

# Module MP(C)

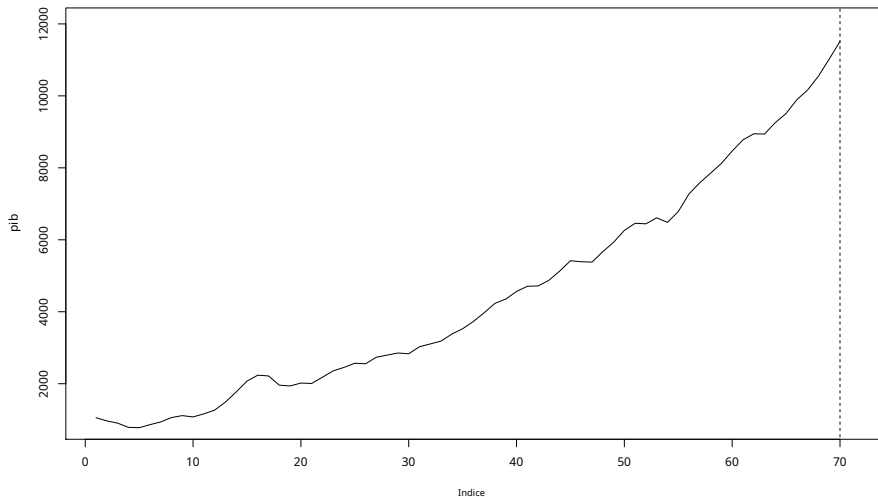
## Méthodes de prédiction des variables numériques

Simon Malinowski

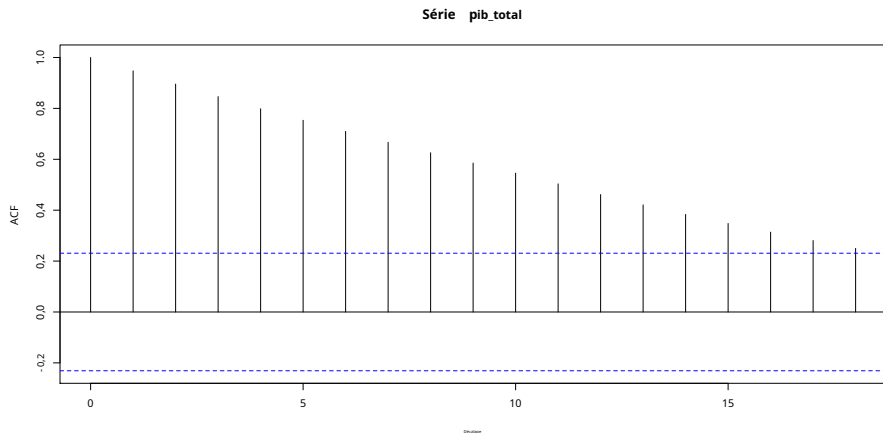
M1 Miage - M1 Data Science, Univ. Rennes

- Séries avec une tendance mais sans saisonnalité
  - Contexte
    - Modèles auto-régressifs à
    - lissage exponentiel double
- Séries chronologiques avec une composante saisonnière
  - Contexte
  - Lissage exponentiel triple Modèles auto-régressifs pour
  - séries chronologiques saisonnières

## Série avec c'est une tendance mais pas de saisonnalité



## Série avec c'est une tendance mais pas de saisonnalité



## Séries avec une tendance mais sans saisonnalité

Hypothèse : la série a une tendance mais pas de saisonnalité

$$x_t = f(t) + e_t,$$

avec  $e_t$  la composante résiduelle.

Problème : comment estimer  $f(t)$  ?

Le cas le plus simple :  $f(t) = a + b*t$ . Comment estimer  $a$  et  $b$  ?

