数学物理方程 B　第八周作业　4 月 10 日 周五

PB18151866 龚小航

2.5 解下列定解问题:

(3) $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}-2hu_t,\ 0<x<l,\ t>0,\ 0<h(\text{常数})<\dfrac{\pi a}{l} \\ u(t,0)=u(t,l)=0 \\ u(0,x)=\varphi(x),\ \ u_t(0,x)=\psi(x) \end{cases}$

---

(4) $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0 \\ u_x(t,0)=0, \qquad u_x(t,l)+hu(t,l)=0,\ h(\text{常数})>0 \\ u(0,x)=\varphi(x), \qquad u_t(0,x)=\psi(x) \end{cases}$

---

(5) $\begin{cases} \Delta_2 u=0\ (r<a) \\ u_r(a,\theta)-hu(a,\theta)=f(\theta) \end{cases}$ $h>0$; 特别的，计算$f(\theta)=\cos^2\theta$ 时u的值

---

(6) 环域内的狄氏问题: $\begin{cases} \Delta_2 u=0\ \ (r<a<b) \\ u(a,\theta)=1;\ u(b,\theta)=0 \end{cases}$

---

(7) 扇形域内的狄氏问题: $\begin{cases} \Delta_2 u=0\ \ (r<a,\ \ 0<\theta<\alpha) \\ u(r,0)=u(r,\alpha)=0 \\ u(a,\theta)=f(\theta) \end{cases}$

解: (3) 观察方程的结构，泛定方程和边界条件都是齐次的，因而可以用分离变量法求解:

令$u=X(x)T(t)$，将其带入泛定方程:

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)-2hX(x)T'(t)\ \Longrightarrow\ \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)+2hT'(t)}{a^2T(t)}=-\lambda$$

这样就先得到关于$X(x)$的固有值问题:

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$$

显然这个固有值问题是施图姆-刘维尔型问题，具有第一类边界条件。其固有值λ具有非负性，且不满足$\lambda=0$的条件。因此可知其固有值$\lambda>0$.可令$\lambda=k^2\ (k>0)$

此时这类常微分方程解的形式为: $X(x)=A\cos kx+B\sin kx$，带入边界条件$X(0)=X(l)=0$:

$$\begin{cases} A=0 \\ A\cos kl+B\sin kl=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=0 \\ \sin kl=0 \end{cases} (B\text{不可以再为}\ 0) \Longrightarrow k_n=\frac{n\pi}{l}\ \ (n\in\mathbb{N}^+)$$

因此固有值 $\lambda_n=k_n^2=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\ (n\in\mathbb{N})$，对应的固有函数 $X_n=B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\ (B_n\in\mathbb{R})$

然后再来求解关于T的微分方程。将固有值λ带入确定T的常微分方程:

$$T''(t)+2hT'(t)+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2a^2T(t)=0$$

这种形式的常微分方程通过特征方程可以确定其解的形式:

$$r^2+2hr+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2a^2=0$$

利用判别式可得解的情况

$$\Delta=(2h)^2-4*1*\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2a^2=4\left(h+\frac{n\pi a}{l}\right)\left(h-\frac{n\pi a}{l}\right)<0\quad \left(n\in\mathbb{N}^+,\ 0<h<\frac{\pi a}{l}\right)$$

判别式小于零，特征方程有两个不相等的复根:

$$r_1=-h+i\sqrt{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2-h^2}\ ,\quad r_2=-h-i\sqrt{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2-h^2}\quad ;\quad r=\alpha\pm i\beta$$

所以解具有形式 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$，在本题中，即为:

$$T_n(t)=e^{-ht}\left(C_n\cos\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2-h^2}\ t\right)+D_n\sin\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2-h^2}\ t\right)\right)$$

由此，再将X_n和T_n相乘得到u_n:　(令$\omega=\sqrt{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2-h^2}$). 其中系数$B_n$已经和系数$C_n$，$D_n$合并。

$$u_n(t,x)=X_n(x)T_n(t)=e^{-ht}(C_n\cos\omega t+D_n\sin\omega t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

由叠加原理，将特解列叠加，得到的也是原方程的解:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-ht}(C_n\cos\omega t+D_n\sin\omega t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

最后再根据初始条件确定系数C_n，D_n:

$$\begin{cases} u(0,x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}\equiv\varphi(x) \\ u_t(0,x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-hC_n+D_n\omega)\sin\frac{n\pi x}{l}\equiv\psi(x) \end{cases}$$

由$\varphi(x),\psi(x)$的傅里叶展开，可以得到:

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\ ;\qquad -hC_n+D_n\omega=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

可以解得:

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\ ;\ \ D_n=\frac{hC_n}{\omega}+\frac{2}{\omega l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

因此原问题的解为:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-ht}(C_n\cos\omega t+D_n\sin\omega t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中:

$$\omega=\sqrt{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2-h^2}\ ;\ \ C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\ ;\ \ D_n=\frac{hC_n}{\omega}+\frac{2}{\omega l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

(4) 观察方程的结构，泛定方程和边界条件都是齐次的，因而可以用分离变量法求解：

令$u = X(x)T(t)$，将其带入泛定方程：

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2T(t)} = -\lambda$$

这样就先得到了关于$X(x)$的固有值问题：

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0;\ X'(l) + hX(l) = 0 \end{cases}$$

