数学物理方程 B　第七周作业　3 月 31 日 周二

PB18151866 龚小航

2.1 求方程$y''+\lambda y=0\ (0<x<l)$在下列边界条件下的固有值和固有函数：

(1) $y'(0)=0$，$y(l)=0$；

(2) $y'(0)=0$，$y'(l)+hy(l)=0$；

(3) $y'(0)-ky(0)=0$，$y'(l)+hy(l)=0\quad(k,h>0)$；

解：求解固有值问题，即寻求对怎样的固有值λ，常微分方程的边值问题有非零解。

(1) 对λ的正负取值分三种情况讨论：

① $\lambda=0$：这时方程成为：$y''=0$，其通解为 $Y=Ay+B$，$Y'=A$. 再带入边界条件确定参数A,B

$$\begin{cases} y'(0)=A\equiv 0 \\ y(l)=Al+B\equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$$

所以此时方程仅有零解$y(x)\equiv 0$，这种情况需要舍去。

② $\lambda<0$：不妨令 $\lambda=-k^2$，这时方程成为：$y''-k^2y=0$，该方程的通解为：

$$y(x)=Ae^{kx}+Be^{-kx}\ ;\quad y'(x)=Ake^{kx}-Bke^{-kx}$$

再带入边界条件确定参数A,B,k：

$$\begin{cases} y'(0)=Ak-Bk\equiv 0 \\ y(l)=Ae^{kl}+Be^{-kl}\equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$$

所以此时方程仅有零解$y(x)\equiv 0$，这种情况也需要舍去。

③ $\lambda>0$：不妨令 $\lambda=k^2\ (k>0)$，这时方程成为：$y''+k^2y=0$，该方程的通解为：

$$y(x)=A\cos kx+B\sin kx\ ;\quad y'(x)=-kA\sin kx+kB\cos kx$$

再带入边界条件确定参数A,B,k：

$$\begin{cases} y'(0)=kB\equiv 0 \\ y(l)=A\cos kl+B\sin kl\equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} \cos kl=0 \\ B=0 \end{cases}$$

$A=0$ 的解不是要求的解。关注 $\cos kl=0$：$kl=\dfrac{\pi}{2}+n\pi \quad\Rightarrow\quad k=\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}$

综上三种穷尽λ所有取值可能的情况，可以得到：

固有值：$\lambda_n=k^2=\dfrac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}\ (n\in\mathbb{N})$；固有函数：$y_n(x)=A_n\cos\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x\ \ (A_n\in\mathbb{R})$

(2) 对λ的正负取值分三种情况讨论：

① $\lambda=0$：这时方程成为：$y''=0$，其通解为 $Y=Ay+B$，$Y'=A$. 再带入边界条件确定参数A,B

$$\begin{cases} y'(0)=A\equiv 0 \\ y'(l)+hy(l)=A+h(Al+B)\equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$$

所以此时方程仅有零解$y(x)\equiv 0$，这种情况需要舍去。

② $\lambda<0$：不妨令 $\lambda=-k^2$，这时方程成为：$y''-k^2y=0$，该方程的通解为：

$$y(x)=Ae^{kx}+Be^{-kx}\ ;\quad y'(x)=Ake^{kx}-Bke^{-kx}$$

再带入边界条件确定参数A,B,k：

$$\begin{cases} y'(0)=Ak-Bk\equiv 0 \\ y'(l)+hy(l)=Ake^{kl}-Bke^{-kl}+h(Ae^{kl}+Be^{-kl})\equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$$

所以此时方程仅有零解$y(x)\equiv 0$，这种情况也需要舍去。

③ $\lambda>0$：不妨令 $\lambda=k^2\ (k>0)$，这时方程成为：$y''+k^2y=0$，该方程的通解为：

$$y(x)=A\cos kx+B\sin kx\ ;\quad y'(x)=-kA\sin kx+kB\cos kx$$

再带入边界条件确定参数A,B,k：

$$\begin{cases} y'(0)=kB\equiv 0 \\ y'(l)+hy(l)=-kA\sin kl+kB\cos kl+h(A\cos kl+B\sin kl)\equiv 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} k\sin kl=h\cos kl \\ B=0 \end{cases}$$

