随机过程B　第八周作业　11月2日　周一

PB18151866 龚小航

3.9 设 $f_{ij}^{(n)}$ 表示从 i 出发在 n 步转移时首次到达 j 的概率，试证明：

$$P_{ij}^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}f_{ij}^{(k)}P_{jj}^{(n-k)}$$

解：设这个过程在第 m 步首次转移至状态 j，显然在 $m\le n$ 时 $P_{ij}^{(n)}$ 不为 0

$$P_{ij}^{(n)} = P\{X_n=j \mid X_0=i\} = \sum_{k=0}^{n}P\{X_n=j,\ m=k \mid X_0=i\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}P\{m=k \mid X_0=i\}P_{jj}^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}P\{X_k=j,\ X_{i<k}\neq j \mid X_0=i\}P_{jj}^{(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}f_{ij}^{(k)}P_{jj}^{(n-k)}$$

3.11 某个马尔可夫链有状态 0，1，2，3 和转移概率矩阵：

$$P=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

试求 $f_{00}^{(n)}$，$n=1,2,3,4,5,\cdots\cdots$，其中 $f_{ii}^{(n)}$ 由 $P\{X_n=i,\ X_k\neq i,\ k=1,2,\cdots\cdots,n-1\,|X_0=i\}$ 定义

解：令 $i=0$，带入 $f_{ii}^{(n)}$ 定义式：

$$f_{00}^{(n)}=P\{X_n=0,\ X_k\neq 0,\ k=1,2,\cdots\cdots,n-1\,|X_0=0\}$$

即 $T=0$ 时处于状态 0，$T=n$ 时第一次回到状态 0.根据定义，有：

$$f_{00}^{(1)}=P_{00}=0;\qquad f_{00}^{(2)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{4};$$

与此类似，在 $n\ge 2$ 时题中描述的过程就可以描述为：在第一步从状态 0 转移到其他状态，接

下来的 $n-2$ 次转移都不回到状态 0，而第 n 步转移回到状态 0. 因此：

$$f_{00}^{(n)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

令 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，尝试对其进行对角化：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & \lambda-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\lambda^3-\frac{1}{2}\lambda^2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda=0(\text{二重})\text{或}\ \frac{1}{2}(\text{单重})$$

对于 $\lambda=1$，方程组 $(\lambda I-A)x=0$ 成为：$\begin{cases}x_1-x_2=0\\ x_2-x_3=0\\ \frac{1}{2}x_3=0\end{cases}\Rightarrow\ \alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

不符合对角化条件。重新计算 A^n，对其多乘几次找规律：

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/4\end{pmatrix};\quad A^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/4\\ 0 & 0 & 1/8\end{pmatrix};\quad A^4=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1/4\\ 0 & 0 & 1/8\\ 0 & 0 & 1/16\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 假设 $A^k=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2^{k-2}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{k-1}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2^k}\end{pmatrix}$，使用数学归纳法，归纳递推：

$$\text{则}\ A^{k+1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1/2^{k-2}\\ 0 & 0 & 1/2^{k-1}\\ 0 & 0 & 1/2^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1/2^{k-1}\\ 0 & 0 & 1/2^k\\ 0 & 0 & 1/2^{k+1}\end{pmatrix}$$

由此可得：($n\geq 4, A_1$ 的形式不相同，需要单独计算)

$$f_{00}^{(n)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}A^{n-2}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1/2^{n-4}\\ 0 & 0 & 1/2^{n-3}\\ 0 & 0 & 1/2^{n-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2^{n-3}}+\frac{1}{2^{n-1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\ =\ \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-2}}\quad(n\geq 4)$$

综上：

$$f_{00}^{(n)}=\begin{cases}0, & n=1\\ \frac{1}{4}, & n=2\\ \frac{1}{8}, & n=3\\ \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-2}}, & n\geq 4\end{cases}$$

3.12 在成败型的重复试验中，每次试验结果为成功 (S) 或失败 (F)，同一结果相继出现称为一个游程 (run). 比如一个结果 FSSFFFSF 中共有两个成功游程，三个失败游程。设成功概率为 p，而失败概率为 $1-p$，记 X_n 为 n 次试验后成功游程的长度 （若第 n 次失败，则 $X_n = 0$）。试证明 $\{X_n, n=1,2,\cdots\cdots\}$ 为一个马尔可夫链，并确定其转移概率矩阵。记 T 为返回状态 0 的时间，试求 T 的分布与均值，并由此对这一马尔可夫链的状态进行分类。

解：游程是连续出现的结果区段。在例子中共有五个游程，分别为 F, SS, FFF, S, F，成功游程和失败游程指的是 S 游程与 F 游程，而不是构建游程失败；每个游程中可以含若干 S 或 F.

由题设，一步试验中 S 出现的概率为 p，F 出现的概率为 $1-p$。在题中的试验中，只要在第 i 步失败就会令 $X_i = 0$。写出其转移概率：

$$P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\}=\begin{cases} p, & j=i+1 \\ 1-p, & j=0 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

先做出这个过程的一步概率转移矩阵：

$$P=\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ 1-p & 0 & p & 0 & \cdots\cdots \\ 1-p & 0 & 0 & p & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

显然这个随机过程满足马尔可夫性质，一步转移概率与上一步之前（不包括上一步）的状态均无关系，只与上一步所处的状态有关，由定义可知它是离散时间的有平稳转移概率的马尔可夫链。

T 为从状态 0 出发并首次返回状态 0 所需的时间（认为一个单位时间发生一次转移），显然：

$$P\{T=k\}=p^{k-1}(1-p),\ k=1,2,3,\cdots\cdots$$

即 T 服从参数为 p 的几何分布。

再求它的均值：

$$E(T)=\frac{1}{p}(1-p)\sum_{i=1}^{\infty} ip^i=\frac{1}{p}(1-p)\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\left(p\frac{1-p^n}{1-p}-\frac{np^{n+1}}{1-p}\right)\right]=\frac{1}{1-p}$$

最后从转移概率矩阵来看，所有状态都是互达的，因此这是不可约过程。