积分计算温习

原函数：如果在区间I上，F(x)导数为f(x)，即对 $\forall x \in I$ 有：

则：$F'(x) = f(x)$ 或 $dF(x) = f(x)dx$.

F(x)为 f(x)在区间 I上的一个原函数.

不定积分：$\int f(x)dx = F(x) + C$.

计算方法：

第一换元法（凑微分）：$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$

第二换元法：$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = G(t) + C$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx = \ln|x+\sqrt{x^2+A}| + C. \quad (A \neq 0)$$

分部积分：$\int u(x)v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

降幂、开方幂、循环（解方程）、递推（含n）.

有理函数的积分：

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + \cdots + a_n}{b_0x^m + \cdots + b_m}.$$

有理分式可以分解为简单分式之和，则只需讨论简单分式的积分

$$\frac{A}{x-a} \quad \frac{A}{(x-a)^k} \quad \frac{mx+n}{x^2+px+q} \quad \frac{mx+n}{(x^2+px+q)^k}$$

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C. \quad (k \neq 1)$$

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}dx = \int \frac{m(x+\frac{p}{2}) + n - \frac{m}{2}p}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}dx$$

$$= \frac{m}{2}\cdot\int\frac{d(x+\frac{p}{2})^2}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} + (n-\frac{m}{2}p)\cdot\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}$$

$$= \frac{m}{2}\cdot\ln|x^2+px+q| + \frac{2n-mp}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

$$\int\frac{mx+n}{(x^2+px+q)^k}dx \xlongequal{\text{令 } t=x+\frac{p}{2}} \frac{m}{2}\cdot\int\frac{2t}{(t^2+a^2)^k}dt + (n-\frac{mp}{2})\cdot\int\frac{1}{(t^2+a^2)^k}dt$$

$$\int\frac{2t}{(t^2+a^2)^k}dt = \frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}} + C$$

$$= \frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + C.$$

递推法: 设 $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$.

$n>1$ 时: $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\cdot\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\cdot\left(\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}dx - \int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}dx\right)$$

即: $I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\cdot(I_{n-1} - a^2 I_n)$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\cdot I_{n-1}\right)$$

可化为有理式的积分:

*. 三角函数有理式积分:

* 万能代换: ~~$x=\tan$~~ $t=\tan\frac{x}{2}$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$.

$$\int R(\sin x,\cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot \frac{2}{1+t^2}dt.$$

*: R 是 $\sin x$ 的奇函数 $t=\cos x$.

R 是 $\cos x$ 的奇函数. $t=\sin x$

R 是二者同时的偶函数. $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, $t=\tan x$.

* 简单根式:

$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ $(ad-bc\neq0)$ 令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$.

$R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ $(a\neq0,\ b^2-4ac\neq0)$

- $a>0$: 欧拉第一代换: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t\pm\sqrt{a}x$
- $c>0$: 欧拉第二代换: $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt\pm\sqrt{c}$
- $ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu)$, 欧拉第三代换: $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda)$

*例: $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \xlongequal[x>0\Rightarrow 0<t<\frac{\pi}{2}]{令\ x=a\tan t} \int \frac{1}{\sqrt{a^2(1+\tan^2 t)}}\cdot a\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt = \int\frac{1}{\cos t}dt \xlongequal{y=\tan\frac{t}{2}} \cancel{\int \frac{1+y^2}{1-y^2}\cdot\frac{2}{1+y^2}dt}$

$= \int \frac{1+y^2}{1-y^2}\cdot\frac{2}{1+y^2}dy = \int \frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}dy = \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|+C'$

又 $\begin{cases} y=\tan\frac{t}{2} \\ x=a\tan t\end{cases}$ $\Rightarrow \tan t=\frac{x}{a}=\frac{2y}{1-y^2} \Rightarrow$ 当 $x>0$: $y=\frac{-\frac{2a}{x}+\sqrt{(\frac{2a}{x})^2+4}}{2} = -\frac{a}{x}+\sqrt{(\frac{a}{x})^2+1}$

代入得: $I = \ln\frac{1-\frac{a}{x}+\sqrt{1+(\frac{a}{x})^2}}{1+\frac{a}{x}-\sqrt{1+(\frac{a}{x})^2}} = \ln\frac{x-a+\sqrt{x^2+a^2}}{x+a-\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$

例：$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}$ ： $= \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1}{x+1} dx$ ，令 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = u$ 。 $= \int \frac{-1}{u-1} + \frac{u+2}{u^2+u+1} du$

$R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ 型。 $x = \frac{u^3+1}{u^3-1}$

$dx = \frac{6u^2}{(u^3-1)^2} du$.