- **Séries avec une tendance mais sans saisonnalité**
  - Contexte
  - **Lissage exponentiel double**
  - Modèles auto-régressifs
- Séries chronologiques avec une composante saisonnière
  - Contexte
  - Lissage exponentiel triple
  - Modèles auto-régressifs pour séries chronologiques saisonnières

# Lissage exponentiel double (méthode de Holt)

À chaque instant de temps  $t$ , deux paramètres sont estimés :

- $u_t$  qui représente un niveau moyen
- $b_t$  qui représente une pente moyenne

Comme pour le lissage exponentiel simple, ces paramètres sont estimés :

- en prenant en compte toutes les informations passées
- donnant plus d'influence aux valeurs récentes

Prédiction :

soit  $x_1, \dots, x_t$  est une série chronologique,

$$\hat{x}_{t+h} = u_t + h \times b_t$$

# Lissage exponentiel double : mettre à jour les formules

Mettre à jour les formules pour  $u_t$  et  $b_t$ :

$$\begin{cases} u_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)(u_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t = u_t - u_{t-1} + (1 - \beta)b_{t-1} \end{cases}$$

Il y a quatre paramètres à initialiser :

- $\alpha$  et  $\beta \in [0, 1]$
- $u_0$  et  $b_0$  niveau initial et pente



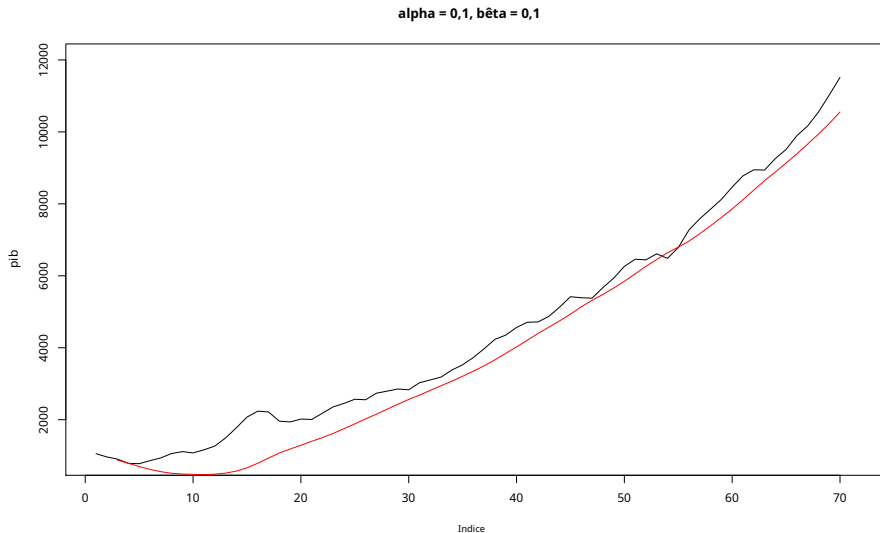
# Lissage exponentiel double : exemple

# Impact des paramètres

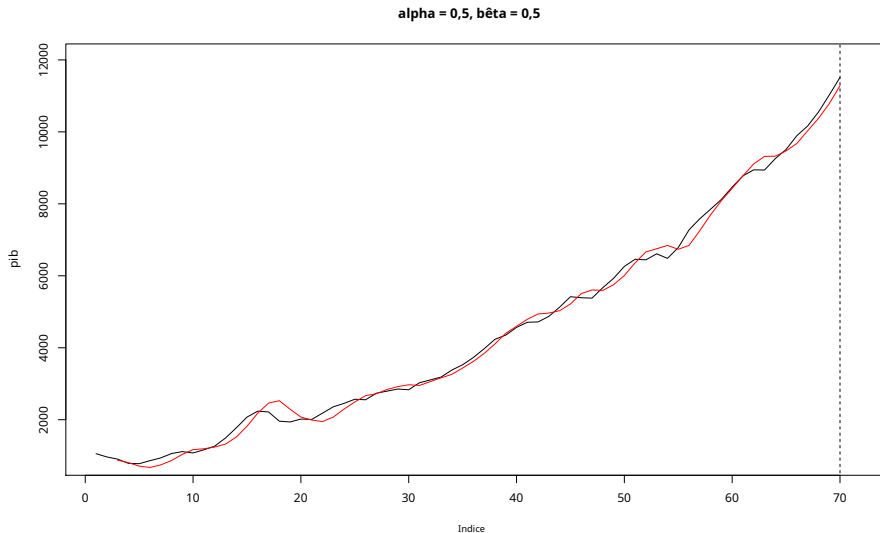
Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont petits (proches de 0), les prédictions seront stables, mais peu réactives aux changements dans les données.

