数理逻辑　第九周作业　4 月 16 日 周二

PB18151866 龚小航

习题 2.6、试证明：

(1) $P(x,c)$, $\exists xP(x,c)$, $\forall xP(x,c)$ 都不是逻辑有效的；

(2) $P(x,c) \to P(x,c)$, $\exists x\big(P(x,c) \to P(x,c)\big)$, $\forall x\big(P(x,c) \to P(x,c)\big)$都是逻辑有效的；

解：(1) 只需要给出一个一阶结构 M，使得 $M \vDash p$ 不成立即可。

在一阶语言 $K_0(Y)$ 和它的一个一阶结构 $M = (\mathrm{D},\mathrm{F},\mathrm{P}) = (\mathbb{N}, \emptyset, \{<\})$ 中，考虑$K_0(Y)$中的公式 $P(x,c)$, $\exists xP(x,c)$, $\forall xP(x,c)$的解释：

令$c^M = 0$（c在M中解释为 0），$P^M = <$（P在M中解释为二元关系$<$）：

① 公式 $P(x,c)$ 在 M 中解释为 $x < 0$，即：自然数x小于 0

依一阶解释的定义，$P(x,c)$为真当且仅当对自然数d，使 $I_{x/d}\big(P(x,c)\big) = t$

显然当d取任意自然数时 $I_{x/d}\big(P(x,c)\big) = f$. 因此在M中$P(x,c)$是假的，因此M不是$P(x,c)$的模型

② 公式 $\exists xP(x,c)$ 在 M 中解释为 $\exists x < 0$，即：存在一个自然数x，x小于 0

依一阶解释的定义，$\exists xP(x,c)$为真当且仅当有一个自然数d，变体解释$I_{x/d}\big(P(x,c)\big) = t$

显然当d取任意自然数时 $I_{x/d}\big(P(x,c)\big) = f$. 因此在M中 $\exists xP(x,c)$ 是假的，因此M不是$\exists xP(x,c)$的模型

③ 公式 $\forall xP(x,c)$ 在 M 中解释为 $\forall x < 0$，即：对任意一个自然数x，x小于 0

依一阶解释的定义，$\forall xP(x,c)$为真当且仅当对任意一个自然数d，变体解释$I_{x/d}\big(P(x,c)\big) = t$

显然当$d = 1$时$I_{x/d}\big(P(x,c)\big) = f$. 因此在M中 $\forall xP(x,c)$是假的，因此M不是$\forall xP(x,c)$的模型

综上，这三个公式对一阶结构M，都不是M有效的，因此$M \vDash p$ 不成立。由逻辑有效的定义，这三个公式都不是逻辑有效的。

(2) 令公式 $p_1 = P(x,c)$　$p_2 = P(x,c) \to P(x,c)$

任意取一个一阶结构 $M = (\mathrm{D},\mathrm{F},\mathrm{P})$，再任取一个一阶解释 $I = (M,V,v)$，由一阶解释的良定义性，公式p_1, p_2都有唯一确定的真值。只需要证明 $M \vDash p$

① 公式 $P(x,c) \to P(x,c)$：只需要对 $I\big(P(x,c)\big) = I(p_1)$ 赋值进行讨论即可：

i）当 $I\big(P(x,c)\big) = I(p_1) = t$ 时，$I\big(P(x,c) \to P(x,c)\big) = I\big(P(x,c)\big) \to I\big(P(x,c)\big) = t \to t = t$

ii）当 $I\big(P(x,c)\big) = I(p_1) = f$ 时，$I\big(P(x,c) \to P(x,c)\big) = I\big(P(x,c)\big) \to I\big(P(x,c)\big) = f \to f = t$

因此对任意的V，这个公式是M有效的。又由于M是任意的，因此这个公式是逻辑有效的。

② 公式 $\exists x\big(P(x,c) \to P(x,c)\big)$：取和①中同一个$M$，在上一步的基础上：

可以证明 $I(p_2) = t \implies I(\exists xp_2) = t$：

证：$I(p_2) = t \implies$ 对任意 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$ 及 v 的任意 x 变通v', 都有 $|p_2|(v') = t$

