Computer Science and Technology

运筹学基础

讲者：顾乃杰 教授、黄章进 副教授

计算机科学与技术学院

运输问题

Chap.4 Transportation Problem

主要内容

- 4.1 运输问题的数学模型
- 4.2 表上作业法
- 4.3 产销不平衡的运输问题及其求解方法
- 4.4 应用举例
- 4.5 使用计算机工具求解运输问题

4.3 产销不平衡的运输问题及其求解方法

- 实际问题中产销往往是不平衡的，就需要把产销不平衡的问题化成产销平衡的问题。
  - 当产大于销 $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ 时，运输问题的数学模型可写成

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad (i = 1,2,\cdots m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = 1,2,\cdots n)$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

产销不平衡的运输问题及其求解方法

- 由于总产量大于总销量，就要考虑多余的物资在产地就地储存的问题。设$x_{i,n+1}$是产地A_i的储存量，于是有

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i,n+1} = a_i \,(i = 1,2,\cdots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \,(j = 1,2,\cdots,n)$$

把上两式关于 i 和 j 再求和，得到：

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1}$$

令：

$c'_{ij} = c_{ij}$， 当 $i = 1,2,\cdots,m$，$j = 1,2,\cdots,n$时；

$c'_{ij} = 0$， 当 $i = 1,2,\cdots,m$，$j = n+1$ 时。

产销不平衡的运输问题及其求解方法

将其分别代入，得到：

$$\min z' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1} c'_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} c'_{i,n+1}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = z$$

即：

$$\min z' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \quad (i = 1,2,\cdots m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = 1,2,\cdots n, n+1) \\ x_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

– 由于这个模型中 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j + b_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} b_j$ ，所以这是一个产销平衡的运输问题。

产销不平衡运输问题的求解方法

- 当产大于销时，只要增加一个假想的销地 ***j*=*n*+1** (实际上是储存)，该销地总需要量为 $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$

- 在单位运价表中从各产地到假想销地的单位运价为 $c'_{i,n+1}=0$，就转化为一个产销平衡的运输问题。

- 当销大于产时，可以在产销平衡表中增加一个假想的产地 ***i*=*m*+1**，该地产量为：$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_j$

- 在单位运价表上令从该假想产地到各销地的运价 $c'_{m+1,j}=0$，同样可以转化为一个产销平衡的运输问题。

产销不平衡的运输问题例子

– 例2 设有三个化肥厂供应四个地区的化肥，假定等量的化肥在这些地区使用效果相同。各化肥长年产量、各地区年需要量及运费如下表，求出总的运费最节省的化肥调运方案。

表4-25 产销平衡表（运价：万元/万吨）

产地 \ 销地	I	II	III	IV	产量(万吨)
A	16	13	22	17	50
B	14	13	19	15	60
C	19	20	23	—	50
最低需求(万吨)	30	70	0	10	
最高需求(万吨)	50	70	30	不限	

- 解：从上表可以看出，化肥总产量为160万吨，最高需求为无限，最低需求是110万吨。根据现有产量，地区IV最高可获得160-100=60万吨的化肥，这样，最高需求则为210万吨，大于总产量160万吨。
- 该问题是产销不平衡问题。

产销不平衡的运输问题例子

假设有假想化肥厂D，其年产量为50万吨。由于各地需求包含两部分：最低需求，最高需求与最低需求的差值。前者不能用D供应，令相应运价为M（任意大正数），后者可以由D供应，相应运价为0。可得运价表为：

产地＼销地	I	I'	II	III	IV	IV'	产量(万吨)
A	16	16	13	22	17	17	50
B	14	14	13	19	15	15	60
C	19	19	20	23	M	M	50
D	M	0	M	0	M	0	50
需求(万吨)	30	20	70	30	10	50	

- 根据表上作业法运算，可以求得最优方案如下：

产地＼销地	I	I'	II	III	IV	IV'	产量(万吨)
A			50				50
B			20		10	30	60
C	30	20	0				50
D				30		20	50
需求(万吨)	30	20	70	30	10	50	

