第二章综合整理

在这里声明一下下，就是，每次整理的例题呢，主要是针对题目的类型、特点来选择的，大部分是我在学习的时候标记的感觉比较有代表性的题目。例题的解题思路一般是没有问题的，当然可能存在更好的解法，如果我知道的我会写上，供大家参考。但是呢，例题的解题过程不一定是完全标准的，在习题课我会和大家分享一下一种相对标准的解题过程样子。

- 留数定理（知识点回顾）

1．留数定理

设 $f(z)$在区域 σ 内除有有限个孤立奇点 $b_k(k=1,2,\cdots,n)$外是单值解析的，在闭区域 $\bar{\sigma}=\sigma+l$（l 为 σ 的边界围线）上连续，则有

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}f(b_k) \qquad (1.5.1)$$

其中，$\mathrm{res}f(b_k)$表示 $f(z)$在其孤立奇点 b_k 的去心邻域 $0<|z-b_k|<R_k$ 内的 Laurent 展开的负一次幂$\frac{1}{z-b_k}$的系数，记作

$$\mathrm{res}f(b_k)=C_{-1}（或\ \mathrm{res}[f(z),b_k]=C_{-1}） \qquad (1.5.2)$$

称作函数 $f(z)$在孤立奇点 b_k 处的**留数**，上述定理被称为**留数定理**.

由(1.5.1)式易于得到

$$\mathrm{res}f(b_k)=\frac{1}{z\pi\mathrm{i}}\oint_{l_k}f(z)\mathrm{d}z(k=1,2,\cdots,n) \qquad (1.5.3)$$

其中 l_k 为仅包围奇点 b_k 的闭围道（此式也可作为留数的定义式）.

2．无穷远点的留数

定义

$$\mathrm{res}f(\infty)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{l}f(z)\mathrm{d}z \qquad (1.5.4)$$

其中，$\oint_l$ 表顺时针沿 l 积分一周的积分号，而 l 是以 $z=0$ 为中心以 R 为半径将所有有限个孤立奇点 $b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 包含于其内的闭围道圆周. 显然，无穷远处的留数应等于函数 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域 $R<|z|<\infty$ 中的 Laurent 展开 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k$ 的负一次幂的系数，即

$$\operatorname{res} f(\infty) = -C_{-1} \tag{1.5.5}$$

而

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(b_k) + \operatorname{res} f(\infty) = 0 \tag{1.5.6}$$

3. 计算留数的方法

设 b_k 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，则

(1) 无论 b_k 为 $f(z)$ 的何种类型奇点，$f(z)$ 在 b_k 处的留数，均可通过留数的两个定义式：(1.5.2) 和 (1.5.3) 式来求.

(2) 若 b_k 为 $f(z)$ 的 n 阶极点，则

$$\operatorname{res} f(b_k) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left[(z-b_k)^n f(z)\right]_{z=b_k} \tag{1.5.7}$$

(3) 若 b_k 为 $f(z)$ 的单极点（即一阶极点），则

$$\operatorname{res} f(b_k) = \lim_{z \to b_k} \left[(z-b_k) f(z)\right] \tag{1.5.8}$$

特别是当 $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$，$\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 均在 b_k 的邻域中解析，$\varphi(b) \neq 0$，$\psi(b) = 0$ 但 $\psi'(b) \neq 0$ 时

$$\operatorname{res} f(b_k) = \frac{\varphi(b)}{\psi'(b)} \tag{1.5.9}$$

至于 $\operatorname{res} f(\infty)$，则可通过其定义式 (1.5.4)、(1.5.5)，或 (1.5.6) 式来计算.

✧ 利用留数定理计算积分：

1. 利用留数定理计算实定积分的基本方法

利用留数定理计算实定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 大体应经历如下几个步骤：

(1) 将被积实函数或与被积实函数有关的辅助函数延拓到复域（通常即是简单地将 $f(x)$ 改写为 $f(z)$）；

(2) 视实积分区间 $[a,b]$ 为复平面中实轴上不含 $f(z)$ 奇点的一段或数段（若含奇点，应将含奇点的一小段挖去），补充一段或数段曲线（包括直线），并使 $f(z)$ 在补充段上亦无奇点，构成一复平面的复围道；

(3) 用留数定理计算复变函数的围道积分，若补充段的复线积分易于算出，则由这二者之差立即可算出需求实定积分.

对于 $f(x)$ 延拓为 $f(z)$ 后为多值函数的情形，应划分出 $f(z)$ 的单值分支，对于各单值，再按(2)，(3)两步计算积分.

2. 利用留数定理计算实积分时常需用到的两个引理：

(1) Jordan 引理：设当 $|z|\to\infty$ 时函数 $f(z)$ 在包括实轴的上半平面中一致趋于零，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{ipz}\,dz = 0 \tag{1.5.10}$$

其中，$p>0$，C_R 是以 $z=0$ 为中心 R 为半径的位于上半平面的半圆弧.

