



Computer Science and Technology

运筹学基础

讲者：顾乃杰 教授、黄章进 副教授

计算机科学与技术学院

运输问题

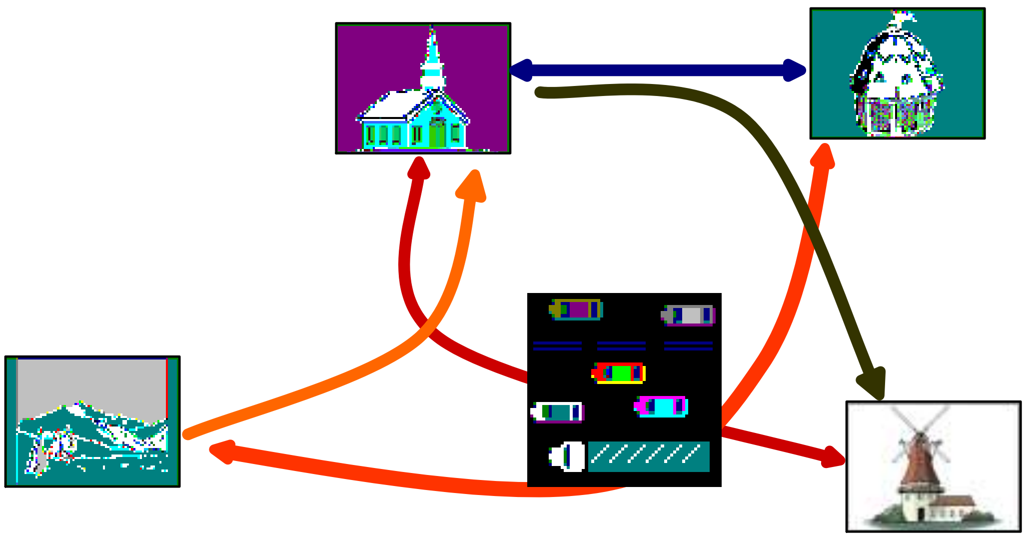
Chap.4 Transportation Problem

主要内容

- 4.1 运输问题的数学模型
- 4.2 表上作业法
- 4.3 产销不平衡的运输问题及其求解方法
- 4.4 应用举例
- 4.5 使用计算机工具求解运输问题

4.1 运输问题的数学模型

- 运输问题（Transportation Problem）
  - 人们在从事生产活动中，不可避免地要进行物资调运工作。如某时期内将生产基地的煤、钢铁、粮食等各类物资，分别运到需要这些物资的地区，根据各地的生产量和需要量及各地之间的运输费用，如何制定一个运输方案，使总的运输费用最小。这样的问题称为运输问题。



运输问题的特征

- 运输问题是一种特殊的线性规划问题，它们的约束方程组的系数矩阵具有特殊的结构，有可能找到比单纯形法更为简便的求解方法。
- 运输问题的特征：
  - 每一个出发地都有一定的供应量（supply）配送到目的地，每一个目的地都有需要一定的需求量（demand），接收从出发地发出的产品。
  - 需求假设（The Requirements Assumption）：
    - 每一个出发地都有一个固定的供应量，所有的供应量都必须配送到目的地。与之相类似，每一个目的地都有一个固定的需求量，整个需求量都必须由出发地满足，即：

总供应量＝总需求量

运输问题的特征

- 可行解特性（The Feasible Solutions Property）：
  - 当且仅当供应量的总和等于需求量的总和时，运输问题才有可行解。
- 成本假设（The Cost Assumption）：
  - 从任何一个出发地到任何一个目的地的货物配送成本和所配送的数量成线性比例关系，因此这个成本就等于配送的单位成本乘以所配送的数量。
- 整数解性质（Integer Solutions Property）：
  - 只要它的供应量和需求量都是整数，任何有可行解的运输问题必然有所有决策变量都是整数的最优解。因此，没有必要加上所有变量都是整数的约束条件。

运输问题的例子

- 例：某种产品，A、B、C三个工厂生产，D、E、F、G四个工厂需求。生产量和需求量及工厂之间的运输成本如下表。应如何运输使得成本最低?

