TP-Analyse Fonctionelle

Victor Bros Lavainne Remy

07/11/2018

Exercice 1

1) D'après l'exercice I de la feuille de TD 5,
comme $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ (car $supp(\widehat{f}) \subset [-\lambda_c, \lambda_c]$ support compact),
le théorème de Shannon s'applique sous la condition $\boxed{a < \frac{1}{2\lambda_c}}$ pour obtenir une reconstruction parfaite du signal.

2) pour $f_0 = \frac{F_0}{F_e}$ et $N = 15$, on a

$$\begin{aligned} S_N(\lambda) &= a \sum_{k=-N}^{N-1} f(na)e^{-2i\pi na\lambda} \\ &= a \sum_{k=-15}^{14} e^{2i\pi(f_0 - \frac{\lambda}{F_e})n} \\ &= \boxed{\frac{1}{F_e} \frac{e^{-30i\pi(f_0-\frac{\lambda}{F_e})} - e^{30i\pi(f_0-\frac{\lambda}{F_e})}}{1 - e^{2i\pi(f_0-\frac{\lambda}{F_e})}}} \end{aligned} \tag{1}$$

Exercice 3

1) On pose $f = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \delta_{na} \ \in D(\mathbb{R})$ avec f_n N-périodique. On pose $d = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{4}\delta_{ka} \ \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $g = f * d = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n \delta_{na}$.

On a $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
<g,\varphi> &=< f*d,\varphi> \\
&=< f_t, < d_u, \varphi(t+u)>> \\
&=< f, \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{4}\varphi(ka+.)> \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f_n}{4} \sum_{k=0}^{3} \varphi((k+n)a) \\
&= \sum_{k=0}^{3} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f_n}{4}\varphi((k+n)a) \\
&= \sum_{k=0}^{3} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f_{n-k}}{4}\varphi(na) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(na) \sum_{k=0}^{3} \frac{f_{n-k}}{4}
\end{aligned} \tag{2}$$

On a donc $g_n = \sum_{k=0}^{3} \frac{f_{n-k}}{4}$ qui est donc N-périodique car f_n est N-périodique.

$\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
<g,\varphi> &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{3} \frac{f_{n-k}}{4}\varphi(na) \\
&= \sum_{k=0}^{3} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f_{n-k}}{4}\varphi(na) \\
&= \sum_{k=0}^{3} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f_{n+N-k}}{4}\varphi((n+N)a) \\
&=< g, \tau_{-Na}\varphi> \\
&=< \tau_{Na} g, \varphi>
\end{aligned} \tag{3}$$

On a donc que g est Na-périodique.

2) On sait que g_n et f_n sont N-périodique. On peut donc calculer g en calculant N valeurs consécutives de g_n. On calcule les g_n pour $n \in [0 : N-1]$ grâce la TFD :$\widehat{g_n} = \widehat{(f*d)}_n$ On a donc $\widehat{g_n} = \widehat{f_n}\widehat{d_n}$ en prenant la TFD inverse on peut obtenir g_n

4) On a $\widehat{g_n} = \widehat{f_n}\widehat{d_n}$ donc si $\widehat{d}$ ne s'annule sur aucune de ses composantes on a : $\widehat{f_n} = \frac{\widehat{f_n}}{\widehat{d_n}}$

5)

<u>Exercice 4</u>

1) Pour $H(\lambda) = \chi_{[-1/4,1/4]}(\lambda), \forall \lambda \in [-1/2, 1/2[$,

Soit $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} h_n &= \int_{-1/2}^{1/2} H(\lambda) e^{2i\pi n\lambda} \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{-1/4}^{1/4} H(\lambda) e^{2i\pi n\lambda} \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \left[\frac{e^{2i\pi n\lambda}}{2i\pi n}\right]_{-1/4}^{1/4} \\ &= \frac{e^{i\pi n/2} - e^{-i\pi n/2}}{2i\pi n} \\ &= \boxed{\frac{sinc(n\pi/2)}{2}} \end{aligned} \tag{4}$$

2) Pour $N = 15$, on réalise le décalage d'indice suggéré pour obtenir une version réalisable du filtre :

$$\begin{aligned} H_n^*(\lambda) &= H_n(\lambda) e^{-2i\pi \frac{N-1}{2} \lambda} \\ H_n^*(\lambda) &= h_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} h_n e^{-2i\pi n\lambda} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} h_{-n} e^{2i\pi n\lambda} \end{aligned} \tag{5}$$

Par parité du sinus cardinal $h_n = h_{-n}$,

$$H_n^*(\lambda) = \sum_{k=1}^{(N-1)/2} 2h_n cos(2\pi n\lambda) \in \mathbb{R} \tag{6}$$

i.e.

$$\begin{aligned} arg(H_n(\lambda)) &= arg(e^{2i\pi \frac{N-1}{2} \lambda}) \\ &= \boxed{2\pi \tfrac{N-1}{2} \lambda} \\ |H_n(\lambda)| &= \sum_{k=1}^{(N-1)/2} 2h_n cos(2\pi n\lambda) \end{aligned} \tag{7}$$

3) En reprenant le calcul de la question 1),

$$\begin{aligned} \tilde{h_n} &= \int_{-1/2}^{1/2} H(\lambda) e^{(2n-1)i\pi\lambda} \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \boxed{\frac{sinc((2n-1)\pi/4)}{2}} \end{aligned} \tag{8}$$

on conserve les N valeurs de $\tilde{h_n}$ en construisant une version réalisable du filtre en décalant les valeurs :

$$H_n^*(\lambda) = H_n(\lambda) e^{-2i\pi(\frac{N}{2}-1)\lambda} \tag{9}$$

En reprenant le calcul de 2),

$$H_n^*(\lambda) = \sum_{k=1}^{(N-1)/2} 2\tilde{h_n} cos(2\pi n\lambda) \in \mathbb{R} \tag{10}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
arg(H_n(\lambda)) &= arg(e^{2i\pi(\frac{N}{2}-1)\lambda}) \\
&= \boxed{2\text{i } \pi(\frac{N}{2}-1)\lambda} \\
|H_n(\lambda)| &= \sum_{k=1}^{(N-1)/2} 2\tilde{h_n} cos(2\pi n\lambda)
\end{aligned} \tag{11}$$

4) Ainsi, pour h_n défini, on a montré par 2) et 3) en fonction de la parité de P, que par les décalages d'indice des h_n et modification si P est paire, il est possible de se ramener par parité de $h_n e^{-2i\pi n\lambda}$ à une somme réelle. Il ne reste donc comme phase de la transformée de Fourier que le décalage d'indice de la somme qui correspond à une fonction linéaire de λ. Le filtre ainsi défini est à phase linéaire.