À l'inverse, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont grandes (proche de 1), les prédictions seront plus fluctuantes mais aussi plus réactives aux changements

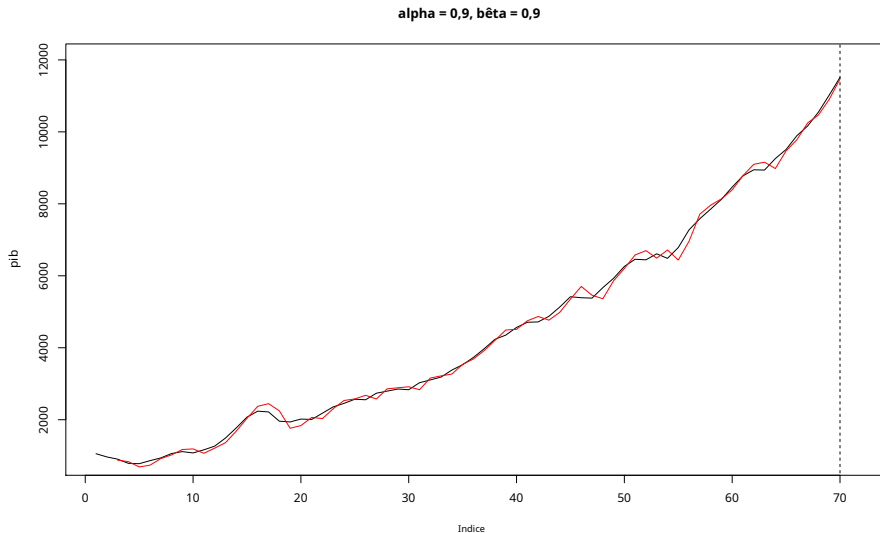
# Double E lissage exponentiel



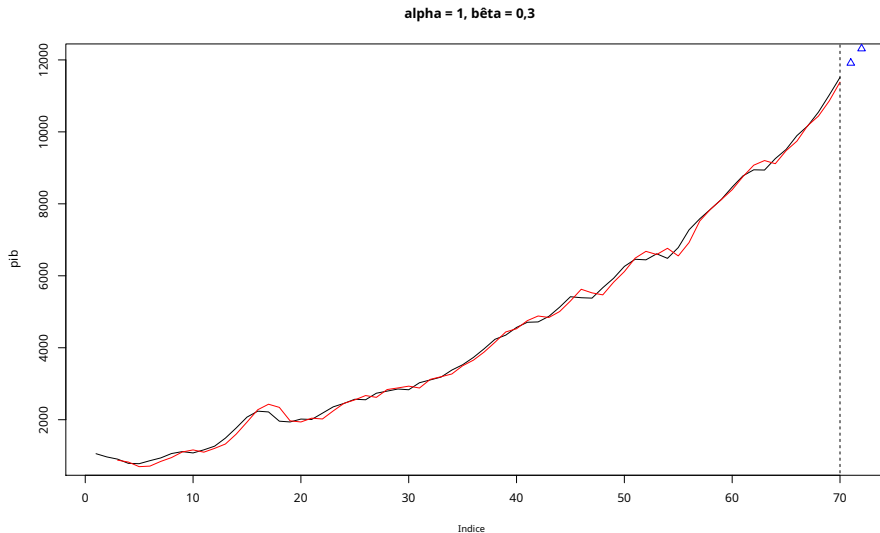
# Double E lissage exponentiel



# Double E lissage exponentiel



# Double E lissage exponentiel



# Lissage exponentiel double



# Choix de $\alpha$ et $\beta$



- **Séries avec une tendance mais sans saisonnalité**
  - Contexte
  - Lissage exponentiel double
  - **Modèles auto-régressifs**
- Séries chronologiques avec une composante saisonnière
  - Contexte
  - Lissage exponentiel triple
  - Modèles auto-régressifs pour séries chronologiques saisonnières