$A=0$ 的解不是要求的解。关注 $k\sin kl=h\cos kl$：　$k\tan kl=h$

这个方程写不出显式解。记这个方程的一系列正根为k_n。

固有值：$\lambda_n=k_n^2$；固有函数：$y_n(x)=A_n\cos k_nx\ \ (A_n\in\mathbb{R})$

综上三种穷尽λ所有取值可能的情况，固有值和固有函数已在上方给出。

(3) 对λ的正负取值分三种情况讨论：

① $\lambda=0$：这时方程成为：$y''=0$，其通解为 $Y=Ay+B$，$Y'=A$. 再带入边界条件确定参数A,B

$$\begin{cases} y'(0)-ky(0)=A-kB\equiv 0 \\ y'(l)+hy(l)=A+h(Al+B)\equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$$

所以此时方程仅有零解$y(x)\equiv 0$，这种情况需要舍去。

② $\lambda<0$：不妨令 $\lambda=-k^2$，这时方程成为：$y''-k^2y=0$，该方程的通解为：

$$y(x)=Ae^{kx}+Be^{-kx}\ ;\quad y'(x)=Ake^{kx}-Bke^{-kx}$$

再带入边界条件确定参数A,B,k：

$$\begin{cases} y'(0)-ky(0)=Ak-Bk-k(A+B)\equiv 0 \\ y'(l)+hy(l)=Ake^{kl}-Bke^{-kl}+h(Ae^{kl}+Be^{-kl})\equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$$

所以此时方程仅有零解$y(x)\equiv 0$，这种情况也需要舍去。

③ $\lambda>0$：不妨令 $\lambda=t^2\ \ (t>0)$，这时方程成为：$y''+t^2y=0$，该方程的通解为：

$$y(x)=A\cos tx+B\sin tx\ ;\quad y'(x)=-tA\sin tx+tB\cos tx$$

再带入边界条件确定参数A,B,k：

$$\begin{cases} y'(0)-ky(0)=tB-kA\equiv 0 \\ y'(l)+hy(l)=-tA\sin tl+tB\cos tl+h(A\cos tl+B\sin tl)\equiv 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} \left(t-\dfrac{kh}{t}\right)\tan tl=h+k \\ B=\dfrac{k}{t}A \end{cases}$$

$A=0$ 的解不是要求的解。关注 $\left(t-\dfrac{kh}{t}\right)\tan tl=h+k$

这个方程写不出显式解。记这个方程的一系列正根为t_n。

固有值：$\lambda_n=k_n^2$；固有函数：$y_n(x)=A_n\cos t_nx+\dfrac{k}{t_n}A_n\sin t_nx\ \ (A_n\in\mathbb{R})$

综上三种穷尽λ所有取值可能的情况，固有值和固有函数已在上方给出。

2.2 解下列固有值问题：

$$(1)\begin{cases} y''-2ay'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases} \left(0<x<1, a\text{为常数}\right)$$

$$(2)\begin{cases} (r^2R')'+\lambda r^2 R=0 \\ |R(0)|<\infty\text{；}R(a)=0 \end{cases} (0<r<a)$$

解：(1) 这个方程是二阶线性常系数齐次方程，可以根据特征方程求解：

特征方程：$u^2-2au+\lambda=0;\quad \Delta=(-2a)^2-4\lambda=4(a^2-\lambda)$

① $\lambda=a^2$：此时有$\Delta=0$，此时二阶线性常系数齐次方程具有通解形式 $y=(A+Bx)e^{Cx}$

带入边界条件$y(0)=y(1)=0$，并且满足原方程，可以解出：

$$A=0\text{；}B=0\text{；}C=a$$

因此这种情况下方程只有零解，舍去。

② $\lambda<a^2$：此时有$\Delta>0$，可以从特征方程解出两个不相等的实根：

$$u_1=a+\sqrt{a^2-\lambda}\text{；}\ u_2=a-\sqrt{a^2-\lambda}$$

这时二阶线性常系数齐次方程具有通解形式 $y=Ae^{u_1x}+Be^{u_2x}$.

