011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

杨金龙摄

3.4 K_N可表示函数/关系

回顾：K_N的构成与简单性质

- **K_N的构成**：语言、公理模式、推理规则、公设、形式证明/推理、定义。
- **K_N的标准模型N** 预期K_N是初等数论一个片段的形式化，使得该片段是一个正规K_N模型N=(**N**, **F**, **P**)，称为K_N的标准模型，其中**N**是自然数集，**F**包含自然数集上的后继函数+1、加法函数+和乘法函数×，**P**包含自然数集上的相等关系=，满足：

  $\mathbf{0}^N$是0；$'^N$是+1；$\mathbf{+}^N$是+；$\mathbf{\times}^N$是×；$\mathbf{=}^N$是=。
- **定理1** N是K_N的一个正规模型。

回顾：K_N的构成与简单性质

- **定理2** $\vdash_{K_N} \underline{n} + \underline{m} = \underline{n+m}$。
- **定理3** $\vdash_{K_N} \underline{n} \times \underline{m} = \underline{n \times m}$。
- **定理6** 如果$m = n$，则$\vdash_{K_N} \underline{m} = \underline{n}$；如果$m \neq n$，则$\vdash_{K_N} \neg(\underline{m} = \underline{n})$。
- **性质** 自然数加法和乘法运算的主要性质（交换律、结合律、分配律、消去率…）在K_N中全部满足。
- **观察** 以上结果都是关于$K_N(Y)$中的函数和关系的。但是，在K_N试图形式化的初等数论片段中，是否只有这些函数和关系？

3. 4 K_N可表示函数和关系

❖ **术语** 一个k元数论函数g: $\mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$简称为一个k元函数，一个k元数论关系$R \subseteq \mathbf{N}^k$简称为一个k元关系，其中**N**是自然数集。

◆ **注释** 数论函数和数论关系的定义不限定采用什么运算，更不限于$K_N(Y)$中的函数和关系。

❖ **观察** K_N相对于初等数论片段的表示能力如何？即问：对哪些数论函数$g(x_1, \ldots, x_n)$，存在表示$g(x_1, \ldots, x_n)$的K_N公式p，使得$g(x_1, \ldots, x_n) = n$成立或不成立当且仅当$\vdash_{K_N} p$或$\vdash_{K_N} \neg p$。对于数论关系也存在同样的问题。

3.4 K_N可表示函数和关系

❖ **定义1（K_N可表示函数）** 一个k元函数g是K_N可表示的，如果存在一个含k+1个自由变元的K_N公式$p(x_1, \ldots, x_{k+1})$，使得对任意对$p(x_1, \ldots, x_{k+1})$中x_{k+1}自由的项u及$n_1, \ldots, n_k, n_{k+1} \in \mathbf{N}$有

1. 如果$g(n_1, \ldots, n_k) = n_{k+1}$则$\vdash_{K_N} p(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}, \underline{n_{k+1}})$;
2. 如果$g(n_1, \ldots, n_k) \neq n_{k+1}$则$\vdash_{K_N} \neg p(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}, \underline{n_{k+1}})$;
3. $\vdash_{K_N} p(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}, u) \rightarrow u = \underline{g(n_1, \ldots, n_k)}$.

◆ **注释** 公式p称为数论函数g的K_N表示。

3.4 K_N可表示函数和关系

◆**注释** 如果k元函数g是K_N可表示的，则数论函数g的计算可以通过K_N对公式p的推理实现；也就是说，任何K_N可表示函数的计算可归结为K_N中的形式推理。

❖**问题1** 是否每一个K_N公式都表示一个数论函数？即：是否对于每一个k+1元K_N公式$p(x_1, \ldots, x_{k+1})$，存在一个k元函数$g(n_1, \ldots, n_k)$，使得$p(x_1, \ldots, x_{k+1})$是$g(n_1, \ldots, n_k)$的K_N表示？

