随机过程 B　第十二周作业　12 月 1 日　周一

PB18151866 龚小航

4.1 设 $X(t) = \sin Ut$，这里 U 为 $(0,2\pi)$ 上的均匀分布

($\boldsymbol{a}$) 若 $t = 1,2,3,\ldots$ 证明 $\{X(t), t = 1,2,3,\ldots\}$ 是宽平稳但不是严平稳过程。

($\boldsymbol{b}$) 设 $t \in [0,\infty)$，证明 $\{X(t), t \geq 0\}$ 既不是严平稳也不是宽平稳过程。

解：证明一个过程是宽平稳过程需要证明三点：$\begin{cases} \text{所有的二阶矩存在} \\ E[X(t)] = C\ (\text{常数}) \\ \text{协方差函数仅与 } t-s \text{ 有关} \end{cases}$

证明某过程 $X(t)$ 是严格平稳需要证明对任意的 $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ 和任何 h 都有：

$$\{X(t_1+h), X(t_2+h), \ldots, X(t_n+h)\} \stackrel{\text{def}}{=} \{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\}$$

在本题中，显然 $X(t)$ 二阶矩存在，只需验证其他两个条件即可。

($\boldsymbol{a}$) 证明其为宽平稳过程，先求其期望：

$$E[X(t)] = E[\sin Ut] = \int_0^{2\pi} \sin Ut \cdot \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}U = 0\,; \quad t = 1,2,\ldots$$

因此均值为常数条件也满足；再求其协方差函数：

$$Cov\big(X(t), X(s)\big) = E[(X(t)-0)(X(s)-0)] = E[\sin Ut \sin Us] = \int_0^{2\pi} \sin Ut \sin Us \cdot \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}U$$

$$= \begin{cases} 0\,, & t \neq s \\ \dfrac{1}{2}\,, & t = s \end{cases}$$

协方差函数只与 $t-s$ 有关，满足条件三。

综上，这是一个宽平稳过程。

再说明其不是严平稳过程：取 $t_1 = 1$，$h = 1$，　$F_t(x) = P\{\sin U \leq x\} \neq P\{\sin 2U \leq x\} = F_{t+h}(x)$

因此它不是严平稳过程。

($\boldsymbol{b}$) 先求其期望：

$$E[X(t)] = E[\sin Ut] = \int_0^{2\pi} \sin Ut \cdot \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}U = \frac{1}{2\pi t}\int_0^{2\pi} \sin Ut\ \mathrm{d}Ut = \frac{1}{2\pi t}(1 - \cos 2\pi t)$$

期望就不为常数，与 t 有关，因此这个过程不是宽平稳过程。

因此这个过程自然也不是严平稳过程。

4.3 设 $X_n=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos(a_k n-U_k)$，这里 σ_k 和 a_k 为正常数，$k=1,\dots,N$； $U_1,\dots,U_n$ 是 $(0,2\pi)$ 上独立均匀分布的随机变量，证明 $\{X_n, n=0,\ \pm1,\ \dots\}$ 是平稳过程。

解：证明平稳过程需要证明三条性质，显然这个过程二阶矩存在。

先求其期望：

$$E[X_n]=E\left[\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos(a_k n-U_k)\right]=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}(\cos a_k n\cdot E[\cos U_k]+\sin a_k n\cdot E[\sin U_k])$$

其中由于 U_i 服从 $(0,2\pi)$ 上的均匀分布，因此 $E[\cos U_k]=E[\sin U_k]=0$

$$\Longrightarrow\quad E[X_n]=0$$

再求其协方差函数，验证是否只与 $t-s$ 有关：

$$Cov\big(X(t),X(s)\big)=E[(X(t)-0)(X(s)-0)]=E\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sqrt{2}\cos(a_i t-U_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{N}\sigma_j\sqrt{2}\cos\big(a_j s-U_j\big)\right)\right]$$

由于$U_1,\dots,U_n$ 是 $(0,2\pi)$ 上独立均匀分布的随机变量，s,t 视作给定的不变量， a_i 为常数，因此当$i\neq j$ 时 $\sigma_i\sqrt{2}\cos(a_i t-U_i)$ 与 $\sigma_j\sqrt{2}\cos\big(a_j s-U_j\big)$ 独立，均值就可以拆开求，因此交叉项全为 0

$$Cov\big(X(t),X(s)\big)=E\left[\sum_{k=1}^{N}2\sigma_k^2\cos(a_k t-U_k)\cos(a_k s-U_k)\right]=\sum_{k=1}^{N}2\sigma_k^2E[\cos(a_k t-U_k)\cos(a_k s-U_k)]$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2E[\cos(a_k t-a_k s)+\cos(a_k s+a_k t-2U_k)]$$

其中后项可以展开 cos 函数，在利用独立性计算出来：

$$E[\cos(a_k s+a_k t-2U_k)]=E[\cos(a_k s+a_k t)\cos(2U_k)+\sin(a_k s+a_k t)\sin(2U_k)]=0$$

