中国科学技术大学

2007-2008 学年第二学期考试试卷

考试科目：随机过程　　　　　　　　　得分：__________

学生所在系：____________ 姓名：__________ 学号：____________

（2008年6月30日，开卷）

(20分)判断是非题：

（1）设 X 为一平稳独立增量过程，则必有：

$a.\ X$ 为一 $Poisson$ 过程；（ × ）　　$b.\ X$ 为一马氏过程；（ √ ）

$c.\ X(t+1)-X(t)$ 为平稳过程；（ × ）。

（2）设 S 为一不可约马氏链 $\{X_n,\ n\ge 0\}$ 的状态空间，则对任二状态 $i,j\in S$，必有：

$a.\ i,j$ 均为正常返状态；（ × ）　　$b.\ \mu_i=\mu_j$，其中 $\mu_i=\sum_{n=1}^{+\infty} n f_{ii}^{(n)}$；（ × ）

$c.\ d(i),d(j)\in(0,\ +\infty)$；（ √ ）。

（3）下列关于 τ 的函数 $R(\tau)$ 是否为平稳过程（或序列）的协方差函数？

$a.\ R(\tau)=e^{-|\tau|}(\tau^2+2|\tau|-1)$；（ × ）　　$b.\ R(\tau)=\begin{cases}1/|\tau|, & \tau\neq 0\\ 1, & \tau=0\end{cases}$；（ √ ）

$c.\ R(\tau)=|\tau|e^{-\tau^2/2}$；（ × ）　　$d.\ R(\tau)=\begin{cases}(\cos\tau)/(1-\tau^2), & |\tau|<1\\ 0, & |\tau|\ge 1\end{cases}$；（ √ ）。

（15分）考察直线上的简单对称随机游动，即质点从0出发，每隔单位时间等可能地向左或向右移动一个单位。现以 X_n 表示质点在时刻 n 所处的位置，

（1）试求期望 $E(X_n)$ 和协方差 $Cov(X_m,X_n)$ ，$(m,n\in N)$；

（2）试求 X_n 的分布律 $(n=1,2,3,\cdots)$；

（3）$\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 是否为平稳过程？

三、(15分)（1）某报贩征订报纸，设来订阅的顾客数为强度6（人/日）的 $Poisson$ 过

随机过程

07-08 第二学期考试试卷

一.

(1). a. 错 显然

b. √ $P(X_{n+1}=j \mid X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1}, \ldots, X_0=i_0) = P(X_{n+1}-X_n=i) = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$ 连续的类似

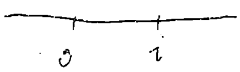
c. X. 平稳独立增量过程 期望不一定存在

(2). a X. 显然.

b. X. $\mu_i \neq \mu_j$. $\pi_i \neq \pi_j$. 当极限分布存在时.

c. √

二. (1). $P(X_n=i)$



在n步中有 n_1 步向右. n_2 步向左

则有 $\begin{cases} n_1+n_2=n \\ n_1-n_2=i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1=\frac{n+i}{2} \\ n_2=\frac{n-i}{2} \end{cases}$

$$\therefore P(X_n=i)=\begin{cases} C_n^{\frac{n+i}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n+i \text{ 是偶数} \\ 0 & n+i \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

为了计算方便. 令 $\frac{n+i}{2}=k$. 则分布律为

$$P(X_n=2k-n)=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad k=0,\ldots n.$$

(2). $EX_n=0$

假设 $m\le n$. $E(X_mX_n \mid X_m=k) = kE(X_n \mid X_m=k) = k(EX_{n-m}+k)=k^2$

$$\therefore EX_mX_n = EX_m^2 = \sum_{k=0}^m (2k-m)^2 C_m^k \left(\frac{1}{2}\right)^m = \left[\sum_{k=0}^m 4k^2 C_m^k\left(\frac{1}{2}\right)^m - 4m\sum_{k=0}^m kC_m^k + m^2\sum_{k=0}^m C_m^k\right.$$

$$= \left[4m(m-1)2^{m-2}+4m2^{m-1}-2m^2 2^m+m^2 2^m\right]\left(\frac{1}{2}\right)^m = m$$

$\therefore \operatorname{Cov}(X_m, X_n) = \min(m,n)$

三 (1) Y_i: 第i个顾客购买报纸数. 则 $Y_1, Y_2, \ldots$ iid $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$N(t)$: t时刻到达的顾客数

$X(t)$: t时刻的收入.

