İlginç Bir Olasılık Sorusu

Gökhan Atınç[†] and Aykut C. Satıcı[‡]

1. Problemin Açıklaması

5×5 bir satranç tahtası üstündeki karelerin yatayda A, B, C, D, E, dikeyde ise 1, 2, 3, 4, 5 şeklinde kodlandığını ve C3 karesinde uzaktan kumandalı bir robotunuz olduğunu varsayalım. Robotun kumandasının robotu yukarı, aşağı, sola veya sağa 1 kare hareket ettirecek şekilde 4 tuşlu olarak tasarlandığını, fakat haylaz kardeşinizin kumandanın tuşlarının yerlerini değiştirdiğini düşünelim. Tuşları bir kere karıştırılıp sabitlenen kumanda ile robotunuzu E5 noktasındaki kareye götürmek için basmanız gereken minimum tuş sayısının beklenen değeri kaçtır?

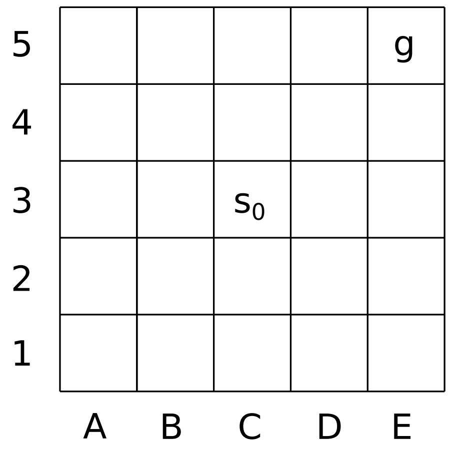

Figure 1.: Problemin şematiği

2. Problemin Çözümü

Bu problemi anlayabilmek icin olasılık teorisinden bir teoremi ödünç alacağız. Bu teorem literatürde toplam beklenen değer kuralı ya da olasılık teorisinin kule kuralı olarak geçer Bertsekas and Tsitsiklis (2002). Bu kural şunu söylemektedir.

Teorem 2.1. X bir rastgele değişken ve $\{A_i\}_i^m$ örneklem uzayının sonlu bir bölümlemesi olsun. O zaman,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i^m \mathbb{E}\left[X \mid A_i\right] \mathbb{P}(A_i).$$

Bu teoremde $\mathbb{E}$ beklenen değeri, $\mathbb{P}$ olasılık fonksiyonunu, örneklem uzayı terimi ise seçimlerin yapıldığı kümeyi temsil etmektedir. A_i olayının doğruluğu verilmişse X'in beklenen değerini temsil etmek için $\mathbb{E}\left[X \mid A_i\right]$ terimini kullanıyoruz.

Biz problemimizde k'inci adımda bulunduğumuz kareyi s_k, gitmek istediğimiz kareyi de g olarak adlandıralım. Rastgele değişken olarak da şu fonksiyon ailesini alalım.

$$C_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k, \qquad r_k = \begin{cases} 1 & \text{eğer } s_k \neq g \\ 0 & \text{eğer } s_k = g \end{cases}. \tag{1}$$

Bu denklemdeki toplamın iyi tanımlı olduğuna kendimizi inandırmak için bir kere g karesine geldikten sonra bütün r_k'lerin sıfır değerini aldığını gözlemlememiz yeterli olacaktır. Bu durumda değerini bulmak istediğimiz nicelik $\mathbb{E}[C_0]$ olmaktadır. (1) denkleminden çıkarılacak şu sonucu aşağıda çokça kullanacağız.

$$C_m = \sum_{i=m+1}^{n} r_i + C_n, \qquad m \leq n.$$

Dolayısıyla, beklenen değerin özelliklerini kullanarak şu sonuca varabiliriz.

$$\mathbb{E}[C_m] = \sum_{i=m+1}^{n} \mathbb{E}[r_i] + \mathbb{E}[C_n] = n - m + \mathbb{E}[C_n], \qquad m < i < n, \;\; s_i \neq g.$$

