排列组合填空题

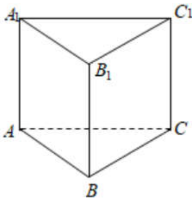
设$n\in N^*$，对1，2，……，n的一个排列$i_1i_2\ldots\ldots i_n$，如果当$s<t$时，有$i_s>i_t$，则称（i_s，i_t）是排列$i_1i_2\ldots\ldots i_n$的一个逆序，排列$i_1i_2\ldots\ldots i_n$的所有逆序的总个数称为其逆序数．例如：对1，2，3的一个排列231，只有两个逆序（2，1），（3，1），则排列231的逆序数为2．记f_n（k）为1，2，…，n的所有排列中逆序数为k的全部排列的个数f_n（2）（$n\geqslant5$）的表达式 ________

用五种不同的颜色给三棱柱$ABC-DEF$六个顶点涂色，要求每个点涂一种颜色，且每条棱的两个端点涂不同颜色，则不同的涂色方法有 ________种。

不等式$x+y+z\leqslant10$的正整数解的组数共有 ________。

颜色不同的4个小球全部放入3个不同的盒子中，若使每个盒子不空，则不同的方法有________种。

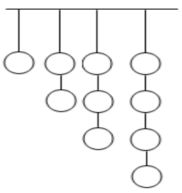
如图，用4种不同的颜色给三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的6个顶点涂色，要求每个点涂一种颜色，且每条棱的两个端点涂不同的颜色，则不同的作色方法共有________种



平面上画n条直线，且满足任何2条直线都相交，任何3条直线不共点，则这n条直线将平面分成 __个部分．

设$\{a_n\}$是集合$\{3^p+3^q+3^r|0\leqslant p<q<r$，且$p$，$q$，$r\in N^*\}$中所有的数从小到大排列成的数列，已知$a_k=2511$，则$k=$

四根绳子上共挂有10只气球，绳子上的球数依次为1，2，3，4，每枪只能打破一只球，而且规 定只有打破下面的球才能打上面的球，则将这些气球都打破的不同打法数是 ________。



当$n\geqslant3$，$n\in N$时，对于集合$M=\{1，2，3，\ldots，n\}$，集合M的所有含3个元素的子集分别表示为N_1，N_2，N_3，$\ldots N_{M(n)-1}$，$N_{M(n)}$，其中M（n）表示集合M的含3个元素的子集的个数．设p_i为集合N_i中的最大元素，q_i为集合N_i中的最小元素，$1\leqslant i\leqslant M$（n），记$P=p_1+p_2+\ldots+p_{M(n)-1}+p_{M(n)}$，$Q=q_1+q_2+\ldots q_{M(n)-1}+q_{M(n)}$．则 P 和 Q 的数量关系为：P=——Q。

某品牌设计了编号依次为1，2，3，…，n（$n\geqslant4$，且$n\in N^*$）的n种不同款式的时装，由甲、乙两位模特分别独立地从中随机选择i，j（$0\leqslant i$，$j\leqslant n$，且i，$j\in N$）种款式用来拍摄广告.至少有一个款式为甲和乙共同认可的概率________。

已知整数$n\geqslant4$，集合$M=\{1，2，3，\ldots n\}$的所有3个元素的子集记为A_1，A_2，…，A_C． 设m_i为A_i中的最小元素，设$p_n=m_1+m_2+\ldots+m_c$，则p_n =________

若$A_n=\overline{a_1a_2\ldots a_n}$（$a_i=0$或1，$i=1$，2，…，$n$），则称$A_n$为0和1的一个$n$位排列．对于$A_n$，将排列$\overline{a_na_1a_2\ldots a_{n-1}}$记为$R^1$（$A_n$）；将排列$\overline{a_{n-1}a_na_1\ldots a_{n-2}}$记为$R^2$（$A_n$）；依此类推，直至$R^n$（$A_n$）$=A_n$．对于排列$A_n$和$R^i$（$A_n$）（$i=1$，2，…，$n-1$），它们对应位置数字相同的个数减去对应位置数字不同的个数，叫做A_n和R^i（A_n）的相关值，记作$t(A_n，R^i(A_n))$．例如$A_3=\overline{110}$，则$R^1(A_3)=\overline{011}$，$t(A_3，R^1(A_3))=-1$．若$t(A_n，R^i(A_n))=-1$（$i=1$，2，…，$n-1$），则称A_n为最佳排列．

