# 概率论与数理统计 B　第四周作业　3 月 10 日 周二

**PB18151866 龚小航**

2.48. (2013 年全国考研试题) 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，$a$ 为常数且大于零，求 $P(Y \le a+1|Y \ge a)$.

解：直接运用公式求解条件概率。对于$\lambda = 1$的指数分布，先写出它的概率密度函数：

$$f(y) = \frac{1}{e^y}\ ;\ F(y) = 1 - \frac{1}{e^y} \qquad (y > 0)$$

带入本例中的指数分布，得：(单个点概率为 0)

$$P(Y \le a+1|Y \ge a) = \frac{P(a \le Y \le a+1)}{P(Y \ge a)} = \frac{P(a < Y \le a+1)}{P(Y > a)} = \frac{F(a+1) - F(a)}{1 - F(a)} = 1 - \frac{1}{e}$$

2.50. 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X 服从参数$\lambda = 1/5$ 的指数分布(单位：分钟). 假设某顾客一旦等待时间超过 10 分钟他就立即离开，且一个月内要到该银行 5 次，试求 他在一个月内至少有一次未接受服务而离开的概率.

解：记事件 A：该顾客在单次服务中接受了服务。

记事件 W：顾客在一个月内至少有一次未接受服务而离开

先写出 X 的分布函数：

$$F(x) = 1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{5}x}} \quad (x > 0)$$

因此，有$P(A) = F(10) = 1 - \frac{1}{e^2}$ ，每次到银行是否能接受服务都为独立事件：

$$P(W) = 1 - P(\overline{W}) = 1 - P(A)^5 = 1 - \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)^5 \approx 0.5167$$

2.53. 设随机变量$X \sim N(1,4)$.

(1) 试求概率 $P(0 \le X \le 4), P(X > 2.4)$和$P(|X| > 2)$;

(2) 试求常数 $c$，使得 $P(X > c) = 2P(X \le c)$.

解：(1)这个正态分布满足 $\mu = 1, \sigma^2 = 4$,而一般认为$\sigma > 0$,所以$\sigma = 2$

写出该分布的概率密度函数：

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$$

化形，利用标准正态分布表，可以求得题中所要求的概率：

$$P(0 \le X \le 4) = P\left(\frac{0-1}{2} \le \frac{X-1}{2} \le \frac{4}{2}\right) = P\left(-\frac{1}{2} \le \frac{X-1}{2} \le \frac{3}{2}\right) = \Phi\left(\frac{3}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{3}{2}\right) + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0.6247\ ;$$

$$P(X > 2.4) = P\left(\frac{X-1}{2} > \frac{2.4-1}{2}\right) = P\left(\frac{X-1}{2} > 0.7\right) = 1 - \Phi(0.7) = 0.2420 \qquad ;$$

$$P(|X| > 2) = P(X > 2) + P(X < -2) = P\left(\frac{X-1}{2} > \frac{1}{2}\right) + P\left(\frac{X-1}{2} < -\frac{3}{2}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) + \Phi\left(-\frac{3}{2}\right) = 2 - \left(\Phi\left(\frac{1}{2}\right) + \Phi\left(\frac{3}{2}\right)\right) = 0.3753\ ;$$

(2)直接将题中所给概率用参数$c$表示：

$$P(X > c) = 1 - P(X \le c) = 1 - P\left(\frac{X-1}{2} \le \frac{c-1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{c-1}{2}\right)$$

$$2P(X \le c) = 2P\left(\frac{X-1}{2} \le \frac{c-1}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{c-1}{2}\right)$$

由题，这两者相等，故有：

$$1 - \Phi\left(\frac{c-1}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{c-1}{2}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \Phi\left(\frac{c-1}{2}\right) = \frac{1}{3} \quad , \quad \Phi\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

查标准正态分布表，可得：

$$\frac{1-c}{2} \approx 0.43$$

$$\therefore \quad c \approx 0.14$$

2.56. 假设在电源电压不超过 $200V, 200 \sim 240V$ 和超过 $240V$ 三种情况下某电子元件，损坏的概率分别为 10%, 0% 和 30%. 若电源电压服从 $N(220,225)$ 分布，试求电子元件会损坏的概率.

