数理逻辑　第十三周作业　5 月 14 日 周四

PB18151866 龚小航

3.4.【练习 23.3，P110】设项 t,u 都对公式 $p(x)$ 中 x 自由，且不含 x．求证：（y 不在 $p(x)$ 中出现）

$$E\cup\{p(t),\ \exists x(p(x)\wedge\forall y(p(y)\to x\approx y))\}\ \vdash\ p(u)\to u\approx t$$

解：只需要先证明

$$E\cup\{p(t),\ p(x)\wedge\forall y(p(y)\to x\approx y)\}\ \vdash\ p(u)\to u\approx t$$

就可以根据 $\exists_2$ 规则，直接得出要证明的结论。

以下是一个证明：首先需要证明 $p(x)\wedge\forall y(p(y)\to x\approx y)\ \to\ \forall y(p(y)\to x\approx y)$

① $p(x)\wedge\forall y(p(y)\to x\approx y)$ ······ 前提

② $\neg(p(x)\to\neg\forall y(p(y)\to x\approx y))$ ······ 等价前提

③ $\neg\forall y(p(y)\to x\approx y)\to(p(x)\to\neg\forall y(p(y)\to x\approx y))$ ······ $L1$

④ $\left(\neg\forall y(p(y)\to x\approx y)\to(p(x)\to\neg\forall y(p(y)\to x\approx y))\right)\to$
$\neg\left((p(x)\to\neg\forall y(p(y)\to x\approx y))\to\neg\neg\forall y(p(y)\to x\approx y)\right)$ ······ 换位律

⑤ $\neg(p(x)\to\neg\forall y(p(y)\to x\approx y))\to\neg\neg\forall y(p(y)\to x\approx y)$ ······ MP 3,4

⑥ $\neg\neg\forall y(p(y)\to x\approx y)\to\forall y(p(y)\to x\approx y)$ ······ 双重否定律

⑦ $\neg(p(x)\to\neg\forall y(p(y)\to x\approx y))\to\forall y(p(y)\to x\approx y)$ ······ HS 4,5

⑧ $\forall y(p(y)\to x\approx y)$ ······ MP 2,7

接下来就是继续利用 K_4 和等词公设，就能推出待证结论：

⑨ $\forall y(p(y)\to x\approx y)\to(p(t)\to x\approx t)$ ······ K_4

⑩ $p(t)\to x\approx t$ ······ MP 8,9

⑪ $p(t)$ ······ 前提

⑫ $x\approx t$ ······ MP 10,11

⑬ $\forall y(p(y)\to x\approx y)\to(p(u)\to x\approx u)$ ······ K_4

⑭ $p(u)\to x\approx u$ ······ MP 8,13

至此，得到了两条公式，分别记它们为：

❶ $x\approx t$

❷ $p(u)\to x\approx u$

从这里开始，推理 $p(u)\to u\approx t$：

先利用演绎定理，证明 $E\cup\{t\approx u\}\ \vdash\ u\approx t$，即需要证明 $E\vdash(t\approx u\to u\approx t)$

① $t\approx u$ ······ 前提

② $t\approx u\to(t\approx t\to u\approx t)$ ······ $E3$

③ $t\approx t\to u\approx t$ ······ MP 1,2

④ $t\approx t$ ······ $E1$

⑤ $u\approx t$ ······ MP 3,4

因此有 $t\approx u\to u\approx t$。继续证明：

⑥ $x\approx t$ ······ ❶

⑦ $x\approx t\to(x\approx u\to t\approx u)$ ······ $E3$

⑧ $x\approx u\to t\approx u$ ······ MP 9,10

⑨ $p(u)\to t\approx u$ ······ HS ❷,8

⑩ $t\approx u\to u\approx t$ ······ 已证

⑪ $p(u)\to u\approx t$ ······ HS 9,10

至此，已经证明：

$$E\cup\{p(t),\ p(x)\wedge\forall y(p(y)\to x\approx y)\}\ \vdash\ p(u)\to u\approx t$$

再由 $\exists_2$ 规则，以及概括变元 x 不在 $p(x)\wedge\forall y(p(y)\to x\approx y)$ 以及 $p(u)\to u\approx t$ 中自由出现，立刻可得：

$$E\cup\{p(t),\ \exists x(p(x)\wedge\forall y(p(y)\to x\approx y))\}\ \vdash\ p(u)\to u\approx t$$

3.5 试证明定理 2 的第三条：

$$\vdash_{k^+}\ u\approx v\to(v\approx w\to u\approx w)$$

解：上一题已经由演绎定理证明：$t\approx u\to u\approx t$，在此基础上继续证明该公式：

① $u\approx v\to v\approx u$ ······ 已经证明

② $v\approx u\to(v\approx w\to u\approx w)$ ······ $E3$

③ $u\approx v\to(v\approx w\to u\approx w)$ ······ MP 1,2

证明完成。