011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平
计算机科学与技术学院

杨金龙摄

第1章 命题逻辑

1.3 命题演算的简单性质

- ❖ 命题演算L中的推理不需要借助于直观意义，但通过研究L的性质，可以从整体上把握L的形式推理的特性，从而了解L能做什么、不能做什么。
- ◆ **术语** 如果L的一条性质得到了证明(注意，不是在L中的形式证明)，则该性质称为一条关于L的**定理**。

1.3 命题演算的简单性质

❖ **定理1（单调性）**

1. 若$\Gamma \subseteq \Gamma'$且$\Gamma \vdash p$，则$\Gamma' \vdash p$；
2. 若$\vdash p$，则对任何Γ：$\Gamma \vdash p$。

证明 1. 设$\Gamma \subseteq \Gamma'$且$\Gamma \vdash p$，则依定义，存在p的一个从Γ的形式推理序列$p_1, \cdots, p_n (p_n = p)$，其中任何或者是L公理，或者是$\Gamma$中前提，或者是由它前面的公式用MP规则推出的。显然，此序列也是p的一个从Γ'的形式推理序列，故$\Gamma' \vdash p$。

2. 设$\vdash p$，即$\varnothing \vdash p$，由1得，对任何Γ：$\Gamma \vdash p$。

1.3 命题演算的简单性质

❖ **定理2**（紧致性）若$\Gamma\vdash p$，则存在有穷集$\Gamma'\subseteq\Gamma$且使$\Gamma'\vdash p$。

证明 设$\Gamma\vdash p$，则存在p的一个从Γ的形式推理序列$p_1, \cdots, p_n$ ($p_n = p$)。令$\Gamma' = \{p_1, \cdots, p_n\}\cap\Gamma$。显然，$\Gamma'$是$\Gamma$的有穷子集并且$\Gamma'\vdash p$。

◆**观察** 紧致性是自动推理的一个必要条件。

1.3 命题演算的简单性质

❖ **定义（一致/相容）** 若存在公式p使得$\Gamma\vdash p$且$\Gamma\vdash\neg p$，则称公式集Γ是不一致的/不相容的；否则，称Γ是一致的/相容的。

❖ **定理3（平凡性）** 若Γ是不相容的，则对任何p有$\Gamma\vdash p$。

证明 设Γ是不相容的。依定义，存在q使得$\Gamma\vdash q$且$\Gamma\vdash\neg q$。于是，对任何p，p的一个从Γ的形式推理序列如下：

$$q_1, \cdots, q, q_{n+1}, \cdots, \neg q, q_{m+1}, \cdots, q_{m+k}, p$$

其中$q_{m+1}, \cdots, q_{m+k}$是1.2节例4否定前件律$\vdash\neg q\rightarrow(q\rightarrow p)$的一个形式证明序列。因此，对任何$p$有$\Gamma\vdash p$。

1.3 命题演算的简单性质

- **观察** 平凡性定理表明，对任何一个公式集Γ，如果Γ是不相容的，则作为推理前提，Γ不仅无用，而且可能有害。
- **观察** 通常逻辑不对前提集提出任何要求；但明确指出，不相容的前提集在逻辑上是有问题的。

1.3 命题演算的简单性质

❖ **定理4**（演绎定理）$\Gamma\cup\{p\}\vdash q$当且仅当$\Gamma\vdash p\to q$。

证明 自修

❖ **推论**（假设三段论HS）$\{p\to q, q\to r\}\vdash p\to r$。

证明 依演绎定理，只需证明$\{p\to q,\ q\to r,\ p\}\vdash r$。下面是$r$的一个从$\{p\to q, q\to r, p\}$的形式推理：$p, p\to q, q, q\to r, r$。

❖ 不同于公理模式，假设三段论的作用类似与MP，可视为一条派生推理规则。

1.3 命题演算的简单性质

❖ 两种证明方法

1. **直接证明** 只允许使用(L1)、(L2)、(L3)和(MP)，而且必须写出全部证明根据，每一步只允许有一条证明根据。
2. **简化证明** 可以使用(L1)、(L2)、(L3)和(MP)，以及所有已经证明的定理、推论等结果，仍然要求给出全部证明根据。

◆例如，演绎定理和假设三段论的证明都是简化证明。

1.3 命题演算的简单性质

❖ 定理5（反证律）如果$\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash q$且$\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash\neg q$，则$\Gamma\vdash p$。

证明 自修

❖ 定理6（归谬律）如果$\Gamma\cup\{p\}\vdash q$且$\Gamma\cup\{p\}\vdash\neg q$，则$\Gamma\vdash\neg p$。

证明 自修

❖ 定理7（双否律）

$\{\neg\neg p\}\vdash p$；$\{p\}\vdash\neg\neg p$；$\vdash p\rightarrow\neg\neg p$；$\vdash\neg\neg p\rightarrow p$；

证明 自修

1.3 命题演算的简单性质

❖ 例1(换位律) 简化证明 $\vdash (q\to p)\to(\neg p\to\neg q)$.

