概率论与数理统计 B　第二周作业　2 月 25 日 周二

PB18151866 龚小航

35. 在数字 1 ~ 9 中随机的取一个数 X，然后再在 1 到 X 中随机的取一个数，试求第二次取的数为 m $(1 \le m \le 9)$ 的概率是多少?

解：记第二次取到数 X。定义事件 A：第一次取数，取到 X; 事件 B：第二次取数，得到 Y
由于事件 A 是完备事件群，故可以运用全概率公式：

$$P(Y=m)=\sum_{i=1}^{9}P(Y=m\mid X=i)*P(X=i)=\sum_{i=m}^{9}P(Y=m\mid X=i)*P(X=i)$$

$$=\frac{1}{9}*\sum_{i=m}^{9}P(Y=m\mid X=i)=\frac{1}{9}*(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{9})$$

37. 某人忘了电话号码的最后一个数字，因而随机拨号，问拨号不超过 3 次而接通所需拨的电话号码的概率是多少?若已知最后一位是偶数，那么此概率是多少?

解：定义事件A_1：在第一次拨通　事件A_2：在第二次拨通　事件A_3：在第三次拨通
事件 K：在三次以内，拨出正确的号码。此处认为拨过且错误的号码不会再次拨。

$$P(K)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)=1-P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\,\middle|\,\overline{A_1}\right)P(\overline{A_3}\,\middle|\,\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,)$$

$$=1-\frac{9}{10}*\frac{8}{9}*\frac{7}{8}=0.3$$

若已知最后一位为偶数，$P(K)$表达式相同，最后的数据代入稍作修改：

$$P(K)==1-\frac{4}{5}*\frac{3}{4}*\frac{2}{3}=0.6$$

40. 连续投掷一枚骰子两次，已知这两次的点数差小于 2，求两次点数之和大于 6 的概率.

$$解：\Omega=\left\{\begin{array}{llllll}\{1,\ 1\}, & \{1,\ 2\}, & \{1,\ 3\}, & \{1,\ 4\}, & \{1,\ 5\}, & \{1,\ 6\}, \\ \{2,\ 1\}, & \{2,\ 2\}, & \{2,\ 3\}, & \{2,\ 4\}, & \{2,\ 5\}, & \{2,\ 6\}, \\ \{3,\ 1\}, & \{3,\ 2\}, & \{3,\ 3\}, & \{3,\ 4\}, & \{3,\ 5\}, & \{3,\ 6\}, \\ \{4,\ 1\}, & \{4,\ 2\}, & \{4,\ 3\}, & \{4,\ 4\}, & \{4,\ 5\}, & \{4,\ 6\}, \\ \{5,\ 1\}, & \{5,\ 2\}, & \{5,\ 3\}, & \{5,\ 4\}, & \{5,\ 5\}, & \{5,\ 6\}, \\ \{6,\ 1\}, & \{6,\ 2\}, & \{6,\ 3\}, & \{6,\ 4\}, & \{6,\ 5\}, & \{6,\ 6\},\end{array}\right\}$$

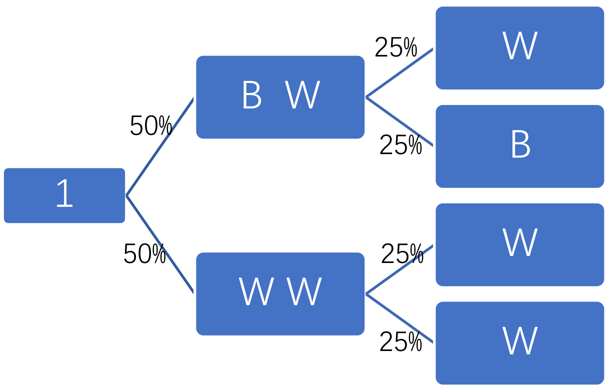
记事件 A：两次点数相差小于 2　　事件 B：两次点数之和大于 6

$$\omega_A=\left\{\begin{array}{llllllll}\{1,\ 1\}, & \{1,\ 2\}, & \{2,\ 1\}, & \{2,\ 2\}, & \{2,\ 3\}, & \{3,\ 2\}, & \{3,\ 3\}, & \{3,\ 4\}, \\ \{4,\ 3\}, & \{4,\ 4\}, & \{4,\ 5\}, & \{5,\ 4\}, & \{5,\ 5\}, & \{5,\ 6\}, & \{6,\ 5\}, & \{6,\ 6\},\end{array}\right\}$$

$$\omega_{A\cap B}=\{\{3,\ 4\},\ \{4,\ 3\},\ \{4,\ 4\},\ \{4,\ 5\},\ \{5,\ 4\},\ \{5,\ 5\},\ \{5,\ 6\},\ \{6,\ 5\},\ \{6,\ 6\}\}$$

因此$P(B|A)=\frac{9}{16}$

45. 袋中有一个球，它为白球黑球的概率相等. 现从中放入一个白球，再从中随机取出一球，现发现是白球，试求袋中所剩之球也是白球的概率.



