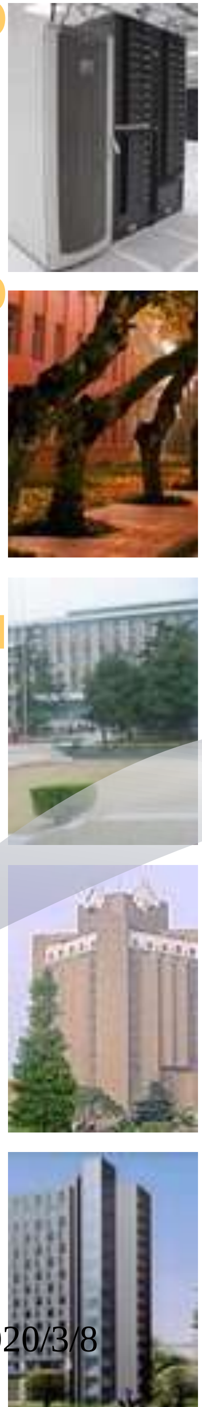
Computer Science and Technology



运筹学基础

讲者：顾乃杰 教授、黄章进 副教授

计算机科学与技术学院

2020-02-17

线性规划及单纯形法

Chap.2 Linear Programming & Classical Simplex Methods

2.4 单纯形法的计算步骤

- 2.4.1 单纯形表
- 2.4.2 计算步骤

2.4.1 单纯形表

- 为了便于理解计算关系，现设计一种计算表，称为**单纯形表**，其功能与增广矩阵相似
- 首先，将约束方程组(2-22)式与目标函数组成 ***n*+1 个变量**，***m*+1个方程**的方程组：

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad + a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
x_2 \qquad\qquad + a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ddots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \\
-z + c_1x_1 + \cdots + c_mx_m + c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_nx_n &= 0
\end{aligned}
$$

2.4.1 单纯形表

- 为了便于迭代运算，可将上述方程组写成增广矩阵形式

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
-z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & b \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\
1 & \boxed{c_1} & \boxed{c_2} & \boxed{\cdots} & \boxed{c_m} & c_{m+1} & \cdots & c_n & 0
\end{array}\right)
$$

$$-z + c_1 x_1 + \cdots + c_m x_m + c_{m+1} x_{m+1} + \cdots + c_n x_n = 0$$

2.4.1 单纯形表

- 若将 z 看作不参与基变换的基变量，它与$x_1,x_2,\ldots,x_m$的系数构成一个基。这时可采用行初等变换将$c_1,c_2,\ldots,c_m$变换为零，使其对应的系数矩阵为单位矩阵。得到：

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
-z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & b \\
\hline
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\
1 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\cdots} & \boxed{0} & c_{m+1}-\sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,m+1} & \cdots & c_n-\sum_{i=1}^{m} c_i a_{in} & -\sum_{i=1}^{m} c_i b_i
\end{array}
$$

2.4.1 单纯形表

- 根据得到的增广矩阵设计初始**单纯形表**：

$c_{j\rightarrow}$			c_1	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_n	θ_i
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	b	x_1	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n	
c_1	x_1	b_1	1	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	a_{1n}	θ_1
c_2	x_2	b_2	0	$\cdots$	0	$a_{2,m+1}$	$\cdots$	a_{2n}	θ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_m	x_m	b_m	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	a_{mn}	θ_m
$c_j - z_j$			0	$\cdots$	0	$c_{m+1}-\sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,m+1}$	$\cdots$	$c_n-\sum_{i=1}^{m} c_i a_{in}$	

- X_B 列中填入基变量，这里是x_1，x_2,…，x_m
- C_B 列中填入基变量的价值系数，这里是$c_1,c_2,\ldots,c_m$
- B 列中填入约束方程组右端的常数
- C_j 行中填入变量的价值系数$c_1,c_2,\ldots,c_n$
- Θ_i 列的数字是在确定换入变量后，按 θ 规则计算的比值
- 最后一行称为检验数行，对应各非基变量的检验数；

2.4.2 计算步骤

1) 找出初始可行基，确定初始基可行解，建立初始单纯形表；

2) 计算各非基变量的检验数，若 $\sigma_j \le 0$，$j=m+1,\cdots,m+n$，则已得到最优解，停止计算，否则转入步骤 3)；

3) 在 $\sigma_j>0$，$j=m+1,\cdots,m+n$ 中，若有某个 σ_k 对应 x_k 的系数列向量 $P_k \le 0$，则此问题是无界，停止计算，否则转入步骤 4)；