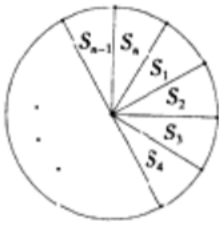
最佳排列A_3 个数为： ______ 最佳排列A_5 个数为： ______ 若某个A_{2k+1}（k是正整数）为最佳排列，排列A_{2k+1}中1的个数 ________

$1+4C_n^{\ 1}+7C_n^{\ 2}+10C_n^{\ 3}+\ldots+(3n+1)C_n^{\ n}=$

n人坐n个座位，但限定第一人不坐第一位，第二人不坐第二位，……，第n人不坐第n位，有多少种不同的坐法．

对一个边长互不相等的凸n（$n \geqslant 3$）边形的边染色，每条边可以染红、黄、蓝三种颜色中的一种，但是不允许相邻的边有相同的颜色．不同的染色方法____________.

如图所示，把一个圆分成n（$n \geqslant 2$）个扇形，依次记为S_1、S_2、…、S_{n-1}，每一个扇形可用红、黄、蓝三种颜色中的任一种涂色，但要求相邻扇形的颜色互不相同，问一共有多少种涂色方法____________.



答案:

（2）对一般的n（$n\geqslant 4$）的情形，逆序数为0的排列只有一个：$12\ldots n$，$\therefore f_n(0)=1$．

逆序数为1的排列只能是将排列$12\ldots n$中的任意相邻两个数字调换位置得到的排列，$f_n(1)=n-1$．

为计算$f_{n+1}(2)$，当1，2，…，n的排列及其逆序数确定后，将$n+1$添加进原排列，$n+1$在新排列中的位置只能是最后三个位置．

因此，$f_{n+1}(2)=f_n(2)+f_n(1)+f_n(0)=f_n(2)+n$．

当$n\geqslant 5$时，$f_n(2)=[f_n(2)-f_{n-1}(2)]+[f_{n-1}(2)-f_{n-2}(2)]+\ldots+[f_5(2)-f_4(2)]+f_4(2)$

$=(n-1)+(n-2)+\ldots+4+f_4(2)=\frac{n^2-n-2}{2}$．

因此，当$n\geqslant 5$时，$f_n(2)=\frac{n^2-n-2}{2}$．

解：分两步来进行，先涂A、B、C，再涂D、E、F．

①若5种颜色都用上，先涂A、B、C，方法有A_5^3种；再涂D、E、F中的两个点，方法有A_3^2种，

最后剩余的一个点只有2种涂法，故此时方法共有$A_5^3\cdot A_3^2\times 2=720$种．

②若5种颜色只用4种，首先选出4种颜色，方法有C_5^4种；

先涂A、B、C，方法有A_4^3种；再涂D、E、F中的1个点，方法有3种，

最后剩余的两个点只有3种涂法，故此时方法共有$C_5^4\cdot A_4^3\times 3\times 3=1080$种．

③若5种颜色只用3种，首先选出3种颜色，方法有C_5^3种；

先涂A、B、C，方法有A_3^3种；再涂D、E、F，方法有2种，

故此时方法共有 $C_5^3\cdot A_3^3\times 2=120$ 种．

综上可得，不同涂色方案共有 $720+1080+120=1920$ 种，

故答案为：1920．

解：方法一：在4个小球之间插入2个挡板，即可把4个小球分成3组，方法有$C_4^2=6$种．

然后再把这3组小球全排列，方法有$A_3^3=6$种．

再根据分步计数原理可得所有的不同方法共有$6\times 6=36$种，

方法二：从4个球中取2个，看成一个，有$C_4^2=6$种，再与另两个在3个不同的盒子中全排列，故有$C_4^2A_3^3=36$

故答案为：36．

解：若x，y，z中没有相同的数字，共（1，2，3），（1，2，4），（1，2，5），（1，2，6），（1，2，7），（1，3，4），（1，3，5），（1，3，6），（1，4，5），（2，3，4），（2，3，5）有11组，此时不等式$x+y+z\leqslant 10$的正整数解的组数共有$11A_3^3=66$种，

