从的指数分布：$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\ (x > 0)$

由常见分布的方差结论，有$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ ，$\sqrt{Var(X)} = \frac{1}{\lambda}\ (\lambda > 0)$

$$\Longrightarrow\ P\left(X > \sqrt{Var(X)}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 - \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{e}$$

4.49. 设随机变量X与Y相互独立，且 $X \sim N(3,2), Y \sim U(1,2)$，$Z = 2X$，令$W = X - Y + Z - 1$，求$Var(W)$.

解：$Z = 2X$，因此 $W = X - Y + Z - 1 = 3X - Y - 1$

对于X的正态分布和Y的均匀分布，直接运用其方差的结论：

$$Var(X) = \sigma^2 = 2;\quad Var(Y) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

再直接运用方差的性质，在X,Y独立的条件下，有：

$$Var(W) = Var(3X - Y - 1) = 3^2Var(X) + (-1)^2Var(Y) = 18 + \frac{1}{12} = \frac{217}{12}$$

4.52. 设 X_1 和 X_2 是独立的指数随机变量，均值分别为 1 和 2. 定义

$$Y = min\{X_1, X_2\} \quad ; \qquad Z = max\{X_1, X_2\}.$$

求 (1) $E(Y)$和$E(Z)$；　(2) $Var(Y)$和$Var(Z)$.

解：(1) 一个指数分布满足$X\sim \exp(\lambda)$，$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\ (x>0)$. 计算其均值：

$$E(X)=\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = -xe^{-\lambda x}|_{x=0}^{\infty}-\int_0^{\infty}-e^{-\lambda x}\,dx=\frac{1}{\lambda}$$

因此，对于随机变量X_1, X_2，有$\frac{1}{\lambda_1}=1, \frac{1}{\lambda_2}=2 \ \Rightarrow\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=\frac{1}{2}$

所以这两个随机变量的概率密度函数为：

$$f_1(x_1)=e^{-x}\ ,\quad f_2(x_2)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$F_1(x_1)=\int_0^{x} e^{-x}\,dx = 1-e^{-x}\ ;\qquad F_2(x_2)=\int_0^{x}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\,dx=1-e^{-\frac{1}{2}x}$$

再考虑$Y.Z$的结构：其中有一个等号成立

$$f_y(y)=f(x_1=y,x_2\ge y)+f(x_1\ge y,x_2=y)=f_1(y)\big(1-F_2(y)\big)+\big(1-F_1(y)\big)f_2(y)=\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}y}$$

$$f_z(z)=f(x_1=z,x_2\le z)+f(x_1\le z,x_2=z)=f_1(z)F_2(z)+F_1(z)f_2(z)=e^{-z}+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}z}$$

由概率密度函数，可以轻易的推出各种性质：($y,z<0$时概率为 0，不用考虑）

$$E(Y)=\int_0^{\infty} yf_y(y)\,dy=\int_0^{\infty}\frac{3}{2}ye^{-\frac{3}{2}y}\,dy=-ye^{-\frac{3}{2}y}|_{y=0}^{\infty}-\int_0^{\infty}-e^{-\frac{3}{2}y}\,dy=\frac{2}{3}$$

$$E(Z)=\int_0^{\infty} zf_z(z)\,dz=\int_0^{\infty} z\left(e^{-z}+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}z}\right)dz=-z\left(e^{-z}+e^{-\frac{1}{2}z}-e^{-\frac{3}{2}z}\right)|_{z=0}^{\infty}$$
$$+\int_0^{\infty}(e^{-z}+e^{-\frac{1}{2}z}-e^{-\frac{3}{2}z})\,dz=\frac{7}{3}$$

(2) 再计算其方差。由公式$Var(T)=E(T^2)-E^2(T)$，只需计算平方的平均：

$$E(Y^2)=\int_0^{\infty} y^2f_y(y)\,dy=\int_0^{\infty}\frac{3}{2}y^2e^{-\frac{3}{2}y}\,dy=\ -y^2e^{-\frac{3}{2}y}|_{y=0}^{\infty}-\int_0^{\infty}-2ye^{-\frac{3}{2}y}\,dy=\ \int_0^{\infty}2ye^{-\frac{3}{2}y}\,dy$$
$$=\ -\frac{4}{3}ye^{-\frac{3}{2}y}|_{y=0}^{\infty}-\int_0^{\infty}-\frac{4}{3}e^{-\frac{3}{2}y}\,dy=\frac{8}{9}$$

$$E(Z^2)=\int_0^{\infty} z^2f_z(z)\,dz=\int_0^{\infty} z^2\left(e^{-z}+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}-\frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}z}\right)dz=-z^2\left(e^{-z}+e^{-\frac{1}{2}z}-e^{-\frac{3}{2}z}\right)|_{z=0}^{\infty}$$
$$+\int_0^{\infty}2z(e^{-z}+e^{-\frac{1}{2}z}-e^{-\frac{3}{2}z})\,dz=2\int_0^{\infty}z(e^{-z}+e^{-\frac{1}{2}z}-e^{-\frac{3}{2}z})\,dz$$
$$=2z\left(-e^{-z}-2e^{-\frac{1}{2}z}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}z}\right)|_{z=0}^{\infty}-2\int_0^{\infty}\left(-e^{-z}-2e^{-\frac{1}{2}z}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}z}\right)dz$$
$$=-2\left(e^{-z}+4e^{-\frac{1}{2}z}-\frac{4}{9}e^{-\frac{3}{2}z}\right)|_{z=0}^{\infty}=\frac{82}{9}$$

将其带入方差计算式：

$$Var(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{8}{9}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

$$Var(Z)=E(Z^2)-E^2(Z)=\frac{82}{9}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{11}{3}$$

4.63. 设随机变量 X,Y 相互独立，具有共同分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 设 α,β 为两个常数.

(1) 求 $Cov(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)$.　　(2) 当$\alpha,\beta$取何值时，$\alpha X+\beta Y$ 与 $\alpha X-\beta Y$相互独立.

解：1) 由协方差的性质 4 ：

$$\forall a_1,a_2,b_1,b_2,\text{均有 } Cov(a_1X_1+a_2X_2,\ b_1Y_1+b_2Y_2)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_ib_jCov(X_i,Y_j)$$

带入本题的情况中去：

$$Cov(\alpha X+\beta Y,\ \alpha X-\beta Y)=\alpha^2\mathrm{Cov}(X,X)-\alpha\beta\mathrm{Cov}(X,Y)+\beta\alpha\mathrm{Cov}(Y,X)-\beta^2\mathrm{Cov}(Y,Y)$$

$$=\alpha^2\mathrm{Cov}(X,X)-\beta^2\mathrm{Cov}(Y,Y)=\alpha^2\mathrm{Var(X)}-\beta^2\mathrm{Var(Y)}=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2$$

(2) 当 $\alpha X+\beta Y$ 与 $\alpha X-\beta Y$ 相互独立时，由定理 3.1，则 $Cov(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)=0$

即有 $(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2=0$　而$\sigma\neq 0$，因此 $\alpha^2-\beta^2=0$

反过来验证这个解是否真的让$\alpha X+\beta Y$ 与 $\alpha X-\beta Y$ 相互独立：

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$；　$Y\sim N((\mu,\sigma^2)$　　将其展开，易知：

$$\Longrightarrow\quad (X+Y)\sim(2\mu,2\sigma^2);\quad (X-Y)\sim(0\,,2\sigma^2)$$

显然他们是独立的。所以解$\alpha^2=\beta^2$符合题意。