解：记电源电压为随机变量$X$，满足正态分布 $X \sim N(220,225)$　得到$\mu = 220, \sigma = 15$

记事件$W$：电子元件损坏。

记事件$A_1$：$X \leq 200$;　事件$A_2$：$200 \leq X \leq 240$;　事件$A_3$：$X \geq 240$;

由正态分布的性质，得：

$$P(A_1) = P(X \leq 200) = P\left(\frac{X-220}{15} \leq \frac{200-220}{15}\right) = \Phi\left(-\frac{4}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.09121$$

$$P(A_2) = P\left(\frac{200-220}{15} \leq \frac{X-220}{15} \leq \frac{240-220}{15}\right) = \Phi\left(\frac{4}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{4}{3}\right) = 2\Phi\left(\frac{4}{3}\right) - 1 \approx 0.81758$$

$$P(A_3) = P(X \geq 240) = 1 - P(X \geq 240) = 1 - P\left(\frac{X-220}{15} \leq \frac{240-220}{15}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.09121$$

显然$A_1$、$A_2$、$A_3$构成完备事件组，利用全概率公式：

$$P(W) = \sum_{i=1}^{3} P(W|A_i) = 10\% * P(A_1) + 0 * P(A_2) + 30\% * P(A_3) \approx 0.03648$$

3.2. 从 1,2,3,4 四个数中任取一个数，记为 X，再从 1 到 X 中任取一个数，记为 Y 。求 $\{Y = 2\}$ 这个事件发生的概率是多少?

解：记事件 W：第二次取到数$Y$，且$Y = 2$

记事件$A_1$：$X = 1$；　事件$A_2$：$X = 2$；　事件$A_3$：$X = 3$；　事件$A_4$：$X = 4$；且有

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{4}$$

显然事件$A_1$、$A_2$、$A_3$、$A_4$构成完备事件组，利用全概率公式：

$$P(W) = \sum_{i=1}^{4} P(W|A_i) = 0 * P(A_1) + \frac{1}{2} * P(A_2) + \frac{1}{3} * P(A_3) + \frac{1}{4} * P(A_4) = \frac{13}{48} \approx 0.27083$$

# 概率论与数理统计 B　第四周作业　3 月 13 日 周五

**PB18151866 龚小航**

3.11. 设某射手每次射中目标的概率为 $p(0<p<1)$, 射击进行到第二次射中目标为止, $X$表示第一次射中目标所进行的射击次数, $Y$表示第二次射中目标时所进行的射击次数.

(1) 求二维随机变量 $(X,Y)$ 的分布律;

(2) 求 $X$ 和 $Y$ 的边缘分布.

解: (1) 令 $X=x, Y=y$, 显然有 $x<y$,每一次射击为独立重复试验。在总共得$y$次试验中，一共成功两次，分别为第$x$次和第$y$次。易知总共失败$(y-2)$次，成功2次，所以有:

$$P(X=x,Y=y)=p^2(1-p)^{y-2}\quad (x,y\in\mathbb{N}^+, y>x)$$

以上即为用分布函数描述的二维随机变量的分布律。

(2) 直接应用边缘分布的意义，可得:

$$P(X=x)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=x,Y=k)=\sum_{k=x-1}^{\infty}P(X=x,Y=k)=\sum_{k=x-1}^{\infty}p^2(1-p)^k$$

$$=\lim_{t\to\infty}\sum_{k=x-1}^{t}p^2(1-p)^i=\lim_{t\to\infty}\left(p^2*(1-p)^{x-1}\frac{1-(1-p)^{t-x}}{1-(1-p)}\right)=p(1-p)^{x-1}$$

$$P(Y=y)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k,Y=y)=\sum_{k=1}^{y-1}P(X=k,Y=y)=\sum_{k=1}^{y-1}p^2(1-p)^{y-2}=(y-1)p^2(1-p)^{y-2}$$

3.19. 设二维随机变量 $(X,Y)$ 的分布函数为:

$$F(x,y)=a(b+\arctan x)(c+\arctan y),\qquad x,y\in\mathbb{R}.$$

(1) 确定常数 $a,b,c$； (2) 求 $P(X>0,Y>0)$; (3) 求 $X$ 和 $Y$ 的边缘密度函数.

