İlginç Bir Olasılık Sorusu

Gökhan Atınç ve Aykut C. Satıcı

1 Problemin Açıklaması

5×5 bir satranç tahtası üstündeki karelerin yatayda A, B, C, D, E, dikeyde ise 1, 2, 3, 4, 5 şeklinde kodlandığını ve C3 karesinde uzaktan kumandalı bir robotunuz olduğunu varsayalım. Robotun kumandasının robotu yukarı, aşağı, sola veya sağa 1 kare hareket ettirecek şekilde 4 tuşlu olarak tasarlandığını, fakat haylaz kardeşinizin kumandanın tuşlarının yerlerini değiştirdiğini düşünelim. Tuşları bir kere karıştırılıp sabitlenen kumanda ile robotunuzu E5 noktasındaki kareye götürmek için basmanız gereken minimum tuş sayısının beklenen değeri kaçtır?

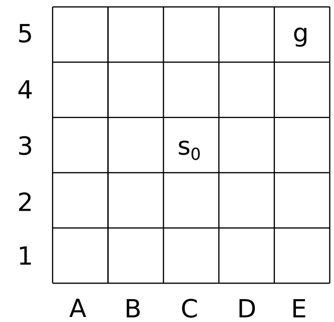

Figure 1: Problemin şematiği

2 Problemin Çözümü

Başlangıç olarak problemin çözümünde bize yardımcı olacak bir teoremi olasılık teorisinden ödünç alalım. Bu teorem literatürde toplam beklenen değer kuralı ya da olasılık teorisinin kule kuralı olarak geçer Bertsekas and Tsitsiklis (2002).

Teorem 2.1 (Kule kuralı) *X bir rastgele değişken ve $\{A_i\}_i^m$ örneklem uzayının sonlu bir bölümlemesi olsun. O zaman,*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i}^{m} \mathbb{E}\left[X \mid A_i\right] \mathbb{P}(A_i).$$

Bu teoremde $\mathbb{E}$ beklenen değeri, $\mathbb{P}$ olasılık fonksiyonunu, örneklem uzayı terimi ise seçimlerin yapıldığı kümeyi temsil etmektedir. A_i olayının doğruluğu bilindiği takdirde X'in beklenen değerine *koşullu beklenen değer* denir ve $\mathbb{E}\left[X \mid A_i\right]$ sembolü ile temsil edilir.

Biz problemimizde k'inci adımda bulunduğumuz kareyi s_k, gitmek istediğimiz kareyi de g olarak adlandıralım. Rastgele değişken olarak da şu fonksiyon ailesini alalım.

$$C_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k, \qquad r_k = \begin{cases} 1 & \text{eğer } s_k \neq g \\ 0 & \text{eğer } s_k = g \end{cases}. \tag{1}$$

Bu denklemdeki toplamın iyi tanımlı olduğuna kendimizi inandırmak için g karesine geldikten sonra bütün r_k'lerin sıfır değerini aldığını gözlemlememiz yeterli olacaktır. Bize sorulan $\mathbb{E}[C_0]$ niceliğinin kaç olduğudur. (1) denkleminden çıkarılacak şu sonucu aşağıda çokça kullanacağız.

$$C_m = \sum_{i=m+1}^{n} r_i + C_n, \qquad m \leq n.$$

Beklenen değerin özelliklerini kullanarak aşağıdaki sonuca varabiliriz.

$$\mathbb{E}[C_m] = \sum_{i=m+1}^{n} \mathbb{E}[r_i] + \mathbb{E}[C_n] = n - m + \mathbb{E}[C_n], \qquad m < i < n, \;\; s_i \neq g.$$

Yukarıdaki özdeşliklerin benzerleri elbette koşullu beklenen değerler için de geçerlidir. Kule kuralını 2.1 kullanarak hesaplamaya başlayalım.