(2) 小弧引理：设 $f(z)$ 沿圆弧 $C_r: z-a=re^{i\theta}$ ($\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$，$r$ 充分小) 上连续，且 $\lim\limits_{r\to0}[(z-a)f(z)]=\lambda$ (λ 为常数，包括 0) 在 c_r 上一致成立(见图 1.31)，则

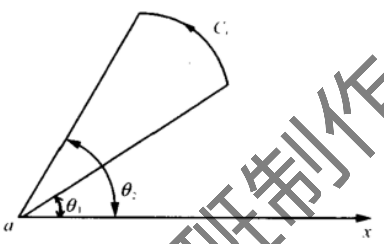


图 1.31

$$\lim_{r\to0}\int_{C_r} f(z)\,dz = i(\theta_2-\theta_1)\lambda \tag{1.5.11}$$

特别是若 a 为 $f(z)$ 的单极点，则

$$\lim_{r\to0}\int_{C_r} f(z)\,dz = i(\theta_2-\theta_1)\,\mathrm{res}f(a) \tag{1.5.12}$$

3. 几类典型实积分的计算公式

(1) 设 $f(z)$ 除在实轴上有有限个一阶极点 a_j ($j=1,2,\cdots,m$)、在上半平面有有限个孤立奇点 b_k ($k=1,2,\cdots,n$) 外，处处解析；在包括实轴的上半平面中，当 $|z|\to\infty$ 时 $zf(z)$ 一致趋于零，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}f(b_k) + \pi i\sum_{j=1}^{m}\mathrm{res}f(a_j) \tag{1.5.13}$$

(2) 设 $f(z)$ 除在实轴上有有限个单极点 a_j ($j=1,2,\cdots,m$)、在上半平面有有限个孤立奇点 b_k ($k=1,2,\cdots,n$) 外处处解析；在包括实轴的上半平面中当 $|z|\to\infty$ 时 $f(z)$ 一致趋于零；且 $p>0$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ipx}\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}[f(b_k)e^{ipb_k}] + \pi i\sum_{j=1}^{m}\mathrm{res}[f(a_j)e^{ipa_j}] \tag{1.5.14}$$

特别当 $f(x)$ 为偶函数时有

$$\int_0^{\infty} f(x)\cos px\,\mathrm{d}x = \pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{res}[f(b_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pb_k}] + \frac{\pi}{2}\mathrm{i}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{res}[f(a_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pa_j}] \tag{1.5.15}$$

而当 $f(x)$ 为奇函数时有

$$\int_0^{\infty} f(x)\sin px\,\mathrm{d}x = \pi\sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}[f(b_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pb_k}] + \frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{res}[f(a_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pa_j}] \tag{1.5.16}$$

(3) 设 $R(\cos\theta;\sin\theta)$ 为 $\cos\theta,\sin\theta$ 的有理函数，且在闭区间 $[0,2\pi]$ 上连续，若令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则有

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}f(b_k) \tag{1.5.17}$$

其中，$f(z)=\frac{1}{\mathrm{i}z}R\left(\frac{z+z-1}{2},\frac{z-z-1}{2\mathrm{i}}\right)$，而 $b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内的孤立奇点.

(4) $$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \tag{1.5.18}$$

(5) $$\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \tag{1.5.19}$$

(6) $$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\quad(a>0,b\text{ 为任意实数}) \tag{1.5.20}$$

(7) $$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}(0<\alpha<1) \tag{1.5.21}$$

✧ 例题

(1) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$； (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a+\sin^2 x}\mathrm{d}x\quad(a>0)$；

(3) $\int_0^{2\pi}\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x$.

(1) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\frac{2}{3+\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{2\pi}\frac{1}{3+\cos\Theta}\mathrm{d}\Theta$

$(\Theta=2\theta)$. 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}$，则 $\cos\Theta=\frac{z^2+1}{2z}$，$\mathrm{d}\Theta=\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$，故有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta &= 2\oint_{|z|=1}\frac{2z}{z^2+6z+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z\\ &= -4\mathrm{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2+6z+1}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$f(z)=\dfrac{1}{z^2+6z+1}$的奇点为 $z=-3\pm2\sqrt{2}$,均为单极点,仅有 $z=-3+2\sqrt{2}$在$|z|<1$内.而

$$\operatorname{res}f(-3+2\sqrt{2})=\frac{1}{[z^2+6z+1]'}\Bigg|_{z=-3+2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2z+6}\Bigg|_{z=-3+2\sqrt{2}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

故最后得

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta=-4\mathrm{i}\cdot2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}f(-3+\sqrt{2})=\frac{8\pi}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pi$$

(2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a+\sin^2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{2a+1-\cos2x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{2a+1-\cos\theta}\mathrm{d}\theta\qquad(\theta=2x)$$

$$=\mathrm{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2-(4a+2)z+1}\mathrm{d}z\qquad(z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$$

$f(z)=\dfrac{1}{z^2-(4a+2)z+1}$有单极点 $z=2a+1\pm2\sqrt{a^2+a}$,且仅有 $2a+1-2\sqrt{a^2+a}$在$|z|<1$内(因为 $a>0$),所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a+\sin^2x}\mathrm{d}x=\mathrm{i}\cdot2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}f(2a+1-2\sqrt{a^2+a})$$

$$=-2\pi\frac{1}{2z-(4a+2)}\Bigg|_{z=2a+1-2\sqrt{a^2+a}}=\frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}$$

(3) 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$,则有

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}x\mathrm{d}x=\oint_{|z|=1}\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^{2n}\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=\frac{1}{\mathrm{i}2^{2n}}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}\mathrm{d}z$$

$z=0$为 $f(z)=\dfrac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}$在$|z|<1$内的惟一奇点,且是 $2n+1$ 阶极点,故可用极点处留数的计算公式(1.5.7)计算该点的留数.但由于求函数的 $2n$ 次导数比较麻烦,所以下面我们直接将函数在 $0<|z|<\infty$中展开,而用留数的定义来求.由二项式定理有

$$f(z)=\frac{1}{z^{2n+1}}(z^{2+1})^{2n}=\frac{1}{z^{2n+1}}\sum_{k=0}^{2n}\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}z^{4n-2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}z^{4n-2k-2n-1}$$

其中,$k=n$ 的项,为 z^{-1}项.所以

$$\operatorname{res}f(0)=C_{-1}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

而

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}x\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{i}2^{2n}}\cdot2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}f(0)$$

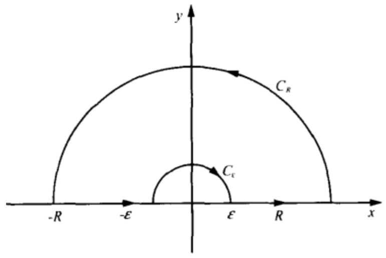
$$= \frac{2\pi}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{2\pi \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} \mathrm{d}x \,(a \geqslant 0, b \geqslant 0)$.

