随机过程B　第三周作业　9月28日　周一

PB18151866 龚小航

1.15 若 X_1, X_2 ……独立且有相同的以 λ 为参数的指数分布，N 服从几何分布，即

$$P(N=n)=\beta(1-\beta)^{n-1},\ \ n=1,2,3\cdots\cdots \quad 0<\beta<1$$

试求随机和 $Y=\sum_{i=1}^{N} X_i$ 的分布。

解：参考课本第 9 页例题 1.12 的证明过程，有：

$$E[e^{tY} \mid N=n] \ = \ E\left[e^{t\sum_{i=1}^{N}X_i}\middle| N=n\right] \ = \ E\left[e^{t\sum_{i=1}^{n}X_i}\right] \ = \ \left(g_X(t)\right)^n$$

再直接求出 $g_X(t)$，这就是指数分布的矩母函数，按定义：

$$g_X(t) \ = \ \int_0^{\infty} e^{tx}\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \ = \frac{\lambda}{t-\lambda}\left(e^{(t-\lambda)x}\Big|_{x=0}^{\infty}\right) = \frac{\lambda}{\lambda-t}$$

把这个结果代回，即得：

$$E[e^{tY} \mid N=n] \ = \ \left(g_X(t)\right)^n; \quad E[e^{tY} \mid N] \ = \ \left(g_X(t)\right)^N = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^N$$

判断 Y 的分布，可以从 Y 的矩母函数形式上来判断，由此计算其矩母函数：

$$g_Y(t) = \ E[E(e^{tY}|N)] \ = \ E\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^N\right] \ = \ \sum_{n=1}^{\infty}\beta(1-\beta)^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$$

$$= \ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)\beta\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}-\frac{\lambda\beta}{\lambda-t}\right)^{n-1}$$

当且仅当 $\left|\frac{\lambda}{\lambda-t}-\frac{\lambda\beta}{\lambda-t}\right|<1$ 时 $g_Y(t)$ 收敛，此时利用等比数列求和，得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}-\frac{\lambda\beta}{\lambda-t}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} 1 * \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}-\frac{\lambda\beta}{\lambda-t}\right)^n-1}{\frac{\lambda}{\lambda-t}-\frac{\lambda\beta}{\lambda-t}-1} = \frac{\lambda-t}{\lambda\beta-t}$$

$$\Longrightarrow \quad g_Y(t) = \frac{\lambda\beta}{\lambda\beta-t}$$

根据常用分布的矩母函数表示形式，可知 $Y=\sum_{i=1}^{N}X_i$ 服从参数为 $\lambda\beta$ 的指数分布。

1.16 若 X_1, X_2 ……独立同分布，$P(X_i = \pm 1) = 1/2$；N 与 X_i $(i \geq 1)$ 独立且服从参数为 β 的几何分布，其中 $0 < \beta < 1$. 试求随机和 $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ 的均值，方差和三、四阶矩。

解：求解均值、方差、矩，显然需要用到矩母函数。先求出 $g_Y(t)$：

$$E[e^{tY}|N=n] \;=\; E\left[e^{t\sum_{i=1}^{N} X_i}\middle|N=n\right] \;=\; E\left[e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] \;=\; \left(g_X(t)\right)^n$$

再直接求出 $g_X(t)$，这就是两点分布的矩母函数，按定义：

$$g_X(t) = \sum_{i=-1,1} e^{it} P(X=i) \;=\; \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

把这个结果代回，即得：

$$E[e^{tY} \mid N=n] \;=\; \left(g_X(t)\right)^n; \quad E[e^{tY} \mid N] \;=\; \left(g_X(t)\right)^N = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^N$$

由以上结果，可以计算 Y 的矩母函数：

$$g_Y(t) = \;E[E(e^{tY}|N)] \;=\; E\left[\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^N\right] \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \beta(1-\beta)^{n-1}\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n$$

最后由 Y 的矩母函数直接求出 Y 的一至四阶原点矩：

- 均值：

$$E[Y] \;= g_Y'(0) = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n\beta(1-\beta)^{n-1}\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^{n-1}\right)\Big|_{t=0} \;=\; 0$$

- 方差：即计算其二阶矩，利用公式 $Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$ 即可

$$\begin{aligned} E[Y^2] \;=\; g_Y''(0) \;&=\; \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\beta(1-\beta)^{n-1}\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 \\ &+\; \sum_{n=1}^{\infty} n\beta(1-\beta)^{n-1}\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n \qquad (t=0) \\ &=\; \sum_{n=1}^{\infty} n\beta(1-\beta)^{n-1} \;=\; \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) \;=\; \frac{1}{\beta}$$

- 三阶矩：再对上式求导一次

$$E[Y^3] \;=\; g_Y''(0) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(n-2)\beta(1-\beta)^{n-1}\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^{n-3}\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^3$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} 2n(n-1)\beta(1-\beta)^{n-1}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-1}\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} n^2\beta(1-\beta)^{n-1}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-1}\frac{e^t-e^{-t}}{2} \qquad (t=0)$$

$$= \quad 0$$

这是因为$\frac{e^t-e^{-t}}{2}=0$，而每一项都含这一项。

- 四阶矩：再对上式求导一次

$$E[Y^3] \;=\; g_Y''(0) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)\beta(1-\beta)^{n-1}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-4}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^4$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} 3n(n-1)(n-2)\beta(1-\beta)^{n-1}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} 2n(n-1)^2\beta(1-\beta)^{n-1}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} 2n(n-1)\beta(1-\beta)^{n-1}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} n^2(n-1)\beta(1-\beta)^{n-1}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} n^2\beta(1-\beta)^{n-1}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n} \qquad (t=0)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2n(n-1)\beta(1-\beta)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty} n^2\beta(1-\beta)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(3n^2-2n)\beta(1-\beta)^{n-1} \;=\; 3\sum_{n=1}^{\infty} n^2\beta(1-\beta)^{n-1}-2\sum_{n=1}^{\infty} n\beta(1-\beta)^{n-1}$$

$$= 3\left(\frac{1-\beta}{\beta^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)-2\frac{1}{\beta^2} \;=\; \frac{6-5\beta}{\beta^2}$$

1.17 随机变量 N 服从参数为 λ 的泊松分布，给定 $N=n$，随机变量 M 服从以 n 和 p 为参数的二项分布。试求 M 的无条件概率分布。

解： 仍然利用矩母函数，根据常用函数的矩母函数表达形式， $B(n,p)$ 的矩母函数为 $(pe^t+1-p)^n$

$$E[e^{tM}|N=n] = (pe^t+1-p)^n$$

$$g_M(t) = E\big[E[e^{tM}|N]\big] = E[(pe^t+1-p)^N] = \sum_{n=0}^{\infty}(pe^t+1-p)^n\cdot\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{\lambda p(e^t-1)}$$

对比这个形式，可知 M 服从参数为 λp 的泊松分布。