

Compte rendu automatique

Adam SINKOVICS, Mahdi MOUNZER, Jimmy NIYONKURU

2023-2024

Description et but du TP

Lors des séances de TP en automatique, il nous est demandé d'identifier deux systèmes inconnus, chacun mesurable sur des sorties différentes d'une boîte. Le but est d'identifier, modéliser les systèmes, puis les asservir. Nous avons effectué ces études sur la boîte numéro 10.

Pour étudier ces systèmes, on utilise un générateur à basse fréquence, un oscilloscope et une alimentation afin d'alimenter la boîte. Pour l'asservissement on utilisera des amplificateurs opérationnels ainsi que des résistances et condensateurs.

Étude

1.1 Réponse harmonique

Lorsque le système étudié est *linéaire*, on observe en sortie un signal sinusoidal pour une entrée de signal sinusoidal. Il est donc possible d'écrire la *fonction de transfert* du système étudié, qui décrit les caractéristiques du signal de sortie par rapport à celui d'entrée. La fonction de transfert est une fonction complexe dont le module représente *l'amplification dans la bande passante* du système, c'est-à-dire pour une entrée constante dans le temps par combien le système amplifie-t-il le signal d'entrée (ou le mot "amplifie" ne signifie pas forcément une augmentation de la valeur du signal), et dont l'argument représente le *déphasage* du signal de sortie par rapport à l'entrée, c'est à dire par combien (mesuré en radians) est la sortie en retard ou en avance par rapport à l'entrée.

1.1.1 Théorie

Si on souhaite étudier, en traçant les diagrammes de Bode ou de Black, tels systèmes, il est important de d'abord déterminer la nature du système. Pour ce déterminer, on soumet le système à des fréquences de grandeurs différentes et on compare les sorties. Si le système donne des réponses similaires pour des basses fréquences, mais lorsqu'on augmente la fréquence la réponse diminue, il s'agit d'un système type passe-bas. Dans le cas contraire, si pour les hautes fréquences la réponse a l'air de ne pas changer, mais en la diminuant la réponse diminue, il s'agit d'un système type passe-haut. Lorsque la réponse diminue pour des valeurs de fréquences basses et hautes, il s'agit d'une passe-bande, et si le contraire se passe, il s'agit d'un coupe-bande.

1.1.2 Pratique

Systeme 1

Après avoir branché la première sortie de la boîte sur le générateur et l'oscilloscope, on a déterminé que notre système est de type passe-bas, puisque pour des fréquences faibles, l'amplification variait peu, mais en augmentant la fréquence de l'entrée l'amplification mesurée sur la sortie diminuait. Pour tracer le diagramme de Bode et de Black, on mesure d'abord la fréquence de coupure à $-3dB$. Pour faire cela on soumet le système à une entrée de fréquence faible ($f_e < 1Hz$) et on mesure l'amplitude de la sortie, qu'on divise par l'amplitude de l'entrée pour obtenir l'amplification dans la bande passante A de notre système. Il est également possible, vu qu'on sait que le système est un filtre de type passe-bas, qu'on le soumet à un échelon (avec le générateur on délivre un signal carré de faible fréquence), et on mesure l'amplitude de la sortie en *régime permanent* c'est-à-dire lorsque

la variation de l'amplitude de la réponse est faible. La régime permanent est visible sur la figure 1.1 dans une *demi-période* du signal de la sortie lorsque la courbe devient horizontale.

