Computer Science and Technology

运筹学基础

讲者：顾乃杰 教授、黄章进 副教授

计算机科学与技术学院

2020-02-17

线性规划及单纯形法

Chap.2 Linear Programming & Classical Simplex Methods

主要内容

- 2.1 线性规划问题及其数学模型
- 2.2 线性规划问题的几何意义
- 2.3 单纯形法
- 2.4 单纯形法的计算步骤
- 2.5 单纯形法的进一步讨论
- 2.6 应用举例
- 2.7 使用计算机工具求解线性规划问题

2.6 应用举例

- 一般讲，一个经济、管理问题凡满足以下条件时，才能建立线性规划的模型。
  - 要求解问题的目标函数能用数值指标来反映，且为线性函数；
  - 存在着多种方案及有关数据；
  - 要求达到的目标是在一定约束条件下实现的，这些约束条件可用线性等式或不等式来描述。

例10 合理利用线材问题

- 例10 合理利用线材问题。现要做100套钢架，每套需用长为2.9m，2.1m和1.5m的元钢各一根。已知原料长7.4m，问应如何下料，使用的原材料最省。
- 解：最简单做法是，在每一根原材料上截取2.9m，2.1m和1.5m的元钢各一根组成一套，每根原材料剩下料头0.9m。
  - 为了做100套钢架，需用原材料100根，共有90m料头。
  - 若改为用套裁，这可以节约原材料。下面有几种套裁方案，都可以考虑采用。

下料根数 \ 长度(m)	方案				
	I	II	III	IV	V
2.9	1	2		1	
2.1			2	2	1
1.5	3	1	2		3
合计	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
料头	0	0.1	0.2	0.3	0.8

例10 合理利用线材问题

- 设按I方案下料的原材料根数为x_1，II方案为 x_2，III方案为x_3，IV方案为 x_4,V方案为 x_5。可列出以下数学模型：

$$\max\ z = 0x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 - 0.3x_4 - 0.8x_5 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 100 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 100 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 + x_8 = 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$c_1 - z_1 = c_1 - c_6a_{1,1} - c_7a_{2,1} - c_8a_{3,1} = 0 + 1\times M + 0\times M + 3\times M = 4M$$

$$c_2 - z_2 = c_2 - c_6a_{1,2} - c_7a_{2,2} - c_8a_{3,2} = -0.1 + 2\times M + 0\times M + 1\times M = -0.1 + 3M$$

$$c_3 - z_3 = c_3 - c_6a_{1,3} - c_7a_{2,3} - c_8a_{3,3} = -0.2 + 0\times M + 2\times M + 2\times M = -0.2 + 4M$$

$$c_4 - z_4 = c_4 - c_6a_{1,4} - c_7a_{2,4} - c_8a_{3,4} = -0.3 + 1\times M + 2\times M + 0\times M = -0.3 + 3M$$

$$c_5 - z_5 = c_5 - c_6a_{1,5} - c_7a_{2,5} - c_8a_{3,5} = -0.8 + 0\times M + 1\times M + 3\times M = -0.8 + 4M$$

例10 合理利用线材问题

- 加入人工变量x_6, x_7和x_8，采用大M法求解：

$c_j \rightarrow$			0	−0.1	−0.2	−0.3	−0.8	$-M$	$-M$	$-M$	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
$-M$	x_6	100	1	2	0	1	0	1	0	0	$\frac{100}{1}$
$-M$	x_7	100	0	0	2	2	1	0	1	0	—
$-M$	x_8	100	[3]	1	2	0	3	0	0	1	$\frac{100}{3}$
$c_j - z_j$			$4M$	$-0.1+3M$	$-0.2+4M$	$-0.3+3M$	$-0.8+4M$	0	0	0	
$-M$	x_6	200/3	0	5/3	−2/3	1	−1	1	0	−1/3	$\frac{200}{3}$
$-M$	x_7	100	0	0	2	[2]	1	0	1	0	$\frac{100}{2}$
0	x_1	100/3	1	1/3	2/3	0	1	0	0	1/3	—
$c_j - z_j$			0	$-0.1+5/3M$	$-0.2+4/3M$	$-0.3+3M$	−0.8	0	0	$-4/3M$	