显然这个固有值问题是施图姆-刘维尔型问题，具有第二类和第三类边界条件。其固有值λ具有非负性，且不满足$\lambda = 0$的条件。因此可知其固有值$\lambda > 0$.可令$\lambda = k^2\ (k > 0)$

此时这类常微分方程解的形式为：$X(x) = A\cos kx + B\sin kx$，

带入边界条件$X'(0) = 0;\ X'(l) + hX(l) = 0$：

$$\begin{cases} kB = 0 \\ -kA\sin kl + kB\cos kl + h(A\cos kl + B\sin kl) = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} B = 0 \\ k\tan kl = h \end{cases} \ (A\text{不可以再为 }0)$$

这个方程写不出显式解，记它的第n个正实根为k_n

因此固有值 $\lambda_n = k_n^2\ (n \in \mathbb{N})$，对应的固有函数 $X_n = A_n\cos k_n x\ (A_n \in \mathbb{R})$

然后再来求解关于T的微分方程。将固有值λ带入确定T的常微分方程：

$$T''(t) + \lambda a^2T(t) = 0$$

显然这样的二阶线性常系数齐次微分方程的解具有形式：$T(t) = A\cos kt + B\sin kt$

$$\Longrightarrow \quad T_n(t) = C_n\cos k_n at + D_n\sin k_n at$$

由此，再将X_n和T_n相乘得到u_n： 其中系数A_n已经和系数C_n，D_n合并。

$$u_n(t,x) = X_n(x)T_n(t) = (C_n\cos k_n at + D_n\sin k_n at)\cos k_n x$$

由叠加原理，将特解列叠加，得到的也是原方程的解：

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos k_n at + D_n\sin k_n at)\cos k_n x$$

最后再根据初始条件确定系数C_n，D_n：

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos k_n x \equiv \varphi(x), \qquad \Longrightarrow \qquad C_n = \frac{\int_0^l \varphi(x)\cos k_n x\,dx}{\int_0^l \cos^2 k_n x\,dx}$$

$$u_t(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n aD_n\cos k_n x \equiv \psi(x) \quad \Longrightarrow \quad k_n aD_n = \frac{\int_0^l \psi(x)\cos k_n x\,dx}{\int_0^l \cos^2 k_n x\,dx}$$

其中分母可积：

$$\int_0^l \cos^2 k_n x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^l (1 + \cos 2k_n x)\,dx = \frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{2k_n}\left(\sin 2k_n x\Big|_{x=0}^{l}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(l + \frac{\sin 2k_n l}{2k_n}\right)$$

至此，所有未知系数都已经显式或是隐式的表达。所以原方程的解为：

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos k_n at + D_n\sin k_n at)\cos k_n x$$

其中，k_n 满足约束方程 $k_n\tan k_n l = h$且为其正实根；

$$C_n = \frac{2\int_0^l \varphi(x)\cos k_n x\,dx}{l + \frac{\sin 2k_n l}{2k_n}} \quad ; \quad D_n = \frac{2\int_0^l \psi(x)\cos k_n x\,dx}{k_n a\left(l + \frac{\sin 2k_n l}{2k_n}\right)}$$

(5) 先将二维拉普拉斯方程展开，泛定方程变形为：($u=u(r,\theta)$)

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

利用分离变量法一般的求出它的满足周期性边界条件

$$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi)$$

的级数解。设 $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，将其带入泛定方程，得：

$$R''(r)\Theta(\theta)+\frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta)+\frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta)=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=-\frac{r^2R''(r)}{R(r)}-\frac{rR'(r)}{R(r)}=-\lambda$$

这样就先得到了关于$\Theta(\theta)$的固有值问题：

$$\begin{cases}\Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0\\ \Theta(\theta)=\Theta(\theta+2\pi)\end{cases}$$

对λ的取值进行讨论：

① $\lambda<0$：不妨令 $\lambda=-k^2\ (k>0)$，这时方程成为：$\Theta''-k^2\Theta=0$，该方程的通解为：

$$\Theta(\theta)=Ae^{k\theta}+Be^{-k\theta}$$

再带入边界条件确定参数A,B,k：

$$\begin{cases}\Theta(\theta)=Ae^{k\theta}+Be^{-k\theta}\\ \Theta(\theta+2\pi)=Ae^{2k\pi}e^{k\theta}+Be^{-2k\pi}e^{-k\theta}\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}A=0\\ B=0\end{cases}$$

所以此时方程仅有零解$y(x)\equiv 0$，这种情况需要舍去。

② $\lambda=0$：这时方程成为：$\Theta''(\theta)=0$，其通解为 $\Theta(\theta)=A\theta+B$，再带入边界条件确定参数A,B

$$\begin{cases}\Theta(\theta)=A\theta+B\\ \Theta(\theta+2\pi)=A\theta+B+2\pi A\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}A=0\\ B\in\mathbb{R}\end{cases}$$

所以此时方程有常数解 $\Theta(\theta)\equiv C_0$.

