

TP-Analyse Fonctionnelle

Victor Bros

Lavainne Remy

07/11/2018

Exercice 3

1) On pose $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \delta_{na} \in D(\mathbb{R})$ avec f_n N-périodique. On pose $d = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{4} \delta_{ka} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$
 et $g = f * d = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \delta_{na}$.
 On a $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
 \langle g, \varphi \rangle &= \langle f * d, \varphi \rangle \\
 &= \langle f_t, \langle d_u, \varphi(t+u) \rangle \rangle \\
 &= \langle f, \sum_{k=0}^3 \frac{1}{4} \varphi(ka + \cdot) \rangle \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f_n}{4} \sum_{k=0}^3 \varphi((k+n)a) \\
 &= \sum_{k=0}^3 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f_n}{4} \varphi((k+n)a) \\
 &= \sum_{k=0}^3 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f_{n-k}}{4} \varphi(na) \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(na) \sum_{k=0}^3 \frac{f_{n-k}}{4}
 \end{aligned} \tag{1}$$

On a donc $g_n = \sum_{k=0}^3 \frac{f_{n-k}}{4}$ qui est donc N-périodique car f_n est N-périodique.

$\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
 \langle g, \varphi \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^3 \frac{f_{n-k}}{4} \varphi(na) \\
 &= \sum_{k=0}^3 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f_{n-k}}{4} \varphi(na) \\
 &= \sum_{k=0}^3 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f_{n+N-k}}{4} \varphi((n+N)a) \\
 &= \langle g, \tau_{-Na} \varphi \rangle \\
 &= \langle \tau_{Na} g, \varphi \rangle
 \end{aligned} \tag{2}$$

On a donc que g est Na-périodique.