随机过程 B　第十五周作业　12 月 21 日　周一

PB18151866 龚小航

4.22 设平稳过程 {X(t)} 的协方差函数 $R(\tau)=\dfrac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau+b^2e^{-a|\tau|}$，求功率谱密度函数 S(ω).

【课本 82 页】

解：根据 Wiener − Khintchine 公式，有：

$$
\begin{aligned}
S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau+b^2e^{-a|\tau|}\right)e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{a^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega_0\tau\ e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau+b^2\int_0^{\infty}e^{-a\tau}e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau+b^2\int_{-\infty}^{0}e^{a\tau}e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{a^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-\boldsymbol{i}\omega_0\tau}+e^{\boldsymbol{i}\omega_0\tau}\right)e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau+b^2\int_0^{\infty}e^{-(\boldsymbol{i}\omega+a)\tau}\,\mathrm{d}\tau+b^2\int_{-\infty}^{0}e^{(a-\boldsymbol{i}\omega)\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{a^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-\boldsymbol{i}(\omega+\omega_0)\tau}+e^{-\boldsymbol{i}(\omega-\omega_0)\tau}\right)\mathrm{d}\tau+b^2\frac{1}{\boldsymbol{i}\omega+a}+b^2\frac{1}{a-\boldsymbol{i}\omega} \\
&= \frac{a^2}{4}\big(2\pi\delta(\omega+\omega_0)+2\pi\delta(\omega-\omega_0)\big)+b^2\frac{1}{\boldsymbol{i}\omega+a}+b^2\frac{1}{a-\boldsymbol{i}\omega}\ \cdots\cdots \text{课本 86 页} \\
&= \frac{a^2\pi}{2}\big(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\big)+\frac{2ab^2}{a^2+\omega^2}
\end{aligned}
$$

4.27 求以下协方差函数对应的功率谱密度函数：

$$R(\tau)=\sigma^2e^{-a|\tau|}\cos b\tau$$

解：根据 Wiener − Khintchine 公式，有：

$$
\begin{aligned}
S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2e^{-a|\tau|}\cos b\tau\,e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \sigma^2\int_0^{\infty}e^{-a\tau}\cos b\tau\,e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau+\sigma^2\int_{-\infty}^{0}e^{a\tau}\cos b\tau\,e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \sigma^2\int_0^{\infty}\cos b\tau\,e^{-(a+\boldsymbol{i}\omega)\tau}\mathrm{d}\tau+\sigma^2\int_{-\infty}^{0}\cos b\tau\,e^{(a-\boldsymbol{i}\omega)\tau}\,\mathrm{d}\tau\ \cdots\cdots \text{两部分分别做分部积分} \\
&= \sigma^2(I^{+}+I^{-})
\end{aligned}
$$

分别利用分部积分计算：

$$
\begin{aligned}
I^{+} &= \int_0^{\infty}\cos b\tau\,e^{-(a+\boldsymbol{i}\omega)\tau}\mathrm{d}\tau = \left(\frac{e^{-(a+\boldsymbol{i}\omega)\tau}\cos b\tau}{-(a+\boldsymbol{i}\omega)}\bigg|_{\tau=0}^{\infty}\right)+\frac{b}{-(a+\boldsymbol{i}\omega)}\int_0^{\infty}\sin b\tau\,e^{-(a+\boldsymbol{i}\omega)\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{a+\boldsymbol{i}\omega}-\frac{b}{a+\boldsymbol{i}\omega}\int_0^{\infty}\sin b\tau\,e^{-(a+\boldsymbol{i}\omega)\tau}\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{a+\boldsymbol{i}\omega} - \frac{b}{a+\boldsymbol{i}\omega}\left[\left(\frac{e^{-(a+\boldsymbol{i}\omega)\tau}\sin b\tau}{-(a+\boldsymbol{i}\omega)}\bigg|_{\tau=0}^{\infty}\right) - \frac{b}{-(a+\boldsymbol{i}\omega)}\int_0^{\infty}\cos b\tau\, e^{-(a+\boldsymbol{i}\omega)\tau}\mathrm{d}\tau\right]$$

$$= \frac{1}{a+\boldsymbol{i}\omega} - \frac{b}{a+\boldsymbol{i}\omega}\left[0 + \frac{b}{(a+\boldsymbol{i}\omega)}I^+\right] = \frac{1}{a+\boldsymbol{i}\omega} - \left(\frac{b}{a+\boldsymbol{i}\omega}\right)^2 I^+$$