解：记白球为 W ，黑球为 B，袋中本来的球为 B 或 W,等可能的为 50%，现研究放入一个白球后的系统。如左图所示，最后抓出的一球有四种情况，每一种对应 0.25.

定义事件 A：从中随机取出一球，为白球

定义事件 B：另一球为白球

$$P(A)=0.75$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.25+0.25}{0.75}=\frac{2}{3}$$

49. 为防止意外，办公大楼楼道里同时装有两个报警装置 1 和 2. 已知报警装置 1 单独使用时有效概率为 0.95；报警装置 2 单独使用时有效概率为 0.90. 在报警装置 1 失效的条件下装置 2 失效的概率为 0.86. 求发生意外时至少有一个报警装置有效的概率.

解：定义事件 A：报警装置 1 有效　　定义事件 B：报警装置 2 有效

由题意，$P(\bar{B}\,|\,\bar{A})=0.86$　$P(\bar{A})=1-P(A)=0.05$　所以，有下式成立：

$$P(A+B)=1-P(\overline{A+B})=1-P(\bar{A}\,\bar{B})=1-P(\bar{B}\,|\,\bar{A})*P(\bar{A})=1-0.86*0.05=0.957$$

概率论与数理统计 B　第二周作业　2 月 28 日 周五

PB18151866 龚小航

56. 对于三个事件 A,B,C，若 $P(AB|C)=P(A|C)P(B|C)$ 成立，则称 A 与 B 关于 C 条件独立. 若已知 A 与 B 关于 C 与 $\overline{C}$ 条件独立，且 $P(C)=0.5$ $P(A|C)=P(B|C)=0.9$ $P(A\mid\overline{C})=0.2, P(B\mid\overline{C})=0.1$。

试求 $P(A),P(B),P(AB)$ 并证明 A 与 B 不独立.

解：每次试验C与$\overline{C}$互斥且至少发生一个，构成完备事件群。故可利用全概率公式：

$$P(A)=P(C)*P(A\mid C)+P(\overline{C})*P(A\mid\overline{C})=0.5*0.9+(1-0.5)*0.2=0.55$$

$$P(B)=P(C)*P(B\mid C)+P(\overline{C})*P(B\mid\overline{C})=0.5*0.9+(1-0.5)*0.1=0.50$$

而由题设，A、B 关于 C 与 $\overline{C}$ 条件独立，故有：

$$\begin{cases}P(AB|C)=P(A|C)P(B|C)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ P(AB|\overline{C})=P(A|\overline{C})P(B|\overline{C})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②\end{cases}$$

而C与$\overline{C}$互斥且至少发生一个，构成完备事件群，再次利用全概率公式：

$$P(AB)=P(C)*P(AB|C)+P(\overline{C})*P(AB\mid\overline{C})$$

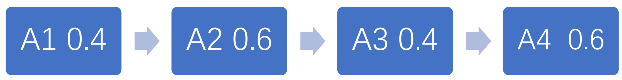
$$=0.5*0.9*0.9+(1-0.5)*0.1*0.2=0.415$$

由以上条件，$P(AB)>P(A)P(B)$,因此事件 A 与 B 不独立。

61. 某人从家到学校要经过 4 个红绿灯口。1、3 红绿灯口出现红灯的概率均为 0.4，2、4 路口出现红灯的可能性均为 0.6，且相互独立. 求某人从家到学校至少碰到两个红灯的概率。

