Sonaj'in Zaman Yolculugu

Gökhan Atınç ve Aykut C. Satıcı

1 Sorunun Açıklaması

Dinwen kasabasinin 15 yasindaki dahi cocugu Sonaj, kendisini bulundugu andan 33 yil ileriye veya geriye aninda goturebilen bir zaman makinesi icat etmistir, fakat bu makinenin iki zaafi vardir: 1) bu makine her yolculuk icin, yarilanma omru tam 11 yil olan ve cok ender bulunabilen Secium 731 maddesinin 1 mg'ini kullanmaktadir ve 2) her yolculugun arasinda en az 11 yil beklemek gerekmektedir.

Elinde 21 mg Secium 731 bulunan Sonaj zamanda yolculuga cikmis, zamanda gorebilecegi en ileri tarihi gormus ve basladigi gune geri donebilmistir. Sonaj yolculuk suresince yeni Secium 731 bulmamistir. Zaman yolculuklari aninda gerceklestiginden, bu yolculuklar sirasinda Sonaj hic yaslanmamaktadir ve Secium 731 miktari, yolculuk icin gereken 1 mg disinda azalmamaktadir.

Sonaj'in geri dondugundeki yasina α, elinde kalan Secium 731'in mg cinsinden miktarina β, Sonaj'in zaman yolculugna basladigi gun ile bugune en uzak oldugu an arasindaki yil cinsinden farka da γ diyelim.

Buna gore $\alpha + \beta + \gamma$ kactir?

2 Sorunun Çözümü

Elbette bu sorunun cozumunu yapmak icin deneme yanilma ile ilerleyebiliriz. Bu dokumani yazmamdaki amacimiz, bu soruyu nasil bir karma tamsayi eniyileme sorusuna (mixed-integer optimization problem) donusturebilecegimizi ve bu tip eniyileme sorularini cozen programlari kullanarak nasil cevabi bulabilecegimizi aciklamaktir.

Sorunun cozumune baslamak icin once uc tane degisken tanimlayalim:

1. $\mathbb{N} \ni t_k$: Sonaj'in k^{inci} adimda icinde bulundugu zaman (yil ve tamsayi),
2. $\mathbb{N} \ni a_k$: Sonaj'in k^{inci} adimdaki yas (tamsayi),
3. $\mathbb{R} \ni s_k$: Sonaj'in k^{inci} adimda elinde bulunan kaynak (mg ve gercel sayi).

Bunlara ek olarak Sonaj k^{inci} adimda 3 secimle karsi karsiya kaliyor: (i) zamanda 33 yil ileri yolculuk etmek, (ii) 11 yil beklemek, (iii) zamanda 33 yil geri yolculuk etmek. Bu secimi gostermek icin de $\{u_{kj}\}_{j=1}^{3} \in \{0, 1\}$ simgesini kullanalim, oyle ki

$$\sum_{j=1}^{3} u_{kj} = 1, \tag{1}$$

olsun. Demek ki u_k Sonaj'in k^{inci} adimdaki kararini temsil eden bir 3-vektor. Her elemani ya sifir ya da bir olacak, ve yukaridaki toplami saglamak icinse tam olarak bir elemani bir olmak zorunda.

Bu vektoru de soyle kodlayalim: eger $u_{k1} = 1$ ise Sonaj 33 yil ileri, $u_{k3} = 1$ ise 33 yil geri yolculuk ediyor olsun. $u_{k2} = 1$ olursa da Sonaj 11 yil bekliyor olsun.