则 $X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$

则 $EX(t)=EN(t)\cdot EY_i = \lambda\mu t = 6\times\frac{5}{3}\times 365 = 3650$

$\operatorname{Var}X(t) = EN(t)\cdot \operatorname{Var}Y_i + \operatorname{Var}N(t)\cdot E^2Y_i = \lambda(\mu^2+\sigma^2)t = 6\times\left(\frac{25}{9}+\frac{5}{9}\right)\times 365 = 7300$

(2) 令 $A_{ij,k}$ 为 第k个从i岛迁出的人从j岛出逃事件 则

$I_{A_{ij1}}, I_{A_{ij2}}, \ldots$ iid $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P_{ij} & 1-P_{ij} \end{pmatrix}$ 其中1表示从j岛离开

0 表示未从j岛离开

则 $O_j = \sum_{k=0}^{N_0} I_{A_{0jk}} + \cdots + \sum_{k=0}^{N_{j-1}} I_{A_{j-1,j,k}}$

$\therefore EO_j = EN_0 \cdot P(A_{0jk}) + \cdots + EN_{j-1} \cdot P(A_{j-1,j,k})$

$= \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i P_{ij}$

四. (1).

$$
\mathbb{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N \end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & \\
\frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N}
\end{pmatrix}
$$

(2). 该马氏链 任两点 i, j 均不可互达.

所有 N 个互体类

$\{1\}$. $f_{11} = 1$ ∴ 正常返 又非周期 ∴ 称为遍历

$\{i\}$. $f_{ii} = \frac{1}{i}$. 瞬过 非周期. 瞬过. $i \geq 2$.

(3) $i<j$. 时 $P_{ij}^{(n)} = 0$

$i=j$ 时 $P_{ii}^{(n)} = (\frac{1}{i})^n$. $i \neq 1$ 时 $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = 0$. $P_{11}^{(n)} = 1$

$i>j$ 时 $P_{ij}^{(n)}$ 有n步中必有$i-j$步往回走. 是n的多项式

$\therefore P_{ij}^{(n)} = C(n) \cdot P_{jj}^{n-(i-j)}$ 其中 $C(n)$ 是 n的多项式

当$j \neq 1$ 时 $P_{ij}^{(n)} = C(n) \left(\frac{1}{j}\right)^{n-(i-j)}$

由 $(\frac{1}{j}) < 1$. $\therefore \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$.

∴ 对于$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ 当$j \neq 1$时. 均为0 又$\sum_{j=1}^{N} P_{ij} = 1$ $\therefore \lim_{n\to\infty} P_{i1}^{(n)} = 1$.

而 $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}$ 存在. 且为
$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

五. (1) $\pi(2) = \pi(0) \cdot P^{(2)} = \frac{1}{3}(0.94,\ 0.7,\ 1.36)$.

(2) $E[T_3|X_0=2] = E[T_3|X_1=1] \cdot P(X_1=1|X_0=2) + E[T_3|X_1=2] \cdot P(X_1=2|X_0=2) + E[T_3|X_1=3] P(X_1=3|X_0=2)$

$= (1+E[T_3|X_0=1]) \cdot 0.3 + 0.2\,(1+E[T_3|X_0=2]) + 0.5$

$= 1 + E[T_3|X_0=1] \cdot 0.3 + E[T_3|X_0=2] \cdot 0.2$ (*)

同理可得 $E[T_3|X_0=1] = 1 + 0.6\,E[T_3|X_0=1] + 0.3\,E[T_3|X_0=2]$ (**)

结合(*)(**)可得 $E[T_3|X_0=2] = \frac{70}{23}$. $E[T_3|X_0=1] = \frac{110}{23}$.

(3) 有限状态. 互达. 而不可约. 正常返. 又非周期. 由 Th3.4.6 ∃ 极限分布 π

$\begin{cases} \pi \mathbb{P} = \pi \\ \sum \pi_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi = \frac{1}{48}(14,\ 11,\ 23)$

中国科学技术大学

2006–2007 学年第二学期考试试卷

考试科目：随机过程　　　　　　　　　　　　　　　得 分 ________

学生所在系 ______　是否重考 ____　姓 名 ________　学 号 ________

(2007 年 7 月 8 号，开卷)

1. (15 分) 设移民到某地区定居的户数 $N(t)$ 是一个 Poisson 过程，平均每周有 2 户定居，即强度 $\lambda = 2$. 如果每户的人口数为独立同分布的随机变量 $Y_i, i = 1, 2, 3, \ldots$, 且分布律为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. 记 $X(t) = \sum\limits_{i=1}^{N(t)} Y_i$.

