# 随机过程 B　第六周作业　10 月 19 日　周一

PB18151866 龚小航

2.10 到达某加油站的公路上的卡车服从参数为 $\lambda_1$ 的泊松过程 $N_1(t)$，而到达的小汽车服从参数为 $\lambda_2$ 的泊松过程 $N_2(t)$，且过程 $N_1$ 与 $N_2$ 独立。

试问随机过程 $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$ 是什么过程？并计算在总车流数 $N(t)$ 中卡车首先到达的概率。

解：由教材 16 页的结论，泊松过程 $N(t)$ 的矩母函数为：

$$g_{N(t)}(u)=g(u,t)=e^{\lambda t(e^u-1)}$$

又由于 $N_1,N_2$ 独立，由教材第 9 页结论：独立随机变量和的矩母函数等于各自矩母函数的积。即有：

$$g_{N(t)}(u)=g_{N_1(t)+N_2(t)}(u)=g_{N_1(t)}(u)\cdot g_{N_2(t)}(u)=e^{\lambda_1 t(e^u-1)}\cdot e^{\lambda_2 t(e^u-1)}=e^{(\lambda_1+\lambda_2)t(e^u-1)}$$

由矩母函数的表达形式，显然 $N(t)$ 是强度为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松过程。

再计算总车流数 $N(t)$ 中卡车首先到达的概率：

由教材 17 页的结论，$W_n$ 为第 $n$ 次事件到达或等待的时间，在泊松过程中，$W_n\sim\Gamma(n,\lambda)$

$$f_{W_n(t)}=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

此时 $n=1$，$f_{W_1(t)}=\lambda e^{-\lambda t}$，$F_{W_1(t)}=1-e^{-\lambda t}$

因此卡车先到的概率可以表示为：

$$P\left(W_{1,\lambda_1}<W_{1,\lambda_2}\right)=\int_0^\infty P\left(X_{N_1,1}=t,X_{N_2,1}>t\right)\mathrm{d}t=\int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t}\,\mathrm{d}t=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

2.12 令 $N(t)$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次泊松过程，$X_1,X_2,\cdots\cdots$ 为事件间的时间间隔。

(1) $X_i$ 是否独立？

(2) $X_i$ 是否同分布？

(3) 试求 $X_1$ 及 $X_2$ 的分布。

解：对每问分析如下：

(1) 只需证明 $X_1$ 与 $X_2$ 不独立。 记 $\int \lambda(u)\,\mathrm{d}u = f(u)$

利用证明变量独立的常用方法，条件概率等于无条件概率即可：

$$P\{\,X_2 > h\,|\,X_1 = t\,\} = P\{\,N(t+h) - N(t) = 0\,\}$$

$$= \frac{\left(\int_t^{t+h} \lambda(u)\,\mathrm{d}u\right)^0 e^{-\int_t^{t+h} \lambda(u)\,\mathrm{d}u}}{0!} = e^{f(t)-f(t+h)}$$

显然结果和条件 $X_1 = t$ 有关，因此 $X_1, X_2$ 不独立，故 $X_i$ 不独立。

(2) 只需证明 $X_1$ 与 $X_2$ 不是同分布的即可：

$$P\{\,X_1 > t\,\} = P\{\,N(t) = 0\,\} = P\{\,N(t) - N(0) = 0\,\} = \frac{\left(\int_0^t \lambda(u)\,\mathrm{d}u\right)^0 e^{-\int_0^t \lambda(u)\,\mathrm{d}u}}{0!} = e^{-f(t)}$$

由此可以得出：

$$F_{X_1}(t) = 1 - e^{-f(t)}\ ;\ \ f_{X_1}(t) = \frac{\mathrm{d}F_{X_1}(t)}{\mathrm{d}t} = -\left(e^{-\int_0^t \lambda(u)\,\mathrm{d}u}\right)' = \lambda(u)e^{-\int_0^t \lambda(u)\,\mathrm{d}u} = \lambda(u)e^{-f(t)}$$

根据这些得出 $X_2$ 的分布：

$$P\{\,X_2 > t\,\} = \int_0^\infty P\{\,X_2 > t\,|\,X_1 = s\} f_{X_1}(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty e^{f(s)-f(t+s)}\lambda(s)e^{-f(s)}\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty e^{-f(t+s)}\lambda(s)\,\mathrm{d}s$$

