

# 2021 年秋季学期算法基础期中考试（样卷）

学号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_

**主定理：** 令  $a \geq 1$  和  $b > 1$  是常数， $f(n)$  是一个函数， $T(n)$  是定义在非负整数上的递归式：

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

其中我们将  $n/b$  解释为  $\lfloor n/b \rfloor$  或  $\lceil n/b \rceil$ 。那么  $T(n)$  有如下渐进界：

1. 若对某个常数  $\varepsilon > 0$  有  $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ ，则  $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ 。
2. 若对整数  $k \geq 0$  有  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ ，则  $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$ 。
3. 若对某个常数  $\varepsilon > 0$  有  $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ ，且对某个常数  $c < 1$  和所有足够大的  $n$  有  $af(n/b) \leq cf(n)$ ，则  $T(n) = \Theta(f(n))$ 。

**Master Theorem:** Let  $a \geq 1$  and  $b > 1$  be constants and  $f(n)$  be a function. Let  $T(n)$  be defined on the nonnegative integers by the following recurrence

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

Notice that here  $n/b$  can be interpreted as either  $\lfloor n/b \rfloor$  or  $\lceil n/b \rceil$ . Then  $T(n)$  can be bounded asymptotically as follows:

1. If there exists a constant  $\varepsilon > 0$  such that  $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$  then  $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ .
2. If there exists an integer  $k \geq 0$  such that  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$  then  $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$ .
3. If there exists a constant  $\varepsilon > 0$  such that  $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ , and if  $af(n/b) \leq cf(n)$  for some constant  $c < 1$ , then  $T(n) = \Theta(f(n))$ .

一、**判断题**（根据表述判断正误，并简要说明理由；每题 5 分，共 30 分）。

1. 递归式  $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + n^2$  的解为  $T(n) = \Theta(n^2)$ 。 ( )

The solution of the recurrence  $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + n^2$  is  $T(n) = \Theta(n^2)$ .

2. 给定一个包含  $n$  个整数的数组  $A$ , 归并排序总是可以在最坏情况下用  $O(n \lg n)$  的时间对数组  $A$  进行排序。 ( )

Given an array  $A$  of  $n$  integers, merge sort can always sort the array  $A$  in time  $O(n \lg n)$  in the worst case.

3. 假设有一个包含  $n$  个待排序数据记录的数组, 且每条记录的关键字的值为 0 或 1。对这样一组记录进行排序, 存在时间代价为  $O(n)$ , 稳定的原址 (除了输入数组外, 算法只需要固定的额外存储空间) 排序算法。 ( )

Suppose that we have an array of  $n$  data records to sort and that the key of each record has the value 0 or 1. There exists such an algorithm for sorting such a set of records that satisfies the following three characteristics: 1) The algorithm runs in  $O(n)$  time. 2) The algorithm is stable. 3) The algorithm sorts in place, using no more than a constant amount of extra storage space.

4. 从一个由  $n$  个互异元素构成的数组中选择第  $i$  个 ( $i > 1$ ) 顺序统计量和找最小值的渐近运行时间相同。 ( )

Given an array  $A$  of  $n$  distinct elements, the asymptotic running time for selecting the  $i$ th element and selecting a minimum is the same.

5.  $T_1, T_2$  是相同集合上的两棵二叉搜索树, 若  $T_1, T_2$  的前序遍历序列相同, 则两棵树相同。 ( )

Given two binary search trees  $T_1$  and  $T_2$  on the same set. If the inorder traversals of  $T_1$  and  $T_2$  are the same, they are the same tree.

6. AVL 树是一种高度平衡的二叉搜索树: 对于每一个结点  $x$ ,  $x$  的左子树和右子树的高度差至多为 1。红黑树也是 AVL 树。 ( )

An AVL tree is a binary search tree that is height balanced: for each node  $x$ , the heights of the left and right subtrees of  $x$  differ by at most 1. The red-black tree also is an AVL tree.

二、简答题（根据题目要求写出解答过程；每题 10 分，共 40 分）。

1. 我们在求解算法的时间复杂度时，通常假设：**过程调用中的参数传递**花费常量的时间，即使传递一个  $N$  个元素的数组也是如此。考虑这样一种参数传递策略：传递数组时，只复制过程可能访问的子区域，若数组  $A[p..q]$  被传递，则时间为  $\Theta(q-p+1)$ 。请给出**归并排序**在该种参数传递策略下的**最坏情况**运行时间的递归式。

We assume that parameter passing during procedure calls takes constant time, even if an  $N$ -element array is being passed. We consider such a parameter-passing strategy: An array is passed by copying only the subrange that might be accessed by the called procedure. Time =  $\Theta(q-p+1)$  if the subarray  $A[p..q]$  is passed. Please give recurrences for the worst-case running times of merge-sort when arrays are passed using aforementioned method.

2. 给定两个  $n$  位整数  $X$  和  $Y$ 。命题：计算  $XY$ ，我们需要  $\Omega(n^2)$  次的一位整数的加法和乘法。请问该命题是否正确？如果不正确请给出你的答案。

Given two integers  $X, Y$ , each of  $n$  digits. Proposition: to compute the production  $XY$ , we always need to use  $\Omega(n^2)$  additions and multiplications of one-digit integers. Is this proposition correct? If not, please give your answer.

3. 对一个包含  $n$  个元素的集合， $k$  分位数是指能把有序集合分成  $k$  个等大小集合的第  $k-1$  个顺序统计量。给出一个能找出某一集合的  $k$  分位数的  $O(n \lg k)$  时间的算法。

The  $k$ th quantiles of an  $n$ -element set are the  $k-1$  order statistics that divide the sorted set into  $k$  equal-sized sets (to within 1). Give an  $O(n \lg k)$ -time algorithm to find the  $k$ th quantiles of a set.

