数学物理方程 B　第十二周作业　4 月 7 日 周四

PB18151866 龚小航

4.1 用傅里叶正弦变换解下列定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(t,0)=\varphi(t),\quad u(0,x)=0 \qquad 0<x<+\infty,\ t>0 \\ u(t,+\infty) = u_x(t,+\infty) = 0 \end{cases}$$

解：以x为积分变量，对原问题作正弦变换：变换后 $\overline{u}$ 为 t 的函数，表达式为

$$\overline{u}(t,\lambda)=\int_0^{+\infty} u(t,x)\sin\lambda x\ dx$$

再将泛定方程中出现的项都写出其正弦变换。于是有：

$$\overline{u}_{xx}=\int_0^{+\infty} u_{xx}(t,x)\sin\lambda x\ dx=\left(u_x\sin\lambda x\Big|_{x=0}^{+\infty}\right)-\lambda\int_0^{+\infty}u_x(t,x)\cos\lambda x\ dx=-\lambda\int_0^{+\infty}u_x(t,x)\cos\lambda x\ dx$$

$$=-\lambda\left(\left(u\cos\lambda x\Big|_{x=0}^{+\infty}\right)+\lambda\int_0^{+\infty}u(t,x)\sin\lambda x\ dx\right)=\lambda\varphi(t)-\lambda^2\overline{u}$$

因而原定解问题就化为下列常微分方程的初始值问题：$\overline{u}=\overline{u}(t,\lambda)$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}t}=a^2(\lambda\varphi(t)-\lambda^2\overline{u}) \\ \overline{u}(\lambda,0)=0\end{cases}\ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}t}+a^2\lambda^2\overline{u}=a^2\lambda\varphi(t)$$

这是一阶变系数线性非齐次方程，形式为

$$\frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}t}+P(t)\overline{u}=Q(t)$$

直接利用通解公式：

$$\begin{aligned}\overline{u}\ &=\ Ce^{-\int P(t)\mathrm{d}t}+e^{-\int P(t)\mathrm{d}t}\int Q(t)e^{\int P(t)\,\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\ =\ Ce^{-\int a^2\lambda^2\mathrm{d}t}+e^{-\int a^2\lambda^2\mathrm{d}t}\int a^2\lambda\varphi(t)e^{\int a^2\lambda^2\,\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\ &=\ Ce^{-a^2\lambda^2t}+e^{-a^2\lambda^2t}a^2\lambda\int\varphi(t)e^{a^2\lambda^2t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

带入边界条件$\overline{u}(\lambda,0)=0$，立刻可得：$C=-a^2\lambda\int\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$

$$\overline{u}\ =\ e^{-a^2\lambda^2t}a^2\lambda\left(-\int\varphi(t)\mathrm{d}t+\int\varphi(t)e^{a^2\lambda^2t}\mathrm{d}t\right)\ =\ e^{-a^2\lambda^2t}a^2\lambda\int_0^t\varphi(\tau)e^{a^2\lambda^2\tau}\mathrm{d}\tau$$

再做反正弦变换，即可得到原问题的解：

$$u(t,x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\overline{u}(t,\lambda)\sin\lambda x\ \mathrm{d}\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(e^{-a^2\lambda^2t}a^2\lambda\int_0^t\varphi(\tau)e^{a^2\lambda^2\tau}d\tau\right)\sin\lambda x\ \mathrm{d}\lambda$$

其中对τ的积分不好计算，但是对λ的积分可以解出，因此，化为：

$$u(t,x)=\frac{2}{\pi}\int_0^t\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2t}a^2\lambda e^{a^2\lambda^2\tau}\sin\lambda x\ \mathrm{d}\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^t\varphi(\tau)d\tau\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}a^2\lambda\sin\lambda x\ \mathrm{d}\lambda$$

为此需要计算其中出现的积分。令上式中对λ的积分为I_1：换元，令 $p=a\sqrt{t-\tau}\lambda,\ \ d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}p$