若x，y，z中有两个相同的数字，共有（1，1，2），（1，1，3），（1，1，4），（1，1，5），（1，1，6），（1，1，7），（1，1，8）

（1，2，2），（1，3，3），（1，4，4），（2，2，3），（2，2，4），（2，2，5），（2，2，6），（2，3，3），（2，4，4），（3，3，4）有17组，共有$17A_3^1=51$种，

若若x，y，z中有三个相同的数字，则有（1，1，1），（2，2，2），（3，3，3），故有3种，

根据分类计数原理可得，$66+51+3=120$，

故答案为：120

解：根据题意，四种颜色全都用上，每个点涂一种颜色，

第一步，为A、B、C三点涂色共有A_4^3种；

第二步，在A_1、B_1、C_1中选一个涂第4种颜色，有3种情况；

第三步，为剩下的两点涂色，

假设剩下的为B_1、C_1，若B_1与A同色，则C_1只能选B点颜色；若B_1与C同色，

则C_1有A、B处两种颜色涂．

故为B_1、C_1共有3种涂法，

即剩下的两个点有3种情况，

则共有$A_4^3\times3\times3=216$种方法．

故答案为：216．

解：$0\leqslant p<q<r$，且p，q，$r\in N$

$a_n=3^p+3^q+3^r=3^p(1+3^{q-p}+3^{r-p})$，

$a_k=2511$，$\therefore p=4$，$q-p=1$，$r-p=3$，

$\therefore q=5$，$r=7$，

$\therefore(p,q,r)=(4,5,7)$ $(4,5,7)$ $(3,5,7)$ $(3,4,7)$ $(2,5,7)$ $(2,4,7)$ $(2,3,7)$ $(1,5,7)$ $(1,4,7)$ $(1,3,7)$ $(1,2,7)$ $(0,5,7)$ $(0,4,7)$ $(0,3,7)$ $(0,2,7)$ $(0,1,7)$ $(4,5,6)$ $(3,5,6)$ $(3,4,6)$ $(2,5,6)$ $(2,4,6)$ $(2,3,6)$ $(1,5,6)$ $(1,4,6)$ $(1,3,6)$ $(1,2,6)$ $(0,5,6)$ $(0,4,6)$ $(0,3,6)$ $(0,2,6)$ $(0,1,6)$ $(3,4,5)$ $(2,4,5)$ $(2,3,5)$ $(1,4,5)$ $(1,3,5)$ $(1,2,5)$ $(0,4,5)$ $(0,3,5)$ $(0,2,5)$ $(0,1,5)$ $(2,3,4)$ $(1,3,4)$ $(1,2,4)$ $(0,3,4)$ $(0,2,4)$ $(0,1,4)$ $(1,2,3)$ $(0,2,3)$ $(0,1,3)$ $(0,1,2)$

$\therefore(5+4+3+2+1)\times2+(4+3+2+1)+(3+2+1)+(2+1)+1=50$，

故答案为：50

解：$\because a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=7$，$a_4=11$，

注意到$a_n=a_{n-1}+n$（$n\geqslant2$），

因为第n（$n\geqslant2$）条直线与前$n-1$条直线都相交且不共点，

则它被前$n-1$条直线分割成n段，

每一段将它所在的原区域一分为二，

即在原区域数上增加了n个，

故$a_n=a_{n-1}+n$（$n\geqslant2$）；

则$a_2=a_1+2$，

$a_3=a_2+3$，

$a_4=a_3+4$，

…

$a_n=a_{n-1}+n$

将这$n-1$个式子累加得：$a_n=a_1+2+3+\ldots+n=1+\dfrac{n(n+1)}{2}+1=\dfrac{n^2+n+2}{2}$．

故答案为：$\dfrac{n^2+n+2}{2}$．

（2）证明：显然$3\leqslant p_i\leqslant n$，$p_i\in Z$，且以3为最大元素的子集有$c_2^2$个，

以4为最大元素的子集有C_3^2个，以5为最大元素的子集有C_4^2个，…以k（$3\leqslant k\leqslant n$）为最大元素的子集有c_{k-1}^2个，