显然，$P\{\,X_1 > t\,\}$ 和 $P\{\,X_2 > t\,\}$ 之间有关系：

$$P\{\,X_1 > t\,\}\int_0^\infty e^{f(t)-f(t+s)}\lambda(s)\,\mathrm{d}s = P\{\,X_2 > t\,\}$$

这与 $t$ 有关，且它们不可能相同。

因此 $X_1$ 与 $X_2$ 不是同分布的。

(3) 结合上一问，已经求出：

$$f_{X_1}(t) = \lambda(u)e^{-f(t)}$$

再求 $X_2$ 的概率密度函数：

$$F_{X_2}(t) = 1 - \int_0^\infty e^{-f(t+s)}\lambda(s)\,\mathrm{d}s\ ;$$

$$f_{X_2}(t) = \frac{\mathrm{d}F_{X_2}(t)}{\mathrm{d}t} = \int_0^\infty \lambda(s)\lambda(t+s)e^{-f(t+s)}\,\mathrm{d}s$$

至此 $X_1$ 与 $X_2$ 的概率密度已经给出。

2.13 考虑对所有 $t$ ，强度函数 $\lambda(t)$ 均大于零的非齐次泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$.

令 $m(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du$ ，$m(t)$的反函数为$\ell(t)$，记 $N_1(t) = N\big(\ell(t)\big)$

试证 $N_1(t)$ 是通常的泊松过程，并求出 $N_1(t)$ 的强度参数 $\lambda$ .

解：证明一个过程是泊松过程，需要证明以下三点：

$$\begin{cases} N(0) = 0 \\ N(t)\text{是独立增量过程} \\ \text{对 } t > 0\text{，}s \geq 0\text{，}N(t+s) - N(s) \text{ 服从参量为 } \lambda t \text{ 的泊松分布} \end{cases}$$

先证明第一条性质：$\ell(0) \quad \Longrightarrow \quad m = 0$ 解 $t \quad \Longrightarrow \quad t = 0$

$$N_1(0) = N\big(\ell(0)\big) = N(0) = 0$$

再证明第二条性质：

利用反函数的性质，由于 $m$ 是单调递增函数，反函数 $\ell$ 也是单调递增函数。再结合定义，有：

对于任意的 $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 <\cdots\cdots< t_n$，均有 $0 \leq \ell(t_1) < \ell(t_2) < \ell(t_3) <\cdots\cdots< \ell(t_n)$，且：

$$N_1(t_{i+1}) - N_1(t_i) = N\big(\ell(t_{i+1})\big) - N\big(\ell(t_i)\big), \quad i = 1,2,3,\cdots\cdots,n-1$$

由于 $N(t)$ 是独立增量过程，$0 \leq \ell(t_1) < \ell(t_2) < \ell(t_3) <\cdots\cdots< \ell(t_n)$，因此 $N\big(\ell(t_{i+1})\big) - N\big(\ell(t_i)\big)$ 互相独立，即 $N_1(t_{i+1}) - N_1(t_i)$ 互相独立。因此 $N_1(t)$ 是有独立增量的过程。

最后证明第三条性质：

任取 $t > 0$，$s \geq 0$：

$$P\{\, N_1(t+s) - N_1(s) = k \,\} = P\big\{\, N\big(\ell(t+s)\big) - N\big(\ell(s)\big) = k \,\big\} = \frac{\left(\int_{\ell(s)}^{\ell(t+s)} \lambda(u)\,du\right)^k e^{-\int_{\ell(s)}^{\ell(t+s)} \lambda(u)\,du}}{k!}$$

$$= \frac{\left(\int_0^{\ell(t+s)} \lambda(u)\,du - \int_0^{\ell(s)} \lambda(u)\,du\right)^k e^{-\left(\int_0^{s\ell(t+s)} \lambda(u)\,du - \int_0^{\ell(s)} \lambda(u)\,du\right)}}{k!}$$

$$= \frac{\Big(m\big(\ell(t+s)\big) - m\big(\ell(s)\big)\Big)^k e^{-\left(m\left(\ell(t+s)\right) - m\left(\ell(s)\right)\right)}}{k!}$$

$$= \frac{t^k e^{-t}}{k!}$$

显然这是一个参数为 1 的泊松分布。因此第三条性质满足。

综上，$N_1(t)$ 是通常的泊松过程，强度参数 $\lambda = 1$