$$\mathbb{E}[C_0] = \mathbb{E}\left[C_0 \mid s_1 \in \{C4, D3\}\right] \underbrace{\mathbb{P}(s_1 \in \{C4, D3\})}_{=\frac{1}{2}} + \mathbb{E}\left[C_0 \mid s_1 \in \{B3, C2\}\right] \underbrace{\mathbb{P}(s_1 \in \{B3, C2\})}_{=\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Şimdi, ilk durumda $s_1 = C4$ olduğunu, ikinci durumda da $s_1 = C2$ olduğunu var sayacağız. Problemdeki simetri sayesinde $s_1 = D3$ durumunun $s_1 = C4$ durumu ile $s_1 = B3$ durumunun ise $s_1 = C2$ durumu ile aynı sonucu vereceği barizdir.

$\mathbb{E}\left[C_0 \mid s_1 = C4\right]$ **teriminin hesaplanması.** Önce (2)'inci denklemin sağ tarafındaki ilk beklenen değer terimini ele alacağız. Kule kuralını kullanarak hesaplamalarımıza devam edelim.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[C_0 \mid s_1 = C4\right] = \overbrace{r_1 + r_2}^{=2} &+ \overbrace{\mathbb{E}[C_2 \mid s_1 = C4, s_3 = D5]}^{=2} \overbrace{\mathbb{P}(s_3 = D5 \mid s_1 = C4)}^{=\frac{1}{3}} \\ &+ \mathbb{E}[C_2 \mid s_1 = s_3 = C4] \underbrace{\mathbb{P}(s_3 = C4 \mid s_1 = C4)}_{=\frac{1}{3}} \\ &+ \mathbb{E}[C_2 \mid s_1 = C4, s_3 = B5] \underbrace{\mathbb{P}(s_3 = B5 \mid s_1 = C4)}_{=\frac{1}{3}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Bu denklemi yazarken şu gözlemlerde bulunduk. Eğer $s_1 = C4$ ise, o zaman amacımıza giden yolda iyi bir hamle yapmış bulunuyoruz. Dolayısıyla, bu hamleyi bir kere daha tekrarlıyoruz ve kendimizi $s_2 = C5$ karesinde buluyoruz. Bu hamleleri yaparken 2 tuşa basmamız gerekti: $r_1 + r_2 = 2$.

Şimdi, (3)'üncü denklemin sağ tarafındaki beklenen değerleri inceleyelim. İlk beklenen değerin 2 olduğunu zaten denklemin üzerinde belirttik. Bunun nedeni, eğer üçüncü hamlede kendimizi $s_3 = D5$ karesinde buluyorsak, demek ki yukarı ve sağa giden tuşları biliyoruz. Sağa gitmeye devam ederek amacımıza ulaşabiliriz. Sağa gitmek için de 2'inci hamleden itibaren 2 kere daha bu tuşa basmamız gerekir. Geri kalan iki beklenen değeri bulmak icin kule kuralını bir kere daha göreve çağıracağız.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C_2 \mid s_1 = s_3 = C4] = \underbrace{r_3 + r_4}_{=2} &+ \underbrace{\mathbb{E}[C_4 \mid s_1 = s_3 = C4, s_5 = D5]}_{=2} \underbrace{\mathbb{P}(s_5 = D5 \mid s_1 = s_3 = C4)}_{=\frac{1}{2}} \\ &+ \underbrace{\mathbb{E}[C_4 \mid s_1 = s_3 = C4, s_5 = B5]}_{=4} \underbrace{\mathbb{P}(s_5 = B5 \mid s_1 = s_3 = C4)}_{=\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Buradaki hesaplamamızı yaparken şu durumları göz önüne aldık. Eğer 3'üncü hamlede kendimizi $s_3 = C4$ karesinde buluyorsak yukarı ve aşağı nasıl gidildiğini biliyoruz demektir. Önce yukarı giderek hatamızı düzeltiyoruz: $r_3 + r_4 = 2$. Bir sonraki hamlede sağa veya sola gitmemizi sağlayacak herhangi bir tuşa basıyoruz. Eğer sağa gidersek, mükemmel, çünkü amacımıza yaklaştık. Bu durumda sağa gitmeye devam ederek 4'üncü hamleden sonra sadece 2 tuşa daha basarak amacımıza ulaşırız. Diğer durumda amacımızdan uzaklaşıyoruz, ama artık bütün tuşların nasıl çalıştığını biliyoruz. Yine sağa giderek 4'üncü hamleden sonra amacımıza 4 hamlede ulaşabiliriz.

