$X(t)$ 的一维分布：$F_t(x)=P\{X(t)\le x\}$；　均值 $E[X(t)]=\mu_X(t)$

• 自相关函数 $r_X(t_1,t_2)$：$E[X(t_1)X(t_2)]$

•协方差函数 $R_X(t_1,t_2)$: $Cov[X(t_1),X(t_2)]=E\big[\big(X(t_1)-\mu_X(t_1)\big)\big(X(t_2)-\mu_X(t_2)\big)\big]$

自相关函数和协方差函数有对称性，对任何 s,t 都有 $r/R_X(t,s)=r/R_X(s,t)$

特别的，$R_X(t,t)=Var[X(t)]$；

r/R 都是非负定的，$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n b_ib_jR_X(t_i,t_j)\ge 0$

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^n b_jX(t_j)\right)=\operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^n b_iX(t_i),\sum_{j=1}^n b_jX(t_j)\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n b_ib_jR_X(t_i,t_j)$$

• 定义：【严格平稳】　$\forall t_1\dots t_n,\ \forall h$ 都有

$X(t_1+h),\dots,X(t_n+h)$ 同分布于 $X(t_1),\dots,X(t_n)$

• 定义：【有 独立增量/平稳独立增量 的过程】 对$X(t)$，$\forall t_1<t_2<\cdots<t_n$

① 有独立增量：　$X(t_2)-X(t_1),\dots,X(t_n)-X(t_{n-1})$ 相互独立

② 有平稳独立增量：上述基础上有$\forall i,j,X(i+h)-X(i)$同分布于 $X(j+h)-X(j)$

例 1.10　设 $Z_i, i=0,1,2,\cdots$，是一串独立同分布的随机变量，定义 $X_n=\sum_{i=0}^n Z_i$，则过程 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 就是独立增量过程．一般称 X_n 为独立和．

• 定义：【条件期望】 给定 $Y=y$，X 的条件期望可写成两种形式，f为Y边缘密度

$$E(X\mid Y=y)=\sum_x xP\{X=x|Y=y\}=\int x\,f(x|y)\,\mathrm{d}x$$

条件期望推论：① 若 X,Y 独立，则 $E[X\mid Y=y]=E[X]$

② 条件期望平滑性：$E[X]=\int E[X|Y=y]\mathrm{d}(F_Y(y))=E[E[X|Y]]$

③ 对随机变量X,Y的函数$\phi(X,Y)$ 有 $E[\phi(X,Y)|Y=y]=E[\phi(X,y)|Y=y]$

• 定义：【矩母函数】　$g_X(t)$ 定义为随机变量 e^{tX} 的期望，即

$g_X(t)=E[e^{tX}]=\int e^{tX}\mathrm{d}(\mathrm{F}(x))$，且 $E[X^n]=g^{(n)}(0)$，$g_{X+Y}(t)=g_X(t)+g_Y(t)$

例 1.12　随机和的矩母函数．记 $X_1,X_2,\cdots$ 为一串独立同分布的随机变量，N 为非负整数值随机变量且与 X 序列相独立．Y 为随机和 $\sum_{i=1}^N X_i$．求 Y 的矩母函数 $g_Y(t)$．

解　为求 g_Y，先算条件期望

$$\begin{aligned}E[e^{tY}\mid N=n]&=E\left[\exp\left\{t\sum_{i=1}^N X_i\right\}\mid N=n\right]\\&=E\left[\exp\left\{t\sum_{i=1}^n X_i\right\}\mid N=n\right]\\&=E\left[\exp\left\{t\sum_{i=1}^n X_i\right\}\right]=[g_X(t)]^n.\end{aligned}$$

于是有 $g_Y(t)=E[\exp\{tY\}]=E\{E[\exp\{tY\}|N]\}=E[(g_X(t))^N]$．对 $g_Y(t)$ 关于 t 求导即有

$$g_Y'(t)=E[N(g_X(t))^{N-1}g_X'(t)],$$
$$g_Y''(t)=E[N(N-1)(g_X(t))^{N-2}(g_X'(t))^2+N(g_X(t))^{N-1}g_X''(t)].$$

将 $t=0$ 代入上面两式得

$$\begin{aligned}EY&=E[NE(X)]=EN\cdot EX,\\EY^2&=EN\cdot\mathrm{Var}X+EN^2\cdot E^2X,\\\mathrm{Var}Y&=EN\cdot\mathrm{Var}X+E^2X\cdot\mathrm{Var}N.\end{aligned}\tag{1.20}$$