$\implies$ 存在一个 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$ 使 $|\exists xp_2|(v) = t$

$\implies I(\exists xp_2) = t$

因此对任意的V，这个公式是M有效的。又由于M是任意的，因此这个公式是逻辑有效的。

③ 公式 $\forall x\big(P(x,c) \to P(x,c)\big)$：取和①中同一个$M$，在上一步的基础上：

可以证明 $I(p_2) = t \implies I(\forall xp_2) = t$：

证：$I(p_2) = t \implies$ 对任意 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$ 及 v 的任意 x 变通v', 都有 $|p_2|(v') = t$

$\implies$ 对任意 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$ 都有 $|\forall xp_2|(v) = t$

$\implies I(\forall xp_2) = t$

因此对任意的V，这个公式是M有效的。又由于M是任意的，因此这个公式是逻辑有效的。

习题 2.7、试证明语义性质：对任何一阶结构M，任何$p \in K(Y)$：

(1) $M \vDash p \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash \forall xp \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash \forall p$ （UG 有效性）

(2) 若 $M \vDash p$ 且 $M \vDash p \to q$，则 $M \vDash q$ （MP 有效性）

(3) 若 $\Gamma \subseteq \Gamma'$ 且 $\Gamma \vDash p$，则有 $\Gamma' \vDash p$ （语义后承单调性）

解：(1) $M \vDash p \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash \forall xp$：

先证明 $|p|_M = t \quad \Leftrightarrow \quad |\forall xp|_M = t$ ：

($\Rightarrow$) $|p|_M = t \quad \Rightarrow$ 对任意 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$ 及 v 的任一变通v'，有 $|\mathrm{p}|(\mathrm{v}) = \mathrm{t}$

$\Rightarrow$ 对任意 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$, $|\forall x\mathrm{p}|(\mathrm{v}) = \mathrm{t}$

$\Rightarrow$ $|\forall xp|_M = t$

($\Leftarrow$) $|\forall xp|_M = t \quad \Rightarrow$ 对任意 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$，有 $|\forall x\mathrm{p}|(\mathrm{v}) = \mathrm{t}$

$\Rightarrow$ 对任意 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$, $|\mathrm{p}|(\mathrm{v}) = \mathrm{t}$

$\Rightarrow$ $|p|_M = t$

证： $M \vDash p \quad \Leftrightarrow$ 对于M的任意一个模型M_1, $|p|_{M_1} = t$

$\Leftrightarrow$ 对于M的任意一个模型M_1, $|\forall xp|_{M_1} = t$

$\Leftrightarrow$ $M \vDash \forall xp$

$M \vDash p \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash \forall p$：

证： $M \vDash p \quad \Leftrightarrow$ 对于M的任意一个模型M_1, $|p|_{M_1} = t$

$\Leftrightarrow$ 对于M的任意模型M_1, $|\forall p|_{M_1} = t$

$\Leftrightarrow$ $M \vDash \forall p$

由以上几条，可以得出三个条件之间互相等价。

(2) 当$M \vDash p$ 且 $M \vDash p \to q$ 时，有：

$$|p|_M = t \quad and \quad |p \to q|_M = t$$

任取$v \in V$, 有 $|p|(v) = |p \to q|(v) = t \quad \Rightarrow \quad |q|(v) = t$

由M有效的定义，可知 $M \vDash q$

(3) 设V'是Γ'的任意一个赋值, 由于$\Gamma \subseteq \Gamma'$，$\Gamma' = \Gamma \cup \Gamma_1 \quad V' = V \cup V_1$

又因为 $\Gamma \vDash p$, 所以对任意的$v \in V$, $|p|(v) = t$

因此对任意的V', $|p|(v \cup v') = t \quad \Rightarrow \quad \Gamma' \vDash p$