概率论与数理统计 B　第九周作业　4 月 14 日 周二

PB18151866 龚小航

6.15 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本, 令 $T = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$. 试求 a,b 使统计量 T 服从 χ^2 分布.

解：先写出卡方分布的定义：

设X_1,X_2 ……,X_n为相互独立且具有共同分布$N(0,1)$的随机变量，则称 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 的分布为自由度是n的 χ^2 分布，记为$X\sim\chi_n^2$

从定义可知，若统计量 T 服从 χ^2 分布，则有：

$$\begin{cases}\sqrt{a}(X_1-2X_2)\sim N(0,1)\\ \sqrt{b}(3X_3-4X_4)\sim N(0,1)\end{cases}$$

同时 $X_1,X_2,X_3,X_4\sim N(0,2^2)$由正态分布的性质，$E=\mu=0$，$Var(X_i)=\sigma^2=4$，$Var\big(N(0,1)\big)=1$

$$\begin{cases}Var\big(\sqrt{a}(X_1-2X_2)\big)=aVar(X_1)+4aVar(X_2)=a*4+4a*4\equiv 1\\ Var\big(\sqrt{b}(3X_3-4X_4)\big)=9bVar(X_3)+16bVar(X_4)=9b*4+16b*4\equiv 1\end{cases}$$

解方程，易知：

$$\begin{cases}a=0.05\\ b=0.01\end{cases}$$

6.16. 设 $X_1,X_2,\dots,X_9$ 为独立同分布的正态随机变量, 记

$$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+\dots+X_6),\qquad Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9),\qquad S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2.$$

试求 $Z=\dfrac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$ 的分布.

解：先写出正态变量线性函数的分布性质：

设X_1,X_2 ……,$X_n\sim N(a,\sigma^2)$,c_1,c_2 …… c_n为常数，则有：

$$T=\sum_{k=1}^{n}c_kX_k\sim N\left(a\sum_{k=1}^{n}c_k\,,\ \sigma^2\sum_{k=1}^{n}c_k^2\right)$$

运用于本题，写出各随机变量的分布：设X_1,X_2 ……,$X_9\sim N(a,\sigma^2)$

$$Y_1\sim N\left(a,\frac{\sigma^2}{6}\right),\quad Y_2\sim N\left(a,\frac{\sigma^2}{3}\right);$$

又由于$X_1,X_2,\dots,X_9$ 独立，Y_1,Y_2也独立，所以由独立正态分布的性质：

$$M_1\sim N(u_1,m_1^2),M_2\sim N(u_2,m_2^2)\implies M_1\pm M_2\sim N(u_1\pm u_2,\ m_1^2+m_2^2)$$

运用在本例中，有 $(Y_1-Y_2)\sim N(0,\frac{\sigma^2}{2})$

再运用重要推论 1：

$$(Y_1-Y_2)\sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{2}\right)\quad \text{将其标准化，得：}\quad \frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{\sigma}\sim N(0,1)$$

运用正态变量样本均值和样本方差的分布定理 1：

S^2恰是X_7,X_8,X_9的样本方差，Y_2为其样本均值。由定理，可知：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi_{n-1}^2=\chi_2^2\qquad\Rightarrow\frac{S^2}{\sigma^2}\sim\frac{\chi_2^2}{2}$$

且Y_2和S^2相互独立。

按定义有：

$$Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}=\frac{\dfrac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{\sigma}}{\sqrt{\dfrac{S^2}{\sigma^2}}}\sim t_2$$

6.19. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_\mathrm{n}$是从两点分布 $B(1,p)$ 中抽取的简单样本, $0<p<1$, 记 $\overline{X}$ 为样本均值.

求 $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 的期望.

