# 概率论与数理统计 B　第一周作业　2 月 18 日 周二

**PB18151866 龚小航**

1. 写出下列各试验的样本空间及指定事件的样本点.
   (1) 连续两次掷色子, A = {第一次掷出的值比第二次大}, B = {两次点数相等},
   C ={两次点数之和为 10}.
   (2) 连续掷硬币 3 次, A ={第一次为反面}, B ={有两个正面}, C ={三面都相同}.
   (3) 以原点为圆心的单位圆内随机取一点, A = {所取之点与原点的距离小于 1/2 },
   C ={所取之点与原点的距离小于 1/2 大于 1/3}.

解：(1)
$$\Omega=\begin{Bmatrix}\{1,\ 1\}, & \{1,\ 2\}, & \{1,\ 3\}, & \{1,\ 4\}, & \{1,\ 5\}, & \{1,\ 6\},\\ \{2,\ 1\}, & \{2,\ 2\}, & \{2,\ 3\}, & \{2,\ 4\}, & \{2,\ 5\}, & \{2,\ 6\},\\ \{3,\ 1\}, & \{3,\ 2\}, & \{3,\ 3\}, & \{3,\ 4\}, & \{3,\ 5\}, & \{3,\ 6\},\\ \{4,\ 1\}, & \{4,\ 2\}, & \{4,\ 3\}, & \{4,\ 4\}, & \{4,\ 5\}, & \{4,\ 6\},\\ \{5,\ 1\}, & \{5,\ 2\}, & \{5,\ 3\}, & \{5,\ 4\}, & \{5,\ 5\}, & \{5,\ 6\},\\ \{6,\ 1\}, & \{6,\ 2\}, & \{6,\ 3\}, & \{6,\ 4\}, & \{6,\ 5\}, & \{6,\ 6\},\end{Bmatrix}$$

$$\omega_A=\begin{Bmatrix}\{2,\ 1\},\ \{3,\ 1\},\ \{3,\ 2\},\ \{4,\ 1\},\ \{4,\ 2\},\ \{4,\ 3\},\ \{5,\ 1\},\ \{5,\ 2\},\\ \{5,\ 3\},\ \{5,\ 4\},\ \{6,\ 1\},\ \{6,\ 2\},\ \{6,\ 3\},\ \{6,\ 4\},\ \{6,\ 5\}\end{Bmatrix}$$

$$\omega_B=\left\{\{1,\ 1\},\ \{2,\ 2\},\ \{3,\ 3\},\ \{4,\ 4\},\ \{5,\ 5\},\ \{6,\ 6\}\right\}$$

$$\omega_C=\left\{\{4,\ 6\},\ \{6,\ 4\},\ \{5,\ 5\}\right\}$$

(2)
$$\Omega=\begin{Bmatrix}\{正,\ 正,\ 正\}, & \{正,\ 正,\ 反\}, & \{正,\ 反,\ 正\}, & \{正,\ 反,\ 反\},\\ \{反,\ 正,\ 正\}, & \{反,\ 正,\ 反\}, & \{反,\ 反,\ 反\}, & \{反,\ 反,\ 反\},\end{Bmatrix}$$

$$\omega_A=\left\{\{反,\ 正,\ 正\},\ \{反,\ 正,\ 反\},\ \{反,\ 反,\ 反\},\ \{反,\ 反,\ 反\}\right\}$$

$$\omega_B=\left\{\{反,\ 正,\ 正\},\ \{正,\ 反,\ 正\},\ \{正,\ 正,\ 反\}\right\}$$

$$\omega_C=\left\{\{正,\ 正,\ 正\},\ \{反,\ 反,\ 反\}\right\}$$

(3) $\Omega=\{x|0\le x<1\}$

$$\omega_A=\left\{x|0\le x<\tfrac{1}{2}\right\}$$

$$\omega_B=\left\{x|\tfrac{1}{3}<x<\tfrac{1}{2}\right\}$$

3. 某炮弹射击目标 3 次，记 Ai ={第 i 次集中目标}(i =1,2,3)，用 A1,A2,A3 表示下列事件

(1) 仅有一次击中目标.

(2) 至少有一次击中目标.

(3) 第一次击中且第二次第三次至少有一次击中.

(4) 最多击中一次.

解：(1)$E_1 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$

(2)$E_2 = A_1 + A_2 + A_3$

(3)$E_3 = A_1(A_2 + A_3)$

(4)$E_4 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$

4. 设一个试验的样本空间为[0,2]，记事件 A ＝ {$\frac{1}{2} < x \le 1$}, B ={$\frac{1}{4} < x \le \frac{3}{2}$}，写出下列各事件下列事件 (1) $A\overline{B}$,　(2) $\overline{A} \cup B$,　(3) $\overline{AB}$,　(4) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$.