(1) 试求 5 周内移民到该地区人口的数学期望及方差；

(2) 求 $X(t)$ 的矩母函数.

2. (20 分) 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的状态空间为 $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$, 转移概率为

$$P_{00} = \frac{1}{2}, \quad P_{i,i+1} = \frac{1}{2}, \quad P_{i,0} = \frac{1}{2}, \quad i \in I.$$

(1) 试求 $f_{00}^{(n)}$ $(n \in N)$ 和 f_{00};

(2) 试求从 0 出发后第一次回到 0 的平均步长 μ_0;

(3) 证明此马氏链为不可约遍历的.

3. (15 分) 设有甲，乙，丙三个品牌的某种产品在某一地区的市场占有率开始时 $(n = 0)$ 各为 $\frac{1}{3}$. 而每过一个月 (单位时间) 顾客消费倾向的改变可以用一个三状态的马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 来描述，其一步转移概率矩阵为 (状态 1, 2, 3 分别表示购买甲，乙，丙三种产品):

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.35 & 0.3 & 0.35 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

(1) 问两个月后各品牌的市场占有率将会变为多少？

(2) 各品牌产品的市场占有率最终会稳定于什么样的比例？

4. (15 分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为从 0 出发的简单对称随机游动.

(1) 问过程回到 0 的平均时间是多少？

07年7月.

(1) $E X(5) = E\left(\sum_{i=1}^{N(5)} Y_i \right) = E N(5)\, E Y_i = 2\cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = 25$

$E Y_i = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{2}$

$E Y_i^2 = 1\cdot\frac{1}{6} + 2^2\cdot\frac{1}{3} + 3^2\frac{1}{3} + 4^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{43}{6}$

$Var\, X(5) = E[N(5)]\, Var\, Y + Var[N(5)]\, E^2 Y$

$= E[N(5)]\, E Y^2 = 10\, \frac{43}{6} = \frac{215}{3}$

(2) $\psi_X(t') = E[e^{t' X(5)}]$

$= E\left\{ E\left[\exp\left\{t' \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right\} \middle| N = n\right] \right\}$

$= E\left\{ E\left[\exp\left(t' \sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\right] \right\}$

$= E[(\psi_Y(t'))^N]$

$\psi_Y(t) = \frac{1}{6}e^{t} + \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{1}{6}e^{4t}$

$E[(\psi_Y(t'))^N] = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi_Y(t'))^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

$= e^{-\lambda t} e^{\lambda \psi_Y(t') t} = e^{\lambda t(\psi_Y(t') - 1)}$

$\int_{X^{-1}(B)} E(Y|X)\, dP = \int_{X^{-1}(B)} Y\, dP = \int_{\Omega} Y(\omega) I_B(X(\omega))\, P(d\omega)$

$= E(Y(\omega) I_B(X(\omega)))$

设 $B \in \mathcal{B}$, F 为 X, Y 的公共分布, 则·

$\int_{\{S_n \in B\}} X_j\, dP = \iint x_j I_B(x_1 + x_2) \prod_{i=1}^{2} F(dx_i)$

$= \iint x_k I_B(x_1 + x_2) \prod_{i=1}^{2} F(dx_i)$

$= \int_{\{S_n \in B\}} X_k\, dP$

即 $E X_j I_{\{S_n \in B\}}$ 与 j 无关, 故对 $\forall B \in \mathcal{B}$.

$n \int_{\{S_n \in B\}} X_j\, dP = \sum_{j=1}^{2} \int_{\{S_n \in B\}} X_j\, dP = \int_{\{S_n \in B\}} S_n\, dP$

即 $E(X_j | S_n) = \frac{1}{2} S_n$, a.s.