解：直接写出题中要求的期望：

$$E(S_n^2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\overline{X}^2\right) = \frac{1}{n}E\left(nx_i^2\right) - E\left(\overline{X}^2\right) = p - E\left(\overline{X}^2\right)$$

$$\Rightarrow\ E\left(\overline{X}^2\right) = E\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right) = \frac{1}{n^2}E\left(\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right) = \frac{1}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 + \sum X_iX_j\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right) + \frac{2}{n^2}E\left(\frac{n(n-1)}{2}x_1x_2\right) = \frac{p}{n} + \frac{n-1}{n}p^2$$

$$\Rightarrow\ E(S_n^2) = p - E\left(\overline{X}^2\right) = p - \frac{p}{n} - \frac{n-1}{n}p^2 = \frac{n-1}{n}p(1-p)$$

7.2. 设总体 X 的概率分布如下表, 其中 $0<p_1, p_2<1$ 为未知参数. 现从此总体中抽出一样本量为 n 的简单随机样本, 其中 1 出现了n_1次, 2 出现了 n_2 次, 3 出现了 n_3 次. 试求p的矩估计.

X	1	2	3
P	p_1	p_2	$1-p_1-p_2$

解：直接由X的分布表，可以得到：

$$E(X) = 1*p_1 + 2*p_2 + 3*(1-p_1-p_2) = 3 - 2p_1 - p_2$$

$$E(X^2) = 1*p_1 + 4*p_2 + 9*(1-p_1-p_2) = 9 - 8p_1 - 5p_2$$

再列出样本S的$E(S)$与$E(S^2)$：

$$E(S) = \frac{1}{n}(n_1 + 2n_2 + 3n_3) = \frac{1}{n}(n_1 + 2n_2 + 3(n-n_1-n_2)) = \frac{3-2n_1-n_2}{n}$$

$$E(S^2) = \frac{1}{n}(n_1 + 4n_2 + 9n_3) = \frac{1}{n}(n_1 + 4n_2 + 9(n-n_1-n_2)) = \frac{9-8n_1-5n_2}{n}$$

用样本S来估计总体X： $E(S) = E(X)$; $E(S^2) = E(X^2)$

比较系数，轻易可知：

$$\begin{cases}\hat{p}_2 = \dfrac{n_1}{n} \\ \hat{p}_2 = \dfrac{n_2}{n}\end{cases}$$

7.4. 设 $X_1,\ldots,X_n$ 是总体 X 的一个简单随机样本，试求在 X 具有下列概率密度时,参数θ的矩估计.

(2) $f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\ ,\theta>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(5) $p(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

解：(2) 直接利用均值,用$\overline{X}$直接估计总体的均值$E(X)$:

$$\overline{X}=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x;\theta)\,dx=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}\,dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$

反解θ，立即得到:

$$\theta=\frac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$$

(5) 同上，直接利用均值,用$\overline{X}$直接估计总体的均值$E(X)$:

$$\overline{X}=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x;\theta)\,dx=\int_0^{\theta}x\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x)\ dx=\frac{6}{\theta^2}\int_0^{\theta}x^2\,dx-\frac{6}{\theta^3}\int_0^{\theta}x^3\,dx=\frac{1}{2}\theta$$

反解θ，立即得到:

$$\theta=2\overline{X}$$

7.5. 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{\theta^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}, & x\geq 0\,.\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$.　　　(2) 求 $\hat{\theta}$ 的方差.

解：(1) 直接利用均值,用$\overline{X}$直接估计总体的均值$E(X)$:

$$\overline{X}=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x;\theta)\,dx=\int_0^{\infty}x\frac{4x^2}{\theta^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}dx=\frac{2}{\theta^3\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}dx^2=\frac{2*\theta^4}{\theta^3\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}te^{-t}\,dt$$
$$=\frac{2\theta}{\sqrt{\pi}}\left(-te^{-t}\Big|_{t=0}^{\infty}+\textstyle\int_0^{\infty}e^{-t}\,dt\right)=\frac{2\theta}{\sqrt{\pi}}$$

反解θ，立即得到:

$$\hat{\theta}=\frac{\sqrt{\pi}\,\overline{X}}{2}$$

(2) 直接将矩估计量带入求方差即可:

$$Var(\hat{\theta})=Var\left(\frac{\sqrt{\pi}\,\overline{X}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}Var(\overline{X})=\frac{\pi}{4}Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{\pi}{4n^2}Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$$

由于$X_1,X_2,\ldots,X_n$是独立的，和的方差能够拆分为方差的和:

$$Var(\hat{\theta})=\frac{\pi}{4n^2}Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{\pi}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)$$