需求方 / 生产方	D	E	F	G	生产能力（吨）
A	3	2	7	6	5000
B	7	5	2	3	6000
C	2	5	4	5	2500
需求量（吨）	6000	4000	2000	1500	

每吨运输成本（元/吨）

运输问题的例子

– 例4.1的数学模型

$$\min z = 3x_{11}+2x_{12}+7x_{13}+6x_{14}+7x_{21}+5x_{22}+2x_{23}+3x_{24}+2x_{31}+5x_{32}+4x_{33}+5x_{34}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=5000 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=6000 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=2500 \end{array}\right\} \text{生产方约束}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{21}+x_{31}=6000 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=4000 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=2000 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=1500 \end{array}\right\} \text{需求方约束}$$

运输问题的例子

– 例4.1的表格表示

	1	2	3	4	
1	3 x_{11}	2 x_{12}	7 x_{13}	6 x_{14}	5000
2	7 x_{21}	5 x_{22}	2 x_{23}	3 x_{24}	6000
3	2 x_{31}	5 x_{32}	4 x_{33}	5 x_{34}	2500
	6000	4000	2000	1500	

运输问题的数学模型

- 已知有m个生产地点A_i，i=1,2,…,m。可供应某种物资，其供应量(产量)分别为a_i，i=1,2,…,m，有n个销地B_j，j=1,2,…,n，其需要量分别为b_j，j=1,2,…,n，从A_i到B_j运输单位物资的运价(单价)为c_{ij}
  - 这些数据可汇总于产销平衡表和单位运价表中，有时可将两表合二为一

产销平衡表

产地 \ 销地	$1,2,\cdots,n$	产量
1		a_1
2		a_2
$\vdots$		$\vdots$
m		a_m
销量	$b_1,b_2,\cdots,b_n$	

单位运价表

产地 \ 销地	1	2	$\cdots$	n
1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}
2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}

运输问题的数学模型

- 若用x_{ij}表示从A_i到B_j的运量，那么在产销平衡的条件下，要求得总运费最小的调运方案的数学模型为

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,i=1,2,\cdots,m$$

$$x_{ij}\geqslant 0$$

$$\begin{array}{c}
\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{matrix} \\
\left[\begin{matrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1
\end{matrix}\right]
\end{array}
\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m\text{行} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n\text{行} \end{matrix}$$

– 它包含$m\times n$个变量，$(m+n)$个约束方程，其系数矩阵的结构比较松散且特殊。

运输问题的数学模型

– 该系数矩阵中对应于变量x_{ij}的系数向量P_{ij}，其分量中除第i个和第$m+j$个为1以外，其余的都为零。即

$$P_{ij}=(0,\dots,1,0,\dots,0,1,0,\dots,0)^T=e_i+e_{m+j}$$

– 对产销平衡的运输问题，由于有以下关系式存在

$$\sum_{j=1}^{n} b_j=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{m} a_i$$

所以模型最多只有 m+n-1个独立的约束方程，即系数矩阵秩≤m+n-1

– 运输问题存在可行解，因此必存在有限最优解（变量有上界）

- 因为总供应=总需求，显然：

$$x_{ij}=\frac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i}$$

构成了一组可行解。

- 又由于 $0\le x_{ij}\le \min(a_i, b_j)$ 有界，因而存在最优解。

4.2 表上作业法

- 4.2.1 确定初始基可行解
- 4.2.2 最优解的判别
- 4.2.3 改进的方法—闭回路调整法
- 4.2.4 表上作业法计算中的问题

表上作业法

- 表上作业法是单纯形法在求解运输问题时的一种简化方法，其实质是单纯形法，也称为运输问题单纯形法。
- 表上作业法步骤如下：
  - 1) 找出初始基可行解。在有（m×n）格的产销平衡表按一定规则，给出m+n-1个数字，称为数字格，初始基变量的值；
  - 2) 求各非基变量的检验数。在表上计算空格的检验数，判别是否为最优解，是则停止运算，否则转到下一步；
  - 3) 确定换入变量和换出变量，找出新的基可行解—在表上用闭回路法调整；
  - 4) 重复上述步骤2)和3)直到得到最优解。

表上作业法

– 例1 某公司的加工厂以及销售点的产销平衡表和单位运价表如下表，问公司应如何调运产品，在满足各销点的需要量的前提下使总运费最少。

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2					4
A_3					9
销量	3	6	5	6	

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

- 解：步骤1：确定初始解可行解。

因：$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$，　必存在 $x_{ij} \geqslant 0$，$i = 1,2,\cdots,m$，$j = 1,2,\cdots,n$，