等式两边都出现了待解量，容易得出：

$$I^+ = \left(\frac{1}{a+\boldsymbol{i}\omega}\right)\Big/\left(1+\left(\frac{b}{a+\boldsymbol{i}\omega}\right)^2\right) = \frac{a+\boldsymbol{i}\omega}{(a+\boldsymbol{i}\omega)^2+b^2}$$

再利用分部积分计算 I^-，同上：

$$I^- = \int_{-\infty}^{0}\cos b\tau\, e^{(a-\boldsymbol{i}\omega)\tau}\,\mathrm{d}\tau = \left(\frac{e^{(a-\boldsymbol{i}\omega)\tau}\cos b\tau}{a-\boldsymbol{i}\omega}\bigg|_{\tau=-\infty}^{0}\right) + \frac{b}{a-\boldsymbol{i}\omega}\int_{-\infty}^{0}\sin b\tau\, e^{(a-\boldsymbol{i}\omega)\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{a-\boldsymbol{i}\omega} + \frac{b}{a-\boldsymbol{i}\omega}\int_{-\infty}^{0}\sin b\tau\, e^{(a-\boldsymbol{i}\omega)\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{a-\boldsymbol{i}\omega} + \frac{b}{a-\boldsymbol{i}\omega}\left[\left(\frac{e^{(a-\boldsymbol{i}\omega)\tau}\sin b\tau}{a-\boldsymbol{i}\omega}\bigg|_{\tau=-\infty}^{0}\right) - \frac{b}{a-\boldsymbol{i}\omega}\int_{-\infty}^{0}\cos b\tau\, e^{(a-\boldsymbol{i}\omega)\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]$$

$$= \frac{1}{a-\boldsymbol{i}\omega} - \left(\frac{b}{a-\boldsymbol{i}\omega}\right)^2 I^-$$

等式两边都出现了待解量，容易得出：

$$I^- = \left(\frac{1}{a-\boldsymbol{i}\omega}\right)\Big/\left(1+\left(\frac{b}{a-\boldsymbol{i}\omega}\right)^2\right) = \frac{a-\boldsymbol{i}\omega}{(a-\boldsymbol{i}\omega)^2+b^2}$$

综上，可以得出最终的功率谱密度函数为：

$$S(\omega) = \sigma^2(I^+ + I^-) = \sigma^2\left(\frac{a+\boldsymbol{i}\omega}{(a+\boldsymbol{i}\omega)^2+b^2} + \frac{a-\boldsymbol{i}\omega}{(a-\boldsymbol{i}\omega)^2+b^2}\right)$$

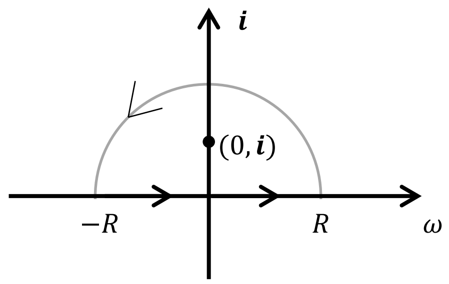
4.28 求以下功率谱密度对应的协方差函数：

$$S(\omega) = \frac{1}{(1+\omega^2)^2}$$

解：根据 Wiener − Khintchine 公式，有：

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{\boldsymbol{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}e^{\boldsymbol{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega$$

对这个积分应用留数定理，显然只有分母为 0，即 $\omega = \pm\boldsymbol{i}$ 时是二级奇点，在上半平面仅有唯一的一个奇点 $\omega = \boldsymbol{i}$。取下图所示的积分围道：



只要令 $R\to\infty$ 即可，由约当引理：

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}=0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{R\to\infty}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}e^{\boldsymbol{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega \;=\; 0$$

即在图中半圆形部分积分结果在 $R\to\infty$ 时为 0.