4. 对于图 1 所示的斐波那契堆，给出执行抽取最小结点操作之后的结果。  
Please give the result of extracting the minimum node of the Fibonacci heap shown in Fig. 1.

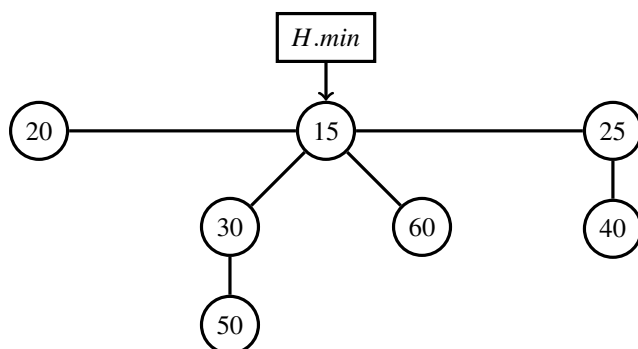


图 1: 斐波那契堆  
Fig. 1 Fibonacci Heap

三、综合题（根据题目要求写出解答过程；每题 15 分，共 30 分）。

1. 排序和顺序统计量的计算在数据分析领域有着十分重要的作用，请回答下列问题：

- (a) 给定一个包含  $n$  个互异的元素的集合，请简要描述如何在期望时间为  $\Theta(n)$  的时间内找到第  $k$  小的元素。
- (b) 设计一个算法，按顺序输出前  $k$  个最小的元素，简要描述该算法的思想并给出时间复杂度。要求该算法的时间复杂度小于  $\Theta(kn)$ 。
- (c) 给定两个分别包含  $n$  个不同元素的有序序列  $X$  和  $Y$ ，请设计一个  $\Theta(\lg n)$  时间的算法，找到  $X, Y$  序列中所有元素的中位数。

1. Sorting and the calculation of ordinal statistics play an important role in data analysis. Please answer the following questions.

- (a) Given a set of  $n$  distinct elements, please describe briefly that how to find  $i$ th small elements within expected running time  $\Theta(n)$ -time.
- (b) Find the algorithm to find the  $i$ th smallest in sorted order. Describe the algorithm briefly and give the running time complexity. The time complexity of this algorithm should be less than  $\Theta(kn)$ .
- (c) Let  $X, Y$  be two arrays, each containing  $n$  distinct numbers already in sorted order. Give an  $O(\lg n)$ -time algorithm to find the median of all  $2n$  elements in arrays  $X$  and  $Y$ .

2. 一棵二叉搜索树  $T$  的前序遍历如下所示：

56, 26, 18, 12, 24, 30, 27, 28, 29, 200, 190, 213

- (a) 画出一棵满足该前序遍历的二叉树  $T$ 。
- (b) 是否可以给这棵树的结点着色使其成为一棵红黑树  $T_1$ 。若可以，画出  $T_1$ ，若不可以，说明理由。
- (c) 将结点 30 从  $T$  中删除得到  $T_2$ ，画出  $T_2$ 。

Assume that there is a binary search tree  $T$  of 12 elements. After we do pre-order tree traversal of  $T$  and print the elements in the order of visiting, we have the following output.

56, 26, 18, 12, 24, 30, 27, 28, 29, 200, 190, 213

- (a) Draw an original binary search tree  $T$  that will produce such output.
- (b) Can the nodes of  $T$  be colored to be a red-black tree  $T_1$ . Draw  $T_1$  or argue why it can't.
- (c) Draw the binary search tree  $T_2$  after we delete the number 30 from  $T$ .

**四、附加题**（根据题目要求写出解答过程；每题 10 分，共 10 分）。

定义 Josephus 问题如下：假设  $n$  个人围成一个圆圈，给定一个正整数  $m$  且  $m \leq n$ 。从某个指定的人开始，沿环将遇到的每第  $m$  个人移出队伍，每个人移出之后，继续沿环数剩下来的人。这个过程直到所有的  $n$  个人都被移出后结束。每个人移出的次序定义了一个来自整数  $1, 2, \dots, n$  的  $(n, m)$ -Josephus 排列。例如， $(7, 3)$ -Josephus 排列为  $(3, 6, 2, 7, 5, 1, 4)$ 。

- (a) 假设  $m$  为一个常数，描述一个时间复杂度  $O(n)$  的算法，使得对于给定的  $n$ ，能够输出  $(n, m)$ -Josephus 排列。
- (b) 假设  $m$  不是常数，简要描述时间复杂度为  $O(n \lg n)$  的算法，使得对于给定的  $n$ ，能够输出  $(n, m)$ -Josephus 排列。

We define the Josephus problem as follows. Suppose that  $n$  people form a circle and that we are given a positive integer  $m \leq n$ . Beginning with a designated first person, we proceed around the circle, removing every  $m$ th person. After each person is removed, counting continues around the circle that remains. This process continues until we have removed all  $n$  people. The order in which the people are removed from the circle defines the  $(n, m)$ -Josephus permutation of the integers  $1, 2, \dots, n$ . For example, the  $(7, 3)$ -Josephus permutation is  $(3, 6, 2, 7, 5, 1, 4)$ .

- (a) Suppose that  $m$  is a constant. Describe an  $O(n)$ -time algorithm that, given an integer  $n$ , outputs the  $(n, m)$ -Josephus permutation.
- (b) Suppose that  $m$  is not a constant. Describe an  $O(n \lg n)$ -time algorithm that, given integers  $n$  and  $m$ , outputs the  $(n, m)$ -Josephus permutation.