解 4. $P(X=0)=\dfrac{1}{3},\quad P(X=1)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9},\quad P(X=2)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}$

$P(X=3)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{81},\quad P(X=4)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{16}{81}$

则X的分布律为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{16}{81}$

解 8. 设一周内该游乐场在这台设备上的毛利润为X. 记设备正常工作的概率为$p=0.8$.
$X=10$对应的事件为五个工作日设备均正常工作, $X=5$对应的事件为五个工作日中设备有一天故障, $X=0$对应的事件按为五个工作日中有两天设备发生故障, $X=-2$对应的事件为五个工作日中设备有三天及以上故障.

$P(X=10)=p^5=0.8^5=0.32768$,

$P(X=5)=\binom{5}{1}p^4(1-p)=0.4096$,

$P(X=0)=\binom{5}{2}p^3(1-p)^2=0.2048$

$P(X=-2)=1-P(X=10)-P(X=5)-P(X=0)=0.05792$

则X的分布律为：

X	-2	0	5	10
P	0.05792	0.2048	0.4096	0.32768

解 15. 由题意知, 该运动员投四球一球未中的概率为$\dfrac{1}{81}$, 设运动员投一球命中的概率为p.
则有: $(1-p)^4=\dfrac{1}{81}$, 解得: $p=\dfrac{2}{3}$. 即运动员投球的命中率为$\dfrac{2}{3}$.

解 16. 由于$X\sim B(2,p)$且$P(X\geq 1)=0.51$, 则$P(X=0)=1-P(X\geq 1)=0.49$.
而$P(X=0)=(1-p)^2=0.49$, 解得$p=0.3$.
则$Y\sim B(3,0.6)$. 故$P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-(1-0.6)^3=0.936$

解 20. 设单局中甲获胜的概率为$p=0.6$, 乙获胜的概率为$q=1-p=0.4$.

$P(i=4)=p^4=0.1296$

$P(i=5)=\binom{4}{1}p^4q=0.20736$

$P(i=6)=\binom{5}{2}p^4q^2=0.20736$

$P(i=7)=\binom{6}{3}p^4q^3=0.165888$

故在七局四胜制中乙获胜的概率为$P_1=1-\sum\limits_{k=4}^{7}P(i=k)=0.289792$,

而在三局两胜制中, 乙获胜的概率为：

$P_2=q^2+\binom{2}{1}pq^2=0.352$

由于$P_1<P_2$, 故采用三局两胜制对乙更有利.

解 23. 由题意知$X\sim P(\lambda)$, 则$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

又$P(X=1)=P(X=2)$, 得$\dfrac{\lambda}{1}e^{-\lambda}=\dfrac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$

解得$\lambda=2.(\lambda>0)$

则$P(X=3)=\dfrac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}=\dfrac{8}{6}e^{-2}=0.18$

解 26. 设一个月内出故障的零件个数为X. 由于$n=1000$很大, 可近似认为$X\sim P(\lambda)$. 本题中, $\lambda=1000\times 0.001=1$.

则有$P(X=0)=\dfrac{\lambda^0}{1}e^{-\lambda}=e^{-1}$

即系统在一个月内正常运转(没有零件出故障)的概率为$P=e^{-1}$.

解 33. 由于$F(x)$右连续，则$F(\frac{\pi}{2}) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} F(x)$. 即$a\sin\frac{\pi}{2} = 1$, 解得$a = 1$.

$P(X > \dfrac{\pi}{6}) = 1 - P(X \le \dfrac{\pi}{6}) = 1 - F(\frac{\pi}{6}) = 1 - \sin\frac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

解 39. *(1).* 由概率密度函数的性质有:$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}dx = 1$, 解得$a = \dfrac{1}{\pi}$.

(2). $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2}$.

(3).

$$\begin{aligned} P(|X| < 1) &= P(-1 < X < 1) \\ &= P(-1 < X \le 1) - P(X = 1) \\ &= F(1) - F(-1) - \int_{1}^{1} f(x)dx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

解 44. *D.*

令$g(x) = f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$. 则$\forall x, g(x) \ge 0$. 且

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x)d(F_1(x)) + \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)F_1(x)dx \\ &= F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)F_1(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)F_1(x)dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

故$g(x) = f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$必为概率密度函数.

解 46. 可知列车会在7:00, 7:15, 7:30发出三次. 等车时间少于5分钟对应的时间段为7:10 ∼ 7:15, 7:25 ∼ 7:30.

由于乘客到达车站的概率为均匀分布，则他在这两个时间段中到达车站的概率为$\dfrac{1}{30} \times 10 = \dfrac{1}{3}$.

即该乘客等车时间少于5分钟的概率为$\dfrac{1}{3}$.