概率论与数理统计 B　第五周作业　3 月 17 日 周二

PB18151866 龚小航

2.63. 设随机变量 X 的分布律为

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

试求随机变量 $Y = cos(2X-\pi)$ 和 $Z = |X-\frac{\pi}{2}|$ 的分布律

解：由于X是离散型随机变量，因而Y、Z的取值都是有限个，直接列表即可得解。

带入X，算出Y、Z，得：

$$Y(0) = -1\ ;\quad Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\ ;\quad Y(\pi) = -1\ ;\quad Y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$$

$$Z(0) = \frac{\pi}{2}\ ;\quad Z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\ ;\quad Z(\pi) = \frac{\pi}{2}\ ;\quad Z\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \pi$$

直接列表即得其分布律：

Y	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Z	0	$\frac{\pi}{2}$	π
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

3.22. (2010 年全国考研试题)设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x,y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2},\quad x,y \in R.$$

求常数 A 及条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$.

解：二维概率密度函数满足在全平面内的积分为 1：换元，令$u = x, t = x-y$，计算其雅可比行列式：

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad and \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-2x^2+2xy-y^2}\,dx\,dy = -1 * A\int_{\infty}^{-\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-t^2}\,du\,dt = \pi A \equiv 1$$

$$\Rightarrow\quad A = \frac{1}{\pi}$$

再计算其条件概率：

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}\,dy} = \frac{e^{-x^2+2xy-y^2}}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2+2xy-y^2}\,dy} = \frac{e^{-(x-y)^2}}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(y-x)^2}\,d(y-x)}$$

$$= \frac{e^{-(x-y)^2}}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\,dt} = \frac{e^{-(x-y)^2}}{\sqrt{\pi}}$$

3.29. (2013 年全国考研试题) 设 (X,Y) 是二维随机变量, X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases} 3x^2, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

在给定 $X=x(0<x<1)$ 的条件下, Y 的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} \dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)$;

(2) Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)$.

解:(1) 直接由条件概率的意义就可以写出,在$0<y<x<1$时,满足:

$$f(x,y)=f(y|x)*f(x)=\frac{3y^2}{x^3}*3x^2=\frac{9y^2}{x}$$

$$\Rightarrow\quad f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{9y^2}{x}, & 0<y<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 由边缘分布的意义,直接可以写出,在$0<y<x<1$时,满足:

$$f(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx=\int_y^1\frac{9y^2}{x}dx=-9y^2\ln y$$

$$\Rightarrow\quad f(y)=\begin{cases} -9y^2\ln y, & 0<y<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

3.30. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

而随机变量 Y 服从 $(0,X)$ 上的均匀分布,求

(1) (X,Y) 的联合分布;

(2) 随机变量Y的分布

解:(1) Y 服从 $(0,X)$ 上的均匀分布,所以$f(y)=\frac{1}{X}$,因此,在$0<y\le x$时,有:

$$f(x,y)=f(x|y)f(y)=xe^{-x}*\frac{1}{x}=e^{-x}$$

$$\Rightarrow\quad f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y\le x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 直接对x进行积分就能得到,在$0<y\le x$时,有:

$$f(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx=\int_y^{\infty}e^{-x}\,dx=e^{-y}$$

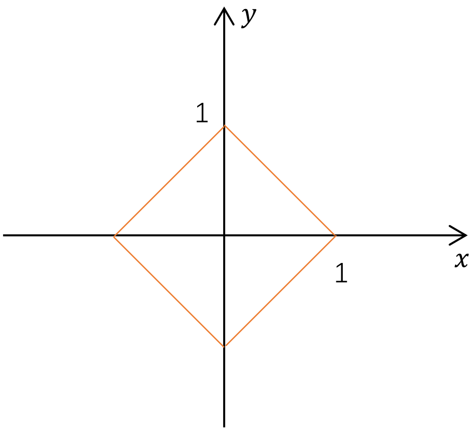
$$\Rightarrow\quad f(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y\ge 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

3.37. 设随机向量 (X,Y) 服从 $\{(x,y)\colon |x+y|\le 1, |x-y|\le 1\}$内的均匀分布,

(1) 试求出 X 和 Y 的边缘分布;

(2) X 和 Y 是否相互独立?

(3) 求在 $X=x\,(0<x<1)$ 时 Y 的条件密度函数.