且　$0 \leqslant x_{ij} \leqslant \min(a_i, b_j)$

所以产销平衡的运输问题总是存在可行解，且存在最优解。

4.2.1 确定初始基可行解

- 确定初始基可行解的常用方法有三种：*西北角法*，*最小元素法*和*伏格尔*（**Vogel**）法。

在初始解越好，目标值越小的意义下，这三种方法在产生的初始基可行解的“质量”上有所差别。一般来说，**Vogel**法能够产生最好的初始基可行解，西北角法产生的初始解最差，但同时，西北角法所需要的计算量最少。

西北角法

- 基本思想：从产销平衡表的西北角开始，顺序选定基变量
  - 输入：产量 a_i，$i=1,2,\ldots,m$ 和销量 b_j，$j=1,2,\ldots,n$（产销平衡表）
  - 输出：m+n-1个基变量
  - 流程：
    - 1. 初始化：选择西北角变量 $x_{ij} = x_{11}$ 为基变量
    - 2. 确定基变量的值：$x_{ij} = \min(a_i, b_j)$。如果 x_{ij} 为最后一个元素，停止。否则，进入下一步。
    - 3. 更新产销平衡表：$a_i \leftarrow a_i - x_{ij}$，$b_j \leftarrow b_j - x_{ij}$
    - 4. 修改产销平衡表：划去 $a_i=0$ 的A_i行或 $b_j=0$ 的 B_j 列
    - 5. 选择下一个基变量：如果 $a_i=0$，$x_{ij} \leftarrow x_{i+1,j}$（下移一行）。否则，$x_{ij} \leftarrow x_{i,j+1}$（右移一列）
    - 6. 重复2-5

西北角法

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2					4
A_3					9
销量	3	6	5	6	

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	4			7
A_2		2	2		4
A_3			3	6	9
销量	3	6	5	6	

- 最后总运价为：

$$3\times3+4\times11+2\times9+2\times2+3\times10+6\times5=133\text{元}$$

最小元素法

- 基本思想：就近供应，即从单位运价表中最小的运价开始确定供销关系，然后次小，一直到给出初始基可行解为止。
  - 输入：产量a_i，i=1,2,…,m 和销量b_j，j=1,2,…,n（产销平衡表）和单位运价c_{ij}（单位运价表）
  - 输出：m+n-1个基变量
  - 流程：
    - 1. 选择基变量：选择最小运价c_{ij}对应的变量x_{ij}为基变量
    - 2. 确定基变量的值：$x_{ij} = \min(a_i, b_j)$。如果c_{ij}为最后一个元素，停止。否则，进入下一步。
    - 3. 更新产销平衡表：$a_i \leftarrow a_i - x_{ij}$，$b_j \leftarrow b_j - x_{ij}$
    - 4. 修改单位运价表：划去a_i=0的A_i行或b_j=0的B_j列
    - 5. 重复1-4

最小元素法

- 上例中，找出运价最小的为 $c_{21}=1$，表示先将A_2的产品供应给B_1。A_2的产量为4，除了供应B_1的3吨（$x_{23}=3$)产品外，还剩余1吨。B_1的需求得到满足，将B_1列运价划去，得到：

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2	3				1
A_3					9
销量	0	6	5	6	

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1×	9	2	8
A_3	7	4	10	5

- 找出其余运价最小的为$c_{23}=2$，即将A_2的产品供应给B_3。A_2还剩余1吨产品，B_3还需求4吨。A_2可供应为0，将A_2行运价划去得下表：

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2	3		1		0
A_3					9
销量	0	6	4	6	

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
~~A_2~~	~~1×~~	~~9~~	~~2×~~	~~8~~
A_3	7	4	10	5

最小元素法

– 运价最小为$c_{13}=3$，即将A_1的产品供应给B_3，B_3得到满足，将B_3列运价划去，得下表：

产地\销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4		3
A_2	3		1		0
A_3					9
销量	0	6	0	6	

产地\销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3×	10
~~A_2~~	~~1×~~	~~9~~	~~2×~~	~~8~~
A_3	7	4	10	5

– 运价最小为$c_{32}=4$，即将A_3的产品供应给B_2，B_2得到满足，将B_2列运价划去，得下表

产地\销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4		3
A_2	3		1		0
A_3		6			3
销量	0	0	0	6	

产地\销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3×	10
~~A_2~~	~~1×~~	~~9~~	~~2×~~	~~8~~
A_3	7	4×	10	5

最小元素法

– 循环进行计算，直至单位运价表上的所有元素被划去为止：

产地\销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4		3
A_2	3		1		0
A_3		6		3	0
销量	0	0	0	3	

