随机过程B　第二周作业　9 月 21 日　周一

PB18151866 龚小航

1.9 令 X 和 Y 是从单位圆内的均匀分布中随机选取一点所得的横坐标与纵坐标，试计算条件概率：

$$P\left(X^2+Y^2 \geq \frac{3}{4} \middle| X>Y\right)$$

解：换元，令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$．由于 (X,Y) 在单位圆内服从均匀分布，因此可得 r 与 θ 独立且无关，其中 θ 服从 $(0,\pi/2)$ 上的均匀分布。因此有：

$$P\left(X^2+Y^2 \geq \frac{3}{4} \middle| X>Y\right)=P\left(r^2 \geq \frac{3}{4} \middle| -\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{1}{4}\pi\right)=\frac{P\left(r^2 \geq \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{1}{4}\pi\right)}{P\left(-\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{1}{4}\pi\right)}$$

计算分子：

$$P\left(r^2 \geq \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{1}{4}\pi\right)=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{-3}{4}\pi\right)p\,\mathrm{d}p=\frac{\pi}{8}$$

1.11 X,Y 为两个独立随机变量且分布相同。证明：$E(X|X+Y=z)=E(Y|X+Y=z)$

并求基于 $X+Y=z$ 的最佳预报，并求出预报误差 $E\big(X-\varphi(X+Y)\big)^2$.

解：先证明 $E(X|X+Y=z)=E(Y|X+Y=z)$：

当 X,Y 为离散型随机变量时，证明如下：　其中 $y_i=z-x_i$ 表示 $Y=y_i=z-x_i$

$$E(X|X+Y=z)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i|X+Y=z) \overset{\text{定义}}{=} \sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i|y_i=z-x_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{P(X=x_i,y_i=z-x_i)}{P(y_i=z-x_i)} \overset{X,Y\text{独立同分布}}{=} \sum_{i=1}^{n}x_i\frac{P(X=x_i)P(y_i=z-x_i)}{P(y_i=z-x_i)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i) \overset{X,Y\text{独立同分布}}{=} \sum_{i=1}^{n}y_iP(Y=y_i)=\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{P(Y=y_i)P(x_i=z-y_i)}{P(x_i=z-y_i)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{P(Y=y_i)P(x_i=z-y_i)}{P(x_i=z-y_i)}=\sum_{i=1}^{n}y_iP(Y=y_i|x_i=z-y_i)$$

$$=E(Y|X+Y=z)$$

当 X,Y 为连续性随机变量时，证明如下：

$$E(X|X+Y=z)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(X=x|Y=z-x)\,\mathrm{d}x\ =\ \int_{-\infty}^{\infty}x\frac{f(X=x,\ Y=z-x)}{f(Y=z-x)}\ \mathrm{d}x$$

$$=\ \int_{-\infty}^{\infty}x\frac{f(X=x)f(Y=z-x)}{f(Y=z-x)}\ \mathrm{d}x\ =\ \int_{-\infty}^{\infty}xf(X=x)\ \mathrm{d}x\ \overset{X,Y\text{独立同分布}}{=}\ \int_{-\infty}^{\infty}yf(Y=y)\ \mathrm{d}y$$

$$=\ \int_{-\infty}^{\infty}y\frac{f(Y=y)f(X=z-y)}{f(X=z-y)}\ \mathrm{d}y\ =\ \int_{-\infty}^{\infty}y\frac{f(Y=y,\ X=z-y)}{f(Y=z-x)}\ \mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}y\,f(Y=y|X=z-y)\,\mathrm{d}y\ =\ E(Y|X+Y=z)$$

因此不论 X,Y 是连续型或是离散型随机变量，都有 $E(X|X+Y=z)=E(Y|X+Y=z)$ 成立。

再求其基于 $X+Y=z$ 的最佳预报：

求其最佳预报，即为求最佳预报函数 $\varphi(X+Y)$ ，它使 $E\big(X-\varphi(X+Y)\big)^2$ 达到最小。由教材第 8 页的结论，可知 $\varphi(X+Y)=E(X|X+Y=z)$

首先由已知条件做变换：

$$X+Y=z\ \Longrightarrow\ E(X+Y)=E(X)+E(Y)=z\ \Longrightarrow\ E(X)=E(Y)=\frac{z}{2}$$

再求出 $E(X|X+Y=z)$：

$$E(X|X+Y=z)\ =\frac{1}{2}\big(E(X|X+Y=z)+E(Y|X+Y=z)\big)=\frac{E(X+Y|X+Y=z)}{2}=\frac{z}{2}$$

最后将其带入求预报误差 $E\big(X-\varphi(X+Y)\big)^2$：

$$E\big(X-\varphi(X+Y)\big)^2\ =\ E\left(X-\frac{z}{2}\right)^2\ =\ Var(X)$$

1.13 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，服从于参数为 λ 的指数分布。

试证 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是参数为 (n,λ) 的 Γ 分布，其密度为

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\qquad t\geq 0$$

解：利用数学归纳法，对n施以归纳：

① 归纳基础：$n=1$ 时，有 $S_1=X_1$，且 $S_1\sim EXP(\lambda)$，$f_0(t)=\lambda e^{-\lambda t}\sim EXP(\lambda)$. 即 $n=1$ 时，S_1 服从参数为$(1,\lambda)$ 的 Γ 分布。归纳基础成立。

② 归纳假设：令 $n\leq k$ 时，均有 $S_n\sim\Gamma(n,\lambda)$ 成立。

③ 归纳递推：当 $n = k+1$ 时，计算 S_{k+1} 的分布： 其中利用了 $\Gamma(k) = (k-1)!$

$$\begin{aligned} P(S_{k+1} = x) &= \int_0^x P(S_k = \xi) P(X_{k+1} = x - \xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^x \lambda e^{-\lambda\xi} \frac{(\lambda\xi)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \lambda e^{-\lambda(x-\xi)}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda x} \int_0^x \xi^{k-1}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda x} \cdot \left(\frac{\xi^k}{k} \bigg|_{\xi=0}^{x} \right) = \frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda x} x^k \\ &= \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

这种形式即为 $S_{k+1} \sim \Gamma(k+1, \lambda)$

由以上三步，根据数学归纳法，可知 $\sum_{i=1}^n X_i$ 是参数为 (n, λ) 的 Γ 分布，