例10 合理利用线材问题

$c_j \rightarrow$			0	−0.1	−0.2	−0.3	−0.8	$-M$	$-M$	$-M$	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
$-M$	x_6	50/3	0	[5/3]	−5/3	0	−3/2	1	−1/2	−1/3	$\frac{150}{15}$
−0.3	x_4	50	0	0	1	1	1/2	0	1/2	0	—
0	x_1	100/3	1	1/3	2/3	0	1	0	0	1/3	$\frac{100}{1}$
c_j-z_j			0	$-0.1+5/3M$	$0.1-5/3M$	0	$-0.65-3/2M$	0	$0.15-3/2M$	$-4/3M$	
0.1	x_2	10	0	1	−1	0	−9/10	3/5	−3/10	−1/5	
−0.3	x_4	50	0	0	1	1	1/2	0	1/2	0	
0	x_1	30	1	0	1	0	13/10	−1/5	1/10	2/5	
c_j-z_j			0	0	0	0	−0.74	$-M+0.06$	$-M+0.12$	$-M-0.02$	

- 最优下料方案：按I方案下料30根；II方案下料10根；IV方案下料50根。即需90根原材料可以制造100套钢架。
- 存在多重最优解
  - 非基变量x_3的检验数为0

例11 配料问题

- 例11（配料问题）某工厂要用三种原材料C、P、H混合调配出三种不同规格的产品A、B、D。已知产品的规格要求，产品单价，每天能供应的原材料数量及原材料单价，分别见表2-14和表2-15。该厂应如何安排生产，使利润收入为最大?

表2-14

产品名称	规格要求	单价（元/Kg）
A	原材料C不少于50% 原材料P不超过25%	50
B	原材料C不少于25% 原材料P不超过50%	35
D	不限	25

表2-15

原材料名称	每天最多供应量	单价（元/Kg）
C	100	65
P	100	25
H	60	35

例11 配料问题

- 解：用X_Y表示生产产品X使用原料Y的数量。其中X＝A,B,D，Y＝C,P,H。根据表2-14和2-15得到的约束条件分别为：
- 由表2-14，可得：

$$\begin{cases} A_C \geq \frac{1}{2}A,\ A_P \leq \frac{1}{4}A,\ B_C \geq \frac{1}{4}B,\ B_P \leq \frac{1}{2}B \\ A_C + A_P + A_H = A \\ B_C + B_P + B_H = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}A_C + \frac{1}{2}A_P + \frac{1}{2}A_H \leq 0 \\ -\frac{1}{4}A_C + \frac{3}{4}A_P - \frac{1}{4}A_H \leq 0 \\ -\frac{3}{4}B_C + \frac{1}{4}B_P + \frac{1}{4}B_H \leq 0 \\ -\frac{1}{2}B_C + \frac{1}{2}B_P - \frac{1}{2}B_H \leq 0 \end{cases}$$

- 由表2-15得：

$$A_C + B_C + D_C \leq 100$$
$$A_P + B_P + D_P \leq 100$$
$$A_H + B_H + D_H \leq 60$$

例11 配料问题

- 设：$x_1 = A_C, x_2 = A_P, x_3 = A_H, x_4 = B_C, x_5 = B_P, x_6 = B_H, x_7 = D_C, x_8 = D_P, x_9 = D_H$

- 约束方程变为：

$$
\begin{cases}
-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \le 0 \\
-\frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 \le 0 \\
-\frac{3}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{4}x_6 \le 0 \\
-\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 \le 0 \\
x_1 + x_4 + x_7 \le 100 \\
x_2 + x_5 + x_8 \le 100 \\
x_3 + x_6 + x_9 \le 60 \\
x_1, x_2, \ldots, x_9 \ge 0
\end{cases}
$$

例11 配料问题

- 目的是使利润达到最大，即：产品价格减去原材料价格达到最大。
- 产品价格为：

$$50(x_1 + x_2 + x_3) ---- \text{产品A}$$
$$35(x_4 + x_5 + x_6) ---- \text{产品B}$$
$$25(x_7 + x_8 + x_9) ---- \text{产品D}$$

- 原材料价格为：

$$65(x_1 + x_4 + x_7) ---- \text{原材料C}$$
$$25(x_2 + x_5 + x_8) ---- \text{原材料P}$$
$$35(x_3 + x_6 + x_9) ---- \text{原材料H}$$

