数学物理方程 B　第十一周作业　4 月 28 日 周二

PB18151866 龚小航

3.22 求下列积分：

(1) $\int_{-1}^{1} x^m p_n(x)dx$ （分别考虑 $m<n$ 和 $m \geq n$ 两种情形）

(2) $\int_{-1}^{1} x p_m(x)p_n(x)\,dx$

解：(1) 利用勒让德多项式的导数形式，对其分部积分以降阶。先写出勒让德多项式的导数表达式：

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

由于积分上下界恰好是 $1,-1$，因此分部积分出的前项项带入后结果始终为 0. 因此有：

$$I = \int_{-1}^{1} x^m p_n(x)dx = \int_{-1}^{1} x^m\cdot\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} x^m\ d\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right)$$

$$= -\frac{m}{2^n n!}\int_{-1}^{1} x^{m-1}\ d\left(\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n\right) = \frac{(-1)^2 m(m-1)}{2^n n!}\int_{-1}^{1} x^{m-2}\ d\left(\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}(x^2-1)^n\right)$$

$$=\cdots\cdots=\begin{cases} (-1)^m \dfrac{m!}{2^n n!}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^n dx & m<n \\ (-1)^n \dfrac{m!}{2^n n!\,(m-n)!}\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{m-n}(x^2-1)^n dx & m\geq n \end{cases}$$

① $m<n$ 时，直接可以计算得：

$$I = (-1)^m \frac{m!}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^n dx = (-1)^m\frac{m!}{2^n n!}\left(\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(x^2-1)^n\Big|_{x=-1}^{1}\right) = 0$$

② $m\geq n$ 时，从表达式可知，还需要求一个定积分的值：

令 $J = \int_{-1}^{1} x^{m-n}(x^2-1)^n dx$，只需要计算出$J$，就得出了题中要求的积分值。

还是利用分部积分，逐次降低$(x^2-1)^n$的幂次。由于积分界为$(-1,1)$，从积分式特点可看出前项为 0.

$$J = \frac{1}{m-n+1}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n d(x^{m-n+1}) = -\frac{2n}{(m-n+1)(m-n+3)}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-1}d(x^{m-n+3})$$

$$= (-1)^2\frac{2^2 n(n-1)}{(m-n+1)(m-n+3)(m-n+5)}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-2}d(x^{m-n+5}) = \cdots\cdots$$

$$= (-1)^n\frac{2^n n!\,(m-n-1)!!}{(m+n+1)!!}\int_{-1}^{1}x^{m+n}\,dx = (-1)^n\frac{2^n n!\,(m-n-1)!!}{(m+n+1)!!}(1+(-1)^{m+n})$$

再将其带入，即可得原积分的值：

$$I = (-1)^n\frac{m!}{2^n n!\,(m-n)!}J = (-1)^n\frac{m!}{2^n n!\,(m-n)!}\cdot(-1)^n\frac{2^n n!\,(m-n-1)!!}{(m+n+1)!!}(1+(-1)^{m+n})$$

$$= \frac{m!}{(m-n)!!\,(m+n+1)!!}(1+(-1)^{m+n})$$

综上两种情况，原定积分的结果可以写为：

$$I = \begin{cases} 0 & m<n \\ \dfrac{m!}{(m-n)!!\,(m+n+1)!!}(1+(-1)^{m+n}) & m\geq n\end{cases}$$

(2) 由积分上下界的特点，需要利用递推公式以及施-刘定理的正交性结论：

递推公式 1：$(n+1)p_{n+1}(x)-(2n+1)xp_n(x)+np_{n-1}(x)=0$

递推公式 4：$p'_{n+1}(x)-p'_{n-1}(x)=(2n+1)p_n(x)$

因此，先对原定积分应用递推公式 1：

$$I = \int_{-1}^{1} xp_m(x)p_n(x)\,dx = \frac{1}{2m+1}\int_{-1}^{1}\big((m+1)p_{m+1}(x)+mp_{m-1}(x)\big)p_n(x)\,dx$$

$$= \frac{m+1}{2m+1}\int_{-1}^{1}p_{m+1}(x)p_n(x)\,dx + \frac{m}{2m+1}\int_{-1}^{1}p_{m-1}(x)p_n(x)\,dx$$

运用正交性原理，当 $n\neq m+1$ 且 $n\neq m-1$ 时 $I=0+0=0$.

