011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

再记2020科大樱花

——向新世界的建设者致敬！

枝展花妍又遇寒，殷殷遥望玉门难。

春风奋起千钧力，不度阳关终不还。

3.2 带等词的一阶谓词演算K^+

3.2 带等词的一阶谓词演算K^+

- **观察** 为了实现自然数定义的形式化，需要首先实现等词=定义的形式化。为此，建立带等词的一阶谓词演算K^+。
- K^+的语言$K^+(Y)$是固定带有二元谓词符号=的$K(Y)$；因此，$K^+(Y)$是一类特殊的一阶语言$K(Y)$。
- **等词的逻辑地位** =是逻辑符号还是非逻辑符号？逻辑符号的意义/解释在所有一阶结构中相同；非逻辑符号的意义/解释在不同的一阶结构中可以不同。最终，等词=被视为一个常谓词，即在$K^+(Y)$中始终存在的谓词。

3. 2 带等词的一阶谓词演算K^+

- K^+增加了三条等词公设，作为等词定义的形式化。对比：K没有任何公设，只有公理和推理规则。
- 等词公设 K^+包含以下等词公设：

(E1) $u = u$;

(E2) $u_k = u \rightarrow g(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) = g(u_1, \ldots, u, \ldots, u_n)$;

(E3) $u_k = u \rightarrow (P(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) \rightarrow P(u_1, \ldots, u, \ldots, u_n))$.

- **注释** 等词公设定义了等词的一些基本性质(基础性知识)：自身相等、等量在函数和原子公式中的可替换性。

3.2 带等词的一阶谓词演算K^+

❖ K^+构成（视为一个应用谓词演算）

1. 语言$K^+(Y)$： 带常谓词=的$K(Y)$；
2. 公理模式：(K1) ~ (K5)；
3. 推理规则：(MP)、(UG)；
4. 等词公设： (E1) ~ (E3)；
5. 形式推理/形式证明：等词公设与公理同样使用，其余同K。

◆记号 在K^+中从Γ推出p，记为$\Gamma \vdash_{K^+} p$，简写为$\Gamma \vdash p$。

❖注释 对任何Γ和p，$\Gamma \vdash_{K^+} p$当且仅当$\Gamma \cup \{E1, E2, E3\} \vdash_K p$。

3.2 带等词的一阶谓词演算K^+

❖ **公设与公理的区别** 任何公理都是逻辑有效的，任何公设都不是逻辑有效的。

❖ **例1** 取一个特殊的$K^+(Y)$语言，不含个体常元、函数符号和其他谓词符号。取$K^+(Y)$的一个一阶结构$M=(\mathbf{N}, \varnothing, \{>\})$，使得$\approx^M$解释为$\mathbf{N}$上的大于关系>。

依一阶解释的定义，任给个体变元指派V，在对应的一阶解释I之下，$I(u \approx u)=t$当且仅当$I(u)>I(u)$当且仅当$d>d$。由于对任何$d\in\mathbf{N}$，$d>d$不成立，因此$I(u\approx u)=f$。

故(E1)不是M有效的，也不是逻辑有效的。

3. 2 带等词的一阶谓词演算K^+

❖ **术语** 对$K^+(Y)$的任何一阶结构M，若(E1)、(E2)、(E3)都是M有效的，则称K^+是M有效的，称M是一个K^+模型，记为$M \models K^+$。

❖ **定理1** 任给$K^+(Y)$的一阶结构$M=(\mathbf{D}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$，若$\mathbf{=}^M$是$\mathbf{D}$上的相等关系，则$M \models K^+$。

◆ **证明** 设$M=(\mathbf{D}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$是一个$K^+(Y)$的一阶结构，并且$\mathbf{=}^M$是$\mathbf{D}$上的相等关系=。考虑(E1)。对任何一阶解释$I=(M, V, v)$，由I良定义性，对任何项u，存在唯一的$d \in \mathbf{D}$使得$I(u)=d$。由于$I(u \mathbf{=} u)=t$当且仅当$I(u)=I(u)$当且仅当$d=d$，故$I(u \mathbf{=} u)=t$。由u和I的任意性，$u \mathbf{=} u$是M有效的。类似可证(E2)和(E3)是M有效的。定理得证。

3.2 带等词的一阶谓词演算K^+

- **观察** 在任意K^+模型M中，$=^M$是否必须解释为**D**上的相等关系？如果是，则由定理1，(E1)、(E2)和(E3)在任何M上都是M有效的，所以是逻辑有效的，而公设也是公理。回答是否定的。
- **例2** 注意例1不是K^+模型，现构造一个K^+模型。取一个$K^+(Y)$同例1，考虑它的一阶结构M=(**N**, ∅, {≈})，其中≈是**N**上的“同奇偶”，使得$=^M$是≈。

  易证(E1)是M有效的，因为对任何d∈**N**有d≈d。

  易证(E1)也是M有效的，因为$K^+(Y)$没有函数符号。

3.2 带等词的一阶谓词演算K^+

考虑(E3)。在当前的$K^+(Y)$中，(E3)

$$u_k = u \rightarrow (P(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) \rightarrow P(u_1, \ldots, u, \ldots, u_n))$$

中，P是=并且n=2，故(E3)实际形为：

$$(1)\ u_k = u \rightarrow (u_1 = u_k \rightarrow u_1 = u)),\ \text{或者}$$

$$(2)\ u_k = u \rightarrow (u_k = u_2 \rightarrow u = u_2)).$$

对于(1)，假设任何I使得$I(u_k = u)=t$，即$I(u_k)$与$I(u)$同奇偶，并且$I(u_1=u_k)=t$，即$I(u_1)$与$I(u_k)$同奇偶，则有$I(u_1)$与$I(u)$同奇偶，即$I(u_1= u)=t$。故(1)是M有效的。同理可证(2)是M有效的。所以(E3)是M有效的。

3.2 带等词的一阶谓词演算K^+

❖ **观察** 例2中的一阶结构$M=(N, \varnothing, \{\approx\})$确实是一个$K^+$模型；但在M中，$=^M$不是论域N上的相等关系。

❖ **观察** 对任何K^+模型M，一阶结构M满足等词公设，即(E1)、(E2)、(E3)都是M有效的；这表示，等词公设对K^+模型M中的关系$=^M$做出了约束——要求$=^M$必须具有(E1)、(E2)、(E3)规定的性质。尽管如此，等词公设仍然不能“强迫”K^+模型必须将等词$=$解释为论域上的相等关系。

3.2 带等词的一阶谓词演算K$^+$

❖ 习题

3.2 完成本节定理1的证明。

3.3 p110：2。

❖ 思考题

3.2 L是否“强迫”→解释为实质蕴涵？