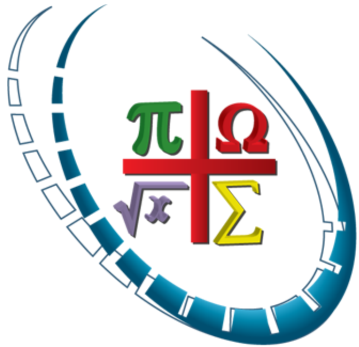
Suites et séries de fonctions

AA2: Convergence uniforme d'une suite de fonctions



Exemple introductif

$$\forall\, n \geq 1, \quad f_n \ : \ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

✎ Chercher le plus petit majorant de la fonction f_n sur l'intervalle $I = [0,1]$.

Exemple introductif

$$\forall\, n \geq 1, \quad f_n \;:\; \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

✎ Chercher le plus petit majorant de la fonction f_n sur l'intervalle $I = [0,1]$.

Borne supérieure d'une fonction

Pour une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, la **borne supérieure** de f sur I est le plus petit majorant de f et on la note

$$\sup_{x\in I} f = \sup\{f(x)\ ,\ x \in I\}$$

Et si f **n'est pas majorée** alors elle n'admet pas de borne supérieure.

Exemple introductif

$$\forall\, n \geq 1, \quad f_n \;:\; \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

✎ Chercher le plus petit majorant de la fonction f_n sur l'intervalle $I = [0,1]$.

Borne supérieure d'une fonction

Pour une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, la **borne supérieure** de f sur I est le plus petit majorant de f et on la note

$$\sup_{x \in I} f = \sup\{f(x)\ ,\ x \in I\}$$

Et si f **n'est pas majorée** alors elle n'admet pas de borne supérieure.

$$\forall\, n \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \Longleftrightarrow \frac{0}{n} \leq \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n} \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Exemple introductif

$$\forall\ n \geq 1, \quad f_n \ : \ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

✎ En utilisant cette définition, la borne supérieure de f_n sur $[0,1]$ est

$\forall\ n \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq \dfrac{x}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ **et** $f_n(1) = \dfrac{1}{n}$,

alors

$$\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x}{n} = \frac{1}{n}$$

Exemple introductif

$$\forall\ n \geq 1, \quad f_n \ : \ \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

✎ **En utilisant cette définition, la borne supérieure de f_n sur $[0,1]$ est**

$\forall\ n \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq \dfrac{x}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ **et** $f_n(1) = \dfrac{1}{n}$,

alors

$$\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x}{n} = \frac{1}{n}$$

✎ **Calculer** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$.

Exemple introductif

$$\forall\ n \geq 1, \quad f_n \ : \ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

✎ **En utilisant cette définition, la borne supérieure de f_n sur $[0,1]$ est**

$$\forall\ n \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \textbf{et} \quad f_n(1) = \frac{1}{n},$$

alors

$$\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x}{n} = \frac{1}{n}$$

✎ **Calculer** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$.

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x}{n}\right| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x}{n} = \frac{1}{n}$$

Exemple introductif

$$\forall\ n \geq 1, \quad f_n \ : \ \begin{array}{ccc} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

✎ **En utilisant cette définition, la borne supérieure de f_n sur $[0,1]$ est**

$$\forall\ n \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \textbf{et} \quad f_n(1) = \frac{1}{n},$$

alors

$$\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x}{n} = \frac{1}{n}$$

✎ **Calculer** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$.

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x}{n}\right| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Convergence uniforme

Définition

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui converge simplement sur I vers la fonction f.
On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément** sur I vers f si:

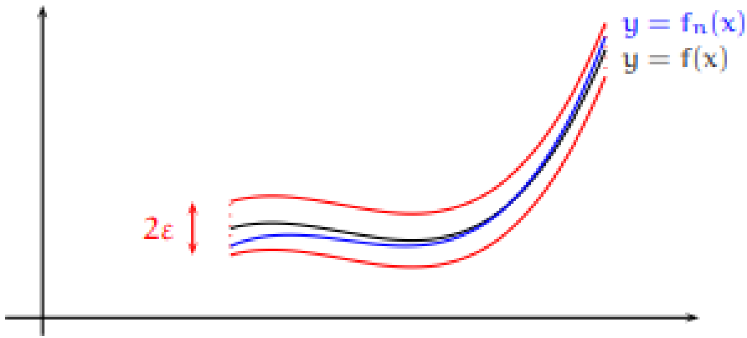
$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Convergence uniforme

Définition

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui converge simplement sur I vers la fonction f.
On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément** sur I vers f si:

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$



Dans la pratique

Dans la pratique

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur $D \subset \mathbb{R}$ vers une fonction f définie de D dans $\mathbb{R}$.

✎ S'il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ vérifiant

$$\exists N \geq n_0;\ \forall n \geq N \quad \text{on a,} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \quad \forall x \in D.$$

Alors, la suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge uniformément sur D vers f.

Dans la pratique

Dans la pratique

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur $D \subset \mathbb{R}$ vers une fonction f définie de D dans $\mathbb{R}$.