• 定义：【概率生成函数】X为离散型随机变量，概率生成函数 $\phi_X(s)=E[s^X]$；

特别的，若 $P\{X=k\}=p_k,k=0,1,2\dots$，则 $\phi_X(s)=\sum_{k=0}^\infty p_ks^k$

• 定义：【收敛与均方收敛】对于随机变量X以及一列随机变量$\{X_n,n\ge1\}$

① 对$\forall\varepsilon>0,\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|\ge\varepsilon\}=0$，则称$X_n$依概率收敛于$X$，记为$X_n\xrightarrow{P}X$

② X,X_n二阶矩有限，$\lim_{n\to\infty}E[(X_n-X)^2]=0$，则称$X_n$均方收敛于$X$，记为$X_n\xrightarrow{L_2}X$

• 定义：【泊松过程】一个整数值随机过程 $\{N(t),t\ge0\}$ 满足下列条件：

① $N(0)=0$；　② $N(t)$ 是独立增量过程；

③ $\forall t>0,s\ge0$，增量 $N(t+s)-N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布：

$$P\{N(t+s)-N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^ke^{-\lambda t}}{k!},k=0,1,2,\dots$$

泊松过程推论：① 不相交区间内事件发生的数目相互独立。

② $\forall t,h>0$，增量 $N(t+s)-N(t)$ 的分布只依赖于区间长度 h，与 t 无关。

③ $\exists\lambda>0,h\to0$ 时，$P\{N(t+s)-N(t)\ge1\}=\lambda h+o(h)$

④ 当 $h\to0$ 时，$P\{N(t+h)-N(t)\ge2\}=o(h)$

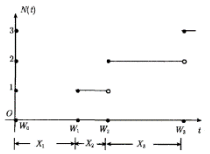

图 2.1　Poisson 过程的样本路径

与泊松过程联系的若干分布：

① X_n 服从参数为 λ 的指数分布，W_n 服从参数为 n,λ 的 Γ 分布

② 定理 2.1：当给定 $N(t)=n$ 下等待时间 $W_1,W_2,\dots,W_n$ 的联合密度为：

$$f_{W_1,\dots,W_n|N(t)=n}(w_1,\dots,w_n|n)=\frac{n!}{t^n},\quad 0<w_1<\cdots<w_n\le t$$

证　事件 $\{X_n>t\}$ 表示第一次事件发生在时刻 t 之后，其发生当且仅当在时间区间 $(0,t]$ 中 Poisson 过程不曾有事件发生过．所以，

$$P\{X_1>t\}=P\{N(t)=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

而

$$\begin{aligned}P\{X_2>t\mid X_1=s\}&=P\{(s,s+t]\text{ 中事件不发生 }\mid X_1=s\}\\&=P\{(s,s+t]\text{ 中事件不发生}\}\text{（独立增量性）}\\&=P\{(0,t]\text{ 中事件不发生}\}\text{（平稳增量性）}\\&=\mathrm{e}^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

这就可以得出结论：X_2 也服从以 λ 为参数的指数分布而且 X_1 与 X_2 是独立的．类似地，可对其他 X_i 证明命题的结论．利用习题 1 第 13 题可以知道 W_n 服从 Γ 分布，参数为 n,λ．但我们宁愿在这里再给一个直接的证明．因事件 $\{N(t)\geqslant n\}$ 是与 $W_n\leqslant t$ 等价的，它们都表明第 n 次事件发生在时刻 t 之前，或者换言之，到时刻 t 已经至少发生了 n 件事．于是

$$P\{W_n\leqslant t\}=P\{N(t)\geqslant n\}=\sum_{j=n}^\infty\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!},\tag{2.5}$$

对 W_n 的分布函数 (2.5) 式关于 t 求导即可求出 W_n 的密度函数

$$\begin{aligned}f_{W_n}(t)&=-\sum_{j=n}^\infty\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}+\sum_{j=n}^\infty\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}\\&=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.\end{aligned}$$

定义：【非齐次泊松过程】 将泊松过程定义的条件③更改为：

$$P\{N(t+h)-N(t)=k\}=\frac{\left(\int_t^{t+h}\lambda(u)\mathrm{d}u\right)^ke^{-\int_t^{t+h}\lambda(u)\mathrm{d}u}}{k!}$$

定义：【离散时间马尔可夫链】$P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i,\ X_0\sim X_{n-1}\text{无关}\}$

