随机过程B　第一周作业　9月14日　周一

PB18151866 龚小航

1.2 记 $U_1,\cdots\cdots,U_n$ 为在 (0,1) 中均匀分布的独立随机变量。对 $0<t<1$，$0<x<1$ 定义

$$I(t,x)=\begin{cases}1, & x\le t\\ 0, & x>t\end{cases}$$

并记 $X(t)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I(t,U_k),0\le t\le 1$，这是 $U_1,\cdots\cdots,U_n$ 的经验分布函数。

试求过程 $X(t)$ 的均值和协方差函数。

解：对 $X(t)$ 来说，每个 $I(t,U_k)$ 都是独立重复试验，概率密度函数 $f_U(u)=1$，用定义直接写出均值：

$$E[X(t)]=E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I(t,U_k)\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\big(I(t,U_k)\big)=\frac{1}{n}\cdot n\cdot E\big(I(t,U_i)\big)=\int_0^1 I(t,U_i)f_U(u)\,\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^t 1\cdot 1\,\mathrm{d}u+\int_t^1 0\cdot 1\,\mathrm{d}u\ =\ t$$

再对 $X(t_1),X(t_2)$ 求其协方差函数，直接由定义：

① 当 $t_1\neq t_2$ 时：

$$Cov\big(X(t_1),X(t_2)\big)=E[(X(t_1)-t_1)(X(t_2)-t_2)]=E[X(t_1)X(t_2)-t_1X(t_2)-t_2X(t_1)+t_1t_2]$$

$$=E[X(t_1)X(t_2)]-t_1E\big(X(t_2)\big)-t_2E\big(X(t_1)\big)+t_1t_2=E\big(X(t_1)\big)E\big(X(t_2)\big)-t_1t_2=0$$

其中由于 $X(t_1),X(t_2)$ 是独立的，因此有$E[X(t_1)X(t_2)]=E\big(X(t_1)\big)E\big(X(t_2)\big)$

② 当 $t_1=t_2$ 时：

$$Cov\big(X(t_1),X(t_2)\big)=E\big(X^2(t_1)\big)-t_1^2=E\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I(t_1,U_k)\right)^2\right)-t_1^2\ =\ \frac{1}{n^2}E\left(\left(\sum_{k=1}^{n}I(t_1,U_k)\right)^2\right)-t_1^2$$

$$=\frac{1}{n^2}E\left(\sum_{k=1}^{n}I^2(t_1,U_k)+\sum_{i\neq j}I(t_1,U_i)I\big(t_1,U_j\big)\right)-t_1^2=\frac{n}{n^2}E[I^2(t_1,U_k)]+\frac{A_n^2}{n^2}E\big[I(t_1,U_i)I\big(t_1,U_j\big)\big]-t_1^2$$

$$=\frac{n}{n^2}t_1+\frac{n(n-1)}{n^2}t_1^2-t_1^2\ =\ \frac{t_1(1-t_1)}{n}$$

综上，所求结果为：$E[X(t)]=t$

$$Cov\big(X(t_1),X(t_2)\big)=\begin{cases}0, & t_1\neq t_2\\ \dfrac{t(1-t)}{n}, & t_1=t_2=t\end{cases}$$

1.4 泊松过程 $X(t), t \geq 0$ 满足以下三个条件：

$$\begin{cases} X(0)=0 \\ \text{对 } t>s\text{，} X(t)-X(s) \text{ 服从均值为 } \lambda(t-s) \text{ 的泊松分布} \\ \text{过程是有独立增量的} \end{cases}$$

试求其均值函数和协方差函数，并说明它是否为宽平稳的。

解：利用定义与性质 1，2，可得：

$\cdot E[X(t)] = E[X(t)-0] = E[X(t)-X(0)] = \lambda t,$ 且 $t=0$ 时仍成立，即 $t \geq 0$

$\cdot Var[X(t)] = Var[X(t)-0] = Var[X(t)-X(0)] = \lambda t$ ······················ 泊松分布结论

$$\Rightarrow \quad E[X^2(t)] = Var[X(t)] + E^2[X(t)] = \lambda t + (\lambda t)^2$$