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}a^2\lambda\sin\lambda x\ \mathrm{d}\lambda=\int_0^\infty e^{-p^2}a^2\frac{p}{a\sqrt{t-\tau}}\sin\frac{p}{a\sqrt{t-\tau}}x\ \frac{1}{a\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}p \\ &=\frac{1}{t-\tau}\int_0^\infty pe^{-p^2}\sin kp\ \mathrm{d}p\quad\left(k=\frac{x}{a\sqrt{t-\tau}}\right)\ =\ -\frac{1}{2(t-\tau)}\int_0^\infty\sin kp\ \mathrm{d}e^{-p^2} \\ &=-\frac{1}{2(t-\tau)}\left(\left(e^{-p^2}\sin kp\Big|_{p=0}^{\infty}\right)-k\int_0^\infty e^{-p^2}\cos kp\ \mathrm{d}p\right)\ =\ \frac{k}{2(t-\tau)}\int_0^\infty e^{-p^2}\cos kp\ \mathrm{d}p\end{aligned}$$

再利用一个积分结论：

$$\int_0^\infty e^{-a^2x}\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

套用本题积分，即$a=1,b=k=\frac{x}{a\sqrt{t-\tau}}$，立即有：

$$I_1=\frac{\dfrac{x}{a\sqrt{t-\tau}}}{2(t-\tau)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}=\frac{\sqrt{\pi}x}{4a(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

最后将算出的部分代回$u(t,x)$的表达式，即有：

$$u(t,x)=\frac{2}{\pi}\int_0^t I_1\varphi(\tau)d\tau=\frac{2}{\pi}\int_0^t\frac{\sqrt{\pi}x}{4a(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\varphi(\tau)d\tau=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$$

4.2 用拉普拉斯变换解下列定解问题：

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1\text{，} x, y > 0 \\ u(0, y) = y + 1\text{，} u(x, 0) = 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}\text{，} t > 0\text{，} 0 < x < l \\ u_x(t, 0) = 0,\ \ u(t, l) = u_0\ (\text{常数}) \\ u(0, x) = u_1\ (\text{常数}) \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - hu \\ u(0, x) = b\ (\text{常数}),\ \ u(t, 0) = 0\text{，} x, t, h > 0\text{，} h\ \text{常数} \\ \lim\limits_{x\to\infty} u_x = 0 \end{cases}$

(1)解：　对 y 作拉普拉斯变换，有：

$$\mathrm{U}(x, p) = \int_0^\infty u(x, y) e^{-py} \mathrm{d}y$$

之后将泛定方程和边界条件全部进行拉普拉斯变换：

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = L\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) = pL\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=0, p=x} = p\frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{d}x}$$

$$L(1) = \frac{1}{p}\text{；}\quad L(y+1) = L(y) + L(1) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

因此，原方程可以化为：

$$\begin{cases} p\dfrac{\mathrm{dU}}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{p} \\ \mathrm{U}|_{x=0} = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p} \end{cases}$$

直接对两边积分，再带入边界条件，将p视为参量，易知：

$$\mathrm{U}(x, p) = \frac{x}{p^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

最后对其作拉普拉斯逆变换，即可得：

$$\mathrm{U}(x, y) = L^{-1}\left(\frac{x}{p^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) = xy + y + 1$$

(2) 只有变量t是在$(0, +\infty)$上变化的自变量，因此对t进行拉普拉斯变换，有：$u = u(t, x)$

$$\mathrm{U}(p, x) = \int_0^\infty u(t, x) e^{-pt} \mathrm{d}t$$

之后将泛定方程和边界条件全部进行拉普拉斯变换：

$$L\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = p\mathrm{U} - u(0, x) = p\mathrm{U} - u_1\text{；}\quad L(u_{xx}) = \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{U}}{\mathrm{d}x^2}\text{；}\quad L(u_0) = \frac{u_0}{p}$$

