数理逻辑　第七周作业　3 月 31 日 周二

PB18151866 龚小航

2.试证对任意公式p与q，有：　【练习 15　P73】

$$\vdash \forall x(p \to q) \to (\forall x\, p \to \forall x\, q)$$

解：对其使用演绎定理：令前提集$\Gamma = \{\forall x(p \to q)\}$，证明 $\Gamma \cup \{\forall x\, p\} \vdash \forall x\, q$：

① $\forall xp$ ………………………………………… 前提

② $\forall xp \to p$ ………………………………………… $K4$

③ p ………………………………………… MP 1,2

④ $\forall x(p \to q)$ ………………………………………… 前提

⑤ $p \to q$ ………………………………………… $K4$

⑥ q ………………………………………… MP 3,5

⑦ $\forall xq$ ………………………………………… UG

由演绎定理，得到 $\{\forall x(p \to q)\} \vdash \forall xp \to \forall xq$（其中只用了$x$为概括变元，不在前提中自由出现)

再令$\Gamma = \emptyset$，再次由演绎定理，可得$\forall x(p \to q) \to (\forall x\, p \to \forall x\, q)$.得证.

3.求证：$\{\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)\} \vdash \forall x_2 \forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$　【练习 15　P73】

解：直接写出它在 K 中的证明:

① $\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ ………………………………………… 前提

② $\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ ………………………………………… $K4$

③ $\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ ………………………………………… MP 1,2

④ $\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(x_1, x_3)$ ………………………………………… $K4$

⑤ $R_1^2(x_1, x_3)$ ………………………………………… MP 3,4

⑥ $\forall x_3 R_1^2(x_1, x_3)$ ………………………………………… UG

⑦ $\forall x_1 \forall x_3 R_1^2(x_1, x_3)$ ………………………………………… UG

⑧ $\forall x_1 \forall x_3 R_1^2(x_1, x_3) \to \forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$ ………………………………………… $K4$

⑨ $\forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$ ………………………………………… MP 7,8

⑩ $\forall x_3 R_1^2(x_2, x_3) \to \forall x_2 \forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$ ………………………………………… UG

⑪ $\forall x_2 \forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$ ………………………………………… MP 9,10

由此，这个命题在 K 中的证明如上。

数理逻辑　第七周作业　4 月 3 日 周五

PB18151866 龚小航

4.设x不在p中自由出现，求证：　【练习 15　P74】

$$\vdash (p \to \forall xq) \to \forall x(p \to q)$$

解：利用演绎定理：令$\Gamma = \emptyset$，下面证明 $\Gamma \cup \{p \to \forall xq\} \vdash \forall x(p \to q)$：

① $p \to \forall xq$ ·· 前提

② $\forall xq \to q$ ·· $K4$

③ $p \to q$ ·· HS 1,2

④ $\forall x(p \to q)$ ·· UG

由于L的定理都是K的定理，HS规则也在K中继承。

因为x不在p中出现，那么概括变元不在前提$\{p \to \forall xq\}$中自由出现，因而 $(p \to \forall xq) \to \forall x(p \to q)$.

1.设x不在q中自由出现，求证：　【练习 16　P81】

$$\vdash (\exists xp \to q) \to \forall x(p \to q)$$

解：利用演绎定理：令$\Gamma = \emptyset$，下面证明 $\Gamma \cup \{\exists xp \to q\} \vdash \forall x(p \to q)$：

① $\exists xp \to q$ ·· 前提

② $\neg\forall x\neg p \to q$ ·· 等价前提

③ $(\neg\forall x\neg p \to q) \to (\neg q \to \neg\neg\forall x\neg p)$ ·· 重言式

④ $\neg q \to \neg\neg\forall x\neg p$ ·· MP 2,3

⑤ $(\neg\neg\forall x\neg p) \to (\forall x\neg p)$ ·· 重言式

⑥ $\neg q \to \forall x\neg p$ ·· HS 4,5

⑦ $\forall x\neg p \to \neg p$ ·· $K4$

⑧ $\neg q \to \neg p$ ·· HS 6,7

⑨ $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$ ·· K3

⑩ $p \to q$ ·· MP 8,9

⑪ $\forall x(p \to q)$ ·· UG

由演绎定理，得到 $(\exists xp \to q) \to \forall x(p \to q)$ (前提中只用了x为概括变元，x不在q中自由出现)

这个命题在 K 中的证明如上。

3.找出与所给公式等价的前束范式：　　【练习 16　P81】

$$\exists x_1 R_1^2(x_1, x_2) \rightarrow \left(R_1^1(x_1) \rightarrow \neg\exists x_3 R_1^2(x_1, x_3)\right)$$

解：先列出化等价前束范式的三个命题：（方法）

❶ 若y不在$p(x)$中自由出现，则 $\vdash Qxp(x) \leftrightarrow Qyp(y)$

❷ 若x不在p中自由出现，则 $\vdash (p \rightarrow Qxq) \leftrightarrow Qx(p \rightarrow q)$;

若x不在q中自由出现，则 $\vdash (Qxp \rightarrow q) \leftrightarrow Q^*x(p \rightarrow q)$;

❸ $\neg Qxp \leftrightarrow Q^*x\neg p$

利用这三条规则对本题进行变换。得到以下公式r_i，均为原公式的等价公式：

r_1：$\exists x_4 R_1^2(x_4, x_2) \rightarrow \left(R_1^1(x_1) \rightarrow \neg\exists x_3 R_1^2(x_1, x_3)\right)$ ……………… ❶

r_2：$\exists x_4 R_1^2(x_4, x_2) \rightarrow \left(R_1^1(x_1) \rightarrow \forall x_3 \neg R_1^2(x_1, x_3)\right)$ ……………… ❸

r_3：$\exists x_4 R_1^2(x_4, x_2) \rightarrow \forall x_3\left(R_1^1(x_1) \rightarrow \neg R_1^2(x_1, x_3)\right)$ ……………… ❷

r_4：$\exists x_4 R_1^2(x_4, x_2) \rightarrow \forall x_3\left(R_1^1(x_1) \rightarrow \neg R_1^2(x_1, x_3)\right)$ ……………… ❷

r_5：$\forall x_3\left(\exists x_4 R_1^2(x_4, x_2) \rightarrow \left(R_1^1(x_1) \rightarrow \neg R_1^2(x_1, x_3)\right)\right)$ ………… ❷

r_6: $\forall x_4\, \forall x_3\left(R_1^2(x_4, x_2) \rightarrow \left(R_1^1(x_1) \rightarrow \neg R_1^2(x_1, x_3)\right)\right)$ ………… ❷

最后的r_6就是最后的所求等价前束范式。