产地\销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3×	10
~~A_2~~	~~1×~~	~~9~~	~~2×~~	~~8~~
~~A_3~~	~~7~~	~~4×~~	~~10~~	~~5×~~

A_1			4	3	0
A_2	3		1		0
A_3		6		3	0
销量	0	0	0	0	

~~A_1~~	~~3~~	~~11~~	~~3×~~	~~10×~~
~~A_2~~	~~1×~~	~~9~~	~~2×~~	~~8~~
~~A_3~~	~~7~~	~~4×~~	~~10~~	~~5×~~

– 此时得到调运方案：$4\times3+3\times10+3\times1+1\times2+6\times4+3\times5=86$元

– 注意： 有可能在产销平衡表上填人一个数字后，在单位运价表上同时划去一行和一列（出现退化）。为了保证有m+n-1个数字，可以在划掉的行或列某一位置加一个0，将在4.2.4节中讲述。

伏格尔法

- 最小元素法的缺点：为了节省一处的费用，有时造成在其它处要多花好几倍的费用
- 伏格尔法的考虑：一产地的产品假如不能按最小运费就近供应，就考虑次小运费，这就有一个差额（惩罚量）。差额越大，说明不能按最小运费调运时运费增加越多，因而对差额最大处就应当采用最小运费调运。
  - 流程：
    - 1. 计算行差和列差：计算各行和各列的最小运费和次小运费的差额；
    - 2. 选择基变量：从行或列差额中选出最大者，选择它所在行或列中的最小元素 c_{ij} 对应的变量 x_{ij} 为基变量；
    - 3. 确定基变量的值： $x_{ij}=\min(a_i, b_j)$。如果c_{ij}为最后一个元素，停止。否则，进入下一步。
    - 4. 更新产销平衡表： $a_i \leftarrow a_i - x_{ij}$， $b_j \leftarrow b_j - x_{ij}$
    - 5. 修改单位运价表：划去 a_i=0的$\mathrm{A_i}$行或 b_j=0的 $\mathrm{B_j}$ 列
    - 6. 重复1-5

伏格尔法

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2					4
A_3					9
销量	3	6	5	6	

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

– 仍以例1说明：先计算各行各列的最小运费和次小运费的差额，从差额中选出最大者5，选择B_2列的最小元素$4=c_{32}$，$x_{32} = \min(a_3,b_2) = 6$，划 B_2 列：

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	行差额
A_1	3	11	3	10	0
A_2	1	9	2	8	1
A_3	7	4×	10	5	1
列差额	2	5	1	3	

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2					4
A_3		6			3
销量	3	0	5	6	

伏格尔法

– 重新计算差额，从行或列差额中选取最大者3再次计算：

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	行差额
A_1	3	11	3	10	0
A_2	1	9	2	8	1
A_3	7	4×	10	5×	2
列差额	2	5	1	3	

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2					4
A_3		6		3	0
销量	3	0	5	3	

– 重新计算差额，从行或列差额中选取最大者再次计算：

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	行差额
A_1	3	11	3	10	0
A_2	1×	9	2	8	1
~~A_3~~	~~7~~	~~4×~~	~~10~~	~~5×~~	~~2~~
列差额	2	5	1	2	

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2	3				1
A_3		6		3	0
销量	0	0	5	3	

伏格尔法

– 重新计算差额，从行或列差额中选取最大者再次计算：

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	行差额
A_1	3	11	3×	10	7
A_2	1×	9	2	8	6
~~A_3~~	~~7~~	~~4×~~	~~10~~	~~5×~~	~~2~~
列差额	2	5	1	2	

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			5		2
A_2	3				1
A_3		6		3	0
销量	0	0	0	3	

A_1	3	11	3×	10	0
A_2	1×	9	2	8×	0
~~A_3~~	~~7~~	~~4×~~	~~10~~	~~5×~~	~~2~~
列差额	2	5	1	2	

A_1			5		2
A_2	3			1	0
A_3		6		3	0
销量	0	0	0	2	

A_1	3	11	3×	10×	0
~~A_2~~	~~1×~~	~~9~~	~~2~~	~~8×~~	~~0~~
~~A_3~~	~~7~~	~~4×~~	~~10~~	~~5×~~	~~2~~
列差额	2	5	1	2	