③ $\lambda>0$：不妨令 $\lambda=k^2\ \ (k>0)$，这时方程成为：$\Theta''+k^2\Theta=0$，该方程的通解为：

$$\Theta(\theta)=A\cos k\theta+B\sin k\theta$$

再带入边界条件确定参数A,B,k：

$$\begin{cases}\Theta(\theta)=A\cos k\theta+B\sin k\theta\\ \Theta(\theta+2\pi)=A\cos(k\theta+2k\pi)+B\sin(k\theta+2k\pi)\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}A=0\\ B=0\end{cases}\text{或 } k\in\mathbb{N}^+$$

$A,B=0$ 的解不是要求的解。关注 $k\in\mathbb{N}^+$，即k为正整数：

综上三种穷尽λ所有取值可能的情况，可以得到：

固有值：$\lambda_k=k^2\ (k\in\mathbb{N})$；固有函数：$\begin{cases}\Theta_0(\theta)=C_0\ \ (k=0)\\ \Theta_k(\theta)=C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta\end{cases}$

与此同时，确定$R(r)$的方程为：

$$r^2R''+rR'-k^2R=0$$

这是一个欧拉方程，做变换 $t=\ln r$ 后可求得它的解为：

$$R_0(r)=A_0+B_0t=A_0+B_0\ln r\qquad (k=0)$$

$$R_k(r)=A_ke^{kt}+B_ke^{-kt}=A_kr^k+B_kr^{-k}\ \ (k\in\mathbb{N}^+)$$

由于周期性边界条件也是线性齐次的，因此所求的级数解为：

$$u(r,\theta)=R_0(r)\Theta_0(\theta)+\sum_{k=1}^{\infty}R_k(r)\Theta_k(\theta)=A_0+B_0\ln r+\sum_{k=1}^{\infty}(A_kr^k+B_kr^{-k})(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta)$$

再从这个级数解表达式出发。在本题中，$0<r<a$，当$r\to 0$时，$\ln r$和$r^{-k}(k\in\mathbb{N}^+)$均趋于无穷。因此为保证有界性，必须有$B_0=B_k=0$. 因此级数解得到简化：（系数A_n已经和系数C_n，D_n合并）

$$u(r,\theta)=\frac{C_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}r^k(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta)\quad (A_0\text{改写})$$

最后再根据边界条件确定系数C_0，C_k，D_k：

$$u_r(a,\theta)-hu(a,\theta)=f(\theta)$$

其中，$u_r(a,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}ka^{k-1}(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta)$，带入，可得：

$$\sum_{k=1}^{\infty}ka^{k-1}(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta)-h\frac{C_0}{2}-h\sum_{k=1}^{\infty}a^k(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta)=f(\theta)\,;$$

$$\Rightarrow\ \frac{-hC_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big((k-ha)a^{k-1}\,C_k\cos k\theta+(k-ha)a^{k-1}D_k\sin k\theta\Big)=f(\theta)$$

根据傅里叶展开的系数，可知：($k\in\mathbb{N}^+$)

$$-hC_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\,d\theta\quad\Rightarrow\quad C_0=\frac{1}{-h\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\,d\theta$$

$$(k-ha)a^{k-1}\,C_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos k\theta\ d\theta\quad\Rightarrow\quad C_k=\frac{1}{(k-ha)a^{k-1}\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos k\theta\ d\theta$$

$$(k-ha)a^{k-1}\,D_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin k\theta\ d\theta\quad\Rightarrow\quad D_k=\frac{1}{(k-ha)a^{k-1}\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin k\theta\ d\theta$$

综上，原方程的解为：

$$u(r,\theta)=\frac{C_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}r^k(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta)\quad (k\in\mathbb{N}^+)$$

其中各系数都已在上方给出。

特别的，当$f(\theta)=\cos^2\theta$时，带入C_0，C_k，D_k中以求出其在该特定情况下的值：

$$C_0=\frac{1}{-h\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\ d\theta=\frac{1}{-4h\pi}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)\,d(2\theta)=\frac{1}{-4h\pi}\int_0^{2\pi}d(2\theta)=-\frac{1}{h}$$

$$C_k=\frac{1}{(k-ha)a^{k-1}\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\cos k\theta\ d\theta=\begin{cases}\dfrac{1}{4a-2ha^2}\ , & k=2\\ 0\ , & k\neq 2\end{cases}$$

$$D_k=\frac{1}{(k-ha)a^{k-1}\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin k\theta\ d\theta=0$$

将这些特定系数带入解的表达式，可得：

$$u(r,\theta)=\frac{C_0}{2}+r^2\frac{1}{4a-2ha^2}\cos 2\theta=\frac{r^2\cos 2\theta}{4a-2ha^2}-\frac{1}{2h}$$

(6) 先将二维拉普拉斯方程展开，泛定方程变形为：（$u=u(r,\theta)$）

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

在上一问已经完整的计算过其级数形式的解表达式：($k\in\mathbb{N}^+$)

$$u(r,\theta)=A_0+B_0\ln r+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k r^k+B_k r^{-k})(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta)$$

在本题中$a<r<b$，直接带入两个边界条件来确定系数：

$$\begin{cases}u(a,\theta)=A_0+B_0\ln a+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k a^k+B_k a^{-k})(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta)\equiv 1\\ u(b,\theta)=A_0+B_0\ln b+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k b^k+B_k b^{-k})(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta)\equiv 0\end{cases}$$

根据傅里叶展开的系数，可知：($k\in\mathbb{N}^+$)

$$\begin{cases}(A_k a^k+B_k a^{-k})C_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}1*\cos k\theta\ \ d\theta=0\\ (A_k a^k+B_k a^{-k})D_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}1*\sin k\theta\ \ d\theta=0\\ (A_k b^k+B_k b^{-k})C_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}0*\cos k\theta\ \ d\theta=0\\ (A_k b^k+B_k b^{-k})D_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}0*\sin k\theta\ \ d\theta=0\end{cases}$$