解 考虑函数$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}$沿如图 1.34 所示的围道积分,由于函数在围道内解析,故有

$$\oint_l \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2} \mathrm{d}z = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}}{x^2} \mathrm{d}x + \int_{C_\epsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2} \mathrm{d}z$$

$$+ \int_{\epsilon}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}}{x^2} \mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2} \mathrm{d}z = 0 \quad ①$$



而

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}}{x^2} \mathrm{d}x = \int_{\epsilon}^{R} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}bx}}{x^2} \mathrm{d}x$$

所以

$$\int_{\epsilon}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}}{x^2} \mathrm{d}x + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}}{x^2} \mathrm{d}x = 2\int_{\epsilon}^{R} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} \mathrm{d}x \quad ②$$

因为

$$\lim_{z \to 0} \left[z \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2} \right] = \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z} = \mathrm{i}(a - b)$$

故由小弧引理有

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_\epsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2} \mathrm{d}z = -\mathrm{i}\pi \cdot \mathrm{i}(a - b) = \pi(a - b) \quad ③$$

又由 Jordan 引理有

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z^2} \mathrm{d}z = 0 \quad ④$$

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2} \mathrm{d}z = 0 \quad ⑤$$

当 $R\to\infty,\varepsilon\to 0$ 时将②～⑤诸式一并代入①式于是有

$$2\int_0^{\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\mathrm{d}x=\pi(b-a)$$

即

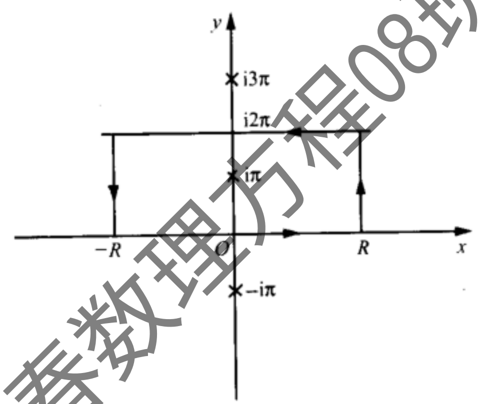
$$\int_0^{\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi(b-a)}{2}$$

计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\mathrm{d}x \qquad (0<a<1)$.

解 为计算简便,我们考虑 $f(z)$ 沿如图(1.38)所示的围道积分.则由留数定理有

$$\oint_l \frac{e^{az}}{1+e^z}\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\mathrm{d}x+\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\mathrm{d}(iy)+\int_R^{-R}\frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^x}\mathrm{d}x$$

$$+\int_{2\pi}^{0}\frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}\mathrm{d}(iy)=2\pi i\,\mathrm{res}f(i\pi) \qquad ①$$



而

$$\left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\mathrm{d}(iy)\right|\leqslant\max\left|\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\right|\cdot 2\pi$$

$$\leqslant\frac{|e^{a(R+iy)}|}{|e^{R+iy}|-1}\cdot 2\pi=\frac{2\pi e^{aR}}{e^R-1}\xlongequal{R\to\infty}0 \qquad ②$$

类似的有

$$\left|\int_{2\pi}^{0}\frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}\mathrm{d}(iy)\right|\xlongequal{R\to\infty}0 \qquad ③$$

又令 $g(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{1+e^z}{e^{az}}$,则 $g(i\pi)=0$,而 $g'(i\pi)=\left.\frac{e^ze^{az}-a(1+e^z)e^{az}}{e^{2az}}\right|_{z=i\pi}=\frac{-e^{ia\pi}}{e^{i2a\pi}}\neq 0$ 所以,$z=i\pi$ 为 $f(z)$ 的一阶极点.

$$\mathrm{res}f(i\pi)=\left.\frac{e^{az}}{[1+e^z]'}\right|_{z=i\pi}=\frac{e^{ia\pi}}{e^{i\pi}}=-e^{ia\pi} \qquad ④$$

当 $R\to\infty$ 时将②～④诸式一并代入①式，并注意到 $\int_R^{-R}\frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^x}dx=-e^{i2\pi a}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$，于是得

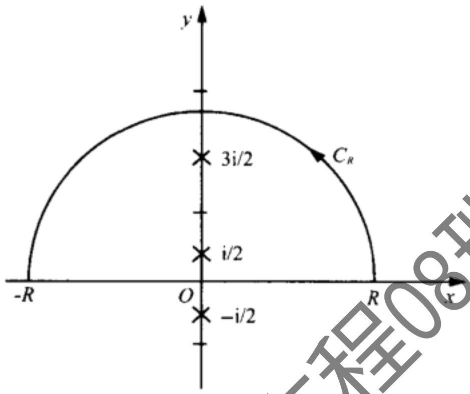
$$(1-e^{i2\pi a})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx=-2\pi i e^{ia\pi}$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx=-\frac{2\pi i e^{ia\pi}}{1-e^{i2\pi a}}=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

计算积分 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{\cosh\pi x}dx\quad(|\alpha|<\pi,\alpha$ 为实 数).

