Computer Science and Technology

运筹学基础

讲者：顾乃杰 教授、黄章进 副教授

计算机科学与技术学院

对偶理论与灵敏度分析

Chap.3 Duality theory & Sensitivity analysis

主要内容

3.7 灵敏度分析

- 线性规划的灵敏度分析：
  - 也称为敏感性分析，它是研究和分析参数（c_j，b_i，a_{ij}）的波动对最优解的影响程度，主要研究下面两个方面：
    - 参数在什么范围内变化时，原最优解或最优基不变；
    - 当参数已经变化时，最优解或最优基有何变化。
  - 当模型的参数发生变化后，可以不必对线性规划问题重新求解，而用灵敏度分析方法直接在原线性规划取得的最优结果的基础上进行分析或求解，既可减少计算量，又可事先知道参数的变化范围，及时对原决策作出调整和修正。

原问题	对偶问题	结论或继续计算的步骤
可行解	可行解	表中的解仍为最优解
可行解	非可行解	用单纯形法继续迭代求最优解
非可行解	可行解	用对偶单纯形法继续迭代求最优解
非可行解	非可行解	引进人工变量，编制新的单纯形表，求最优解

3.7.1 资源数量b_i的变化分析

1）资源数量b_i的变化分析

资源数量变化是指系数b_r发生变化，即$b_r' = b_r + \Delta b_r$。并假设其他系数都不变，这样原问题的解变为：

$X_B' = B^{-1}(b + \Delta b)$，其中$\Delta b = (0, \cdots, \Delta b_r, 0, \cdots, 0)^T$。

只要$X_B' \ge 0$，最终表中检验数不变，则最优基不变，但最优解的值发生变化，所以X_B'为新的最优解。

– 新的最优解的值可允许变化范围用以下方法确定：

	X_B	X	X_S	RHS
z	0	$C-C_BB^{-1}A$	$-C_BB^{-1}$	$-C_BB^{-1}b$
	I	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$

$B^{-1}(b+\Delta b)$

3.7.1 资源数量b_i的变化分析

$$X_B' = B^{-1}b' = B^{-1}(b+\Delta b) = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b = X_B + B^{-1}\Delta b$$

$$= X_B + B^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta b_r \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = X_B + \begin{bmatrix} \bar{a}_{1r}\Delta b_r \\ \vdots \\ \bar{a}_{ir}\Delta b_r \\ \vdots \\ \bar{a}_{mr}\Delta b_r \end{bmatrix} = X_B + \Delta b_r \begin{bmatrix} \bar{a}_{1r} \\ \vdots \\ \bar{a}_{ir} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mr} \end{bmatrix}$$

这时在最终表中求得的b列的所有元素有：

$$\bar{a}_{ir}\Delta b_r + \bar{b}_i \geq 0 \Rightarrow \bar{a}_{ir}\Delta b_r \geq -\bar{b}_i, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{当}\bar{a}_{ir} > 0\text{时，}\ \Delta b_r \geq -\bar{b}_i / \bar{a}_{ir} \\ \text{当}\bar{a}_{ir} < 0\text{时，}\ \Delta b_r \leq -\bar{b}_i / \bar{a}_{ir} \end{array}\right\} \Rightarrow \max_i\left\{-\bar{b}_i / \bar{a}_{ir} \,\middle|\, \bar{a}_{ir} > 0\right\} \leq \Delta b_r \leq \min_i\left\{-\bar{b}_i / \bar{a}_{ir} \,\middle|\, \bar{a}_{ir} < 0\right\}$$

若资源变化范围符合上述范围，则最优基不变，重新计算后的$B^{-1}(b+\Delta b)$即为最优解

3.7.1 资源数量b_i的变化分析

– 例如：求第二章例2.1中第二个约束条件 b_2， 的变化范围 Δb_2 ：

– 解：

已知：

$$B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\dots,5 \end{cases}$$

$$B^{-1}b + B^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \Delta b_2 \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ -0.125 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可得：

$$\begin{cases} \Delta b_2 \geq -4/0.25 = -16 \\ \Delta b_2 \geq -4/0.5 = -8 \\ \Delta b_2 \leq 2/0.125 = 16 \end{cases} \Rightarrow \quad -8 \leq \Delta b_2 \leq 16$$

$$8 \leq b_2 \leq 32$$

3.7.1 资源数量b_i的变化分析

– 例3.7 由下表(例3.1的单纯形表最终表)可知每设备台时的影子价格为1.5元。若该厂又从别处抽出4台用于生产产品I，II，求这时该厂生产产品I，II的最优方案。

