随机过程B　第十三周作业　12月7日　周一

PB18151866 龚小航

4.5 设 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 是一列独立同分布随机变量系列，$P\{X_n=1\}=p$，$P\{X_n=-1\}=1-p, n=1,2,\cdots$ 令 $S_0=0$，$S_n=(X_1+\cdots+X_n)/\sqrt{n}$，$n=1,2,\cdots$ 求随机系列 $\{S_n, n=1,2,\cdots\}$ 的协方差函数和自相关函数。此外，p 取何值时此系列为平稳系列？

解：先计算其协方差函数，为此先将与 X_n 有关的参数计算出来：

$$E[X_n]=1*p+(-1)*(1-p)=2p-1$$

$$E[X_n^2]=1 \quad (X_n^2=1)$$

$$Var(X_n)=E[X_n^2]-E^2[X_n]=4p-4p^2$$

再计算 S_n 相关参数：

$$E[S_n]=E[(X_1+\cdots+X_n)/\sqrt{n}]=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}E[X_i]=\sqrt{n}(2p-1) \quad n=1,2,\cdots$$

$$E[S_n^2]=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2+2\sum_{i\neq j}^{n}X_iX_j}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[X_i^2]+\frac{1}{n}\sum_{i\neq j}^{n}E[X_i]E[X_j]=1+\frac{(2p-1)^2(n^2-n)}{n}$$

$$Var(S_n)=E[S_n^2]-E^2[S_n]=1+(2p-1)^2(n-1)-n(2p-1)^2=1-(2p-1)^2$$

计算 $\{S_n\}$ 的协方差函数：

$$R(t,t+s) = Cov\big(S(t),S(t+s)\big) = Cov\left(\frac{(X_1+\cdots+X_t)}{\sqrt{t}},\frac{(X_1+\cdots+X_{t+s})}{\sqrt{t+s}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{t+s}}\left(\sum_{i=1}^{t+s}\sum_{j=1}^{t}Cov\big(X(i),X(j)\big)\right)=\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{t+s}}\left(\sum_{i=j}\sum_{j=1}^{t}Cov\big(X(j),X(j)\big)\right) \because \text{不相等时} X \text{独立}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{t+s}}\sum_{j=1}^{t}Var\big(X(j)\big) = \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{t+s}}\cdot t(4p-4p^2) = 4\sqrt{\frac{t}{t+s}}(p-p^2) = R(t,s)$$

协方差函数与 t,s 有关。

若令 $E[S_n]=$ 常数，则 $p=1/2$；若令协方差函数仅与 s 有关，则 $p=1\ or\ 0$. 这两个条件无法同时满足，因此 $\{S_n\}$ 不是平稳系列

计算其自相关函数：　其中 $\sigma_n=\sqrt{Var(S_n)}=\sqrt{1-(2p-1)^2}=\sqrt{4p-4p^2}$

$$\rho(s,t)=\frac{E[(X_s-\mu_s)(X_t-\mu_t)]}{\sigma_s\sigma_t}=\frac{R(t,s)}{\sigma_s\sigma_t}=\frac{4\sqrt{\frac{t}{s}}(p-p^2)}{4p-4p^2}=\sqrt{\frac{t}{s}} \text{ (假设 } t\leq s)$$

4.7 设 $\{X_t\}$ 是高斯过程，均值为 0，协方差函数 $R(\tau)=4e^{-2|\tau|}$，令

$$Z(t)=X(t+1),\quad W(t)=X(t-1)$$

(1) 求 $E[Z(t)W(t)]$ 和 $E\left[\left(Z(t)+W(t)\right)^2\right]$

(2) 求 $Z(t)$ 的密度函数 $f_Z(z)$ 以及 $P\{Z(t)<1\}$

(3) 求 $Z(t),W(t)$ 的联合密度 $f_{Z,W}(z,w)$

解：$\{X_t\}$ 为高斯过程，即 $\{X(t_1),\cdots X(t_k)\}$ 的联合分布是 k 维的正态分布。利用正态分布的性质：

(1) $E[Z(t)W(t)]=E[X(t+1)X(t-1)]=R(2)=4e^{-2|\tau|}=4e^{-4}$;

$$E\left[\left(Z(t)+W(t)\right)^2\right]=E[X^2(t+1)+X^2(t-1)+2X(t+1)X(t-1)]=2R(0)+2R(2)=4+4e^{-4}$$