解 法一 考虑 $f(z)$ 沿如图 1.41 所示的围道的积分，则



$$\oint_l\frac{e^{az}}{\cosh\pi z}dz=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{\cosh\pi x}dx+\int_{C_R}\frac{e^{az}}{\cosh\pi z}dz=2\pi i\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{res}f(z_k)$$

①

因为

$$\lim_{z\to\infty}[z\cdot f(z)]=\lim_{z\to\infty}\frac{2ze^{az}}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}}\quad(|\alpha|<\pi)$$

$$=\lim_{z\to\infty}\frac{2z}{e^{(\pi-a)z}+e^{-(\pi+a)z}}=0$$

所以由 Jordan 引理有

$$\lim_{z\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{az}}{\cosh\pi z}dz=0 \qquad ②$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{res}f(z_k)=\frac{e^{i\alpha/2}}{i\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{i\alpha k}$$

至于该留数级数的和，我们可这样得到，先在 α 上加上一个小的正虚部 $i\beta(\beta>0)$，则此时 $\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{res}f(z_k)=\frac{e^{i\alpha/2-\beta/2}}{i\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-e^{i\alpha}e^{-\beta})^k=$
$\frac{e^{i\alpha/2-\beta/2}}{\pi i}\frac{1}{1+e^{i\alpha-\beta}}$

这是因为$|-e^{i\alpha}e^{-\beta}|=e^{-\beta}<1$. 再使$\beta\to 0$,于是得该留数级数的和为

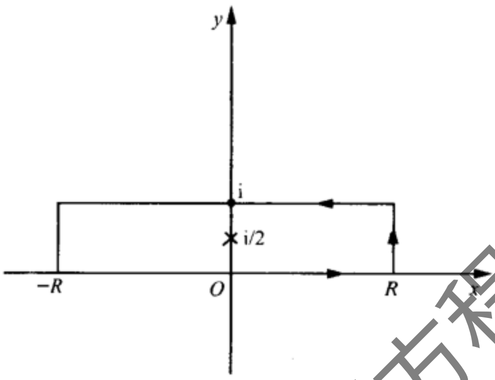
$$\sum_{k=0}^{\infty}\operatorname{res}f(z_k)=\frac{e^{i\alpha/2}}{i\pi}\frac{1}{1+e^{i\alpha}} \qquad ③$$

当$R\to\infty$时将②,③两式代入①式于是得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{\cosh\pi x}dx=2\pi i\cdot\frac{e^{i\alpha/2}}{i\pi}\cdot\frac{1}{1+e^{i\alpha}}=\frac{1}{\cos\alpha/2}$$

法二　考虑$f(z)$沿图 1.42 所示的围道的积分,则

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{\alpha x}}{\cosh\pi x}dx+\int_{0}^{1}\frac{e^{\alpha(R+iy)}}{\cosh\pi(R+iy)}d(iy)+\int_{R}^{-R}\frac{e^{\alpha x}e^{i\alpha}}{-\cosh\pi x}dx$$



$$+\int_{1}^{0}\frac{e^{\alpha(-R+iy)}}{\cosh\pi(-R+iy)}d(iy)=2\pi i\operatorname{res}f\left(\frac{i}{2}\right)$$

$$\left|\int_{0}^{1}\frac{e^{\alpha(R+iy)}}{\cosh\pi(R+iy)}d(iy)\right|\leqslant\frac{\alpha e^{|\alpha|R}}{e^{\pi R}}\xlongequal{R\to\infty}0$$

类似的有

$$\left|\int_{1}^{0}\frac{e^{\alpha(-R+iy)}}{\cosh\pi(-R+iy)}d(iy)\right|\xlongequal{R\to\infty}0$$

而

$$\operatorname{res}f\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{1}{i\pi}e^{i\alpha/2}$$

故当$R\to\infty$时有

$$(1+e^{i\alpha})\int_{0}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{\cosh\pi x}dx=2\pi i\cdot\frac{1}{\pi i}e^{i\alpha/2}.$$

所以

$$\int_{0}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{\cosh\pi x}dx=\frac{2e^{i\alpha/2}}{1+e^{i\alpha}}=\frac{1}{\cos\alpha/2}$$

● 矩形区域上的拉普拉斯问题：

在矩形区域 $0<x<a,0<y<b$ 上，求解 Laplace 方程的边值问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0,0<x<a,0<y<b, \\ u(0,y)=Ay(b-y) \\ u(a,y)=0 \\ u(x,0)=B\sin\dfrac{\pi x}{a} \\ u(x,b)=0 \end{cases}$$

解 我们曾经指出，用分离变量解题时，应将边界条件齐次化才能使变量分得开. 但对于 Laplace 方程，显然是不能将所有的边界条件都齐次化的，否则只会得到零解.

对于本问题我们可用叠加原理来处理. 令

$$u(x,y)=u^{\mathrm{I}}(x,y)+u^{\mathrm{II}}(x,y)$$

使 $u^{\mathrm{I}}(x,y)$ 和 $u^{\mathrm{II}}(x,y)$ 分别满足

$$\begin{cases} u^{\mathrm{I}}_{xx}+u^{\mathrm{I}}_{yy}=0 & ① \\ u^{\mathrm{I}}(0,y)=0 & ② \\ u^{\mathrm{I}}(a,y)=0 & ③ \\ u^{\mathrm{I}}(x,0)=B\sin\dfrac{\pi x}{a} & ④ \\ u^{\mathrm{I}}(x,b)=0 & ⑤ \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^{\mathrm{II}}_{xx}+u^{\mathrm{II}}_{yy}=0 & ⑥ \\ u^{\mathrm{II}}(0,y)=AY(b-Y) & ⑦ \\ u^{\mathrm{II}}(a,y)=0 & ⑧ \\ u^{\mathrm{II}}(x,0)=0 & ⑨ \\ u^{\mathrm{II}}(x,b)=0 & ⑩ \end{cases}$$