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0
0	x_5	4	0	0	-2	0.5	1
3	x_2	2	0	1	0.5	-0.125	0
$c_j - z_j$			0	0	-1.5	-0.125	0

解：资源的变化是否会引起最优基发生改变？

$$B^{-1}b + B^{-1}\begin{bmatrix}\Delta b_1 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 \\ 4 \\ 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ -2 \\ 0.5\end{bmatrix}\Delta b_1 \geq 0$$

$$B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/8 & 0 \end{pmatrix}$$

$-4 \leq \Delta b_1 \leq 2$时，最优基不变。

该项资源的变化将引起最优基变化，因此需要下一步计算。

3.7.1 资源数量b_i的变化分析

$$B^{-1}\Delta b=\begin{bmatrix}0 & 0.25 & 0\\ -2 & 0.5 & 1\\ 0.5 & -0.125 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-8\\2\end{bmatrix}$$

$c_j \to$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4+0	1	0	0	0.25	0
0	x_5	4-8	0	0	-2	0.5	1
3	x_2	2+2	0	1	0.5	-0.125	0
c_j-z_j			0	0	-1.5	-0.125	0

b列中还有负数，故用对偶单纯形法求新的最优解，因为基变量x_5=-4<0，需要换出，根据Θ规则，min(-1.5/-2,-)=0.75，选择 x_3 作为换入变量，迭代一步后得下表：

$c_j \to$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0
0	x_3	2	0	0	1	−0.25	−0.5
3	x_2	3	0	1	0	0	0.25
c_j-z_j			0	0	0	−0.5	−0.75

即该厂生产 I 产品 4 件，II 产品 3 件，获利：

$$z^* = 4\times2+3\times3 = 17\text{元}$$

可看出 x_3=2，即设备有 2 小时未利用。

3.7.2 价值系数c_j的变化分析

2）价值系数 c_j 的变化分析

– 若 c_j 是非基变量 x_j 的系数，它在计算表中对检验数的影响：

$$\sigma_j = c_j - C_B B^{-1} P_j$$

C_B并不受到非基变量系数改变的影响，所以如果有：

$$\sigma_j' = c_j + \Delta c_j - C_B B^{-1} P_j \le 0 \Rightarrow c_j' \le C_B B^{-1} P_j$$

则仍满足最优解条件。

否则，其对应的非基变量必须换入，最优解将发生改变，需要重新计算。

3.7.2 价值系数c_j的变化分析

- 若 c_r 是基变量 x_r 的系数，它在计算表中对检验数的影响：

$c_r \in C_B$，当c_r改变Δc_r时，就引起C_B的变化，此时新的非基变量检验数：

$$\sigma_j' = c_j - (C_B + \Delta C_B)B^{-1}A = c_j - C_B B^{-1}A - \Delta C_B B^{-1}A$$

$$= \sigma_j - (0,\cdots,\Delta c_r,\cdots,0)B^{-1}A$$

$$= \sigma_j - \Delta c_r(\bar{a}_{r1},\bar{a}_{r2},\cdots,\bar{a}_{rn})$$

若想要原最优解不变，则需满足$\sigma_j' \le 0$，即：

$$\sigma_j - \Delta c_r \bar{a}_{rj} \le 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{a}_{rj} > 0, \Delta c_r \ge \sigma_j / \bar{a}_{rj} \\ \bar{a}_{rj} < 0, \Delta c_r \le \sigma_j / \bar{a}_{rj} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max_j \left\{ \frac{\sigma_j}{\bar{a}_{rj}} \middle| \bar{a}_{rj} > 0 \right\} \le \Delta c_r \le \min_j \left\{ \frac{\sigma_j}{\bar{a}_{rj}} \middle| \bar{a}_{rj} < 0 \right\}$$

