随机过程 B　第十六周作业　12 月 28 日　周一

PB18151866 龚小航

5.1 设 $\{W(t),\ t \geq 0\}$ 为标准 Brown 运动。

(1) 求 $W(1)+W(2)+\cdots+W(n)$ 的分布。

(2) 证明 Brown 运动的增量过程 $\{Y(t)=W(t+1)-W(t),\ t \geq 0\}$ 是平稳过程，并证明其谱密度函数为 $\dfrac{1-cos\,\omega}{\pi\omega^2}$.

解：由教材 110 页，标准布朗运动 $c=1$，满足如下三个条件：

$$\begin{cases} X(0)=0 \\ \text{随机过程}X\text{有平稳独立增量} \\ \text{对每个 } t>0, X(t) \sim N(0,c^2 t) \end{cases}$$

(1) 按定义，可知 $W(t)\sim N(0,t)$。由教材 113 页结论，$Cov\big(W(i),W(j)\big)=\min\{i,j\}$，又由于其均值为 0，因此有 $E[W(i),W(j)]=\min\{i,j\}$

联系布朗运动的性质，令 $X=\big(W(1),W(2),\cdots,W(n)\big)^T$，为多元正态分布，协方差矩阵为：

$$\Sigma=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

再令 $S=(1,1,\cdots,\ 1)$，那么所求的项可以表示为 $W(1)+W(2)+\cdots+W(n)=SX\sim N(0,S\Sigma S^T)$

只要求出 $S\Sigma S^T$ 即得到了需要求的分布。而这个值是协方差矩阵中所有元素的和：

$$\begin{aligned} S\Sigma S^T &= 1*(2n-1)+2*(2n-3)+\cdots+n*(1) = \sum_{i=1}^{n} i(2(n-i+1)-1) \\ &= 2n\sum_{i=1}^{n} i - 2\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i = (2n+1)\frac{n(n+1)}{2} - 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

于是 $W(1)+W(2)+\cdots+W(n) \sim N\left(0,\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$

(2) 若一个随机过程为宽平稳过程，必须满足三个条件：$\begin{cases} \text{所有的二阶矩存在} \\ E[X(t)] = C\ (\text{常数}) \\ \text{协方差函数仅与 } s \text{ 有关} \end{cases}$

显然此时二阶矩存在，因此证明条件二和三：

$$E[Y(t)] = E[W(t+1) - W(t)] = E[W(t+1)] - E[W(t)] = 0$$

均值为常数，再求其协方差函数：

$$E[W(i)W(j)] = \min\{i, j\}$$

$$\begin{aligned} Cov\big(Y(t), Y(s+t)\big) &= E[(Y(t) - E[Y(t)])(Y(t+s) - E[Y(t+s)])] = E[Y(t)Y(t+s)] \\ &= E\big[\big(W(t+1) - W(t)\big)\big(W(t+s+1) - W(t+s)\big)\big] \\ &= E[W(t+1)W(t+s+1)] - E[W(t+1)W(t+s)] - E[W(t)W(t+s+1)] + E[W(t)W(t+s)] \\ &= \begin{cases} t+1-(t+1)-t+t = 0, & s \geq 1 \\ t+1-t-s-t+t = 1-s, & 0 \leq s < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

显然这个结果只与 s 有关。综上三点，$\{Y(t)\}$ 是一个宽平稳过程。

再求其谱密度函数：

$$R(\tau) = \begin{cases} 0, & |\tau| \geq 1 \\ 1 - |\tau|, & |\tau| < 1 \end{cases}$$

$$S(\omega) = 2\int_0^1 (1-\tau)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau = \frac{2 - 2\cos\omega}{\omega^2}$$

5.4 设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 为标准 Brown 运动，令 $Z(t) = |W(t)|,\ t \geq 0.$

求 $Z(t)$ 的分布以及 $E[Z(t)]$ 和 $Var[Z(t)]$.

解：标准布朗运动满足 $W(t) \sim N(0, t)$，其概率密度函数为：

$$f_t(W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{W^2}{2t}} \implies f_t(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{Z^2}{2t}}$$

因此均值为：

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2t}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{-k}\Big|_{k=0}^{\infty}\right) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \end{aligned}$$

为求其方差，可以先将平方的期望求出来：

$$
\begin{aligned}
E[Z^2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2t}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-2}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^{\infty} tx\,\mathrm{d}e^{-\frac{x^2}{2t}} = \frac{-2}{\sqrt{2\pi t}}\left\{\left(txe^{-\frac{x^2}{2t}}\Big|_{x=0}^{\infty}\right) - \int_0^{\infty} te^{-\frac{x^2}{2t}}\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{2t}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^{\infty} \sqrt{2t}e^{-\frac{x^2}{2t}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) = \frac{2t}{\sqrt{2\pi t}}\sqrt{2t}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = t
\end{aligned}
$$

因此协方差为：

$$
Var[Z(t)] = E[Z^2(t)] - E^2[Z(t)] = t - \sqrt{\frac{2t}{\pi}}
$$