当$n=m\pm1$时，计算勒让德多项式的模：

$$J = \int_{-1}^{1}p_n^2(x)\,dx = N_l^2 = \frac{2}{2n+1}$$

综上，原积分可以表示为：

$$I = \int_{-1}^{1}xp_m(x)p_n(x)\,dx = \begin{cases}\dfrac{2m+2}{(2m+1)(2m+3)}, & n=m+1\\ \dfrac{2m}{(2m+1)(2m-1)}, & n=m-1\\ 0, & n\neq m\pm1\end{cases}$$

3.23 计算积分：$\int_{-1}^{1}(1-x^2)[p_n'(x)]^2\,dx$

解：由提示，利用分部积分并利用勒让德方程的施-刘形式：

$$I=\int_{-1}^{1}(1-x^2)[p_n'(x)]^2\,dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)p_n'(x)\,d\big(p_n(x)\big)$$
$$=\left((1-x^2)p_n'(x)p_n(x)\Big|_{-1}^{1}\right)-\int_{-1}^{1}\big((1-x^2)p_n'(x)\big)'p_n(x)\,dx\quad=\quad-\int_{-1}^{1}\big((1-x^2)p_n'(x)\big)'p_n(x)\,dx$$

运用施-刘定理，有：其中$\lambda_n=n(n+1)$

$$\frac{d}{dx}\big((1-x^2)p_n'(x)\big)+\lambda_n p_n(x)=0\;\Rightarrow\;\big((1-x^2)p_n'(x)\big)'=-n(n+1)p_n(x)$$
$$I=-\int_{-1}^{1}\big((1-x^2)p_n'(x)\big)'p_n(x)\,dx=n(n+1)\int_{-1}^{1}p_n^2(x)\,dx=n(n+1)*\frac{2}{2n+1}=\frac{2n(n+1)}{2n+1}$$

3.24 把下列函数按勒让德函数系展开：

(1) $f(x)=x^3$

(3) $f(x)=|x|$

解：(1) 求函数的勒让德函数系展开，即：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_np_n(x)\ ,\quad C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)p_n(x)dx$$

由于当$n>3$时，$\int_{-1}^{1}x^3p_n(x)dx=0$（由本次作业 3.22 小题结论），因此，可设：

$$f(x)=x^3=C_0p_0(x)+C_1p_1(x)+C_2p_2(x)+C_3p_3(x)$$

n为偶数时$p_n(x)$为偶函数，n为奇数时$p_n(x)$为奇函数，因此展开式还可以进一步简化为：

$$f(x)=x^3=C_1p_1(x)+C_3p_3(x)$$

直接将$p_1(x)=x,\quad p_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$带入待定系数，立刻得到：$C_1=\frac{3}{5}$，$\quad C_3=\frac{2}{5}$

$$\Longrightarrow\quad f(x)=x^3=\frac{3}{5}p_1(x)+\frac{2}{5}p_3(x)$$

(3) 与上一问类似的，即：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_np_n(x)\ ,\quad C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)p_n(x)dx$$

直接计算系数C_n：

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}|x|p_n(x)dx=\frac{2n+1}{2}\left(-\int_{-1}^{0}xp_n(x)dx+\int_{0}^{1}xp_n(x)dx\right)$$

因为n为奇数时，$p_n(x)$是奇函数，显然$C_{2k+1}=0$

$$C_0=\frac{1}{2}\left(-\int_{-1}^{0}xp_0(x)dx+\int_{0}^{1}xp_0(x)dx\right)=\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{1}xdx-\int_{-1}^{0}xdx\right)=\frac{1}{2}$$