性质：马尔可夫链的 n 步转移概率矩阵满足：（定理 3.1）

$$P_{ij}^{(n)}=\sum_{k=0}^\infty P_{ik}P_{kj}^{(n-1)},\quad P_{ij}^{(n+m)}=\sum_{k=0}^\infty P_{ik}^{(n)}P_{kj}^{(m)},\quad P_{ii}^{(0)}=1,\quad P_{ij}^{(0)}=0$$

定义：【可达与互达】　$P_{ij}^{(n)}>0$ 则称状态 j 是从状态 i 可达的，记为 $i\to j$

两个互相可达的状态 i 和 j 称为互达的，记为 $i\leftrightarrow j$

定义:【状态的周期】状态 i 的周期记为 $d(i)$，表示使 $P_{ii}^{(n)}>0$ 的所有正整数 n 的最大公约数。若 $P_{ii}^{(n)}$ 恒为 0，此时 $d(i)=\infty$。若 $d(i)=1$ 则称状态 i 是非周期的。

马尔可夫链状态的推论：　① 若 $i\leftrightarrow j$，则 $d(i)=d(j)$

② 若 $P_{ji}^{(m)}>0$，则存在正整数N使对 $n>N$ 恒有 $P_{ji}^{(m+nd(i))}>0$

③ 若 P 为不可约，非周期，有限状态的马尔可夫链的转移概率矩阵，则必存在 N 使 $n>N$ 时，n 步转移概率矩阵 $P^{(n)}$ 的所有元素都非零

定义：【常返与瞬过】$f_{ij}^{(n)}$表示从 i 出发在 n 步转移时首次到达 j 的概率．$f_{ij}^{(0)}=0$；

而 $f_{ij}=\sum_{n=1}^\infty f_{ij}^{(n)}$ 表示状态 i 最终能到达 j 的概率。

【常返】状态 i 满足 $f_{ii}=1$　　【瞬过】非常返状态就是瞬过状态

常返与瞬过推论：

① 充要条件。常返：$\sum_{n=1}^\infty P_{ii}^{(n)}=\infty$；瞬过：$\sum_{n=1}^\infty P_{ii}^{(n)}<\infty$

② 若 i 是常返的，且 $i\leftrightarrow j$，则 j 也是常返的。同类中所有状态都常返\都瞬过

③ 对常返状态 i，定义首次返回状态 i 的时刻为 T_i（常返时），$\mu_i=E[T_i]$为首次返回 i 的期望步数（平均常返时），$\mu_i=\sum_{n=1}^\infty nf_{ii}^{(n)}$。

【零常返】$\mu_i=\infty$　　【正常返】$\mu_i<\infty$

马尔可夫链的基本极限定理：

① 若状态 i 瞬过或零常返，则 $\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=0$

② 若状态 i 是周期为 d 的常返状态，则 $\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(nd)}=d/\mu_i$

③ 当状态 i 是非周期的正常返状态，则 $\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=1/\mu_i$

推论 3.3　如果状态 i 是遍历的，则对所有 $i\to j$ 有

$$\lim_{n\to\infty}P_{ji}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=\frac{1}{\mu_i}.$$

定义：【马尔可夫链的平稳分布】 指概率分布$\{\pi_i,i\ge0\}$，满足 $\pi_j=\sum_{i=0}^\infty\pi_iP_{ij}$

定理 3.4　若一个不可约 Markov 链中的所有状态都是遍历的，则对所有 i,j，极限 $\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}=\pi_j$ 存在且 $\pi=\{\pi_j,j\geqslant0\}$ 为平稳分布．也即

$$\sum_j\pi_j=1,\quad\pi_j>0,\tag{3.15}$$

$$\sum_i\pi_iP_{ij}=\pi_j.\tag{3.16}$$

反之，若一个不可约 Markov 链只存在一个平稳分布，即满足 (3.15) 式及 (3.16) 式，且这个 Markov 链的所有状态都是遍历的．则该平稳分布就是这一 Markov 链的极限分布，即对任何 i 有

$$\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}=\pi_j.\tag{3.17}$$

定理 3.5　对分支过程 X_n，若 $p_0>0,p_0+p_1<1$，则有

(a) 群体消亡概率 π 是方程 $\phi(s)=s$ 的最小正解，其中 $\phi(s)=\sum_{j=0}^\infty p_js^j$，$\{p_j\}$ 是 X_1 与 Z_1 的概率分布．