A_1			5	2	0
A_2	3			1	0
A_3		6		3	0
销量	0	0	0	0	

伏格尔法得到的调运方案为：3×5+10×2+1×3+8×1+4×6+5×3=85元

确定初始基可行解

- 西北角法、最小元素法和伏格尔法在选择基变量的规则上不同，确定基变量值和其余步骤相同：
  - 西北角法：从西北角开始顺序选择
  - 最小元素法：选择最小运价对应的变量
  - 伏格尔法：选取行或列差最大者所在行或列中的最小运价对应变量
  - 伏格尔法计算量最大，一般给出最接近最优解的初始解。
    - 例1用伏格尔法给出的初始解就是最优解。

确定初始基可行解

- 用西北角法、最小元素法和伏格尔法给出的初始解都是运输问题的基可行解。
  - 以最小元素法为例，每在产销平衡表上填入一个数字，在运价表上就划去一行或一列。表中共有 **m** 行 **n** 列，总共可划 **m+n** 条直线。但当表中只剩一个元素时，填入这个数字时在运价表上同时划掉该元素对应的行和列，相应的在产销平衡表上填了 **m+n-1** 个数字，即给出了 **m+n-1** 个基变量的值。
  - 这 **m+n-1** 个基变量对应的系数列向量是线性独立的。
  - 证明：

若表中确定的第一个基变量$x_{i_1j_1}$对应的系数列向量为：$P_{i_1j_1}=e_{i_1}+e_{m+j_1}$

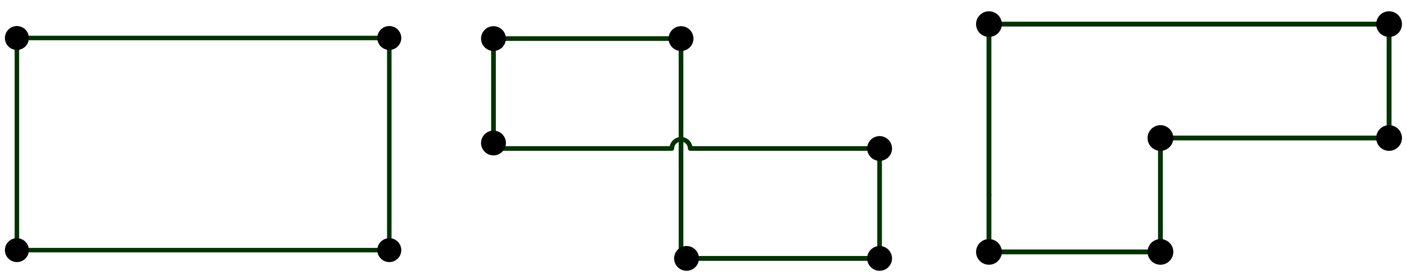
当选定 $x_{i_1j_1}$ 的值后，将划去第 i_1 行或者第 j_1 列，即其后的系数列向量不再出现 e_{i_1} 或 e_{m+j_1}， 因而 $P_{i_1j_1}$不可能用解中的其他向量的线性组合表示。类似，给出第二个，……，第 $m+n-1$个，这 $m+n-1$个向量都不可能用解中的其他向量的线性组合表示，因此它们是线性独立的。

4.2.2 最优解的判别

- 最优解的判别
  - 计算空格（非基变量）的检验数$c_{ij}-C_BB^{-1}P_{ij}$，i、$j\in N$。因运输问题的目标函数要求最小化，故当所有$c_{ij}-C_BB^{-1}P_{ij}\geq 0$时为最优解。
  - 求检验数的方法主要包括闭回路法和位势法两种。
- 闭回路法
  - 在初始调运方案表中，从每一空格（即非基变量）出发找一条闭回路：沿着纵向或横向行进，遇到适当数字格（基变量）时90度转弯，继续行进，直到回到起始空格为止。
    - 每个空格一定存在并有唯一的闭回路。
  - m+n-1个数字格（基变量）对应的系数向量是一个基；任一空格（非基变量）对应的系数向量可表示成这个基的线性组合。
    - 闭回路对应于该线性组合

闭回路法

- 称集合 $\{x_{i_1 j_1}, x_{i_1, j_2}, x_{i_2, j_2}, x_{i_2, j_3}, \cdots, x_{i_s, j_s}, x_{i_s, j_1}\}$ $(i_1, i_2, \cdots, i_s; j_1, j_2, \cdots, j_s)$ 互不相同为一个闭回路
  - 集合中的变量称为闭回路的顶点，相邻两个变量的连线为闭回路的边
  - 闭回路的顶点间用水平或垂直线段连接起来，组成一条封闭的回路。
  - 闭回路的顶点数一定是偶数。

