随机过程B　第七周作业　10月26日　周一

PB18151866 龚小航

3.2 考虑状态 0,1,2 上的一个马尔可夫链 $X_n,\ n \geq 0$，它有转移概率矩阵：

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$$

初始分布为 $p_0 = 0.3, p_1 = 0.4, p_2 = 0.3$。试求概率 $P\{X_0 = 0,\ X_1 = 1,\ X_2 = 2\}$

解：根据转移概率矩阵，可得：

$$P\{X_0 = 0,\ X_1 = 1,\ X_2 = 2\} = p_0 \cdot p_{01} \cdot p_{12} = 0.3 \cdot 0.2 \cdot 0 = 0$$

3.3 信号传送问题。信号只有 0,1 两种，分多个阶段传输。在每一步上出错的概率为 α。$X_0 = 0$ 是送出的信号，而 X_n 是在第 n 步接收到的信号。假定 X_n 是一个马尔可夫链，它有转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix},\ 0 < \alpha < 1$$

(a) 求两步均不出错的概率 $P\{X_0 = 0,\ X_1 = 0,\ X_2 = 0\}$

(b) 求两步传送后收到正确信号的概率。

(c) 五步之后传送无误的概率 $P\{X_5 = 0 \,|\, X_0 = 0\}$

解：根据转移概率矩阵，可知：

(a) $P\{X_0 = 0,\ X_1 = 0,\ X_2 = 0\} = p_0 \cdot p_{00} \cdot p_{00} = (1-\alpha)^2$

(b) 即为两步之后收到信号仍为 0 的概率，和上一问不同的是可能中间出现若干步 1，最后又变为 0：

$$P\{X_2 = 0\} = P\{X_0 = 0,\ X_1 = 0,\ X_2 = 0\} + P\{X_0 = 0,\ X_1 = 1,\ X_2 = 0\}$$

$$= p_0 \cdot p_{00} \cdot p_{00} + p_0 \cdot p_{01} \cdot p_{10} = (1-\alpha)^2 + \alpha^2$$

(c) 五步不出错的概率，应该用概率转移矩阵计算：

$$P^{(5)} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{(1-2\alpha)^5}{2} & \frac{1}{2} - \frac{(1-2\alpha)^5}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{(1-2\alpha)^5}{2} & \frac{1}{2} + \frac{(1-2\alpha)^5}{2} \end{pmatrix}$$

由转移概率矩阵，可得五步之后仍然传送无误的概率为：

$$P = P_{1,1}^{(5)} = \frac{1}{2} + \frac{(1-2\alpha)^5}{2}$$

3.4 A,B 两罐共装 N 个球，作如下试验：在时刻 n，从 N 个球中等概率的任选一球，然后从 A,B 两罐中任选一个，选中 A 的概率为 p，选中 B 的概率为 q，之后再将选出的球放入选好的罐中。令 X_n 为时刻 n 时 A 罐中的球数，试求这个马尔可夫过程的转移概率矩阵。

解：由题意可知，令状态转移矩阵第 i 行第 j 列的元素为 P_{ij}，因为每次只操作一个球，因此 $j > i+1$ 或 $j < i-1$ 时 $P_{ij} = 0$。因此最多只需要计算三种情况即可。

① $j = i$ 时，即求 P_{ii}：分两种可能，即拿出的是 A 的球放回 A，或拿出 B 的球放回 B

$$P_{ii} = \frac{i}{N}p + \frac{N-i}{N}q$$

② $j = i-1$ 时，只可能是拿走了 A 中的球而放入了 B 中。

$$P_{i,i-1} = \frac{i}{N}q$$

③ $j = i+1$ 时，只可能是拿走了 B 中的球而放入了 A 中。

$$P_{i,i+1} = \frac{N-i}{N}p$$

由此即可构造转移概率矩阵，先从对角线 P_{ii} 开始构造：

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{N}q & \frac{p}{N} + \frac{(N-1)}{N}q & \frac{N-1}{N}p & \cdots\cdots & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & \frac{i}{N}q & \frac{ip+(N-i)q}{N} & \frac{N-i}{N}p & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \frac{N-1}{N}q & \frac{(N-1)p+q}{N} & \frac{p}{N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & 0 & q & p \end{pmatrix}$$

3.7 记 $Z_i, i = 1,2,3 \cdots\cdots$ 为一串独立同分布的离散随机变量。$P\{ Z_1 = k \} = p_k \geq 0, k = 0,1,2,\cdots\cdots, \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ 记 $X_n = Z_n$，$n = 1,2,3 \cdots\cdots$ 试求次过程 X_n 的转移概率矩阵。

解：由于 Z_i 是独立同分布的，因此 $X_n = Z_n$ 也是独立同分布的。由独立同分布的定义，X_{i+1} 与 X_i 之间没有任何关系。因此对任意的 $i \in [1,\infty)$，$P\{ X_i = k \} = p_k$

因此转移概率矩阵显然为：

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_i & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$