(b) $\pi=1$ 当且仅当 $\mu\leqslant1$，其中 $\mu=EZ_1$．

即协方差函数仅与时间差有关，而与起点无关．当然，由定义知 $\mathrm{Var}(X(t))=R(0)$．此外，易知 $r(\tau)=EX(t)X(t+\tau)$ 与起点 t 无关，我们分别称 $r(\tau)$ 和

$$\rho(v)=R(v)/\sigma^2=R(v)/R(0)$$

为平稳过程 X 的自相关函数和标准自相关函数．由概率论中相关系数性质易知 $\rho(0)=1$ 及 $|\rho(v)|\leqslant1$．

定义：【宽平稳过程】　① 二阶矩存在　　② $E[X(t)]=$常数m

③ 协方差函数 $E[(X(t)-m)(X(s)-m)]$ 仅与 $t-s$ 有关。

定义：【周期平稳过程】$X=\{X(t),t\in T\}$ 为平稳过程，$\exists\kappa>0$ 使 $X(t+\kappa)=X(t)$，

则 X 称为周期平稳过程。此时该过程的协方差函数也是周期为 κ 的函数

定义：【均值遍历性】　连续型/离散型的表示形式：

$$\bar X=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^TX(t)\mathrm{d}t\xrightarrow{L_2}m;\quad\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{K=-N}^NX(k)\xrightarrow{L_2}m$$

定义：【协方差函数遍历性】　连续型/离散型的表示形式：

$$\hat R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^T(X(t)-m)(X(t+\tau)-m)\,\mathrm{d}t\xrightarrow{L_2}R(\tau)$$

$$\hat R(\tau)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=1}^n(X(k+\tau)-\hat m_n)(X(k)-\hat m_n)\xrightarrow{L_2}R(\tau)$$

若某个过程均值和协方差函数都有遍历性，则该过程有遍历性。

均值遍历性定理：$\{X_n,n\in\mathbb{Z}\}$，$\{X(t),t\in\mathbb{R}\}$ 有遍历性的充分必要条件为：

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1}R(\tau)=0;\quad\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)R(\tau)\mathrm{d}\tau=0$$

推论 4.1：若$\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)|<\infty$，则均值遍历性成立。

推论 4.2：对平稳系列而言，若 $R(\tau)\to0\ (\tau\to\infty)$，则均值遍历性成立。

定理 4.2 (协方差函数遍历性定理)　设 $X=\{X(t),-\infty<t<\infty\}$ 为平稳过程，$Y_\tau=\{Y_\tau(t),-\infty<t<\infty\}$ 其中 Y_τ 由上面所定义，则对给定的 τ，X 的协方差函数 $R(\tau)$ 有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau_1}{2T}\right)(B(\tau_1)-R^2(\tau))d\tau_1=0,$$

其中

$$B(\tau_1)=EX(t+\tau+\tau_1)X(t+\tau_1)X(t+\tau)X(t).$$

定理 4.3　设 $X=\{X_n,n=0,\pm1,\cdots\}$ 是均值为 0 的 Gauss 平稳过程，如果

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}R^2(k)=0,$$

则 Gauss 过程的协方差函数有遍历性．

定理 4.4 (Wiener-Khintchine公式)　假定 $EX(t)=0$，且 $\int|R(\tau)|d\tau<\infty$，则

$$S(\omega)=\int R(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}d\tau,\tag{4.33}$$

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int S(\omega)\mathrm{e}^{j\omega\tau}d\omega.\tag{4.34}$$

注 4.2　由于 $R(\tau)$ 和 $S(\omega)$ 都是偶函数，故 Wiener-Khintchine 公式还可以写为偶 Fourier 变换形式：

$$S(\omega)=2\int_0^\infty R(\tau)\cos\omega\tau d\tau,\tag{4.35}$$

$$R(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty S(\omega)\cos\omega\tau d\omega.\tag{4.36}$$

$$S(\omega)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-j\omega\tau}R(\tau),\tag{4.37}$$

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(\omega)\cos\omega\tau d\omega.\tag{4.38}$$

最常见的谱密度是有理谱密度，即 $S(\omega)$ 为两个 ω 多项式的比：

$$S(\omega)=\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}.$$

由谱密度是 ω 的非负实值偶函数知，$S(\omega)$ 形如

$$s_0\frac{\omega^{2n}+a_{2n-2}\omega^{2n-2}+\cdots+a_2\omega^2+a_0}{\omega^{2m}+b_{2m-2}\omega^{2m-2}+\cdots+b_2\omega^2+b_0},$$

