数理逻辑　第八周作业　4 月 9 日 周四

PB18151866 龚小航

1. 设 K 中 $C=\{c_1\}$, $F=\emptyset$, $R=\{R_1^1,R_2^1,R_1^2\}$.　　【练习 17　P84】

已知$E_1,E_2\in Q$, Q为有理数集，令$\overline{c_1}=0$, Q上一元关系$\overline{R_1^1}$为E_1，$\overline{R_2^1}$为E_2，二元关系$\overline{R_1^2}$为"$>$".这样，Q就成了K的解释域.现已知关于Q中元素的两个命题：

命题甲：若数集E_1中某数比零大，则数集E_2中所有数都比零大。

命题乙：并非E_1中的数都小于或等于E_2中的每个数。

试把命题甲，乙分别按以下要求用K中公式表示出来：

(1) 出现全称量词;

(2) 不出现全称量词;

(3) 写成前束范式。

解：(1) 将自然语言和K中公式一一对应：

命题甲：

如果数集E_1中有某数：$\exists x_1 R_1^1(x_1)$　　且这个数比零大：$p\wedge R_1^2(x_1,c_1)$

那么数集E_2中的所有数：$\forall x_2 R_2^1(x_2)$　　若有这些数，则他们都比零大：$q\to R_1^2(x_2,c_1)$

综合起来，即：$\exists x_1\big(R_1^1(x_1)\wedge R_1^2(x_1,c_1)\big)\to\forall x_2\big(R_2^1(x_2)\to R_1^2(x_2,c_1)\big)$

命题乙：

并非：$\neg$　　取任意一个E_1中的数：$\forall x_1 R_1^1(x_1)$　　都有：$\to$

取任意一个E_2中的数：$\forall x_2 R_2^1(x_2)$　　都有：$\to$　　小于等于：$\neg R_1^2(x_1,x_2)$

综合起来，即：$\neg\forall x_1\Big(R_1^1(x_1)\to\forall x_2\big(R_2^1(x_2)\to\neg R_1^2(x_1,x_2)\big)\Big)$

(2) 将上述两个表达式中的全称量词等价的变换为$\exists$即可：

命题甲：$\exists x_1\big(R_1^1(x_1)\wedge R_1^2(x_1,c_1)\big)\to\neg\exists x_2\neg\big(R_2^1(x_2)\to R_1^2(x_2,c_1)\big)$

命题乙：$\exists x_1\neg\Big(R_1^1(x_1)\to\neg\exists x_2\neg\big(R_2^1(x_2)\to\neg R_1^2(x_1,x_2)\big)\Big)$

(3) 化为前束范式：

命题甲：$\exists x_1\forall x_2\big(R_1^1(x_1)\wedge R_1^2(x_1,c_1)\big)\to\big(R_2^1(x_2)\to R_1^2(x_2,c_1)\big)$

命题乙：$\exists x_1\forall x_2\neg\Big(R_1^1(x_1)\to\big(R_2^1(x_2)\to\neg R_1^2(x_1,x_2)\big)\Big)$