解：(1) $E_1 = \phi$

(2) $E_2 = \{x|0 \le x \le 2\}$

(3) $E_3 = \{x|0 \le x \le \frac{1}{2}\text{或}\ 1 < x \le 2\}$

(4) $E_4 = \{x|\frac{1}{4} < x \le \frac{3}{2}\}$

# 概率论与数理统计 B　第一周作业　2 月 21 日 周五

**PB18151866 龚小航**

6. 设 A,B,C 是三事件，已知 P(A)=P(B)=P(C)=1/3,　P(AB)=P(BC)=1/8,　P(AC) = 0. 求 A,B,C 至少发生一个的概率.

解：$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

由于$P(A\cap C)=0$，故$P(A\cap B\cap C)\le P(A\cap C)$，$P(A\cap B\cap C)=0$

所以上式可化为：

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)=\frac{3}{4}$$

8. 市场调查员报道了如下数据:在被询问的 1000 名顾客中，有 811 人喜欢巧克力糖, 752 人喜欢夹心糖, 418 人喜欢大白兔糖, 570 人喜欢巧克力糖和夹心糖, 356 人喜欢巧克力糖和大白兔糖, 348 人喜欢夹心糖和大白兔糖以及 297 人喜欢全部三种糖果.证明这一消息有误.

解：设喜欢巧克力糖为事件 A，喜欢夹心糖为事件 B，喜欢大白兔糖为事件 C。化条件为：

$$\begin{cases} A=0.811\,,\ B=0.752\,,\ C=0.418 \\ AB=0.57\,,\ AC=0.356\,,\ BC=0.348 \\ ABC=0.297 \end{cases}$$

因此，可以得出一位被调查者选出 A 或者 B 或者 C 的概率应为：

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=0.811+0.752+0.418-0.57-0.356-0.348+0.297=1.004>1$$

由给出的数据，得到了一个大于 1 的结果，这显然是不可能的

11. 袋中有 a 个白球, b 个黑球，现任意不放回的一一摸出，求第 k 次取出白球的概率。

解：由于没有约束条件，每次取球是独立事件。从平均上来看，每次取球取出一个球，即取出$\frac{a}{a+b}$个白球，$\frac{b}{a+b}$个黑球，保持袋中黑白球的比例不变。所以第 k 次取出白球的概率也为$\frac{a}{a+b}$

19. 某小学一年级有 8 个班，二年级有 6 个班，三年级有 4 个班. 如果将所有班级随机分成 3 组，每组班级数相同. 求每组都有三年级班的概率是多少?

解：一共有班级 18 个，每组班级数相同，故分为 3 组，每组 6 个班级。由于 6>4，可以看作将三年级的 4 个班分成 3 堆。记三个组为 A,B,C，4 个班级为 x，y，z，t，对于每个班级，有三种分组可能，故总可能数=$3^4$=81 种，而符合题意的种类有：

$A_4^3 * C_3^1/2$=36 种，故每组都有三年级班的概率为 36/81=44.44%

23. 甲乙两选手进行乒乓球单打比赛，已知在每局中甲胜的概率为 p(p>1/2)，乙胜的概率为 1-p. 比赛可采用三局两胜制或五局三胜制，问哪一种比赛制度对甲更有利?

解：①五局三胜制，若甲获得胜利，则甲胜 3 局，可记为 甲 甲 甲，且最后一局必定是甲获胜。故用插空法，向其中插入至多 2 个乙。故按照乙的个数，可分为三种情况。

·乙胜 0 局，共进行 3 局，这种情况概率为：$P(E_1) = p*p*p = p^3$

·乙胜 1 局，共 4 局，这种情况概率为：$P(E_2) = p*p*p*(1-p)*C_3^1 = 3p^3(1-p)$

·乙胜 2 局，共 5 局，乙乙插入情况分为绑在一起插一个空和分开插两个空：

$$P(E_3) = p*p*p*(1-p)*(1-p)*(C_3^2 + C_3^1) = 6p^3(1-p)^2$$

②三局两胜制，同上，若甲获得胜利，则甲胜 2 局，可记为 甲 甲，且最后一局必定是甲获胜。仍用插空法，向其中插入至多个乙。故按照乙的个数，分为 2 种情况。

·乙胜 0 局，共进行 2 局，这种情况概率为：$P(E_1') = p*p = p^2$

·乙胜 1 局，共 4 局，这种情况概率为：$P(E_2') = p*p*(1-p)*C_2^1 = 2p^2(1-p)$

将上述得到的甲胜概率相减，可得：

$$\begin{aligned}\Delta P &= p^3 + 3p^3(1-p) + 6p^3(1-p)^2 - p^2 - 2p^2(1-p)\\ &= p^2\big(p + 3p(1-p) + 6p(1-p)^2 - 1 - 2(1-p)\big)\\ &= 3p^2(p + p(1-p) + 2p(1-p)^2 - 1)\\ &= 3p^2(2p^3 - 5p^2 + 4p - 1) \qquad (1/2 < p \le 1)\end{aligned}$$