✎ S'il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ vérifiant

$$\exists N \geq n_0;\ \forall n \geq N \quad \textbf{on a,} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \quad \forall x \in D.$$

Alors, la suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge uniformement sur D vers f.

Exemple: $f_n(x) = xe^{-nx},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$

Dans la pratique

Dans la pratique

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur $D \subset \mathbb{R}$ vers une fonction f définie de D dans $\mathbb{R}$.

✎ S'il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ vérifiant

$$\exists N \geq n_0; \ \forall n \geq N \quad \text{on a}, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \quad \forall x \in D.$$

Alors, la suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge uniformement sur D vers f.

Exemple: $f_n(x) = xe^{-nx}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Pour tout $x > 0$, on a $e^{nx} \geq nx$

Dans la pratique

Dans la pratique

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur $D \subset \mathbb{R}$ vers une fonction f définie de D dans $\mathbb{R}$.

✎ S'il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ vérifiant

$$\exists N \geq n_0; \ \forall n \geq N \quad \text{on a}, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \quad \forall x \in D.$$

Alors, la suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge uniformement sur D vers f.

Exemple: $f_n(x) = xe^{-nx}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Pour tout $x > 0$, on a $e^{nx} \geq nx \Rightarrow e^{-nx} \leq \dfrac{1}{nx}$

Dans la pratique

Dans la pratique

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur $D \subset \mathbb{R}$ vers une fonction f définie de D dans $\mathbb{R}$.

✎ S'il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ vérifiant

$$\exists N \geq n_0;\ \forall n \geq N \quad \text{on a}, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \quad \forall x \in D.$$

Alors, la suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge uniformement sur D vers f.

Exemple: $f_n(x) = xe^{-nx},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$

Pour tout $x > 0$, on a $e^{nx} \geq nx \Rightarrow e^{-nx} \leq \dfrac{1}{nx} \Rightarrow xe^{-nx} \leq \frac{1}{n}$

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ |f_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Dans la pratique

Dans la pratique

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur $D \subset \mathbb{R}$ vers une fonction f définie de D dans $\mathbb{R}$.

✎ S'il existe une suite $(a_n)_{n\geq n_0}$ de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ vérifiant

$$\exists N \geq n_0;\ \forall n \geq N \quad \text{on a,} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \quad \forall x \in D.$$

Alors, la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge uniformement sur D vers f.

Exemple: $f_n(x) = xe^{-nx},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$

Pour tout $x > 0$, on a $e^{nx} \geq nx \Rightarrow e^{-nx} \leq \dfrac{1}{nx} \Rightarrow xe^{-nx} \leq \frac{1}{n}$

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ |f_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\Rightarrow$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformement** sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f \equiv 0$

Remarque

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur I,

$$\forall\ n,\ \ \textbf{et}\ \ \forall\ x \in\ I,\ \ \textbf{on a}\ \ |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

Remarque

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur I,

$$\forall\ n,\ \ \text{et}\ \ \forall\ x \in\ I,\ \ \text{on a}\ \ |f_n(x) - f(x)| \le \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

$\boxed{\text{Convergence uniforme}}$

Remarque

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur I,

$$\forall\ n,\quad \text{et}\quad \forall\ x \in\ I,\quad \text{on a}\ \ |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

$$\boxed{\text{Convergence uniforme}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{Convergence simple}}$$

Remarque

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur I,

$$\forall\ n,\ \ \text{et}\ \ \forall\ x \in\ I,\ \ \text{on a}\ \ |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

$$\boxed{\text{Convergence uniforme}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{Convergence simple}}$$

$(f_n)_n$ converge **uniformément** vers f

Remarque

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur I,

$$\forall\ n,\ \text{ et }\ \forall\ x \in\ I,\ \text{ on a }\ |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

$$\boxed{\text{Convergence uniforme}} \Rightarrow \boxed{\text{Convergence simple}}$$

$(f_n)_n$ converge **uniformément** vers $f \Longrightarrow (f_n)_n$ converge **simplement** vers f.

Exemple 1

$$\forall\ n \geq 1, \quad f_n \ : \ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

Exemple 1

$$\forall\ n \geq 1, \quad f_n \ : \ \begin{array}{ccc} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

Convergence simple ?

Exemple 1

$$\forall\ n \geq 1, \quad f_n \ : \ [0,1] \ \to \ \mathbb{R}$$
$$x \ \mapsto \ f_n(x) = \frac{x}{n}$$

Convergence simple ?

$$\forall\ x \in [0,1], \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0$$

$\Rightarrow$ La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$

Exemple 1

$$\forall\, n \geq 1, \quad f_n \; : \; \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

Convergence simple ?

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0$$

$\Rightarrow$ La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$

Convergence uniforme ?

Exemple 1

$$\forall\, n \geq 1, \quad f_n \;:\; \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

Convergence simple ?

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0$$

$\Rightarrow$ La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$

Convergence uniforme ?

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| \Big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Exemple 1

$$\forall\, n \geq 1, \quad f_n \; : \; \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

Convergence simple ?