先解定解问题①～⑤. 令

$$u^{\mathrm{I}}(x,y)=X(x)Y(y)$$

则①式变为

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$$

即

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}\xlongequal{令}\mu$$

于是有

$$X''(x)-\mu X(x)=0 \qquad ⑪$$

$$Y''(y)+\mu Y(y)=0 \qquad ⑫$$

而②、③式变为

$$X(0)=0, X(a)=0 \tag{13}$$

解由⑪、⑬式构成的本征值问题,得

$$\mu=-\frac{n^2\pi^2}{a^2}, X_n(x)=C_n\sin\frac{n\pi}{a}x, n=1,2,\cdots$$

将 μ 代入⑫式并求解,得

$$Y''(y)-\frac{n^2\pi^2}{a^2}Y(y)=0, Y_n(y)=a_n e^{\frac{n\pi}{a}y}+b_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

从而有

$$u_n^{\mathrm{I}}(x,y)=(A_n e^{\frac{n\pi}{a}y}+B_n e^{-\frac{n\pi}{a}y})\sin\frac{n\pi}{a}x$$

其中,$A_n=a_nC_n, B_n=b_nC_n$. 所以

$$u^{\mathrm{I}}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{\frac{n\pi}{a}y}+B_n e^{-\frac{n\pi}{a}y})\sin\frac{n\pi}{a}x \tag{14}$$

⑭代入边界条件④得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)\sin\frac{n\pi x}{a}=B\sin\frac{\pi x}{a}$$

由此得

$$\begin{cases} A_1+B_1=B \\ A_n+B_n=0 \quad (n\neq 1) \end{cases} \tag{15}$$

⑭式代入边界条件⑤得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{n\pi b/a}+B_n e^{-n\pi b/a})\sin\frac{n\pi}{a}x=0$$

由此有

$$A_n e^{n\pi b/a}+B_n e^{-n\pi b/a}=0$$

结合⑭和⑮式,可得到关于系数 A_n、B_n 的两组方程组,即

$$\begin{cases} A_1+B_1=B \\ A_1 e^{\pi b/a}+B_1 e^{-\pi b/a}=0 \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} A_n+B_n=0 \quad (n\neq 1) \\ A_n e^{n\pi b/a}+B_n e^{-n\pi b/a}=0 \end{cases} \tag{17}$$

解方程组⑯得

$$A_1=\frac{-Be^{-\pi b/a}}{2\mathrm{sh}(\pi b/a)}, \quad B_1=\frac{Be^{-\pi b/a}}{2\mathrm{sh}(\pi b/a)}$$

解方程组⑰得

$$A_n=0, \quad B_n=0(n\neq 1)$$

将求得的系数代入⑭,于是得

$$u^{\mathrm{I}}(x,y)=\frac{B}{2\mathrm{sh}(\pi b/a)}[e^{\pi(b-y)/a}-e^{-\pi(b-y)/a}]\sin\frac{\pi x}{a}$$

$$= \frac{B\mathrm{sh}[\pi(b-y)/a]}{\mathrm{sh}[\pi b/a]}\sin\frac{\pi x}{a} \qquad ⑱$$

再求定解问题⑥～⑩.用同样的方法我们可求得

$$u^{\mathrm{II}}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n \mathrm{e}^{n\pi x/b} + D_n \mathrm{e}^{-n\pi x/b})\sin\frac{n\pi}{b}y \qquad ⑲$$

⑲式代入边界条件⑦得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(C_n + D_n)\sin\frac{n\pi y}{b} = Ay(b-y)$$

所以

$$C_n + D_n = \frac{2A}{b}\int_0^b \alpha(b-\alpha)\sin(n\pi\alpha/b)\mathrm{d}\alpha = \frac{4Ab^2}{(n\pi)^2}[1-(-1)^n] \qquad ⑳$$

⑲式代入边界条件⑧得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(C_n \mathrm{e}^{n\pi a/b} + D_n \mathrm{e}^{-n\pi a/b})\sin\frac{n\pi y}{b} = 0$$

所以

$$C_n \mathrm{e}^{n\pi a/b} + D_n \mathrm{e}^{-n\pi a/b} = 0 \qquad ㉑$$

又由⑳和㉑两式又可得到两组方程组,即

当 n 为偶数时有 $$\begin{cases} C_n + D_n = 0 \\ C_n \mathrm{e}^{n\pi a/b} + D_n \mathrm{e}^{-n\pi a/b} = 0 \end{cases} \qquad ㉒$$

当 n 为奇数时有 $$\begin{cases} C_n + D_n = \dfrac{8Ab^2}{(n\pi)^2} \\ C_n \mathrm{e}^{n\pi a/b} + D_n \mathrm{e}^{-n\pi a/b} = 0 \end{cases} \qquad ㉓$$

解㉓式得

$$C_n = D_n = 0, n = 2k, (k = 1,2,\cdots)$$

解㉔式得

$$C_n = \frac{-4Ab^2 \mathrm{e}^{-n\pi a/b}}{(n\pi)^2 \mathrm{sh}(n\pi a/b)},$$

$$D_n = \frac{4Ab^2 \mathrm{e}^{n\pi a/b}}{(n\pi)^2 \mathrm{sh}(n\pi a/b)}, n = 2k+1 (k = 0,1,\cdots)$$