证明 依演绎定理，只需证 $\{q\to p\}\vdash\neg p\to\neg q$。

1. $q\to p$	前提
2. $\neg\neg q\to q$	双否律(已证)
3. $\neg\neg q\to p$	HS1, 2
4. $p\to\neg\neg p$	双否律
5. $\neg\neg q\to\neg\neg p$	HS3, 4
6. $(\neg\neg q\to\neg\neg p)\to(\neg p\to\neg q)$	(L3)
7. $\neg p\to\neg q$	MP5, 6

1.3 命题演算的简单性质

❖ **子公式** 公式q是公式p的一个子公式，如果q在p中出现。

◆ 例如，x_1是x_1，$\neg x_1$，$x_1 \to x_2$……的子公式；$\neg(x_1 \to x_2)$的子公式有：x_1，x_2，$x_1 \to x_2$，$\neg(x_1 \to x_2)$。

❖ **定理8**（可证等价替换规则）设q是p的子公式，q'是任意公式，公式p'是在p中用q'替换q的结果。若$\vdash q \to q'$且$\vdash q' \to q$，则$\vdash p \to p'$且$\vdash p' \to p$。

❖ **例2** 依双否律，对任何公式q有$\vdash q \to \neg\neg q$且$\vdash \neg\neg q \to q$，故对任何包含子公式q的公式p，将p中的子公式q替换为$\neg\neg q$得到公式p'，则有$\vdash p \to p'$且$\vdash p' \to p$。

1.3 命题演算的简单性质

❖ **L扩展：定义联结词** 在L中可以定义其他常用联结词。

❖ 命题演算中的定义(IV)

$$p \vee q =_{df} \neg p \rightarrow q$$

$$p \wedge q =_{df} \neg(p \rightarrow \neg q)$$

$$p \leftrightarrow q =_{df} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

其中，$=_{df}$左边的表达式代表右边的表达式或公式。

❖ 补充定义后，命题演算本身的构建即告完成。

❖ 实际应用中，根据应用需求选择合适的联结词。

1.3 命题演算的简单性质

- 定义联结词表达的逻辑特性
- 命题1（∨语义的语法表达）

1° $\vdash p \to (p \vee q)$.

2° $\vdash q \to (p \vee q)$.

3° $\vdash (p \vee q) \to (q \vee p)$.

4° $\vdash (p \vee p) \to p$.

5° $\vdash \neg p \vee p$. (排中律)

- 命题2（∧语义的语法表达）

1° $\vdash (p \wedge q) \to p$.

2° $\vdash (p \wedge q) \to q$.

3° $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$.

4° $\vdash p \to (p \wedge p)$.

5° $\vdash p \to (q \to (p \wedge q))$.

6° $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$. (矛盾律)

1.3 命题演算的简单性质

❖ L的构成

I 命题语言：符号表、公式

II 推理设施：公理模式、推理规则

III 形式证明、形式推理

IV 定义联结词：$\wedge, \vee, \leftrightarrow$

❖ “实验”

同一律 $\vdash p \to p$

否定前件律 $\vdash \neg p \to (p \to q)$

……

❖ L的性质

1. 单调性：增加前提不减少结论
2. 紧致性：有限前提充分性
3. 平凡性：前提集安全性警示
4. 演绎定理：推理机制的原理
5. 反证律：推理机制的原理
6. 归谬律：推理机制的原理
7. 双否律：推理机制的原理
8. 可证等价替换规则……

1. 3 命题演算的简单性质

❖ L的构成

I 命题语言：符号表、公式

II 推理设施：公理模式、推理规则

III 形式证明、形式推理

IV 定义联结词：$\wedge, \vee, \leftrightarrow$

系统

(软件、硬件、算法……)

❖ “实验”

同一律 $\vdash p \to p$

否定前件律 $\vdash \neg p \to (p \to q)$

……

系统测试

❖ L的性质

1. 单调性：增加前提不减少结论
2. 紧致性：有限前提充分性
3. 平凡性：前提集安全性警示
4. 演绎定理：推理机制的原理
5. 反证律：推理机制的原理
6. 归谬律：推理机制的原理
7. 双否律：推理机制的原理
8. 可证等价替换规则……

系统性能和运行原理

1.3 命题演算的简单性质

思考题

1.4 演绎定理说明了什么？

1.5 直接证明$\vdash(\neg p\to p)\to p$最少需要多少步？

1.6 编程实现一个命题演算中形式推理$\Gamma\vdash p$的程序。

习题

1.3 用直接证明和简化证明方法证明 p.22: 2(3); 3(1).

1.4 用直接证明和简化证明方法证明 p.25: 1； p.28: 1(3, 4).