为使上述四条均成立，必有$C_k=D_k=0$

因此再利用边界条件，可得：

$$\begin{cases}u(a,\theta)=A_0+B_0\ln a\equiv 1\\ u(b,\theta)=A_0+B_0\ln b\equiv 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_0=\dfrac{-\ln b}{\ln a-\ln b}\\ B_0=\dfrac{1}{\ln a-\ln b}\end{cases}$$

最后带入解的表达式，可以得到原问题的解为：

$$u(r,\theta)=A_0+B_0\ln r=\frac{\ln b}{\ln b-\ln a}-\frac{\ln r}{\ln b-\ln a}=\frac{\ln b-\ln r}{\ln b-\ln a}$$

(7) 先将二维拉普拉斯方程展开，泛定方程变形为：（$u=u(r,\theta)$）

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

由于θ的范围有限制，所以约束条件$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi)$不再成立，需要重新解方程。

分离变量，设$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，将其带入泛定方程，得：

$$R''(r)\Theta(\theta)+\frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta)+\frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta)=0$$

$$\Longrightarrow\ \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=-\frac{r^2R''(r)}{R(r)}-\frac{rR'(r)}{R(r)}=-\lambda$$

这样就先得到了关于$\Theta(\theta)$的固有值问题：

$$\begin{cases}\Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0\\ \Theta(0)=\Theta(\alpha)=0\end{cases}$$

显然这个固有值问题是施图姆-刘维尔型问题，具有第一类边界条件。其固有值λ具有非负性，且不满足$\lambda=0$的条件。因此可知其固有值$\lambda>0$.可令$\lambda=k^2\ (k>0)$

此时这类常微分方程解的形式为：$\Theta(\theta)=A\cos k\theta+B\sin k\theta$，带入边界条件$\Theta(0)=\Theta(\alpha)=0$：

$$\begin{cases}A=0\\ A\cos k\alpha+B\sin k\alpha=0\end{cases}\ \Longrightarrow\ \begin{cases}A=0\\ \sin k\alpha=0\end{cases}\ \left(B\text{不可以再为 }0\right)\ \Longrightarrow\ k_n=\frac{n\pi}{\alpha}\ \ (n\in\mathbb{N}^+)$$

因此固有值 $\lambda_n=k_n^2=\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 (n\in\mathbb{N})$，对应的固有函数 $\Theta_n(\theta)=C_n\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}\ (C_n\in\mathbb{R})$

然后再来求解关于R的微分方程。将固有值λ带入确定R的常微分方程：

$$r^2R''(r)+rR'(r)-k_n^2R(t)=0$$

这是一个欧拉方程，做变换 $t=\ln r$ 后可求得它的解为：

$$R_n(r)=A_ne^{kt}+B_ne^{-kt}=A_nr^k+B_nr^{-k}$$

由此，再将$\Theta_n(\theta)$和$R_n(r)$相乘得到u_n： 其中系数C_n已经和系数A_n，B_n合并。

$$u_n(r,\theta)=R_n(r)\Theta_n(\theta)=(A_nr^k+B_nr^{-k})\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}$$

由叠加原理，将特解列叠加，得到的也是原方程的解：

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_nr^k+B_nr^{-k})\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}$$

最后再确定系数A_n,B_n：

由于此问题在扇形区域内求解，$0\le r<a$，当$r\to 0$时，$B_nr^{-k}\to\infty$.为符合级数解的收敛性质，必须有$B_n=0$恒成立。因此只需按边界条件确定系数A_n：

$$u(a,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}A_na^k\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}=f(\theta)$$

根据傅里叶展开的系数，有：

$$A_na^k=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}f(\theta)\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}\,d\theta\ \ \Longrightarrow\ \ A_n=\frac{2}{a^k\alpha}\int_0^{\alpha}f(\theta)\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}\,d\theta$$

带入原问题的解，即：

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nr^k\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a^k\alpha}\int_0^{\alpha}f(\theta)\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}\,d\theta\, r^k\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}f(\theta)\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}\,d\theta\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}$$

2.7 解下列定解问题：

（1） $\begin{cases} u_t = a^2 \Delta_3 u \\ u|_{r=R} = 0 \\ u|_{t=0} = f(r) \end{cases}$ $\quad u(t,0)$有限

（2） $\begin{cases} \quad u_{tt} = a^2 u_{xxxx} \\ u(0,x) = x(l-x),\ u_t(0,x) = 0 \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,l) = 0 \end{cases}$ $\quad t>0,\ 0<x<l$

解：(1) 由定解条件和题目描述中可知，$u = u(t,r)$.将三维拉普拉斯方程展开：

$$\Delta_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

由于u和θ,φ都无关，因此后两项均为零，因此三维拉普拉斯方程化为：

$$\Delta_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}(2ru_r + r^2u_{rr}) = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$$

则泛定方程化为：

$$u_t = a^2u_{rr} + \frac{2a^2}{r}u_r$$

泛定方程和边界条件都为齐次的，利用分离变量法，令$u(t,r) = T(t)R(r)$，带入泛定方程：

$$T'(t)R(r) = a^2T(t)R''(r) + \frac{2a^2}{r}T(t)R'(r) \quad\Longrightarrow\quad \frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{R''(r) + \frac{2}{r}R'(r)}{R(r)} = -\lambda$$