◆**答** 否。

3. 4 K_N可表示函数和关系

❖ 例1 K_N公式$x_1 \doteq x_1 \wedge \neg(x_2 \doteq x_2)$不表示任何数论函数。

◆反证：假设存在1元数论函数$g(n_1) = n_2$，使得$x_1 \doteq x_1 \wedge \neg(x_2 \doteq x_2)$是数论函数$g(n_1) = n_2$的$K_N$表示。则根据定义1条件1，对任何$n_1$, $n_2 \in \mathbf{N}$，有$\vdash_{K_N} \underline{n}_1 \doteq \underline{n}_1 \wedge \neg(\underline{n}_2 \doteq \underline{n}_2)$。于是，由3.3节定理1，有$N \models \underline{n}_1 \doteq \underline{n}_1 \wedge \neg(\underline{n}_2 \doteq \underline{n}_2)$，其中N是$K_N$的标准模型，这是不可能的。故$x_1 \doteq x_1 \wedge \neg(x_2 \doteq x_2)$不表示任何数论函数。

3. 4 K_N可表示函数和关系

❖ 问题2 同一个K_N公式$p(x_1, \ldots, x_{k+1})$是否可以用来表示两个不同的数论函数？

◆ 答 否。

◆ 证明 反证：设g_1和g_2是两个不同的k元函数，则存在自然数$n_1, \ldots, n_k$使得$g_1(n_1, \ldots, n_k) \neq g_2(n_1, \ldots, n_k)$。设公式$p(x_1, \ldots, x_{k+1})$是$g_1$和$g_2$的$K_N$表示，依定义1条件1有$\vdash_{K_N} p(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}, \underline{g_1(n_1, \ldots, n_k)})$，依定义1条件2有$\vdash_{K_N} \neg p(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}, \underline{g_1(n_1, \ldots, n_k)})$，因此$K_N$是不相容的。但根据上节定理1，$K_N$有模型N，于是依K可靠性定理推论，$K_N$是相容的，矛盾。

3.4 K_N可表示函数和关系

❖ 问题3 是否每一个数论函数都是K_N可表示的？

◆答 否。

◆证明 所有数论函数的集合是不可数的；所有K_N公式的集合是可数的，并且每一个K_N公式只能表示一个数论函数。因此，必然存在不是K_N可表示的数论函数。

❖ 注释 “大部分”数论函数不是K_N可表示的。但是，可计算的数论函数都是K_N可表示的。

❖ 什么是“可计算函数”？

3.4 K_N可表示函数和关系

❖ 例2 自然数上的和函数+是K_N可表示的。

◆解 可验证$x_1 + x_2 = x_3$是自然数和函数的K_N表示。

❖ 例3 自然数上的积函数×是K_N可表示的。

◆解 可验证$x_1 \times x_2 = x_3$是自然数积函数的K_N表示。

❖ 例4 自然数上的投影函数是K_N可表示的。

◆解 投影函数定义为$p_i^k(n_1, \ldots, n_k) = n_i$, $i=1, \ldots, k$。

可验证$x_1=x_1 \wedge \ldots \wedge x_k=x_k \wedge x_{k+1}=x_i$是投影函数的$K_N$表示。

3. 4 K_N可表示函数和关系

❖ **定义2**(K_N可表示关系) 一个k元关系R是K_N可表示的，如果存在含k个自由变元的K_N公式$p(x_1, \ldots, x_k)$，使得对任意$n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$有

1. 如果$(n_1, \ldots, n_k) \in R$ 则$\vdash_{K_N} p(\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_k)$;
2. 如果$(n_1, \ldots, n_k) \notin R$ 则$\vdash_{K_N} \neg p(\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_k)$。

◆ **注释** 公式p称为关系R的K_N表示。

3. 4 K_N可表示函数和关系

❖ 定义3（关系的特征函数） 一个k元关系R的特征函数C_R定义为

$$C_R(n_1, \ldots, n_k) = \begin{cases} 1, & (n_1, \ldots, n_k) \in R; \\ 0, & (n_1, \ldots, n_k) \notin R. \end{cases}$$

其中$n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$。

❖ 定理 k元关系R是K_N可表示的当且仅当它的特征函数C_R是K_N可表示的。

◆证明 自修。