因此，原方程可以化为：将p视为参量

$$\begin{cases} p\mathrm{U} - u_1 = a^2 \dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{U}}{\mathrm{d}x^2} \\ \mathrm{U}'(0) = 0\text{，} \mathrm{U}(l) = \dfrac{u_0}{p} \end{cases}$$

这是二阶常系数线性非齐次方程，先求特解，然后利用特征方程求解：

$$\mathrm{U}^* = \frac{u_1}{p}$$

再带入边界条件，可以一并求解出：

$$\mathrm{U}(p, x) = \frac{u_1}{p} + (u_0 - u_1)\frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)}{p\cosh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right)}$$

只需再利用拉普拉斯逆变换就可得解。为此，需要用留数定理计算。记：

$$g(p, x) = (u_0 - u_1)\frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)}{p\cosh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right)}$$

则令其分母为 0，则可得奇点：

$$p = 0\text{，}\ \left(\pm\frac{2k-1}{2}\frac{\pi a}{l}\boldsymbol{i}\right)^2\ (k \in \mathbb{N}^+)$$

则分别计算他们的留数：

$$\mathrm{Res}[g(p, x)e^{pt}\text{，} 0] = \lim_{p\to 0}\left((u_0 - u_1)\frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)}{\cosh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right)}\right) = u_0 - u_1$$

$$\mathrm{Res}\left[g(p, x)e^{pt}\text{，} -\left(\frac{2k-1}{2}\frac{\pi a}{l}\right)^2\right] = \lim_{p\to -\left(\frac{2k-1}{2}\frac{\pi a}{l}\right)^2}\left((u_0 - u_1)\frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)}{p\cosh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right)}\left(p + \left(\frac{2k-1}{2}\frac{\pi a}{l}\right)^2\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^k}{2k-1}\frac{4}{\pi}(u_0 - u_1)\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}e^{-\left(\frac{(2k-1)\pi a}{2l}\right)^2 t}$$

因此作拉普拉斯逆变换，即可得：

$$u(t, x) = L^{-1}\left(\frac{u_1}{p}\right) + L^{-1}\left((u_0 - u_1)\frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)}{p\cosh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right)}\right)$$

$$= u_1 + (u_0 - u_1) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\frac{4}{\pi}(u_0 - u_1)\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}e^{-\left(\frac{(2k-1)\pi a}{2l}\right)^2 t}$$

$$= u_0 + \frac{4(u_0 - u_1)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}e^{-\left(\frac{(2k-1)\pi a}{2l}\right)^2 t}$$

(3) 对t进行拉普拉斯变换，有：$u=u(t,x)$

$$\mathrm{U}(p,x)=\int_0^\infty u(t,x)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

之后将泛定方程和边界条件全部进行拉普拉斯变换：

$$L(u_t)=p\mathrm{U}-u(0,x)=p\mathrm{U}-b\,;\quad L(u_{xx})=\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{U}}{\mathrm{d}x^2}\;;\quad L(hu)=h\mathrm{U}\,;\qquad L(u_x)=\frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{d}x}$$

得到变换后的常微分定解问题为：

$$\begin{cases}p\mathrm{U}-b=a^2\dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{U}}{\mathrm{d}x^2}-h\mathrm{U}\\ \mathrm{U}(0)=0\,,\quad \mathrm{U}'(\infty)=0\end{cases}$$

泛定方程即为：$a^2\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{U}}{\mathrm{d}x^2}-(p+h)\mathrm{U}=-\mathrm{b}$，这是二阶常系数线性非齐次微分方程，先求特解再求对应齐次方程的通解。 显然，该方程的一个特解为：

$$\mathrm{U}^*=\frac{b}{p+h}$$

再通过特征方程求对应齐次方程的解。结合边界条件，可以确定最终U的解为：

$$\mathrm{U}=\frac{b}{p+h}\left(1-e^{-\frac{\sqrt{p+h}}{a}x}\right)$$

作逆变换时，需要用到拉普拉斯逆变换表，可得以下的公式：

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}\right)=\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right);\quad \mathrm{erfc(x)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