解:(1) 如右图,在橙色方框内(X,Y)均匀分布。该区域面积

$$S=4*\frac{1}{2}*1*1=2$$

由此可写出(X,Y)的联合分布:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x+y|\le 1, |x-y|\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

由于x,y完全对称,先写x的边缘分布:

① $-1\le x\le 0$时,积分上界$1+x$,下界$-x-1$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\int_{-x-1}^{1+x}\frac{1}{2}dy=1+x$$

② $0<x\le 1$时,积分上界$1-x$,下界$x-1$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\int_{x-1}^{1-x}\frac{1}{2}dy=1-x$$

综上,X的边缘分布为:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1 \ or\ \ x>1\\ 1+x, & -1\le x\le 0\\ 1-x, & 0<x\le 1\end{cases}$$

由对称性,直接写出Y的边缘分布:

$$f(y)=\begin{cases}0, & y<-1 \ or\ \ y>1\\ 1+y, & -1\le y\le 0\\ 1-y, & 0<y\le 1\end{cases}$$

(2) 显然在橙色框内的任一象限内(除去个别点),都有 $f(x,y)\ne f(x)f(y)$,即X 和Y不独立。

(3) 直接由条件概率的意义,可以得到,在 $x-1\le y\le 1-x$ 时,有:

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-x}=\frac{1}{2(1-x)}$$

$$\Rightarrow\quad f(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-x)}, & x-1\le y\le 1-x\\ 0, & 其他\end{cases}\quad (0<x<1)$$

3.58. 设随机向量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4}, & |x|<1,|y|<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明 X,Y 不独立,但是 X^2,Y^2 是相互独立的.

解：先证明X,Y 不独立，计算其边缘分布：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}dy=\frac{1}{2}\quad(-1\le x\le 1)$$

由x,y的对称性，直接写出y的边缘分布：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}dx=\frac{1}{2}\quad(-1\le y\le 1)$$

因此，由独立的定义可知，在$|x|<1,|y|<1$时：

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1+xy}{4}\neq f(x)f(y)$$

所以随机变量X,Y不独立。

再证明X^2,Y^2 相互独立。在$|x|<1,|y|<1$时：

$$F_{X^2}(x)=P(X^2\le x)=P\left(-\sqrt{x}\le X\le\sqrt{x}\right)=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(t)\,dt$$

对等式两边求导，得：

$$f_{X^2}(X^2)=F'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}*\left(f_X\left(\sqrt{x}\right)+f_X\left(-\sqrt{x}\right)\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

由x,y的对称性，直接写出Y^2的边缘分布：

$$f_{Y^2}(Y^2)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

之后计算其联合分布：

$$F_{X^2,Y^2}(X^2,Y^2)=P(X^2\le x,Y^2\le y)=P\left(-\sqrt{x}\le X\le\sqrt{x},\ -\sqrt{y}\le Y\le\sqrt{y}\right)=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dy\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\frac{1+xy}{4}dx=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{\sqrt{x}}{2}dy=\sqrt{xy}$$

$$f_{X^2,Y^2}(X^2,Y^2)=\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{xy}}$$

因此，得到联合分布，边缘分布，将他们列出来：

$$f_{X^2}(X^2)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & X^2<1\\ 0, & X^2\ge 1\end{cases}$$

$$f_{Y^2}(Y^2)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & Y^2<1\\ 0, & Y^2\ge 1\end{cases}$$

$$f_{X^2,Y^2}(X^2,Y^2)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{xy}}, & X^2,Y^2<1\\ 0, & X^2,Y^2\ge 1\end{cases}$$

显然，在每个分段上均有$f_{X^2,Y^2}(X^2,Y^2)=f_{X^2}(X^2)f_{Y^2}(Y^2)$成立，因此$X^2,Y^2$ 相互独立。

概率论与数理统计 B　第五周作业　3 月 20 日 周五

PB18151866 龚小航

2.64. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = a + b\arctan x, -\infty < x < \infty.$$

(1) 试求常数 a, b 的值.

(2) 试求随机变量 $Y = 3 - \sqrt[3]{X}$ 的密度函数 $p(y)$.

解：(1) 由分布函数的意义：

$$\begin{cases} F(\infty) = a + \dfrac{\pi}{2}b \equiv 1 \\ F(-\infty) = a - \dfrac{\pi}{2}b \equiv 0 \end{cases}$$

直接就可得到：$a = \frac{1}{2}$ ，$b = \frac{1}{\pi}$,此时X的分布函数与密度函数为：

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x\,; \qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

(2) $y = 3 - \sqrt[3]{x} = g(x)$,显然这是一个严格单调减的连续函数，所以存在唯一的反函数

$$x = h(y) = (3-y)^3, \text{显然 } h'(y) \text{ 存在且连续}$$

因此$Y = g(x)$也是连续型随机变量且有概率密度函数：

$$p(y) = f\big(h(y)\big) * |h'(y)| = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(3-y)^{3^2}} * |-3(3-y)^2| = \frac{3(3-y)^2}{\pi(1+(3-y)^6)}$$

2.65. 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 试求下列随机变量的密度函数.

(1) $Y_1 = e^X$;　　(2) $Y_2 = \dfrac{1}{X}$;　　(3) $Y_3 = -\dfrac{1}{\lambda}\ln X$　其中 $\lambda > 0$ 为常数.