再计算C_{2k}：

$$C_{2k}=(4k+1)\int_{0}^{1}xp_{2k}(x)dx$$

其中需要计算积分：

$$I=\int_{0}^{1}xp_{2k}(x)dx$$

为此，先计算以下积分：

$$J=\int_{0}^{1}p_{2k+1}(x)\,dx=\frac{1}{2(2k+1)+1}\int_{0}^{1}[p_{2k+2}'(x)-p_{2k}'(x)]\,dx=\frac{1}{4k+3}\big(p_{2k}(0)-p_{2k+2}(0)\big)$$
$$=\frac{1}{4k+3}\left(\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}-\frac{(-1)^{k+1}(2k+1)!!}{(2k+2)!!}\right)\quad=\quad\frac{(-1)^k}{4k+3}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}+\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}\right)$$
$$=\frac{(-1)^k}{4k+3}\cdot\frac{(2k-1)!!\,(2k+2)+(2k+1)!!}{(2k+2)!!}\quad=\quad\frac{(-1)^k}{4k+3}\cdot\frac{(2k-1)!!\,\big((2k+2)+(2k+1)\big)}{(2k+2)!!}$$
$$=\frac{(-1)^k}{4k+3}\cdot\frac{(2k-1)!!\,(4k+3)}{(2k+2)!!}\quad=\quad(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}$$

所以有：（利用了递推公式 1）

$$I=\int_{0}^{1}xp_{2k}(x)dx=\int_{0}^{1}\left(\frac{2k+1}{2(2k)+1}p_{2k+1}(x)+\frac{2k}{2(2k)+1}p_{2k-1}(x)\right)dx$$
$$=\frac{2k+1}{2(2k)+1}\int_{0}^{1}p_{2k+1}(x)dx+\frac{2k}{2(2k)+1}\int_{0}^{1}p_{2k-1}(x)dx$$
$$=\frac{2k+1}{4k+1}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}+\frac{2k}{4k+1}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}$$
$$=\frac{(-1)^k}{4k+1}\left((2k+1)\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}-2k\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\right)$$
$$=\frac{(-1)^k}{4k+1}\left(\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}-\frac{(2k-3)!!\,2k(2k+2)}{(2k+2)!!}\right)$$
$$=\frac{(-1)^k(2k-3)!!}{4k+1}\left(\frac{(2k+1)(2k-1)-2k(2k+2)}{(2k+2)!!}\right)$$
$$=(-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!!}{(2k+2)!!}$$

因此，得到系数：

$$C_{2k}=(4k+1)\int_{0}^{1}xp_{2k}(x)dx=(-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!!}{(2k+2)!!}(4k+1)$$

所以最终的展开结果为：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_np_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!!}{(2k+2)!!}(4k+1)p_{2k}(x)\quad(-1<x<1)$$

3.25 在半径为a的球内求调和函数u使得$u|_{r=a}=\cos^2\theta$

解：先将原问题归结为定解问题：$u=u(r,\theta,\varphi)$

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0\\ u(a,\theta,\varphi)=\cos^2\theta\end{cases} 0\le r<a,\ 0\le\theta<\pi,\ 0\le\varphi<2\pi$$

此问题中，所有条件结论都与 φ 无关，因此$u=u(r,\theta)$

三维拉普拉斯方程的通解可以写成级数形式：

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n+B_n r^{-n-1})p_n(\cos\theta)$$

本题是在球内解题，当$r\to 0$时必须保证级数解有界，因此必须有$B_n=0$.

为了方便，再将系数除以a^n. 因此解简化为：

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{r}{a}\right)^n p_n(\cos\theta)$$

再带入边界条件：

$$u(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n p_n(\cos\theta)\equiv\cos^2\theta$$

根据展开式的系数，即有：

$$A_n=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\, p_n(\cos\theta)\sin\theta\ d\theta=-\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\, p_n(\cos\theta)\, d\cos\theta$$

换元，令$x=\cos\theta$：

$$A_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}x^2 p_n(x)\,dx$$

再次利用本次作业 3.22 小题的结论，$n>2$时，$A_n=0$.在对n的取值枚举即可：

$n=0$时：

$$A_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2 p_0(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2\,dx=\frac{1}{3}$$

$n=1$时：

$$A_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^2 p_1(x)\,dx=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^3\,dx=0$$

$n=2$时：

$$A_2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}x^2 p_2(x)\,dx=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}x^2\frac{1}{2}\,(3x^2-1)\,dx=\frac{2}{3}$$

将这些系数带入，即可得：

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{r}{a}\right)^n p_n(\cos\theta)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{r^2}{a^2}\right)p_2(\cos\theta)=\frac{1}{3}+\frac{r^2}{a^2}\cos^2\theta-\frac{r^2}{3a^2}$$

3.27 在半径为1的球内求调和函数u使得$u|_{r=1}=\cos^2\theta$

解：先将原问题归结为定解问题：$u=u(r,\theta,\varphi)$

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0\\ u(1,\theta,\varphi)=\cos^2\theta\end{cases} r>a,\ 0\le\theta<\pi,\ 0\le\varphi<2\pi$$

此问题中，所有条件结论都与 φ 无关，因此$u=u(r,\theta)$

三维拉普拉斯方程的通解可以写成级数形式：

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n+B_n r^{-n-1})p_n(\cos\theta)$$

本题是在球外部解题，当$r\to\infty$时必须保证级数解有界，因此必须有$A_n=0$.

