esprit Se former autrement	**EXAMEN** Semestre : 1 ■ 2 ☐ Session : Principale ■ Rattrapage ☐

Module : techniques d'estimation pour l'ingénieur
Enseignant(s) : U.P techniques d'estimation pour l'ingénieur
Classe(s) : 3A/3B
Documents autorisés : OUI ☐ NON ■ Nombre de pages :
Calculatrice autorisée : OUI ■ NON ☐ Internet autorisée : OUI ☐ NON ■
Date : 12/11/2019 Heure : 11h Durée : 1heure

Exercice 1 *(Questions de cours)*

Les quatre questions de cet exercices sont indépendantes :

1. Soit
$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$
   (a) vérifier que f définit une densité de probabilité.
   (b) Soit T une variable aléatoire de densité de f. Calculer $\mathrm{E}(T)$ et $\mathrm{V}(T)$.
2. Soit X une variable aléatoire suit une loi exponentielle de paramétre $\lambda > 0$. Donner sans justification la loi de la variable X, son espérance et sa variance.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires suivent respectivement $\mathcal{N}(1, 1)$ $(\mathcal{N}(2, 1))$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Quelle est la loi de $X - Y$? Justifier votre réponse.
4. Enoncer le théorème central limite (TCL).

Exercice 2

Un ordinateur est programmé pour effectuer des calculs de comptabilité à partir de bases de données afin d'obtenir des bilans (un par base de donnée).

On estime que pour chaque base de donnée, il y ait au moins une erreur de comptabilité pour le bilan .On dit alors que le bilan est " érroné".

On définit la variable aléatoire X qui représente le nombre de bilans érronés.

Lorsque le nombre de bilans traités devient assez grand, X peut être approchée par une loi normale de moyenne égale à 20 bilans et de variance $19, 2$.

1. Calculer la probabilité que le nombre de bilans ne dépasse pas 15.

2. Calculer la probabilité tel que le nombre de bilans éroné soit compris entre 17 et 22.

3. Trouver la valeur entière de x_0 telle que $p(20 - x_0 \leq X \leq 20 + x_0) = 0.95$.

Exercice 3

Depuis peu, les habitants votent sur les bornes électroniques. On suppose que la durée de vie d'une borne (exprimée en années) est modélisée par une variable aléatoire continue notée X, de fonction de répartition

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu à estimer. Pour étudier le paramètre θ, on a effectué une suite de n expériences indépendantes qui ont donné les réalisations $x_1, \cdots, x_n$ de n v.a. $X_1, \cdots, X_n$ i.i.d. de même loi que X

1. Déterminer la fonction de densité f_θ de X.
2. (a) Calculer $\mathrm{E}(X)$ (on admettra que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}$)
   (b) En déduire un estimateur de θ par la méthode des moments.
3. (a) Déterminer la fonction de vraisemblance $L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta)$
   (b) Montrer que la log-vraisemblance associée aux observations $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ s'écrit :

$$\ln L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - 2n \ln(\theta) - \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i^2)$$

   (c) En déduire un estimateur $\widehat{\theta}$ par la méthode du maximum de vraisemblance.
   (d) Proposer une (des) estimation(s)au vu des données suivantes : $\sum_{i=1}^{100} x_i = 276$, $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 276$

Bon travail.