式中 $s_0\neq0$．又由于 $R(0)>0$，故 $S(\omega)$ 应在 $[0,\infty)$ 上可积，从而 $S(\omega)$ 的分母多项式次数至少应比分子高 2 以及 $s_0>0$．

- 含有 δ 函数的谱密度/协方差函数：

变换下，仍成立 Wiener-Khintchine 公式. 这主要是利用 δ 函数的如下基本性质：对任一连续函数 $f(\tau)$,

$$\int \delta(\tau-\tau_0)f(\tau)d\tau = f(\tau_0).$$

由此可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau}d\omega = \delta(\tau), \tag{4.39}$$

$$\int \delta(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = 1. \tag{4.40}$$

由 (4.39) 式，当协方差函数为常数 1 时，对应的谱密度函数为 $2\pi\delta(\omega)$. 反之，当谱密度为 1 时，由 (4.39) 知协方差函数为 $\delta(\tau)$. 再由

$$\cos\omega\tau = \frac{1}{2}(e^{j\omega\tau}+e^{-j\omega\tau}), \qquad \sin\omega\tau = \frac{1}{2j}(e^{j\omega\tau}-e^{-j\omega\tau}).$$

可以得到当谱密度为 $a\cos\omega\tau_0$ 时，其对应的协方差函数为

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int a\cos\omega\tau_0 e^{j\omega\tau}d\omega \\ &= \frac{a}{4\pi}\left[\int e^{j\omega(\tau+\tau_0)}d\omega + \int e^{j\omega(\tau-\tau_0)}d\omega\right] \\ &= \frac{a}{2}(\delta(\tau+\tau_0)+\delta(\tau-\tau_0)). \end{aligned}$$

定义 4.3 设 $G=\{G(t), -\infty<t<\infty\}$ 为一随机过程，如果对任一正整数 k 以及 k 个时刻 $t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_k$, $(G(t_1),G(t_2),\cdots,G(t_k))$ 的联合分布为 k 维正态分布，则称 G 为高斯(Gauss) 过程.

我们知道，k 维正态分布完全由协方差矩阵和均值向量所唯一确定，而这些量仅与它们的二阶矩有关，所以对 Gauss 过程而言，两个平稳的定义是等价的.

以下主要研究宽平稳过程. 为方便起见，我们就称宽平稳过程为平稳过程.

例 4.5 (平稳白噪声序列) 设 $X_n, n=0,1,\cdots$ 一列两两不相关的随机变量序列，满足 $EX_n=0$, $EX_n^2=\sigma^2$, $n=0,1,\cdots$, 且 $EX_mX_n=0$, 当 $m\neq n$, 则 $X=\{X_n, n=0,1,\cdots\}$ 为平稳序列. 这是因为协方差函数

$$EX_mX_n = \begin{cases} \sigma^2, & m=n, \\ 0, & m\neq n. \end{cases} \tag{4.2}$$

仅与 $m-n$ 有关.

定义：**【布朗运动】** ① $X(0)=0$ ② 有平稳独立增量 ③ $\forall t>0, X(t)\sim N(0,c^2t)$

特别的，$c=1$ 为标准布朗运动。$\{X(t)/c^2, t\geq 0\}$ 总是标准布朗运动。

考虑 $(-\infty,\infty)$ 上的运动时，只需把最后一个条件改为 $X(t)\sim N(0,c^2|t|)$

此式表示，Brown 运动在任一点 t_0 的导数有限的概率为 0，换句话说，对几乎每条样本轨道上的任意一点 t_0，其导数都不存在.

即由定义 3.9 知它是一个齐次 Markov 过程.

其次，因为 $X(t)$ 是均值为零，方差为 t 的正态分布，故它的密度函数为

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-x^2/2t}.$$

定理 5.1

$$f_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n) = f_{t_1}(x_1)f_{t_2-t_1}(x_2-x_1)\cdots f_{t_n-t_{n-1}}(x_n-x_{n-1}).$$

数和协方差函数完全确定. 对 Brown 运动来说，其均值和协方差函数为 (设 $s\leqslant t$)

$$\begin{aligned} &EX(t)=0, \\ &\mathrm{Cov}(X(s),X(t)) = \mathrm{Cov}(X(s),X(s)+X(t)-X(s)) \\ &\qquad = \mathrm{Cov}(X(s),X(s)) + \mathrm{Cov}(X(s),X(t)-X(s)) = s. \end{aligned}$$

