TP-Analyse Fonctionelle

Victor Bros Lavainne Remy

07/11/2018

Exercice 3

1) On pose $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \delta_{na} \ \in D(\mathbb{R})$ avec f_n N-périodique. On pose $d = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{4}\delta_{ka} \ \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $g = f * d = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n \delta_{na}$.
On a $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
< g, \varphi > &=< f * d, \varphi > \\
&=< f_t, < d_u, \varphi(t+u) >> \\
&=< f, \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{4}\varphi(ka + .) > \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f_n}{4} \sum_{k=0}^{3} \varphi((k+n)a) \\
&= \sum_{k=0}^{3} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f_n}{4} \varphi((k+n)a) \\
&= \sum_{k=0}^{3} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f_{n-k}}{4} \varphi(na) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(na) \sum_{k=0}^{3} \frac{f_{n-k}}{4}
\end{aligned} \tag{1}$$

On a donc $g_n = \sum_{k=0}^{3} \frac{f_{n-k}}{4}$ qui est donc N-périodique car f_n est N-périodique.
$\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
< g, \varphi > &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{3} \frac{f_{n-k}}{4} \varphi(na) \\
&= \sum_{k=0}^{3} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f_{n-k}}{4} \varphi(na) \\
&= \sum_{k=0}^{3} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f_{n+N-k}}{4} \varphi((n+N)a) \\
&=< g, \tau_{-Na}\varphi > \\
&=< \tau_{Na} g, \varphi >
\end{aligned} \tag{2}$$

On a donc que g est Na-périodique.

2) On sait que g_n et f_n sont N-périodiqe. On peut donc calculer g en calculant N valeurs consécutives de g_n. On calcule les g_n pour $n \in [0 : N-1]$ grace la TFD :$\widehat{g_n} = (\widehat{f * d})_n$