(3)'ün sağ tarafında hesaplamadığımız bir beklenen değer kaldı:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_2 \mid \; s_1 = C4, s_3 = B5] = &\underbrace{\mathbb{E}[C_2 \mid s_1 = C4, s_3 = B5, s_4 = C5]}_{=4}\underbrace{\mathbb{P}(s_4 = C5 \mid s_1 = C4, s_3 = B5)}_{=\frac{1}{2}} \\ &+ \underbrace{\mathbb{E}[C_2 \mid s_1 = C4, s_3 = B5, s_4 = B4]}_{=6}\underbrace{\mathbb{P}(s_4 = B4 \mid s_1 = C4, s_3 = B5)}_{=\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Bu hesaplamayı yaparkenki gözlemlerimiz yukarıdakilerle takriben aynı. 3'üncü hamlede kendimizi $s_3 = B5$ karesinde buluyorsak, demek ki yukarı ve sola götüren tuşları biliyoruz. Geri kalan tuşlardan birine bastığımızda ya sağa gideceğiz (iyi bir durum) ya da aşağı gideceğiz (kötü bir durum). Sağa gittiğimizde 2'inci hamleden sonra beklenen değerimiz 4, çünkü sola ve sağa giderken 2 hamle yaptık. Bundan sonra amacımıza ulaşmak icin 2 hamle daha yapmamız gerekiyor. Diğer durumda ise 2'inci hamleden sonra beklenen değerimiz 6; çünkü artık tuşları nasıl kullanacağımızı biliyoruz ama amacımızdan 4 hamle uzaktayız: $2 + 4 = 6$.

Yukarıdaki hesaplar (2)'inci denklemin sağ tarafındaki ilk beklenen değeri (3)'üncü denklemi kullanarak bulmamızı sağlıyor: $\boxed{\mathbb{E}[C_0 \mid s_1 = C4] = 6}$.

$\mathbb{E}\left[C_0 \mid s_1 = C2\right]$ **teriminin hesaplanması.** Benzer şekilde (2)'inci denklemin sağ tarafındaki ikinci beklenen değeri hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[C_0 \mid s_1 = C2\right] = &\underbrace{\mathbb{E}[C_0 \mid s_1 = C2, s_2 = B2]}_{=8}\underbrace{\mathbb{P}(s_2 = B2 \mid s_1 = C2)}_{=\frac{1}{3}} \\ &+ \mathbb{E}[C_0 \mid s_1 = C2, s_2 = C3]\underbrace{\mathbb{P}(s_2 = C3 \mid s_1 = C2)}_{=\frac{1}{3}} \\ &+ \mathbb{E}[C_0 \mid s_1 = C2, s_2 = D2]\underbrace{\mathbb{P}(s_2 = D2 \mid s_1 = C2)}_{=\frac{1}{3}}.\end{aligned} \tag{4}$$

(4)'üncü denklemin sağ tarafında 8 olarak belirlenen ilk beklenen değeri inceleyerek başlayalım. Eğer ilk iki adımda $C2$ ve $B2$ karelerini ziyaret etmişsek, aşağı ve sola nasıl gidileceğini biliyoruz demektir. Kalan iki tuştan herhangi birine basarak $B5$ ya da $E2$'den birine ulaşıp, sonrasında kullanmadığımız son tuş ile amacımıza ulaşırırız. Bu 2'inci hamleden sonra 6 hamle daha alacaktır.