所以只需计算出总体 X 的方差。为此，先算出$E(X^2)$:

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x;\theta)\,dx=\int_0^{\infty}x^2\frac{4x^2}{\theta^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}dx=\frac{4}{\theta^3\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}x^4e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}dx=\frac{4*\theta^5}{\theta^3\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}t^4e^{-t^2}\,dt$$
$$=\frac{4\theta^2}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}t^3e^{-t^2}\Big|_{t=0}^{\infty}+\frac{3}{2}\textstyle\int_0^{\infty}t^2e^{-t^2}\,dt\right)=\frac{6\theta^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}t^2e^{-t^2}\,dt$$
$$=\frac{6\theta^2}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}te^{-t^2}\Big|_{t=0}^{\infty}+\frac{1}{2}\textstyle\int_0^{\infty}e^{-t^2}\,dt\right)=\frac{3\theta^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}\,dt$$
$$=\frac{3\theta^2}{\sqrt{\pi}}*\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{3\theta^2}{2}$$

因而$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\dfrac{3\theta^2}{2}-\left(\dfrac{2\theta}{\sqrt{\pi}}\right)^2=\dfrac{3\theta^2}{2}-\dfrac{4\theta^2}{\pi}$

$$\Rightarrow\quad Var(\hat{\theta})=\frac{\pi}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)=\frac{\pi}{4n^2}*n*\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi}\right)\theta^2=\frac{3\pi-8}{8n}\theta^2$$

概率论与数理统计 B　第九周作业　4 月 17 日 周五

PB18151866 龚小航

7.10. 设 $X_1,\dots,X_n$ 是总体 X 的一个随机样本，试求在 X 具有下列概率密度时,参数θ的极大似然估计：

$$p(x;\theta)=(x-1)\theta^2(1-\theta)^{x-2},x=2,3,\cdots\cdots;\ 0<\theta<1$$

解：显然$p(x;\theta)$关于θ是非单调的，则似然函数为：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\theta^2(1-\theta)^{x_i-2}$$

对其取对数后求导，导数为 0 点即为极大似然点：

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)\ln(1-\theta)+\sum_{i=1}^{n}\ln\theta^2$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=\frac{2n}{\theta}-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)}{1-\theta}\quad 令其等于零:$$

$$\frac{2n}{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)}{1-\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i-2n}{1-\theta}\qquad\Rightarrow\qquad\theta=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=2*\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^{-1}=\frac{2}{\overline{X}}$$

这就是参数θ的极大似然估计。

7.11. 设 $X_1,\dots,X_n$ 是总体 X 的一个随机样本，试求在 X 具有下列概率密度时,参数θ的极大似然估计：

(1) $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x), & 0<x<\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$

(2) $f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^\theta, & 0<x<1\ ,\theta>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

解：(1) 显然$f(x;\theta)$关于θ是非单调的，则似然函数为：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2}{\theta^2}(\theta-x_i),\quad 0<x_i<\theta$$

对其取对数后求导，导数为 0 点即为极大似然点：

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{2}{\theta^2}(\theta-x_i)=n\ln 2-2n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln(\theta-x_i)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta-x_i}\quad 令其等于零:$$

$$\frac{2n}{\theta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta-x_i}$$

这个方程写不出显式解，记其正根为$\hat{\theta}$.因此参数θ的极大似然估计即为$\hat{\theta}$。

(2) 显然$f(x;\theta)$关于θ是非单调的，则似然函数为：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^\theta,\quad 0<x_i<1$$

对其取对数后求导，导数为 0 点即为极大似然点：

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\ln(\theta+1)x_i^\theta=n\ln(\theta+1)+\sum_{i=1}^{n}\theta\ln x_i$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\quad 令其等于零:$$

$$\theta=\frac{n}{-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$$

这就是参数θ的极大似然估计。

7.15. 设 $X_1,\ldots,X_n$ 是抽自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 $\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0$ 为未知参数。

求$\theta=P(X\geq 2)$的极大似然估计。

解：将其标准化，直接能利用标准正态分布的性质得到结果：

$$\theta=P(X\geq 2)=1-P(X\leq 2)=1-P\left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\leq\frac{2-\mu}{\sigma^2}\right)=1-\phi\left(\frac{2-\mu}{\sigma^2}\right)$$

