随机过程B　第九周作业　11 月 9 日　周一

PB18151866 龚小航

3.17 试计算以下转移概率矩阵的极限分布：

$$P=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/6 & 1/2 & 1/3\end{pmatrix}$$

解：显然这个马尔可夫过程是遍历的，且不可约。它的平稳分布记为 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2)$ 分别表示其经过无限长时间后处于状态 0，1，2 的概率。显然其必处于这三个状态之一，因此可设 $\pi=(\pi_0,\pi_1,1-\pi_0-\pi_1)$ 由于这个概率分布是平稳的，由平稳性可知：

$$\pi P=\pi \quad\Longrightarrow\quad (\pi_0,\ \pi_1,\ 1-\pi_0-\pi_1)\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/6 & 1/2 & 1/3\end{pmatrix}=(\pi_0,\ \pi_1,\ 1-\pi_0-\pi_1)$$

$$\Longrightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{1}{2}\pi_0+\dfrac{1}{3}\pi_1+\dfrac{1}{6}(1-\pi_0-\pi_1)=\pi_0\\ \dfrac{1}{2}\pi_0+\dfrac{1}{3}\pi_1+\dfrac{1}{2}(1-\pi_0-\pi_1)=\pi_1\\ \dfrac{1}{3}\pi_1+\dfrac{1}{3}(1-\pi_0-\pi_1)=1-\pi_0-\pi_1\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad \text{解：}\begin{cases}\pi_0=5/14\\ \pi_1=3/7\\ \pi_2=3/14\end{cases}$$

因此这个转移概率矩阵的极限分布为：

$$\begin{pmatrix}5/14 & 3/7 & 3/14\\ 5/14 & 3/7 & 3/14\\ 5/14 & 3/7 & 3/14\end{pmatrix}$$

3.18 假定在逐日的天气变化模型中，每天的阴晴与前两天的状态关系很大。于是可考虑4状态的马尔可夫链：接连两晴天；一晴一阴；一阴一晴；以及接连两阴天。这四种状态分别记为 $(S,S),(S,C),(C,S),(C,C)$，该链的转移概率矩阵为：

P	(S,S)	(S,C)	(C,S)	(C,C)
(S,S)	0.8	0.2	0	0
(S,C)	0	0	0.4	0.6
(C,S)	0.6	0.4	0	0
(C,C)	0	0	0.1	0.9

求这一马尔可夫链的平稳分布，并求出长期平均的晴天天数。

解： 显然这个马尔可夫过程是遍历的，且不可约。它的平稳极限分布记为 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3)$，分别对应于 $(S,S),(S,C),(C,S),(C,C)$ 四种状态，表示其经过无限长时间后处于状态 0，1，2，3 的概率。显然其必处于这四个状态之一，因此可设 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,1-\pi_0-\pi_1-\pi_2)$ 由于这个概率分布是平稳的，由平稳性可知：

$$\pi P=\pi \quad \Rightarrow \quad (\pi_0,\pi_1,\pi_2,1-\pi_0-\pi_1-\pi_2)\begin{pmatrix}0.8 & 0.2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6\\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9\end{pmatrix}=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,1-\pi_0-\pi_1-\pi_2)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 0.8\pi_0+0.2\pi_1=\pi_0 \\ 0.4\pi_2+0.6(1-\pi_0-\pi_1-\pi_2)=\pi_1 \\ 0.6\pi_0+0.4\pi_1=\pi_2 \\ 0.4\pi_2+0.6(1-\pi_0-\pi_1-\pi_2)=1-\pi_0-\pi_1-\pi_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ 解：} \begin{cases}\pi_0=3/11\\ \pi_1=1/11\\ \pi_2=1/11\\ \pi_3=6/11\end{cases}$$

因此这个转移概率矩阵的极限分布为：

$$\begin{pmatrix}3/11 & 1/11 & 1/11 & 6/11\\ 3/11 & 1/11 & 1/11 & 6/11\\ 3/11 & 1/11 & 1/11 & 6/11\\ 3/11 & 1/11 & 1/11 & 6/11\end{pmatrix}$$

一年中平均晴朗的天数为：$\frac{365}{2}*\left(\frac{3}{11}+\frac{3}{11}+\frac{1}{11}+\frac{1}{11}+0\right)=132.723$ 天

3.19 某人有 M 把伞并在办公室和家之间往返。如某天他在家时（办公室时）下雨了且家中（办公室中）有伞他就带一把伞去上班（回家），不下雨时他从不带伞。如果每天与以往独立的早上（或晚上）下雨的概率为 p，试定义一个 $M+1$ 状态的马尔可夫链以研究他被雨淋湿的机会。

解：先定义 X_n 表示第 n 天早晨时在家中的雨伞数(或是第 n 天傍晚时在办公室中的雨伞数)。由于下一步转移时到达各状态的概率只与上一次所处的状态有关而与更早的状态无关，因此 $\{X_n,n\geq 0\}$ 为一个马尔可夫链。显然这个过程是遍历且不可约的。对于一天，家里的雨伞(办公室中的雨伞)只会在早晚两个时段发生变化。对于 $X_i\in[1,M-1]$ 时：

$$\begin{cases}P\{\,X_{i+1}=k+1 \mid X_i=k\,\}=(1-p\,)\cdot p\\ P\{\,X_{i+1}=k \mid X_i=k\,\}=p^2+(1-p)^2\\ P\{\,X_{i+1}=k+1 \mid X_i=k\,\}=p\cdot(1-p)\\ P\{\,X_{i+1}=other \mid X_i=k\,\}=0\end{cases}$$

写出其转移概率矩阵：

$$P=\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ p(1-p) & p^2+(1-p)^2 & p(1-p) & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & p(1-p) & p^2+(1-p)^2 & p(1-p) & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(1-p) & p^2+(1-p)^2 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & p(1-p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & p(1-p) & p^2+(1-p)^2 & p(1-p) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & p(1-p) & 1-p(1-p) \end{pmatrix}$$

设 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots\cdots,\pi_i,\cdots\cdots,\pi_{M-1},1-\pi_0-\cdots\cdots-\pi_M)$ 由于这个概率分布是平稳的，由平稳性可知：

$$\pi P=\pi \quad \Longrightarrow \quad \text{解：} \begin{cases} \pi_0=\dfrac{1-p}{M+1-p} \\ \pi_i=\dfrac{1}{M+1-p} \end{cases} ,1\le i\le M$$

因此他在早上或傍晚的某一次要出门，发现外面下雨且手边没有雨伞的概率为：

$$P\{\text{某次出门被淋湿}\}=p\pi_0=\frac{p(1-p)}{M+1-p}$$

而他某一天被雨淋湿的概率为：

$$P\{\text{某一天他被淋湿}\}=2P\{\text{某次出门被淋湿}\}=\frac{2p(1-p)}{M+1-p}$$