- 同样的，若不满足上述变化范围，则最优解发生改变，需要重新计算。

3.7.2 价值系数c_j的变化分析

- 例3.8 仍由下表(例3.1的单纯形表最终表)为例，基变量x_2的系数c_2变化Δc_2，求Δc_2的变化范围。
  - 解：

c_2发生变化，变为右表所示。为了保持原最优解不变，x_2的检验数应当为0，经初等变换得右表。

$c_j \rightarrow$			2	$3+\Delta c_2$	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0
0	x_5	4	0	0	4	0.5	1
3	x_2	2	0	1	0.5	−0.125	0
$c_j - z_j$			0	Δc_2	−1.5	−0.125	0

3.7.2 价值系数c_j的变化分析

c_j			2	$3+\Delta c_2$	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0
0	x_5	4	0	0	−2	0.5	1
$3+\Delta c_2$	x_2	2	0	1	0.5	−0.125	0
c_j-z_j			0	0	$-1.5-\Delta c_2/2$	$\Delta c_2/8-1/8$	0

从上表可以看出：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}-1.5-\Delta c_2/2\le 0\\ \Delta c_2/8-1/8\le 0\end{array}\right\}\Rightarrow -3\le \Delta c_2\le 1\\ c_2=3\end{array}\right\}\Rightarrow 0\le c_2+\Delta c_2\le 4$$

可见 c_2 在 [0,4] 之间变化不会影响原最优解。

3.7.3 技术系数 $a_{i,j}$ 的变化

3）增加一个新变量

- 考虑计划中增加新的产品（变量）x_{n+1}，其价值系数为c_{n+1}，其约束条件系数为列向量p_{n+1}，不必重解该问题，只需要计算c_{n+1} - z_{n+1}，若出现对应该变量的检验数>0（最大值问题），则x_{n+1}被引进基作为换入编两，在原单纯形表最终表的基础上继续迭代即可；
  - 例3.9 在例3.1中的原计划内是否应该安排新产品III，该产品III每件需消耗A、B各6kg、3kg，使用设备2台时，每件可获利5元。
  - 解：步骤1:

设生产产品IIIx_3'台，

其技术系数$P_3' = (2,6,3)^T$，

然后计算最终表中对应的检验数：

$$\sigma_3' = c_3' - C_B B^{-1} P_3' = 5 - (1.5, 0.125, 0)(2,6,3)^T = 1.25 \geq 0$$

说明安排生产产品III是有利的。

3.7.3 技术系数 $a_{i,j}$ 的变化

- 步骤2：计算产品III在最终表中对应的列向量并将结果填入最终计算表：

$$B^{-1}P_3' = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 \\ -2 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & -0.125 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

c_j			2	3	0	0	0	5
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_3'
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0	1.5
0	x_5	4	0	0	−2	0.5	1	[2]
3	x_2	2	0	1	0.5	−0.125	0	0.25
c_j-z_j			0	0	−1.5	−0.125	0	1.25

- b列的数字没有变化，原问题的解是可行解。但检验数行中还有正数，说明目标函数值还可以改善。

将x_3'作为换入变量，x_5作为换出变量进行迭代，求出最优解。

3.7.3 技术系数 $a_{i,j}$ 的变化

c_j			2	3	0	0	0	5
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_3'
2	x_1	1	1	0	1.5	−0.125	−0.75	0
5	x_3'	2	0	0	−1	0.25	0.5	1
3	x_2	1.5	0	1	0.75	−0.1875	−0.125	0
c_j-z_j			0	0	−0.25	−0.4375	−0.625	0

