011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

记2020科大樱花

——致敬为家国大义挺身而出的勇士

和默默奉献的英雄！

雨骤云积万物喑，绿澎红湃势无垠；

花开岂待三千客，直教春风一片新。

回顾：2.1 命题内部结构的逻辑表达

❖ **观察** 保真推理所依据的一些逻辑结构没有在命题语言中表达出来。因此，需要更细致的表达语言，能够表达下列语法范畴：

1.个体，个体变元x，个体常元a (如苏格拉底s)；

2.函数，如x的父亲，记为$g(x)$，苏格拉底的父亲$g(s)$；

3.谓词，表达集合如人H(x)，性质如x会死D(x)，关系如x和y是朋友F(x, y)；

4.量词，所有∀，存在∃。

回顾：2. 2 一阶谓词演算K的构成

❖ **例** 并非雪是黑的等值于雪是白的∨雪是红的∨⋯∨雪是无色的。

◆ 命题逻辑不表达原子命题内部结构上的关联：

$$\neg x_1 \leftrightarrow (x_2 \vee x_3 \vee \ldots \vee x_k \vee \ldots)$$

◆ 一阶逻辑可以表达原子命题内部结构上的关联：

$$\neg C(\text{snow}, \text{black}) \leftrightarrow$$

$$(C(\text{snow}, \text{white}) \vee C(\text{snow}, \text{red}) \vee \ldots \vee \forall x \neg C(\text{snow}, x))$$

❖ **观察** 一阶逻辑可以利用原子命题内部的语法结构进行推理。

❖ **观察** 一阶语言更接近自然语言，更方便人的使用。

❖ **观察** 一阶逻辑与自然语言和日常思维的差别是什么？

2.3 一阶演算K的形式推理

2. 3 一阶演算K的形式推理

❖ 一阶谓词演算K中的形式推理和形式证明

❖ 定义(K形式推理) 任给K公式p和公式集Γ，p在K中的一个从Γ的推理是一个K公式序列$p_1, \cdots, p_n (= p)$，满足对任何$k\ (1 \le k \le n)$:

1. p_k是一条K公理；或者
2. $p_k \in \Gamma$；或者
3. 存在$p_i, p_j\ (i, j < k)$使得$p_j = p_i \rightarrow p_k$；或者
4. 存在$p_i\ (i < k)$使得$p_k = \forall x p_i$。

◆ 若存在p的一个从Γ的推理，则称p从Γ形式可推，记为$\Gamma \vdash_K p$。

◆ 条件4中的个体变元x称为这个推理的概括变元。

2.3 一阶演算K的形式推理

- **定义(K形式证明)** 任给K公式p，若$\varnothing\vdash_K p$，则称p在K中可证，记为$\vdash_K p$，简记为$\vdash p$，称p为K的一个内定理。
- K的形式推理和形式证明要求写出每一步推理的证明根据。
- K的形式推理和形式证明方法包括直接证明和简化证明。

2.3 一阶演算K的形式推理

❖ 例 试证 $\{\forall x(p\to q), \forall x\neg q\}\vdash \forall x\neg p.$

证明

	证明根据
(1) $\forall x(p\to q)$,	前提
(2) $\forall x(p\to q)\to(p\to q)$,	(K4)
(3) $p\to q$,	(1)，(2)，MP
(4) $\forall x\neg q$,	前提
(5) $\forall x\neg q\to\neg q$,	(K4)
(6) $\neg q$,	(4)，(5)，MP
(7) $(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$,	永真式
(8) $\neg q\to\neg p$,	(3)，(7)，MP
(9) $\neg p$,	(6)，(8)，MP
(10) $\forall x\neg p$.	(9) UG

为什么重言式可做K的证明根据？

2. 3 一阶演算K的形式推理

❖ **记号** K的全体公式的集合记为K(Y)，其中Y={y_1, y_2 ⋯}是K的全体个体变元的集合。

❖ **记号（命题变元代入）** 设$p(x_1, \cdots, x_n) \in L(X_n)$，$q_1, \cdots, q_n \in K(Y)$。在L公式 $p(x_1, \cdots, x_n)$中，用$q_1, \cdots, q_n$分别替换$x_1, \cdots, x_n$，所得结果记为 $p(q_1, \cdots, q_n)$。则$p(q_1, \cdots, q_n) \in K(Y)$。

❖ **例**

(L1)	(K1)
$x_1 \to (x_2 \to x_1)$	$q_1 \to (q_2 \to q_1)$
$x_1 \to ((x_2 \to x_1) \to x_1)$	$q_1 \to ((q_2 \to q_1) \to q_1)$