待定其系数：$y(0)=y(1)=0$，并且满足原方程。可解出：

$$A=0\text{；}B=0$$

因此这种情况下方程亦只有零解，舍去。

③ $\lambda>a^2$：此时有$\Delta<0$，特征方程有两个共轭复根。

$$u_1=a+i\sqrt{\lambda-a^2}\text{；}\ u_2=a-i\sqrt{\lambda-a^2}$$

二阶线性常系数齐次方程具有通解形式：$y=e^{ax}\left(A\cos\sqrt{\lambda-a^2}x+B\sin\sqrt{\lambda-a^2}x\right)$

待定其系数：$y(0)=y(1)=0$，并且满足原方程。可解出：

$$A=0\text{；}\sin\sqrt{\lambda-a^2}=0\quad\Longrightarrow\quad \lambda_n=a^2+n^2\pi^2\quad(n\in\mathbb{Z})$$

综上三种穷尽λ所有取值可能的情况，原方程的解为：

$$y_n(x)=C_ne^{ax}\sin n\pi x\quad(C_n\in\mathbb{R},n\in\mathbb{Z})$$

(2) 先将原方程展开：$r^2R''+2rR'+\lambda r^2R=0\Longrightarrow rR''+2R'+\lambda rR=0$

换元，令 $y=rR$，则有：$y'=rR'+R$，$y''=rR''+2R'$，发现原方程恰可以替换为：

$$y''+\lambda y=0\quad(y=y(r);\ y(0)=y(a)=0)$$

这就是标准的固有值问题，也是二阶线性常系数齐次方程。特征方程 $u^2+\lambda=0,\Delta=-4\lambda$：

① $\lambda=0$：此时方程为$y''=0$，该方程的通解为 $y=A+Br$.

待定其系数，$y(0)=y(a)=0\ \Longrightarrow\ A=B=0$

因此这种情况下方程只有零解，舍去。

② $\lambda<0$：此时有$\Delta>0$，可以从特征方程解出两个不相等的实根：

$$u_1=-\sqrt{-\lambda}\text{；}\ u_2=\sqrt{-\lambda}$$

这时二阶线性常系数齐次方程具有通解形式 $y=Ae^{u_1x}+Be^{u_2x}$.

待定其系数：$y(0)=y(a)=0$，并且满足原方程。可解出：

$$A=0\text{；}B=0$$

因此这种情况下方程亦只有零解，舍去。

③ $\lambda>0$：此时有$\Delta<0$，特征方程有两个共轭复根。

$$u_1=-i\sqrt{\lambda}\text{；}\ u_2=i\sqrt{\lambda}$$

二阶线性常系数齐次方程具有通解形式：$y=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$

待定其系数：$y(0)=y(a)=0$，并且满足原方程。可解出：

$$A=0\text{；}\sin\sqrt{\lambda}a=0\quad\Longrightarrow\quad\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{a^2}\quad(n\in\mathbb{Z})$$

综上三种穷尽λ所有取值可能的情况，原方程的解为：

$$y_n(r)=C_n\sin\frac{n\pi r}{a}\quad(C_n\in\mathbb{R},n\in\mathbb{Z})$$

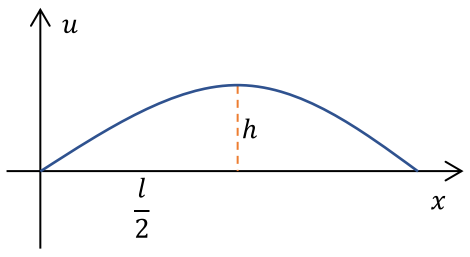
$$\Longrightarrow\quad R_n(r)=\frac{C_n}{r}\sin\frac{n\pi r}{a}\quad(C_n\in\mathbb{R},n\in\mathbb{Z})$$