接下来只需要算出μ,σ^2，将其带入即可得到最终结果：

利用$X_1,\ldots,X_n$极大似然的估计总体X的 μ,σ^2：

显然$f(\mu,\sigma^2)$关于μ,σ^2是非单调的，则似然函数为：

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

对其取对数后求导，导数为 0 点即为极大似然点：

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=n\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}+\sum_{i=1}^{n}\ln e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=-n\ln\sqrt{2\pi}\sigma-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$=-\frac{n}{2}\ln 2\pi\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\end{cases}\qquad\text{令其等于零:}$$

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0\ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu\ \Rightarrow\ \mu=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\overline{X}\\ \displaystyle\frac{n}{2\sigma^2}=\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\ \Rightarrow\ \sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2\end{cases}$$

将其带入θ的表达式中，即可知：

$$\theta=1-\phi\left(\frac{2-\mu}{\sigma^2}\right)=1-\phi\left(\frac{2-\overline{X}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2}\right)$$

7.17. (2014 年研究生入学考试试题) 设总体 X 的分布函数为

$$F(x;\theta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geq 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中θ为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机抽样.

(1) 求 $E(X),E(X^2)$； (2) 求θ的极大似然估计量$\hat{\theta}$；

解：(1) 直接由连续型随机变量均值的定义：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,d(F(x))=\int_{0}^{\infty}x*\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\left(-xe^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_{x=0}^{\infty}+\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx\right)=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$$

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,d(F(x))=\int_{0}^{\infty}x^2*\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\left(-x^2e^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_{x=0}^{\infty}+\int_0^\infty 2x\,e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx\right)$$

$$=\int_0^\infty 2x\,e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx^2=\theta\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{\theta}}d\left(\frac{x^2}{\theta}\right)=\theta$$

(2) 先由题中所给的分布函数写出X的概率密度函数：

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geq 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由此似然函数为：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x_i^2}{\theta}}$$

对其取对数后求导，导数为 0 点即为极大似然点：

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x_i^2}{\theta}}=n\ln 2-n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\qquad\text{令其等于零:}$$

$$\frac{n}{\theta}=\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ \Rightarrow\ \theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\qquad\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

这就是参数θ的极大似然估计。

7.33. 设总体 X 服从 Weibull 分布，密度函数为

$$f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda\alpha\cdot x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}\qquad \lambda>0,\alpha>0$$

设 $X_1,\ldots,X_n$为此总体中抽取的简单样本. 若α已知，求λ的矩估计和极大似然估计.

解：先求λ的矩估计，直接利用均值，由概率密度函数可知：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,\lambda)\,dx=\int_{0}^{\infty}x*\lambda\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}\,dx=\int_{0}^{\infty}\lambda xe^{-\lambda x^{\alpha}}\,dx^{\alpha}=\int_{0}^{\infty}\lambda*\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}(\lambda x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}e^{-\lambda x^{\alpha}}\,dx^{\alpha}$$

$$=\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\int_{0}^{\infty}(\lambda x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}e^{-\lambda x^{\alpha}}\,d(\lambda x^{\alpha})=\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\int_{0}^{\infty}(t)^{\frac{1}{\alpha}}e^{-t}\,d(t)\quad=\quad\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)$$

所以用$\overline{X}$估计总体的$E(X)$，可得：

$$\overline{X}=\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\quad\Longrightarrow\quad\hat{\lambda}=\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\overline{X}}\right)^{\alpha}$$

再求λ的极大似然估计。似然函数为：

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda\alpha x_i^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}$$

对其取对数后求导，导数为 0 点即为极大似然点：

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\ln\lambda\alpha x_i^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}=n\ln\lambda+n\ln\alpha+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\sum_{i=1}^{n}\lambda x_i^{\alpha}$$

$$\Longrightarrow\quad\frac{\partial\ln L}{\partial\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x^{\alpha}\quad 令其等于零：$$

$$\frac{n}{\lambda}=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\qquad\Longrightarrow\qquad\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}}$$