数理方程经典问题专题整理

函数变换法的应用

数理方程课程主要研究线性偏微分方程和定解条件所组成的定解问题的求解，课程的核心思想是转化的思想，其中通解法是一种借鉴常微分方程定值问题的求解思路转化而来的求解方法。通解法的求解步骤为：求解偏微分方程的通解，代入定解条件构建已知函数和未知函数之间的联系，用已知函数表达未知函数代入形式通解得到定解问题的解。其中重要步骤为，求解偏微分方程的通解。虽然这种方法思路很清晰，但往往偏微分方程的通解求解是比较复杂的。我们常见的求解类型主要分为三种，分别是可直接积分求解类型，可通过变量代换化为可直接积分求解类型，可通过函数变换化为可直接积分求解类型。这一专题通过分析一道作业题目来阐述函数变换法的求解思路。这一道题目虽然实际上变成求解常微分方程的通解，但其中函数变换法的思想是一致的，这里函数变换法是将一般的二阶常微分方程转化为二阶常系数微分方程求解。

在球坐标系下，求方程 $\Delta_3 u + k^2 u = 0$(k 为正常数) 的形如 $u = u(r)$ 的解.
提示: $\Delta_3 u$ 在球坐标系下的形式为

$$\Delta_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

解：由题意知，需要求得形如 $u = u(r)$ 的解。则设 $u = u(r)$，并代入方程整理得到

$$\Delta_3 u + k^2 u = \frac{2}{r}\frac{\partial u}{dr} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + k^2 u = 0$$

可以发现，这个方程不是二阶常系数线性微分方程，并且直观上不容易看出一个解，所以采用函数变换法，通过构造函数变换将其转化为我们熟悉的类型，即二阶常系数线性微分方程。(对比偏微分方程通解法中，通过函数变换将一般的偏微分方程转化为可以直接积分求解的偏微分方程，进而实现求解) 设 $u(r) = v(r)w(r)$，并代入方程得

$$v''w + 2v'w' + vw'' + \frac{2}{r}\left(v'w + vw'\right) + k^2 vw = 0$$

进一步整理得到关于 $w(r)$ 的微分方程

$$w'' + \frac{2v' + \frac{2}{r}v}{v}w' + \frac{v'' + \frac{2}{r}v' + k^2 v}{v}w = 0$$

考虑到我们的目标是将其转化为二阶常系数线性微分方程，即要求 w 及其各阶导数的系数为常数，即

$$\frac{2v'+\frac{2}{r}v}{v}=C_1' \quad \frac{v''+\frac{2}{r}v'+k^2v}{v}=C_2'$$

亦即

$$\frac{v'+\frac{1}{r}v}{v}=C_1 \quad \frac{v''+\frac{2}{r}v'}{v}=C_2$$

其中 C_1,C_2 为任意常数。
则我们只需要求解上述常微分方程组的一个解即可 (往往我们希望这个解尽可能简单)。注意到第一个方程是一阶方程而第二个是二阶方程，则我们首先要求解第一个方程，然后代入第二个方程验证即可 (要注意我们使用函数变换法是要解决一般的非常系数二阶线性常微分方程的求解，这种类型方程不易直接求解，所以我们选择通过函数变换法将其转化为容易求解的类型，即二阶常系数线性常微分方程。第二个方程也属于这种类型，同样不易直接求解。而第一个方程是一阶方程，一般一阶方程求解相对容易，所以我们的一般做法是，先求解转化得到的一阶方程得到通解，代入二阶方程验证)。
另外注意到 C_1,C_2 为任意常数，即我们只需要找到一组合适的 C_1,C_2 使得方程组有解即可。
第一个方程属于可分离变量类型，分离变量得到

$$\frac{dv}{v}=\left(C_1-\frac{1}{r}\right)dr$$

解得

$$v=C_3\frac{e^{C_1r}}{r}$$

将 v 代入第二个方程得

$$C_1^2C_3\frac{e^{C_1r}}{r}=C_2C_3\frac{e^{C_1r}}{r}$$

则当 $C_2=C_1^2$ 时上述方程组有解。考虑到使得解尽可能简单，我们取 $C_1=0,C_3=1.$
则得到解

$$v=\frac{1}{r}$$

代入关于 w 的方程得

$$w''+k^2w=0$$

对于这一二阶常系数线性常微分方程，可以直接通过特征根法求解。

$$w=A\cos kr+B\sin kr$$

进而由 $u(r)=v(r)w(r)$ 得方程的解为

$$u=vw=\frac{1}{r}(A\cos kr+B\sin kr)$$

其中 A,B 为任意常数。

总结：转化思想是这门课程中的核心思想，通过转化我们可以将不熟悉的问题变成熟悉的问题进而实现求解。转化思想应用时首先要考虑的问题是转化的目标和转化的方法，并且要在求解过程中时刻记得。这个专题通过一道作业题目的分析过程展示转化的一个具体手段——函数变换法，在求解一般的二阶非常系数线性常微分方程中的应用。而在这门课程中，除了需要掌握这一应用，还需要掌握函数变换法在求解偏微分方程通解中的应用。这一问题在习题课和总结材料中有所阐述，另外建议读者通过比较函数变换法在这两个场景中的应用，思考函数变换法的核心思想，并通过和这门课程中所讲述的各种求解定解问题的方法中蕴含的转化思想作比较，体会转化思想的精神。