2.3 一条均匀的弦固定于$x=0$及$x=1$，在开始的一瞬间，它的形状是一条以$\left(\frac{l}{2},h\right)$为顶点的抛物线，初速度为 0，且没有外力作用，求弦做横振动的位移函数。

解：这是有界弦的振动问题。直接可列出振动方程：（$u=u(t,x)$描述有界弦的位移）

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & \text{（振动方程）} \\ u(t,0)=u(t,l)=0 & \text{（端点固定）} \\ u_t(0,x)=0 & \text{（初速度为零）} \\ u(0,x)=\varphi(x) & \text{（初始位移给出）} \end{cases} \qquad a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}\ ;0\le x\le l\,;t\ge 0$$

再根据题中给出的开始瞬间弦的形状，列出抛物线方程$\varphi(x)$：



$$\varphi(x)=Ax(x-l)$$

再根据抛物线过点 $(l/2,h)$,带入其中待定A：

$$A=\frac{-4h}{l^2};$$

$$\Rightarrow\ \varphi(x)=\frac{-4h}{l^2}x(x-l)$$

利用分离变量法，求解有界弦的自由振动：

$$\text{令 } u(t,x)=X(x)T(t),\text{带入振动方程} \Rightarrow \frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

这样就得到两个常微分方程的边值问题。先对X的边值问题求解：

$$I:\ \begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$$

解固有值问题：即寻求对怎样的固有值λ，上方的边值问题有非零解：

① $\lambda=0$：此时方程为 $X''(x)=0$，该方程的通解为 $X=Ax+B$.

待定其系数，$X(0)=X(l)=0\ \Rightarrow\ A=B=0$

因此这种情况下方程只有零解，舍去。

② $\lambda<0$：此时有$\Delta>0$，可以从特征方程解出两个不相等的实根：

$$u_1=-\sqrt{-\lambda}\ ;\ \ u_2=\sqrt{-\lambda}$$

这时二阶线性常系数齐次方程具有通解形式 $X=Ae^{u_1x}+Be^{u_2x}$.

待定其系数：$X(0)=X(l)=0$，并且满足原方程。可解出：

$$A=0\ ;\ B=0$$

因此这种情况下方程亦只有零解，舍去。

③ $\lambda>0$：此时有$\Delta<0$，特征方程有两个共轭复根。

$$u_1=-i\sqrt{\lambda}\ ;\ \ u_2=i\sqrt{\lambda}$$

二阶线性常系数齐次方程具有通解形式：$X=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$

待定其系数：$X(0)=X(l)=0$，并且满足原方程。可解出：

$$A=0\ ;\ \sin\sqrt{\lambda}l=0\quad\Rightarrow\quad \lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}\quad (n\in\mathbb{Z})$$

综上三种穷尽λ所有取值可能的情况，固有值已在上方给出。与此固有值对应的固有函数为：

$$X_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\quad (B_n\in\mathbb{R},n\in\mathbb{Z})$$

再考虑确定T的常微分方程：

$$II:\ \ T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$$

$$\Rightarrow\ \ T''(t)+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T(t)=0$$

这个常微分方程的解为：$T_n(t)=C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}\quad (C_n,D_n\in\mathbb{R})$

由此可以写出方程和边界条件的一列解：（已经将B_n并入C_n,D_n）

$$u_n(t,x)=X_n(x)T_n(t)=\left(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\quad (n\in\mathbb{Z}^+)$$