因此协方差函数就可以表示为：

$$Cov\big(X(t),X(s)\big)=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2E[\cos(a_k t-a_k s)]=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2E[\cos a_k(t-s)]=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\cos a_k(t-s)$$

显然仅与 $t-s$ 有关。满足宽平稳的条件三。

综上，这个过程满足宽平稳过程的三个条件，因此$\{X_n, n=0,\ \pm1,\ \dots\}$ 是宽平稳过程。

4.4 设 $\{A_k,\ k=1,2,\dots,n\}$ 是 n 个实随机变量；$\{\omega_k,\ k=1,2,\dots,n\}$ 是 n 个实数。试问 A_k 以及 A_k 之间应满足怎样的条件才能使 $Z(t)=\sum_{k=1}^{n}A_k e^{j\omega_k t}$ 是一个复的平稳过程。【课本 65 页】

解：使之成为一个平稳过程，依然要满足三个条件。协方差函数定义稍有不同。

先求均值：

$$E[Z(t)]=E\left[\sum_{k=1}^{n}A_k e^{j\omega_k t}\right]=\sum_{k=1}^{n}E[A_k]E[e^{j\omega_k t}]$$

由于 $E[e^{j\omega_k t}]\neq 0$，若要使 $E[Z(t)]=$ 常数，那么只有 $E[A_k]=0$，此时 $E[Z(t)]=0$

再使之满足协方差函数仅与 $t-s$ 有关的条件：

$$Cov\big(Z(t),Z(s)\big)=E\big[(Z(t)-0)\big(\overline{Z(s)-0}\big)\big]=E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}A_i e^{j\omega_i t}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}A_k e^{-j\omega_k s}\right)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}E[A_kA_i e^{j\omega_i t-j\omega_k s}]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}E[A_kA_i]E[e^{j\omega_i t-j\omega_k s}]$$

若它只与 $t-s$ 有关，那么只能 $E[A_kA_i]=0$，其中 $i\neq k$ 且 $\omega_k\neq\omega_i$

综上，所有需要满足的关系式为：

$$E[A_k]=0\ ,\ E[A_kA_i]=0,\qquad (i\neq k,\ \ \omega_k\neq\omega_i)$$

4.16 设 X_0 为随机变量，其概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}2x\ , & 0\le x\le 1\\ 0\ , & \text{other}\end{cases}$$

设 X_{n+1} 在给定 $X_0,X_1,\dots,X_n$ 下是 $(1-X_n,1]$ 上的均匀分布，$n=0,1,2,\dots$，证明 $\{X_n,n=0,1,2,\dots\}$ 的均值具有遍历性

解：由于 $X(k)$ 的具体实际值未知，因此无法用均值遍历性定义来证明。利用均值遍历性定理：

需要计算出协方差函数，就必须先把 $E[X_n]$ 计算出来：

$$E[X_0]=\int_0^1 x\cdot 2x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\ ;\qquad E[X_0^2]=\int_0^1 x^2\cdot 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

再通过递推式来求出 $E[X_n],E[X_n^2]$：利用全期望公式

$$E[X_n] = E\big[E[X_n|X_{n-1}]\big] = E\left[\int_{1-x_{n-1}}^{1} x_n \cdot \frac{1}{x_{n-1}}\,\mathrm{d}x_n\right] = E\left[1-\frac{1}{2}X_{n-1}\right] = 1-\frac{1}{2}E[X_{n-1}]$$

由递推关系，可知对任意的 $k \geq 1$，都有 $E[X_k] = 2/3$；

$$E[X_n^2] = E\big[E[X_n^2|X_{n-1}]\big] = E\left[\int_{1-x_{n-1}}^{1} x_n^2 \cdot \frac{1}{x_{n-1}}\,\mathrm{d}x_n\right] = 1 - E[X_{n-1}] + \frac{1}{3}E[X_{n-1}^2]$$

因此可以计算出对任意的 $k \geq 0$，都有 $E[X_k^2] = 1/2$

计算其协方差函数:

$$R(\tau) = E[(X(t+\tau)-m)(X(t)-m)] = E[X(t+\tau)X(t)] - m(E[X(t+\tau)] + E[X(t)]) + m^2$$

$$= E[X(t+\tau)X(t)] - \frac{4}{9} = E\big[E[X(t)X(t+\tau)|X(t)]\big] - \frac{4}{9} = E\big[X(t)E[X(t+\tau)|X(t)]\big] - \frac{4}{9}$$

$$= E\left[X(t)\left(1-\frac{1}{2}E[X(t+\tau-1)|X(t)]\right)\right] - \frac{4}{9} = \frac{2}{9} - \frac{1}{2}E[X(t)X(t+\tau-1)]$$

$$=\cdots\cdots= \left(-\frac{1}{2}\right)^{\tau}\left(E\left[X_n^2 - \frac{4}{9}\right]\right) = \frac{1}{18}\left(-\frac{1}{2}\right)^{\tau}$$

由于 $N \to \infty$ 时$R(\tau) = 0$，因此有均值遍历性定理，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = 0$$

得出 $\{X_n, n = 0,1,2,\ldots\}$的均值具有遍历性。