$E(X | X+Y = z)$ $\qquad g(y)$

$= E\{ E(X | X+Y = z | Y) \}$

$= E\{ \cancel{E(X)}[X | X = z - Y] \}$

中国科学技术大学

2005—2006 学年第二学期考试试卷

考试科目：随机过程　　　　　　得 分：____________

学生所在系：__________ 姓 名__________ 学 号：__________

（2006 年 7 月 6 日，开卷，任选 5 题作答）

一、(20 分) 设 $\{N(t), t\geq 0\}$ 为一强度 λ 的 $Poisson$ 过程，s、$t>0$，试求：

(1) $P\{N(s)=k \mid N(s+t)=n\}=?\quad (k=0,1,2,\cdots,n)$

$E\{N(s)N(s+t)\}=?$

(3) $E\{N(s+t) \mid N(s)\}$ 的分布律与数学期望。

二、(20 分) $2N$ 个球（N 个黑球，N 个白球）分装在甲、乙两个袋子里，每袋各装 N 个球。每次从二袋中各随机取出一球，相互交换后再放回袋中。若以 X_n 表示第 n 次交换后甲袋中的黑球数，则 $\{X_n, n\geq 0\}$ 为一马氏链，（状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots,N\}$）

(1) 试求该马氏链的转移概率矩阵 P；

(2) 证明该马氏链为不可约遍历的；

(3) 求极限 $\pi_j=\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}$，$(i,j=0,1,2,\cdots,N)$。

三、(20 分) 设马氏链转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\begin{pmatrix}0, & 0, & 1, & 0\\ 1, & 0, & 0, & 0\\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, & 0\\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & 0\end{pmatrix}$$

(1) 试将状态空间 $S=\{1,2,3,4\}$ 按互达关系划分为不同的等价类，并讨论各类是常返（正常返或零常返）还是瞬过的，周期性如何。在正常返情况下，求出平均常返时 μ_i；

中国科学技术大学

2004——2005学年第二学期考试试卷

考试科目：随机过程　　　　得分：________

学生所在系：________　姓名：________　学号：________

（2005年6月21日，开卷）

一、（20分）设某路口蓝、白、黄色汽车的到达数分别为强度λ_1, λ_2和λ_3的Poisson过程，且相互独立。

（1）若不论颜色，问第一辆汽车的平均到达时间是多少？ $\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+}$

（2）第一辆蓝车的平均到达时间是多少？ $\frac{1}{\lambda_1}$

（3）白车先于黄车到达，但却落后于蓝车的概率是多少？ $\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_1+}$

二、（10分）一部仪器受到的冲击数$N(t)$为强度λ的Poisson过程，设第i次冲击造成的损伤为D_i，$\{D_i, i=1、2、3\cdots\}$独立同分布，并与$N(t)$独立。若损伤随时间而（指数地）衰减，即经过t时间后，D_i变为$D_i e^{-\alpha t}$（$\alpha>0$），则时刻t仪器所受的总损伤为：

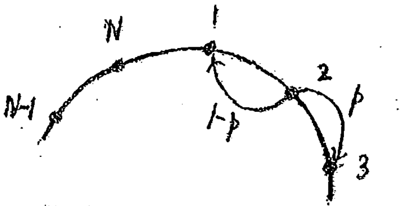
$$D(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-\alpha(t-W_i)}$$

$\frac{\lambda D}{\alpha}(1-e^{-\alpha}$

其中W_i为第i次冲击来到的时刻，试求$E(D(t))$。（假定$ED_i = D$）

三、（20分）一质点在圆周上作随机游动（马氏链），圆周上共有N格，质点以概率p顺时针方向游动一格，以概率1-p逆时针方向游动一格（见图示）：

（1）试求该马氏链的转移概率矩阵P；



$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N\text{-}1 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 1-p & 0 & p & \cdots & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

28

05年6月

一、(1) 由相互独立知汽车到达数为强度 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ 的 Poisson 过程.

故第一辆汽车的平均到达时间是 $1/(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$

(2): 大$_1$

(3) $P(t_白 < t_黄,\ t_白 > t_蓝) = P(t_白 < t_黄)P(t_白 > t_蓝)$

$$P(t_白 < t_黄) = \int_0^\infty\int_0^{t_3} \lambda_2\lambda_3 e^{-\lambda_2 t_2 - \lambda_3 t_3} dt_2\, dt_3$$

$$= \int_0^\infty \lambda_3 e^{-\lambda_3 t_3}\left(-e^{-\lambda_2 t_2}\right)\Big|_0^{t_3} dt_3$$

$$= \int_0^\infty \lambda_3 e^{-\lambda_3 t_3}\left(1 - e^{-\lambda_2 t_3}\right) dt_3$$

$$= \int_0^\infty \lambda_3 e^{-\lambda_3 t_3} dt_3 - \int_0^\infty \lambda_3 e^{-(\lambda_2+\lambda_3)t_3} dt_3$$

$$= 1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}$$

同理 $P(t_蓝 < t_白) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_3}$

故 $P(t_白 < t_黄,\ t_白 > t_蓝) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_3)}$

