随机过程B　第十周作业　11月16日　周一

PB18151866 龚小航

3.20 血液培养在时刻 0 从一个红细胞开始，一分钟之后红细胞死亡可能出现下面几种情况：25% 再生 2 个红细胞；50% 再生 1 个红细胞和 1 个白细胞；25% 产生 2 个白细胞。每一分钟对于红细胞来说以同样的规律产生下一代，而白细胞则不再生，假定每个细胞的行为是独立的。

(1) 从培养开始 $n+1$ 分钟，不出现白细胞的概率是多少（总数为 0）？

(2) 整个培养过程停止的概率是多少?

解：由于本题出现白细胞则代表生产的过程终止，因此只需要考虑红细胞的情况即可。

记 X_n 为时刻 n 时血液中的红细胞数目，由于每个细胞的行为是独立的，因此 X_{n+1} 仅与 X_n 有关。因此 $\{X_n, n \geq 0\}$ 显然是一个马尔可夫链。

(1) 即每次生产都选择了再生两个红细胞，每一步选择的概率为 25%，每一个红细胞都必须都这么做。

从时刻 0 至时刻 n，红细胞总数为：

$$SUM = 1 + 2 + 4 + \cdots\cdots + 2^n = \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

而每个红细胞这么做的概率为 1/4，而每个细胞的行为独立，因此：

$$P\{X_{n+1} = 2^{n+1} - 1 \mid X_0 = 1\} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{n+1}-1}, n = 0,1,2 \cdots\cdots$$

(2) 红细胞群体最终消亡的概率 π 是方程 $\phi(s) = s$ 的最小正根。其中：

$$\phi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 = k) \cdot s^k = \sum_{k=0}^{2} P(X_1 = k) \cdot s^k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}s^2$$

令 $\phi(s) = s$：

$$\phi(s) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}s^2 = s \quad \Longrightarrow \quad s = 1\ (\text{二重根})$$

恰好是一个正根，因此 $\pi = 1$，即红细胞群体终将消亡，整个培养过程停止的概率为 1

3.21 分支过程中一个个体产生后代的分布为 $p_0 = q$，$p_1 = p$. $(p + q = 1)$，试求第 n 代总体的均值和方差及群体消亡的概率。若产生后代的分布为 $p_0 = 25\%$，$p_1 = 50\%$，$p_2 = 25\%$，以及 $p_0 = 12.5\%$，$p_1 = 50\%$ $p_2 = 25\%, p_3 = 12.5\%$，试回答同样的问题。

解：先求第 n 代总体的均值与方差，及其最终消亡概率：　此时 $\mu = p$；$\sigma^2 = p(1-p)$

$$E[X_n]=E[X_{n-1}]E[Z_1]=\cdots\cdots=E^n[Z_1]=p^n$$

$$Var[X_n]=E[X_{n-1}]Var[Z_1]+Var[X_{n-1}](E[Z_1])^2=p^{n-1}\cdot(p-p^2)+Var[X_{n-1}]p^2$$

$$=\begin{cases}\sigma^2\mu^{n-1}\dfrac{1-\mu^n}{1-\mu}=p^n(1-p^n)\,, & \mu=p\neq 1\\ n\sigma^2=np(1-p)=0\,, & \mu=p=1\end{cases}$$

发现当 $p=1$ 时，$p^n(1-p^n)=0$即两种情况可以合并。因此 $Var[X_n]=p^n(1-p^n)$

再求其最终消亡概率：

$$\phi(s)=\sum_{k=0}^{1}P\{X_1=k\}s^k=qs^0+ps^1=q+ps \quad\Longrightarrow\quad q+ps=s \quad\Longrightarrow\quad 1-p=(1-p)s$$

需要对 $1-p$ 是否为 0 进行分类，不能直接两边同除 $1-p$. $p=1$时群体总将延续。

$$\pi=s=\begin{cases}1\,, & p\neq 1\\ 0\,, & p=1\end{cases}$$

再求给定分布下上述问题的解：

① $p_0=25\%$，$p_1=50\%$，$p_2=25\%$： 此时 $\mu=1\,;\,\sigma^2=1/2$

$$E[X_n]=E[X_{n-1}]E[Z_1]=\cdots\cdots=E^n[Z_1]=\left(\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2\right)^n=1$$

$$Var[X_n]=n\sigma^2=\frac{n}{2}\ \left(\mu=1,\text{利用上一题的情况二}\right)$$

求其消亡概率：

$$\phi(s)=\sum_{k=0}^{2}P\{X_1=k\}s^k=\frac{1}{4}s^0+\frac{1}{2}s^1+\frac{1}{4}s^2=\frac{s^2}{4}+\frac{s}{2}+\frac{1}{4} \quad\Longrightarrow\quad \frac{s^2}{4}+\frac{s}{2}+\frac{1}{4}=s \quad\Longrightarrow\quad \pi=s=1$$

即这个群体终将消亡。

② $p_0=12.5\%$，$p_1=50\%$，$p_2=25\%$，$p_3=12.5\%$： 此时 $\mu=11/8\,;\,\sigma^2=47/64$

$$E[X_n]=E[X_{n-1}]E[Z_1]=\cdots\cdots=E^n[Z_1]=\mu^n=\left(\frac{11}{8}\right)^n$$

$$Var[X_n]=\sigma^2\mu^{n-1}\frac{1-\mu^n}{1-\mu}=\frac{47}{24}\left(\left(\frac{11}{8}\right)^{2n-1}-\left(\frac{11}{8}\right)^{n-1}\right)\ \left(\mu\neq 1,\text{利用上一题的情况一}\right)$$

求其消亡概率：

$$\phi(s)=\sum_{k=0}^{3}P\{X_1=k\}s^k=\frac{1}{8}s^0+\frac{1}{2}s^1+\frac{1}{4}s^2+\frac{1}{8}s^3 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{8}+\frac{s}{2}+\frac{s^2}{4}+\frac{s^3}{8}=s$$

$$\Longrightarrow\quad \pi=s=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}\ or\ 1$$

取最小正根，$\pi=\frac{\sqrt{13}-3}{2}$，此即这个群体终将消亡的概率。

3.22 若单一个体产生后代的分布为 $p_0 = q$，$p_1 = p$. $(p + q = 1)$，并假定过程开始时的祖先数为 1.试求分支过程第 3 代总数的分布。

解：由于每个个体只能产生一个后代或是 0 个后代，因此第三代总数至多为 1，最少为 0.

$$P\{X_3 = 1 \mid X_0 = 1\} = P\{X_3 = 1, X_2 = 1, X_1 = 1 \mid X_0 = 1\} = p^3;$$

$$P\{X_3 = 0 \mid X_0 = 1\} = 1 - P\{X_3 = 1 \mid X_0 = 1\} = 1 - p^3$$

这就是第三代总数的分布。