Diyelim ki birinci adimdan basliyoruz, yani $k = 1$'den basliyor. Bu noktada k ile dizinledigimiz adimlar sayisinin kaca kadar gideceginizi daha bilmiyoruz. Bu sayiya simdilik N diyelim. Fakat N hakkinda soyle bir bilgimiz var: Sonaj her zaman yolculugundan sonra 11 yil beklemek zorunda ve kaynak (Secium 731) her 11 yilda bir yarilaniyor. Zaman yolculugu yapmak icin de kaynaktan en az 1 birim bulunmasi gerekiyor. Hal boyleyken kac yarilanmadan sonra zaman yolculugu icin Sonaj'in elinde yeterince kaynak kalmaz? Hemen hesaplayalim:

$$\frac{s_1}{2^m} \leq 1 \Rightarrow m \leq \log_2(s_1).$$

Yani, Sonaj $t = 0$'a geri donmek istiyorsa en fazla $\log_2(s_1)$ yarilanmaya tahammul edebilir. Soruda bize, kaynagin baslama degeri $s_1 = 21$ olarak verilmis. Her yarilanma arasinda da bir yolculuk yapabilecegine gore, toplam adim sayisina su ust siniri dayatabiliriz:

$$N \leq 2\left(\lceil \log_2(s_1) \rceil\right) \approx 2\left(\lceil 4.39 \rceil\right) = 10.$$

Bundan sonra stratejimiz soyle olacak: N'i sifirdan baslatacagiz (hic adim atmama durumu) ve $N = 10$'a kadar ayni eniyileme sorusunu cozup, buldugumuz en iyi degeri dogru cevap olarak ilan edecegiz.

Son olarak iki tane daha eniyileme degiskenine ihtiyacimiz var. Bunlari $\mathbb{N} \ni T$ (tamsayi) ve $\{y_k \in \{0,1\} : k = \{1,\ldots,N\}\}$ olarak gosterecegiz. Bu degiskenleri tanitmamizin nedeni de "Sonaj'in zamanda gorebilecegi en ileri tarihi gormus" olmasini matematiksel olarak ifade etme istegimizdir. Simdi, bizim t vektorumuz her $k \in \underline{N} := \{1,\ldots,N\}$ icin Sonaj'in k^{inci} adimda icinde bulundugu yili temsil etmekte. Amacimiz bu vektorun en buyuk elemanini maksimize etmek. Bunu matematiksel eniyileme teorisini uygulamaya en elverisli sekilde ifade etmemiz lazim ki eniyileme programimiz soruyu cozebilsin. Bunu soyle elde ediyoruz. Oncelikle y vektorunun elemanlarinin toplamini 1 yapiyoruz ki sadece ve sadece bir elemani 1 degerini alsin, gerisi 0 olsun:

$$\sum_{k=1}^{N} y_k = 1. \tag{2}$$

Sonra, T degiskenini oyle sececegiz ki, eniyileme programi bu degeri t-vektorunun en buyuk elemanindan ufak yapmak isteyecek. Bunu da eniyileme literaturunde big-M yontemini (Griva, Nash, & Sofer, 2009; Wikipedia, 2021) kullanarak yapacagiz. Yontem buyuk ve sabit bir M degeri secerek basliyor. Bu deger her soruya gore degisik olacaktir. Biz bu problem icin $M = 100$ degerinin calistigini gozlemledik. Once bu yontemin bize verdigi kisita goz atalim, sonra neden bu kisitin calistigini anlatalim.

$$T - t_k \leq M\left(1 - y_k\right), \qquad k = 1,\ldots,N. \tag{3}$$

Elbette eniyileme amacimiz T'yi maksimize etmek olacak. Denklem (3)'deki kisit neden calisiyor? Hemen anlamaya calisalim. Oncelikle hatirlayalim ki y_j'lerden sadece biri 1 degerini, gerisi 0 degerini alacak. Diyelim ki $y_m = 1$ ve geri kalan $y_j = 0$ ve t vektorumuz oyle ki gercekten de $t_m \geq t_j$, $\forall j \neq m$. Tabi ki $1 \leq j, m \leq N$. Bu durumda yukaridaki kisitimiz soyle cozunuyor:

$$\begin{aligned} &T \leq t_m, \\ &T \leq t_j + M, \quad j \neq m. \end{aligned}$$

Gordugumuz gibi bu gercekten de istedigimiz davranis sekli. M buyuk bir sabit oldugu icin ikinci satirdaki esitsizlikler eniyileme sorumuzu kotu-tanimli yapmazken, birinci satirdaki esitsizlik eniyileme programinin T'nin seciminde T'yi t_m'ye kadar yukseltme olanagi sunuyor.