Bir kere daha kule kuralını kullanarak geri kalan iki beklenen değeri hesaplıyoruz.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_0 \mid s_1 = C2, s_2 = C3] = &\overbrace{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}^{=4} \\ &+ \underbrace{\mathbb{E}[C_4 \mid s_1 = C2, s_2 = C3, s_5 = D5]}_{=2}\underbrace{\mathbb{P}(s_5 = D5 \mid s_1 = C2, s_2 = C3)}_{=\frac{1}{2}} \\ &+ \underbrace{\mathbb{E}[C_4 \mid s_1 = C2, s_2 = C3, s_5 = B5]}_{=4}\underbrace{\mathbb{P}(s_5 = B5 \mid s_1 = C2, s_2 = C3)}_{=\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Burada aşağı ve yukarı giden tuşları keşfetmiş bulunuyoruz. Bu tuşları kullanarak $C5$ karesine ulaşabiliriz. Bu noktada rastgele bir tuş seçtiğimizde ya sağa ya da sola gideceğiz. Sağa gidersek bu davranışı tekrarlayarak amacımıza ulaşırken, sola gidersek daha kullanmadığımız kalan tuşa basarak amacımıza ulaşırız. İlk durumda 4'üncü adımdan sonra 2 hamle daha yapmamız gerekirken, ikinci durumda 4 hamle daha yapmamız gerekiyor.

(4)'ün sağ tarafında hesaplamadığımız bir beklenen değer kaldı:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_0 \mid s_1 = C2, s_2 = D2] = &\overbrace{r_1 + r_2 + r_3}^{=3} \\ &+ \underbrace{\mathbb{E}[C_3 \mid s_1 = C2, s_2 = D2, s_4 = E3]}_{=3}\underbrace{\mathbb{P}(s_4 = E3 \mid s_1 = C2, s_2 = D2)}_{=\frac{1}{2}} \\ &+ \underbrace{\mathbb{E}[C_3 \mid s_1 = C2, s_2 = s_4 = D2]}_{=5}\underbrace{\mathbb{P}(s_4 = D2 \mid s_1 = C2, s_2 = D2)}_{=\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Bu sefer aşağı ve sağa giden tuşları keşfetmiş durumdayız. Sağa bir kere daha giderek amacımıza yaklaşabiliriz ve bu noktada 3 hamle yapmış oluruz. Bir sonraki hamlede kalan tuşlardan birini kullanarak ya $E3$'e ya da $D2$'ye gideceğiz. $E3$'e gidersek, bu tuşu kullanmaya devam ederek amacımıza ulaşırız. Bu durumda 3'üncü hamleden sonra 3 hamle yapmış oluyoruz. Eğer kendimizi $D2$'de bulursak, artık bütün tuşların nasıl çalıştığını biliyoruz ve amacımızdan 4 kare uzaktayız; yani 3'üncü hamleden sonra 5 hamleye daha yapmaya ihtiyacımız var.

Artık (2)'inci denklemin sağ tarafındaki ikinci beklenen değeri hesaplamak için (4)'ü kullabiliriz: $\boxed{\mathbb{E}[C_0 \mid s_1 = C2] = \frac{22}{3}}$. Aradığımız her niceliği hesapladık. (2)'inci denkleme geri dönelim:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{E}[C_0] = &\underbrace{\mathbb{E}\left[C_0 \mid s_1 \in \{C4, D3\}\right]}_{=6}\underbrace{\mathbb{P}(s_1 \in \{C4, D3\})}_{=\frac{1}{2}} \\ &+ \underbrace{\mathbb{E}\left[C_0 \mid s_1 \in \{B3, C2\}\right]}_{=\frac{22}{3}}\underbrace{\mathbb{P}(s_1 \in \{B3, C2\})}_{=\frac{1}{2}} = \frac{20}{3} = 6.\bar{6}.\end{aligned}} \tag{5}$$

Referanslar

Bertsekas, D. P., & Tsitsiklis, J. N. (2002). *Introduction to probability* (Vol. 1). Athena Scientific Belmont, MA.