数理方程经典问题专题整理

重要的傅里叶变换对

积分变换是一种常用的求解数理方程的方法，其核心思想是通过积分变换将偏微分方程转化为常微分方程从而求解。积分变换法的流程可以总结为：利用积分变换的性质将偏微分方程转化为常微分方程，求解像函数满足的常微分方程得到像函数，反变换得到原问题的解。其中变换过程可能会涉及复杂的运算，一般情况下，对于傅里叶变换和拉普拉斯变换，可能会需要用到留数定理求解积分。留数定理虽然有着强大的能力，但是有时候围道的构造是有一定难度的。对于本文提到的这类重要的函数，在教材上有介绍如何构造围道。这里介绍一种相对简单的想法，更容易理解和记忆这一重要的傅里叶变换对。

求解 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的傅里叶变换。

解：记 $f(x)$ 的傅里叶变换为

$$F[f(x)] = F(\lambda)$$

对 $f(x)$ 求导可得

$$f'(x) = -x \cdot f(x)$$

由傅里叶变换的性质可知

$$F\left[f'(x)\right] = i\lambda F(\lambda)$$

$$F[-xf(x)] = -iF'(\lambda)$$

代入上式可得

$$i\lambda F(\lambda) = -iF'(\lambda)$$

整理可得

$$\begin{cases} F'(\lambda) + \lambda F(\lambda) = 0 \\ f'(x) + xf(x) = 0 \end{cases}$$

由 $f'(x) + xf(x) = 0$ 有解 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 可知，$F(\lambda)$ 有形如

$$F(\lambda) = k \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

的解. 又由

$$F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\sqrt{2\pi}$$

可知，$k=\sqrt{2\pi}$. 所以

$$F(\lambda)=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

一般地，对于

$$g(x)=e^{-ax^2}=e^{-\frac{(\sqrt{2a}x)^2}{2}}(a>0)$$

有傅里叶变换公式

$$F\left[e^{-ax^2}\right]=\sqrt{2\pi}\frac{e^{-\frac{\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2a}}\right)^2}{2}}}{\sqrt{2a}}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\lambda^2}{4a^2}}$$

一般地，使用留数定理求解积分时，围道的构造没有固定的方法，需要根据问题进行分析，往往难度较大。对于这类特殊的函数，存在这样一种简洁的方法进行拉普拉斯变换求解。这类函数也是一类重要的函数，在使用积分变换法的时候可能会用到，所以以专题形式特别分享这样一种求解思路。