Peki ya $y_m = 1$ degil de $y_n = 1$ ve $n \neq m$, yani $t_n \leq t_m$ olsaydi ne olacakti? O zaman hala bu insa bize istedegimizi verecek miydi? Hemen analiz edelim. Bu durumda (3)'deki kisitlar su sekilde cozunuyor:

$$\begin{aligned} T &\leq t_n, \\ T &\leq t_j + M, \quad j \neq n. \end{aligned}$$

Hal boyle olunca, eniyileme programi T degerini maksimize ederken en fazla t_n'nin degerine kadar cikarabilir. Oysa t_m'nin degeri t_n'den daha buyuk! Korkmamiza gerek yok, cunku y vektoru eniyileme programinin kontrolu altinda. Bu durumda $y_n = 1$ degil de $y_m = 1$ secimini yaptiginda daha iyi sonuc elde edecegini eniyileme programinin bulgulayicisi (heuristic) hesaplayacaktir. Bunun icin elimizde iyi teorik yontemler var Griva et al. (2009).

Soruyu eniyileme programina devretmeden once birkac kisit daha koymamiz gerekiyor cunku u_{kj}'in degerine gore a_{k+1}, s_{k+1}, ve t_{k+1}'in alacagi degerler uzerinde bazi kisitlar var ve onlari daha modellemedik. Sonaj'in yasini simgeleyen a ile baslayalim. O zaman,

$$a_{k+1} = \begin{cases} a_k + 11 & \text{eger } u_{k2} = 1, \\ a_k & \text{eger } u_{k1} + u_{k3} = 1. \end{cases}$$

Tabi bu denklemi bu sekilde eniyileme programina sunamayiz. Kosullu aciklamalari matematiksel olarak programa anlatmamiz gerekmekte. Bunu da yine "big-M" yontemini kullanarak elde edebiliriz. Her $k \in \underline{N}$ icin su kisitlari dayatalim:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\leq a_k + 11 + M\left(1 - u_{k2}\right), \\ a_{k+1} &\geq a_k + 11 - M\left(1 - u_{k2}\right), \\ a_{k+1} &\leq a_k + M\left(1 - u_{k1} - u_{k3}\right), \\ a_{k+1} &\geq a_k - M\left(1 - u_{k1} - u_{k3}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Bu kisitlarin ustunde biraz dusunursek neden calistiklarini anlayacagiz. Oncelikle k^{inci} adimda Sonaj'in 11 yil bekleme karari aldigini dusunelim. Yani $u_{k2} = 1$ olsun. Bu durumda ilk iki esitsizlik bir araya gelip bize istedigimiz $a_{k+1} = a_k + 11$ denklemini veriyor. Ucuncu ve dorduncu esitsizlikler ise asagidakini donusuyor:

$$a_k - M \leq a_{k+1} \leq a_k + M,$$

Gordugumuz gibi M buyuk bir sayi oldugu icin bu esitsizlikler herhangi bir tutarsizliga neden olmuyor. Simdi diger durumu dusunelim, yani $u_{k1} = 1$ olsun. Bu durumda ucuncu ve dorduncu denklem bize $a_{k+1} = a_k$ verirken, ilk iki denklem de yine M'nin buyuk degerinden dolayi tutarsizlik yaratmiyor:

$$a_k + 11 - M \leq a_{k+1} \geq a_k + 11 + M.$$

Yorum 1 *Dikkatli olalim, eger M'yi 11 degerinden kucuk secseydik, eniyileme programi $a_{k+1} = a_k$'yi gecerli sayamazdi ve dolayisiyla elimizdeki soruyu duzgun ifade etmemis olurduk.*

Artik "big-M" yontemini kullanmayi ogrendik. Her $k \in \underline{N}$ icin s_{k+1} uzerindeki kisitlari da bu yontemi kullanarak yazalim.