解：先写出X的概率密度函数：

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x < 0 \ or\ x > 1 \end{cases}$$

利用密度变换公式求解各问即可。在$0 \le x \le 1$上，有：

(1) $y_1 = e^x = g_1(x)$，在$0 \le x \le 1$上严格单调增。存在唯一的反函数$x = h_1(y_1) = \ln y_1$，显然

$h_1'(y_1) = \frac{1}{y_1}$存在且连续，那么$Y$也是连续型随机变量且有概率密度函数：

$$p_1(y_1) = f\big(h_1(y_1)\big) * |h_1'(yy_1)| = f(\ln y_1) * \left|\frac{1}{y_1}\right| = \frac{1}{y_1}$$

因此可以写出完整的Y_1密度函数：

$$p_1(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y_1}, & 1 \le y_1 \le e \\ 0, & y_1 < 1 \ or\ y_1 > e \end{cases}$$

(2) 同上，$p_2(y_2) = f\big(h_2(y_2)\big) * |h_2'(y_2)| = f\left(\frac{1}{y_2}\right) * \left|-\frac{1}{{y_2}^2}\right| = \begin{cases} \frac{1}{{y_2}^2}, & y_2 > 1 \\ 0, & y_2 \le 1 \end{cases}$

(3) $p_3(y_3) = f\big(h_3(y_3)\big) * |h_3'(y_3)| = f\left(e^{-\lambda y_3}\right) * \left|-\lambda e^{-\lambda y_3}\right| = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y_3}, & y_3 > 0 \\ 0, & y_3 \le 0 \end{cases}$

2.68. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，试分别求 $Y_1 = X^2$ 和 $Y_2 = 1 - e^{-X}$ 的密度函数.

解：先写出随机变量X的概率密度函数：

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$y_1 = x^2 = g_1(x)$，在$x \geq 0$上严格单调增。存在唯一的反函数$x = h_1(y_1) = \sqrt{y_1}$，显然$h_1'(y_1) = \frac{1}{2\sqrt{y_1}}$存在且连续，那么$Y_1$也是连续型随机变量且有概率密度函数：

$$p_1(y_1) = f\big(h_1(y_1)\big) * |h_1'(y_1)| = f\big(\sqrt{y_1}\big) * \left|\frac{1}{2\sqrt{y_1}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{y_1}} e^{-\sqrt{y_1}}$$

因此可以写出完整的Y_1密度函数：

$$p_1(y_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y_1}} e^{-\sqrt{y_1}}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

再计算Y_2的密度函数：

$y_2 = 1 - e^{-x} = g_2(x)$，在$x \geq 0$上严格单调增。存在唯一的反函数$x = h_2(y_2) = -\ln(1 - y_2)$，显然$h_2'(y_2) = \frac{1}{1-y_2}$存在且连续，那么$Y_2$也是连续型随机变量且有概率密度函数：

$$p_2(y_2) = f\big(h_2(y_2)\big) * |h_2'(y_2)| = f(-\ln(1 - y_2)) * \left|\frac{1}{1 - y_2}\right| = \frac{1}{1 - y_2} e^{\ln(1-y_2)} = 1$$

因此可以写出完整的Y_2密度函数：

$$p_2(y_2) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y_2 < 1 \\ 0, & y_2 < 0 \ or \ y_2 \geq 1 \end{cases}$$

2.71. 设随机变量 X 服从参数为λ的指数分布，且随机变量 Y 定义为

$$Y = \begin{cases} X, & X \geq 1, \\ -X^2, & X < 1 \end{cases}$$

试求 Y 的密度函数 $p(y)$.

解：先写出随机变量X的概率密度函数：

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

① 当$x \geq 1$时，X、Y是一一对应的关系，Y在$y > 1$上也服从参数为λ的指数分布。

$$f(y) = \lambda e^{-\lambda y} \quad (y \geq 1)$$

② 当$0 \leq x < 1$时，$-1 < y \leq 0$

$y = -x^2 = g(x)$，在$x \geq 0$上严格单调增。存在唯一的反函数$x = h(y) = \sqrt{-y}$，显然$h'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{-y}}$存在且连续，那么$Y$也是连续型随机变量且有概率密度函数：

$$p(y) = f\big(h(y)\big) * |h'(y)| = f\big(\sqrt{-y}\big) * \left|-\frac{1}{2\sqrt{-y}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{-y}} \lambda e^{-\lambda\sqrt{-y}}$$

由此可以写出完整的Y密度函数：

$$p(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \geq 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-y}} \lambda e^{-\lambda\sqrt{-y}}, & -1 < y \leq 0 \\ 0, & y \leq -1 \ or \ 0 < y < 1 \end{cases}$$