此时求得最优解：

$x_1=1, x_2=1.5, x_3'=2$

总的利润为16.5元，

比原计划增加了2.5元。

4）系数列向量发生变化

– 第一种情况：非基变量对应的列向量发生变化：

假设原非基列p_k变化为p_k'，则变换后的检验数：

$$\sigma_j' = c_k - C_B B^{-1} p_k'$$

如果$\sigma_j' \le 0$,则原解仍为最优解，否则要将x_k作为换入变量，继续进行单纯形法的运算。

当p_k中只有某元素发生改变，即$\Delta p_k = \left(0,\cdots,\ \Delta a_{rk},\cdots,0\right)^T$

则保证原最优解不改变的条件为：

设w_r为$C_B B^{-1}$的第r个分量，有

$$c_k - C_B B^{-1} p_k' \le 0 \Rightarrow c_k - z_k - w_r \Delta a_{rk} \le 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_r > 0, \Delta a_{rk} \ge \sigma_k / w_r \\ w_r < 0, \Delta a_{rk} \le \sigma_k / w_r \end{cases}$$

3.7.3 技术系数 $a_{i,j}$ 的变化

- 第二种情况：基列向量发生变化
  - 基列向量变化后，当前一组基向量可能不再是基向量；
  - 即便基向量不变，也会改变当前的逆矩阵B^{-1}，从而引起每一列向量$B^{-1}p_i$与右边向量$B^{-1}b$以及目标函数值C_BB^{-1}的变化。

令k是p_k在单纯形表中的列号，r为基变量x_k所在的行号

以$B^{-1}p_k'$取代基列中的$B^{-1}p_k$后，存在两种可能：

（1）$B^{-1}p_k'$的第r行元素=0，因而当前的基向量组不再构成一组基。此时可引入人工变量x_a来取代x_k，以形成一组新基，接着用大M法或两阶段法在阶段1消除人工变量，然后转入阶段2恢复正常的单纯形法运算。

3.7.3 技术系数 $a_{i,j}$ 的变化

(2)$B^{-1}p_k'$的第r行元素$\neq 0$，为了使x_k继续为基变量，

以该元素为中心变换单纯形表，变换后的结果也有可能：

破坏原问题可行性：$B^{-1}b$列出现<0的元素，采用对偶单纯形法解决；

破坏对偶可行性：对应的检验数行出现>0的元素，继续单纯形法；

– 例3.10 在例3.1中的原计划中，生产产品I的工艺发生变化，生产一件产品I需要台时2，原料A、B各5kg、2kg，每件利润为4元，试分析对原最优计划有什么影响。

- 解：把改进的产品I看作产品I’，设x'_1为其产量，计算在最终表中x'_1对应的列向量，并以x'_1代替x_1。

3.7.3 技术系数 $a_{i,j}$ 的变化

$$B^{-1}P_1' = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 \\ -2 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & -0.125 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.5 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

同时计算出x_1'的检验数为：$c_1' - C_B B^{-1} P_1' = 4 - (1.5, 0.125, 0)(2,5,2)^T = 0.375$

- 将以上结果填入最终表得到：

$c_j \to$			4	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_1	4	1.25	0	0	0.25	0
0	x_5	4	0.5	0	-2	0.5	1
3	x_2	2	0.375	1	0.5	0.125	0
$c_j - z_j$			0.375	0	-1.5	-0.125	0

迭代 →

$c_j \to$			4	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_1'	3.2	1	0	0	0.2	0
0	x_5	2.4	0	0	-2	0.4	1
3	x_2	0.8	0	1	0.5	-0.2	0
$c_j - z_j$			0	0	-1.5	-0.2	0

可得：应生产产品 I’ 3.2单位，产品 II 0.8单位，可获利 15.2元。

3.7.3 技术系数 $a_{i,j}$ 的变化

- 例3.11 假设上例中生产一件产品I’所需台时变为4，需要原料A、B各为5kg、2kg，每件产品获利4元，则应如何安排最优方案。
  - 解：方法同上例，先计算新的检验数：

$$B^{-1}P_1'=\begin{bmatrix}0 & 0.25 & 0\\ -2 & 0.5 & 1\\ 0.5 & -0.125 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.25\\-3.5\\1.375\end{bmatrix}$$

同时计算出x_1'的检验数为：

$$c_1'-C_BB^{-1}P_1'=4-(1.5,0.125,0)(4,5,2)^T$$
$$=-2.625$$

填入原最终表中可得：

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_1	4	1.25	0	0	0.25	0
0	x_5	4	−3.75	0	−2	0.5	1
3	x_2	2	1.375	1	0.5	0.125	0
c_j-z_j			−2.625	0	−1.5	−0.125	0

