随机过程B　第五周作业　10月12日　周一

PB18151866 龚小航

2.1　$N(t)$ 为一泊松过程，对 $s<t$ 试求条件概率 $P\{N(s)=k\,|\,N(t)=n\}$

解：　先利用条件概率的计算式，将原概率转化为：

$$P\{N(s)=k\,|\,N(t)=n\}=\frac{P\{N(s)=k,\ N(t)=n\}}{P\{N(t)=n\}}$$

利用泊松过程的定义与性质：

$$\begin{cases} N(0)=0 \\ \text{N(t)是独立增量过程} \\ \text{对 } t>s\geq 0,\ N(t)-N(s) \text{ 服从参数为 } \lambda(t-s) \text{ 的泊松分布} \end{cases}$$

$$\text{性质三即：} P\{N(s+t)-N(s)=k\}=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

利用性质三，可得：

$$P\{N(s)=k\,|\,N(t)=n\}=\frac{P\{N(s)=k,\ N(t)=n\}}{P\{N(t)=n\}}=\frac{P\{N(t)-N(s)=n-k,\ N(s)-N(0)=k\}}{P\{N(t)-N(0)=n\}}$$

$$=\frac{\frac{\left(\lambda(t-s)\right)^{n-k}e^{-\lambda(t-s)}}{(n-k)!}\cdot\frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!}}{\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(t-s)^{n-k}s^k}{t^n}$$

2.3 电报依平均速率为每小时 3 个的泊松过程到达电报局，试问：

(1) 从早上八时到中午没收到电报的概率；

(2) 下午第一份电报到达时间的分布是什么？

解：　记正午为 12:00

(1) 利用泊松过程的定义与性质 3：

$$P\{N(4)=0\}=P\{N(4)-N(0)=0\}=\frac{(3\times 4)^0 e^{-3\times 4}}{0!}=6.144\times 10^{-6}$$

(2) 取中午 12:00 为零时刻点，由教材 17 页的结论：

$$X_1\sim\lambda e^{-\lambda t}=3e^{-3t}\ \text{ 即}\mathrm{X}_1\text{服从参数为 3 的指数分布}$$

2.6 一部 600 页的著作总共有 240 个印刷错误，试用泊松过程近似求出某连续三页无错误的概率。

解：令 $N(t)$ 为从第 0 页开始至第 t 页的错误总数，显然 $N(0)=0$，$N(t)$ 为泊松过程。

$$P\{N(t+3)-N(t)=0 \mid N(600)-N(0)=240\}$$

$$= \frac{P\{N(t+3)-N(t)=0,\ N(600)-N(0)=240\}}{P\{N(600)-N(0)=240\}}$$

$$= \frac{P\{N(3)-N(0)=0,\ N(600)-N(0)=240\}}{P\{N(600)-N(0)=240\}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{增量同分布}$$

$$= \frac{P\{N(3)-N(0)=0,\ N(600)-N(3)=240\}}{P\{N(600)-N(0)=240\}}$$

$$= \frac{P\{N(3)-N(0)=0\}\,P\{N(600)-N(3)=240\}}{P\{N(600)-N(0)=240\}} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{增量独立}$$

$$= \frac{\frac{(3\lambda)^0 e^{-3\lambda}}{0!}\cdot\frac{(597\lambda)^{240}e^{-597\lambda}}{240!}}{\frac{(600\lambda)^{240}e^{-600\lambda}}{240!}}$$

$$= \left(\frac{597}{600}\right)^{240} \approx 0.3003$$

2.8 令 $\{N_i(t),\ t\geq 0\}, i=1,2,\cdots\cdots,n$ 为 n 个独立的有相同强度参数 λ 的泊松过程。

记 T 为在全部 n 个过程中至少发生了一件事的时刻，试求 T 的分布。

解：直接根据 T 的分布定义：

$$F_T(t) = P\{T<t\} = 1-P(N_i(t)=0) = 1-\left(e^{-\lambda t}\right)^n$$

再求导即得到 T 的概率密度函数：

$$f_T(t)=F_T'(t)=\lambda n e^{-\lambda n t}$$

根据概率密度函数的形式，T 服从参数为 $n\lambda$ 的指数分布。