数理逻辑　第五周作业　3 月 17 日 周二

PB18151866 龚小航

1.证明$\mu(q)$是$L(x)$上的一个语义解释。

解：先写出$\mu(q)$的定义：

$$\mu(q)=\begin{cases} t, & \Gamma^*\vdash q \\ f, & \Gamma^*\vdash \neg q \end{cases}$$

要证明它是$L(x)$上的一个语义解释，需要证：

① $\mu|_X$是X上的一个指派，即对任意的x有$\mu(x)\in\{t,f\}$；

② $\mu(q)$是$L(x)$上的一个标准赋值。

以下分别证明它们：

证明①：回顾 Γ^*与 Γ的定义：$L(x)$是可数集，$L(x)$中所有公式为 $p_0,p_1,\cdots\cdots p_n,\cdots\cdots$

$$\Gamma_0=\Gamma\cup\{\neg p\};\qquad \Gamma_n=\begin{cases} \Gamma_{n-1}, & \Gamma_{n-1}\vdash p_{n-1} \\ \Gamma_{n-1}\cup\{\neg p_{n-1}\}, & \Gamma_{n-1}\nvdash p_{n-1} \end{cases};\qquad \Gamma^*=\bigcup_{i=0}^{\infty}\Gamma_n$$

可以对 n 施归纳即可得每个Γ_n是无矛盾的。而由Γ^*的定义，Γ^*具有完备性，即对于$L(x)$的任一公式p_n，$\Gamma^*\vdash p_n$与$\Gamma^*\vdash\neg p_n$二者必取其一。以下为证明：

设$\Gamma^*\nvdash p_n$，由假设，得到 $\Gamma_n\nvdash p_n$ $(\Gamma_n\subseteq\Gamma^*)$，再由$\Gamma$的定义，可知$\Gamma_{n+1}\subseteq\{\neg p_n\}$. 又由于$\Gamma_{n+1}\subseteq\Gamma^*$，就有$\Gamma^*\vdash\neg p_n$. 因此$\Gamma^*$的完备性得证。

所以，对$L(x)$的任一公式q，都有$\Gamma^*\vdash q$或$\Gamma^*\vdash\neg q$成立，由$\mu(q)$的定义，每一个q被指派为t或f。

$\Rightarrow$ $\mu|_X$是X上的一个指派。该部分得证。

证明②：为证明 $\mu(q)$ 是$L(x)$上的一个标准赋值，只需要证明这样定义的μ具有保运算性：

$$\begin{cases} \mu(\neg q)=\neg\mu(q) \\ \mu(q\to r)=\mu(q)\to\mu(r) \end{cases}$$

·先证明第一条$\mu(\neg q)=\neg\mu(q)$：直接由$\mu(q)$的定义：

$$\neg\mu(q)=\begin{cases} f, & \Gamma^*\vdash q \\ t, & \Gamma^*\vdash\neg q \end{cases};\qquad \mu(\neg q)=\begin{cases} t, & \Gamma^*\vdash\neg q \\ f, & \Gamma^*\vdash\neg\neg q \end{cases}$$

而由双否律，有：$\neg\neg q\to q$，利用演绎定理即可得$\Gamma^*\vdash q$。比较以上两边，即可得$\mu(\neg q)=\neg\mu(q)$

·再证明第二条 $\mu(q\to r)=\mu(q)\to\mu(r)$。分以下两种情况讨论：

情形 1　$\mu(q)\to\mu(r)=1$ 此时又有两种可能：$\mu(q)=0$或$\mu(q)=\mu(r)=1$

$\mu(q)=0 \Rightarrow \Gamma^*\vdash\neg q$ (定义) $\Rightarrow$ $\neg q\to(q\to r)$ (否定前件律) $\Rightarrow$ $\Gamma^*\vdash(q\to r)$ (HS)

$\Rightarrow \mu(q\to r)=1$ (μ的定义)

$\mu(q)=\mu(r)=1 \Rightarrow \Gamma^*\vdash r$ (定义) $\Rightarrow$ $r\to(q\to r)$ $(L1)$ $\Rightarrow$ $\Gamma^*\vdash(q\to r)$ (HS)

$\Rightarrow \mu(q\to r)=1$ (μ的定义)

情形 2　$\mu(q)\to\mu(r)=0$ 此时$\mu(q)=1,\mu(r)=0$，所以有 $\Gamma^*\vdash q$ *and* $\Gamma^*\vdash\neg r$ (定义) 。

下证$\{q,\neg r\}\vdash\neg(q\to r)$：

利用归谬律，证明$\{q,\neg r,q\to r\}\vdash q$且$\{q,\neg r,q\to r\}\vdash\neg q$：

$q\to(\neg r\to q)$ …… $L1$	$(q\to r)\to(\neg r\to\neg q)$ …… 换位律
q …… 前提	$q\to r$ …… 前提
$\neg r\to q$ …… MP	$\neg r\to\neg q$ …… MP
$\neg r$ …… 前提	$\neg r$ …… 前提
q …… MP	$\neg q$ …… MP

因此，由归谬律，可得$\{q,\neg r\}\vdash\neg(q\to r)$

所以，有：$\Gamma^*\vdash\neg(q\to r)$，再由$\Gamma^*$的定义，可得$\mu(q\to r)=0$

综上，不论是哪种情形，均有$\mu(q\to r)=\mu(q)\to\mu(r)$成立，$\mu(q)$ 是$L(x)$上的一个标准赋值。

$\Rightarrow\mu(q)$是$L(x)$上的一个语义解释