将 C_n、D_n 代入⑲式,于是得

$$u^{\mathrm{II}}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4Ab^2[\mathrm{e}^{(2k+1)\pi(a-x)/b} - \mathrm{e}^{-(2k+1)\pi(a-x)/b}]}{(2k+1)^2\pi^2 \mathrm{sh}[(2k+1)\pi a/b]}\sin\frac{(2k+1)\pi y}{b}$$

$$= \frac{8Ab^2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\frac{\mathrm{sh}[(2k+1)\pi(a-x)/b]}{\mathrm{sh}[(2k+1)\pi a/b]}\sin\frac{(2k+1)\pi y}{b}$$

故最后可得原定解问题的解,为

$$u(x,y) = u^{\mathrm{I}}(x,y) + u^{\mathrm{II}}(x,y)$$

$$= \frac{B\mathrm{sh}[\pi(b-y)/a]}{\mathrm{sh}(\pi b/a)}\sin\frac{\pi x}{a} + \frac{8Ab^2}{\pi^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\frac{\mathrm{sh}[(2k+1)\pi(a-x)/b]}{\mathrm{sh}[(2k+1)\pi a/b]}\sin\frac{(2k+1)\pi y}{b}$$

- 高维分离变量问题：

教材上也有一道类似的题目，我们需要掌握多维问题的分离变量处理。

求下列高维波动方程的解：

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2\Delta u, 0 < x, y, z < 1, t > 0 & ① \\
u(x, y, z; 0) = \sin\pi x\sin\pi y\sin\pi z & ② \\
u_t(x, y, z; 0) = 0 & ③ \\
u(0, y, z; t) = u(1, y, z; t) = 0 & ④ \\
u(x, 0, z; t) = u(x, 1, z; t) = 0 & ⑤ \\
u(x, y, 0; t) = u(x, y, 1; t) = 0 & ⑥
\end{cases}
$$

解 令

$$u(x, y, z; t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t) \qquad ⑦$$

则由①式得

$$XYZT'' = a^2(X''YZT + XY''ZT + XYZ''T)$$

将上式两边除以 a^2XYZT,得

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z}$$

上式左边是变量 t 的函数,右边是变量 x, y, z 的函数,而 x, y, z, t 均为独立变量,故要使上式成立,除非右边每一项均匀为常数. 令

$$\frac{X''}{X} = \alpha, \frac{Y''}{Y} = \beta, \frac{Z''}{Z} = \gamma \text{ 且 } \alpha + \beta + \gamma = \mu$$

其中,α、β、γ 和 μ 均为常数. 于是由①式得

$$
\begin{cases}
T''(t) - a^2\mu T(t) = 0 & ⑧ \\
X''(x) - \alpha X(x) = 0 & ⑨ \\
Y''(y) - \beta Y(y) = 0 & ⑩ \\
Z''(z) - \gamma Z(z) = 0 & ⑪
\end{cases}
$$

而将⑦式代入④～⑥式得

$$
\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{cases} ⑫; \quad
\begin{cases} Y(0) = 0 \\ Y(1) = 0 \end{cases} ⑬; \quad
\begin{cases} Z(0) = 0 \\ Z(1) = 0 \end{cases} ⑭
$$

解⑨和⑫两式组成的本征值问题得

$$\alpha = -m^2\pi^2, X_m(x) = a_m\sin m\pi x, m = 1, 2, \cdots$$

解⑩和⑬式构成的本征值问题,得

$$\beta = -n^2\pi^2, Y_n(y) = b_n\sin n\pi y, n = 1, 2, \cdots$$

解⑪和⑭式构成的本征值问题，得

$$\gamma = -l^2\pi^2, Z_l(z) = c_l \sin l\pi z, l = 1,2,\cdots$$

将 $\mu = \alpha + \beta + \gamma = -(m^2+n^2+l^2)\pi^2$ 代入⑧式，得

$$T'' + a^2(n^2+m^2+l^2)T = 0$$

记

$$a^2(m^2+n^2+l^2)\pi^2 = \omega^2$$

于是得

$$T_{m,n,l}(t) = A'_{mnl}\cos\omega t + B'_{mnl}\sin\omega t$$

故

$$u(x,y,z;t) = \sum_{m,n,l=1}^{\infty}(A_{mnl}\cos\omega t + B_{mnl}\sin\omega t)$$

$$\cdot \sin m\pi x \sin n\pi y \sin l\pi z \qquad ⑮$$

再将⑮式代入初始条件②得

$$\sum_{m,n,l=1}^{\infty} A_{mnl}\sin m\pi x \sin n\pi y \sin l\pi z = \sin\pi x \sin\pi y \sin\pi z$$

对比等式两边正弦展开的系数，于是有

$$A_{111} = 1, A_{mnl} = 0\ (m,n,l \neq 1)$$

再将⑮式代入初始条件③得

$$\sum_{mnl=1}^{\infty} B_{mnl}\omega \sin m\pi x \sin n\pi y \sin l\pi z = 0$$

故有

$$B_{mnl} = 0$$

将求得的 A_{mnl}、B_{mnl} 代入⑮式，有

$$u(x,y,z;t) = A_{111}\cos\omega t \sin\pi x \sin\pi y \sin\pi z$$

$$= \cos\sqrt{3}\pi a t \sin\pi x \sin\pi y \sin\pi z$$

- 高阶的分离变量问题：

我们知道，分离变量法的理论支持是施刘定理，由施刘定理保证了固有值问题的意义，我们基于此可以确定我们得到的固有函数系是完备的，从而，可以将解和定解条件在上面展开。
但是有时（非常少见）会遇到高阶问题，如果采用分离变量法进行尝试，得到的固有值问题不满足施刘方程。那么这时候应该怎么办呢？
我查阅了一些资料，但是这类问题好像真的蛮少见的，而且大家可以放心，我们这门课研究的对象主要就是二阶的线性方程。