3.7.3 技术系数 $a_{i,j}$ 的变化

以 x'_1 代替基变量中的 x_1 可得表：

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x'_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x'_1	3.2	1	0	0	0.2	0
0	x_5	15.2	0	0	−2	1.2	1
3	x_2	−2.4	0	1	0.5	−0.4	0
$c_j - z_j$			0	0	−1.5	0.4	0

从上表可以看出原问题和对偶问题都是非可行解，引入人工变量 x_6，因在表中 x_2 所在行，用方程表示时为：

$$0x'_1 + x_2 + 0.5x_3 - 0.4x_4 + 0x_5 = -2.4$$

引入人工变量后变为：

$$-x_2 - 0.5x_3 + 0.4x_4 + 0x_6 = 2.4$$

3.7.3 技术系数 $a_{i,j}$ 的变化

将x_6作为基变量代替x_2，填表得：

表 3-18

C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_1'	3.2	1	0	0	0.2	0	0
0	x_5	15.2	0	0	−2	1.2	1	0
$-M$	x_6	2.4	0	−1	−0.5	[0.4]	0	1
c_j-z_j			0	$3-M$	$-0.5M$	$-0.8+0.4M$	0	0

3.7.3 技术系数 $a_{i,j}$ 的变化

x_4为换入变量，x_6为换出变量，进行基变换得到新表

表 3-19

c_j			4	3	0	0	0	$-M$
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_1'	2	1	0.5	0.25	0	0	-0.5
0	x_5	8	0	[3]	-0.5	0	1	-3
0	x_4	6	0	-2.5	-1.25	1	0	2.5
c_j-z_j			0	1	-1	0	0	$-M+2$
4	x_1'	0.667	1	0	0.33	0	$-0.33\times\frac{1}{2}$	0
3	x_2	2.667	0	1	-0.167	0	0.33	-1
0	x_4	12.667	0	0	1.667	1	0.83	0
c_j-z_j			0	0	-0.83	0	-0.33	$-M+3$

- 此时所有检验数都为非正，得到最优解。
- 生产方案为：生产I’产品 **0.667**单位；

  生产II产品 **2.667**单位；

  可得最大利润 **10.67**元。

3.9 利用计算机工具求解

- 3.9.1 使用编程语言
- 3.9.2 使用Matlab
- 3.9.3 使用Excel

3.9.1 使用编程语言

- 编程语言范围较广，这里以java为例。
- 以单纯形法矩阵计算为例。
- 1：将所有的矩阵以类表示。
- 2：在类的方法中定义矩阵的乘法，加法等运算。

计算程序的主要部分：


```
while (true) {
        on = cn.decrease(cb.multiply(binverse).multiply(nMatrix));
        //计算Cn-CbB^(-1)N
        max = on.maxi();//查找最大的检验数
        if (max == -1) {//所有的都小于等于0
                break;
        }
       th = new P(binverse.multiplyp(b), binverse.multiplyp(new P(ma,
max)));//计算0的值
        min = th.mini();
        //无界解判断
        if (min == -1) {//对应的系数矩阵是否全部小于等于0
                System.out.println("无界解");//返回无界解
                break;
        }
        P nP = new P(ma,max);
        binverse.next(nP, min);//计算新的B^-1
}
```

- 使用Matlab
  - 例1. 用改进单纯形法求解：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,5 \end{cases}$$

- 解：
  - 初始基变量是$X_{B_0} = (x_3, x_4, x_5)^T$，对应的系数为$C_{B_0} = (0,0,0)$，非基变量及其对应系数为：$X_{N_0} = (x_1, x_2)^T$，$C_{N_0} = (2,3)$。初始基$B_0$是单位矩阵，其逆矩阵也是单位阵

$$B_0 = (P_3, P_4, P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1}$$

使用Matlab

(1)初始化：根据给出的线性规划问题，在加入松弛变量和人工变量后，得到初始基变量X_B，求初始基矩阵B的逆矩阵B^{-1}，及 $B^{-1}b$

```
X=[1 2 3 4 5];
A=[ 1 2 1 0 0;
    4 0 0 1 0;
    0 4 0 0 1];
C=[2 3 0 0 0 ];
b=[8;16;12];
t=[3 4 5];
B0=A(:,t);
```

