

# 中国科学技术大学

## 2012—2013 学年第一学期考试试卷

考试科目：随机过程 得分：\_\_\_\_\_

学生所在系：\_\_\_\_\_姓 名\_\_\_\_\_学 号：\_\_\_\_\_

(2013 年 1 月 22 日，开卷)

### 一、(20 分) 设有随机过程

$$X(t) = \xi \cos t + \eta \sin t, \quad (0 < t < \pi)$$

其中  $\xi$  与  $\eta$  独立, 且都服从正态分布  $N(0, \sigma^2)$ , 试求:

- (1)  $\{X(t), 0 < t < \pi\}$  的均值函数  $\mu_X(t)$  与协方差函数  $r_X(s, t)$ ;
- (2)  $\{X(t), 0 < t < \pi\}$  的一维与二维分布密度。

二、(20 分) 公路某收费站红、黄、蓝三种颜色的汽车到达数分别为速率 3, 4, 5 的泊松过程, 且相互独立, 试求:

- (1) 第一辆车 (红、黄或蓝色) 的平均到达时间及第一辆红车的平均到达时间;
- (2) 红车首先到达的概率;
- (3) 在相继的两辆红车之间恰有  $k$  辆车到达的概率 ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )。

### 三、(20 分) 有关某种商品的销售状况共有 24 个季度的连续数据 (1—畅销, 0—滞销):

1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0,  
1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1,

假设该商品销售状况满足齐次马氏链,

- (1) 试确定该马氏链的一步转移概率矩阵  $P$  (用转移频率来近似转移概率);
- (2) 若现在是畅销, 试确定其后第四季度的销售状况;
- (3) 若影响销售的所有因素不变, 试分析长期以后销售状况的分布。

四、(18 分) 设  $\{X_n, n \geq 0\}$  为区间  $[0, 3]$  上的随机游动, 其一步转移概率矩阵为:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

试求质点由状态  $k$  出发而被状态 0 吸收的概率  $p_k$  及吸收的平均时间  $v_k$  ( $k = 1, 2, 3$ )。

五、(22 分) 设  $\{X_n, n \geq 0\}$  为独立同分布的随机序列, 且  $E(X_0) = 0, \text{Var}(X_0) = \sigma^2$ 。

又设  $\{N(t), t \geq 0\}$  为强度  $\lambda$  的泊松过程, 且与  $\{X_n, n \geq 0\}$  独立。记  $Y(t) = X_{N(t)}, (t \geq 0)$ ,

- (1) 证明  $\{Y(t), t \geq 0\}$  为平稳过程;
- (2) 试求  $\{Y(t), t \geq 0\}$  的功率谱密度函数。
- (3)  $\{Y(t), t \geq 0\}$  的均值遍历性是否成立? 为什么?

(完)