- 目标函数：利润最大

$$\max z = \underbrace{50(x_1 + x_2 + x_3) + 35(x_4 + x_5 + x_6) + 25(x_7 + x_8 + x_9)}_{\text{产品价值}}$$
$$\underbrace{- 65(x_1 + x_4 + x_7) - 25(x_2 + x_5 + x_8) - 35(x_3 + x_6 + x_9)}_{\text{原材料成本}}$$
$$= -15x_1 + 25x_2 + 15x_3 - 30x_4 + 10x_5 - 40x_7 - 10x_9$$

例11 配料问题

- 为了得到初始解，在约束条件中加入7个松弛变量$\mathbf{x}_{10}$～$\mathbf{x}_{16}$，得到线性规划模型：

目标函数 $\max z = -15x_1 + 25x_2 + 15x_3 - 30x_4 + 10x_5 - 40x_7 - 10x_9 + {}$

$$+0(x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16})$$

约束条件

$$\begin{cases}
-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_{10} = 0 \\
-\frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 + x_{11} = 0 \\
-\frac{3}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{4}x_6 + x_{12} = 0 \\
-\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 + x_{13} = 0 \\
x_1 + x_4 + x_7 + x_{14} = 100 \\
x_2 + x_5 + x_8 + x_{15} = 100 \\
x_3 + x_6 + x_9 + x_{16} = 60 \\
x_1, \cdots, x_9, x_{10}, \cdots, x_{18} \geq 0
\end{cases}$$

例11 配料问题

- 用单纯形法计算，经过四次迭代，得最优解为：

$$x_1=100,\ x_2=50,\ x_3=50$$

  - 最优生产方案：每天只生产产品 A：200kg 。 分别需要用原材料 C：100kg，P：50kg；H：50kg

- 总利润是 z =500元/天

例12 快件分拣问题

- 例12： 某快递公司下设一个快件分拣部，处理每天到达和外寄的快件。根据统计资料及经验预测，每天各时段快件数量如表2—16所示。

表 2-16

时段	到达快件数	时段	到达快件数
10:00 前	5 000	14:00～15:00	3 000
10:00～11:00	4 000	15:00～16:00	4 000
11:00～12:00	3 000	16:00～17:00	4 500
12:00～13:00	4 000	17:00～18:00	3 500
13:00～14:00	2 500	18:00～19:00	2 500

– 快件有时间性要求，
  12:00前到达的，在14:00以前处理完；（总件数 ≤12000）
  15:00前到达的，在17:00以前处理完；（总件数 ≤21500）
  全部快件在当天 20:00以前处理完。（总件数 ≤36000）

例12 快件分拣问题

- 分拣机器效率为每台500体/h，每台机器一名职工，共有11台机器。
- 全日制职工上班时间，每人每天工资150元;

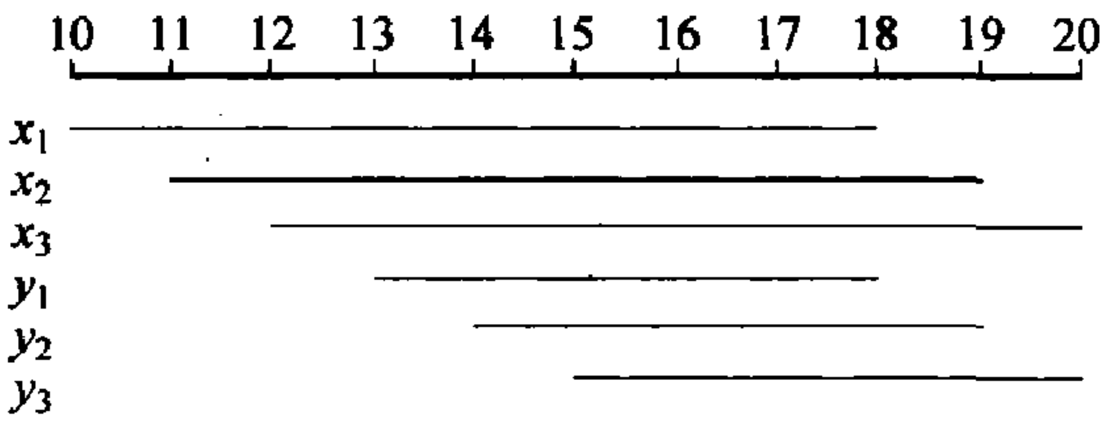
  10:00—18:00， 11:00~19:00， 12:00—20:00，
- 非全日制职工，每人每天工资80元，上班5小时。