再将特解列叠加，写出级数形式解。方程和边界条件都是线性齐次的，由叠加原理 2：

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

再依据初始条件、边界条件确定系数C_n,D_n：

$$u_t(0,x)=0\quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}D_n\frac{n\pi at}{l}\cos\left(\frac{n\pi a}{l}*0\right)=0\quad\Rightarrow\quad D_n=0$$

$$u(0,x)=\varphi(x)\quad\Rightarrow\quad u(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{-4h}{l^2}x(x-l)$$

由正弦展开的系数公式，得：

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{-4h}{l^2}x(x-l)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{-8h}{l^3}\int_0^l(x^2-lx)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

将 x^2-lx 项拆开，分别与后项相乘，分为两个积分。利用三次分部积分，最终结果为：

$$C_n=\frac{-8h}{\pi^3n^3}(2\cos n\pi+n\pi\sin n\pi-2)=\frac{-16h}{\pi^3n^3}(\cos n\pi-1)=\frac{32h}{\pi^3(2k+1)^3}$$

最后将C_n,D_n带入，得到原问题的解为：

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{32h}{\pi^3(2k+1)^3}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}$$

2.4 利用圆内狄氏问题的一般形式，解边值问题：

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0\ (r<a)\\ u|_{r=a}=f\end{cases}\quad u=u(r,\theta)$$

其中，f分别为：

(1) $f=A$（常数）　　(2) $f=A\cos\theta$　　(3) $f=Axy$

(4) $f=\cos\theta\sin 2\theta$　　(5) $f=A\sin^2\theta+B\cos^2\theta$

解：在极坐标下，二维拉普拉斯方程为：

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$$

直接写出$\Delta_2 u=0$在极坐标系下解的级数表达形式：

$$u(r,\theta)=A_0+B_0\ln r+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k r^k+B_k r^{-k})(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta)$$

本题在圆内解题，当$r\to 0$时，$\ln r$与r^{-k}都将趋于无穷，为了保证解的有界性，有$B_i=0$

级数解成为：（已经将A_n并入C_n,D_n）

$$u(r,\theta)=\frac{C_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}r^k(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta)$$

(1) $f=A$，将 $u|_{r=a}=f$ 带入级数解：

$$u(a,\theta)=\frac{C_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a^k(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta)=f(\theta)=A$$

这实际上就是$f(\theta)$按三角函数系$\{\cos k\theta,\sin k\theta\}$的傅里叶展开，因此有：

$$C_k=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}A\cos k\varphi\,d\varphi=0$$

$$D_k=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin k\varphi\,d\varphi=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}A\sin k\varphi\,d\varphi=0$$

$$C_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}Ad\varphi=2A$$

所以原问题的解为：

$$u(r,\theta)=A$$

(2) $f=A\cos\theta$，将 $u|_{r=a}=f$ 带入级数解，同上：

$$C_k=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}A\cos\varphi\cos k\varphi\,d\varphi=\begin{cases}\dfrac{A}{a},\ k=1\\ 0,\ k>1\end{cases}$$

$$D_k=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin k\varphi\,d\varphi=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}A\cos\varphi\sin k\varphi\,d\varphi=0$$

$$C_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}A\cos\varphi\,d\varphi=0$$

所以原问题的解为：

$$u(r,\theta)=\frac{A}{a}r\cos\theta$$

(3) $f=Axy=Aa^2\cos\theta\sin\theta$，将 $u|_{r=a}=f$ 带入级数解，同上：

$$C_k=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}Aa^2\cos\varphi\sin\varphi\cos k\varphi\,d\varphi=0$$

$$D_k=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin k\varphi\,d\varphi=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}Aa^2\cos\varphi\sin\varphi\sin k\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{Aa^2}{2a^k\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2\varphi\sin k\varphi\,d\varphi=\begin{cases}\dfrac{A}{2},\ k=2\\ 0,\ k\neq 2\end{cases}$$

$$C_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}Aa^2\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi=0$$