4.4 应用举例

- 由于在变量个数相等情况下表上作业法比单纯形法简单的多，因此很多实际问题尽可能转化为运输问题的数学模型来解决。
  - 例3 某厂按合同规定须于当年每个季度末分别提供10，15，25，20台同一规格的柴油机。已知该厂各季度的生产能力以及成本如下表，又如果生产出来的柴油机当季不交货的，每台每积压一个季度需储存、维护等费用0.15万元。要求在完成合同的情况下，做出使该厂全年生产费用最小的决策。

季度	生产能力（台）	单位成本
I	25	10.8
II	35	11.1
III	30	11.0
IV	10	11.3

应用举例

- 解：由于每个季度生产出来的柴油机不一定当季交货，所以设x_{ij}为第i季度生产的用于第j季度交货的柴油机数。则有：

$$\begin{cases} x_{11} = 10 \\ x_{12} + x_{22} = 15 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 25 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 20 \end{cases}$$

- 又每个季度生产的用于当季和以后各季交货的柴油机数目不能超过该季度的生产能力，故有：

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 25 \\ x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 35 \\ x_{33} + x_{34} \le 30 \\ x_{44} \le 10 \end{cases}$$

应用举例

- 设c_{ij}为第i季度生产的用于第j季度交货的单位生产成本和维护费用，见下表：

i \ j	I	II	III	IV
I	10.8	10.95	11.10	11.25
II		11.10	11.25	11.40
III			11.00	11.15
IV				11.30

- 设用a_i表示该厂第i季度的生产能力，b_j表示第j季度的合同供应量，则问题可写成：

$$\min z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} x_{ij} \le a_i \\ \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

显然这是一个产大于销的运输问题模型，在该问题中，当i>j时，$x_{ij}=0$，相应的$c_{ij}=M$,再加上一个假想的需求D，就可以把问题转化为产销平衡的运输模型。

应用举例

产地　销地	I	II	III	IV	D	产量
I	10.8	10.95	11.10	11.25	0	25
II	M	11.10	11.25	11.40	0	35
III	M	M	11.00	11.15	0	30
IV	M	M	M	11.30	0	10
销量	10	15	25	20	30	

– 经用表上作业法求解，可得多个最优方案，下表为最优方案之一：

产地　销地	I	II	III	IV	D	产量
I	10	15	0			25
II			5		30	35
III			20	10		30
IV				10		10
销量	10	15	25	20	30	

按此方案，该厂总费用为773万元。

应用举例

– 例4 某航运公司承担六个港口城市A，B，C，D，E，F的四条固定航线的物资运送，已知各航向的起点、终点城市、每天航班数以及各城市之间的航程天数（假定各条航线使用相同型号的船只）如下表。又每条船每次装卸货的时间各需1天，则航运公司至少该配备多少条船，才能满足所有航线的要求?

航线	起点城市	终点城市	每天航班数
1	E	D	3
2	B	C	2
3	A	F	1
4	D	B	1

从　到	A	B	C	D	E	F
A	0	1	2	14	7	7
B	1	0	3	13	8	8
C	2	3	0	15	5	5
D	14	13	15	0	17	20
E	7	8	5	17	0	3
F	7	8	5	20	3	0

应用举例

解：该公司所需配备船只分两部分：(1)载货航程需要船只数。如下表：

航线	装货天数	航程天数	卸货天数	小计	航班数	需周转船只数
1	1	17	1	19	3	57
2	1	3	1	5	2	10
3	1	7	1	9	1	9
4	1	13	1	15	1	15