$P=P_1+P_2+\ldots+P_{M（n-1）+PM（n）}=3\times C_2^2+4\times C_3^2+\ldots+nC_{n-1}^2$①，

$\because kC_{k-1}^2=k\frac{(k-1)(k-2)}{2}=3C_k^3$（$k=3$，4，…$n$），

$\therefore P=3$（$C_3^3+C_4^3+\ldots+C_n^3$）$=3$（$C_4^4+C_4^3+\ldots+C_n^3$）$+3$（$C_5^4+C_5^3+\ldots+C_n^3$）$=3$（$C_6^4+C_6^3+\ldots+C_n^3$）$=3C_{n+1}^4$，

显然$1\leqslant q_i\leqslant n-2$，$q_i\in Z$，以1为最小元素的子集有$C_{n-1}^2$个，以2为最小元素的子集有$C_{n-2}^2$个，以3为最小元素的子集有$C_{n-3}^2$个，…

以k为最小元素的子集有C_{n-k}^2个，…

以（$n-2$）为最小元素的子集有C_2^2个，

$Q=q_1+q_2+\ldots q_{M（n）-1}+q_{M（n）}=$（$n-2$）$C_2^2+$（$n-3$）$C_3^2+\ldots kC_k^2+\ldots C_{n-1}^2$，

①+②可得：$P+Q=$（$n+1$）（$C_2^2+C_3^2+C_4^2+\ldots+C_{n-1}^2$）

$=$（$n+1$）（$C_3^3+C_3^2+C_4^2+\ldots+C_{n-1}^2$）$=4C_{n+1}^4$，

所以$P=3Q$．

（2）甲从n种不同款式的服装中选取服装的所有可能种数为：$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$，

同理得，乙从n种不同款式的服装中选取服装的所有可能种数为2^n，

据分步乘法计数原理得，所有等可能的基本事件的种数为：$2^n\cdot 2^n=4^n$，

记“至少有一个款式为甲和乙共同认可”为事件A，则事件A的对立事件$\overline{A}$为：“没有一个款式为甲和乙共同认可”，

而事件$\overline{A}$包含的基本事件种数为：$C_n^0\cdot(C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n)+C_n^1\cdot(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\ldots+C_{n-1}^{n-1})+\ldots+C_n^{n-1}\cdot(C_1^0+C_1^1)$

$+C_n^n\cdot(C_0^0)=C_n^0\cdot 2^n+C_n^1\cdot 2^{n-1}+\ldots+C_n^{n-1}\cdot 2+C_n^n\cdot 2^0=$（$1+2$）$^n=3^n$，

所以$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(\frac{3}{4})^n$．（10分）

（2）证明：不难得到$1\leqslant m_i\leqslant n-2$，$m_i\in Z$，并且以1为最小元素的子集有个，以2为最小元素的子集有C_{n-2}^2个，以3为最小元素的子集有C_{n-3}^2，…以$n-2$为最小元素的子集有C_2^2个

$\therefore p_n=m_1+m_2+\ldots+m_c=1\times C_{n-1}^2+2C_{n-2}^2+\ldots+(n-2)C_2^2$