化为分式形式，可计算

例：$\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$ ： 法一：分解因式 $I = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} dx$

法二：$x \neq 0$ 时：$\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int \frac{\frac{1}{x^2}+1}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{x^2+\frac{1}{x^2}} = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}$

又：$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

$\Rightarrow$ 一个原函数 $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x<0. \end{cases}$

原函数 在区间 I 上 一定连续

所以：$I = F(x) + C$.

定积分：

分割：$[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点 $x_1, \dots x_{n-1}$ 使得 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

将 $[a,b]$ 分为 n 个小区间。 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

近似：在每个小区间上任取点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 以 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 代替小曲边梯形面积

求和：$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

取极限：$\lambda(T) = \max\{\Delta x_1, \dots \Delta x_n\}$.

$A = \lim\limits_{\lambda(T) \to 0^+} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$

影响：$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 和分割 T、ξ_i 取法都有关。 但如果定积分存在，按定义，可以采用特殊的分割和取点方法求解。

但如果：$\lim\limits_{\lambda(T) \to 0^+} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，且与 T，ξ_i 无关，则称：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

称此极限为：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分。

记作：$\int_a^b f(x) dx = \lim\limits_{\lambda(T) \to 0^+} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

可积必要条件：

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则它在 $[a,b]$ 上有界。

$[a,b]$ 上连续函数必可积

$[a,b]$ 上有界函数只有有限个间断点 $\to$ 可积

$[a,b]$ 上单调函数可积。

定积分的性质：

线性性质：线性组合的可积性、

乘积可积性：$f(x)$、$g(x)$都在$[a,b]$上黎曼可积，则$f(x)g(x)$在$[a,b]$上也可积、

积分区间可加性。

估值公式：~~f(x)在[a,b]~~ $f(x)$在$[a,b]$上可积，$m \le f(x) \le M$.

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

绝对可积性：

$f(x)$在$[a,b]$上可积，则$|f(x)|$在$[a,b]$上也可积、

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

积分中值定理：

$f(x)$在$[a,b]$上连续，则至少存在一点$\xi \in (a,b)$

$$\text{s.t. } \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

推广：若$f(x)$在$[a,b]$上连续，$\varphi(x)$可积且不变号，则至少存在一点$\xi \in (a,b)$

$$\text{s.t. } \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx$$

变限积分：

函数$f(x)$在$[a,b]$上可积，称$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ $(a \le x \le b)$为积分上限函数.

* 连续性：$F(x)$连续

* 可导性：逐点求导：若：$f(x)$在x_0连续：$F(x)$在x_0可导：$F'(x_0)=f(x_0)$

若：$f(x)$在$x=a$右连续：$F'_+(a)=f(a)$

$x=b$左 $F'_-(b)=f(b)$.

复合函数求导：

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$u(x)$、$v(x)$在(α,β)内可微，且$x\in(\alpha,\beta)$时，$u(x)$、$v(x) \in [a,b]$

则：$\psi(x)=\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$在$(\alpha,\beta)$可微.

$$\psi'(x)=f(u(x))\cdot u'(x)-f(v(x))\cdot v'(x)$$

注：这里的变限积分求导公式只考虑被积函数中不包含求导变量，如果含有求导变量，要么想办法将其移到积分号外部，要么，公式要增加一项，即，在积分号

下对被积函数求偏导（偏求导变量为原问题求导变量）

微积分基本定理：

$f(x)$ 在 $x\in[a,b]$ 连续，积分上限函数可导，且：$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$.