各港口间调度所需船只数。即每天到达的船只数与每天出发的船只数之差额：

港口城市	每天到达	每天出发	余缺数
A	0	1	－1
B	1	2	－1
C	2	0	2
D	3	1	2
E	0	3	－3
F	1	0	1

应用举例

– 为了使配备的船只数最少，应做到周转的空船只数为最少。建立以下运输问题表：

	A	B	E	每天多余船只
C	2	3	5	2
D	14	13	17	2
F	7	8	3	1
每天缺少船只	1	1	3	

– 见上表可知是产销平衡的运输问题，用表上作业法可得最优调度方案：

	A	B	E	每天多余船只
C			2/5	2
D		1/13	1/17	2
F	1/7			1
每天缺少船只	1	1	3	

– 需要周转的空船数：1×7+1×13+2×5+1×17=47条，因此该公司总共需要配备91+47=138条船

应用举例

- 例5 某糖果公司的加工厂生产以及销售点的产销平衡表如下表。又:
  - 每个工厂生产的糖果不一定直接发运到销售点，可以其中几个产地集中一起运;
  - 运往各销地的糖果可以先运给其中几个销地，再转运给其他销地;
  - 除产、销地以外，中间还可以有几个转运站，在产地之间、销地之间或产销地之间转运。
- 已知各产地、销地、中转站之间每吨糖果的运价如下表4-40，问在考虑到产销地之间直接运输和间接运输的各种可能方案下，公司应如何调运产品，在满足各销点的需要量的前提下使总运费最少。

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2					4
A_3					9
销量	3	6	5	6	

例5 的产销平衡表

应用举例

表4-40 例5中的产地、销地、中转站之间的单位运价表

		产地			中间转运站				销地			
		A1	A2	A3	T1	T2	T3	T4	B1	B2	B3	B4
产地	A1		1	3	2	1	4	3	3	11	3	10
	A2	1		—	3	5	—	2	1	9	2	8
	A3	3	—		1	—	2	3	7	4	10	5
中间转运站	T1	2	3	1		1	3	2	2	8	4	6
	T2	1	5	—	1		1	1	4	5	2	7
	T3	4	—	2	3	1		2	1	8	2	4
	T4	3	2	3	2	1	2		1	—	2	6
销地	B1	3	1	7	2	4	1	1		1	4	2
	B2	11	9	4	8	5	8	—	1		2	1
	B3	3	2	10	4	2	2	2	4	2		3
	B4	10	8	5	6	7	4	6	2	1	3	

– 解：由于问题中所有的产地、中间转运站、销地都可以看作产地，又可以看作销地。因此把整个问题当作有11个产地和11个销地的扩大的运输问题。

应用举例

- 在扩大运输问题中，对于不可能运输的方案，在相应的运价上填入M（任意大正数）；
- 所有中转站的产量等于销量，由于运费最少时不可能出现一批物资来回倒运的现象，所以每个转运站的转运数不超过20吨（产量和）。因此可以规定中转站的产量和销量均为20吨。由于实际的转运量

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i、\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j$$

可以在每个约束条件中加入松弛变量x_{ii}， x_{ii}相当一个虚构的转运站，自己运给自己。(20- x_{ii})就是每个转运站的实际转运量， x_{ii}对应的运价c_{ii}为0。

- 扩大的运输问题中原来的产地和销地也有转运站的作用，所以同样在产量和销量上增加20吨，同时也引进x_{ii}为松弛变量。
- 根据上面的分析可以得出扩大的运输问题的产销平衡表与单位运价表：

应用举例

		产地			中间转运站				销地				产量
		A1	A2	A3	T1	T2	T3	T4	B1	B2	B3	B4	
产地	A1	0	1	3	2	1	4	3	3	11	3	10	27
	A2	1	0	M	3	5	M	2	1	9	2	8	24
	A3	3	M	0	1	M	2	3	7	4	10	5	29
中间转运站	T1	2	3	1	0	1	3	2	2	8	4	6	20
	T2	1	5	M	1	0	1	1	4	5	2	7	20
	T3	4	M	2	3	1	0	2	1	8	2	4	20
	T4	3	2	3	2	1	2	0	1	M	2	6	20
销地	B1	3	1	7	2	4	1	1	0	1	4	2	20
	B2	11	9	4	8	5	8	M	1	0	2	1	20
	B3	3	2	10	4	2	2	2	4	2	0	3	20
	B4	10	8	5	6	7	4	6	2	1	3	0	20
销量		20	20	20	20	20	20	20	23	26	25	26	

