作业一(2020年10月)

严禁抄袭作业

第一题 **重心插值公式(barycentric interpolation formula)**

课堂上我们已经讨论过了基于$n+1$个插值点$\{x_j\}_{j=0}^n$的Lagrange插值多项式：

$$p(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j \ell_j(x) \tag{1}$$

此处，$f_j=f(x_j)$。Lagrange插值基函数(Lagrange polynomial)

$$\ell_j(x)=\frac{\prod_{k\neq j}(x-x_k)}{\prod_{k\neq j}(x_j-x_k)} \tag{2}$$

满足

$$\ell_j(x_k)=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}$$

我们现在来讨论一下Lagrange插值的一种变体：重心插值公式。如在课堂上引入的，对于$n+1$个插值点$\{x_j\}_{j=0}^n$，我们定义节点多项式(node polynomial) $\ell(x)\in\mathcal{P}_{n+1}$：

$$\ell(x)=\prod_{k=0}^{n}(x-x_k) \tag{3}$$

(a) (10分)首先证明Lagrange基函数可以用节点多项式简洁地表示出来：

$$\ell_j(x)=\frac{\ell(x)}{\ell'(x_j)(x-x_j)},$$

并由此推导出**重心插值公式的第一形式**(first form of the barycentric interpolation formula or type 1 barycentric formula)：

$$p(x)=\ell(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{\lambda_j}{x-x_j}f_j, \qquad \text{此处 } \lambda_j=\frac{1}{\ell'(x_j)}$$

此处λ_j叫做插值权重(weights)。

(b) (10分)观察(1)，巧妙地证明所有Lagrange基函数的和恰好为1，即：

$$\sum_{j=0}^{n}\ell_j(x)=1$$

并由此推导出**重心插值公式的第二形式**(second form of the barycentric interpolation formula or true barycentric formula)：

$$p(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{\lambda_j f_j}{x-x_j}\Big/\sum_{j=0}^{n}\frac{\lambda_j}{x-x_j}$$

题后语：由多项式插值的唯一性可知无论是重心插值公式的第一形式还是第二形式(第二形式甚至已经不是多项式，而是有理式)他们都与我们学过的Lagrange插值和Newton插值公式完全等价！

(c) (附加题：20分)课堂上我们提到了使用Chebyshev点

$$x_j=\cos(j\pi/n)\qquad j=0,1,...,n \tag{4}$$

作为插值节点可以有效地避免Runge现象的发生。实际上Chebyshev点(4)是第n阶Chebyshev多项式(Chebyshev polynomial)

$$T_n(x)=\cos(n\theta),\qquad 此处\theta=\cos^{-1}(x)$$

的极值点(extrama points)。证明当取Chebyshev点(4)作为插值点的时候，插值权重λ_j可以化简为

$$\lambda_j=\frac{2^{n-1}}{n}(-1)^j,\qquad 1\le j\le n-1$$

同时

$$\lambda_0=\frac{2^{n-2}}{n}\quad 和\quad \lambda_n=\frac{2^{n-2}}{n}(-1)^n \tag{5}$$

(d) （20分）基于上一小题的结论，我们可以得到基于Chebyshev插值点的更为简洁的重心插值公式（插值权重λ_j仅仅是±1!）

$$p(x)=\sum_{j=0}^{n}{}'\frac{(-1)^j f_j}{x-x_j}\Big/\sum_{j=0}^{n}{}'\frac{(-1)^j}{x-x_j} \tag{6}$$

这里求和号旁的单引号的意义是首项和末项分别除以2，以对应(5)。用程序实现以5001个Chebyshev点为插值点，即$n=5000$，在$[-1,1]$中10001个等距点上对函数

$$f(x)=\tanh(20\sin(12x))+0.02e^{3x}\sin(300x)$$

使用基于Chebyshev点的第二形式的重心插值公式(6)，并用画图的方式展示：(i)被插值函数，(ii)误差（使用`semilogy`图在10000个插值点上画出逐点对应的误差的绝对值大小，可参考本章课堂上使用的程序）。虽然目前我们还不考虑计算的复杂度，但尽量用更为经济的计算方式实现(6)。

题后语：重心插值公式有多种良好的性质，非常适合数值计算使用。这些性质包括但不限于：(i)计算复杂度低，且可以用多级快速算法(fast multipole method)加速计算，(ii)数值稳定性好(numerically stable)，(iii)对于特殊插值点（比如正交多项式的极值点或零点插值权重λ_j有显式表达式）。

第二题 基于等距插值点$x_j = j/n, j = 0, 1, ..., n$，用三次样条插值在$[-1, 1]$上近似给定函数

$$f(x) = e^{3\cos(\pi x)}$$

(a) （20分）选取第一类边值条件(令样条多项式的二阶导数在两个端点的值等于被插值函数二阶导数的真实值)，并令$n = 2^k, k = 6, 7, ..., 12$，同时在每个子区间$[x_i, x_{i+1}]$上等距选取4个点（不包括$x_i$和$x_{i+1}$）用以检查所得的三次样条插值多项式的精度。具体的做法为：求得这$4n$个点上得到的三次样条插值多项式对应于原函数的误差，记录这当中最大的误差值，然后用`log-log`图画出最大误差随n取值变化的情况。

(b) （附加题：10分）解释你得到的`log-log`图中曲线的斜率的意义。

(c) （10分）修改你的程序以选取第二类(令样条多项式的一阶导数在两个端点的值等于被插值函数一阶导数的真实值)和第三类边值条件（一阶和二阶导数的周期边界条件），将最大误差随n取值变化的曲线叠加到(a)小题中你得到的第一类边值条件的`log-log`图中，以此对比三次样条插值在三种不同边值条件下所得到的插值精度。

第三题 (20分) **写程序**完成课本59页第6题，并计算出你的拟合函数的误差的2-范数。