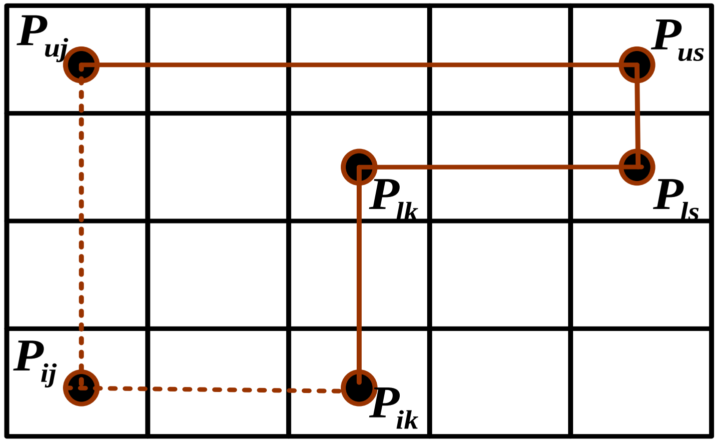


  - 将闭回路定义中的向量组写成列向量的形式并分别乘以正负号线性组合后等于零，即：

$$P_{i_1 j_1} - P_{i_1, j_2} + P_{i_2, j_2} - \cdots - P_{i_s, j_1} = 0$$

闭回路法

- 从每一空格出发一定存在和可以找到唯一的闭回路。因(m+n—1)个数字格(基变量)对应的系数向量是一个基。任一空格(非基变量)对应的系数向量是这个基的线性组合。



$$
\begin{aligned}
P_{ij} &= e_i + e_{m+j} = e_i + e_{m+k} - e_{m+k} + e_l - e_l + e_{m+s} - e_{m+s} + e_u - e_u + e_{m+j} \\
&= (e_i + e_{m+k}) - (e_l + e_{m+k}) + (e_l + e_{m+s}) - (e_u + e_{m+s}) + (e_u + e_{m+j}) \\
&= P_{ik} - P_{lk} + P_{ls} - P_{us} + P_{uj}
\end{aligned}
$$

其中 P_{ij}、P_{ik}、P_{lk}、P_{ls}、P_{us}、$P_{uj} \in B$，而这些向量构成了闭回路。

闭回路法

– 闭回路法的经济解释：

- 以例1中用最小元素法求得的初始解为例：可以从任一空格出发，如（A_1,B_1），若让A_1的产品调运1吨给B_1，为了保持产销平衡，就要依次做调整：在（A_1,B_3）处减少1吨，（A_2,B_3）处增加1吨，（A_2,B_1）处减少1吨，即构成了以（A_1,B_1）空格为起点，其它为数字格的闭回路。

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	(+1)		4(-1)	3	7
A_2	3(-1)		1(+1)		4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

产地 / 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

- 这种调整方案使运费增加：$(+1)\times3+(-1)\times3+(+1)\times2+(-1)\times1=1$元；将1填入($A_1$,$B_1$)格就是检验数。

闭回路法

– 闭回路法的经济解释：

- 同样的方法，可以求出所有空格处（非基变量）的检验数，如：$x_{2,2}$ 处的检验数： (22) →(23) →(13) →(14) →(34) →(32) →(22)

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4(+1)	3(-1)	7
A_2	3	(+1)	1(-1)		4
A_3		6(+-)		3(+1)	9
销量	3	6	5	6	

产地 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

- 这种调整方案使运费增加：

(+1)×9+(-1)×2+(+1)×3+(-1)×10 +(+1)×5 +(-1)×4 = 1元；

将 1 填入 (A_2,B_2) 格就是检验数。

闭回路法

- 按闭回路法可求得所有空格的检验数:

空格	闭回路	检验数
(11)	(11)→(13) →(23) →(21) →(11)	1
(12)	(12) →(14) →(34) →(32) →(12)	2
(22)	(22) →(23) →(13) →(14) →(34) →(32) →(22)	1
(24)	(24) →(23) →(13) →(14) →(24)	-1
(31)	(31) →(34) →(14) →(13) →(23) →(21) →(31)	10
(33)	(33) →(34) →(14) →(13) →(33)	12

- 一般的，当某个非基变量 x_{ij} 增加一个单位时，总费用的改变若小于零，则说明增加 x_{ij} 的值可以降低总费用，当前方案并非最优，需要对运输方案进行调整。