– 该问题转化为了产销平衡的运输问题，可以用表上作业法求解，过程略。

4.5 使用计算机工具求解运输问题

- 4.5.1 使用Excel
- 4.5.2 使用Matlab

4.5.1 使用Excel

- 使用Excel
  - 例2 设有三个化肥厂供应四个地区的化肥，假定等量的化肥在这些地区使用效果相同。各化肥长年产量、各地区年需要量及运费如下表，求出总的运费最节省的化肥调运方案。

产地 销地	I	II	III	IV	产量(万吨)
A	16	13	22	17	50
B	14	13	19	15	60
C	19	20	23	—	50
最低需求(万吨)	30	70	0	10	
最高需求(万吨)	50	70	30	不限	

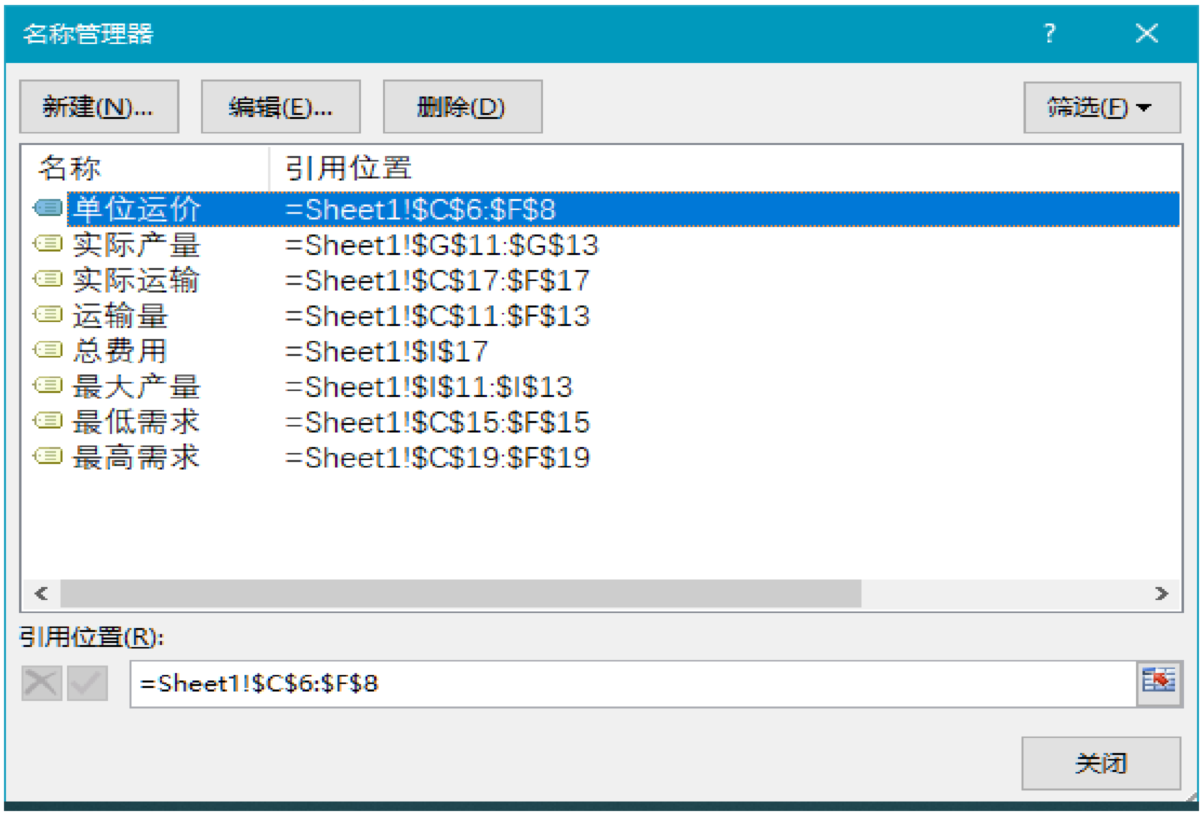
使用Excel

- 使用Excel
- 将已知数据填入单元格

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			运输问题Excel求解						
3		P106 例二:							
4		单位运价	I	II	III	IV			
5		A	16	13	22	17			
6		B	14	13	19	15			
7		C	19	20	23	-			
8									
9		运输量	I	II	III	IV	实际产量		最大产量
10		A	0	50	0	0	=SUM(C10:F10)	=IF(OR(C	50
11		B	40	20	0	0	=SUM(C11:F11)	=IF(OR(C	60
12		C	0	0	0	50	=SUM(C12:F12)	=IF(OR(C	50
13									
14		最低需求	30	70	0	10			
15			=IF(OR(C14="",C16="	=IF(OR(D14="",D16="	=IF(OR(E14="",E16="	=IF(OR(F14="",F16=""),"",IF(F14			总费用
16		实际运输	=SUM(C10:C12)	=SUM(D10:D12)	=SUM(E10:E12)	=SUM(F10:F12)			=SUMPRODUCT(C5:F7,C10:F12)
17			=IF(OR(C16="",C18="	=IF(OR(D16="",D18="	=IF(OR(E16="",E18="	=IF(OR(F16="",F18=""),"",IF(F16			
18		最高需求	50	70	30	9.99999999E+307			

