解 26. *(1).* 令$g_1(X)=e^X$, 由于

$\int_{-\infty}^{+\infty}|g_1(x)|f(x)dx=\int_1^2 2e^x(x-1)dx=2e$, 收敛.

故$E(g_1(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g_1(x)f(x)dx=2e$.

(2). 令$g_2(X)=\dfrac{1}{X}$, 由于

$\int_{-\infty}^{+\infty}|g_2(x)|f(x)dx=\int_1^2 2\frac{1}{x}(x-1)dx=2-2\ln 2$, 收敛.

故$E(g_2(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g_2(x)f(x)dx=2-2\ln 2$.

解 29. 设情人节期间玫瑰花的销售量为随机变量X, 该店获利为随机变量Y. 同时设情人节期间该店购入玫瑰花k朵. 显然若$k<m$或$k>n$均无法得到最高收益, 故不妨仅考虑$m\le k\le n$.

则有$Y=aX-b(k-X)=(a+b)X-bk=g(X)$.

由于$X\sim U(m,n)$, 则$P(X=i)=p_i=\dfrac{1}{n-m+1}(m\le i\le n)$, 则:

$$\begin{aligned}E(Y)=E(g(X))&=\sum_{i=m}^{n}g(i)p_i\\&=\frac{1}{n-m+1}\left(\sum_{i=m}^{k}((a+b)i-bk)+\sum_{i=k+1}^{n}ak\right)\\&=\frac{1}{n-m+1}\left(-\frac{1}{2}(a+b)k^2+(an+bm+\frac{a-b}{2})k-\frac{1}{2}(a+b)m^2+\frac{1}{2}(a+b)m\right)\end{aligned}$$

故当k取最靠近$\dfrac{an+bm}{a+b}+\dfrac{a-b}{2(a+b)}$的整数时, 店家能够获得最大平均收益.

注：以上分析中销售量必然为整数，故服从离散型的均匀分布。

解 31.

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{0}-xf(x)dx+\int_0^1 xf(x)dx+\int_1^{+\infty}f(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx-\int_{-1}^{0}\frac{x}{\pi(1+x^2)}dx+\int_0^1\frac{x}{\pi(1+x^2)}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx\\&=\frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_{-\infty}^{-1}-\frac{1}{2\pi}\ln(1+x^2)\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{2\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^1+\frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_1^{+\infty}\\&=\frac{1}{2}+\frac{\ln 2}{\pi}\end{aligned}$$

解 32. *(1).* 设随机变量Y的密度函数为$f(y)$, 则$f(y)=\sum_{i=1}^{2}f(y|x=i)P(x=i)$.

则

$$f(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \dfrac{3}{4} & 0\le y<1\\ \dfrac{1}{4} & 1\le y<2\\ 0 & y\ge 2\end{cases}$$

则分布函数

$$F(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)dy=\begin{cases}0 & y<0\\ \dfrac{3y}{4} & 0\le y<1\\ \dfrac{y}{4}+\dfrac{1}{2} & 1\le y<2\\ 1 & y\ge 2\end{cases}$$

(2). $EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)dy=\int_0^1\frac{3y}{4}dy+\int_1^2\frac{y}{4}dy=\frac{3}{4}$

解 81. (1). $P(X=k,X+Y=m)=P(X=k,Y=m-k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\frac{\mu^{m-k}}{(m-k)!}e^{-\mu}$

而$P(X+Y=m)=\sum\limits_{k=0}^{m}P(X=k)P(Y=m-k)=\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{\mu^{m-k}}{(m-k)!}e^{-\lambda-\mu}=\frac{(\lambda+\mu)^m}{m!}e^{-\lambda-\mu}$

故$P(X=k|X+Y=m)=\frac{P(X=k,X+Y=m)}{P(X+Y=m)}=\binom{m}{k}\frac{\lambda^k\mu^{m-k}}{(\lambda+\mu)^m}$

$E(X|X+Y=m)=\sum\limits_{k=0}^{m}k\binom{m}{k}\frac{\lambda^k\mu^{m-k}}{(\lambda+\mu)^m}=\frac{1}{(\lambda+\mu)^m}\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{m-1}{k-1}\lambda^{k-1}\mu^{m-k}=\frac{m\lambda}{(\lambda+\mu)^m}(\lambda+\mu)^{m-1}=\frac{\lambda m}{\lambda+\mu}$

(2). $P(X=k,X+Y=m)=P(X=k,Y=m-k)=\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}p^m(1-p)^{2n-m}$

$P(X+Y=m)=\sum\limits_{k=0}^{m}P(X=k)P(Y=m-k)=\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}p^m(1-p)^{2n-m}$

故$P(X=k|X+Y=m)=\frac{P(X=k)}{P(X+Y=m)}=\frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}{\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}$

$E(X|X+Y=m)=\sum\limits_{i=0}^{m}i\frac{\binom{n}{i}\binom{n}{m-i}}{\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}=\frac{m}{2}$

解 7. 已知$c=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}}$, $EX=\frac{1}{2}$.