Kule kuralını 2.1 kullanarak hesaplamaya başlayalım.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C_0] = \mathbb{E}\left[C_0 \mid s_1 \in \{C4, D3\}\right] & \underbrace{\mathbb{P}(s_1 \in \{C4, D3\})}_{=\frac{1}{2}} + \\ \mathbb{E}\left[C_0 \mid s_1 \in \{B3, C2\}\right] & \underbrace{\mathbb{P}(s_1 \in \{B3, C2\})}_{=\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Şimdi, ilk durumda $s_1 = C4$ olduğunu, ikinci durumda da $s_1 = C2$ olduğunu düşünelim. Problemdeki simetri sayesinde $s_1 = D3$ durumunun $s_1 = C4$ durumu ile $s_1 = B3$ durumunun ise $s_1 = C2$ durumu ile aynı sonucu vereceği barizdir. Kule kuralını kullanarak hesaplamalarımıza devam edelim. Önce (2) denkleminin sağ tarafındaki ilk beklenen değer terimini ele alacağız.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[C_0 \mid s_1 = C4\right] = & \underbrace{r_1 + r_2}_{=2} \\ & + \underbrace{\mathbb{E}[C_2 \mid s_1 = C4, s_3 = D5]}_{=2} \underbrace{\mathbb{P}(s_3 = D5 \mid s_1 = C4)}_{=\frac{1}{3}} \\ & + \mathbb{E}[C_2 \mid s_1 = s_3 = C4] \underbrace{\mathbb{P}(s_3 = C4 \mid s_1 = C4)}_{=\frac{1}{3}} \\ & + \mathbb{E}[C_2 \mid s_1 = C4, s_3 = B5] \underbrace{\mathbb{P}(s_3 = B5 \mid s_1 = C4)}_{=\frac{1}{3}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Bu denklemi yazarken şu gözlemlerde bulunduk. Eğer $s_1 = C4$ ise, o zaman amacımıza giden yolda iyi bir hamle yapmış bulunuyoruz. Dolayısıyla, bu hamleyi bir kere daha tekrarlıyoruz ve kendimizi $s_2 = C5$ karesinde buluyoruz. Bu hamleleri yaparken 2 tuşa basmamız gerekti; dolayısıyla $r_1 + r_2 = 2$.

Şimdi, (3)'üncü denklemin sağ tarafındaki beklenen değerleri inceleyelim. İlk beklenen değerin 2 olduğunu zaten denklemin üzerinde belirttik. Bunun nedeni, eğer üçüncü hamlede kendimizi $s_3 = D5$ karesinde buluyorsak, demek ki yukarı ve sağa giden tuşları biliyoruz. Sağa gitmeye devam ederek amacımıza ulaşabiliriz. Sağa gitmek için de 2 kere daha bu tuşa basmamız gerekir. Geri kalan iki beklenen değeri bulmak icin kule kuralını bir kere daha göreve çağıracağız.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_2 \mid s_1 = s_3 = C4] = &\underbrace{r_3 + r_4}_{=2} \\ &+ \underbrace{\mathbb{E}[C_4 \mid s_1 = s_3 = C4, s_5 = D5]}_{=2}\underbrace{\mathbb{P}(s_5 = D5 \mid s_1 = s_3 = C4)}_{=\frac{1}{2}} \\ &+ \underbrace{\mathbb{E}[C_4 \mid s_1 = s_3 = C4, s_5 = B5]}_{=4}\underbrace{\mathbb{P}(s_5 = B5 \mid s_1 = s_3 = C4)}_{=\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{4}$$

Buradaki hesaplamamızı yaparken şu durumları göz önüne aldık. Eğer 3'üncü hamlede kendimizi $s_3 = C4$ karesinde buluyorsak yukarı ve aşağı nasıl gidildiğini biliyoruz demektir. Önce yukarı giderek hatamızı düzeltiyoruz: $r_3 + r_4 = 2$. Bir sonraki hamlede sağa veya sola gitmemizi sağlayacak herhangi bir tuşa basıyoruz. Eğer sağa gidersek, mükemmel, çünkü amacımıza yaklaştık. Bu durumda sağa gitmeye devam edip sadece 2 tuşa daha basarak amacımıza ulaşırız. Diğer durumda amacımızdan uzaklaşıyoruz, ama artık bütün tuşların nasıl çalıştığını biliyoruz. Yine sağa giderek amacımıza 4 hamlede ulaşabiliriz.
(3)'ün sağ tarafında hesaplamadığımız bir beklenen değer kaldı:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[C_2 \mid s_1 = C4, s_3 = B5] = \\ &\qquad \underbrace{\mathbb{E}[C_2 \mid s_1 = C4, s_3 = B5, s_4 = C5]}_{=4}\underbrace{\mathbb{P}(s_4 = C5 \mid s_1 = C4, s_3 = B5)}_{=\frac{1}{2}} \\ &\qquad + \underbrace{\mathbb{E}[C_2 \mid s_1 = C4, s_3 = B5, s_4 = B4]}_{=6}\underbrace{\mathbb{P}(s_4 = B4 \mid s_1 = C4, s_3 = B5)}_{=\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{5}$$

Bu hesaplamayı yaparkenki gözlemlerimiz yukarıdakilerle aşağı yukarı aynı. 3'üncü hamlede kendimizi $s_3 = B5$ karesinde buluyorsak, demek ki yukarı ve sola götüren tuşları biliyoruz. Geri kalan tuşlardan birine bastığımızda ya sağa gideceğiz (iyi bir durum) ya da aşağı gideceğiz (kötü bir durum). Sağa gittiğimizde beklenen değerimiz 4, çünkü sola ve sağa giderken 2 hamle yaptık. Bundan sonra amacımıza ulaşmak icin 2 hamle daha yapmamız gerekiyor. Diğer durumda ise beklenen değerimiz 6; çünkü artık tuşları nasıl kullanacağımızı biliyoruz ama amacımızdan 4 hamle uzaktayız: $2 + 4 = 6$.