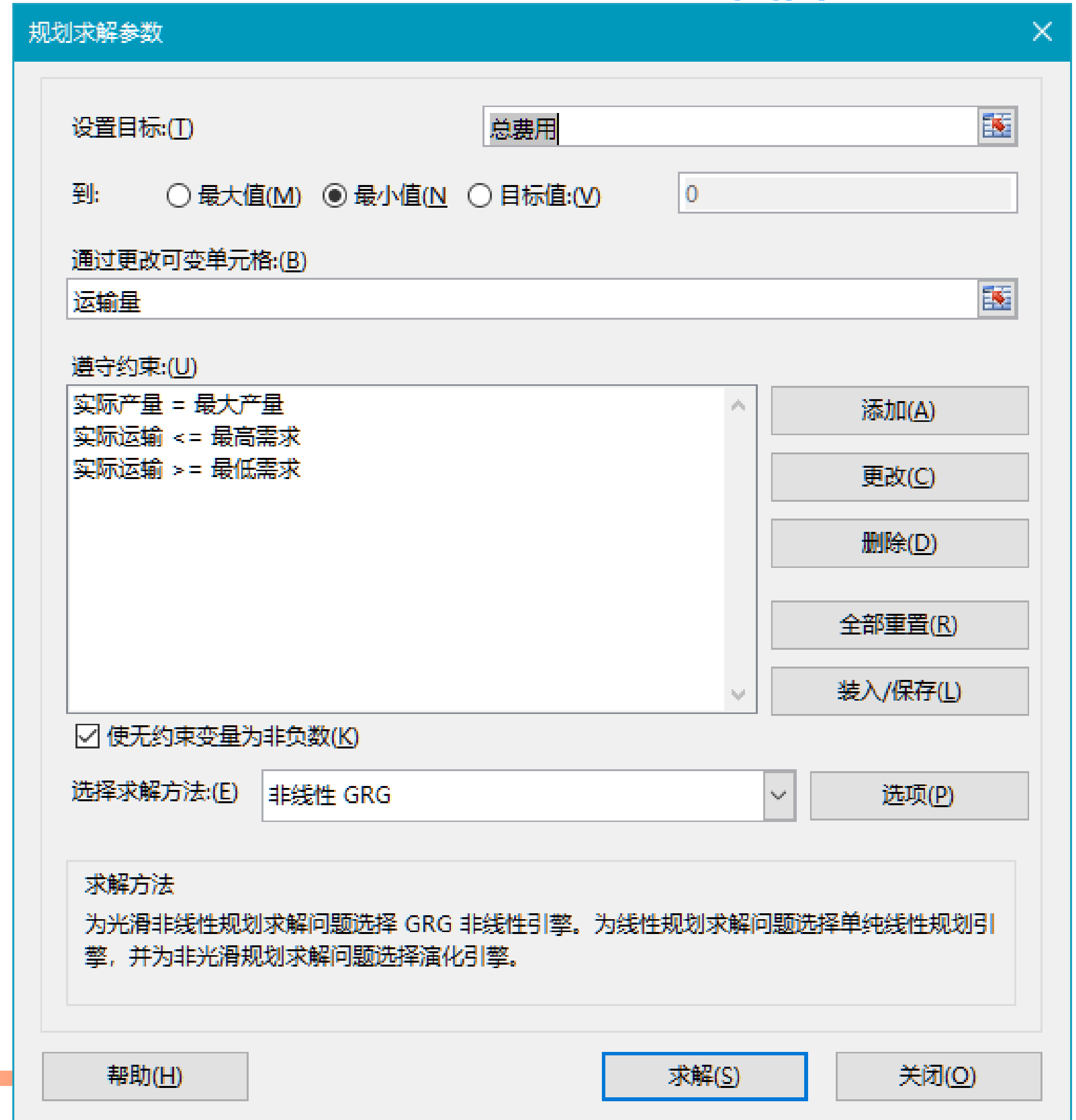
使用Excel

- 使用Excel
- 设置单元格名称方便查看逻辑



使用Excel

- 使用Excel
- 使用规划求解来计算



使用Excel

- 使用Excel
- 黄色数据为执行规划求解之后计算所得数据。

1									
2		运输问题Excel求解							
3		P106 例二：							
4		单位运价	I	II	III	IV			
5		A	16	13	22	17			
6		B	14	13	19	15			
7		C	19	20	23	-			
8									
9		运输量	I	II	III	IV	实际产量		最大产量
10		A	0	50	0	0	50	=	50
11		B	40	20	0	0	60	=	60
12		C	0	0	0	50	50	=	50
13									
14		最低需求	30	70	0	10			
15			<	=	=	<			总费用
16		实际运输	40	70	0	50			1470
17			<	=	<	<			
18		最高需求	50	70	30	1.00E+308			

4.5.2 使用Matlab

- 使用Matlab
  - 例3 某厂按合同规定须于当年每个季度末分别提供10，15，25，20台同一规格的柴油机。已知该厂各季度的生产能力以及成本如下表，又如果生产出来的柴油机当季不交货的，每台每积压一个季度需储存、维护等费用0.15万元。要求在完成合同的情况下，做出使该厂全年生产费用最小的决策。

季度	生产能力（台）	单位成本
I	25	10.8
II	35	11.1
III	30	11.0
IV	10	11.3

使用Matlab

- 使用Matlab
- 本题的M文件如下：

```
c=[10.8,10.95,11.10,11.25,0,11.10,11.25,11.40,0,0,11.00,11.15,0,
0,0,11.30]
A = [1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1]
 b = [25;35;30;10]
```

使用Matlab

- 使用**Matlab**
- 本题的**M**文件如下：

Aeq = [1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;

0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;

0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0;

0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1;]

beq=[10;15;25;20]

lb=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0]

ub=[Inf;Inf;Inf;Inf;Inf;Inf;Inf;Inf;Inf;Inf;Inf;Inf;Inf;Inf;Inf;Inf]

[x,fval,]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

fval= 773.0000

本 章 完

The end