# Modèles auto-régressifs pour séries avec tendance

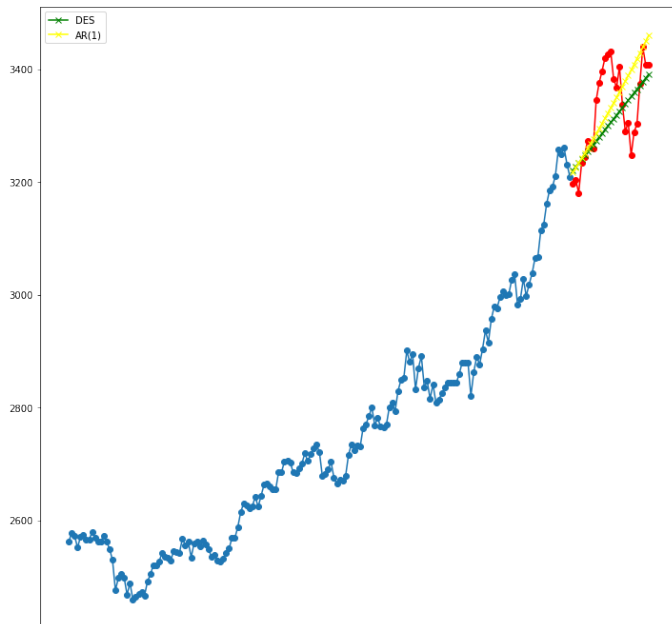
Les modèles AR classiques peuvent être utilisés pour des séries avec tendance

Principe :

$$\hat{x}_n = \beta_0 + \sum_{k=1}^p \beta_k x_{n-k}$$

- $p$  est l'ordre du modèle : AR(p)
- les coefficients  $\beta$  sont estimés sur la base de la série originale

# Modèles auto-régressifs pour séries avec tendance

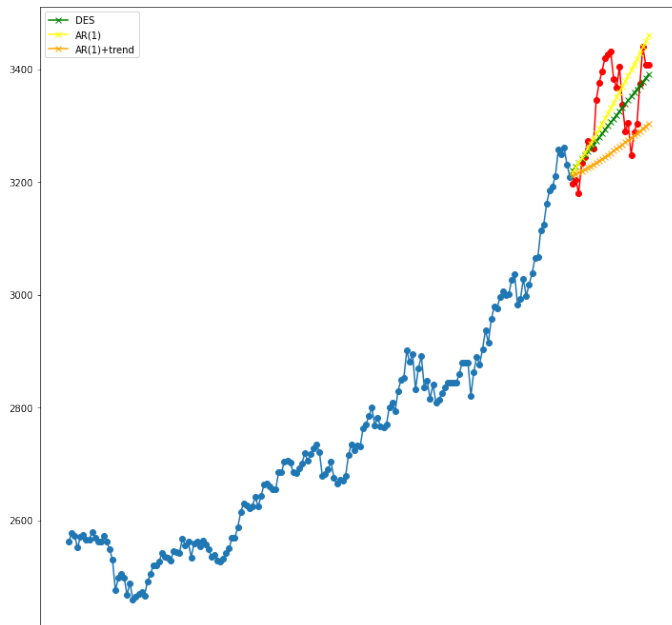


# Modèles auto-régressifs pour séries avec tendance

Un nouveau type de modèle auto-régressif peut être utilisé pour une telle série :