解: (1) 根据分布函数的意义，有以下三式成立，联立之，可得:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x,y\to\infty}F(x,y)=a\left(b+\frac{\pi}{2}\right)\left(c+\frac{\pi}{2}\right)=1\cdots\cdots\text{①}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=a\left(b-\frac{\pi}{2}\right)(c+\arctan y)\equiv 0\cdots\cdots\text{②}\\ \lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=a(b+\arctan x)\left(c-\frac{\pi}{2}\right)\equiv 0\cdots\cdots\text{③}\end{cases}$$

从②、③可以解出，$b=c=\frac{\pi}{2}$ ,再将其带入①中，可得$a=\frac{1}{\pi^2}$ .由此，可以写出 F:

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan y\right)$$

(2) 若将 X-Y 建立平面直角坐标系，所求概率即为第一象限概率。

$$P(X>0,Y>0)=F(\infty,\infty)-F(0,\infty)-F(\infty,0)+F(0,0)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(\pi*\pi-\frac{\pi}{2}*\pi-\pi*\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}*\frac{\pi}{2}\right)=0.25$$

(3) 对于连续型的随机变量分布，有:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\,dx\,dy$$

所以，能推出该分布的概率密度函数:

$$f(x,y)=\frac{F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{\pi^2}*\frac{1}{(1+x^2)}\frac{1}{(1+y^2)}$$

再根据边缘分布的意义，对 x 和 y 分别做积分，得:

$$P(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi^2}*\frac{1}{(1+x^2)}\frac{1}{(1+y^2)}\,dy=\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{(1+x^2)}*\pi=\frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+x^2)}$$

$$P(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi^2}*\frac{1}{(1+x^2)}\frac{1}{(1+y^2)}\,dx=\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{(1+y^2)}*\pi=\frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+y^2)}$$

3.21. 设二维随机变量 $(X,Y)$ 的密度函数为

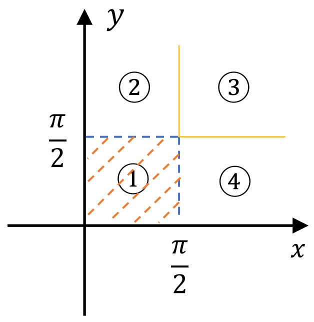
$$f(x,y)=\begin{cases} cosxcosy, & 0<x<\frac{\pi}{2},\ 0<y<\frac{\pi}{2}, \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

(1) 试求 $(X,Y)$ 的分布函数;

(2) 试求概率 $P(0<X<\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}<Y<\frac{\pi}{2})$.

解：(1) 直接由分布函数的意义，可以写出：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$$




如左图，在第一象限可将点$(x,y)$的区域划分为四块，分别写出分布函数：

$$①: F(x,y)=\int_0^x\int_0^y \cos x\cos y\,dx\,dy=\sin x\sin y$$

$$②: F(x,y)=\int_0^x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos y\,dx\,dy=\sin x$$

$$③: F(x,y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos y\,dx\,dy=1$$

$$④: F(x,y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{y} \cos x\cos y\,dx\,dy=\sin y$$

综上，可以得到$F(x,y)$的分段表达式：

$$F(x,y)=\begin{cases} \sin x\sin y & 0<x,y\le\frac{\pi}{2} \\ \sin x & 0<x\le\frac{\pi}{2}, y>\frac{\pi}{2} \\ 1 & x,y>\frac{\pi}{2} \\ \sin y & x>\frac{\pi}{2}, 0<y\le\frac{\pi}{2} \\ 0 & x<0\ \ or\ \ y<0 \end{cases}$$

(2) 运用$F(x,y)$的性质与意义，得出：

$$P\left(0<X<\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}<Y<\frac{\pi}{2}\right)=F\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)+F\left(0,\frac{\pi}{4}\right)-F\left(0,\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

3.27. 设二维随机变量$(X,Y)$的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} c\left(R-\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right), & x^2+y^2<R^2; \\ 0, & x^2+y^2\ge R^2 \end{cases}$$

(1) 求 $c$ 的值; (2) 求 $(X,Y)$ 落在圆 $\{(x,y): x^2+y^2\le r^2\}\ (r<R)$ 内的概率.

解：(1) 换元，利用极坐标，令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则$dx\,dy=r\,dr\,d\theta$

$$f(x,y)=\begin{cases} c(R-r), & r<R; \\ 0, & r\ge R \end{cases}$$

$$F(\infty,\infty)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^{R} c(R-r)r\,dr\,d\theta=\frac{\pi R^3}{3}c\equiv 1$$

$$\therefore c=\frac{3}{\pi R^3}$$

(2) 由上一问求出的$c$值，将其带入概率密度函数，则有：

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{3}{\pi R^3}(R-r), & r<R; \\ 0, & r\ge R \end{cases}$$

直接对其进行积分即可：记$(X,Y)$落在题中描述的区域内部为事件 W

$$P(W)=\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\frac{3}{\pi R^3}(R-t)t\,dt\,d\theta=3\frac{r^2}{R^2}-2\frac{r^3}{R^3}$$