所以原问题的解为：

$$u(r,\theta)=\frac{A}{2}r^2\sin 2\theta$$

(4) $f=\cos\theta\sin 2\theta$，将 $u|_{r=a}=f$ 带入级数解，同上：

$$C_k=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin 2\varphi\cos k\varphi\,d\varphi=0$$

$$D_k=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin k\varphi\,d\varphi=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin 2\varphi\sin k\varphi\,d\varphi=\begin{cases}\dfrac{1}{2a},\ k=1\\ \dfrac{1}{2a^3},\ k=3\\ 0,\ others\end{cases}$$

$$C_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin 2\varphi\,d\varphi=0$$

所以原问题的解为：

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\sin\theta+\left(\frac{r}{a}\right)^3\sin 3\theta\right)$$

(5) $f=A\sin^2\theta+B\cos^2\theta$，将 $u|_{r=a}=f$ 带入级数解，同上：

$$C_k=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}(A\sin^2\varphi+B\cos^2\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi=\begin{cases}\dfrac{B-A}{2a^2},\ k=2\\ 0,\ k\neq 2\end{cases}$$

$$D_k=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin k\varphi\,d\varphi=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}(A\sin^2\varphi+B\cos^2\varphi)\sin k\varphi\,d\varphi=0$$

$$C_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(A\sin^2\varphi+B\cos^2\varphi)d\varphi=A+B$$

所以原问题的解为：

$$u(r,\theta)=\frac{A+B}{2}+\frac{B-A}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2\theta$$

2.5 解下列定解问题：

$$(1)\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \\ u(t,0)=u_x(t,l)=0 \qquad 0<x<l，\ t>0 \\ u(0,x)=0;\quad u_t(0,x)=x \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} \\ u(t,0)=u(t,l)=0 \qquad 0<x<l，\ t>0 \\ u(0,x)=x(l-x) \end{cases}$$

解：(1)这是有界弦的振动问题：

利用分离变量法，求解有界弦的自由振动：

$$令\ u(t,x)=X(x)T(t),带入振动方程 \Longrightarrow \frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

这样就得到两个常微分方程的边值问题。先对X的边值问题求解：

$$I:\quad \begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X'(l)=0 \end{cases}$$

解固有值问题：即寻求对怎样的固有值λ，上方的边值问题有非零解：

① $\lambda=0$：此时方程为$X''(x)=0$，该方程的通解为 $X=Ax+B$.

待定其系数，$X(0)=X(l)=0 \ \Longrightarrow\ A=B=0$

因此这种情况下方程只有零解，舍去。

② $\lambda<0$：此时有$\Delta>0$，可以从特征方程解出两个不相等的实根：

$$u_1=-\sqrt{-\lambda}\ ;\ \ u_2=\sqrt{-\lambda}$$

这时二阶线性常系数齐次方程具有通解形式 $X=Ae^{u_1x}+Be^{u_2x}$.

待定其系数：$X(0)=X(l)=0$，并且满足原方程。可解出：

$$A=0\ ;\ B=0$$

因此这种情况下方程亦只有零解，舍去。

③ $\lambda>0$：此时有$\Delta<0$，特征方程有两个共轭复根。

$$u_1=-i\sqrt{\lambda}\ ;\ \ u_2=i\sqrt{\lambda}$$

二阶线性常系数齐次方程具有通解形式：$X=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$

待定其系数：$X(0)=X'(l)=0$，并且满足原方程。可解出：

$$A=0\ ;\cos\sqrt{\lambda}l=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_n=\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}\quad (n\in\mathbb{Z})$$

综上三种穷尽λ所有取值可能的情况，固有值已在上方给出。与此固有值对应的固有函数为：

$$X_n(x)=B_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\quad (B_n\in\mathbb{R},n\in\mathbb{Z})$$

再考虑确定T的常微分方程：

$$II:\quad T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$$

$$\Longrightarrow\quad T''(t)+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T(t)=0$$

这个常微分方程的解为：$T_n(t)=C_n\cos\dfrac{(2n+1)\pi at}{2l}+D_n\sin\dfrac{(2n+1)\pi at}{2l}\quad (C_n,D_n\in\mathbb{R})$