  13:00—18:00， 14:00—19:00， 15:00—20:00，
- 每个整点起可处理该整点前到达的快件，例如从11:00起可处理11:00前到达的。

• 问该分拣部要完成快件处理任务，应设多少名全日制及非全日制职工，并使总的工资支出为最少。

例12 快件分拣问题

- 解：　设x_1、x_2、x_3分别为从10:00一18:00、11:00一19:00、12:00一20:00上班的全日制职工数。
- y_1、y_2、y_3分别为从13:00一18:00、14:00~19:00、15:00一20:00上班的非全日制职工数。
- 可用下图表示职工上班的时段。



根据题意，可列出目标函数和约束条件如下

$$\min z = 150(x_1 + x_2 + x_3) + 80(y_1 + y_2 + y_3)$$

本题求解的结果有两个：

(1) $x_1=2, x_2=2, x_3=5, y_1=0, y_2=0, y_3=0$;

(2) $x_1=3, x_2=0, x_3=6, y_1=0, y_2=0, y_3=0$.

总工资支出均为 1 350 元/天。

$$
\begin{cases}
3\,500x_1 + 3\,000x_2 + 2\,500x_3 + 2\,000y_1 + 1\,500y_2 + 1\,000y_3 \leqslant 25\,500 & ⑦\\
4\,000x_1 + 3\,500x_2 + 3\,000x_3 + 2\,500y_1 + 2\,000y_2 + 1\,500y_3 \leqslant 30\,000 & ⑧\\
4\,000x_1 + 4\,000x_2 + 3\,500x_3 + 2\,500y_1 + 2\,500y_2 + 2\,000y_3 \leqslant 33\,500 & ⑨\\
4\,000x_1 + 4\,000x_2 + 4\,000x_3 + 2\,500y_1 + 2\,500y_2 + 2\,500y_3 \geqslant 36\,000 & ⑩\\
2\,000x_1 + 1\,500x_2 + 1\,000x_3 + 500y_1 \geqslant 12\,000 & ⑪\\
3\,500x_1 + 3\,000x_2 + 2\,500x_3 + 2\,000y_1 + 1\,500y_2 + 1\,000y_3 \geqslant 21\,500 & ⑫\\
x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 11 & ⑬\\
x_j \geqslant 0 (j = 1,\cdots 3), y_j \geqslant 0 (j = 1,\cdots 3)
\end{cases}
$$

约束条件①～⑨为各时段内投入两类职工数和可处理该时段前到达的快件数，⑩～⑫为快件处理时限的要求，⑬为分拣机器的限制。

2.7 使用计算机工具求解线性规划问题

- 2.7.1 使用编程语言
- 2.7.2 使用Excel
- 2.7.3 使用Matlab

2.7.1 使用编程语言

- 输入：标准形式的线性规划数据。（便于编程）

  m n的数值

  c: 价值系数$[c_1, c_2, \ldots, c_n]$; $1\times n$

  A: 系数矩阵 $m\times n$

  b: 约束方程组右方的常数$[b_1; b_2; \ldots; b_m]$; $m\times 1$

  初始基变量

- 输出：

  最优解的目标值z（或者-z）和对应的一个最优解

  或者无界解、无可行解

使用编程语言

1. 对输入数据进行初始化，转2
2. 计算非基变量各列的检验数。全部小于等于0，则转5，否则转3
3. 对任一大于0检验数，判断对应的系数矩阵是否全部小于等于0。是则返回无界解，程序结束，否则转4
4. 根据检验数大小计算换入变量，根据θ大小计算换出变量，对矩阵进行变换。转2
5. 判断基变量是否有人工变量，是则返回无可行解，否则返回矩阵对应的最优解及目标值大小。

- 具体的编程细节根据所用编程语言的不同而不同。

使用编程语言

- Java简单例子（没有考虑人工变量）

```
while (true) {
        max = maxi(a[0]);//最大的检验数
        if (max == 0) {//所有检验数都小于等于0
                printmatrix2(writer, a, x, c);//输出最终结果
                break;//返回
        }
        calculateth(a, th, max);//计算θ的值
        min = mini(th);
        if (min == 0) {//对应的系数矩阵是否全部小于等于0
                writer.write("无界解\r\n");//返回无界解
                break;
        }
        printmatrix(writer, th, a, x, c, max, min);//输出中间计算结果
        transform(a, min, max, x);//根据换入换出变量对矩阵进行变换
}
```

