1.P1,P2,...Pn 可能相差很大，如何优化算法

解决分布不均匀的问题，那么将均匀分布[0,1]区间分成 N 等分，每一份 1/N，让 Pi 在[i-1/n,i/n]中取值即可，i=1，2，3....n.

2.证明洗牌算法做到了洗牌均匀

第一次取第一张牌(i=0)保持位置不变。第二次取第二张牌(i=1)，随机生成 0-1 的随机数 k，如果随机生成数不为 1，则交换下标为 k 和 i 的牌，否则不进行交换。

假设现在取第 Z 张牌(i = Z - 1)， k= rand()%Z, 如果 k!=i 则交换下标为 k 和 i 的两张牌。

第一次计算时第一张牌(i=0)出现在第一个位置的概率为 1。

第二次计算时第二张牌(i=1)很明显出现在两个位置中的概率都是 1/2。

我们就是要**证明第 Z（Z<=N)次计算时每张牌出位位置的概率为 1/Z**。

下面采用归纳法来证明。

1. 很明显 Z=1 时结论成立。

1. 假设当 Z = K 时结论也成立。

当 Z=K+1 时，易知第 Z 张牌出现在任意位置的概率为 1/Z。

前 K 个数能够保留当前位置的概率为（1 - 1/(K+1)), 那么任意一张牌出现在任意位置的概率为(1/K) *（1 - 1/(K+1)) = 1/(K+1)。

1. 同样当 Z=N 时该算法也成立。

链接：https://blog.csdn.net/pursuitbeauty/article/details/45968995

3.根据逆变换算法，设计一个 f(x) = 2/3 * exp[(-2/3)*x]随机发生器

$f(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}x}$ 为指数分布的概率密度函数

则分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{2}{3}x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

其反函数为 $F^{-1}(x)=-\frac{3}{2}\ln(1-x)$

则 x 取值范围为 $[0,1)$，那么它可以在此区间取随机数，即

$$y=-\frac{3}{2}\ln(1-x),\quad x\sim U[0,1)$$

4.设计一个泊松分布发生器

4.2 Generating a Poisson Random Variable

The random variable X is Poisson with mean λ if

$$p_i = P\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \quad i = 0, 1, \ldots$$

The key to using the inverse transform method to generate such a random variable is the following identity (proved in Section 2.8 of Chapter 2):

$$p_{i+1} = \frac{\lambda}{i+1}p_i, \quad i \geq 0 \tag{4.1}$$

Upon using the above recursion to compute the Poisson probabilities as they become needed, the inverse transform algorithm for generating a Poisson random variable with mean λ can be expressed as follows. (The quantity i refers to the value presently under consideration; $p = p_i$ is the probability that X equals i, and $F = F(i)$ is the probability that X is less than or equal to i.)

STEP 1: Generate a random number U.
STEP 2: $i = 0$, $p = e^{-\lambda}$, $F = p$.
STEP 3: If $U < F$, set $X = i$ and stop.
STEP 4: $p = \lambda p/(i+1)$, $F = F + p$, $i = i + 1$.
STEP 5: Go to Step 3.

思想：生成一个 0 到 1 之间的随机数，然后看泊松分布的前几项和刚好大于这个随机数时停止。

链接：https://www.zhihu.com/question/38167673

5.若已知概率 p 的发生器，如何设计 1/2，1/3 呢？任意概率呢？

概率为 p 的发生器发生 0 的概率为 P，发生 1 的概率为 1-P。

1/2 发生器：

发生两次，则有四种情况:00 概率为 P*P，11 概率为（1-P)(1-P)，01 概率为 P(1-P)，10 概率为 P(1-P)。若要生成 1/2 发生器，则取概率相同的两种，即 01，10。在发生 01 时返回 0，发生 10 时返回 1（或者相反），其它的发生情况视为噪声忽略即可，这样就使两者发生概率相同，则得到 1/2 发生器。

1/3 发生器：

用等概率生成（0,1）的构造器等概率生成（0,1,2,3）。

假设，1/2 构造器为 Rand2()，则 Rand2()*2 为（0,2），Rand2()*2 + Rand2()则可以生成（0,1,2,3）。注意 Rand2()*2 + Rand2()不等于 Rand2()*3，后者等于（0,3），只用了一次构造器。前者由 part1:（0,2）和 part2:（0,1）构成。最终结果（0,1,2,3）任何一个数字都由 part1 和 part2 中唯一的数字相加得到。

任意发生器：用等概率生成（0,1）的构造器等概率生成（0,1,2,3，…，N）。

思路同上相似。由（0,1）的构造器可以生成（0，…，2^n） 的构造器，其中每次构造生成的随机数个数是上一次的平方。只需要构造到保证 2^n>N 即可。当得到的随机数处于[N, 2^n）时，递归生成一次，直到构造数为[0,N)时，退出本次随机数生成。

链接：https://www.nowcoder.com/questionTerminal/248553ad24e64d8a922482c7c29c4aa0