使用Matlab

(2)最优性测试：计算非基变量X_N的检验数

- 若$\sigma_N \le 0$，已得到最优解 $[X_B, X_N]^T = [B^{-1}b, 0]^T$，停止计算；
- 若有$\sigma_j > 0$，转下一步；

```
for i=1:length(xiN0)
    if xiN0(i)>0
        z(j)=i;
        j=j+1;
    end
  end
  if length(z)+1==1;
    break;
  end
```

使用Matlab

(3)确定换入变量：根据max(σ_j>0) = σ_k ，确定换入变量x_k ，计算$B^{-1}P_k$

- 若 $B^{-1}P_k \le 0$，那么问题有无界解，停止计算。否则，进入下一步；

```
for i=1:length(z)
        if z(i)>z(n)
            n=i;
        end
    end
    k=XN0(z(n));
```

使用Matlab

(4) 确定换出变量：根据θ规则，计算

$$\theta=\min\left\{\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_k)_i}\middle|(B^{-1}P_k)_i>0\right\}=\frac{(B^{-1}b)_l}{(B^{-1}P_k)_l},$$

- X_B对应的第l个基变量为换出变量

```
for i=1:length(x)
    if B(x(y))/P(x(y))>B(x(i))/P(x(i))
      y=i;
    end
  end
```

使用Matlab

(5)确定新的基可行解：计算新的基矩阵B_1的逆矩阵B_1^{-1}，及$B_1^{-1}b$, 重复(2)-(5)

```
t(m)=k; %得到新的基变量的下标
  P2=B0*A(:,k);
  q=P2(y1); %确定系数向量的主元素
  P2(y1)=-1;
  P2=-P2./q; %变换后的系数向量
  E=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];
  E(:,m)=P2;
  B0=E*B0;%得到新基的逆矩阵
```

最终：目标函数的最优值为：

14

对偶单纯形法例子(Matlab)

(1) 算法初始化，构造单纯形表

```
A = -A;
b = -b(:);
c = -c(:)';
[m, n] = size(A);
A = [A eye(m) b];
A = [A;[c zeros(1,m+1)]]; % construct the simplex table
```

对偶单纯形法例子(Matlab)

(2) 确定换出变量的下标

subs = n+1:n+m; %基变量索引

[bmin, row] = Br(b); % min $\{(B^{-1}b)_i \mid (B^{-1}b)_i<0\}=(B^{-1}b)_l$，返回换出变量的值和索引

```
function [m_dim2, j_dim] = Br(d_dim)
    [m_dim2, j_dim] = min(d_dim);
     if m_dim2 >= 0
        m_dim2 = [];
        j_dim = [];
     end
end
```

对偶单纯形法例子(Matlab)

(3) 判断换出变量的有效性和检测单纯形表中第row行系数是否都大于等于0

```
while ~isempty(bmin) & bmin < 0 & abs(bmin) > eps
      if A(row,1:m+n) >= 0
         disp(sprintf('\n\n Empty feasible region\n'))
         varargout(1)={subs(:)};
         varargout(2)={A};
         varargout(3) = {zeros(n,1)};
         varargout(4) = {0};
         return
        …
      end
end
```

对偶单纯形法例子(Matlab)

(4) 确定换入变量的下标 $\theta = \min_j \left(\frac{c_j - z_j}{a_{lj}} \middle| a_{lj} < 0 \right) = \frac{c_k - z_k}{a_{lk}}$

```
col = MRTD(A(m+1,1:m+n),A(row,1:m+n));
function col = MRTD(a_dim, b_dim)
    m_dim3 = length(a_dim);
        c_dim = 1:m_dim3;
        a_dim = a_dim(:);
        b_dim = b_dim(:);
        l_dim = c_dim(b_dim < 0);
        [~, col_dim] = min(a_dim(l_dim) ./ b_dim(l_dim));
       col = l_dim(col_dim);
   end
```

对偶单纯形法例子(Matlab)

