011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

记2020科大樱花

——致敬为家国大义挺身而出的勇士

和默默奉献的英雄！

雨骤云积万物喑，绿澎红湃势无垠；

花开岂待三千客，直教春风一片新。

2.5 一阶逻辑的语义

回顾：命题逻辑的语义和一阶语言的结构

❖ **观察** 一阶演算是命题演算的扩展；因此，语义也应是扩展。

❖ **命题语言的语义解释（标准解释）** L(X)的一个标准解释I = (v_0, v)是一个复合映射I：L(X)→{t, f}，其中v_0: X→{t, f}是一个命题变元指派，v是标准赋值（联结词的语义解释）。

❖ **一阶语言K(Y)中公式的结构** 由下列语法范畴组合而成：

1. 个体符号，个体变元x，个体常元a (如苏格拉底s)；
2. 函数符号，$g(x)$表达如x的父亲，苏格拉底的父亲$g(s)$；
3. 谓词符号，P(x)表达集合、性质，P(x, y)…表达关系；
4. 量词符号，全称量词∀，存在量词∃。

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定义(一阶结构)** 设K(Y)为任意一阶语言。K(Y)的一个一阶结构是一个三元组M=(**D**, **F**, **P**)，其中**D**是一个非空集，称为M的论域，**D**的元素称为个体；**F**是**D**上函数的集合；**P**是**D**上关系的非空集；使得：

1. 对K(Y)中每一个个体常元a，**D**中有一个个体a^M；
2. 对K(Y)中每一个n(≥0)元函数符号g，**F**中有一个n元函数

$$g^M: \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$$

3. 对K(Y)中每一个n(≥0)元谓词符号P，**P**中有一个n元关系

$$P^M \subseteq \mathbf{D}^n$$

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **例(一阶结构)** 设一阶语言$K_0(Y)$不包含函数符号，只包含一个个体常元c和一个二元谓词符号P。取M=(N, $\varnothing$, $\{>\}$)，其中N是自然数集合，>是自然数集合上的“大于”关系，并且：

1. 对$K_0(Y)$中的个体常元c，令c^M为自然数0；
2. 由于$K_0(Y)$没有函数符号，无需考虑函数符号的解释；
3. 对$K_0(Y)$的二元谓词符号P，令P^M为二元关系>。

则依定义，M=(N, $\varnothing$, $\{>\}$)是一阶语言$K_0(Y)$的一个一阶结构。

◆ **观察** 一个一阶语言K(Y)可以有多个不同的一阶结构。

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定义(个体变元指派)** 对任意一阶语言K(Y)及其任意一阶结构M=(**D**, **F**, **P**)，K(Y)的一个相对于M的个体变元指派是一个映射 V: Y→**D**。

❖ **例(续)** 考虑一阶语言K_0(Y)和它的一个结构M=(N, ∅, {>})。考虑K_0(Y)公式P(x, c)。由于$c^M = 0$ (即c在M中解释为0)，$P^M = >$ (P在M中解释为二元关系>)，所以公式P(x, c)在M中解释为$x > 0$。反之，数学公式$x > 0$在一阶逻辑中被形式化为P(x, c)。于是，如果一个个体变元指派V: Y→**D**给x的指派$V(x) \geq 1$，则公式P(x, c)在M和V下是真的；否则是假的。

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定义(一阶解释)** 任意一阶语言K(Y)的一个一阶解释是一个复合映射I=(M, V, v)，其中M=(**D, F, P**)是K(Y)的一个一阶结构，V是K(Y)的一个相对于M的个体变元指派，v是标准赋值，使得：

1. 对任何个体变元$x \in$ Y，I(x)=V(x)；
2. 对任何个体常元a，I(a)=a^{M}；
3. 对任何函数符号g，I(g)=g^{M}；
4. 对任何项$g(t_1, \ldots, t_n)$，$\mathrm{I}(\underbrace{g(t_1, \ldots, t_n)}_{\text{一个K(Y)项}})=\overbrace{g^{\mathrm{M}}}^{\text{F中函数}}(\underbrace{\mathrm{I}(t_1), \ldots, \mathrm{I}(t_n)}_{\text{D中n个个体}})$；

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定义(一阶解释-续)**

5. 对任何谓词符号P，$I(P)=P^M$；
6. 对任何原子公式$P(t_1, \ldots, t_n)$，
$$I(P(t_1, \ldots, t_n))=\begin{cases} t, \text{如果}(I(t_1), \ldots, I(t_n))\in P^M \\ f, \text{否则}; \end{cases}$$
7. 对任何公式p，
$$I(\neg p)=\begin{cases} t, \text{如果}I(p)=f; \\ f, \text{如果}I(p)=t; \end{cases}$$
8. 对任何公式p, q，
$$I(p\rightarrow q)=\begin{cases} f, \text{如果}I(p)=t\text{并且}I(q)=f; \\ t, \text{否则}; \end{cases}$$

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定义(一阶解释-续)**

9. 对任何公式p和个体变元x,

$$I(\forall x p) = \begin{cases} t, \text{如果对所有} d \in \mathbf{D} \text{有} I_{x/d}(p)=t; \\ f, \text{否则}; \end{cases}$$

其中I的变体$I_{x/d}$由V的变体$V_{x/d}$构成：

$$I_{x/d} =_{df} (M, V_{x/d}, v), \quad V_{x/d}(y) =_{df} \begin{cases} d, \text{如果} y=x; \\ V(y), \text{如果} y \neq x 。\end{cases}$$

❖ **观察** 一个全称量化公式$\forall x p$在一个一阶解释I下为真，如果公式p在I的所有变体解释$I_{x/d}$下为真。

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **观察** 给定一阶解释I=(M, *V*, *v*)，其中M=(**D**, **F**, **P**)是K(Y)的一个一阶结构，*V*是K(Y)的一个相对于M的个体变元指派，*v*是标准赋值。K(Y)各类语法对象在I=(M, *V*, *v*)下的语义解释：

1. 个体常元*a*解释为a^{M}，用M解释；
2. 函数符号*g*解释为g^{M}，用M解释；
3. 谓词符号P解释为P^{M}，用M解释；
4. 个体变元*x*解释为*V*(*x*)，用*V*解释；
5. 全称量词：$\forall xp$用I=(M, *V*, *v*)的所有变体解释$I_{x/d}(p)$；
6. 联结词用标准赋值*v*解释。

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定理(一阶解释的良定义性)** 对任何一阶解释I和K(Y)公式p，存在唯一的$u \in \{t, f\}$，使得I(p)=u。

◆ **证明** 自修。

◆ **注释** 任何一阶公式p在任何一阶解释I=(M, V, v)下，有唯一确定的真值。

2.5 一阶逻辑的语义

- ❖ 例(续) 在一阶语言$K_0(Y)$和它的一个结构$M=(N, \varnothing, \{>\})$中，考虑$K_0(Y)$公式$\forall x P(x, c)$的解释。
- ◆ 已知$c^M = 0$ (c在M中解释为0)，$P^M = >$ (P在M中解释为二元关系>)，公式$P(x, c)$在M中解释为$x>0$。
- ◆ 于是，公式$\forall x P(x, c)$在M中解释为：对所有自然数d，$d>0$。
- ◆ 依一阶解释的定义，$\forall x P(x, c)$为真，当且仅当对所有自然数d，变体解释$I_{x/d}(P(x, c))=t$。
- ◆ 当$d=0$时，$I_{x/d}(P(x, c))=f$。所以在M中$\forall x P(x, c)$是假的。

2.5 一阶逻辑的语义

习题

2.5 p.84: 1.