因此最终的解的结果为：

$$u(t,x)=L^{-1}\left(\frac{b}{p+h}\left(1-e^{-\frac{\sqrt{p+h}}{a}x}\right)\right)=bL^{-1}\left(\frac{1}{p+h}\right)-bL^{-1}\left(\frac{1}{p+h}e^{-\frac{\sqrt{p+h}}{a}x}\right)$$

$$=be^{-ht}-be^{-ht}L^{-1}\left(\frac{1}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)=be^{-ht}\left(1-\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right)=be^{-ht}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$=\frac{2be^{-ht}}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^\infty e^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau$$

附加： 用傅里叶余弦变换解下列定解问题：

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0\,,\quad x,y>0\\ u|_{y=0}=f(x),\quad u_x|_{x=0}=0\end{cases}\quad u(x,y)\text{有界}$$

解：以x为积分变量，对原问题作余弦变换：变换后 $\overline{u}$ 为 y 的函数，表达式为

$$\overline{u}(\lambda,y)=\int_0^{+\infty}u(x,y)\cos\lambda x\ dx$$

$$u(x,y)\text{有界}\quad\Longrightarrow\quad u_x(\infty,y)=u(\infty,y)=0,$$

再将泛定方程中出现的项都写出其余弦变换。于是有：

$$\overline{u}_{xx}=\int_0^\infty u_{xx}(x,y)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=\left(u_x\cos\lambda x\Big|_{x=0}^{\infty}\right)+\lambda\int_0^\infty u_x\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\;=\;\lambda\int_0^\infty u_x\sin\lambda x\,\mathrm{d}x$$

$$=\lambda\left(\left(u\sin\lambda x\Big|_{x=0}^{\infty}\right)-\lambda\int_0^\infty u\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right)=-\lambda^2\overline{u}$$

$$\overline{u}_{yy}=\frac{\mathrm{d}^2\overline{u}}{\mathrm{d}y^2}$$

因而原方程能化归为常微分方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\overline{u}}{\mathrm{d}y^2}-\lambda^2\overline{u}=0\\ \overline{u}(\lambda,0)=\overline{f}(x)=\displaystyle\int_0^\infty f(x)\cos\lambda x\ \mathrm{d}x\end{cases}$$

则有：

$$\overline{u}(x,y)=A(\lambda)e^{-\lambda y}+B(\lambda)e^{\lambda y}\,,\qquad u(x,y)\text{有界,因此有}\overline{u}(x,y)=\overline{f}(x)e^{-|\lambda|y}$$

再对其作逆变换：

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\overline{u}(\lambda,y)\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\overline{f}(x)e^{-|\lambda|y}\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(x)\cos\lambda x\ \mathrm{d}x\right)e^{-|\lambda|y}\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda$$

$$=F^{-1}\left(\overline{f}(x)e^{-|\lambda|y}\right)=F^{-1}\left(\overline{f}(x)\right)*F^{-1}\left(e^{-|\lambda|y}\right)$$

因此只需计算出$e^{-|\lambda|y}$的余弦逆变换：将$\cos\lambda x$拆成复指数形式，即可直接对其积分。

$$F^{-1}\left(e^{-|\lambda|y}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda y}\cos\lambda x\ \mathrm{d}\lambda=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda(y-ix)}\,\mathrm{d}\lambda+\int_0^\infty e^{-\lambda(y+ix)}\,\mathrm{d}\lambda\right)=\frac{1}{\pi}\frac{2y}{x^2+y^2}$$

再直接利用卷积定理，立刻得到：

$$u(x,y)=\left(f(x)\right)*\left(\frac{1}{\pi}\frac{2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\left(\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}+\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\right)\,\mathrm{d}\xi$$