- 位势法
  - 闭回路法的缺点：当产销点很多时，为每个空格找一条闭回路，这种计算很繁杂。
  - 位势法是根据对偶理论推导出来的一种方法。
    - 设产地约束和销地约束对应的对偶变量分别为 u_i 和 v_j

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=1,2,\cdots,n\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=1,2,\cdots,m\\ x_{ij}\geq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\max\omega=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j$$

$$u_i+v_j\leqslant c_{ij},\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

$$u_i,v_j\text{无约束}$$

位势法

- 设 $u_1, u_2, \cdots, u_m;\ v_1, v_2, \cdots, v_n$，是对应产销平衡的运输问题的 ***m+n*** 个约束条件的对偶变量。
- **B** 是含有一个人工变量 x_a 的 $(m+n)\times(m+n)$ 初始基矩阵；
- 当用最小元素法等给出初始基可行解时，有 ***m+n*—*1***个数字格，即赋值基变量；
- 从线性规划的对偶理论可知：$C_B B^{-1} = (u_1, u_2, \cdots, u_m;\ v_1, v_2, \cdots, v_n)$
- 每个决策变量 x_{ij} 的系数列向量为：$P_{ij} = e_i + e_{m+j}$,
- 所以 $C_B B^{-1} P_{ij} = u_i + v_j$
- 于是检验数：$\sigma_{ij} = c_{ij} - C_B B^{-1} P_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$

位势法

– 由单纯形法，基变量对应的检验数为0，可得：

$$c_{ij}-(u_i+v_j)=0, \quad i、j\in B$$

如何求解这个方程组？

– 上述方程组有***m+n***个变量，只有***m+n*—1**个约束方程，故存在自由变量。

– 为简单起见，首先设$u_1=0$，可以求解，得到一组 u_i、v_j 的值。

– 求出非基变量检验数：

$$\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j), \quad i、j\in N$$

– 称 u_i、v_j 为运输问题的对偶解，又称为位势。

– 根据自变量 u_1 取值的不同，可以得到无穷多组解，但不同解对应的检验数都是相同的，是唯一的。

位势法

– 仍以例1最小元素法求得的初始解为例：

– 初始解中 $x_{23}, x_{34}, x_{21}, x_{32}, x_{13}, x_{14}$ 是基变量，x_a 为人工变量；

产地 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4	3	2
A_2	3		1		1
A_3		6		3	0
销量	0	0	0	3	

– 对应的检验数为：

基变量	检验数	方程
x_{23}	$c_{23}-(u_2+v_3)=0$	$2-(u_2+v_3)=0$
x_{34}	$c_{34}-(u_3+v_4)=0$	$5-(u_3+v_4)=0$
x_{21}	$c_{21}-(u_2+v_1)=0$	$1-(u_2+v_1)=0$
x_{32}	$c_{32}-(u_3+v_2)=0$	$4-(u_3+v_2)=0$
x_{13}	$c_{13}-(u_1+v_3)=0$	$3-(u_1+v_3)=0$
x_{14}	$c_{14}-(u_1+v_4)=0$	$10-(u_1+v_4)=0$

位势法

– 以上 6 个方程，7 个未知数，令 $u_1 = 0$ 可求得：

$$u_1 = 0,\ u_2 = -1,\ u_3 = -5,\ v_1 = 2,\ v_2 = 9,\ v_3 = 3,\ v_4 = 10$$

– 代入公式，求出非基变量检验数：

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j),\ \ i、j \in N$$

– 第一步：在最小元素法求得的初始解表格基础上，在初始解对应的位置填入单位运价：

产地 \ 销地	B1		B2		B3		B4	
A1	3		11		3	3	10	10
A2	1	1	9		2	2	8	
A3	7		4	4	10		5	5

位势法

– 第二步：在表上增加一行一列，填入上面得到的 u_i 和 v_j 的值；

产地 \ 销地	B1		B2		B3		B4		u_i
A1	3		11		3	3	10	10	0
A2	1	1	9		2	2	8		−1
A3	7		4	4	10		5	5	−5
v_j	2		9		3		10		

$$u_1=0,\ u_2=-1,\ u_3=-5,\ v_1=2,\ v_2=9,\ v_3=3,\ v_4=10$$

– 第三步：计算空格的检验数填入（蓝色数字）：

产地 \ 销地	B1		B2		B3		B4		u_i
A1	3	1	11	2	3	0	10	0	0
A2	1	0	9	1	2	0	8	-1	−1
A3	7	10	4	0	10	12	5	0	−5
v_j	2		9		3		10		