牛顿－莱布尼茨公式：

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的任意原函数，则有：

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

条件可放宽为：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，原函数 $F(x)$ 存在。

注意：可积 ≠ 原函数存在

原函数存在但不可积：$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 　 $f(x)=F'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$f(x)$ 不连续且在 $x=0$ 处的附近无界 ⇒ 在 $[-1,1]$ 上不可积。

可积但不存在原函数：$f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

例：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,dt}{e^{(x^8-2x^6)}-1}$ ：明确：要用洛必达法则（$\frac{0}{0}$型），涉及变限积分求导

注意：等价替换，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ 　 $e^{x^8-2x^6}-1\sim x^8-2x^6\sim-2x^6$

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,dt}{e^{(x^8-2x^6)}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,dt}{-2x^6}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\sin(1-\cos x)^2}{-12x^5}=\lim_{x\to0}\frac{x(1-\cos x)^2}{-12x^5}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{-12x^5}=-\frac{1}{48}.$$

n 项之和求极限：可以考虑：化为黎曼和 → 定积分

积 ＝先取对数．．．．．．

例：$\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+1}+\cdots+\frac{\ln(1+\frac{n}{n})}{n+n}}$

$$=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{\ln(1+\frac{n}{n})}{1+\frac{n}{n}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\underbrace{\frac{\ln(1+\frac{i}{n})}{1+\frac{i}{n}}}$$

$\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ 在区间 $[0,1]$ 上黎曼和。

$\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ 在：$[0,1]$ 上连续，可积 ⇒ 极限为：$\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ 在 $[0,1]$ 上定积分。

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{\ln^2(1+x)}{2}\Big|_0^1 = \frac{\ln^2 2}{2}$$

例：$\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n^4} \prod_{i=1}^{2n} (n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}}_{x_n}$

$$\ln x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} \ln(n^2+i^2) - 4\ln n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} \ln n^2\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right) - 4\ln n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} \ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)$$

上式为：$\ln(1+x^2)$ 在 $[0,2]$ 上的黎曼和。

$\ln(1+x^2)$ 在 $[0,2]$ 上连续 ⇒ 可积 ⇒ 黎曼和的极限必定定积分

则：~~$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x_n = \ldots$~~

$$\lim_{n\to\infty} \ln x_n = \int_0^2 \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = 2\ln 5 - 4 + 2\arctan 2$$

则：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \prod_{i=1}^{2n} (n^2+i^2)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln x_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n} = 25e^{-4+2\arctan 2}$.

定积分计算：

设：$f(x)$ 在包含 $[a,b]$ 的某个区间 I 上连续，$x=\varphi(t)$ 满足：

$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数．$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$．$\varphi(t)\in I$，$\alpha\le t\le\beta$．

则有：
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

例．$f(x)$ 连续，$f(0)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)\,dt}{x\int_0^x f(x-t)\,dt}$.

令 $u=x-t$ ⇒ $\int_0^x f(x-t)\,dt = \int_0^x f(u)\,du$.

$\frac{0}{0}$ 型：洛必达法则：
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x t f(t)\,dt}{x\int_0^x f(u)\,du} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{xf(x)+\int_0^x f(u)\,du} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot f(\xi)}{xf(x)+xf(\xi)} = \frac{f(0)}{2f(0)} = \frac{1}{2}$$

思考：① $\frac{0}{0}$ 型的判定．判定好再用洛必达．积分中值定理．

② 变限积分求导．积分限出现在被积函数里要先分离

③ 积分中值定理的应用．

例：设：f(x)连续，f'(0)存在，求：$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}\cdot\int_0^h f(x+h)-f(x-h)dx$

令：$x+h=u$　　$x-h=t$

$\int_0^h f(x+h)dx=\int_h^{2h}f(u)du$　　　$\int_0^h f(x-h)dx=\int_{-h}^{0}f(t)dt$

"$\frac{0}{0}$"型：洛必达.

$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}\cdot\int_0^h\left(f(x+h)-f(x-h)\right)dx=\lim\limits_{h\to0}\frac{\int_h^{2h}f(u)du-\int_{-h}^{0}f(t)dt}{h^2}$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{2\cdot f(2h)-f(h)-f(-h)}{2h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{2\cdot\left(f(0)+2\cdot f'(0)\cdot h\right)-f(0)-f'(0)\cdot h\ldots}{2h}$　$=f(0)+f'(0)h+o(h)$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{4h\cdot f'(0)+o(h)}{2h}=2f'(0)$

与导数定义结合.

*例：设：$f(x)=\int_0^x\cos\frac{1}{t}dt$ 求：$f'(0)$

* 由于 $x=0$是被积函数 $\cos\frac{1}{t}$ 间断点 => 不能直接变限积分求导 ✗.

