随机过程B　第十一周作业　11月23日　周一

PB18151866 龚小航

3.23 一个连续时间马尔可夫链有 0 和 1 两个状态，在状态 0 和 1 逗留的时间分别服从参数为 $\lambda > 0$ 及 $\mu > 0$ 的指数分布(两个分布)。试求在时刻 0 从状态 0 起始，t 时刻后过程处于状态 0 的概率 $P_{00}(t)$

解：由课本 49 页给出的求解连续时间马尔可夫链的常用方法，对本题采用无穷小分析，利用马尔可夫性对很小的 h 求出有关 $P_{ij}(h)$ 的关系式，或转移概率应当满足的微分方程组，根据边界条件求解：

$$P_{00}(t) + P_{01}(t) = 1;$$

$$\begin{aligned}
P_{00}(t+\Delta t) &= P\{\, X(t+\Delta t) = 0 \mid X(0) = 0 \,\} \\
&= P\{\, X(t+\Delta t) = 0, X(t) = 0 \mid X(0) = 0 \,\} + P\{\, X(t+\Delta t) = 0, X(t) = 1 \mid X(0) = 0 \,\} \\
&= P_{00}(t) \cdot P\{\, X(t+\Delta t) = 0 \mid X(t) = 0 \,\} + P_{01}(t) \cdot P\{\, X(t+\Delta t) = 0 \mid X(t) = 1 \,\} \\
&= P_{00}(t) \cdot \big(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)\big) + P_{01}(t) \cdot \big(\mu\Delta t + o(\Delta t)\big) \\
&= P_{00}(t) \cdot \big(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)\big) + \big(1 - P_{00}(t)\big) \cdot \big(\mu\Delta t + o(\Delta t)\big)
\end{aligned}$$

至此可以得出 $P'_{00}(t)$ 与 $P_{00}(t)$ 之间的关系，这是一个常微分方程：

$$P'_{00}(t) = \frac{P_{00}(t+\Delta t) - P_{00}(t)}{\Delta t} = -(\lambda+\mu)P_{00}(t) + \mu$$

直接利用一阶线性常微分方程的通解法：$P(t) = \lambda + \mu$，$Q(t) = \mu$

$$P_{00}(t) = Ce^{-\int(\lambda+\mu)\mathrm{d}t} + e^{-\int(\lambda+\mu)\mathrm{d}t}\int \mu e^{\int(\lambda+\mu)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = Ce^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

根据初始条件，$P_{00}(0) = 1$ 代入：

$$P_{00}(0) = C + \frac{\mu}{\lambda+\mu} = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

因此原问题的解为：

$$P_{00}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

3.25 记 $X(t)$ 为纯生过程，且有：

$$P\{X(t+h)-X(t)=1 \mid X(t)\text{为奇数}\}=\alpha h+o(h)$$

$$P\{X(t+h)-X(t)=1 \mid X(t)\text{为偶数}\}=\beta h+o(h)$$

及 $X(0)=0$。试分别求事件“$X(t)$为偶数”“$X(t)$为奇数”的概率

解：和上一题完全相同。以 0 代表偶数，1 代表奇数. $\lambda \sim \beta$，$\mu \sim \alpha$

由课本 49 页给出的求解连续时间马尔可夫链的常用方法，对本题采用无穷小分析，利用马尔可夫性对很小的 h 求出有关 $P_{ij}(h)$ 的关系式，或转移概率应当满足的微分方程组，根据边界条件求解：

$$P_{00}(t)+P_{01}(t)=1;$$

$$\begin{aligned}
P_{00}(t+\Delta t) &= P\{X(t+\Delta t)=0 \mid X(0)=0\} \\
&= P\{X(t+\Delta t)=0, X(t)=0 \mid X(0)=0\}+P\{X(t+\Delta t)=0, X(t)=1 \mid X(0)=0\} \\
&= P_{00}(t)\cdot P\{X(t+\Delta t)=0 \mid X(t)=0\}+P_{01}(t)\cdot P\{X(t+\Delta t)=0 \mid X(t)=1\} \\
&= P_{00}(t)\cdot\left(1-\beta\Delta t+o(\Delta t)\right)+P_{01}(t)\cdot\left(\alpha\Delta t+o(\Delta t)\right) \\
&= P_{00}(t)\cdot\left(1-\beta\Delta t+o(\Delta t)\right)+\left(1-P_{00}(t)\right)\cdot\left(\alpha\Delta t+o(\Delta t)\right)
\end{aligned}$$