当 $t>s$ 时，$X(s)$ 和 $X(t)$ 的协方差为 s. 故

$$\mathrm{Cov}(X(s),X(t)) = \min(s,t).$$

定义：**【布朗桥过程】** 令 $\{W(t), t\geq 0\}$ 为布朗运动，令 $B(t)=W(t)-tW(1)$,

其中 $0\leq t\leq 1$，则随机过程 $B=\{B(t), 0\leq t\leq 1\}$ 为布朗桥过程。

布朗运动是高斯过程，布朗桥运动也是高斯过程，n 维分布由均值函数和协方差函数完全确定。对 $\forall 0\leq s\leq t\leq 1$,

$$\begin{aligned} &EB(t)=0, \\ &EB(s)B(t) = E[(W(s)-sW(1))(W(t)-tW(1))] \\ &\qquad = E[W(s)W(t)-tW(s)W(1)-sW(t)W(1)+tsW^2(1)] \\ &\qquad = s-ts-ts+ts = s(1-t). \end{aligned} \tag{5.10}$$

【例题与试题】

例 2.2 顾客依速率为 λ 的 Poisson 过程到达车站. 若火车在时刻 t 离站，问在 $(0,t]$ 区间里顾客的平均总等待时间是多少?

解 作为依 Poisson 过程到达的第一位顾客，他的到达时间为 W_1，等到时刻 t 发车需等待 $t-W_1$. 而第 i 位旅客的等待时间为 $t-W_i$. 在 $(0,t]$ 区段总共来了 $N(t)$ 位客人，所以总等待时间为 $\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)$. 而所要求的平均总等待时间就是 $E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)\right]$. 为求出它可以先求条件期望

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)\middle|N(t)=n\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{n}(t-W_i)\middle|N(t)=n\right] \\ &= nt - E\left[\sum_{i=1}^{n}W_i\middle|N(t)=n\right]. \end{aligned}$$

注意到给定 $N(t)=n, W_i, i=1,\cdots,n$ 的联合密度是与 $(0,t]$ 上均匀分布中随机样本 $U_i, i=1,\cdots,n$ 的次序统计量 $U_{(i)}, i=1,\cdots,n$ 的联合密度是一样的. 于是,

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}W_i\middle|N(t)=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n}U_{(i)}\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n}U_i\right] = \frac{nt}{2}.$$

因此,

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)\middle|N(t)=n\right] = nt - \frac{nt}{2} = \frac{nt}{2}.$$

最后得到

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)\right] = \frac{t}{2}E[N(t)] = \frac{\lambda t^2}{2}.$$

可以看到顾客平均总等待时间是和 t^2 成正比的，比例因子的大小取决于 Poisson 过程的强度 λ.

（5）到达某商店的顾客数 $N(t)$ 是一强度为 $\lambda(t)=2+t/2$ 的非齐次泊松过程，若该商店早上 8:00 开门，则午时段(11:00-13:00)没有顾客到达的概率为(　　)，午时段到达商店的平均人数为(　　)。

(1) $P\{N(5)-N(3)=0\}$

(3) 设有复合泊松过程 $X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$，其中 $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程，$Y_i\sim Exp\{\mu\}$. 则：$EX(t)=$ __________, $E[X^2(t)]=$ __________, $g_{X(t)}(s)=E\exp\{sX(t)\}=$ __________.

复合泊松：若 $EY=\mu, VarY=\tau^2 \Longrightarrow EX=\lambda\mu t,\ VarX=\lambda(\tau^2+\mu^2)t$

二、(8分) 保险公司的理赔次数 $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程，诸次理赔额 $C_i(i\geqslant 1)$ 为独立同分布，且与 $N(t)$ 独立，$EC_i=\mu$. 又设 W_i 为第 i 次理赔发生的时间 $(i\geqslant 1)$，则到时刻 t 为止的理赔总额的折现值为：

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i e^{-\alpha W_i}$$

其中 $\alpha>0$ 为折现率，试求 $C(t)$ 的期望值.

$$EC(t) = E\left\{E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} C_i e^{-\alpha W_i}\,\middle|\, N(t)\right]\right\} = \frac{\lambda\mu(1-e^{-\alpha t})}{\alpha}。$$

六、(7分) 设

$$X_t = S_t + \varepsilon_t = b\cos(\omega t+U)+\varepsilon_t, \quad t\in\mathbb{Z}$$

其中 $U\sim U(0,2\pi)$, $\{\varepsilon_t\}$ 零均值平稳，方差为 σ^2 的白噪声序列，U 与 $\{\varepsilon_t\}$ 独立. 作矩形窗滤波，$M>0$:

$$Y_t = \frac{1}{2M+1}\sum_{j=-M}^{M}X_{t-j}$$

1) 试问 Y_t 是平稳过程吗？为什么？

2) 求出 Y_t 的方差.

