Linear Algebra

逆矩阵

(Yanfu-笔试)假设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$可逆，且$U, V \in \mathbb{R}^n$是列向量，给出$A + UV^\top$可逆的充分必要条件，并求其逆矩阵。

Solution.

Sherman–Morrison formula

给定上述条件，$A + UV^\top$可逆当且仅当$1 + V^\top A^{-1}U \neq 0$，并且

$$(A + UV^\top)^{-1} = A^{-1} + \frac{A^{-1}UV^\top A^{-1}}{1 + V^\top A^{-1}U}$$

Proof.

令$B = A + UV^\top$，设$B^{-1} = A^{-1} - X$

$$(A + UV^\top)(A^{-1} - X) = I$$
$$(A + UV^\top)X = I + UV^\top A^{-1} - I$$
$$A^{-1}(A + UV^\top)X = A^{-1}UV^\top A^{-1}$$

可以算出来X。

拓展. Woodbury matrix identity

矩阵$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$可逆，$C \in \mathbb{R}^{k\times k}, U \in \mathbb{R}^{n\times k}, V \in \mathbb{R}^{k\times n}$，那么

$$(A+UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

Proof.

$$\begin{bmatrix} A & U \\ V & -C^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Expanding, we can see that the above reduces to:

$$\begin{cases} AX + UY = I, \\ VX - C^{-1}Y = 0. \end{cases}$$

which is equivalent to:

$$(A+UCV)X = I.$$

Eliminating the first equation, we find that $X = A^{-1}(I - UY)$, which can be substituted into the second to find:

$$VA^{-1}(I - UY) = C^{-1}Y.$$

Expanding and rearranging, we have:

$$VA^{-1} = (C^{-1} + VA^{-1}U)Y,$$

or:

$$(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} = Y.$$

Finally, we substitute into our $AX + UY = I$, and we have:

$$(A + UCV)^{-1} = X = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}.$$

We have derived the Woodbury matrix identity.

特征值与特征向量

1.（安贤-笔试）A是方阵，对任意的n，$A^n = A$，A是否一定可对角化，求A的特征值。

Solution.

假设λ是A的特征值，那么

$$Av = \lambda v$$
$$A^n v = Av = \lambda v$$
$$A^n v = \lambda^n v$$

证明： $A^n v = \lambda^n v$

- $n = 1$的时候显然成立
- 假设$n = k$的时候成立，$A^k v = \lambda^k v$，那么$A^{k+1} v = A\lambda^k v = \lambda^k Av = \lambda^{k+1} v$.

综上，对任意n，

$$\lambda^n = \lambda \Rightarrow \lambda(\lambda^{n-1} - 1) = 0$$

解得$\lambda = 0, 1$。所以A的特征值为0和1。

从Jordan分解入手，任何方阵A都可以分解为

$$A = P^{-1}JP$$

其中J是Jordan块组成的块对角矩阵。

所以

$$A^n = P^{-1}J^nP = A = P^{-1}JP$$
$$J^n = J$$

对于任意大小大于1的Jordan块，$J^k \neq J(k \geq 2)$，所以J中只有大小为1的Jordan块，也就是J是对角矩阵，证明A可对角化。