解：如右图，记事件A_i：在第 i 个路口碰到红灯

记事件B_I：共碰到 i 个红灯的概率



为简便，可以求路上碰到一个或者没有碰到红灯的概率之和。事件 A 是独立事件：

$$P(B_0)+P(B_1)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})+P(A_1\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})+P(\overline{A_1}\,A_2\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3\,\overline{A_4})$$

$$+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,A_4)=P(\overline{A_1})\,P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})+\cdots\cdots$$

$$=(1-0.4)*(1-0.6)*(1-0.4)*(1-0.6)+0.4*(1-0.6)*(1-0.4)*(1-0.6)$$

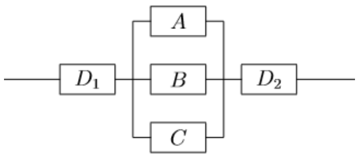
$$+(1-0.4)*0.6*(1-0.4)*(1-0.6)+(1-0.4)*(1-0.6)*0.4*(1-0.6)$$

$$+(1-0.4)*(1-0.6)*(1-0.4)*0.6=\frac{192}{625}=0.3072$$

因此，至少碰到 2 个红灯的概率$\mathrm{P}(B_2)+P(B_3)+P(B_4)=1-\frac{192}{625}=\frac{433}{625}=0.6928$

65. 求下列各系统能正常工作的概率，其中框图中的字母代表元件，字母相同但下标不同的都是同一种元件，只是装配在不同的位置上，A,B,C,D 类元件能正常工作的概率分别为 p_A, p_B, p_C, p_D。

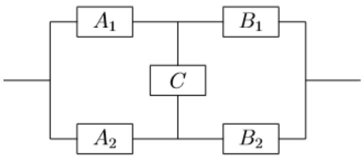
解：（4）令事件 X：系统能正常工作，即左到右有至少一条通路。由于各元件之间相互独立，故有下式成立：



$$P(X) = P(D_1 D_2) * P\left(\overline{\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}}\right) = P(D_1)P(D_2) * \left(1 - P\left(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\right)\right)$$

$$= p_D^2 * (1 - (1 - p_A)(1 - p_B)(1 - p_C))$$

(5)对于该系统，有两种可能的通路形式：$A \to C \to B$ 或 $A \to B$



记事件W_i：有 i 个 A 原件能正常工作

$$1 - P(X) = P\left(\bar{X} \mid W_0\right) + P\left(\bar{X} \mid W_1\right) + P\left(\bar{X} \mid W_2\right)$$

其中，$P\left(\bar{X} \mid W_0\right) = (1 - p_A)^2$

$$P\left(\bar{X} \mid W_1\right) = 2 * (1 - p_A)p_A * (1 - p_B)p_B * (1 - p_C) + 2 * (1 - p_A)p_A * (1 - p_B)^2 * 1$$

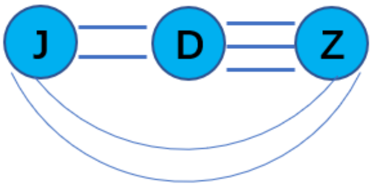
$$= 2(1 - p_A)(1 - p_B)p_A(1 - p_B p_C)$$

$$P\left(\bar{X} \mid W_2\right) = p_A^2 * (1 - p_B)^2 * 1$$

带入，可得

$$P(X) = 1 - (1 - p_A)^2 - p_A^2 * (1 - p_B)^2 - 2(1 - p_A)(1 - p_B)p_A(1 - p_B p_C)$$

73. 从北京到达拉斯有两个航班，从达拉斯到芝加哥有 3 个航班，从北京直飞芝加哥有 2 个航班. 这些航班的票务之间完全独立，买到票的概率都是 $p(0<p<1)$. 假设从北京飞芝加哥没有其他途径可选，且某人从北京出发到达了芝加哥。计算他乘坐直飞航班完成的旅程的概率.



解：定义事件A_i：北京到达拉斯有 i 个选择可用

定义事件B_i：达拉斯到芝加哥有 i 个选择可用

定义事件C_i：北京到芝加哥有 i 个选项可用

显然事件 A、B、C 之间独立。由题意，可得：

$$P(A_0)=(1-p)^2\,;\quad P(A_1)=2(1-p)p\,;\quad P(A_2)=p^2$$

$$P(B_0)=(1-p)^3\,;\quad P(B_1)=3(1-p)^2p\,;\quad P(B_2)=3(1-p)p^2;\quad P(B_3)=p^3$$

$$P(C_0)=(1-p)^2\,;\quad P(C_1)=2(1-p)p\,;\quad P(C_2)=p^2$$

再定义事件D_i：从北京到芝加哥有 i 个非直达选择可用。假设某人在北京时，同时有 m 条完整的到芝加哥的路线可供他选择，他选择其中一条的概率为$\frac{1}{m}$

$$P(D_0)=P(A_0)\big(P(B_0)+P(B_1)+P(B_2)\big)+P(B_0)\big(P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)\big)$$