(2) 由定义可知，Z,W 都是一维正态分布。$\sigma^2=R(0)=4$。可知 $Z,W\sim N(0,4)$，即

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{8}}$$

$$P\{Z(t)<1\}=\int_{-\infty}^{1}f_Z(z)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{1}e^{-\frac{z^2}{8}}\,\mathrm{d}z\approx 0.691462$$

(3) 令 $\tau=2$，标准自相关函数 $\rho(2)=R(2)/R(0)=e^{-4}$.因此这个联合分布服从 $N(0,0,4,4,\ e^{-4})$，直接根据二维正态分布的表达式，即可写出其联合分布：

$$f_{Z,W}(z,w)=\frac{1}{2\pi*2*2*\sqrt{1-e^{-8}}}e^{-\frac{\frac{z^2}{4}+\frac{w^2}{4}-\frac{2e^{-4}zw}{4}}{2-2e^{-8}}}=\frac{1}{8\pi\sqrt{1-e^{-8}}}e^{-\frac{z^2+w^2-2e^{-4}zw}{8-8e^{-8}}}$$

4.10 设 $\{X(t)\}$ 是一个复值平稳过程，证明：

$$E[\,|X(t+\tau)-X(t)|^2]=2\mathrm{Re}\big(\mathrm{R}(0)-\mathrm{R}(\tau)\big)$$

解：令 $E[X(t)]=m$，则根据复值平稳过程的定义，可以将左式化为：

$$\begin{aligned}E[\,|X(t+\tau)-X(t)|^2]&=E[\,|(X(t+\tau)-m)-(X(t)-m))|^2]\\&=E\left[\,(X(t+\tau)-m)-(X(t)-m))\overline{(X(t+\tau)-m)-(X(t)-m))}\right]\\&=E[\,(X(t+\tau)-m)^2]+E[\,(X(t)-m)^2]\\&\quad-E\left[(X(t+\tau)-m)\overline{(X(t)-m)}\right]-E\left[\overline{(X(t+\tau)-m)}(X(t)-m)\right]\\&=R(0)+R(0)-R(\tau)-R(-\tau)\end{aligned}$$

又由于 $R(\tau)$ 和 $R(-\tau)$ 是复共轭的关系，因此在取实部的条件下，这两者是相等的。因此：

$$E[\,|X(t+\tau)-X(t)|^2]=2\mathrm{Re}\big(\mathrm{R}(0)-\mathrm{R}(\tau)\big)$$

4.17 设 $\{\varepsilon_n,\ n=0,\pm1,\cdots\}$ 为白噪声系列，令：

$$X_n=\alpha X_{n-1}+\varepsilon_n,\ \ |\alpha|<1,\ \ n=\cdots,-1,0,1,\cdots$$

则 $X_n=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\varepsilon_{n-k}$，从而证明 $\{X_n,\ n\in\mathbb{Z}\}$ 为平稳系列。求出该系列的协方差函数，并说明此系列是否具有遍历性。

解：白噪声系列满足：$E[\varepsilon_n]=0$，$E[\varepsilon_n^2]=\sigma^2$，且 $E\left[\varepsilon_i\varepsilon_j\right]=0\ (i\neq j)$. 因此：

$$E[X_n]=E\left[\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\varepsilon_{n-k}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k E[\varepsilon_{n-k}]=0\ \Longrightarrow\ \ m=0$$

$$R_X(t,t+\tau)=Cov\big(X(t),X(t+\tau)\big)=E[(X(t)-m)(X(t+\tau)-m)]=E\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i\varepsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j\varepsilon_{t+\tau-j}\right)\right]$$

$$=\ \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{i+j}E[\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t+\tau-j}]\ =\ \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i+\tau}\alpha^{i+i+\tau}E[\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t+\tau-(i+\tau)}]\ =\ \sum_{i=0}^{\infty}\alpha^{2i+\tau}E[\varepsilon_{t-i}^2]$$

$$=\ \sigma^2\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^{2i+\tau}\ =\ \sigma^2\lim_{n\to\infty}\alpha^{\tau}\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha^2}\ =\ \frac{\sigma^2\alpha^{\tau}}{1-\alpha^2}\ =\ R(\tau)$$

协方差函数仅与 τ 有关，因此 $\{X_n\}$ 是平稳系列。

显然 $\lim\limits_{\tau\to\infty}R(\tau)=0$，由均值遍历性定理，此系列具有均值遍历性。