



011094, 中国科学技术大学, 2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

第二章 一阶逻辑

回 顾

❖ 逻辑研究什么？三个回答：

1. 经典逻辑的基础部分：演绎推理的正确形式

$$\Gamma \vdash p; \Gamma \models p$$

2. 经典逻辑的递归论部分/计算机科学：能行过程/程序

$\Gamma \vdash p$ 等等能行计算的编程实现

3. AI逻辑：大规模问题的知识表示和自动推理

构建表达领域/常识知识的大型知识体并自动完成能行推理

2.1 命题内部结构的逻辑表达

❖ 例 考虑下列推理:

所有人会死 x_1

苏格拉底的父亲是人 x_2

苏格拉底的父亲会死 x_3

◆ 问题1: 上述推理是不是保真的? ——是!

◆ 问题2: 上述推理能不能在L中表达? ——不能! 证: 在L中, 上述推理表达为 $\{x_1, x_2\} \vdash x_3$? 因为 $\{x_1, x_2\} \models x_3$ 不成立, 所以 $\{x_1, x_2\} \vdash x_3$ 不成立。因此, 一个保真推理在L中无法表达。

2.1 命题内部结构的逻辑表达

❖ 观察 保真推理所依据的一些逻辑结构没有在命题语言中表达出来。因此，需要更细致的表达语言，能够表达下列语法范畴：

1. 个体，如苏格拉底，记为 s ；
2. 函数，如 x 的父亲，记为 $g(x)$ ，苏格拉底的父亲 $g(s)$ ；
3. 集合，如人，用一元谓词表示，记为 $H(x)$ ；
4. 性质，如 x 会死，用一元谓词表示，记为 $D(x)$ ；
5. 关系，如 x 和 y 是朋友，用多元谓词表示，记为 $F(x, y)$ ；
6. 量词，所有，记为 \forall 。

2.1 命题内部结构的逻辑表达

❖ 例(续) 上述推理表达为:

$$\forall x(H(x) \rightarrow D(x))$$

$$H(g(s))$$

$$D(g(s))$$

◆ 观察 直观上, 从前提 $\forall x(H(x) \rightarrow D(x))$ 可以推出 $H(x) \rightarrow D(x)$; 又推出 $H(g(s)) \rightarrow D(g(s))$, 又推出 $D(g(s))$ 。

❖ 观察 利用新语言的一阶逻辑的表达能力和推理能力真强于命题逻辑。

2.2 一阶谓词演算K的构成

2.2 一阶谓词演算的构成

I 一阶语言

I1 符号表

I1a 逻辑符号

- 个体变元 x_1, x_2, \dots (可数无穷多个)
- 基本联结词 \neg, \rightarrow
- 量词 \forall

◆ 注释 逻辑符号代表逻辑概念，其含义不随应用领域而改变。

2.2 一阶谓词演算的构成

I1b 非逻辑符号

- 个体常元 a_1, a_2, \dots (可数无穷多个)
- 函数符号 f_1^1, f_2^1, \dots (一元函数符号, 可数无穷多个)
 f_1^2, f_2^2, \dots (二元函数符号, 可数无穷多个)
 \dots
- 谓词符号 P_1^0, P_2^0, \dots (0元谓词符号, 可数无穷多个)
 P_1^1, P_2^1, \dots (一元函数符号, 可数无穷多个)
 \dots
 (至少有一个谓词符号)

2.2 一阶谓词演算K的构成

I1c 辅助符号 (,)

◆ 注释 0元谓词符号即命题符号。例如

1. 苏格拉底是人。当需要显式表达主语苏格拉底和谓语是人时，表达为 $H(s)$ ，其中 $H(x)$ 为一元谓词“ x 是人”；当不需要显式表达苏格拉底和谓语时，表示为 H ， H 为0元谓词。

2. 苏格拉底和他的父亲是朋友，需要显式表达其中个体和关系时，表达为 $F(s, g(s))$ ；不需要显式表达时，则表达为 F 。

2.2 一阶谓词演算K的构成

I2 形成规划

I2a 项

1. 个体变元和个体常元是项；
2. 若 g 是 n 元函数符号， t_1, t_2, \dots, t_n 是项，则 $g(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是项；
3. 只有经过有限次应用以上步骤生成的是项。

◆注释 个体是数学中“数”的推广；函数将被解释为个体到个体的映射；项将被解释为个体。例如， $g(x)$ 是从人到人的映射，所以 $g(s)$ 也是一个人。

2.2 一阶谓词演算K的构成

I2b 公式

1. 若 P 是 n (≥ 0) 元谓词符号, t_1, t_2, \dots, t_n 是项, 则 $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是公式, 称为原子公式;
2. 若 p, q 是公式, 则 $\neg p$ 和 $p \rightarrow q$ 是公式, 分别称为否定式和蕴涵式;
3. 若 p 是公式, x 是个体变元, 则 $\forall x p$ 是公式, 称为量化公式;
4. 只有经过有限次应用以上步骤生成的是公式。

◆注释 谓词将被解释为个体到真值的映射; 不含个体变元的公式将为解释为命题; 含个体变元的公式将被解释为命题函数。

2.2 一阶谓词演算K的构成

❖ 例 命题“并非雪是黑的等值于雪是白的 \vee 雪是红的 $\vee \cdots \vee$ 雪是无色的”。在命题逻辑中表达为：

$$\neg x_1 \leftrightarrow (x_2 \vee x_3 \vee \dots \vee x_k \vee \dots)$$

在一阶逻辑中表达为：

$$\neg C(\text{snow}, \text{black}) \leftrightarrow \\ (C(\text{snow}, \text{white}) \vee C(\text{snow}, \text{red}) \vee \dots \vee \forall x \neg C(\text{snow}, x))$$

◆ 相关的领域知识中有公认的命题如“物体的颜色包括黑、白、红、……、无色”等，需要作为推理前提。