$$\hat{x}_n = \beta_0 + b \times n + \sum_{k=1}^p \beta_k x_{n-k}$$

# Modèles auto-régressifs pour séries avec tendance



# Résumé

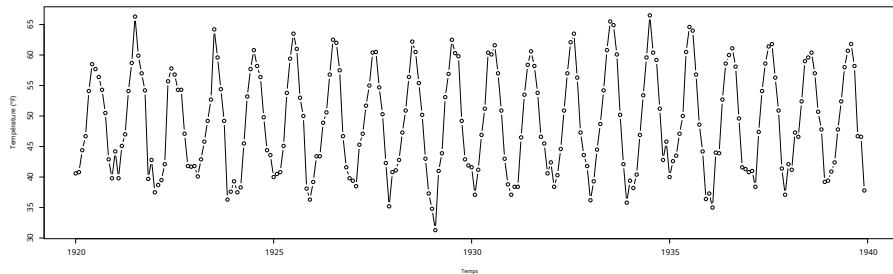
Les méthodes permettant de prédire une série chronologique avec une tendance sont :

- Modèle AR classique à lissage
- exponentiel double
- Modèle AR avec une tendance

Comment sélectionner la solution la plus adaptée à une série temporelle donnée ?

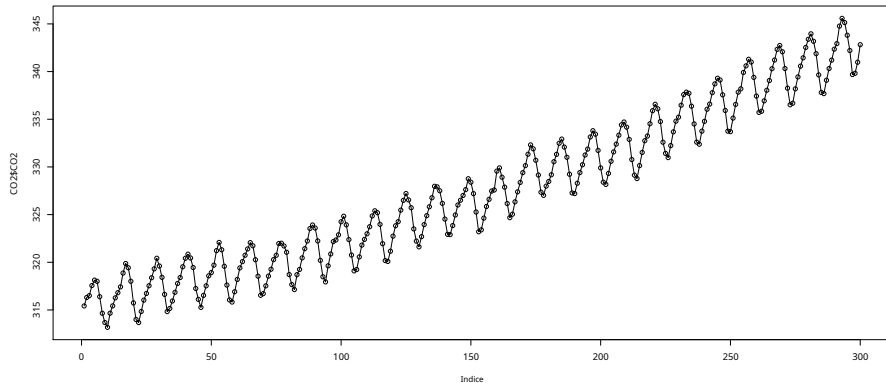
- Séries avec une tendance mais sans saisonnalité
  - Contexte
  - Modèles auto-régressifs à
  - lissage exponentiel double
- Séries chronologiques avec une composante saisonnière
  - Contexte
  - Lissage exponentiel triple Modèles auto-régressifs pour
  - séries chronologiques saisonnières