但是遇到这类问题，我们也要会处理。
我的思路是，首先分离变量，得到固有值问题，并进行求解。我们已知的是，三角函数系是完备的，这类问题如果求解得到的固有函数是三角函数，我们可以确定，仍然是完备的函数系，进而可以进行分离变量法求解（其实分离变量法就是广义的傅里叶级数法，把解和定解条件在固有函数系上展开，如果固有函数系是完备的，解就有意义）
以上是我的理解，供大家参考，如果有不同意见，欢迎一起讨论。

求解梁的横振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, 0 < x < l, t > 0 & ① \\ u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0 & ② \\ u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0 & ③ \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) & ④ \end{cases}$$

解 令 $u(x,t)=X(x)T(t)$ ⑤

将⑤式代入方程①和边界条件②、③，得

$$X(x)T''(t) = -a^2 X^{(4)}(x)T(t)$$

即

$$\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} \xlongequal{\text{令}} \lambda^2$$

于是得

$$\begin{cases} X^{(4)}(x) - \lambda^2 X(x) = 0 & ⑥ \\ X(0) = X''(0) = 0 & ⑦ \\ X(l) = X''(l) = 0 & ⑧ \\ T'' + a^2\lambda^2 T(t) = 0 & ⑨ \end{cases}$$

下面求解本征值问题⑥～⑧：

1°若 $\lambda=0$，则

$$X(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3$$

代入⑦式得 $C_1=C_3=0$，所以

$$X(x) = C_2 x + C_4 x^3$$

又由⑧式得

$$\begin{cases} C_2 + C_4 l^2 = 0 \\ 6C_4 l = 0 \end{cases}$$

于是得 $C_4=0, C_2=0$，即，当 $\lambda=0$ 时 $X(x)\equiv 0$，故 $\lambda\neq 0$.

2°若 $\lambda>0$，则⑥式有通解

$$X(x) = C_1 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}x + C_2 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}x + C_3\cos\sqrt{\lambda}x + C_4\sin\sqrt{\lambda}x$$

由⑦式得

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 0 & \text{⑩} \\ C_1\lambda - C_3\lambda = 0 & \text{⑪} \end{cases}$$

解⑩、⑪式得

$$C_1 = C_3 = 0$$

故有

$$X(x) = C_2 \mathrm{sh}\sqrt{\lambda}x + C_4 \sin\sqrt{\lambda}x$$

又由⑧式得

$$\begin{cases} C_2 \mathrm{sh}\sqrt{\lambda}l + C_4 \sin\sqrt{\lambda}l = 0 & \text{⑫} \\ C_2 \mathrm{sh}\sqrt{\lambda}l - C_4 \sin\sqrt{\lambda}l = 0 & \text{⑬} \end{cases}$$

解⑫、⑬式得

$$C_2 = 0, C_4 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

所以

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0, \sqrt{\lambda}l = n\pi \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

故本征值为 $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l_2}$，本征函数为 $X_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi}{l}x$ 将 λ 代入 T 的方程⑨得

$$T_n''(t) + \frac{a^2n^4\pi^4}{l^2}T_n(t) = 0$$

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n^2\pi^2 a}{l^2}t + B_n \sin\frac{n^2\pi^2 a}{l^2}t$$

从而有

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n^2\pi^2 a}{l^2}t + B_n \sin\frac{n^2\pi^2 a}{l^2}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

代入初始条件④得

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, B_n = \frac{2l}{n^2\pi^2 a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

3°若 $\lambda<0$，类似于 $\lambda>0$ 的讨论可得到同样的结果.

- 非齐次问题：

仅举例方程非齐次类型，其他类型之后再讨论

✧ 非齐次项只和一个变量相关类型

求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = b\,\mathrm{sh}x, 0 < x < l, t > 0 & ① \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & ② \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 & ③ \end{cases}$$

解 这亦是有界弦的纯强迫振动问题(2.3.7)～(2.3.9),我们当然可以直接利用公式(2.3.16)和(2.3.14)求得其解,但为了使读者熟练地掌握非齐次方程的求解方法,现在我们按本征函数展开法的解题步骤循序渐近地来求解.

该定解问题所对应的齐次问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & ①' \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & ②' \end{cases}$$

的本征函数,即为对①′～②′分离变量后所得本征值问题

$$\begin{cases} X''(x) - \mu X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

的本征函数.亦即是 $\sin\frac{n\pi x}{l}$.所以

(1) 令

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} & ④ \\ f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} & ⑤ \end{cases}$$

其中

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l b\,\mathrm{sh}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}2bn\pi\,\mathrm{sh}l}{l^2 + (n\pi)^2} \qquad ⑥$$

将④、⑤两式代入①、③两式并比较等式两边 $\sin\frac{n\pi}{l}x$ 的系数得

$$\begin{cases} T''_n(t) + (\frac{n\pi a}{l})^2 T_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}2bn\pi\,\mathrm{sh}l}{l^2 + (n\pi)^2} & ⑦ \\ T_n(0) = 0, T'_n(0) = 0 & ⑧ \end{cases}$$

(2) 解常微分方程的初值问题⑦～⑧对比(2.3.12)～(2.3.15)式,得⑦～⑧式的解,为

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \frac{l}{n\pi a}\cdot\frac{(-1)^{n+1}2bn\pi\,\mathrm{sh}l}{l^2 + (n\pi)^2}\int_0^t \sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau \\ &= (\frac{l}{n\pi a})^2\frac{(-1)^{n+1}2bn\pi\,\mathrm{sh}l}{l^2 + n^2\pi^2}\left(1 - \cos\frac{n\pi at}{l}\right) \end{aligned}$$

于是得

$$u(x,t) = \frac{2bl^2}{\pi a^2}\mathrm{sh}l\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n^2\pi^2 + l^2)}\left(1 - \cos\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

✧ 非齐次项和两个变量都相关类型

长为 l 两端固定的弦线在单位长度的横向力 $f(x,t)$

$=g(x)\sin\omega t$ 的作用下振动，已知弦的初始位移和速度分别为 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$，试求其振动规律.