$\cdot Cov\big(X(t_1), X(t_2)\big) = E[(X(t_1)-\mu_1)(X(t_2)-\mu_2)] = E[X(t_1)X(t_2) - t_1 X(t_2) - t_2 X(t_1) + \mu_1\mu_2]$

$$= E[X(t_1)X(t_2)] - \mu_1\mu_2$$

接下来需要算 $E[X(t_1)X(t_2)]$：

先假设 $t_2 > t_1$：

$E[X(t_1)X(t_2)] = E\Big[\big(X(t_1)-X(0)\big)\big(X(t_2)-X(t_1)+X(t_1)\big)\Big]$

$= E\Big[\big(X(t_1)-X(0)\big)\big(X(t_2)-X(t_1)\big) + \big(X(t_1)-X(0)\big)X(t_1)\Big]$ ··············· 展开

$= E\Big[\big(X(t_1)-X(0)\big)\big(X(t_2)-X(t_1)\big)\Big] + E\Big[\big(X(t_1)-X(0)\big)X(t_1)\Big]$

$= E[X(t_1)-X(0)] \cdot E[X(t_2)-X(t_1)] + E^2[X(t_1)]$ ·········· 性质三，增量独立

$= \lambda t_1 \cdot \lambda(t_2-t_1) + \lambda t_1 + (\lambda t_1)^2$ ······························ 由方差算得，上方已证

$= \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_1$

因此当 $t_2 < t_1$ 时，由对称性可知：

$$E[X(t_1)X(t_2)] = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_2$$

综上可知，$E[X(t_1)X(t_2)] = \min\{t_1, t_2\}\lambda + \lambda^2 t_1 t_2$

将其带入协方差函数的表达式中，即得：

$$Cov\big(X(t_1), X(t_2)\big) = E[X(t_1)X(t_2)] - \mu_1\mu_2 = \min\{t_1, t_2\} \cdot \lambda$$

再说明它是否为宽平稳的：先写出随机过程为宽平稳的三个条件：$\begin{cases} \text{所有的二阶矩存在} \\ E[X(t)] = C\ (\text{常数}) \\ \text{协方差函数仅与 } t-s \text{ 有关} \end{cases}$

显然泊松过程不满足上述条件二和条件三，因此泊松过程不是宽平稳过程。

1.6 令 Z_1 和 Z_2 是独立同分布的随机变量。 $P(Z_1=-1)=P(Z_1=1)=1/2$.

记 $X(t)=Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t$, $t\in R$. 证明 $X(t)$ 是宽平稳的。并说明它是否为严格平稳的。

解: 为证明它是宽平稳的，必须满足三个条件:

$$\begin{cases} \text{所有的二阶矩存在} \\ E[X(t)]=C\ (\text{常数}) \\ \text{协方差函数仅与 } t-s \text{ 有关} \end{cases}$$

显然，$X(t)$ 所有的二阶矩存在，再求其均值:

$$E[X(t)]=E[Z_1\cos\lambda t]+E[Z_2\sin\lambda t]=\cos\lambda t\cdot E[Z_1]+\sin\lambda t\cdot E[Z_2]=0\ (\text{常数})$$

再计算其协方差函数:

$$Cov\big(X(t_1),X(t_2)\big)\ =\ E[X(t_1)X(t_2)]-\mu_1\mu_2\ =\ E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$=E[(Z_1\cos\lambda t_1+Z_2\sin\lambda t_1)(Z_1\cos\lambda t_2+Z_2\sin\lambda t_2)]$$

$$=\cos(\lambda t_1)\cos(\lambda t_1)\,E[Z_1^2]+\sin(\lambda t_1)\sin(\lambda t_2)\,E[Z_2^2]+(\cos\lambda t_1\sin\lambda t_2+\cos\lambda t_2\sin\lambda t_1)E[Z_1Z_2]$$

$$=\cos(\lambda t_1)\cos(\lambda t_1)+\sin(\lambda t_1)\sin(\lambda t_2)$$

$$=\cos\lambda(t_1-t_2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{和差化积}$$

从最后的形式显然可见，协方差函数仅与 $t-s$ 有关。

综上三点，$X(t)=Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t$ 是宽平稳的。

为说明它是否为严格平稳，取特殊值带入计算即可:

$$\text{令 } t_1=0,\quad h=\frac{\pi}{4},\text{带入:}$$

$$X(t_1)=Z_1,\quad X(t_1+h)=Z_1\cos\frac{\pi\lambda}{4}+Z_2\sin\frac{\pi\lambda}{4}$$

他们不是同一个分布. 期望方差均不同，不是同分布。

因此它不是严格平稳的。