# Exemple 1

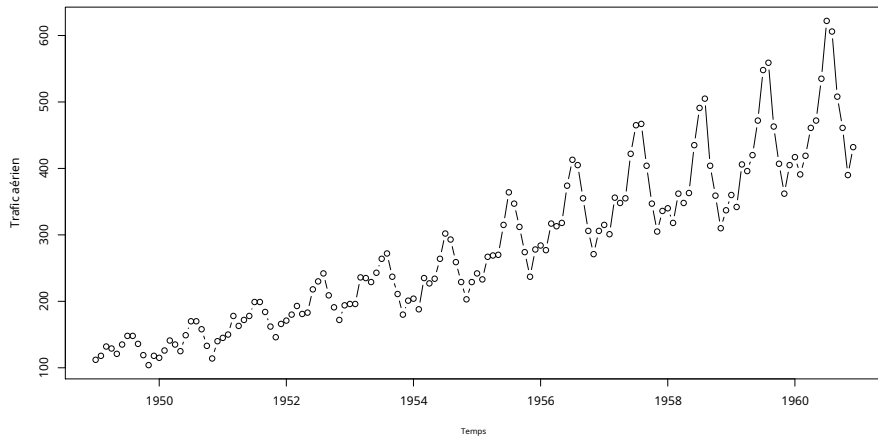




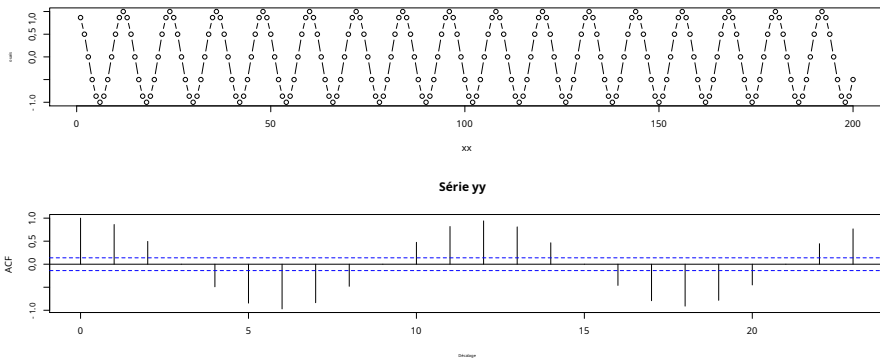
## Exemple 2



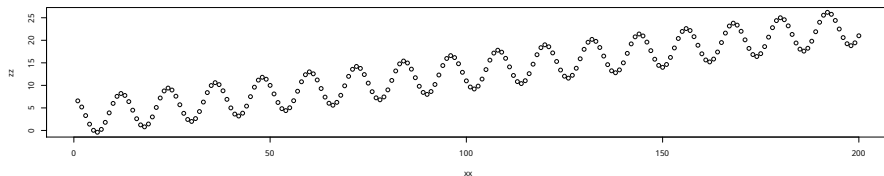
## Exemple 3



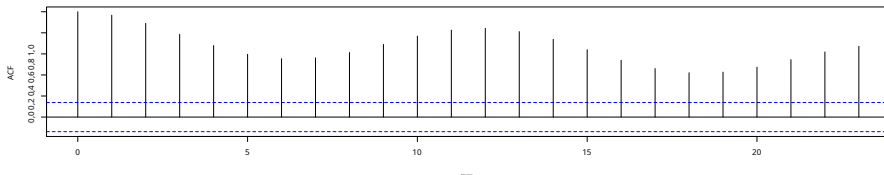
ACF correspondant



# ACF correspondant



Série zz



# Additif ou multiplicatif

## Modèle additif

Nous supposons que  $X_t$  peut être écrit comme

$$X_t = T_t + S_t + E_t$$

## Modèle multiplicatif

Nous supposons que  $X_t$  peut être écrit comme

$$X_t = T_t * S_t * E_t$$

## Séries chronologiques avec une composante saisonnière

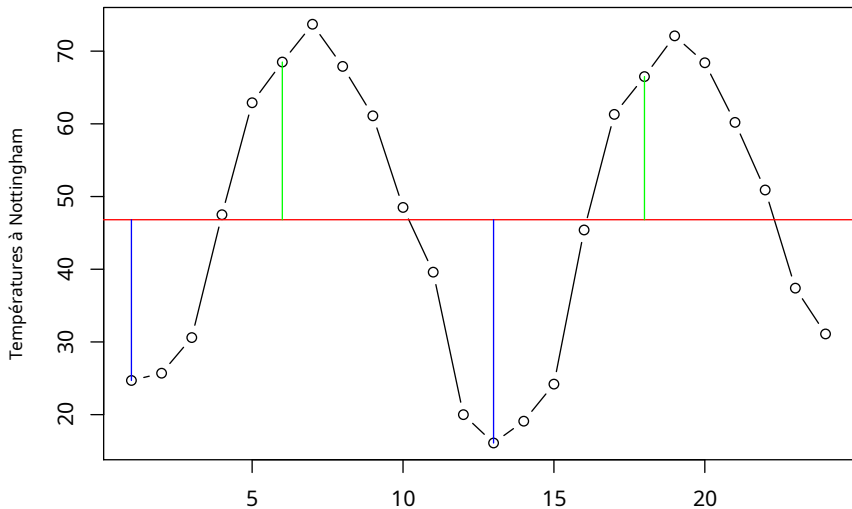
Nous supposons ici que la série temporelle  $x_t$  a une composante saisonnière de la période  $m$  (et peut-être une tendance)

$$x_t = f(t) + S_t + E_t$$

Objectif : estimer  $f(t)$  et  $S_t$

« Forme » de  $S_t$  : coefficients  $m_1, \dots, m_1$

# Exemple



## Séries chronologiques avec une composante saisonnière

Deux méthodes principales :