则级数解可以简化为：

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n r^{-n-1}p_n(\cos\theta)$$

再带入边界条件：

$$u(1,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n p_n(\cos\theta)\equiv\cos^2\theta$$

这和上一问的问题是一样的，直接写出它的结果：

$$B_0=\frac{1}{3}\,,\ B_1=0\,,\ B_2=\frac{2}{3}\,,\ B_{3,4,5\dots\dots}=0$$

将这些系数全部带入，即可得：

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n r^{-n-1}p_n(\cos\theta)=\frac{1}{3}r^{-1}p_0(\cos\theta)+\frac{2}{3}r^{-3}p_2(\cos\theta)=\frac{1}{3}r^{-1}+r^{-3}\cos^2\theta-\frac{r^{-3}}{3}$$

3.28 半球的球面保持一定的温度 u_0，分别在下列条件下，求这个半球内的稳定温度分布。

(1) 半球底面保持常温零度；

(2) 半球底面绝热；

解：(1) 先将该问题化归为定解问题：$u = u(r,\theta,\varphi)$

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0 \\ u(a,\theta,\varphi) = u_0,\quad u\left(r,\dfrac{\pi}{2},\varphi\right) = 0 \end{cases} \quad 0 \le r < a,\ 0 \le \theta < \frac{\pi}{2},\quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

显然在本例中定解条件都与φ无关，因此$u = u(r,\theta)$.

三维拉普拉斯方程的通解可以写成级数形式：

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) p_n(\cos\theta)$$

本题是在球内部解题，当$r \to 0$时必须保证级数解有界，因此必须有$B_n = 0$.

为了方便，再将系数除以a^n. 因此解简化为：

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n p_n(\cos\theta)$$

再带入边界条件：

$$u\left(r,\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n p_n(0) \equiv 0$$

由于$A_n \ne 0$，因此有$p_n(0) = 0$恒成立，因此n为奇数，即 $n = 2k+1\ (k \in \mathbb{N})$

因此级数解可以简化为：

$$u(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1} p_{2k+1}(\cos\theta)$$

再带入边界条件：

$$u(a,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} p_{2k+1}(\cos\theta) = u_0$$

为求系数 A_{2k+1},将u_0作延拓，在下半球上令$u(a,\theta) = -u_0\ \left(\theta \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right]\right)$，$u\left(a,\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$令\quad f(\theta) = \begin{cases} u_0\ , & 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ 0\ , & \theta = \dfrac{\pi}{2} \\ -u_0\ , & \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi \end{cases}$$

先求解$u(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1} p_{2k+1}(\cos\theta) = f(\theta)$ ：

以下根据展开式的系数，计算A_{2k+1}：

$$A_{2k+1} = \frac{2(2k+1)+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) p_{2k+1}(\cos\theta) \sin\theta\ d\theta$$

将其拆分为 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上的两个积分，并令$x = \cos\theta$，即可变化为以下形式：

$$A_{2k+1} = \frac{4k+3}{2} u_0 \left(\int_0^1 p_{2k+1}(x)\,dx - \int_{-1}^0 p_{2k+1}(x)\,dx \right)$$

当$k = 0$时：

$$A_1 = \frac{3}{2} u_0 \left(\int_0^1 x\,dx - \int_{-1}^0 x\,dx \right) = \frac{3}{2} u_0$$

当$k \in \mathbb{N}^+$时：$p_{2k+1}(x)$为奇函数，因此A_{2k+1}的表达式还可进一步简化为：

$$A_{2k+1} = \frac{4k+3}{2} u_0 \left(\int_0^1 p_{2k+1}(x)\,dx + \int_0^1 p_{2k+1}(x)\,dx \right) = (4k+3) u_0 \int_0^1 p_{2k+1}(x)\,dx$$