使用编程语言

- 以例1为例：

$c_{j\to}$			2	3	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	8	1	2	1	0	0	4
0	x_4	16	4	0	0	1	0	–
0	x_5	12	0	[4]	0	0	1	3
	$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	

- 输入文件：


in.txt - 记事本
文件(F) 编辑(E) 格式(O) 查看(V) 帮助(H)

```
3     5
2     3     0     0     0
8     1     2     1     0     0
16    4     0     0     1     0
12    0     4     0     0     1
3     4     5
```

使用编程语言

- 输出文件：

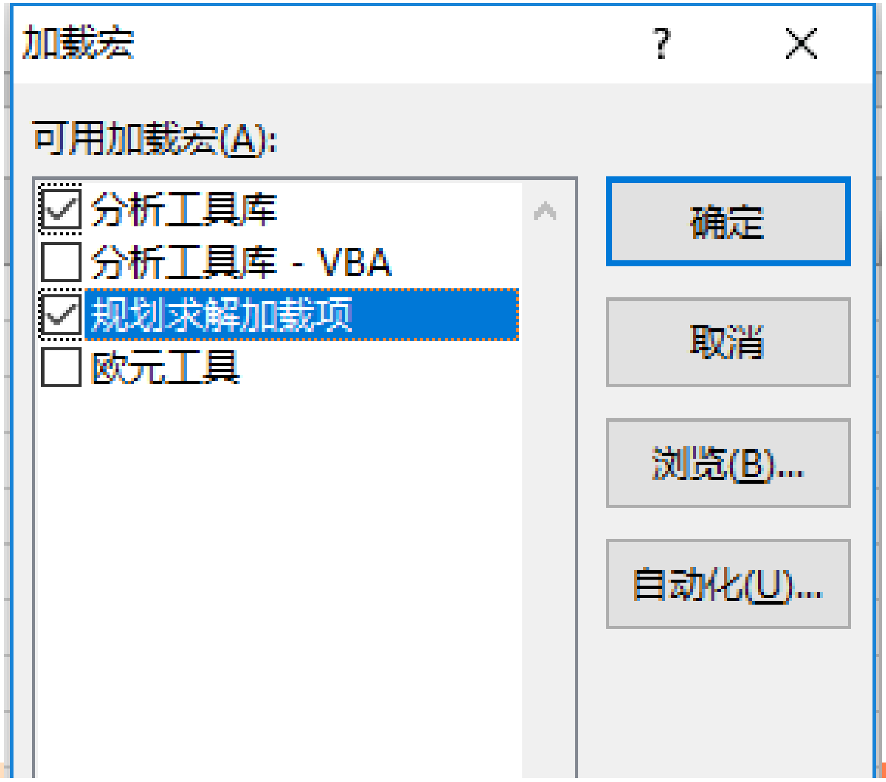
out.txt - 记事本

文件(F) 编辑(E) 格式(O) 查看(V) 帮助(H)

	cj->		2.0	3.0	0.0	0.0	0.0	
cb	Xb	b	x1	x2	x3	x4	x5	θi
==								
0.0	x3	8.0	1.0	2.0	1.0	0.0	0.0	4.0
0.0	x4	16.0	4.0	0.0	0.0	1.0	0.0	Infinity
0.0	x5	12.0	0.0	[4.0]	0.0	0.0	1.0	3.0
cj-zj		0.0	2.0	3.0	0.0	0.0	0.0	
=================================								
0.0	x3	2.0	[1.0]	0.0	1.0	0.0	-0.5	2.0
0.0	x4	16.0	4.0	0.0	0.0	1.0	0.0	4.0
3.0	x2	3.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.25	Infinity
cj-zj		-9.0	2.0	0.0	0.0	0.0	-0.75	
=================================								
2.0	x1	2.0	1.0	0.0	1.0	0.0	-0.5	-4.0
0.0	x4	8.0	0.0	0.0	-4.0	1.0	[2.0]	4.0
3.0	x2	3.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.25	12.0
cj-zj		-13.0	0.0	0.0	-2.0	0.0	0.25	
=================================								
2.0	x1	4.0	1.0	0.0	0.0	0.25	0.0	
0.0	x5	4.0	0.0	0.0	-2.0	0.5	1.0	
3.0	x2	2.0	0.0	1.0	0.5	-0.125	0.0	
cj-zj		-14.0	0.0	0.0	-1.5	-0.125	0.0	
==								

