011094，中国科学技术大学，2020年春季学期

数理逻辑讲义

陈小平

计算机科学与技术学院

杨金龙摄

3.3 形式算术K_N

回顾：初等数论形式化

◆Peano定义的形式化理论：

(P1) $\mathrm{N}(\mathbf{0})$;

(P2) $\forall x(\mathrm{N}(x)\rightarrow\exists y!(y = x' \wedge \mathrm{N}(y)))$;

(P3) $\forall x((\mathrm{N}(x)\rightarrow\neg(\mathbf{0} = x'))$;

(P4) $\forall x\forall y((x' = y' \rightarrow x = y))$;

(P5) $p(\mathbf{0})\wedge\forall x(p(x)\rightarrow p(x'))\rightarrow\forall x p(x)$, 其中$p$是任意一阶公式。

$0 \in \mathbf{N}$.

若 $x \in \mathbf{N}$, 则 x 有且只有一个后继 $x' \in \mathbf{N}$.

对任意 $x \in \mathbf{N}, x' \neq 0$.

对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{N}$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则 $x_1' \neq x_2'$.

设 $M \subseteq \mathbf{N}$. 若 $0 \in M$, 且当 $x \in M$ 时也有 $x' \in M$, 则 $M = \mathbf{N}$.

其中，$\exists y!$代表“存在唯一的y”。

◆**观察** 以上尝试中使用了等词=，代表自然数上的相等关系，=尚未形式化。

回顾：初等数论形式化

- **等词公设E：**

  (E1) $u = u$;

  (E2) $u_k = u \to g(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) = g(u_1, \ldots, u, \ldots, u_n)$;

  (E3) $u_k = u \to (P(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) \to P(u_1, \ldots, u, \ldots, u_n))$.

- **等词公式E的效果** 等词公设E严格刻画了数学中相等关系的两条基本性质——等价性和等项可替换性。

- **定理(非正规模型存在性)** 设$E^* \subseteq K^+(Y)$是E的任何相容扩张：$E \subseteq E^*$且E^*相容，则E^*有非正规K^+模型。

- **观察** 综合以上结果，初等数论形式化将立足于等词公设E。

3. 3 形式算术K_N

- **形式算术K_N** 初等数论一个片段的应用谓词演算/一阶形式化理论。
- **K^+构成**

  1. 一阶语言$K_N(Y)$：

     - 逻辑符号：同K^+;

     - 非逻辑符号：个体常元**0**，一元后继函数符号′，二元函数符号**+**、**×**，二元常谓词符号**=**;

     - 项和公式的形成规则：同K^+;

3.3 形式算术K_N

2. 公理模式：(K1) ~ (K5)；

3. 推理规则：(MP)、(UG)；

4. 公设：

- 等词公设

(E1) $u = u$;

(E2) $u_k = u \to g(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) = g(u_1, \ldots, u, \ldots, u_n)$;

(E3) $u_k = u \to (P(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) \to P(u_1, \ldots, u, \ldots, u_n))$.

3. 3 形式算术K_N

- 算术公设：

(N1) $\neg(u' = \mathbf{0})$;	(P3)
(N2) $u' = v' \to u = v$;	(P4)
(N3) $u + \mathbf{0} = u$	加法递归定义
(N4) $u + v' = (u + v)'$	加法递归定义
(N5) $u \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$	乘法递归定义
(N6) $u \times v' = (u \times v) + u$	乘法递归定义
(N7) $p(\mathbf{0}) \wedge \forall x(p(x) \to p(x')) \to \forall x p(x)$	(P5)归纳公设

5.形式推理/形式证明：公设与公理同样使用，其余同K；

6. 定义：同K.

3.3 形式算术K_N

❖ K_N的标准模型N 预期K_N是初等数论一个片段的形式化，使得该片段是一个正规K_N模型N=(**N**, **F**, **P**)，称为K_N的标准模型，其中**N**是自然数集，**F**包含自然数集上的后继函数+1、加法函数+和乘法函数×，**P**包含自然数集上的相等关系=，满足：

$$\mathbf{0}^N\text{是}0;\ {}'^N\text{是}+1;\ \mathbf{+}^N\text{是}+;\ \mathbf{\times}^N\text{是}\times;\ \mathbf{=}^N\text{是}=。$$

❖ 定理 N是K_N的一个模型。

◆证明 由于N是一个正规K^+模型，只需验证K_N的所有算术公设p在N上是有效的：N$\models p$（自修）。

3. 3 形式算术K_N

- 简写记号 $K_N(Y)$中的下列符号简写称为K_N数字：

  $\mathbf{0}$简写为$\underline{0}$；$\mathbf{0}'$简写为$\underline{1}$；$\mathbf{0}''$简写为$\underline{2}$；…；$\mathbf{0}'^{\cdots}{}'$简写为$\underline{n}$。

- 注释 数字是K_N的简写符号，解释为N中的自然数。数字中可以出现自然数的加法和乘法运算，代表$\mathbf{0}$的后继函数$'$的多次连续复合运算，例如数字$\underline{1+3}$、$\underline{2+2}$、$\underline{3+1}$和$\underline{4}$都代表K_N项$\mathbf{0}''''$。

- 定理1 $\vdash_{K_N} \underline{n} \mathbf{+} \underline{m} \mathbf{=} \underline{n+m}$。

- 证明 自修。

- 注释 $\underline{n}\mathbf{+}\underline{m}$是两个$K_N$数字的加法运算，其中$\mathbf{+}$是$K_N$的加法函数符号；$\underline{n+m}$是一个$K_N$数字，其中+是自然数的加法运算。

3.3 形式算术K_N

❖ 定理2 $\vdash_{K_N} \underline{n} \times \underline{m} = \underline{n \times m}$。

◆ 证明 自修。

❖ 注释 定理1、2表明，自然数的加法和乘法运算可以在K_N中通过推理实现。

❖ 定理3 $\vdash_{K_N} u + v = v + u$。

❖ 定理4 $\vdash_{K_N} u \times v = v \times u$。

◆ 注释 定理3、4表明，K_N中的加法和乘法运算满足交换律。

3.3 形式算术K_N

- **定理5** 如果m=n，则$\vdash_{K_N} \underline{m} = \underline{n}$；如果m≠n，则则$\vdash_{K_N} \neg(\underline{m} = \underline{n})$。
- **注释** 以上定理表明，自然数运算可以通过K_N中的形式证明实现。
- **注释** 经过一系列K_N内定理的证明发现，自然数加法和乘法运算的主要性质（交换律、结合律、分配律、消去率…）在K_N中全部满足。
- **观察** 对比K^+用等词公设形式化相等关系的主要性质，K_N用等词公设和算术公设形式化了初等数论一个片段的主要性质。

3.3 形式算术K_N

- **讨论** 由于K_N形式化了初等数论片段N=(**N**, **F**, **P**)的主要性质，这个片段中数学命题的证明可以在K_N中完成，K_N形式证明的每一步骤都是形式化的，只使用K_N的公理、公设和推理规则；而这些命题在数学中的证明和猜想可能使用了直觉。
- **讨论** 初等数论片段N=(**N**, **F**, **P**)是K_N的模型，如果证明了K_N的相容性，即不存在p使得$\vdash_{K_N} p$和$\vdash_{K_N} \neg p$同时成立，是否就证明了初等数论片段N=(**N**, **F**, **P**)的无矛盾性？