解 定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=g(x)\sin\omega t, 0<x<l, t>0 & ① \\ u(0,t)=u(l,t)=0 & ② \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x) & ③ \end{cases}$$

这是一般的强迫振动问题，由线性叠加原理，我们可以令

$$u(x,t)=u^{\mathrm{I}}(x,t)+u^{\mathrm{II}}(x,t)$$

且

$$\begin{cases} u_{tt}^{\mathrm{I}}-a^2u_{xx}^{\mathrm{I}}=0 \\ u^{\mathrm{I}}(0,t)=u^{\mathrm{I}}(l,t)=0 \\ u^{\mathrm{I}}(x,0)=\varphi(x), u_t^{\mathrm{I}}(x,0)=\psi(x) \end{cases} \quad ④$$

$$\begin{cases} u_{tt}^{\mathrm{II}}-a^2u_{xx}^{\mathrm{II}}=g(x)\sin\omega t \\ u^{\mathrm{II}}(0,t)=u^{\mathrm{II}}(l,t)=0 \\ u^{\mathrm{II}}(x,0)=0, u_t^{\mathrm{II}}(x,0)=0 \end{cases} \quad ⑤$$

于是，由有界弦的自由振动的解(2.3.4)～(2.3.5)式我们立即可得④式的解为

$$u^{\mathrm{I}}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \quad ⑥$$

其中

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}\mathrm{d}\alpha, B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}\mathrm{d}\alpha$$

至于定解问题⑤，又是一有界弦的纯强迫振动问题. 为了熟悉求解过程，下面我们用两种不同方法对其进行求解

法一 本征函数展开法

(1) 令

$$\begin{cases} u^{\mathrm{II}}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \\ g(x)\sin\omega t=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \end{cases}$$

将之代入定解问题⑤的方程和初始条件，于是得

$$\begin{cases} T''_n(t) + \dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = 0, \qquad T'_n(0) = 0 \end{cases} \tag{⑦}$$

其中

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\omega t\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$

（2）解初值问题⑦得

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(t-\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}\tau\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{2}{n\pi a}\int_0^t\int_0^l g(\alpha)\sin\omega(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\,\mathrm{d}\alpha\sin\frac{n\pi a}{l}\tau\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{2}{n\pi a}\int_0^t \sin\omega(t-\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}\tau\,\mathrm{d}\tau\cdot\int_0^l g(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{2}{n\pi a}\cdot\frac{\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t - \frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2 - \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\int_0^l g(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\,\mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

于是得

$$u^{\mathrm{II}}(x,t) = \frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t - \frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{n\left[\omega^2 - \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\right]}\int_0^l g(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\,\mathrm{d}\alpha\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{⑧}$$

法二　冲量定理法

由冲量原理，欲求解定解问题，需先求解定解问题

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2v_{xx} = 0 \\ v(0,t;\tau) = 0, v(l,t;\tau) = 0 \\ v(x,\tau) = 0, v_t(x,\tau) = g(x)\sin\omega\tau \end{cases} \tag{⑨}$$

而

$$u^{\mathrm{II}}(x,t) = \int_0^t v(x,t;\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{⑩}$$

定解问题⑨为初始时刻为 $t=\tau$ 的有界弦的纯强迫振动．作变换 $T=t-\tau$，则初始时刻 $t=\tau$ 就变为了初始时刻 $T=0$，即定解问题⑨变为

$$\begin{cases} v_{TT} - a^2v_{xx} = 0 \\ v(0,T) = v(l,T) = 0 \\ v(x,0) = 0, v_T(x,0) = g(x)\sin\omega\tau \end{cases}$$

于是由(2.3.4)～(2.3.5)式立即可得

$$v(x,t;\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n\pi a}\sin\omega\tau\int_0^l g(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\,\mathrm{d}\alpha\right]\cdot\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}$$

代入⑩式,并注意到积分

$$\int_0^t\sin\omega(t-\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}\tau\,\mathrm{d}\tau=\frac{\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}$$

于是得

$$u^{\mathrm{II}}(x,t)=\int_0^t\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi a}\sin\omega\tau\int_0^l g(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\,\mathrm{d}\alpha\right]\cdot\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}\tau \quad ⑪$$

$$=\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^l g(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}\mathrm{d}\alpha\left[\frac{\omega\sin\frac{n\pi at}{l}-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}$$

最后,将求得的 u^{I} 和 u^{II}(即⑥式、⑧式或⑪式)代入 $u(x,t)=u^{\mathrm{I}}+u^{\mathrm{II}}$,于是得原定解问题的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n\pi a}\cdot\frac{\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\int_0^l\varphi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\,\mathrm{d}\alpha\right.$$
$$+\frac{2}{l}\left(\int_0^l\varphi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\,\mathrm{d}\alpha\right)\cos\frac{n\pi a}{l}t$$
$$\left.+\frac{2}{n\pi a}\left(\int_0^l\psi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\,\mathrm{d}\alpha\right)\sin\frac{n\pi a}{l}t\right]\sin\frac{n\pi}{l}x$$