至此可以得出 $P'_{00}(t)$ 与 $P_{00}(t)$ 之间的关系，这是一个常微分方程：

$$P'_{00}(t)=\frac{P_{00}(t+\Delta t)-P_{00}(t)}{\Delta t}=-(\beta+\alpha)P_{00}(t)+\alpha$$

直接利用一阶线性常微分方程的通解法：$P(t)=\beta+\alpha$，$Q(t)=\alpha$

$$P_{00}(t)=Ce^{-\int(\beta+\alpha)\mathrm{d}t}+e^{-\int(\beta+\alpha)\mathrm{d}t}\int \mu e^{\int(\beta+\alpha)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=Ce^{-(\beta+\alpha)t}+\frac{\alpha}{\beta+\alpha}$$

根据初始条件，$P_{00}(0)=1$ 代入：

$$P_{00}(0)=C+\frac{\alpha}{\beta+\alpha}=1 \quad\Longrightarrow\quad C=\frac{\beta}{\beta+\alpha}$$

因此原问题的解为：

$$P_{00}(t)=\frac{\beta}{\beta+\alpha}e^{-(\beta+\alpha)t}+\frac{\alpha}{\beta+\alpha}$$

$$P_{01}(t)=-\frac{\beta}{\beta+\alpha}e^{-(\beta+\alpha)t}+\frac{\beta}{\beta+\alpha}$$

$P_{00}(t)$表示 “$X(t)$为偶数“ 且$X(0)=0$

$P_{01}(t)$表示 “$X(t)$为奇数” 且$X(0)=0$

3.26 考虑状态 $0,1,\ldots,N$ 上的纯生过程 $X(t)$，假定 $X(0)=0$ 以及 $\lambda_k=(N-k)\lambda,\ k=0,1,\ldots,N$。其中 λ_k 满足 $P\{X(t+h)-X(t)=1 \mid X(t)=k\}=\lambda_k h+o(h)$，试求 $P_n(t)=P\{X(t)=n\}$，这是新生率受群体总数反馈作用的例子。

解：课本 49 页列出了待解的方程组，50 页给出了解的形式，直接带入即可：(此时 λ_i 两两不同)

$$\begin{cases} P_0'(t)=-\lambda_0 P_0(t), & n=0 \\ P_n'(t)=-\lambda_n P_n(t)+\lambda_{n-1}P_{n-1}(t), & n\geq 1 \end{cases}$$

$$\text{解得：}\begin{cases} P_0(t)=e^{-\lambda_0 t}=e^{-N\lambda t} \\ P_n(t)=\left(\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{e^{-\lambda_i t}}{\prod_{k\neq i}^{n}(\lambda_k-\lambda_i)}\right) \end{cases}$$

再计算化简 $P_n(t)$：（注意 N 和 n 的区别）

- $$\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i = \prod_{i=0}^{n-1}(N-i)\lambda = \lambda^n\prod_{i=0}^{n-1}(N-i) = \lambda^n\cdot N(N-1)\ldots(N+1-n) = \frac{N!}{(N-n)!}\lambda^n$$
- $$\sum_{i=0}^{n}\frac{e^{-\lambda_i t}}{\prod_{k\neq i}^{n}(\lambda_k-\lambda_i)} = \sum_{i=0}^{n}\frac{e^{-\lambda_i t}}{\lambda^n\prod_{k\neq i}^{n}(i-k)} = \sum_{i=0}^{n}\frac{e^{-(N-i)\lambda t}}{\lambda^n\prod_{k\neq i}^{n}(i-k)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i(i-1)\ldots\big(i-(i-1)\big)\times\big((i+1)-i\big)\big((i+2)-i\big)\ldots(n-i)}\frac{e^{-(N-i)\lambda t}}{\lambda^n}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\frac{e^{-(N-i)\lambda t}}{\lambda^n} = \frac{e^{-N\lambda t}}{n!\,\lambda^n}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!\,(n-i)!}(-1)^{n-i}e^{i(\lambda t)} \text{ ……二项展开式}$$

$$= \frac{e^{-N\lambda t}}{n!\,\lambda^n}\left(e^{\lambda t}-1\right)$$

因此，化简结果为：

$$P_n(t)=\frac{N!}{(N-n)!}\lambda^n\frac{e^{-N\lambda t}}{n!\,\lambda^n}\left(e^{\lambda t}-1\right)=C_N^n e^{-N\lambda t}\left(e^{\lambda t}-1\right)\quad n\in[1,N]$$

$$P_0(t)=e^{-\lambda_0 t}=e^{-N\lambda t}$$