六、(7 分)

(1) 先求 $EX_t = E(S_t+\varepsilon_t) = 0$，

$$\gamma_X(t,t) = E(S_t+\varepsilon_t)^2 = E(S_t^2+\varepsilon_t^2) = ES_t^2+\sigma^2 = E[b^2\cos^2(\omega t+U)]+\sigma^2$$
$$= \tfrac{b^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}[\cos(2\omega t+2u)+1]du+\sigma^2 = \tfrac{b^2}{2}+\sigma^2$$

$$\gamma_X(t+\tau,t) = EX_{t+\tau}X_t = \tfrac{b^2}{2}\cos\omega\tau+\delta(\tau)\sigma^2, \quad (\because \delta(\tau)=\begin{cases}1 & \tau=0\\ 0 & \tau\neq 0\end{cases})$$

从而：$EY_t=0$ 且：

$$\begin{aligned} \gamma_Y(t+\tau,t) &= EY(t+\tau)Y(t) = \tfrac{1}{(2M+1)^2}\sum_{i,j=-M}^{M}EX_{t+\tau-i}X_{t-j} \\ &= \tfrac{1}{(2M+1)^2}\sum_{i,j=-M}^{M}(\tfrac{b^2}{2}\cos\omega(\tau-i+j)+\delta(\tau-i+j)\sigma^2) \end{aligned}$$

故 Y_t **平稳。**

(2)

$$\begin{aligned} \gamma_Y(t,t) &= \tfrac{1}{(2M+1)^2}\sum_{i,j=-M}^{M}(\tfrac{b^2}{2}\cos\omega(i-j)+\delta(i-j)\sigma^2) \\ &= \tfrac{1}{(2M+1)^2}(\sum_{i,j=0}^{2M}\tfrac{b^2}{2}\cos\omega(i-j)+(2M+1)\sigma^2) \end{aligned}$$

一、(20 分) 设有随机过程

$$X(t) = \xi\cos t + \eta\sin t, \ (0<t<\pi)$$

其中 ξ 与 η 独立，且都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，试求：

(1) $\{X(t), 0<t<\pi\}$ 的均值函数 $\mu_X(t)$ 与协方差函数 $r_X(s,t)$；

(2) $\{X(t), 0<t<\pi\}$ 的一维与二维分布密度。

一维：$Var[X(t)]=\sigma^2, E[X(t)]=0$, 正态分布可加性，$X(t)\sim N(0,\sigma^2)$

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/2\sigma^2}$$

二维：$\sigma_1=\sigma_2=\sigma, \mu_1=\mu_2=0, \rho=\sigma^2\cos(t-s)/\sigma^2$; $\quad f(X(s)=s, X(t)=y)$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sin(t-s)}\exp\left\{-\frac{1}{\sin^2(t-s)}\left[\frac{x^2+y^2-2\cos(t-s)\,xy}{\sigma^2}\right]\right\}$$

二、(20 分) 公路某收费站红、黄、蓝三种颜色的汽车到达数分别为速率 3, 4, 5 的泊松过程，且相互独立，试求：

(1) 第一辆车（红、黄或蓝色）的平均到达时间及第一辆红车的平均到达时间；

(2) 红车首先到达的概率；

(3) 在相继的两辆红车之间恰有 k 辆车到达的概率 $(k=0,1,2,\cdots\cdots)$。

泊松过程可加性，$1/(3+4+5)=1/12$，第一红车到达平均 $1/3$；(2) 蓝黄合成一个强度为 9 的泊松过程。泊松过程到达时间为 X_i，服从指数分布。

$$P(X_1<X_2) = \iint_{x_1<x_2}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}\lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2}\,dx_1dx_2 = \int_0^{x_1}dx_1\int_{x_1}^{\infty}\cdots dx_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$P = \int_0^{\infty}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\cdot\frac{(\lambda_2 t)^k}{k!}e^{-\lambda_2 t}dt = 3^k/4^{k+1}$$

五、(22 分) 设 $\{X_n, n\geq 0\}$ 为独立同分布的随机序列，且 $E(X_0)=0, Var(X_0)=\sigma^2$。又设 $\{N(t), t\geq 0\}$ 为强度 λ 的泊松过程，且与 $\{X_n, n\geq 0\}$ 独立。记 $Y(t)=X_{N(t)}$, $(t\geq 0)$,