$=(n-2)C_2^2+(n-3)C_3^2+\ldots+C_{n-1}^2$

$=C_2^2+$（$n-3$）（$C_2^2+C_3^2$）$+$（$n-4$）$C_4^2+\ldots+C_{n-1}^2$

$=C_2^2+(n-3)(C_3^3+C_3^2)+(n-4)C_4^2+\ldots+C_{n-1}^2$

$=C_2^2+C_4^3+$（$n-3$）（$C_4^2+C_4^3$）$+\ldots+C_{n-1}^2$

$=C_2^2+C_4^3+$（$n-4$）$C_5^3+\ldots+C_{n-1}^2$

$=C_4^4+C_4^3+C_5^3+\ldots+C_n^3=C_{n+1}^4$

（Ⅰ）解：最佳排列A_3为 $\overline{110}$，$\overline{101}$，$\overline{100}$，$\overline{011}$，$\overline{010}$，$\overline{001}$．　　…（3分）

（Ⅱ）证明：设$A_5=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$，则$R^1(A_5)=\overline{a_5a_1a_2a_3a_4}$，

因为 $t(A_5，R^1(A_5))=-1$，所以$|a_1-a_5|$，$|a_2-a_1|$，$|a_3-a_2|$，$|a_4-a_3|$，$|a_5-a_4|$之中有2个0，3个1．

按$a_5\to a_1\to a_2\to a_3\to a_4\to a_5$的顺序研究数码变化，由上述分析可知有2次数码不发生改变，有3次数码发生了改变．

但是a_5经过奇数次数码改变不能回到自身，所以不存在A_5，使得$t(A_5，R^1(A_5))=-1$，

从而不存在最佳排列A_5．…（7分）

（Ⅲ）解：由$A_{2k+1}=\overline{a_1a_2\ldots a_{2k+1}}$（$a_i=0$或$1$，$i=1，2，…，2k+1$），得$R^1(A_{2k+1})=\overline{a_{2k+1}a_1a_2\ldots a_{2k}}$，

$R^2(A_{2k+1})=\overline{a_{2k}a_{2k+1}a_1a_2\ldots a_{2k-1}}$，

$\ldots R^{2k-1}(A_{2k+1})=\overline{a_3a_4\ldots a_{2k+1}a_1a_2}$，$R^{2k}(A_{2k+1})=\overline{a_2a_3\ldots a_{2k+1}a_1}$．

因为 $t(A_{2k+1}，R^i(A_{2k+1}))=-1$（$i=1，2，…，2k$），

所以 A_{2k+1}与每个R^i（A_{2k+1}）有k个对应位置数码相同，有$k+1$个对应位置数码不同，

因此有$|a_1-a_{2k+1}|+|a_2-a_1|+\ldots+|a_{2k}-a_{2k-1}|+|a_{2k+1}-a_{2k}|=k+1$，$|a_1-a_{2k}|+|a_2-a_{2k+1}|+\ldots+|a_{2k}-a_{2k-2}|+|a_{2k+1}-a_{2k-1}|=k+1$，

…，$|a_1-a_3|+|a_2-a_4|+\ldots+|a_{2k}-a_1|+|a_{2k+1}-a_2|=k+1$，$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\ldots+|a_{2k}-a_{2k+1}|+|a_{2k+1}-a_1|=k+1$．

以上各式求和得，$S=(k+1)\times 2k$．　…（10分）

以上各式求和得，$S=(k+1)\times 2k$．　…（10分）

另一方面，S还可以这样求和：设a_1，a_2，…，a_{2k}，a_{2k+1}中有x个0，y个1，则$S=2xy$．…（11分）

所以$\begin{cases}x+y=2k+1\\2xy=2k(k+1).\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=k\\y=k+1\end{cases}$或$\begin{cases}x=k+1\\y=k.\end{cases}$，

所以排列A_{2k+1}中1的个数是k或$k+1$．　…（13分）

证明：设$S=1+4C_n^1+7C_n^2+10C_n^3+\ldots+(3n+1)C_n^n$，①

则$S=(3n+1)C_n^n+(3n-2)C_n^{n-1}+\ldots+4C_n^1+1$．②

①②两式相加，

得$2S=(3n+2)(C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n)=(3n+2)\cdot 2^n$，

