011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平
计算机科学与技术学院


杨金龙摄

第1章 命题逻辑

1.3 命题演算的简单性质

- 命题演算L中的推理不需要借助于直观意义，但通过研究L的性质，可以从整体上把握L的形式推理的特性，从而了解L能做什么、不能做什么。
- **术语** 如果L的一条性质得到了证明(注意，一般不是在L中的形式证明)，则该性质称为一条关于L的**定理**。

1.3 命题演算的简单性质

❖ **定理1（单调性）**

1. 若$\Gamma \subseteq \Gamma'$且$\Gamma \vdash p$，则$\Gamma' \vdash p$；
2. 若$\vdash p$，则对任何Γ：$\Gamma \vdash p$。

证明 1. 设$\Gamma \subseteq \Gamma'$且$\Gamma \vdash p$，则依定义，存在p的一个从Γ的形式推理序列$p_1, \cdots, p_n (p_n = p)$，其中任何或者是L公理，或者是$\Gamma$中前提，或者是由它前面的公式用MP规则推出的。显然，此序列也是p的一个从Γ'的形式推理序列，故$\Gamma' \vdash p$。

2. 设$\vdash p$，即$\varnothing \vdash p$，由1得，对任何Γ：$\Gamma \vdash p$。

1.3 命题演算的简单性质

❖ **定理2**（紧致性）若$\Gamma \vdash p$，则存在有穷集$\Gamma' \subseteq \Gamma$且使$\Gamma' \vdash p$。

证明 设$\Gamma \vdash p$，则存在p的一个从Γ的形式推理序列$p_1, \cdots, p_n$ ($p_n = p$)。令$\Gamma' = \{p_1, \cdots, p_n\} \cap \Gamma$。显然，$\Gamma'$是$\Gamma$的有穷子集并且$\Gamma' \vdash p$。

◆**观察** 紧致性是自动推理的一个必要条件。

1.3 命题演算的简单性质

❖ **定义**（一致/相容）若存在公式p使得$\Gamma\vdash p$且$\Gamma\vdash\neg p$，则称公式集Γ是不一致的/不相容的；否则，称Γ是一致的/相容的。

❖ **定理3**（平凡性）若Γ是不相容的，则对任何p有$\Gamma\vdash p$。

证明 设Γ是不相容的。依定义，存在q使得$\Gamma\vdash q$且$\Gamma\vdash\neg q$。于是，对任何p，p的一个从Γ的形式推理序列如下：

$$q_1, \cdots, q, q_{n+1}, \cdots, \neg q, q_{m+1}, \cdots, q_{m+k}, p$$

其中$q_{m+1}, \cdots, q_{m+k}$是1.2节例4否定前件律$\vdash\neg q\to(q\to p)$的一个形式证明序列。因此，对任何p有$\Gamma\vdash p$。

1.3 命题演算的简单性质

- **观察** 平凡性定理表明，对任何一个公式集Γ，如果Γ是不相容的，则作为推理前提，Γ不仅无用，而且可能有害。
- **观察** 通常逻辑不对前提集提出任何要求；但明确指出，不相容的前提集在逻辑上是有问题的。

1.3 命题演算的简单性质

❖ **定理4**（演绎定理） $\Gamma\cup\{p\}\vdash q$当且仅当$\Gamma\vdash p\to q$。

证明 自修

❖ **推论**（假设三段论HS）$\{p\to q, q\to r\}\vdash p\to r$。

证明 依演绎定理，只需证明$\{p\to q,\ q\to r,\ p\}\vdash r$。下面是$r$的一个从$\{p\to q, q\to r, p\}$的形式推理：$p, p\to q, q, q\to r, r$。

❖ 不同于公理模式，假设三段论的作用类似与MP，可视为一条**派生推理规则**。

1.3 命题演算的简单性质

❖ 两种证明方法

1. **直接证明** 只允许使用(L1)、(L2)、(L3)和(MP)，而且必须写出全部证明根据，每一步只允许有一条证明根据。
2. **简化证明** 可以使用(L1)、(L2)、(L3)和(MP)，以及所有已经证明的定理、推论等结果，仍然要求给出全部证明根据。

◆ 例如，演绎定理和假设三段论的证明都是简化证明。

1.3 命题演算的简单性质

思考题

1.4 演绎定理说明了什么？

1.5 直接证明$\vdash \neg p \to (p \to q)$最少需要多少步？

习题

1.3 用直接证明和简化证明方法证明 p.22: 2(3); 3(1).