4) 根据 $\max(\sigma_j>0)=\sigma_k$，确定换入变量 x_k，按θ规则计算确定换出变量 x_l，转入步骤 5)；

$$\theta = \min\left(\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0\right) = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

5) 以 a_{lk} 为主元素进行迭代，得到新的单纯形表。重复 2)~ 5)，直到终止。

2.4.2 计算步骤

- 现用例1的标准型来说明上述计算步骤

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad + x_4 & = 16 \\ \qquad 4x_2 \qquad\qquad + x_5 & = 12 \\ x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 \geq 0 \end{cases}$$

  - 取松弛变量 x_3,x_4,x_5 为基变量，它对应的单位矩阵为基。这就得到初始基可行解 $X^{(0)}=(0,0,8,16,12)^T$

2.4.2 计算步骤

将有关数字填入表中，得到初始单纯形表

	$c_j\rightarrow$		2	3	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	8	1	2	1	0	0	4
0	x_4	16	4	0	0	1	0	–
0	x_5	12	0	[4]	0	0	1	3
	c_j-z_j		2	3	0	0	0	

- 在C_B列填入初始基变量的价值系数，它们都为零。
- 计算非基变量的检验数

$$\sigma_1=c_1-z_1=2-(0\times1+0\times4+0\times0)=2$$

$$\sigma_2=c_2-z_2=3-(0\times2+0\times0+0\times4)=3$$

- 因检验数都大于零，且 P_1，P_2 有正分量存在。

2.4.2 计算步骤

将有关数字填入表中，得到初始单纯形表

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	8	1	2	1	0	0	4
0	x_4	16	4	0	0	1	0	–
0	x_5	12	0	[4]	0	0	1	3
	$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	

- 由**max(σ$_1$,σ$_2$)=max(2,3)=3**，确定对应的变量 x_2为换入变量
- 计算θ：
$$\theta = \min_i \left(\frac{b_i}{a_{i2}} \middle| a_{i2} > 0 \right) = \min\left(\frac{8}{2}, -, \frac{12}{4} \right) = 3$$
- 所在行对应的变量x_5为换出变量，x_2 所在列和 x_5 所在行的交叉处 [4] 称为主元素 。

2.4.2 计算步骤

– 以[4]为主元素进行旋转运算或迭代运算，即初等行变换，使 P_2变换为 $(0,0,1)^T$，在 X_B 列中用 x_2 替换 x_5，于是得到新表：

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	[1]	0	1	0	$-1/2$	2
0	x_4	16	4	0	0	1	0	4
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$	–
	$c_j - z_j$		2	0	0	0	$-3/4$	

- 新的基可行解 $X^{(1)}=(0, 3, 2, 16, 0)^T$，目标函数值取为 $z = 9$
- 取换出变量为x_1为换入变量，x_3为换出变量

2.4.2 计算步骤

– 以[1]为主元素进行迭代运算，在X_B列中用 x_1 替换 x_3，得到新表

	$c_{j\to}$		2	3	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	2	1	0	1	0	$-1/2$	–
0	x_4	8	0	0	-4	1	[2]	4
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$	12
	c_j-z_j		0	0	-2	0	$1/4$	

– 因存在检验数 1/4 大于零，且 P_5 有正分量存在，确定 x_5为换入变量

– 计算θ值，确定 x_4 为换出变量，以[2]为主元素进行迭代运算，在X_B列中用 x_5 替换 x_4，得到新表

2.4.2 计算步骤

– 以[2]为主元素进行迭代运算,在X_B列中用x_5替换x_4,得到新表

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	
0	x_5	4	0	0	−2	1/2	1	
3	x_2	2	0	1	1/2	−1/8	0	
	$c_j - z_j$		0	0	−3/2	−1/8	0	

– 最后一行的所有检验数都已为负或零，于是得到最优解

$X^* = X^{(3)} = (4, 2, 0, 0, 4)^T$，目标函数的最大值 $z^* = 14$

2.5 单纯形法的进一步讨论

- 2.5.1 人工变量法
- 2.5.2 无可行解的判别规则
- 2.5.3 退化
- 2.5.4 检验数的几种表示形式
- 2.5.5 单纯形法小结

2.5.1 人工变量法

- 单纯形法的计算方法是先求出一个初始基可行解，判断它是否最优，然后通过反复迭代而最终得到最优解（或无最优解）的结论。
  - 当变量较少时，可行基可以通过观察得到
  - 通过在约束条件的不等式两边加入松弛变量或减去剩余变量，将不等式变为等式。在上述化为标准型的过程中，方程组的左边多出了一组大小为m×m的单位矩阵 I，很显然的，这是一组可行基
- 问题：在实际问题中，有些模型的约束条件中含有一个或多个等式条件，在变为标准型之后，仍然无法得到上述的大小为m×m的单位矩阵*I*