Şimdi bütün bu hesaplamalarımızı (2)'inci denkleme yerleştirdiğimizde denklemin sağ tarafındaki ilk terimi bulabiliriz.

$$\mathbb{E}[C_0 \mid s_1 = C4]\mathbb{P}(s_1 = C4) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3. \tag{6}$$

Benzer hesaplamaları yaparak (2)'inci denklemin sağ tarafındaki ikinci beklenen değeri hesaplayalım. Bu sefer hesaplamaların doğruluklarını okurun kendisine inandırmasını bekliyoruz.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[C_0 \mid s_1 = C2\right] = &\underbrace{\mathbb{E}[C_0 \mid s_1 = C2, s_2 = B2]}_{=8}\underbrace{\mathbb{P}(s_2 = B2 \mid s_1 = C2)}_{=\frac{1}{3}} \\ &+ \mathbb{E}[C_0 \mid s_1 = C2, s_2 = C3]\underbrace{\mathbb{P}(s_2 = C3 \mid s_1 = C2)}_{=\frac{1}{3}} \\ &+ \mathbb{E}[C_0 \mid s_1 = C2, s_2 = D2]\underbrace{\mathbb{P}(s_2 = D2 \mid s_1 = C2)}_{=\frac{1}{3}}.\end{aligned} \tag{7}$$

Bir kere daha kule kuralını kullanarak geri kalan iki beklenen değeri hesaplıyoruz.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_0 \mid s_1 = C2,\, s_2 = C3] = &\underbrace{\sum_{i=1}^{4} r_i}_{=4} \\ &+ \underbrace{\mathbb{E}[C_4 \mid s_1 = C2, s_2 = C3, s_5 = D5]}_{=2}\underbrace{\mathbb{P}(s_5 = D5 \mid s_1 = C2, s_2 = C3)}_{=\frac{1}{2}} \\ &+ \underbrace{\mathbb{E}[C_4 \mid s_1 = C2, s_2 = C3, s_5 = B5]}_{=4}\underbrace{\mathbb{P}(s_5 = B5 \mid s_1 = C2, s_2 = C3)}_{=\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{8}$$

Son olarak

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_0 \mid s_1 = C2,\, s_2 = D2] = &\underbrace{\sum_{i=1}^{3} r_i}_{=3} \\ &+ \underbrace{\mathbb{E}[C_3 \mid s_1 = C2, s_2 = D2, s_4 = E3]}_{=3}\underbrace{\mathbb{P}(s_4 = E3 \mid s_1 = C2, s_2 = D2)}_{=\frac{1}{2}} \\ &+ \underbrace{\mathbb{E}[C_3 \mid s_1 = C2, s_2 = s_4 = D2]}_{=5}\underbrace{\mathbb{P}(s_4 = D2 \mid s_1 = C2, s_2 = D2)}_{=\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{9}$$

Bu hesaplamaları kullanarak (2)'inci denklemin sağ tarafındaki ikinci terimi hesaplayabiliriz.

$$\mathbb{E}[C_0 \mid s_1 = C2]\mathbb{P}(s_1 = C2) = \frac{22}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{3}. \tag{10}$$

Artık aradığımız her şeyi bulduk. (2)'inci denkleme geri dönelim:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{E}[C_0] = &\underbrace{\mathbb{E}\left[C_0 \mid s_1 \in \{C4, D3\}\right]}_{=6}\underbrace{\mathbb{P}(s_1 \in \{C4, D3\})}_{=\frac{1}{2}} \\ &+ \underbrace{\mathbb{E}\left[C_0 \mid s_1 \in \{B3, C2\}\right]}_{=\frac{22}{3}}\underbrace{\mathbb{P}(s_1 \in \{B3, C2\})}_{=\frac{1}{2}} = \frac{20}{3} = 6.\bar{6}.\end{aligned}} \tag{11}$$

References

Bertsekas, D. P., & Tsitsiklis, J. N. (2002). *Introduction to probability* (Vol. 1). Athena Scientific Belmont, MA.