由此可以写出方程和边界条件的一列解：(已经将B_n并入C_n,D_n)

$$u_n(t,x)=X_n(x)T_n(t)=\left(C_n\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}+D_n\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\quad (n\in\mathbb{Z}^+)$$

再将特解列叠加，写出级数形式解。方程和边界条件都是线性齐次的，由叠加原理 2：

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}+D_n\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

再依据初始条件、边界条件确定系数C_n,D_n：

$$u_t(0,x)=x\quad\Longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)\pi a}{2l}D_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}=x$$

$$u(0,x)=0\quad\Longrightarrow\quad u(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}=0$$

由正弦展开的系数公式，得：

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx=\frac{2}{l}\int_0^l 0*\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx=0$$

$$\frac{(2n+1)\pi a}{2l}D_n=\frac{2}{l}\int_0^l\Psi(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx=\frac{8l*(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2}$$

将其带入，可得原方程的解为：

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16l^2(-1)^n}{a\pi^3(2n+1)^3}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

(2) $u_t = a^2 u_{xx}$:

利用分离变量法:

$$令\ u(t,x) = X(x)T(t),带入振动方程 \Longrightarrow \frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

这样就得到两个常微分方程的边值问题。先对X的边值问题求解:

$$I:\ \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

解固有值问题：即寻求对怎样的固有值λ，上方的边值问题有非零解:

① $\lambda = 0$: 此时方程为 $X''(x) = 0$，该方程的通解为 $X = Ax + B$.

待定其系数，$X(0) = X(l) = 0 \implies A = B = 0$

因此这种情况下方程只有零解，舍去。

② $\lambda < 0$: 此时有$\Delta > 0$，可以从特征方程解出两个不相等的实根:

$$u_1 = -\sqrt{-\lambda}\ ;\ \ u_2 = \sqrt{-\lambda}$$

这时二阶线性常系数齐次方程具有通解形式 $X = Ae^{u_1x} + Be^{u_2x}$.

待定其系数: $X(0) = X(l) = 0$，并且满足原方程。可解出:

$$A = 0\ ;\ B = 0$$

因此这种情况下方程亦只有零解，舍去。

③ $\lambda > 0$: 此时有$\Delta < 0$，特征方程有两个共轭复根。

$$u_1 = -i\sqrt{\lambda}\ ;\ \ u_2 = i\sqrt{\lambda}$$

二阶线性常系数齐次方程具有通解形式: $X = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$

待定其系数: $X(0) = X(l) = 0$，并且满足原方程。可解出:

$$A = 0\ ;\ \sin\sqrt{\lambda}l = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

综上三种穷尽λ所有取值可能的情况，固有值已在上方给出。与此固有值对应的固有函数为:

$$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi x}{l} \quad (B_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z})$$

再考虑确定T的常微分方程:

$$II:\ \ T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad T'(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2}a^2T(t) = 0$$

这是一阶线性齐次微分方程，直接利用积分因子法,

$$这个常微分方程的解为:\ T_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \quad (C_n \in \mathbb{R})$$

由此可以写出方程和边界条件的一列解:（已经将C_n并入B_n)

$$u_n(t,x) = X_n(x)T_n(t) = B_n \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \quad (B_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z})$$

再将特解列叠加，写出级数形式解。方程和边界条件都是线性齐次的，由叠加原理 2:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}$$

再依据初始条件、边界条件确定系数B_n:

$$u(0,x) = x(l-x) \quad \Longrightarrow \quad u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} = x(l-x)$$

由正弦展开的系数公式，得:

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{4l^2(1-\cos n\pi)}{n^3\pi^3} = \frac{8l^2}{(2k+1)^3\pi^3} = B_k$$

将其带入，可得原方程的解为:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8l^2}{(2k+1)^3\pi^3} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{l} e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{l}\right)^2 t}$$