人工变量法

- 为了易于得到一组基向量和初始基可行解，在约束条件的等式左端加一组虚拟变量，得到一组基变量。以上这种人为添加的变量称为人工变量，构成的基称为人工基。
  - 分别给每一个约束方程加入人工变量$x_{n+1},\ldots,x_{n+m}$，得到

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m \end{cases}$$

  - 人工变量与决策变量、松弛（剩余）变量有着本质的区别，若线性规划有最优解，人工变量必须为0，以保证它们对原约束条件无任何影响。
  - 为了将人工变量从最终的解中剥离出来，我们介绍以下两种方法——大M法和两阶段法

1. 大M法

- 在约束条件中加入人工变量后，要求人工变量对目标函数取值不受影响。
- 假定人工变量在目标函数中价值系数为**-M**（**M**为任意大的正数）

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=n+1}^{n+m} (-M) x_j$$

  - 目标函数要实现最大化时，必须把人工变量从基变量换出
    - 只要人工变量>0，所求的目标函数最大值就是一个很小的数。
  - 实现最小化呢？

$$\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=n+1}^{n+m} M x_j$$

1. 大M法

- 例8. 用大M法求解线性规划问题

$$\min z=-3x_1+x_2+x_3$$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3\le 11 \\ -4x_1+x_2+2x_3\ge 3 \\ -2x_1+x_3=1 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases}$$

- 解：在上述问题的约束条件中加入松弛变量 x_4，剩余变量 x_5，人工变量x_6, x_7，得到

$$\min z=-3x_1+x_2+x_3+0x_4+0x_5+Mx_6+Mx_7$$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=11 \\ -4x_1+x_2+2x_3-x_5+x_6=3 \\ -2x_1+x_3+x_7=1 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\ge 0 \end{cases}$$

1. 大M法

$$z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j \qquad (2-27)$$

- 因本例的目标函数是求**min**，所以用所有$\sigma_j = c_j - z_j \geq 0$来判别目标函数是否实现了最小化。
  - 建立初始单纯形表：

$c_j \to$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
M	x_7	1	-2	0	[1]	0	0	0	1	1
$c_j - z_j$			-3+6M	1-M	1-3M	0	M	0	0	

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

1. 大M法

- 由最终表，得到最优解：

$x_1=4, x_2=1, x_3=9$，$x_4=x_5=x_6=x_7=0$； 目标函数$z=-2$

$c_j \to$			-3	1	1	0	0	M	M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	10	3	-2	0	1	0	0	-1	
M	x_6	1	0	[1]	0	0	-1	1	-2	1
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
c_j-z_j			-1	1-M	0	0	M	0	3M-1	
0	x_4	12	[3]	0	0	1	-2	2	-5	4
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
c_j-z_j			-1	0	0	0	1	M-1	M+1	
-3	x_1	4	1	0	0	1/3	-2/3	2/3	-5/3	
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
1	x_3	9	0	0	1	2/3	-4/3	4/3	-7/3	
c_j-z_j		2	0	0	0	1/3	1/3	M-1/3	M-2/3	

2. 两阶段法

- 第一阶段：不考虑原问题是否存在基可行解；给原线性规划问题加入人工变量，并构造仅含人工变量的目标函数和要求实现最小化。

目标函数 $\min \omega = x_{n+1} + \cdots + x_{n+m} + 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n$

约束条件
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{m}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

  - 用单纯形法求解上述模型。若得到最小值**w=0**，说明原问题存在基可行解，可以进行第二段计算。
  - 否则原问题无可行解，应停止计算。

2. 两阶段法

- 第二阶段：从第一阶段计算得到的最终表中，去掉人工变量；将目标函数行的系数，换为原问题的目标函数系数，作为第二阶段计算的初始表。
- 例9. 试用两阶段法求解例8的线性规划问题
- 解：构造第一阶段的数学模型，其中x_6和x_7为人工变量：

目标函数 $\min \omega = x_6 + x_7$

约束条件 $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0 \end{cases}$$

  – 用单纯形表法求解，第一阶段求得的结果是$w=0$，最优解是

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=1,\ x_4=12,\ x_5=x_6=x_7=0$$

  – 因人工变量$x_6=x_7=0$，所以$(0，1，1，12，0)^T$是原线性规划问题的基可行解。于是可以进行第二阶段运算。

第一阶段

- 第一阶段的单纯形表:

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
1	x_7	1	-2	0	[1]	0	0	0	1	1
c_j-z_j			6	-1	-3	0	1	0	0	
0	x_4	10	3	-2	0	1	0	0	-1	-
M	x_6	1	0	[1]	0	0	-1	1	-2	1
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	-
c_j-z_j			0	-1	0	0	1	0	3	
0	x_4	12	3	0	0	1	-2	2	-5	
0	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
0	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
c_j-z_j			0	0	0	0	0	1	1	

第二阶段

- 将第一阶段的最终表中的人工变量x_6和x_7列删除，并在c_j行和C_B列填入原问题目标函数的价值系数，进行第二阶段计算。
  - 最优解为：$x_1=4, x_2=1, x_3=9$，目标函数值$z = -2$

$c_j \to$			-3	1	1	0	0	θ i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	12	[3]	0	0	1	-2	4
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	-
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	-
c_j-z_j			-1	0	0	0	1	
-3	x_1	4	1	0	0	1/3	-2/3	
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	
1	x_3	9	0	0	1	2/3	-4/3	
c_j-z_j			0	0	0	1/3	1/3	

2.5.2 无可行解的判别规则

- 在线性规划问题中引入人工变量后，以人工变量$x_{n+1},\cdots,x_{n+m}$为基变量，令非基变量$x_1,\ldots,x_n$为零，便可得到一个初始基可行解$X^{(0)}=(0,0,\ldots,0,b_1,b_2,\ldots,b_m)^T$
- 因为人工变量是后加入到原约束条件中的虚拟变量，要求经过基变换将它们从基变量中逐个替换出来
  - 基变量中不再含有非零的人工变量，这表示原问题有解。
  - 若在最终表中当所有$c_j-z_j\leq0$，而在基变量中还有某个非零人工变量，这表示原问题无可行解。

2.5.3 退化

- 退化
  - 单纯形法计算中用θ规则确定换出变量时，有时存在两个以上相同的最小比值，这样在下一次迭代中就有一个或几个基变量等于0，这就出现退化解
  - 特例：有可能出现计算过程循环，永远达不到最优解。
  - **Beale例**

$$\min\ z = -\left(\frac{3}{4}\right)x_4 + 20x_5 - \left(\frac{1}{2}\right)x_6 + 6x_7$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + \left(\frac{1}{4}\right)x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\ x_2 + \left(\frac{1}{2}\right)x_4 - 12x_5 - \left(\frac{1}{2}\right)x_6 + 3x_7 = 0 \\ x_3 + x_6 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

退化

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
x_1	1	0	0	1/4*	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	1/2	-12	-1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
-z	0	0	0	-3/4	20	-1/2	6	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
x_4	4	0	0	1	-32	-4	36	0
x_2	-2	1	0	0	4*	3/2	-15	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
-z	3	0	0	0	-4	-7/2	33	

– 因每次比值均为0，随机选取，经过6次迭代后，得到单纯形表同初始表相同：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
x_1	1	0	0	1/4	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	1/2	-12	-1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
-z	0	0	0	-3/4	20	-1/2	6	

退化

- 上述循环中，所有的表都相应于极点$(0,0,1,0,0,0,0)^T$，但基不同而已，若按同样顺序进行变换，单纯形表将会循环不止，而不触及最优点。
- 1974年勃兰特(Bland)提出规则：
  - 选取c_j-z_j>0中下标最小的非基变量x_k为换入变量，即

    $k = \min(j \mid c_j\text{-}z_j>0)$
  - 当按θ规则计算存在两个或两个以上最小比值时，选取下标最小的基变量为换出变量。

Bland规则使得单纯形法能处理著名的Beale反例，并证明了单纯形法经有限次迭代必能求出最优解或肯定该问题无最优解

退化

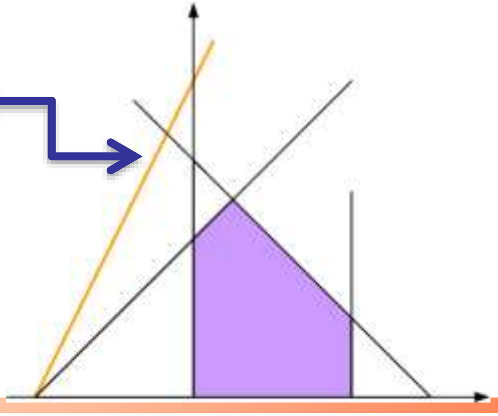
- 多余性
  - 多余性包括多余约束和零变量，其中多余约束包括几何多余和数学多余，它们都可以从问题中剔除而不影响解的结果，这对解大问题具有重要意义。