2.7.2 使用Excel

- 第一步：Excel2016：Excel选项->加载项->点击“转到...”->勾选“分析工具库”和“规划求解加载项”，有可能需要调用安装文件。



使用Excel

- 第二步：列出已知数据，设置一个可变量（实际最优时生产的数量）为随机值（可设为0,0）。将由已知量和可变量推导出来的单元格用Excel公式计算填充。例如，需要的设备有效台时数的计算公式为：
- =SUM(PRODUCT(B3,B6),PRODUCT(C3,C6))
- 红色为已知量，紫色为可变量，黄色为推导量，蓝色为最优值（max）。

	A	B	C	D
1				
2	产品 / 资源	产品I (x1)	产品II (x2)	现有条件
3	设备(台时/件)	1	2	8
4	原材料A(kg/件)	4	0	16
5	原材料B(kg/件)	0	4	12
6	产量(件)	4	2	
7	利润(元)	2	3	
8				
9	式子含义	参与计算的式子左边	值	
10	需要的设备有效台时数	$x_1 + 2x_2$	8	
11	原料A需求量	$4x_1$	16	
12	原料B需求量	$4x_2$	8	
13	利润	$2x_1 + 3x_2$	14	

=SUM(PRODUCT(B3,B6),PRODUCT(C3,C6))

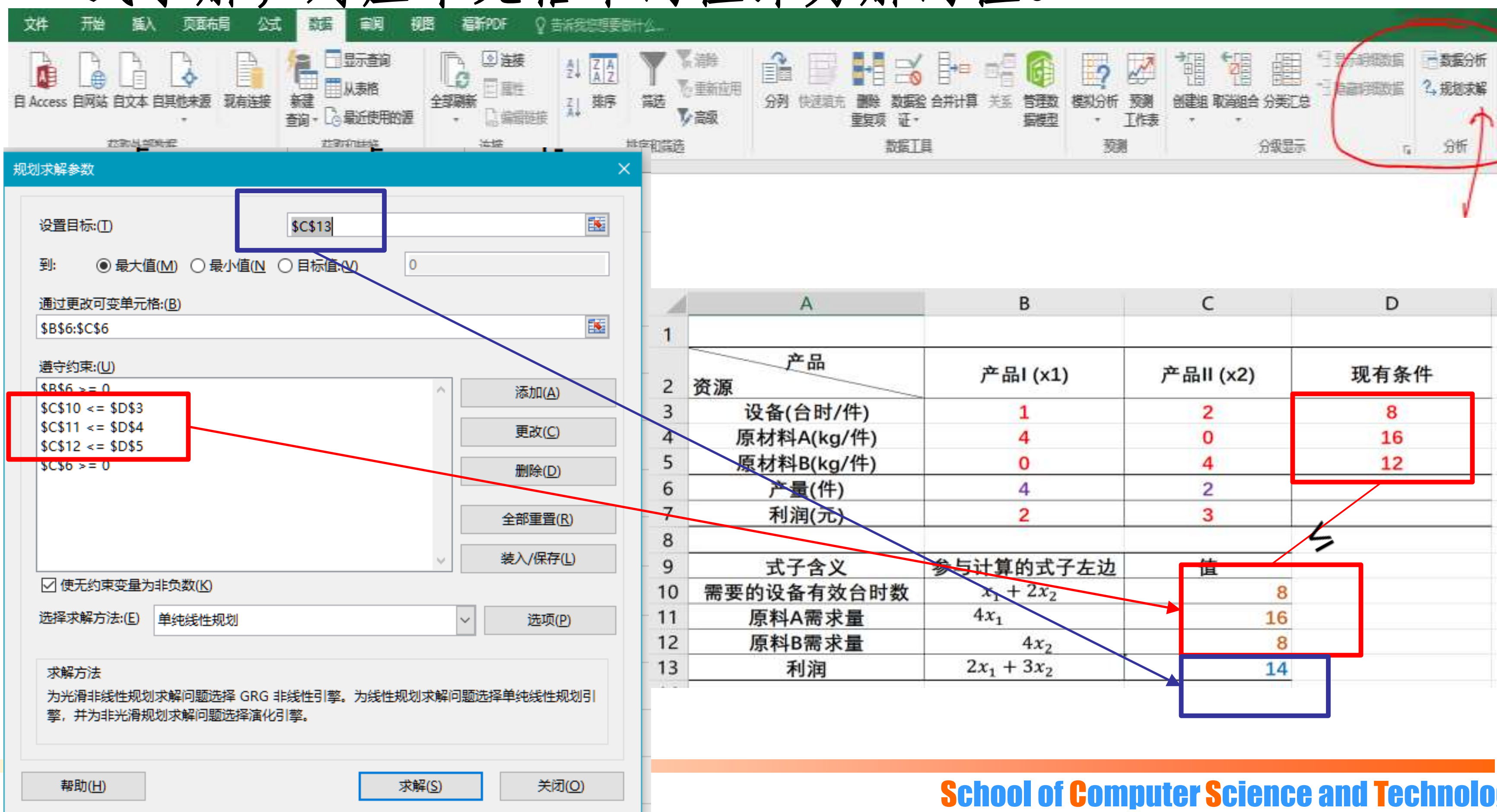
=SUM(PRODUCT(B3,B6),PRODUCT(C3,C6))