、 $E D(t) = E\left(\sum_{i=1}^{M(t)} D_i e^{-\alpha(t-W_i)}\right) = E\left\{E\left(\sum_{i=1}^{M(t)} D_i e^{-\alpha(t-W_i)} \,\middle|\, M(t)=n\right)\right\}$

$$E\left(\sum_{i=1}^{M(t)} D_i e^{-\alpha(t-W_i)} \,\middle|\, M(t)=n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} D_i e^{-\alpha(t-W_i)} \,\middle|\, M(t)=n\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E\left(D_i e^{-\alpha(t-W_i)} \,\middle|\, M(t)=n\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(D_i | M(t)=n)\, E\left(e^{-\alpha(t-W_i)} \,\middle|\, M(t)=n\right)$$

$$\cancel{= \sum_{i=1}^{n} ED_i} = D\sum_{i=1}^{n} E\left(e^{-\alpha(t-W_i)} \,\middle|\, M(t)=n\right)$$

$$= D e^{-\alpha t} E\left(\sum_{i=1}^{n} e^{\alpha W_i} \,\middle|\, M(t)=n\right).$$

令 $U_1, U_2, \cdots, U_n$ 是 i.i.d 的 $[0,t]$ 上的均匀 r.v. 则由 Th. 有

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} e^{\alpha W_i} \,\middle|\, M(t)=n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} e^{\alpha U_{(i)}}\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} e^{\alpha U_i}\right)$$

$$= \frac{n}{t}\int_0^t e^{\alpha x} dx$$

$$= \frac{n}{\alpha t}\left(e^{\alpha t} - 1\right)$$

故 $ED(t) = \frac{De^{-\alpha t}}{\alpha t}\left(e^{\alpha t}-1\right) E(M(t))$

$$= \frac{\lambda D}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right).$$

08-09. 第一学期考试试卷.

1.(1) 记 Y_i. 第 i 个中子携带的能量.

则 $S=\sum_{i=1}^{N}Y_i$

$\because ES=EN\cdot EY_i=\frac{3}{2}\lambda$.

$VarS=EN\cdot Var Y+EY^2\cdot Var N=\frac{7}{3}\lambda$

(2). $t\le s$ $R_X(t,s)=Cov(X(t),X(s))=Cov(X(t),X(s)-X(t)+X(t))=Cov(X(t),X(s)-X(t))+Cov(X(t),X(t))$

$\overset{\text{独立}}{\underset{\text{增量}}{=}} Cov(X(t),X(t))=V(t)=V(\min(s,t))$

2.(1) 设 A_i: 第 i 辆车在 t 时刻在路段 (a,b) 这个事件. $X(t)$ 时刻 t 位于路段 (a,b) 的汽车数.

S. 汽车的发车时间. $S\sim U(0,t)$

$P(A_i|S=s)=P(a<v_i(t-s)<b)ds=P(a<v_i(t-s)<b)$.

$\therefore P(A_i)=\frac{1}{t}\int_0^t P(A|S=s)ds=\frac{1}{t}\int_0^t P(a<v_i(t-s)<b)ds=P_{a,b}$.

$\therefore X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}I_{A_i}$

$EX(t)=EN(t)\cdot EI_{A_i}=\lambda t P_{a,b}$.

(2) $P(X(t)=k|N(t)=n)=C_n^k P_{a,b}^k(1-P_{a,b})^{n-k}$.

$\therefore P(X(t)=k)=\sum_{n=k}^{\infty}C_n^k P_{a,b}^k(1-P_{a,b})^{n-k}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$

$=e^{-\lambda t P_{a,b}}\frac{(\lambda t P_{a,b})^k}{k!}$

$\therefore X(t)\sim Poi(\lambda t P_{a,b})$

3. (1) 有限状态. 互达. 不可约. 非周期. 正常返. ⇒ 遍历.

(2). 则). ∃.π, $\begin{cases}\pi P=\pi\\ \sum\pi_i=1\end{cases}$ ⇒ $\pi=(\frac{8}{39},\frac{94}{273},\frac{92}{273},\frac{31}{27})$

(3) $\mu_4=\frac{1}{\pi_4}=\frac{273}{31}$

4. (1) $P=\begin{array}{c} 0\\1\\2\end{array}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9}\\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

(2). 有限状态 非周期. 正常返.

(3) $\begin{cases}\pi P=\pi\\ \sum\pi_i=1\end{cases}$ ⇒ $\pi=(\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5})$