中国科学技术大学

2017-2018 第二学期期末考试题（2）

考试科目：随机过程（B）　　　　　　　　　　得分：______

学生所在系：______________ 姓名：__________ 学号：___________

（2018 年 6 月 29 日，半开卷）

一、(24 分。填空题每空 3 分，其余每空 2 分) 判断是非与填空：

⑴ **(判断是非)** 设 S 为一不可约马氏链 $\{X_n, n \ge 0\}$ 的状态空间，则对任意 $i, j \in S$：

(a) i, j 均为正常返状态 （　　）；　(b) $\mu_i = \mu_j$，其中 $\mu_i = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ （　　）；

(c) i, j 未必为常返状态（　　）；　(d) $d(i) = d(j) \in (0, \infty)$ （　　）。

⑵ **(判断是非)** 设马氏链共有 n 个状态，且 $i \to j$，则：

(a) 可用至多 n 步由 i 转移到 j （　）；　(b) 由 i 转移到 j 至少要用 n 步（　　）。

⑶ **(填空)** 设粒子在数轴上由 0 出发作对称随机游动,则它回到 0 的平均时间为(　　)。

⑷ **(填空)** 设 $\{N(t), t \ge 0\}$ 是一强度为 λ 的 Poisson 过程，$s, t > 0$，则：

$P\{N(s) = k \mid N(s+t) = n\} =$ (　　　　　　)$(0 \le k \le n)$；$E\{N(s+t) \mid N(s)\}$ 的期望为

(　　　　　)，方差为（　　　　　）。

二、(15 分) 设某路段发生交通事故的次数 $N(t)$ 为一 Poisson 过程，且平均每月发生交通事故 2 次。又设 $t = 0$ 表示去年 12 月底，试求：

(1) 到今年 3 月底为止未发生交通事故的概率是多少?

(2) 若已知到今年 3 月底已发生了 4 次交通事故，问到 6 月底至少发生 7 次交通事故的概率是多少?

(3) 若每次事故造成的经济损失 Y （单位：万元）服从参数为 0.1 的指数分布，且各次损失相互独立，试求到 6 月底为止因交通事故而造成的总损失的期望值。

三、(15 分) 一只蚂蚁沿着一个等边三角形（顶点记为 a, b, c ）的边爬行，假定在时刻 n 它位于某一顶点（例如 a ），则在下一时刻（$n+1$）它爬到另外两个顶点（b 和 c ）的概率都等于 $1/2$。试用一个马氏链 $\{X_n, n \ge 0\}$ 描述这个过程（状态：a, b, c ），并且

(1) 写出该马氏链的转移概率矩阵 P；

(2) 试求 $P^{(n)} = P^n$；

⑶ 试求$\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)} = ?$

四、(**18分**) 设$\{X_n, n \ge 0\}$为区间 $[0,3]$上的随机游动，其转移概率矩阵为：

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

试求质点由k出发而被0吸收的概率p_k及它被吸收的平均步数v_k，$(k = 1,2,3)$。

五、(16分)设A与B独立，都服从$[-1,\ 1]$上的均匀分布，定义随机过程：

$$X(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, \qquad (t \in R，\ \omega_0 \text{为非零常数})$$

⑴ 证明$\{X(t),\ t \in R\}$为宽平稳过程；

⑵ 试求其功率谱密度函数$S(\omega)$。

六、(**12分**) 设平稳过程$X = \{X(t),\ t \in R\}$ (均值为0) 的功率谱密度函数为：

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 14}{\omega^4 + 13\omega^2 + 36}$$

⑴ 试求X的协方差函数$R(\tau)$；

⑵ 问X的均值是否有遍历性？为什么？

(完)