(1) 证明 $\{Y(t), t\geq 0\}$ 为平稳过程；

(2) 试求 $\{Y(t), t\geq 0\}$ 的功率谱密度函数。

(3) $\{Y(t), t\geq 0\}$ 的均值遍历性是否成立？为什么？

(1) $E[Y(t)] = E[X_{N(t)}] = E[E[X_{N(t)}|N(t)]] = \sum_{k=0}^{\infty}E[X_k]P\{N(t)=k\} = 0$

$E[Y^2(t)] = \sum_{k=0}^{\infty}E[X_k^2]P\{N(t)=k\} = \sigma^2\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda t)^k e^{-\lambda t}/k! = \sigma^2$

$E[Y(s)Y(t)] = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}E[X_mX_n]P\{N(t)=m, N(s)=n\}, E[X_mX_n] = \begin{cases}0, & m\neq n\\ \sigma^2, & m=n\end{cases}$

(2) $S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2 e^{-\lambda|\tau|}e^{-i\omega\tau}d\tau = 2\sigma^2\lambda/(\lambda^2+\omega^2)$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2 e^{-\lambda|\tau|}d\tau = 2\sigma^2/\lambda < \infty$

多维高斯分布：

$$f(x,y) = \left(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)^{-1}exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right]$$

相关系数 $\rho = Cov(z,w)/(\sigma_z\sigma_w)$

留数定理：$\int f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k]$

$$Res[f(z),a] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]$$

若尔当引理

引理 3(约当引理) 如果当 R 充分大时，$g(z)$ 在圆弧 C_R: $|z|=R$, $\mathrm{Im}z>-a$ $(a>0)$ 上连续(图 5.2)，且

$$\lim_{z\to\infty}g(z)=0,$$

则对任何正数 λ，都有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}g(z)e^{i\lambda z}dz = 0.$$

证 记

$$M(R) = \max_{z\in C_R}|g(z)|,$$

则由假设条件，有

$$\lim_{R\to+\infty}M(R)=0.$$

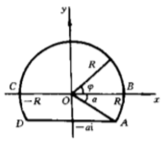

图 5.2

谱密度函数：非负实值偶函数

num	$R(\tau)$	$S(\omega)$
(1)	$\max\{(1-\|\tau\|)/T\}$	$\frac{4\sin^2(\omega T/2)}{T\omega^2}$
(2)	$e^{-a\|\tau\|}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
(3)	$(1+k\|\tau\|)e^{-k\|\tau\|}$	$\frac{4k^3}{(k^2+\omega^2)^2}$
(4)	$(1-k\|\tau\|)e^{-k\|\tau\|}$	$\frac{4k\omega^2}{(k^2+\omega^2)^2}$
(5)	$e^{-k^2\tau^2/2}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}e^{-\omega^2/2k}$
(6)	$\cos\omega_0\tau$	
(7)	$\frac{\sin\omega_0\tau}{\pi\tau}$	
(8)	1	y
(9)	y	1
(10)	$\cos\omega_0\tau$	

离散概率分布	$P(X=x)$	矩母函数	EX	$\mathrm{Var}(X)$
二项分布 $B(n,p)$, $0\leqslant p\leqslant 1$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$, $x=0,1,\cdots,n$	$(pe^t+(1-p))^n$	np	$np(1-p)$
Poisson 分布, $\lambda>0$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, x=1,2,\cdots$	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$	λ	λ
几何分布, $0\leqslant p\leqslant 1$	$p(1-p)^{x-1}$, $x=1,2,\cdots$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
负二项分布 参数为 r,p	$\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}$, $x=r,r+1,\cdots$	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
连续概率分布	$f(x)$	$g(t)$	EX	$\mathrm{Var}X$
均匀分布 $U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}, a<x<b$	$\frac{e^{ta}-e^{tb}}{t(a-b)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布, $\lambda>0$	$\lambda e^{-\lambda x}, x\geqslant 0$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Γ 分布 $\Gamma(n,\lambda), \lambda>0$	$\frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, x\geqslant 0$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-u)^2/2\sigma^2}$	$\exp\left\{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}\right\}$	μ	σ^2
Beta 分布 $B(a,b)$, $a>0, b>0$	$cx^{a-1}(1-x)^{b-1}, 0<x<1$, $c=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$		$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$