– 上表中还有小于0的检验数，说明所得到的非最优解，还可以改进。

4.2.3 改进的方法—闭回路调整法

– 若有两个或两个以上负检验数时，一般选其中最小的负检验数，以它对应的空格为调入格，即以它对应的非基变量为换入变量。

- 以上例为例：可知（2,4）格为调入格，以此格为起点做闭回路：

产地＼销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1			4(+1)/3	3(-1)/10	7
A2	3/1		1(-1)/2	(+1)	4
A3		6/4		3/5	9
销量	3	6	5	6	

- (2,4)空格的调入量θ：选择闭回路上具有（-1）的数字格中的最小者，即 $\theta = \min(1,3) = 1$。对应的基变量为换出变量。
- 然后按照闭回路上的正负号，加入和减去此值，得到调整方案，并根据调整后的方案重新计算检验数。

闭回路调整法

- 得到以下调整方案，并计算非基变量检验数（蓝色数字）：

产地 销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	0	2	5/3	2/10	7
A2	3/1	2	1	1/8	4
A3	9	6/4	12	3/5	9
销量	3	6	5	6	

- 此时没有负检验数，说明达到最优解，此时总运费为：

$$1\times3+4\times6+3\times5+10\times2+8\times1+5\times3=85\text{ 元}$$

- 特别提醒：$X_{1,1}$ 对应的检验数为 0.

4.2.4 表上作业法计算中的问题

- 1. 无穷多最优解
- 2. 退化

无穷多最优解

- 无穷多最优解
  - 是否有无穷多最优解的判别依据与第 2 章讲述的相同，即某个非基变量（空格）的检验数为 0 时，该问题有无穷多最优解。
  - 以上例为例，（1,1）空格处的检验数为0，表明例1有无穷多最优解。
    - 以(1,1)为调入格，作闭回路：$(1,1)_{+} \rightarrow (1,4)_{-} \rightarrow (2,4)_{+} \rightarrow (2,1)_{-} \rightarrow (1,1)_{+}$，确定θ=min(2,3)=2，经调整以后得到另一最优解：

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	(+2)		5/3	2(-2)/10
A_2	3(-2)/1			1(+2)/8
A_3		6/4		3/5

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2/3		5/3	
A_2	1/1			3/8
A_3		6/4		3/5

此时调运花费：$2\times3+1\times1+6\times4+5\times3+3\times8+3\times5 = 85$元

- 退化
  - 用表上作业法求解运输问题出现退化时，在相应的格中一定要填入一个 0，以表示此格为数字格。
  - 情形1：当确定初始解的各供需关系时，若 A_i 处的余量等于 B_j 处的需量，在产销平衡表的 (i,j) 格填入一个数后，需要在单位运价表上同时划去 A_i 行和 B_j 列。
    - 为了使产销平衡表上有 m+n-1个数字格（基变量），这时需要添加一个 0。
    - 0的位置可在对应同时划去的那行或那列的任一空格处。
  - 例：用最小元素法确定初始解

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	4	5	7
A_2	7	7	3	8	4
A_3	1	2	10	6	9
销量	3	6	5	6	

退化

产地\销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	4	5	7
A_2	7	7	3	8	4
A_3	1×	2×	10	6	9
销量	3	6	5	6	

产地\销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2					4
A_3	3	6		[0]	0
销量	0	0	5	6	

– 如上图，第一步选择最小运价1，A_3供应给B_1 3单位货物，剩余6单位，划去 B_1 列运价；第二步选择最小运价2，A_3可供应给B_2 6单位货物，B_2恰好需要 6 单位，需同时划去A_3行和B_2列，需要选择该行该列中任意一个空格位置补填0

– 为了减少调整次数，可将 0 添加到上述 4 个空格对应最小运价的位置 (3,4) 处.

退化

- 情形2：在用闭回路法调整时，在闭回路上出现两个或两个以上的具有（－1）标记的相等的最小值，这时经调整后得到退化解。
  - 处理方法：在标记最小值处，除有一个变为空格（非基变量）外，其他数字格必须填入0，表明它是基变量。
  - 当出现退化解后，作改进调整时，可能在某闭回路上有标记为（－1）的取值为0的数字格，这时应取调整量 θ = 0。