Ici on a mesuré $A = 1.8$

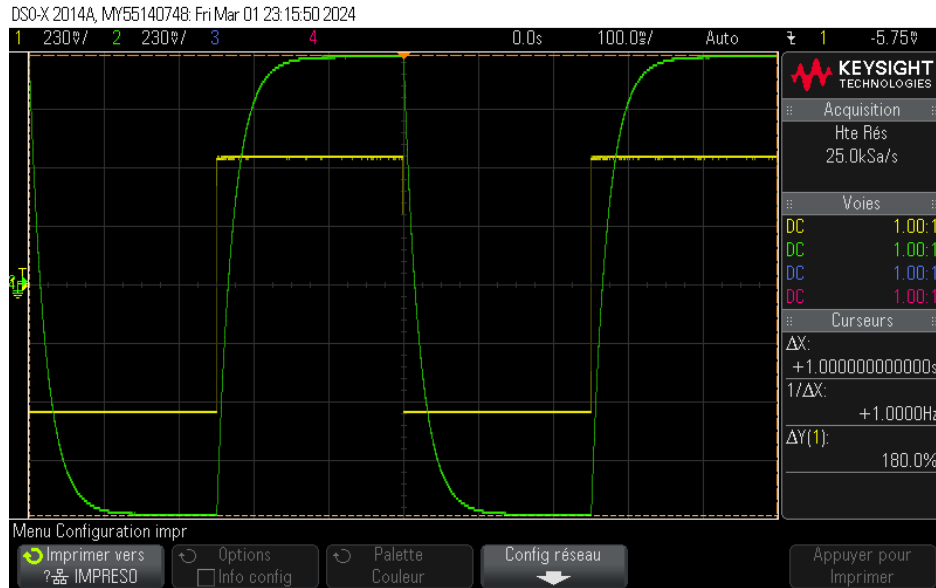


Figure 1.1: Image de l'oscilloscope lors la mesure de A pour le premiere systeme

Pour la suite on mesure l'amplification pour les entrées sinusoïdales.

Une fois A connue, sachant que la fréquence de coupure a $-3dB$ f_{-3dB} représente

$$20 \cdot \log(|A|) - 3dB = 20 \cdot \log(|A|) + 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{|A|}{\sqrt{2}}\right)$$

on sait qu'on cherche une fréquence pour laquelle l'amplitude de la sortie est $S_{-3dB} \simeq 0.7 \cdot A$, autrement dit 70% de l'amplitude dans la bande passante. En connaissant f_{-3dB} on peut commencer a mesurer l'amplification (le rapport sortie / entrée) et le déphasage de notre systeme, pour des valeur écarté sur l'échelle logarithmique, mais plus serré autour la fréquence f_{-3dB} .

Il est important de noter ici le fait que sur le graphique on a l'impression que l'intersection des deux droites n'est pas exactement sur la courbe. Il est vrai qu'une valeur de $7.4Hz$ correspondrais mieux sur le graphe pour f_{-3dB} mais expérimentalement on a mesuré un déphasage de $-45deg$ a une fréquence de $7.2Hz$, c'est pour cela qu'on a décidé de garder cette valeur.