=SUM(PRODUCT(B3,B6),PRODUCT(C3,C6))

=B6*2+C6*3

使用Excel

- 第三步：点击Excel规划求解宏，设置约束条件，进行公式求解，对应单元格中的值即为解的值。



2.7.3 使用Matlab

- 使用Matlab

$$\text{目标函数}: \max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{约束条件}: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

使用Matlab

1. 算法输入：

c: 价值系数$[c_1, c_2, \ldots, c_n]$; $1\times n$

A: 系数矩阵 $m\times n$

b: 约束方程组右方的常数$[b_1; b_2; \ldots; b_m]$; $m\times 1$

2. 算法初始化：

```
[m, n] = size(A); % m×n
assert(n>m);
X_B = n-m+1:n; % 1×m, 初始时，获取基变量的索引
z = 0; % 保存最优解的值
```

使用Matlab

3. 计算各非基变量的检验数：

C_B = *c*(X_B); % 基变量的价值系数

z_j = C_B*A; % 1×*n*, 求基变量系数和所有变量的乘积和（包括非基变量）

sigma_j = *c* - *z_j*; % 计算每个变量的检验数

X = zeros(1, *n*); % 初始化最优解

使用Matlab

4. 判断校验数是否都小于等于0，若是，则已得到最优解，终止计算（没有考虑无界情况）；否则，跳转到下一步：

```
if(max(sigma_j) <= 0)
  for i=1:m
        X(X_B(i))=b(i); % 最优解
  end
  for i=1:n
     z=z+(c(i)*X(i)); % 最优解的值
  end
  break;
end
```

5. 根据max(σ_j> 0)确定换入变量，并按θ规则确定换出变量：

```
[~, l_in] = max(sigma_j); % 确定换入变量序号
for(i = 1:m)
    if(A(i, l_in) > 0) % 按theta规则计算
        P(i) = b(i) / A(i, l_in);
    else
        P(i) = inf;
    end
end
[~, l_out] = min(P); % 确定换出变量的序号
```

使用Matlab

6.对x_{l_out}所对应的列向量进行迭代，将$a_{l_out,\ l_in}$转换为1，其余为0：

```
X_B(l_out) = l_in; % 换出
E = [b, A];
E(l_out, :) = E(l_out, :) / E(l_out, l_in+1); % 位置(l_out, l_in+1)置1
for(i = 1:m)
    if(i == l_out)
       continue;
    end
    ...
```

使用Matlab

```
...
while(1) % 对其他列进行初等行变换，使其为0
    E(i,:) = E(i, :) - E(i, l_in+1) * E(l_out, :);
    if(E(i, l_in+1) == 0)
      break;
    end
end
b = E(1:m, 1);
A = E(1:m, 2:n+1);
end
```

7. 返回步骤3

实例：例1

化成标准型后各输入数据为：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix}8\\ 16\\ 12\end{bmatrix}$$

$$c=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

使用Matlab

在matlab中运行程序：

```
>> A = [1,2,1,0,0;4,0,0,1,0;0,4,0,0,1];
>> b = [8;16;12];
>> c = [2,3,0,0,0];
>> [X, z] = simplex(c, A, b)
X =
    4    2    0    0    4
z =
   14
```

本章完

The end