只能用定义求. $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-\overset{0}{f(0)}}{x-0}$

但不能用洛必达法则 => 要变形

=> 分部积分：

$f(x)=\int_0^x\cos\frac{1}{t}dt=\int_0^x(-t^2)\cdot d\left(\sin\frac{1}{t}\right)=-t^2\sin\frac{1}{t}\Big|_0^x+\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}dt$

$=-x^2\sin\frac{1}{x}+\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}dt$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}2x\sin\frac{1}{x}=0$

技巧：奇偶性

对于定积分，观察积分区间是否关于原点对称

是：则可以对被积函数做拆分，奇函数在该部分直接 $I=0$

周期性：

利用对称性构造：

* $f(x)$在$[a,b]$上连续，若：$f(x)$关于$\frac{a+b}{2}$奇对称，即：对$\forall x\in[a,b]$ $f(a+b-x)=-f(x)$，

  则：$\int_a^b f(x)dx=0$。若：$f(x)$关于$\frac{a+b}{2}$偶对称：即对$\forall x\in[a,b]$，$f(a+b-x)=f(x)$

  则：$\int_a^b f(x)dx = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = 2\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)dx$

* 若：$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，$f(x)$关于$\frac{a+b}{2}$偶对称，$g(a+b-x)+g(x)=A$为常数

  则：$\int_a^b f(x)g(x)dx = \frac{A}{2}\int_a^b f(x)dx = A\cdot\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)dx = A\cdot\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx$

* $a>1$，$f(x)$、$g(x)$在$[\frac{1}{a},a]$上连续，对$\forall x\in[\frac{1}{a},a]$ $f(x)=f(\frac{1}{x})$，$g(x)+g(\frac{1}{x})=A$为常数，则：$\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)g(x)}{x}dx = \frac{A}{2}\cdot\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{x}dx = A\cdot\int_1^a\frac{f(x)}{x}dx = A\cdot\int_{\frac{1}{a}}^{1}\frac{f(x)}{x}dx$

例：$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$

令：$x=\frac{\pi}{4}-t$：$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I$，

$\Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\ln 2$。

例：$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2x+\sin x\cos x}dx$

令$f(x)=\frac{1}{\cos^2x+\sin x\cos x}$ $f(\frac{\pi}{4}-x)=f(x)$（代入得化简得）

$g(x)=x$ $\Rightarrow g(x)+g(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{\pi}{4}$

则$\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)g(x)dx=\frac{\pi}{8}\cdot\int_0^{1}f(x)dx=\frac{\pi}{8}\cdot\ln(1+\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}\ln 2$

（实际也可以令 $x=\frac{\pi}{4}-t$）

技巧：拆分、拼凑

例：$I=\int \frac{x^2+4x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$

$I=\int \frac{x^2+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx+\int \frac{4x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx+2\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}d(x^2+1)$

$=\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}+C$

例：$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}dx$；目标：$\sin^2 x$ ⇒ $\sin 2x = d\sin^2 x$

$\Rightarrow I=\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{\sin^2 x}{\sqrt2})^2}}d\frac{\sin^2 x}{\sqrt2}=\arcsin\frac{\sin^2 x}{\sqrt2}+C$

思考：* 多向拉尝试

* $\frac{1}{\sqrt{a-[f(x)]^2}}$：目标：凑 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

重要公式：

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2+A}|dx$$

($\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C\ (|x|>a)$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$)

例：$\int \frac{1}{1+\sin x}dx=\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C$

思考：分式上下同乘同式，凑

例：$\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\int \frac{dx}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}=\int \frac{2dx}{1+\cos^2 2x}=\int \frac{1}{1+\frac{1}{\cos^2 2x}}\frac{2}{\cos^2 2x}dx$

$=\int \frac{1}{2+\tan^2 2x}d(\tan 2x)=\frac{1}{\sqrt2}\arctan(\frac{1}{\sqrt2}\tan 2x)+C$

思考：* "1"

* 对偶结构：$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x$

$(\cos^2 x-\sin^2 x)^2=\sin^4 x+\cos^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x$