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=c\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-x^2+x}dx=ce^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}dx$

令$t=x-\frac{1}{2}$, 有$EX^2=ce^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2e^{-t^2}dt=\frac{3}{4}$

故$Var(X)=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{2}$

解 11. 因为随机变量X服从指数分布, 即随机变量X的密度函数为$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},x>0$时. 故:

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\lambda\int_0^{+\infty}xe^{-\lambda x}=\frac{1}{\lambda}$

$EX^2=\int_0^{+\infty}x^2e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}x^2d(e^{-\lambda x})=\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty}xe^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}$

$Var(X)=EX^2-(EX)^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$

故$P(X>\sqrt{Var(X)})=P(X>\frac{1}{\lambda})=1-P(X\le\frac{1}{\lambda})=1-\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-1}$

解 49. 由于X与Y相互独立，故

$Var(X-Y+Z-1)=Var(3X-Y-1)=Var(3X)+Var(Y)+Var(-1)=9Var(X)+Var(Y)=18+\frac{1}{12}=\frac{217}{12}$

注：由于X,Z不相互独立，故$Var(X-Y+Z-1)=Var(X)+Var(Y)+Var(Z)$不成立。

解 52. *(1).* 设随机变量X_1的密度函数为 $f_1(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

随机变量X_2的密度函数为 $f_2(x)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$EX_1=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_1(x)dx=\int_0^{+\infty} x\lambda_1 e^{\lambda_1 x}dx=\frac{1}{\lambda_1}=1$

即$\lambda_1=1$. 同理$\lambda_2=\frac{1}{2}$

即 $f_1(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ $F_1(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ $F_2(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

由于$Y=\min\{X_1,X_2\}$, 则

$$F_Y(y)=1-(1-F_1(y))(1-F_2(y))=\begin{cases}1-e^{-\frac{3y}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}e^{-\frac{3y}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

$EY=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy=\frac{3}{2}\int_0^{+\infty} ye^{\frac{3y}{2}}dy=\frac{2}{3}$

由于$Z=\max\{X_1,X_2\}$, 则

$$F_Z(z)=F_1(z)F_2(z)=\begin{cases}1-e^{-\frac{z}{2}}-e^{-z}+e^{-\frac{3z}{2}} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

故 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}+e^{-z}-\frac{3}{2}e^{-\frac{3z}{2}} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

$EZ=\int_{-\infty}^{+\infty} zf_Z(z)dz=\int_0^{+\infty} z\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}+e^{-z}-\frac{3}{2}e^{-\frac{3z}{2}}\right)dz=\frac{7}{3}$

(2). $EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)dy=\int_0^{+\infty} y^2\left(\frac{3}{2}e^{-\frac{3y}{2}}\right)dy=\frac{8}{9}$

故$Var(Y)=EY^2-(EY)^2=\frac{8}{9}-\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$

$EZ^2=\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_Z(z)dz=\int_0^{+\infty} z^2\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}+e^{-z}-\frac{3}{2}e^{-\frac{3z}{2}}\right)=8+2-\frac{8}{9}=\frac{82}{9}$

$Var(Z)=EZ^2-(EZ)^2=\frac{82}{9}-\frac{49}{9}=\frac{11}{3}$

解 63. *(1).* 令$Z_1=\alpha X+\beta Y,\ Z_2=\alpha X-\beta Y$

则$EZ_1=\alpha EX+\beta EY=(\alpha+\beta)\mu$, $EZ_2=\alpha EX-\beta EY=(\alpha-\beta)\mu$

$Z_1Z_2=(\alpha X+\beta Y)(\alpha X-\beta Y)=\alpha X^2-\beta Y^2$, 则: $EZ_1Z_2=\alpha EX^2-\beta EY^2$

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \xlongequal{t=\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mu^2\sqrt{2\pi}+\sigma^2\sqrt{2\pi})=\mu^2+\sigma^2$

同理$EY^2=\mu^2+\sigma^2$

故$Cov(Z_1,Z_2)=EZ_1Z_2-EZ_1EZ_2=\alpha EX^2-\beta EY^2-\alpha^2(EX)^2+\beta(EY)^2=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2$

(2). 显然Z_1和Z_2均为正态随机变量，考虑(Z_1,Z_2)的联合分布。注意到(X,Y)服从二维正态分布，利用随机向量的密度变换公式，易知(Z_1,Z_2)也服从二维正态分布，此时，Z_1,Z_2的独立性等价于它们的不相关性，从而当$Cov(Z_1,Z_2)=0$，即$\alpha=\beta$或$\alpha=-\beta$时，Z_1和Z_2相互独立。

注：也可通过密度变换公式证明Z_1, Z_2相互独立来求解。因为独立情形下的两个(或多个)正态随机变量，它们的联合分布必然还是正态分布，故独立等价于不相关。