先求解关于$R(r)$的固有值问题：

$$\begin{cases} R''(r) + \dfrac{2}{r}R'(r) + \lambda R(r) = 0 \\ \quad R(R) = 0,\ |R(0)| < \infty \end{cases}$$

这不是施图姆-刘维尔型方程，为化成施图姆-刘维尔形式，先计算$\rho(r)$：

$$\rho(r) = \frac{1}{1}e^{\int\frac{2}{r}dx} = r^2$$

在确定$R(r)$的常微分方程两端同时乘以$\rho(r)$，就可以化为施图姆-刘维尔型方程：

$$r^2R''(r) + 2rR'(r) + \lambda r^2R(r) = 0 \quad\Longrightarrow\quad (r^2R')' + \lambda r^2R = 0$$

此时是一个标准的施图姆-刘维尔型方程, $k(r) = r^2$, $q(r) = 0$, $\rho(r) = r^2$, 且满足第一类边界条件。

因此必有$\lambda > 0$，令$\lambda = k^2\ (k > 0)$.相同方程在本章习题第二题的第二问已经解过：

$$rR'' + 2R' + \lambda rR = 0$$

换元，令 $y = rR$，则有：$y' = rR' + R$，$y'' = rR'' + 2R'$，发现原方程恰可以替换为：

$$y'' + \lambda y = 0 \quad \big(y = y(r);\ y(0) = y(R) = 0\big)$$

这就是标准的固有值问题，也是二阶常系数线性齐次微分方程。$\lambda > 0$时，解具有形式：

$$y = A\cos kr + B\sin kr$$

待定其系数：$y(0) = y(R) = 0$，并且满足原方程。可解出：

$$A = 0\ ;\ \sin\sqrt{\lambda}\,R = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{R^2} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

综上三种穷尽λ所有取值可能的情况，原方程的解为：

$$y_n(r) = C_n\sin\frac{n\pi r}{R} \quad (C_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z})$$

$$\Longrightarrow\quad R_n(r) = \frac{C_n}{r}\sin\frac{n\pi r}{R} \quad (C_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z})$$

再将固有值λ带入确定T的常微分方程：

$$T'(t) + \lambda a^2T(t) = 0$$

直接利用积分因子法写出其通解：

$$T_n(t) = D_ne^{-\int\lambda a^2dt} = D_ne^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{R^2}t}$$

由此，再将$R_n(r)$和$T(t)$相乘得到u_n： 其中系数D_n已经和系数C_n合并。

$$u_n(t,r) = R_n(r)T(t) = \frac{C_n}{r}\sin\frac{n\pi r}{R}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{R^2}t} = \frac{C_n}{r}\sin\frac{n\pi r}{R}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{R^2}t}$$

由叠加原理，将特解列叠加，得到的也是原方程的解：

$$u(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{r}\sin\frac{n\pi r}{R}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{R^2}t}$$

最后再由$t = 0$的初始条件确定系数C_n：

$$u|_{t=0} = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{r}\sin\frac{n\pi r}{R} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi r}{R} = rf(r)$$

根据傅里叶展开的系数，可知：

$$C_n = \frac{2}{R}\int_0^R rf(r)\sin\frac{n\pi r}{R}dr$$

综上，所有待求项均已给出，所以原方程的解为：

$$u(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{rR}\left(\int_0^R rf(r)\sin\frac{n\pi r}{R}dr\right)\sin\frac{n\pi r}{R}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{R^2}t}$$

(2) 尝试利用分离变量法求解：令$u=u(t,x)=X(x)T(t)$，带入泛定方程，可得：

$$X(x)T''(t)=a^2X''''(x)T(t)\quad\Longrightarrow\quad\frac{X''''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda$$

先解关于$X(x)$的固有值问题：

$$\begin{cases}X''''(x)+\lambda X(x)=0\\X(0)=X(l)=0\\X''(0)=X''(l)=0\end{cases}$$

对λ的所有取值可能进行讨论：

① $\lambda>0$：

令$\lambda=k^2\ (k>0)$ 可以采用特征方程对其求解，列出其特征方程：

$$r^4+k^2=0\quad\Longrightarrow\quad\text{解}\ r=\pm(\frac{\sqrt{2k}}{2}\pm\frac{\sqrt{2k}}{2}i)$$

因此这种形式的方程通解可以表示为：

$$X(x)=e^{\frac{\sqrt{2k}}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2k}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{2k}}{2}x\right)+e^{-\frac{\sqrt{2k}}{2}x}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{2k}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{2k}}{2}x\right)$$

再通过边界条件确定系数：

$$X''(x)=2\left(\frac{\sqrt{2k}}{2}\right)^2e^{-\frac{\sqrt{2k}}{2}x}\left(\left(C_2e^{2\frac{\sqrt{2k}}{2}x}-C_4\right)\cos\frac{\sqrt{2k}}{2}x-\left(C_1e^{2\frac{\sqrt{2k}}{2}x}-C_3\right)\sin\frac{\sqrt{2k}}{2}x\right)$$

$$\begin{cases}X(0)=C_1+C_3=0\\X(l)=e^{\frac{\sqrt{2k}}{2}l}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2k}}{2}l+C_2\sin\frac{\sqrt{2k}}{2}l\right)+e^{-\frac{\sqrt{2k}}{2}l}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{2k}}{2}l+C_4\sin\frac{\sqrt{2k}}{2}l\right)=0\\X''(0)=2\left(\frac{\sqrt{2k}}{2}\right)^2(C_2-C_4)=0\\X''(l)=2\left(\frac{\sqrt{2k}}{2}\right)^2e^{-\frac{\sqrt{2k}}{2}l}\left(\left(C_2e^{2\frac{\sqrt{2k}}{2}l}-C_4\right)\cos\frac{\sqrt{2k}}{2}l-\left(C_1e^{2\frac{\sqrt{2k}}{2}l}-C_3\right)\sin\frac{\sqrt{2k}}{2}l\right)=0\end{cases}$$

