

数理逻辑 第三周作业 3月3日 周二

PB18151866 龚小航

1、先根据定义直接证明: 【练习4 P25】

$$\vdash (x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)$$

再依据演绎定理证明它。

解: 直接证明:

- ① $x_1 \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1) \dots\dots\dots L1$
- ② $(x_1 \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1)) \dots\dots\dots L2$
- ③ $(x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1) \dots\dots\dots MP\ 1,2$
- ④ $(x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \dots\dots\dots L2$
- ⑤ $((x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2))) \rightarrow$
 $((((x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)))) \dots\dots\dots L2$
- ⑥ $(x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2) \dots\dots\dots MP\ 3,5$

利用演绎定理和简化证明: 将 $x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)$ 作为前提集

- ① $(x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \dots\dots\dots L2$
- ② $x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2) \dots\dots\dots \text{前提}$
- ③ $(x_1 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2) \dots\dots\dots MP\ 1,2$
- ④ $x_1 \rightarrow x_1 \dots\dots\dots \text{同一律}$
- ⑤ $x_1 \rightarrow x_2 \dots\dots\dots MP\ 3,4$
- ⑥ $\{x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)\} \vdash (x_1 \rightarrow x_2) \Leftrightarrow (x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2) \dots\dots\dots \text{演绎定理}$

1、直接证明下列命题（可以使用 HS 规则），之后简化证明它们： 【练习 5 P28】

$$(3) \vdash \neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$$

$$(4) \vdash \neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$$

解：由于直接证明较为冗长，分为几个部分证明：完整的直接证明将各个部分替换进证明就可以得到。因此证明依据写为黑色带圈数字表示将某部分替换进去的简写，占一行。

① 证明双否律 $\neg\neg p \rightarrow p$ ：

$$\textcircled{1} ((\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg\neg p)) \rightarrow (\neg p \rightarrow ((\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg\neg p))) \dots L1$$

$$\textcircled{2} (\neg p \rightarrow ((\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg\neg p))) \rightarrow \\ ((\neg p \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg\neg p))) \dots L2$$

$$\textcircled{3} ((\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg\neg p)) \rightarrow \\ ((\neg p \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg\neg p))) \dots HS 1,2$$

$$\textcircled{4} (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg\neg p) \dots L3$$

$$\textcircled{5} (\neg p \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg\neg p)) \dots MP 3,4$$

$$\textcircled{6} \neg p \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p) \dots L1$$

$$\textcircled{7} \neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg\neg p) \dots MP 5,6$$

$$\textcircled{8} (\neg p \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow p) \dots L3$$

$$\textcircled{9} \neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow p) \dots HS 7,8$$

$$\textcircled{10} (\neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \dots L2$$

$$\textcircled{11} (\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow p) \dots MP 9,10$$

接下来只要证明同一律 $p \rightarrow p$ ：

$$\textcircled{12} \neg p \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p) \dots L1$$

$$\textcircled{13} (\neg p \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((\neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg p)) \dots L2$$

$$\textcircled{14} (\neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg p) \dots MP 12,13$$

$$\textcircled{15} \neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg p) \dots L1$$

$$\textcircled{16} \neg p \rightarrow \neg p \dots MP 14,15$$

综上两部分证明，可以得到双否律：

$$\textcircled{17} \neg p \rightarrow p \dots MP 11,16$$

至此，①全部由直接证明完毕

② 证明换位律 $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$:

$$\textcircled{1} (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)) \dots\dots\dots L1$$

$$\textcircled{2} (\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) \dots\dots\dots L2$$

$$\textcircled{3} (p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) \dots\dots\dots HS\ 1,2$$

$$\textcircled{4} ((p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q))) \rightarrow \\ ((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) \dots\dots\dots L2$$

$$\textcircled{5} ((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) \dots\dots\dots MP\ 3,4$$

之后证明该公式前件成立:

$$\textcircled{6} \neg p \rightarrow p \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{7} (\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \dots\dots\dots L1$$

$$\textcircled{8} (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow p) \dots\dots\dots MP\ 6,7$$

所以, 接下来的任务是证明 $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$,

$$\textcircled{9} (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) \dots\dots\dots MP\ 5,8$$

$$\textcircled{10} \neg \neg q \rightarrow \neg q \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{11} (\neg \neg q \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg \neg q) \dots\dots\dots L3$$

$$\textcircled{12} q \rightarrow \neg \neg q \dots\dots\dots MP\ 10,11$$

$$\textcircled{13} (q \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow (q \rightarrow \neg \neg q)) \dots\dots\dots L1$$

$$\textcircled{14} \neg p \rightarrow (q \rightarrow \neg \neg q) \dots\dots\dots MP\ 12,13$$

$$\textcircled{15} (\neg p \rightarrow (q \rightarrow \neg \neg q)) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg q)) \dots\dots\dots L2$$

$$\textcircled{16} (\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg q) \dots\dots\dots MP\ 14,15$$

$$\textcircled{17} (\neg p \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \dots\dots\dots L3$$

$$\textcircled{18} (\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \dots\dots\dots HS\ 16,17$$

再利用 HS 可得换位律:

$$\textcircled{19} (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \dots\dots\dots HS\ 8,18$$

至此, **②**全部由直接证明完毕

由此，直接证明题目中的公式：

(3) $\vdash \neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$:

- ① $q \rightarrow (p \rightarrow q)$ L1
- ② $(q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q)$ ②
- ③ $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$ MP 1,

(4) $\vdash \neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$:

- ① $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$ L3
- ② $((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (\neg p \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)))$ L1
- ③ $\neg p \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q))$ MP 1,2
- ④ $(\neg p \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q))) \rightarrow ((\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)))$ L2
- ⑤ $(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg p \rightarrow (p \rightarrow q))$ MP 3,4
- ⑥ $\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ L1
- ⑦ $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ MP 5,6
- ⑧ $(\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg\neg p)$ ②
- ⑨ $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg\neg p$ MP 7,8
- ⑩ $\neg\neg p \rightarrow p$ ①
- ⑪ $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$ HS 9,10

再对这两个公式做简化证明:

(3) $\vdash \neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$:

- ① $q \rightarrow (p \rightarrow q)$ L1
- ② $(q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q)$ 换位律
- ③ $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$ MP 1,2

(4) $\vdash \neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$:

- ① $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ 否定前件律
- ② $(\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg\neg p)$ 换位律
- ③ $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg\neg p$ MP 1,2
- ④ $\neg\neg p \rightarrow p$ 双重否定律
- ⑤ $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$ HS 3,4

数理逻辑 第三周作业 3月5日 周四

PB18151866 龚小航

1、列出以下复合命题的真值表： 【练习1 P13】

$$(2) \neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg(q \rightarrow p)))$$

$$(7) (\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg q \rightarrow r)$$

$$(8) (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

解：(2) 该命题的真值表是：

\neg	$((p \rightarrow q)$			\rightarrow	$(\neg(q \rightarrow p)))$			
1	0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	1

(7) 该命题的真值表是：

$(\neg$	p	\wedge	$q)$	\rightarrow	$(\neg$	q	\rightarrow	$r)$
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1

(8) 该命题的真值表是：

$(p$	\rightarrow	$q)$	\rightarrow	$(p$	\rightarrow	$r)$
0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1