故只需考虑在自变量范围内，函数 $y(p) = 2p^3 - 5p^2 + 4p - 1$ 的取值情况。

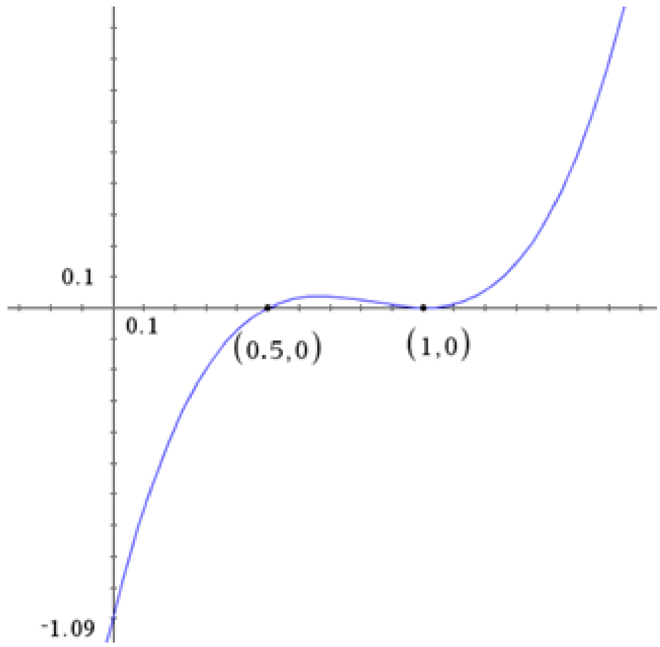
$y' = 6p^2 - 10p + 4 = 2(p-1)(3p-2)$ 极值点 p=1 或 p=2/3

带入，$y(1) = 0$，$y\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{27} > 0$ 恰发现一个零点，可以对 y 做因式分解：

$$y = 2p^3 - 5p^2 + 4p - 1 = (2p-1)(p-1)^2$$

因此 p=1/2 恰是 y 的另一个零点，而 p=2/3 时 y 取极大值。可知$1/2 \le p < 2/3$时 $y' > 0$；$2/3 \le p < 1$时，$y' < 0$，在两个端点 y=0.故可得$1/2 < p \le 1$时，y>0

所以在甲胜率大于一半时，选择五局三胜更有利于甲胜利。



27. 设某袋子中有红白黑三种颜色的球, 红色球的数目是白球的 2 倍, 黑球为红球的 1/3, 试求从袋中随机摸出一球恰好是白球的概率.

解：设白球有 x 个，由题意，可得红球有 2x 个，黑球有$\frac{2}{3}x$个，共有球$\frac{11}{3}x$个

所以摸出白球的概率为：$P(E_1)=\frac{x}{\frac{11}{3}x}=\frac{3}{11}$

31. 在一种双骰子博弈中, 玩家投两枚骰子, 如果其和是 7 或 11, 则玩家赢; 如果其和是 2, 3 或者 12, 玩家输; 若是其他结果时就继续玩, 直到玩家输或者赢为止.
计算玩家赢的概率.

$$
解：\Omega=\left\{\begin{matrix}
\{1,\ 1\}, & \{1,\ 2\}, & \{1,\ 3\}, & \{1,\ 4\}, & \{1,\ 5\}, & \{1,\ 6\}, \\
\{2,\ 1\}, & \{2,\ 2\}, & \{2,\ 3\}, & \{2,\ 4\}, & \{2,\ 5\}, & \{2,\ 6\}, \\
\{3,\ 1\}, & \{3,\ 2\}, & \{3,\ 3\}, & \{3,\ 4\}, & \{3,\ 5\}, & \{3,\ 6\}, \\
\{4,\ 1\}, & \{4,\ 2\}, & \{4,\ 3\}, & \{4,\ 4\}, & \{4,\ 5\}, & \{4,\ 6\}, \\
\{5,\ 1\}, & \{5,\ 2\}, & \{5,\ 3\}, & \{5,\ 4\}, & \{5,\ 5\}, & \{5,\ 6\}, \\
\{6,\ 1\}, & \{6,\ 2\}, & \{6,\ 3\}, & \{6,\ 4\}, & \{6,\ 5\}, & \{6,\ 6\},
\end{matrix}\right\}
$$

$\omega_{win}=\{\{1,\ 6\},\ \{2,\ 5\},\ \{3,\ 4\},\ \{4,\ 3\},\ \{5,\ 2\},\ \{5,\ 6\},\ \{6,\ 1\},\ \{6,\ 5\}\}$

$\omega_{lost}=\{\{1,\ 1\},\ \{1,\ 2\},\ \{2,\ 1\},\ \{6,\ 6\}\}$

所以，$P_{win\_1}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$　　$P_{lost\_1}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$　　$P_{contiune}=\frac{2}{3}$

胜利的总概率为$\sum_{i=1}^{\infty}$(*第i次胜利并且结束的概率*)

$$P_{win}=\frac{2}{9}+\left(\frac{2}{3}\right)*\frac{2}{9}+\left(\frac{2}{3}\right)^2*\frac{2}{9}+\cdots\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n*\frac{2}{9}+\cdots\cdots=\frac{2}{9}*\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$=\frac{2}{9}*\lim_{n\to\infty}\left(1*\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\right)=\frac{2}{9}*3=\frac{2}{3}$$