从第一和第三个方程中可以解出：$\begin{cases}C_1=-C_3\\C_2=C_4\end{cases}$

又由于$e^p>0$，因此从第二个方程再联系系数之间的关系，可得$C_1=C_2=C_3=C_4=0$

此时方程仅有零解，舍去。

② $\lambda=0$：$X''''(x)=0\ \Longrightarrow\ X=Ax^3+Bx^2+Cx+D$，带入边界条件，显然$A=B=C=D=0$

此时方程也仅有零解，舍去。

③ $\lambda<0$：令$\lambda=-k^2\ (k>0)$. 列出其特征方程，可得

$$r^4-k^2=0\quad\Longrightarrow\text{解}\ r=\pm\sqrt{k}\quad or\quad\pm i\sqrt{k}$$

这时这种形式的方程具有通解：

$$X(x)=C_1e^{-\sqrt{k}x}+C_2e^{\sqrt{k}x}+C_3\cos\sqrt{k}x+C_4\sin\sqrt{k}x$$

再通过边界条件确定系数：

$$X''(x)=C_1ke^{-\sqrt{k}x}+C_2ke^{\sqrt{k}x}-kC_3\cos\sqrt{k}x-kC_4\sin\sqrt{k}x$$

$$\begin{cases}X(0)=C_1+C_2+C_3=0\\X(l)=C_1e^{-\sqrt{k}l}+C_2e^{\sqrt{k}l}+C_3\cos\sqrt{k}l+C_4\sin\sqrt{k}l=0\\X''(0)=k(C_1+C_2-C_3)=0\\X''(l)=C_1ke^{-\sqrt{k}l}+C_2ke^{\sqrt{k}l}-kC_3\cos\sqrt{k}l-kC_4\sin\sqrt{k}l=0\end{cases}$$

从第一和第三两个方程可得，$C_3=0$, $C_1+C_2=0$，再带入其余两个方程，继续运算：

比较二、四二式，显然$C_4\sin\sqrt{k}l=0$；但$e^{-\sqrt{k}l}$，$e^{\sqrt{k}l}$均非零，要使上两式成立，只有$C_1=C_2=0$

所以此时C_4不可以再为 0，因此$\sin\sqrt{k}l=0\ \Longrightarrow\ k_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\ (n\in\mathbb{N}^+)$

综上三种所有取边λ可能值的情况下，最终得到：

固有值：$\lambda_n=-k_n^2=-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\ (n\in\mathbb{N}^+)$； 固有函数：$X_n(x)=C_4\sin\sqrt{k}x=C_n\sin\frac{n\pi}{l}x\ \ (C_n\in\mathbb{R})$

再将固有值带入确定T的常微分方程：

$$T''(t)-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4a^2T(t)=0$$

这是二阶线性常系数齐次方程，利用特征方程求解，先列出其特征方程：$r^2-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4a^2=0$

特征方程显然有两个不等的实根：$r_1=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2a$； $r_2=-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2a$

所以这个常微分方程的解为：$T_n(t)=A_ne^{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2at}+B_ne^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2at}\ \ (A_n,B_n\in\mathbb{R})$

最后写出u的表达式，由叠加原理，直接写出解的级数表达：其中系数C_n已经和系数A_n,B_n合并。

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_ne^{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2at}+B_ne^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2at}\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

再根据初始条件确定系数A_n,B_n：

$$\begin{cases}u(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)\sin\frac{n\pi}{l}x=x(l-x)\quad\Longrightarrow\quad A_n+B_n=\frac{2}{l}\int_0^lx(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\ dx\\u_t(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2aA_n-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2aB_n\right)\sin\frac{n\pi}{l}x=0\quad\Longrightarrow\quad A_n-B_n=0\end{cases}$$

易解得：$A_n=B_n=\frac{1}{2}*\frac{2}{l}*\frac{-2l^3(cos\,n\pi-1)}{n^3\pi^3}=\frac{4l^2}{(2k+1)^3\pi^3}\ \ (k\in\mathbb{N})$

将这些结果带入最终的解表达式中，可以得到：

$$\begin{aligned}u(t,x)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4l^2}{(2k+1)^3\pi^3}\left(e^{\left(\frac{(2k+1)\pi}{l}\right)^2at}+e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{l}\right)^2at}\right)\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4l^2}{(2k+1)^3\pi^3}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{l}x\right)\cosh\left(\frac{(2k+1)^2\pi^2}{l^2}at\right)\end{aligned}$$

2.8 一半径为a的半圆形平板，其圆周边界上的温度保持$u(a,\theta)=T\theta(\pi-\theta)$；直径边界上的温度为 0.板的侧面绝缘，试求板内的稳定温度分布。

解：稳定后，板内的温度分布仅与点的坐标有关，而与时间无关。因此设温度分布函数$u=u(r,\theta)$.