2.3 一阶演算K的形式推理

- ❖ **定理**（K和L的关系） 设$p(x_1, \cdots, x_n) \in \mathrm{L}(\mathrm{X_n})$，$q_1, \cdots, q_n \in \mathrm{K}(\mathrm{Y})$。如果$\vdash_{\mathrm{L}} p(x_1, \cdots, x_n)$，则$\vdash_{\mathrm{K}} p(q_1, \cdots, q_n)$。
- ◆ **证明** 设$p_1(x_1, \cdots, x_n)$，…，$p_m(x_1, \cdots, x_n) = p(x_1, \cdots, x_n)$是$p(x_1, \cdots, x_n)$在L中的一个形式证明，其中每一个公式是(L1)、(L2)、(L3)或者用MP规则从前面的公式推出的。则$p_1(q_1, \cdots, q_n)$，…，$p_m(q_1, \cdots, q_n) = p(q_1, \cdots, q_n)$是$p(q_1, \cdots, q_n)$在K中的一个形式证明。
- ❖ **例** 由于$\vdash_{\mathrm{L}} x_1 \rightarrow x_1$，所以对任何$q(x_1) \in \mathrm{K}(\mathrm{Y})$有$\vdash_{\mathrm{K}} q(x_1) \rightarrow q(x_1)$。
- ❖ **注释** K和L关系定理可以在K的简化证明中作为证明根据。

2.3 一阶演算K的形式推理

❖ 定理(K的简单性质)

1. 单调性：若$\Gamma \subseteq \Gamma'$且$\Gamma \vdash_K p$，则$\Gamma' \vdash_K p$；
2. 紧致性：若$\Gamma \vdash_K p$，则存在有穷集$\Gamma' \subseteq \Gamma$使得$\Gamma' \vdash_K p$；
3. 平凡性：若Γ是不相容的，则对任何$p \in K(Y)$有$\Gamma \vdash_K p$。

◆证明 类似L，略。

2.3 一阶演算K的形式推理

❖ **定理**(K演绎定理)

1. 若$\Gamma \vdash_K p \to q$，则$\Gamma \cup \{p\} \vdash_K q$；

2. 若$\Gamma \cup \{p\} \vdash_K q$，并且该形式推理的任何概括变元不在$p$中自由出现，则$\Gamma \vdash_K p \to q$。

◆ **证明** 类似L，略。

❖ **注释** K中“前提变前件”是有条件的。

2.3 一阶演算K的形式推理

❖ **定理**(K反证律) 如果$\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash_K q$且$\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash_K \neg q$，则$\Gamma\vdash_K p$。

❖ **定理**(K归谬律) 如果$\Gamma\cup\{p\}\vdash_K q$且$\Gamma\cup\{p\}\vdash_K \neg q$，则$\Gamma\vdash_K \neg p$。

❖ **定理**($\exists_1$规则) 如果项t对$p(x)$中x自由，则$\Gamma\vdash_K p(t)\to\exists x p(x)$。

◆ **证明** 自修。

❖ **定理**($\exists_2$规则) 设$\Gamma\cup\{p\}\vdash_K q$并且该推理中的概括变元不在$p$中自由出现。若$x$不在$q$中自由出现，则$\Gamma\cup\{\exists x p\}\vdash_K q$。

◆ **证明** 设$\Gamma\cup\{p\}\vdash_K q$且该推理中的概括变元不在$p$中自由出现。依K演绎定理得$\Gamma\vdash_K p\to q$。于是从$\Gamma$可得到下列推理序列：

2.3 一阶演算K的形式推理

(1) $p \to q$,	由演绎定理
(2) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$,	永真式
(3) $\neg q \to \neg p$,	(1)，(2)，MP
(4) $\forall x(\neg q \to \neg p)$,	(3)， UG
(5) $\forall x(\neg q \to \neg p) \to (\neg q \to \forall x \neg p)$,	(K5)
(6) $\neg q \to \forall x \neg p$,	(4)，(5)，MP
(7) $(\neg q \to \forall x \neg p) \to (\neg \forall x \neg p \to q)$,	永真式
(8) $\neg \forall x \neg p \to q$, 即 $\exists x p \to q$.	(6)，(7)，MP

以上推理过程中未出现x以外的其他概括变元，依演绎定理得$\Gamma \vdash_K p \to q$。

2.3 一阶演算K的形式推理

习题

2.2 p.73: 2; 3(2).