- 1 Lissage exponentiel triple (additif ou multiplicatif)
- 2 Modèles auto-régressifs



- Séries avec une tendance mais sans saisonnalité Séries
- chronologiques avec une composante saisonnière
  - Contexte
  - Lissage exponentiel triple Modèles auto-régressifs pour
  - séries chronologiques saisonnières

# Lissage exponentiel triple

Principe : si  $x_1, \dots, x_n$  est une série chronologique avec une période  $m$  À chaque instant  $t$ ,  $m+2$  coefficients sont appris :

- un coefficient de niveau  $b$
- un coefficient de pente
- $m_1, \dots, m_m$   $m$  coefficients saisonniers

Prédiction :

$$\hat{x}_{n+h} = u + h \times b + m_{1+(n+h-1) \bmod m}$$

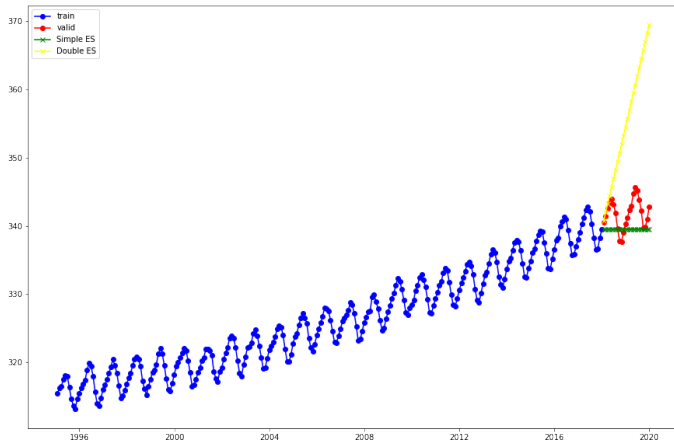
$$\hat{x}_{n+h} = (u + h \times b) \times (m_{1+(n+h-1) \bmod m})$$

Les coefficients sont appris de manière itérative, à partir de valeurs initiales et mis à jour à chaque instant

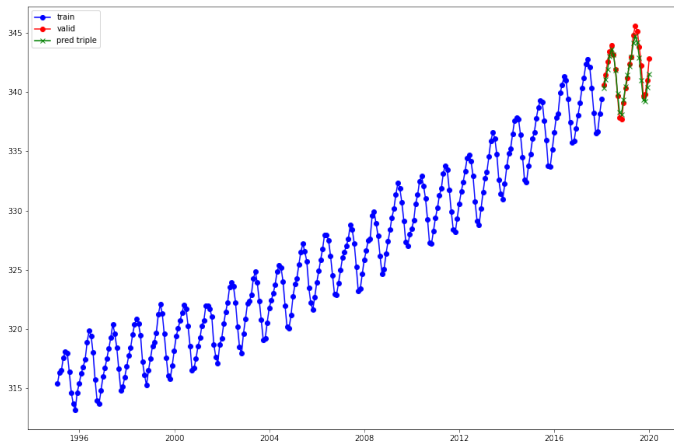
# Lissage exponentiel triple

Exemple :

# Lissage exponentiel



# Lissage exponentiel



- Séries avec une tendance mais sans saisonnalité Séries
- chronologiques avec une composante saisonnière
  - Contexte
  - Lissage exponentiel triple Modèles auto-régressifs pour
  - séries chronologiques saisonnières

# Modèles auto-régressifs pour séries chronologiques saisonnières

Vous pouvez utiliser les modèles AR précédents ou un nouveau :

- AR classique
- AR avec une composante de tendance AR
- saisonnière (avec tendance ou non)

# AR ou Triple ES pour les séries saisonnières en pratique