算法导论　第十五周作业　12 月 24 日　周四

PB18151866 龚小航

9.1 给出一种 $2-\mathrm{SAT}$ 问题的多项式解法。

解：　2-SAT 问题：

n 个布尔型的变量，给出 m 个约束条件，约束条件例如：X_i，X_j 不能同时为真，X_i，X_j 必须同时为真等。

寻找是否存在一组布尔取值使所有的约束条件成立。

将 n 个变量划分为二，每个变量 X_i 划分为 X_{it}，X_{if}，以这新的 $2n$ 个节点为顶点构造图 G. 根据每一个给出的条件，在图上画出表示“必须同时选择”的边。把所有的 m 个条件都画完边后，对图 G 运行 Tarjan 算法求出图 G 的连通分量。检查这些连通分量中有没有同属于一个布尔型变量的两个顶点，若存在则可以判断这个问题不存在解；若不存在则可以简单的选择一条路径出来作为解。

由于 Tarjan 算法复杂度为 $O(V+E)$，对 n 组顶点依次判断则需要 $O(V)$ 的时间。因此总时间必然是多项式级别的。

9.2 设 $G=(V,E)$ 是一个无向图，其中是每条边 $(u,v)\in E$ 具有不同的权值 $\omega(u,v)$。

对每个顶点 $v\in V$，设 $\max(v)=\operatorname{argmax}_{(u,v)\in E}\{\omega(u,v)\}$ 是与顶点 v 相关联的最大权值边。设 $S_G=\{\max(v): v\in V\}$ 表示与各个顶点相关联的最大权值边的集合，T_G 表示图 G 的最大权值生成树。对任意的边集 $E'\subseteq E$，定义 $\omega(E')=\sum_{(u,v)\in E'}\omega(u,v)$。

(***a***). 给出一个至少包含 4 个顶点的图，使其满足 $S_G=T_G$。

(***b***). 给出一个至少包含 4 个顶点的图，使其满足 $S_G\neq T_G$。

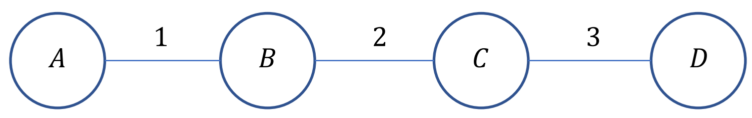
(***c***). 证明：对任意的图 G，$S_G\subseteq T_G$。

(***d***). 证明：对任意的图 G，$\omega(S_G)\geq \omega(T_G)/2$。

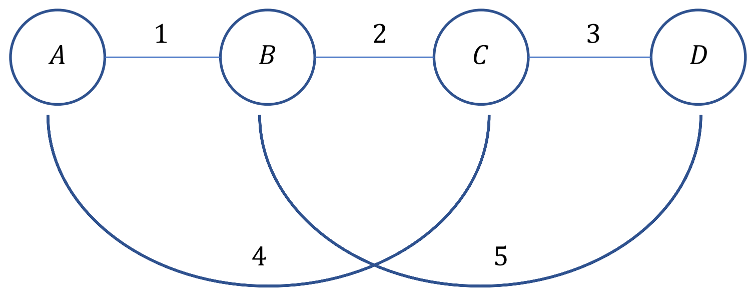
(***e***). 给出一个 $O(V+E)$ 时间算法，用于计算 2 近似的最大生成树。

解：分别分析：

(***a***) 如下图：$S_G=T_G=\{AB,BC,CD\}$



(***b***) 如下图：$S_G=\{AC,BD\}$，$T_G=\{AC,BD,CD\}$



(***c***) 只需要证明 S_G 的成员一定是 T_G 的成员即可。

反证法，假设存在 $(u_0,v_0)\in S_G$，$(u_0,v_0)\notin T_G$，那么对于节点 u_0 来说，它所相关联的最大权值边为 (u_0,v_0)，而 T_G 构成一棵生成树，因此 T_G 必包含一条与 u_0 相关联的边，且这条边的权值比 (u_0,v_0) 更小。此时我们可以这样操作：将 (u_0,v_0) 加入 T_G 同时把原本 T_G 中与 u_0 相关联的边从 T_G 中删除，这样得到的新 T_G 仍然保证没有环的出现，仍然是一棵生成树，但权值变大了，因此原本的 T_G 不是最大生成树，与条件相违背，因此反证假设不成立。

因此可以得知 S_G 的成员一定是 T_G 的成员，即 $S_G\subseteq T_G$

(***d***) 由上一问得出的结论，S_G 的成员必定是 T_G 的成员。而图 G 中的一条边最多被两个节点共享，T_G 最多能包含 G 的每一条边，因此在最坏情况下 S_G 中边的数量至少有 T_G 中的一半，若用 $||$ 表示集合元素个数，必然有 $|S_G|\geq|T_G|/2$；而 S_G 优先取权重大的边，因此 S_G 里面包含的边是这样产生的：将 T_G 内的边按权重降序排列，取前 $|S_G|$ 条。令 $R_G=T_G-S_G$，显然 $\omega(S_G)>\omega(R_G)$,两边同时加 $\omega(S_G)$，即可得到：

$$2\omega(S_G)>\omega(S_G)+\omega(R_G)=\omega(T_G)\quad\Rightarrow\quad \omega(S_G)\geq\omega(T_G)/2$$

(***e***) 由上一问的结论，2 近似算法只需要保证精确解与近似解相差 2 倍以内即可，因此不论是找最大生成树的边或是权重，都可以由 S_G 近似。

算法描述：遍历 G 的每一个顶点 $v\in V$，对每个顶点 v 遍历其相关联的所有边 e，记录最大的边以及最大的边的权重。整个算法访问每个顶点一次，最多访问每条边两次，因此总的时间复杂度为 $O(E+V)$.