目前在先进的解大型LP问题的软件中，都以其设置的预处理功能，在求解前尽可能的消除多余约束和零变量，以减少计算机内存压力和加快计算速度

  - 几何多余：消除一个约束条件并不改变可行解的解域

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} \boxed{-2x_1 + x_2 \le 4} \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



退化

– 数学多余：一个约束等式能表示成其他约束等式的线性组合，则该约束式是数学多余的，可以从问题中剔除。

$$\min z = -3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_3 = 6 \\ x_3 \le 2 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

为第四个约束条件引进松弛变量x_4，则矩阵(A,b)变为：

$$(A,b) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- 其中第三行可以表示为第一行和第二行的和，因此矩阵不是满秩的，前三个当中任一个是多余的，可以去掉。

退化

- 零变量：一个变量都以零值满足约束条件方程的每个解，则该变量称为零变量，该变量的非负条件和在约束方程系数矩阵中的相应的系数列可以从问题中剔除。

$$s.t.\begin{cases} 2x_1-2x_2+4x_3+3x_4=6 & (1) \\ x_1-3x_2+2x_3+x_4=3 & (2) \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0 \end{cases}$$

- (1)-2*(2)得：

$$s.t.\begin{cases} 4x_2+x_4=0 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0 \end{cases}$$

- 因此在任何解中，这两个变量必为零。
- 推广可知，显然若某些（或全部）约束条件方程的一个线性组合使右边向量为零，而左边系数非负，则相应为正系数的变量必为零变量。

2.5.4 检验数的几种表示形式

- 设$x_1,x_2,\ldots,x_m$为约束方程的基变量，于是可得

$$x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

将它们代入目标函数后，可有两种形式：

$$z = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}) x_j$$

$$= z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - z_j) x_j \qquad (2-37)$$

$$= z_0 - \sum_{j=m+1}^{n} (z_j - c_j) x_j \qquad (2-38)$$

检验数的几种表示形式

- 要求目标函数实现**最大化**时，
  - 若用(2-37)式来分析，就需要用 $c_j-z_j\le 0$，（$j=1,2,\dots,n$）作为判别准则
  - 若用(2-38)式来分析，就需要用 $z_j-c_j\ge 0$，（$j=1,2,\dots,n$）作为判别准则
- 要求目标函数实现**最小化**时，
  - 可用(2-37)式或(2-38)式来分析，这时可分别用 $c_j-z_j\ge 0$ 或 $z_j-c_j\le 0$，（$j=1,2,\dots,n$）来判别目标函数是否已达到最小

标准型 \ 检验数	$\max z = CX$ $AX = b, X \ge 0$	$\min z = CX$ $AX = b, X \ge 0$
$c_j - z_j$	≤ 0	≥ 0
$z_j - c_j$	≥ 0	≤ 0

2.5.5 单纯形法小结

- (1) 根据实际问题给出数学模型，进行标准化

变量	$x_j \geqslant 0$		不需要处理
	$x_j \leqslant 0$		令 $x_j' = -x_j$；$x_j' \geqslant 0$
	x_j 无约束		令 $x_j = x_j' - x_j''$；$x_j', x_j'' \geqslant 0$
约束条件	$b \geqslant 0$		不需要处理
	$b < 0$		约束条件两端同乘-1
	$\leqslant$		加松弛变量 x_{si}
	$=$		加人工变量 x_{ai}
	$\geqslant$		减去剩余(松弛)变量 x_{si}，加人工变量 x_{ai}
目标函数	$\max z$		不需要处理
	$\min z$		令 $z' = -z$，求 $\max z'$
	加入变量的系数	松弛变量 x_{si}	0
		人工变量 x_{ai}	$-M$

单纯形法小结

(2) 对目标函数求max的线性规划问题，用单纯形法计算的步骤：

最优解判别规则：

若 $X^{(0)}$ 为对应于基 B 的一个基可行解：

1）如果对于 $j=m+1,\dots,n$，有 $\sigma_j\leq 0$，则 $X^{(0)}$ 为最优解。

2）如果对于 $j=m+1,\dots,n$，有 $\sigma_j\leq 0$，又存在某个非基变量的检验数 $\sigma_{m+k}=0$，则线性规划问题有无穷多最优解。

3）如果有一个 $\sigma_{m+k}>0$，并且对 $i=1,2,\dots,m$，有 $a'_{i,m+k}\leq 0$，那么该线性规划问题具有无界解(或称无最优解)。