(5)以A(row, col)为主元素，按原单纯形法在表中进行迭代运算，重新计算换出变量，返回步骤3

```
subs(row) = col;
A(row,:)= A(row,:)/A(row,col);
        for i = 1:m+1
    if i ~= row
        A(i,:)= A(i,:)-A(i,col)*A(row,:);
    end
  end
 [bmin, row] = Br(A(1:m,m+n+1));
```

(6)导出结果

```
x = zeros(m+n,1);
x(subs) = A(1:m,m+n+1);
x = x(1:n);
z = -A(m+1,m+n+1);
```

例6 用对偶单纯形法求解

$$\min \omega = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

```
>> A = [1 2 1;2 -1 3]
A =
    1     2     1
    2    -1     3
>> b = [3;4]
b =
    3
    4
>> c = [2 3 4]
c =
    2     3     4
```

对偶单纯形法例子(Matlab)


```
>> varargout = dsimplex(c, A, b)

 Initial tableau
A =
     -1      -2      -1       1       0      -3
     -2       1      -3       0       1      -4
     -2      -3      -4       0       0       0

 pivot row-> 2 pivot column-> 1

 Tableau 1
A =
      0    -5/2     1/2       1    -1/2      -1
      1    -1/2     3/2       0    -1/2       2
      0      -4      -1       0      -1       4

pivot row-> 1 pivot column-> 2
```

对偶单纯形法例子(Matlab)

Tableau 2

A =

0	1	-1/5	-2/5	1/5	2/5
1	0	7/5	-1/5	-2/5	11/5
0	0	-9/5	-8/5	-1/5	28/5

Values of the legitimate variables:

x(1)= 2.200000
x(2)= 0.400000
x(3)= 0.000000

Objective value at the optimal point:

z= -5.600000

Indices of basic variables in the final tableau:

varargout =

2
1

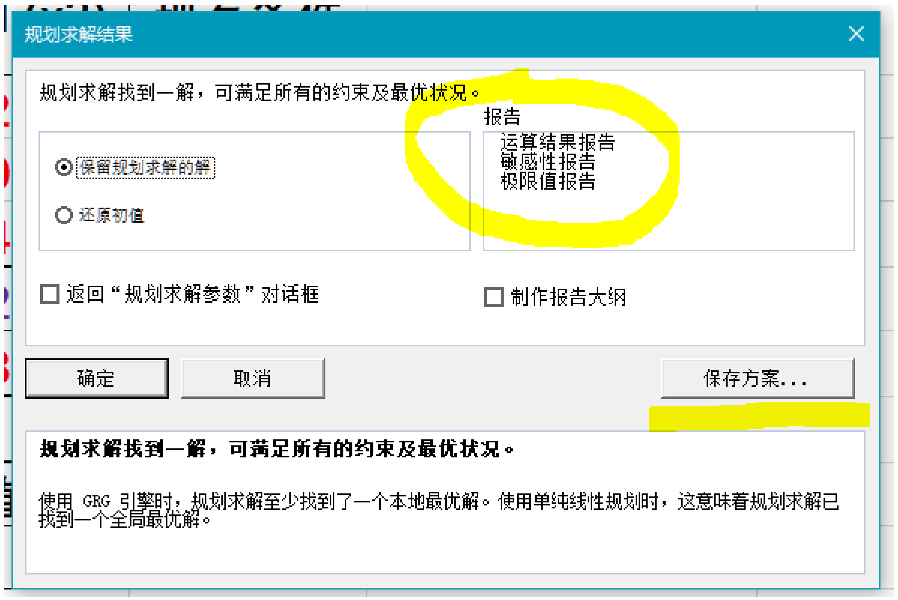
3.9.3 使用Excel

- 参考《实用运筹学:运用Excel 2010建模和求解》
- 北京:中国人民大学出版社,2013叶向编著

	A	B	C	D
1				
2	产品 / 资源	产品I (x1)	产品II (x2)	现有条件
3	设备(台时/件)	1	2	8
4	原材料A(kg/件)	4	0	16
5	原材料B(kg/件)	0	4	12
6	产量(件)	4	2	
7	利润(元)	2	3	
8				
9	式子含义	参与计算的式子左边	值	
10	需要的设备有效台时数	$x_1 + 2x_2$	8	
11	原料A需求量	$4x_1$	16	
12	原料B需求量	$4x_2$	8	
13	利润	$2x_1 + 3x_2$	14	