$$\begin{aligned} s_{k+1} &\leq {}^{s_k}\!/2 + M\left(1 - u_{k2}\right), \\ s_{k+1} &\geq {}^{s_k}\!/2 - M\left(1 - u_{k2}\right), \\ s_{k+1} &\leq s_k + 1 + M\left(1 - u_{k1} - u_{k3}\right), \\ s_{k+1} &\geq s_k + 1 - M\left(1 - u_{k1} - u_{k3}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Ayni sekilde, t_{k+1} uzerindeki kisitlari da su sekilde ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} t_{k+1} &\leq t_k + 33 + M\left(1 - u_{k1}\right), \\ t_{k+1} &\geq t_k + 33 - M\left(1 - u_{k1}\right), \\ t_{k+1} &\leq t_k + 11 + M\left(1 - u_{k2}\right), \\ t_{k+1} &\geq t_k + 11 - M\left(1 - u_{k2}\right), \\ t_{k+1} &\leq t_k - 33 + M\left(1 - u_{k3}\right), \\ t_{k+1} &\geq t_k - 33 - M\left(1 - u_{k3}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Simdiye kadarki butun argumanlarimizi bir araya getirince ve soruda verilen sinir sartlarini da sorumuza ekleyince, eniyileme programimizi sonunda tam olarak yazabiliriz. Hatirlayalim ki, N'yi 1'den baslatip 10 degerine kadar bu eniyileme programimizi tekrar cozecegiz.

$$\begin{aligned} \underset{a,\,s,\,t,\,u,\,y,\,T}{\text{maximize}} \quad & T, \\ \text{subject to} \quad & (1) - (6), \\ & t_1 = t_{N+1} = 0, \\ & a_1 = 15, \\ & s_1 = 21. \end{aligned} \tag{7}$$

3 Sayısal Çözüm

Bolum 2'de acikladigimiz yontemi uygulamak icin Julia (Bezanson, Edelman, Karpinski, & Shah, 2017) programlama dilinde yazilmis olan JuMP (Dunning, Huchette, & Lubin, 2017) paketini ve Mosek (ApS, 2019) cozumleyicisini kullandik.

Table 1: Eniyileme sonuclari

N	0	$1-3$	4	5	6	$7-10$
T	0	Olursuz	33	Olursuz	55	Olursuz
$\alpha+\beta+\gamma$	36	Olursuz	82.625	Olursuz	104	Olursuz

Sonaj'in zamanda gorebilecegi en ileri tarih, yani eniyileme programimizin T olarak hesapladigi deger $N = 6$ icin elde edilmis. Bu durumda bize sorunun sordugu niceligin degeri de

$$\alpha + \beta + \gamma = 104$$

olarak bulunmus. Merakimizi gidermek icin $N = 6$ icin Sonaj'in izledigi yorungeyi de asagida kaydedelim:

Table 2: Sonaj'in en iyi yorungesi

k	Yas	Secium miktari	Zaman (Yil)
1	15	21	0
2	15	20	33
3	26	10	44
4	37	5	55
5	37	4	22
6	48	2	33
7	48	1	0

Referanslar

ApS, M. (2019). The mosek optimization toolbox. version 9.2. [Computer software manual]. Retrieved from https://www.mosek.com/documentation/

Bezanson, J., Edelman, A., Karpinski, S., & Shah, V. B. (2017). Julia: A fresh approach to numerical computing. *SIAM review*, *59*(1), 65–98. Retrieved from https://doi.org/10.1137/141000671

Dunning, I., Huchette, J., & Lubin, M. (2017). Jump: A modeling language for mathematical optimization. *SIAM Review*, *59*(2), 295-320.

Griva, I., Nash, S., & Sofer, A. (2009). *Linear and nonlinear optimization: Second edition*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Wikipedia. (2021). *Big M method — Wikipedia, the free encyclopedia.* http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Big%20M%20method&oldid=1011998353. ([Online; accessed 22-July-2021])