再由留数定理计算图中的围道 C 的积分结果，令 $f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^2}e^{\boldsymbol{i}\tau z}$ 并令 $R\to\infty$

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z \;&=\; 2\pi\boldsymbol{i}\cdot\mathrm{RES}[f(z),\boldsymbol{i}] \;=\; 2\pi\boldsymbol{i}\cdot\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to\boldsymbol{i}}\frac{\mathrm{d}^{2-1}}{\mathrm{d}z^{2-1}}[(z-\boldsymbol{i})^2f(z)]\\ &=\; 2\pi\boldsymbol{i}\,\lim_{z\to\boldsymbol{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{e^{\boldsymbol{i}\tau z}}{(z+\boldsymbol{i})^2}\right) \;=\; 2\pi\boldsymbol{i}\cdot\left(\boldsymbol{i}\tau e^{\boldsymbol{i}\tau\boldsymbol{i}}(2\boldsymbol{i})^{-2}-2e^{\boldsymbol{i}\tau\boldsymbol{i}}(2\boldsymbol{i})^{-3}\right)\\ &=\; \frac{\pi(\tau+1)e^{-\tau}}{2}\end{aligned}$$

结合半圆弧上积分结果为 0，即可得出实轴上的积分结果为：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}e^{\boldsymbol{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega=\frac{\pi(\tau+1)e^{-\tau}}{2}$$

综上，可知给出的功率谱密度函数对应的协方差函数为：

$$R(\tau) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}e^{\boldsymbol{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega=\frac{(\tau+1)e^{-\tau}}{4}$$

又由于 $R(\tau)$ 是偶函数，因此

$$R(\tau)=\frac{(|\tau|+1)e^{-|\tau|}}{4}$$

4.29 设 $\{\varepsilon_n,\ n\in\mathbb{Z}\}$ 为白噪声系列，均值为 0，方差为 σ^2，求以下系列的谱密度函数：【课本 84 页】

$$X_n=\varepsilon_n+\alpha_1\varepsilon_{n-1},\ \ n\in\mathbb{Z}$$

解：根据离散型数据的谱密度函数计算方法：

$$S(\omega)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau}R(\tau)$$

因此只需要计算出 $R(\tau)$ 即可。由给出的条件，结合白噪声系列的定义：

$$E[\varepsilon_n]=0;\ E\left[\varepsilon_i\varepsilon_j\right]=0\ \ (i\neq j);\ \ E[\varepsilon_i\varepsilon_i]=\sigma^2$$

$$\Longrightarrow\quad E[X_n]=E[\varepsilon_n+\alpha_1\varepsilon_{n-1}]=0$$

再根据协方差函数的定义计算 $R(\tau)$：

$$\begin{aligned}R(\tau)\ &=\ Cov(X_n,X_{n+\tau})\ =\ E[(\varepsilon_n+\alpha_1\varepsilon_{n-1}-0)(\varepsilon_{n+\tau}+\alpha_1\varepsilon_{n+\tau-1}-0)]\\&=\ E[\varepsilon_n\varepsilon_{n+\tau}]+\alpha_1^2E[\varepsilon_{n-1}\varepsilon_{n+\tau-1}]+\alpha_1(E[\varepsilon_{n-1}\varepsilon_{n+\tau}]+E[\varepsilon_n\varepsilon_{n+\tau-1}])\\&=\ \begin{cases}\sigma^2+\alpha_1^2\sigma^2, & \tau=0\\ \alpha_1\sigma^2, & \tau=\pm1\\ 0, & -1<\tau<1\end{cases}\end{aligned}$$

由此只需要根据定义计算：

$$S(\omega)\ =\ \sum_{\tau=-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\tau}R(\tau)\ =\ \sum_{\tau=-1}^{1}e^{-i\omega\tau}R(\tau)\ =\ \sigma^2+\alpha_1^2\sigma^2+\alpha_1\sigma^2\left(e^{-i\omega}+e^{i\omega}\right)$$

$$=\ \sigma^2+\alpha_1^2\sigma^2+2\alpha_1\sigma^2\cos\omega$$