红色为已知量，紫色为可变量，黄色为推导量，蓝色为最优值（max）

Excel灵敏度分析



选择生成敏感性报告，并点击保存方案... 将生成一个名为“敏感性报告”的工作表

注意：当模型中含有整数约束条件时，不能生成“敏感性报告”

Excel灵敏度分析

Microsoft Excel 16.0 敏感性报告
工作表: [线性规划求解.xlsx]Sheet1
报告的建立: 2019/3/12 19:01:10

可变单元格

单元格	名称	终值	递减成本	目标式系数	允许的增量	允许的减量
B6	产量(件) 产品I (x1)	4	0	2	1E+30	0.5
C6	产量(件) 产品II (x2)	2	0	3	1	3

约束

单元格	名称	终值	阴影价格	约束限制值	允许的增量	允许的减量
C10	需要的设备有效台时数 值	8	1.5	8	2	4
C11	原料A需求量 值	16	0.125	16	16	8
C12	原料B需求量 值	8	0	12	1E+30	4

上半部分可变单元格：反映了目标函数系数变化对最优解的影响。
下半部分约束：反映了约束右端值变化对目标函数值的影响。

Excel灵敏度分析

1.目标函数系数变化灵敏度分析

可变单元格

单元格	名称	终值	递减成本	目标式系数	允许的增量	允许的减量
B6	产量(件) 产品I (x1)	4	0	2	1E+30	0.5
C6	产量(件) 产品II (x2)	2	0	3	1	3

- **单元格：**决策变量所在的单元格
- **名称：**决策变量的名称
- **终值：**决策变量的终值，即通过“规划求解”后得到的最优解
- **递减成本：**它的绝对值表示目标函数中决策变量的系数必须“改进”多少，才能得到该决策变量的正数解。这里的“改进”，在最大化问题中是指增加，在最小化问题中是减少。在本例中两个决策变量都已得到正数解，所以它们的递减成本为0.
- **目标式系数：**指目标函数的系数，它在题目中是已知的常数
- **允许的增量：**目标函数的系数能增加的值，使得原问题的最优解不变
- **允许的减量：**目标函数的系数能减少的值，使得原问题的最优解不变

Excel灵敏度分析

当有多个目标函数系数同时变化时，应用百分百法则判断是否会影响最优解。百分百法则——计算每一个系数变化量占该系数允许变化量的百分比，然后将这些百分比相加，不超过(<=)100%时最优解不变。超过100%则不确定会不会影响最优解，需要调整单元格重新计算才能得到结果。

上例中系数初值分别为2，3，从“可变单元格”表格中可以得到允许的变化范围为[1.5,1E+30]和[0,4]

假设x1的系数c1从2变化为1.8：占允许减量的百分比=(2-1.8)/0.5*100%=40%

假设x2的系数c2从3变化为3.5：占允许减量的百分比=(3.5-3)/1.0*100%=50%

百分比之和为40%+50%=90%=100%，所以最优值不会发生变化，最优解还是（4，2）

Excel灵敏度分析

1.约束右端值变化灵敏度分析

约束

单元格	名称	终值	阴影价格	约束限制值	允许的增量	允许的减量
C10	需要的设备有效台时数 值	8	1.5	8	2	4
C11	原料A需求量 值	16	0.125	16	16	8
C12	原料B需求量 值	8	0	12	1E+30	4

- **单元格**：决策变量所在的单元格
- **名称**：决策变量的名称
- **终值**：决策变量的终值，即通过“规划求解”后得到的最优解
- **影子价格**：约束右端的值每增加/减少一个单位，目标函数值(最优值)增加/减少的数量
- **约束限制值**：指约束条件右端值，它在题目中是已知的常数
- **允许的增量**：约束条件右端能增加的值，使得原问题的影子价格不变
- **允许的减量**：约束条件右端能减少的值，使得原问题的影子价格不变

约束右端值变化规则同样符合百分百法则！

本章完

The end