接下来就需要计算这个积分：

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 p_{2k+1}(x)\,dx = \frac{1}{2(2k+1)+1} \int_0^1 [p'_{2k+2}(x) - p'_{2k}(x)]\,dx = \frac{1}{4k+3}\big(p_{2k}(0) - p_{2k+2}(0)\big) \\ &= \frac{1}{4k+3}\left(\frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!!} - \frac{(-1)^{k+1}(2k+1)!!}{(2k+2)!!} \right) \quad = \quad \frac{(-1)^k}{4k+3}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} + \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} \right) \\ &= \frac{(-1)^k}{4k+3} \cdot \frac{(2k-1)!!\,(2k+2) + (2k+1)!!}{(2k+2)!!} \quad = \quad \frac{(-1)^k}{4k+3} \cdot \frac{(2k-1)!!\,\big((2k+2)+(2k+1)\big)}{(2k+2)!!} \\ &= \frac{(-1)^k}{4k+3} \cdot \frac{(2k-1)!!\,(4k+3)}{(2k+2)!!} \quad = \quad (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!} \end{aligned}$$

再将这个积分代回，取 $0 \le \theta < \pi/2$ 的部分，同样有：

$$A_{2k+1} = (4k+3) u_0 I = (4k+3) u_0 (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!} \quad (k \in \mathbb{N}^+)$$

因此最终的解的结果为：

$$u = u(r,\theta) = \frac{3r}{2a} u_0 \cos\theta + \sum_{k=1}^{\infty} (4k+3) u_0 (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1} p_{2k+1}(\cos\theta)$$

(2) 半球底面绝热时，可以归结为定解问题:

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0 \\ u(a,\theta,\varphi) = u_0, \quad u_\theta\left(r,\dfrac{\pi}{2},\varphi\right) = 0 \end{cases} \quad 0 \le r < a,\ 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

显然在本例中定解条件都与φ无关，因此$u = u(r,\theta)$.

三维拉普拉斯方程的通解可以写成级数形式:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) p_n(\cos\theta)$$

本题是在球内部解题，当$r \to 0$时必须保证级数解有界，因此必须有$B_n = 0$.

因此解简化为:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n p_n(\cos\theta)$$

再带入边界条件:

$$u(a,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n p_n(\cos\theta) = u_0$$

显然这个特解能直接观察得到，$n = 0$时，左侧$= A_0$，$n > 0$时左侧是θ的函数。

只要简单的令 $A_0 = u_0$，$A_n = 0$ $(n \in \mathbb{N}^+)$，即可满足上式。

因此，方程的解为:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n p_n(\cos\theta) = u_0$$

3.29 一个半径为R，厚度为 $R/2$ 的半空心球，外球面和内球面上的温度始终保持为：

$$f(\theta)=A\sin^2\frac{\theta}{2}\quad\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$$

而底面上的温度则保持为 $A/2$ ，求半空心球内部各点的定常温度。

解：先将上述问题归结为定解问题：

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0\\ u\left(\frac{R}{2},\theta,\varphi\right)=u(R,\theta,\varphi)=A\sin^2\frac{\theta}{2}\text{ ，}\frac{R}{2}\le r\le R,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\varphi<2\pi\\ u\left(r,\frac{\pi}{2},\varphi\right)=\frac{A}{2}\end{cases}$$

显然所有的条件与结论都与 φ 无关，因此$u=u(r,\theta)$.

要解这个定解问题，必须先将该问题的边界条件化为齐次条件：

令 $u(r,\theta)=\frac{A}{2}+\omega(r,\theta)$,则有定解问题：
$$\begin{cases}\Delta_3\omega=0\\ \omega\left(\frac{R}{2},\theta\right)=\omega(R,\theta)=A\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{A}{2}=-\frac{A}{2}\cos\theta\\ \omega\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}$$

此时将 $g(\theta)$ 作奇延拓至整个球上，使得：

$$g(\theta)=\begin{cases}A\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{A}{2}\text{ ，}\quad 0\le\theta<\frac{\pi}{2}\\ -A\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{A}{2}\text{ ，}\quad\frac{\pi}{2}<\theta\le\pi\end{cases}$$