按题意列出该问题的数学模型：

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0 \\ u(a,\theta)=T\theta(\pi-\theta) \quad 0\le r<a,\ 0\le\theta\le\pi \\ u(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{cases}$$

该问题就是扇形区域内的狄氏问题，在 2.5 的第七小题已经解过。此时$\alpha=\pi, f(\theta)=T\theta(\pi-\theta)$

直接将结果写出，带入α和$f(\theta)$：

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(\theta)\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}\ d\theta\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} T\theta(\pi-\theta)\sin\frac{n\pi\theta}{\pi}\ d\theta\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\pi}}\sin\frac{n\pi\theta}{\pi}$$

$$=\frac{2T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\theta(\pi-\theta)\sin n\theta\ d\theta\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\sin n\theta$$

$$=\frac{2T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(1-\cos n\pi)}{n^3}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\sin n\theta$$

$$=\frac{2T}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)^3}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1}\sin(2k+1)\theta$$

$$=\frac{8T}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1}\sin(2k+1)\theta}{(2k+1)^3}$$

2.10 求解下列非齐次定解问题：

(3) $\begin{cases} u_{xx} - a^2u_t + Ae^{-2x} = 0 \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = T_0 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + b\sinh x \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0 \end{cases}$

解：(3) 显然$u = u(t,x)$. 可以先求出泛定方程的一个特解$v(x)$：

$$v'' + Ae^{-2x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad v(x) = p_1e^{-2x} + p_2x + p_3$$

再带入边界条件，确定特解中的系数：$v(0) = v(l) = 0 \quad \Longrightarrow \quad v(x) = -\frac{A}{4}e^{-2x} + \frac{A}{4l}(e^{-2l} - 1)x + \frac{A}{4}$

此时，令$u(t,x) = v(x) + \omega(t,x)$，再解出$\omega(t,x)$即可得到原问题的解。

$\omega(t,x)$满足方程组：

$$\begin{cases} \omega_{xx} = a^2\omega_t \\ \omega(t,0) = \omega(t,l) = 0 \\ \omega(0,x) = T_0 - v(x) \end{cases}$$

运用分离变量法，令$\omega(t,x) = T(t)X(x)$，将其带入泛定方程：

$$T(t)X''(x) = a^2T'(t)X(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{a^2T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

先求解确定$X(x)$的固有值问题：

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

这显然是施图姆-刘维尔型方程，且边界条件为第一类。因此可知固有值$\lambda > 0$.

令$\lambda = k^2\ (k > 0)$，求其通解：

这是二阶常系数线性齐次微分方程，特征方程有两个复根。特征方程：$r^2 + k^2 = 0$

$$\Longrightarrow\ r_1 = ik\ \ ,\ r_2 = -ik\ \ ;\quad r = \alpha + i\beta$$

$$\Longrightarrow X(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) = A\cos kx + B\sin kx$$

再通过边界条件确定系数：

$$\begin{cases} X(0) = A = 0 \\ X(l) = A\cos kl + B\sin kl = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A = 0 \\ \sin kl = 0 \end{cases} \quad B\text{不可再为零}$$

$$\Longrightarrow\ k_n = \frac{n\pi}{l}\ (n \in \mathbb{N}^+)\ \ ,\ \ \lambda_n = k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

对应的固有函数：$X_n(x) = B_n\, sin\frac{n\pi x}{l}\quad (B_n \in \mathbb{R})$

再将固有值λ带入确定T的常微分方程中：

$$T'(t) + \left(\frac{n\pi}{al}\right)^2 T(t) = 0$$

直接利用一阶线性常系数齐次微分方程的通解公式（积分因子法），写出T的通解：

$$T_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{al}\right)^2 t}$$

最后将$X(x), T(t)$相乘得到$\omega(t,x)$，再根据叠加原理，写出解的级数表达式：

$$\omega(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{al}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

再根据边界条件确定系数C_n：

$$\omega(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{n\pi x}{l} = T_0 - v(x) = T_0 + \frac{A}{4}e^{-2x} - \frac{A}{4l}(e^{-2l} - 1)x - \frac{A}{4}$$

由傅里叶展开的系数，可知：(拆开积分，积分过程略去未写)

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left(T_0 + \frac{A}{4}e^{-2x} - \frac{A}{4l}(e^{-2l} - 1)x - \frac{A}{4}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\ dx = \frac{2T_0}{n\pi}(1 - (-1)^n) + \frac{2Al^2(e^{-2l}(-1)^n - 1)}{n\pi(4l^2 + n^2\pi^2)}$$

将所有已知系数均带入结果计算式，最终可得：

$u(t,x) = v(x) + \omega(t,x)$

$$= -\frac{A}{4}e^{-2x} + \frac{A}{4l}(e^{-2l} - 1)x + \frac{A}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2T_0}{n\pi}(1 - (-1)^n) + \frac{2Al^2(e^{-2l}(-1)^n - 1)}{n\pi(4l^2 + n^2\pi^2)}\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{al}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

(4) 显然$u=u(t,x)$. 可以先求出泛定方程的一个特解$v(x)$:

$$0=a^2v''+b\sinh x$$

对其两次积分，并利用$v(0)=v(l)=0$，即可得特解：$v(x)=-\frac{b}{a^2}\left(\sinh x-\frac{\sinh l}{l}x\right)$

