概率论与数理统计 B　第六周作业　3 月 27 日 周五

PB18151866 龚小航

4.1 试求下列随机变量 X 的期望 $E(X)$：

X 服从参数为 p 的几何分布，其中 $0<p<1$，即

$$P(X = k)=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,3,\cdots$$

解：直接由离散型随机变量期望的定义，有：

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k*P(X = k)=\sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$$

为求和式的值，利用错位相减法。令：

$$S=1*(1-p)^0+2*(1-p)^1+\cdots\cdots+k(1-p)^{k-1}+\cdots\cdots$$

$$\Rightarrow\quad (1-p)S=\quad 0 \quad\quad +1*(1-p)^1+2*(1-p)^2+\cdots\cdots+k(1-p)^k+\cdots\cdots$$

上式减下式，得：

$$pS=\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}=\lim_{k\to\infty}(1*\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)})=\frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow\quad E(X)=pS=\frac{1}{p}$$

4.6. (2017 年全国考研试题) 设随机变量 X 的分布函数 $\mathrm{F(x)}=0.5\Phi(\mathrm{x})+0.5\Phi(\frac{\mathrm{x}-4}{2})$，其中 $\Phi(\mathrm{x})$ 为标准正态分布函数，求 $E(X)$ ．

解：标准正态分布符合 $\Phi(\mathrm{x})\sim\mathrm{N}(0,1)$ ，均值为 $x=\mu$。因此 Φ 括号内的变量均值为 0. 显然：

$$E\big(\Phi(\mathrm{x})\big)=0\ ;\ \ E\left(\Phi\left(\frac{\mathrm{x}-4}{2}\right)\right)=4$$

所以有 $\mathrm{E(X)}=\mathrm{E}\left(0.5\Phi(\mathrm{x})+0.5\Phi\left(\frac{\mathrm{x}-4}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}E\big(\Phi(\mathrm{x})\big)+\frac{1}{2}E\left(\Phi\left(\frac{\mathrm{x}-4}{2}\right)\right)=2$

4.7. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = ce^{-x^2+x}, -\infty < x < \infty$. 试求常数 c, 及 $E(X)$.

解：随机变量的密度函数必须满足：$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. 因此有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} ce^{-x^2+x}\,dx = c\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\,dx = ce^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,d(x-\frac{1}{2}) = ce^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi} \equiv 1$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{e^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}}$$

再求其均值。将X的概率密度函数形式写出：

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}}\ e^{-x^2+x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+x+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$$

显然，$\mathrm{X} \sim \mathrm{N}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ，因此均值 $\mathrm{E(X)} = \mu = \frac{1}{2}$

4.8. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{x^n}{n!\,e^x}, \quad x > 0.$$

试求 $E(X)$.

解：直接由连续性随机变量的均值意义就可以得到：$(x > 0)$

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^{\infty} x\frac{x^n}{n!\,e^x}dx = \frac{1}{n!}\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{e^x}dx$$

观察形式，与Γ函数的定义式相比较：$\Gamma(x) = \int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t}dt \ \ (x > 0)$ 显然有：

$$E(x) = \frac{\Gamma(n+2)}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

4.9. 设 X 为一个连续型随机变量，试对下列各种情形，求 $E(X)$.

(1) 若 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ ,\quad x>0$$

其中 $\sigma>0$ 为常数，称 X 服从瑞利($Rayleigh$)分布.

(2) 若 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1}e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k},\quad x>0$$

其中 $k,\lambda>0$ 为常数，则称 X 服从威布尔($Weibull$)分布.

解：(1) 直接由连续型随机变量均值的定义，有：

$$E(x)=\int_0^\infty xf(x)\,dx=\int_0^\infty x\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\int_0^\infty\frac{x^2}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty x^2*\left(\frac{-2\sigma^2}{2x}\right)d\left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)$$

$$=-\int_0^\infty x\,d\left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)=-\left(\left(xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)\Bigg|_{x=0}^{\infty}-\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\right)=\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\sqrt{2}\sigma\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}d\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)=\sqrt{2}\sigma*\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$$

(2) 直接由连续型随机变量均值的定义，有：

$$E(x)=\int_0^\infty xf(x)\,dx=\int_0^\infty x\frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1}e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}dx=\int_0^\infty\frac{k}{\lambda^k}x^ke^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}dx=\int_0^\infty -x\,de^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}$$

$$=\left(-xe^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}\right)\Big|_{x=0}^{\infty}-\int_0^\infty -e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}dx=\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}dx$$

再令$t=\dfrac{x^k}{\lambda^k}$,即有$x=\lambda t^{\frac{1}{k}}$ ， $dx=\dfrac{\lambda}{k}t^{\frac{1}{k}-1}dt$

$$E(x)=\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}dx=\frac{\lambda}{k}\int_0^\infty t^{\frac{1}{k}-1}e^{-t}\,dt=\frac{\lambda}{k}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)=\lambda\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)$$

其中利用了 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$