三维拉普拉斯方程的通解可以写成级数形式：

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n-1})p_n(\cos\theta)$$

再带入边界条件：

$$\begin{cases}\omega(R,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_nR^n+B_nR^{-n-1})p_n(\cos\theta)\equiv-\frac{A}{2}\cos\theta\\ \omega\left(\frac{R}{2},\theta\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\left(\frac{R}{2}\right)^n+B_n\left(\frac{R}{2}\right)^{-n-1}\right)p_n(\cos\theta)\equiv-\frac{A}{2}\cos\theta\end{cases}$$

为解其系数，需要求出以下积分： 换元，令$x=\cos\theta$

$$I_n=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}-\frac{A}{2}\cos\theta\cdot p_n(\cos\theta)\sin\theta\ d\theta=-\frac{A}{4}(2n+1)\int_{-1}^{1}xp_n(x)\,dx$$

由本次作业 3.22 小题的结论，$n>1$时$I_n=0$，此时有$A_n\left(\frac{R}{2}\right)^n+B_n\left(\frac{R}{2}\right)^{-n-1}=0$，即$A_n=B_n=0$

所以只需要讨论$n=0,n=1$两种情况计算它的积分值即可。

$n=0$时：

$$I_0=-\frac{A}{4}\int_{-1}^{1}xp_0(x)\,dx=-\frac{A}{4}\int_{-1}^{1}x\,dx=0$$

此时有$A_n\left(\frac{R}{2}\right)^n+B_n\left(\frac{R}{2}\right)^{-n-1}=0$，即$A_n=B_n=0$

$n=1$时：

$$I_1=-\frac{3A}{4}\int_{-1}^{1}xp_1(x)\,dx=-\frac{3A}{4}\int_{-1}^{1}x^2\,dx=-\frac{A}{2}$$

此时有$A_n\left(\frac{R}{2}\right)^n+B_n\left(\frac{R}{2}\right)^{-n-1}=-\frac{A}{2}$，即$A_n=-\frac{3A}{7R}\quad B_n=-\frac{AR^2}{14}$

再将这些计算出的系数带入解的级数表达式：

$$\omega(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n-1})p_n(\cos\theta)=-\left(\frac{3A}{7R}r+\frac{AR^2}{14r^2}\right)\cos\theta$$

因此，原定解问题的解为：

$$u(r,\theta)=\frac{A}{2}+\omega(r,\theta)=\frac{A}{2}-\left(\frac{3A}{7R}r+\frac{AR^2}{14r^2}\right)\cos\theta$$

4.1 用傅里叶变换求解下列定解问题：

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ \text{当 } x^2+y^2 \to \infty \text{ 时}, u(x,y) \to 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}，\ y > 0$$

解：显然有 $u = u(x,y)$，$\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy}$

对x先作傅里叶变换：

$$\overline{u}(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{-i\lambda x}\, dx$$

$$F\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = -\lambda^2 \overline{u}\ , \qquad F\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{d^2 \overline{u}}{dy^2}$$

再对边界条件也做傅里叶变换：

$$\overline{u}(\lambda, 0) = \overline{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx$$

此时原问题化为常微分方程问题：

$$\begin{cases} -\lambda^2 \overline{u} + \dfrac{d^2 \overline{u}}{dy^2} = 0 \\ \overline{u}(\lambda, 0) = \overline{f}(\lambda) \end{cases}$$

这种形式的常微分方程的通解具有形式：

$$\overline{u} = A e^{-\lambda y} + B e^{\lambda y}$$

再带入边界条件：$x^2 + y^2 \to \infty$ 时, $u(x,y) \to 0$，因此必有$B = 0 \implies \overline{u} = A e^{-\lambda y}$

带入另一个边界条件：

$$\overline{u}(\lambda, 0) = \overline{f}(\lambda) \implies A = \overline{f}(\lambda)$$

因此变换后的常微分方程的解为：

$$\overline{u}(\lambda, y) = \overline{f}(\lambda) e^{-\lambda y}$$

最后根据卷积性质，将上述解作傅里叶逆变换，即可得：

$$u(x,y) = F^{-1}\big(\overline{u}(\lambda, y)\big) = F^{-1}\big(\overline{f}(\lambda) e^{-\lambda y}\big) = F^{-1}\left(\overline{f}(\lambda)\right) * F^{-1}\big(e^{-\lambda y}\big) = f(x) * \left(\frac{y}{\pi} \frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

$$= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2}\, d\xi$$