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0$$

$\Rightarrow$ La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$

Convergence uniforme ?

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| \Big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$\Rightarrow$ La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$

Exemple 2

$$\forall\ n \geq 1, \quad f_n \ : \ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

Exemple 2

$$\forall\ n \geq 1, \quad f_n \ : \ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

Convergence simple ?

Exemple 2

$$\forall\, n \geq 1, \quad f_n \ : \ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

Convergence simple ? $\quad \forall\, x \in [0,+\infty[, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n} = 0$

Exemple 2

$$\forall\ n \geq 1, \quad f_n \ : \ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

Convergence simple ? $\quad \forall\ x \in [0,+\infty[, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n} = 0$

$\Rightarrow$ La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$

Convergence uniforme ?

Exemple 2

$$\forall\ n \geq 1, \quad f_n \ : \ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

Convergence simple ? $\quad \forall\ x \in [0,+\infty[, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n} = 0$

$\Rightarrow$ La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$

Convergence uniforme ? $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

Exemple 2

$$\forall\ n \geq 1, \quad f_n \ : \ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

Convergence simple ? $\forall\ x \in [0,+\infty[, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n} = 0$

$\Rightarrow$ La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$

Convergence uniforme ? $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\{|f_n(x) - 0|, \quad x \geq 0\right\} = \left\{\frac{x}{n},\ x \geq 0\right\}$$ **non majoré**

Exemple 2

$$\forall\ n \geq 1, \quad f_n \ :\ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

Convergence simple ? $\quad \forall\ x \in [0,+\infty[, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n} = 0$

$\Rightarrow$ La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$

Convergence uniforme ? $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\left\{|f_n(x) - 0|, \quad x \geq 0\right\} = \left\{\frac{x}{n},\ x \geq 0\right\} \textbf{ non majoré } \Rightarrow \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = +\infty$$

$\Rightarrow$ $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$

Exemple 2

$$\forall\ n \geq 1, \quad f_n \ : \ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

Convergence simple ? $\forall\ x \in [0,+\infty[, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n} = 0$

$\Rightarrow$ La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$

Convergence uniforme ? $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$\left\{|f_n(x) - 0|, \quad x \geq 0\right\} = \left\{\dfrac{x}{n},\ x \geq 0\right\}$ **non majoré** $\Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = +\infty$

$\Rightarrow$ $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$

Convergence simple

Exemple 2

$$\forall\, n \geq 1, \quad f_n \ : \ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{n} \end{array}$$

Convergence simple ? $\quad \forall\, x \in [0,+\infty[, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n} = 0$

$\Rightarrow$ La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$

Convergence uniforme ? $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\left\{|f_n(x) - 0|, \quad x \geq 0\right\} = \left\{\frac{x}{n},\ x \geq 0\right\} \textbf{ non majoré } \Rightarrow \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = +\infty$$

$\Rightarrow$ $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$

Convergence simple $\not\Rightarrow$ Convergence uniforme

Fonction limite discontinue

Fonction limite discontinue

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions **simplement convergente** sur I vers une fonction f.

✎ Si la fonction limite f est **discontinue** sur I, alors $(f_n)_n$ **ne converge pas uniformément** vers f sur I

Exercice 1

$$\begin{array}{rcl} f_n \ : \ [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx} \end{array}$$

❶ Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$.

Exercice 1

$$\begin{array}{rcccl} f_n & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx} \end{array}$$

❶ Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$.

$$\begin{cases} \textbf{Si} \quad x = 0, & \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0 \\ \\ \textbf{Si} \quad x \in]0,1], & \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx}{1+nx} = 1 \end{cases}$$

Exercice 1

$$\begin{array}{rcl} f_n : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx} \end{array}$$

❶ Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$.

$$\begin{cases} \text{Si} \quad x = 0, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0 \\ \\ \text{Si} \quad x \in]0,1], \quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx}{1+nx} = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par

$$\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \in]0,1] \end{cases} \end{array}$$

Exercice 1

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx} \end{array}$$

❷ **Déduire que la convergence de $(f_n)_n$ n'est pas uniforme sur $[0,1]$.**

Exercice 1

$$\begin{array}{rccc} f_n & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx} \end{array}$$

❷ Déduire que la convergence de $(f_n)_n$ n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

- La suite de fonctions $(f_n)_n$ est **continue** sur $[0,1]$

Exercice 1

$$\begin{array}{rcccl} f_n & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx} \end{array}$$

❷ Déduire que la convergence de $(f_n)_n$ n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

- La suite de fonctions $(f_n)_n$ est **continue** sur $[0,1]$

  MAIS

- elle converge vers une fonction qui est **discontinue** sur $[0,1]$.

Exercice 1

$$\begin{array}{cccc} f_n & : & [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx} \end{array}$$

❷ Déduire que la convergence de $(f_n)_n$ n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

- La suite de fonctions $(f_n)_n$ est **continue** sur $[0,1]$

  MAIS

- elle converge vers une fonction qui est **discontinue** sur $[0,1]$.

$\Rightarrow$ La convergence n'est pas uniforme.