此时，令$u(t,x)=v(x)+\omega(t,x)$，再解出$\omega(t,x)$即可得到原问题的解。

$\omega(t,x)$满足方程组:

$$\begin{cases} \omega_{tt}=a^2\omega_{xx} \\ \omega(t,0)=\omega(t,l)=0 \\ \omega(0,x)=-v(x);\ \ \omega_t(0,x)=0 \end{cases}$$

运用分离变量法，令$\omega(t,x)=T(t)X(x)$，将其带入泛定方程:

$$T''(t)X(x)=a^2T(t)X''(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

先求解确定$X(x)$的固有值问题:

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$$

这个固有值问题与上一小题完全相同，直接写出其结果:

$$\lambda_n=k_n^2=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 (n\in\mathbb{N}^+)\ ;\quad X_n(x)=B_n\, sin\frac{n\pi x}{l}\quad (B_n\in\mathbb{R})$$

再将固有值λ带入确定T的常微分方程:

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$$

这是二阶线性常系数齐次方程，利用特征方程求解，先列出其特征方程:

$$r^2+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2a^2=0$$

特征方程显然有两个共轭复根：$r_1=\frac{n\pi}{l}ai$ ， $r_2=-\frac{n\pi}{l}ai$ ； $r=\alpha+i\beta$

所以这个常微分方程的解为:

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\quad (A_n,B_n\in\mathbb{R})$$

最后写出u的表达式，由叠加原理，直接写出解的级数表达：其中系数B_n已经和系数C_n,D_n合并。

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

再由初始条件确定未知系数:

$$\begin{cases} u(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}=-v(x)=\frac{b}{a^2}\left(\sinh x-\frac{\sinh l}{l}x\right) \\ u_t(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}D_n\sin\frac{n\pi x}{l}=0 \qquad \Longrightarrow \qquad D_n=0 \end{cases}$$

利用傅里叶展开的系数，即可得:（计算过程较为繁琐，略去）

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{b}{a^2}\left(\sinh x-\frac{\sinh l}{l}x\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\ dx=\frac{2b(-1)^nl^2\sinh l}{a^2n\pi(n^2\pi^2+l^2)}$$

将各已知的系数全部带入解的表达式中，得:

$$u(t,x)=v(x)+\omega(t,x)=-\frac{b}{a^2}\left(\sinh x-\frac{\sinh l}{l}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2b(-1)^nl^2\sinh l}{a^2n\pi(n^2\pi^2+l^2)}\cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

2.12 求解下列矩形区域内的定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta_2 u \\ u|_{x=0} = u|_{x=l_1} = u|_{y=0} = u|_{y=l_2} = 0 \qquad t > 0,\ 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2 \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y) \end{cases}$$

解：显然$u = u(x, y, t)$，尝试用分离变量法求解：令$u = X(x)Y(y)T(t)$，将泛定方程展开后带入：

$$\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy}$$

$$X(x)Y(y)T'(t) = a^2\big(X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t)\big)$$

同时除以 $a^2X(x)Y(y)T(t)$,得 $\dfrac{-T'(t)}{a^2T(t)} + \dfrac{X''(x)}{X(x)} + \dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$

令 $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$， $\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = -\mu$， $\dfrac{-T'(t)}{a^2T(t)} = \lambda + \mu$

变量就已经分离，先对X, Y的固有值问题进行求解：

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l_1) = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} Y''(y) + \mu Y(y) = 0 \\ Y(0) = Y(l_2) = 0 \end{cases}$$

这种类型的固有值问题在上一题中已经求解过两次，直接写出固有值和固有函数：

$$\lambda_m = \left(\frac{m\pi}{l_1}\right)^2 (m \in \mathbb{N}^+)\ ; \quad X_m(x) = A_m \sin\frac{m\pi x}{l_1} \quad (A_m \in \mathbb{R})$$

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2 (n \in \mathbb{N}^+)\ ; \quad Y_n(y) = B_n \sin\frac{n\pi y}{l_2} \quad (B_n \in \mathbb{R})$$

再将固有值带入确定T的常微分方程中：

$$T'(t) + (\lambda + \mu)a^2T(t) = T'(t) + \left(\left(\frac{m\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2\right)a^2T(t) = 0$$

这是一阶线性常系数齐次常微分方程，直接利用积分因子法写出其通解：

$$T_{mn}(t) = C_{mn}e^{-\left(\left(\frac{m\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2\right)a^2t}$$

将$X(x), Y(y), T(t)$相乘得到$u(x, y, t)$，并利用叠加原理写出解的级数表示形式：(系数已合并)

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}e^{-\left(\left(\frac{m\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2\right)a^2t} \sin\frac{m\pi x}{l_1} \sin\frac{n\pi y}{l_2}$$

最后根据初始条件，确定参数C_{mn}的值：

$$u(0, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\frac{m\pi x}{l_1} \sin\frac{n\pi y}{l_2} = \varphi(x, y)$$

利用傅里叶展开的系数，可得：

$$C_{mn} = \frac{4}{l_1l_2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \varphi(x, y) \sin\frac{m\pi x}{l_1} \sin\frac{n\pi y}{l_2} dy\, dx$$

带入所有已经算得的系数，可得原问题的解为：

$$u(x, y, t) = \frac{4}{l_1l_2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \varphi(x, y) \sin\frac{m\pi x}{l_1} \sin\frac{n\pi y}{l_2} dy\, dx\right) e^{-\left(\left(\frac{m\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2\right)a^2t} \sin\frac{m\pi x}{l_1} \sin\frac{n\pi y}{l_2}$$