$\therefore S_n=(3n+2)\cdot 2^{n-1}$．

解：D_1表示第一人不坐第一位的可能，D_2表示第二人不坐第二位的可能，

D_n表示第n人不坐第n位的可能．

观察可知，$D_1=0$，$D_2=1$，$D_3=2$，

①$9=3\times(1+2)$ 即：$D_4=(4-1)\times(D_2+D_3)$

②$44=4\times(2+9)$，即：$D_5=(5-1)\times(D_3+D_4)$

③$265=5\times(9+44)$，即：$D_6=(6-1)\times(D_4+D_5)$

……

由此可知，$D_n=(n-1)\times(D_{n-1}+D_{n-2})$

猜想可得$D_n=n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$种坐法．

下面运用数学归纳法证明：

当$n=2$时，$D_2=1$；$n=3$时，$D_3=2$，显然成立；

假设$n\leqslant k$时，等式成立，

当$n=k+1$时，$D_{k+1}=k$（D_k+D_{k-1}）

$=k[k!$（$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^k}{k!}$）+（$k-1$）！（$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}$]

$=k\cdot k!$（$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^k}{k!}$）$+k!$（$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}$）

$=$（$k+1$）！（$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^k}{k!}$）$-k!$（$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^k}{k!}$）$+k!$（$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}$）

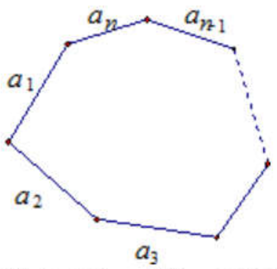
$=$（$k+1$）！（$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^k}{k!}$）$-k!\cdot\frac{(-1)^k}{k!}$

$=$（$k+1$）！（$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^k}{k!}+\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$），

可得$n=k+1$，等式也成立，

综上可得，共有$n!$（$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}$）种坐法．

解：设n边形的不同的染色方法有p_n种．易知三角形的染色方法$p_3=A_3^3=6$．



当$n\geqslant4$时，首先，对于边a_1，有3种不同的染法，由于边a_2的颜色与边a_1的颜色不同，

∴对边a_2有2种不同的染法，类似地，对边a_3，…，边a_{n-1}均有2种染法．对于边a_n，用与边a_{n-1}不同的2种颜色染色，

但是，这样也包括了它与边a_1颜色相同的情况，

而边a_1与边a_n颜色相同的不同染色方法数就是凸$n-1$边形的不同染色方法数的种数p_{n-1}，

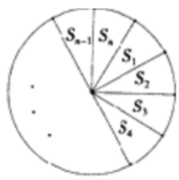
∴$p_n=3\times2^{n-1}-p_{n-1}$，$p_n-2^n=-(p_{n-1}-2^{n-1})$．数列$\{P_n-2^n\}$为公比为$-1$的等比数列，

∴$p_n-2^n=(-1)^{n-3}(p_3-2^3)=(-1)^{n-2}\cdot2$，

∴$p_n=2^n+(-1)^n\cdot2$，$n\geqslant3$．

综上所述，不同的染色方法数为$p_n=2^n+(-1)^n\cdot2$．

解：设分成n个扇形时，涂法的总数为a_n（$n\geqslant2$）



$n=2$时，S_1有3种涂法，S_2与S_1的颜色不能相同，故对于S_1的每一种涂法，S_2仅有两种涂法，故共有$a_2=3\times2=6$种涂法；

当$n>2$时，S_1有3种涂法，S_2有两种涂法，S_3、…、S_n，依次有两种涂法，故共有$3\times2^{n-1}$种涂法，但其中S_n与S_1的颜色相同时有a_{n-1}种涂法，故$a_n=3\times2^{n-1}-a_{n-1}$（$n>2$）

$\therefore\frac{a_n}{2^n}-1=-\frac{1}{2}$（$\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}-1$）

$\therefore\{\frac{a_n}{2^n}-1\}$是首项为$\frac{1}{2}$，公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列

$\therefore\frac{a_n}{2^n}-1=\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$

$\therefore a_n=2[2^{n-1}+(-1)^n]$（$n\geqslant2$）

∴一共有$2[2^{n-1}+$（-1）^{n}]（$n\geqslant2$）种涂色方法．