$$=(2-p)*(1-p)^2$$

$$P(D_1)=P(A_1)\big(P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)\big)+\ P(B_1)\big(P(A_1)+P(A_2)\big)$$

$$=p^2*(1-p)*(5p^2-15p+12)$$

$$P(D_2)=P(A_2)*\big(P(B_2)+P(B_3)\big)=(3-2p)p^4$$

最后定义事件 K：从所有可选的可达航线中，选择直飞航线

$$P(K)=P(D_0)P(K\mid D_0)+P(D_1)P(K\mid D_1)+P(D_2)P(K\mid D_2)$$

其中，$P(K\mid D_0)=1-P(C_0)=1-(1-p)^2=(2-p)p;$ N

$$P(K\mid D_1)=P(C_1)P\big((K\mid D_1)\mid C_1\big)+P(C_2)P\big((K\mid D_1)\mid C_2\big)=\frac{1}{2}P(C_1)+\frac{2}{3}P(C_2)$$

$$P(K\mid D_2)=P(C_1)P\big((K\mid D_2)\mid C_1\big)+P(C_2)P\big((K\mid D_2)\mid C_2\big)=\frac{1}{3}P(C_1)+\frac{1}{2}P(C_2)$$

将其带入$P(K)$中，即可得：

$$P(K)=(2-p)(1-p)^2*(2-p)p+p^2(1-p)(5p^2-15p+12)*\left(\frac{1}{2}2(1-p)p\ +\frac{2}{3}p^2\right)$$

$$+(3-2p)p^4*\left(\frac{1}{3}2(1-p)p\ +\frac{1}{2}p^2\right)$$

$$=\frac{p}{2}(4p^6-27p^5+64p^3-74p^3+50p^2-24p+8)$$

76. 设有来自三个地区的考生报名表共 50 份, 三个地区分别有 10 , 15 和 25 份, 其中女生的报名表分别为 3 份, 7 份和 5 份, 现随机地选一个地区, 从该地区的报名表中先后抽出 2 份.

(1) 求先抽到的 1 份是女生报名表的概率.

(2) 已知后抽到的 1 份是男生报名表, 求先抽到的 1 份是女生报名表的概率.

解:(1)设事件 A:第一次抽取,得到女生报名表

设事件B_i:选中的地区为第 i 个地区

由于事件 B 显然是完备事件群,故可用全概率公式:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$
$$= \frac{1}{3} * \left(\frac{3}{10} + \frac{7}{15} + \frac{5}{25}\right) = \frac{29}{90} = 0.322$$

(2)设事件 C:第二次抽取,得到女生报名表　　求解目标$P(A|\overline{C})$

$$P(\overline{C}) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(\overline{C} \mid B_i)\text{;}\ \textit{同时}\ P(\overline{C} \mid B_i) = P((A\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}) \mid B_i)$$

带入数据,$P(\overline{C}) = \frac{61}{90}$ (也可由练习 11 得到的结论,$P(\overline{C}) + P(A) = 1$)

$$P(A\,\overline{C}) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A\overline{C} \mid B_i) = \frac{1}{3} * \left(\frac{3}{10} * \frac{7}{9} + \frac{7}{15} * \frac{8}{14} + \frac{5}{25} * \frac{20}{24}\right) = \frac{2}{9}$$

由条件概率的定义,得$P(A|\overline{C}) = \frac{P(A\overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{20}{61}$

83. 计算机信号“0”和“1”传递出去, 信息站接收的时候, “0” 被误收为“1” 的概率为 0.02, “1”被误收为“0”的概率为 0.01. 信号“0”和“1”传输的频繁程度为$2:1$. 若接收到的信号是“0”, 真实信号是“0”的概率是多少?

解：设事件 A：发送时，发出数据为“1”　　　事件 B：接收时，接收到的数据为“1”

由题意，发送时，数据的比例为$2:1$，故可以得出：

$$P(A)=\frac{1}{3},P(\overline{A})=\frac{2}{3}$$

再由接收的准确率已知条件，可得：

$$P(B|A)=0.99 \qquad P(\overline{B}\mid\overline{A})=0.98$$

所以，由贝叶斯公式，可得：

$$P(\overline{A}\mid\overline{B})=\frac{P(\overline{A})P(\overline{B}\mid\overline{A})}{P(A)P(\overline{B}\mid A)+P(\overline{A})P(\overline{B}\mid\overline{A})}=\frac{\frac{2}{3}*0.98}{\frac{1}{3}*0.01+\frac{2}{3}*0.98}=\frac{196}{197}=0.9949$$