重要的技巧： $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$

$d\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$

例： $\int \frac{9\cos x - 8\sin x}{2\sin x + 5\cos x} dx$

首先对于三角有理式 ⇒ 可以用万能代换化为有理分式 ⇒ 可解

但这道题目可以有相对简便的算法：

$\int \frac{9\cos x - 8\sin x}{2\sin x + 5\cos x} dx$

$9\cos x - 8\sin x = A(2\sin x + 5\cos x) + B(2\sin x + 5\cos x)'$

$A = 1,\ B = 2.$

则： $I = \int \frac{(2\sin x + 5\cos x) + 2(2\sin x + 5\cos x)'}{2\sin x + 5\cos x} dx$

$= x + 2\ln|2\sin x + 5\cos x| + C$

例： $\int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$ ： $I = \int \frac{x^4+1-x^2+x^2}{x^6+1} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^6+1} dx^3$

$= \arctan x + \frac{1}{3}\arctan x^3 + C$

思考：拆分方法： x^6+1 分解：首先±i 是根 ⇒ 因式 (x^2+1)

$\Rightarrow (x^6+1) = (x^2+1)\cdot(x^4-x^2+1)$

广义积分：

无穷积分：

设：$f(x)$ 定义在 $[a,+\infty)$ 上，且对 $\forall b>a$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，如果 ~~$\int_a^b f(x)$~~ $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在

且有限：则记： $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \cancel{\int_a^b f(x)dx} \int_a^b f(x)dx$，称无穷积分收敛。

如果： $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$，$\int_c^{+\infty} f(x)dx$ 对 $\forall c\in R$ 都收敛 ⇒ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$

计算：

推广的牛顿－莱布尼兹公式：

设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可积，且有原函数 $F(x)$，则：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty)-F(a) = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty)-F(-\infty) = \lim_{b\to+\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

设：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，$\varphi(t)\in C^1[\alpha,\beta)$，$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta)$ 的值域都在 $[a,+\infty)$ 内，且 $\varphi(\alpha)=a$，$\lim_{t\to\beta^-}\varphi(t)=+\infty$。

则可变量替代：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

$f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内有连续导数，$\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x)$ 存在，$\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx$ 收敛，

则有分部积分公式：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx$$

第一类 P 积分：

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \quad (a>0)$$ $p>1$ 收敛　$p\le 1$ 发散。

无穷积分的柯西主值：

对 $\forall b>0$ $f(x)$ 在 $[-b,b]$ 上常义可积，如果：$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,dx$ 存在且有限，则称此极限为广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 的柯西主值。

* 若：$f(x)$ 为奇函数：柯西主值为0

偶：柯西主值和广义积分同敛散。

瑕积分：

设：f(x)在 $(a,b]$ 上有定义，f(x)在 a 的右邻域内无界，但对 $\forall \varepsilon\in(0,b-a)$，f(x)在 $[a+\varepsilon,b]$ 上可积，如果极限：$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ 存在且有限

则称此极限为无界函数的广义积分 —— 瑕积分 收敛.

记作：$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$

* b是瑕点时 类似定义

* a.b都是瑕点时：且f(x)在(a,b)内可积.

定义：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \quad (a<c<b)$.

如果右边二个瑕积分都收敛，则：瑕积分：

$\int_a^b f(x)dx$ 收敛

计算：推广的牛顿—莱布尼茨公式：

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0)-F(a+0)$$

f(x)在(a,b)连续，$\varphi(t)\in C^{(1)}(\alpha,\beta)$，$\varphi(t)$ 在 (α,β) 内值域都在 (a,b) 内，

$\lim\limits_{t\to\alpha^+}\varphi(t)=a$. $\lim\limits_{t\to\beta^-}\varphi(t)=b$ 时，

则 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

$\lim\limits_{t\to\alpha^+}\varphi(t)=a$. $\lim\limits_{t\to\beta^-}\varphi(t)=b$ 时，

则 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

f(x). g(x)在 (a,b) 有连续导数，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)g(x)$. $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)g(x)$ 存在. $\int_a^b f'(x)g(x)dx$ 收敛

则有：$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_{a^+}^{b^-} - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

第二类P积分：$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$ ，$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}dx$

$p<1$ 积分收敛，$p\geq1$ 积分发散

柯西主值：

设：$f(x)$在$[a,b]$的内点c ($a<c<b$)附近无界，而在不含c的任何闭子区间上可积，

如果：$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right)$ 存在，

则称为瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的柯西主值。