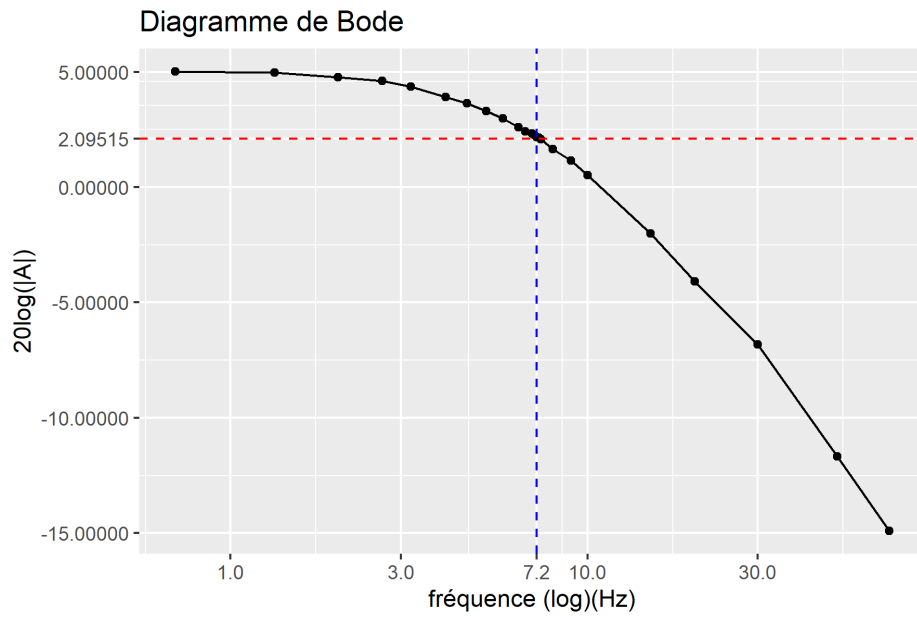


Figure 1.2: Diagramme de Bode pour le premiere systeme

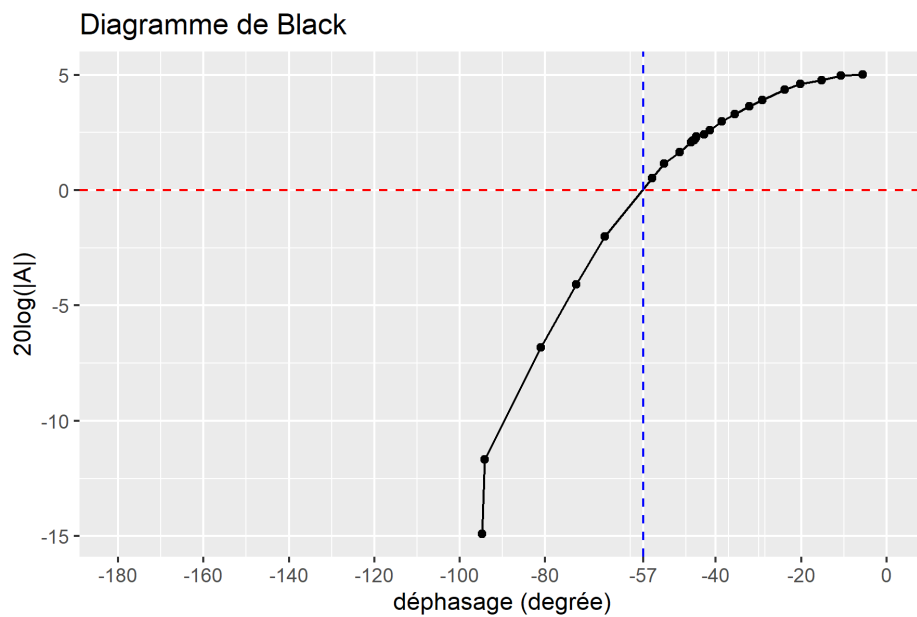


Figure 1.3: Diagramme de Black pour le premiere systeme

Il est possible de déterminer la marge de phase en calculant graphiquement depuis la figure 1.5 , la difference entre -180 et le point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. Dans notre cas:

$$M_{ph} = -57 - (-180) = 123deg$$

La marge de phase est orienté selon les valeurs de l'abscisse croissantes.

En regardant les allures de diagrammes de Black et Bode, on peut remarquer que la modélisatoïn du systeme par un systeme d'ordre 1 semble raisonnable.

Systeme 2

Pour le systeme 2, on constate qu'en variant la fréquence d'entrée sinusoidale, au début l'amplification augmente, ainsi nous soupçonnons que le systeme peut pas etre modélisé par un systeme d'ordre 1 puisque ces systemes ne présentes jamais des résonances. Ainsi on va modéliser le systeme par un systeme d'ordre 2.

Pour une entrée sinusoidale, on mesure la réponse de systeme par rapport a l'entrée ainsi que le déphasage afin d'obtenir le diagramme de Bode et de Black:

Diagramme de Bode

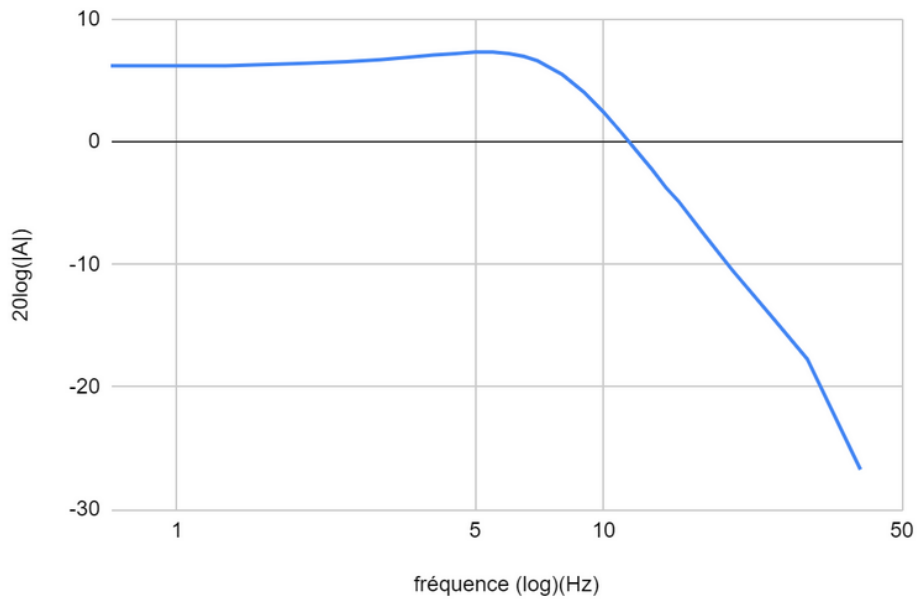


Figure 1.4: Diagramme de Bode pour la seconde sortie

Diagramme de Black

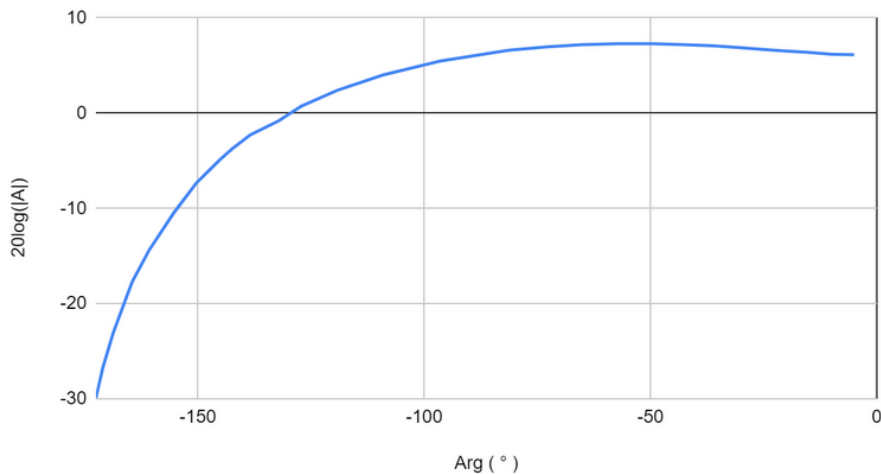


Figure 1.5: Diagramme de Black pour la seconde sortie

Il est possible de déterminer la marge de phase en calculant graphiquement la différence entre -180° et le point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. Ici on obtient $M_p = 55\text{deg}$ On voit bien sur le diagramme de Bode que la fonction de transfert présente

une résonance, ainsi il est plutôt réaliste de modéliser ce système par un système de seconde ordre.

1.2 Réponse indicielle

Dans cette deuxième partie on va s'intéresser à l'identification des systèmes, c'est à dire trouver une fonction de transfert, qui décrit au plus proche notre système. Il est demandé de tracer la *caractéristique statique* de notre système, qui est la courbe qui représente la sortie en fonction de l'entrée. Lorsque notre système est linéaire, la caractéristique statique est une droite de pente A , l'amplification. En réalité étant donné que le domaine linéaire de la caractéristique statique est toujours limité (par exemple par la tension de saturation des amplificateurs opérationnelles), c'est à dire que la droite n'a pas en tant que limite en $\pm\infty$ l'infini, deux points de cassures, à partir desquelles la pente devient nulle.

1.2.1 Système du première ordre

Pour les systèmes de première ordre de type passe-bas, on peut décrire le système dans le domaine de Laplace par la fonction

$$F_1(p) = \frac{A}{1 + \tau p}$$

ou A représente l'amplification dans la bande passante (pour les passe-bas c'est aussi l'amplification statique, dans ce cas sans unité) et τ le constant de temps. Il est ici possible de déterminer l'amplification A en soumettant notre système à une entrée de type échelon de fréquence $f \ll 10\text{Hz}$. Ceci en réalité est faite en mettant un signal carré de fréquence faible. Pour mesurer τ il suffit de mesurer le temps de réponse à 5 pourcent c'est à dire le temps à partir duquel la réponse est autour de sa valeur en régime permanent en ne plus dépassant $\pm 5\%$ de cette valeur. On peut bien visualiser le régime permanent et transitoire au même temps, si on choisit une fréquence telle que le temps de réponse à 5% est égale à la moitié de la demi-période de notre signal d'entrée:

$$\frac{T_E}{4} = t_{5\%}$$

ou T_E est la période du signal d'entrée.

Lorsqu'on souhaite de mesurer ces caractéristiques avec un entrée harmonique (sinusoïdale) on peut soumettre le système à un signal sinusoïdale de fréquence basse, et on mesure le rapport des valeurs maximums des allures des sortie par rapport à l'entrée. Pour trouver τ on peut mesurer la fréquence de coupure à -3dB en sachant que $f_{-3\text{dB}} = 2\pi\omega_0$ donc

$$\omega_0 = \frac{f_{-3\text{dB}}}{2\pi}$$

Il est maintenant facile à déterminer τ en connaissant la relation

$$\tau = \frac{1}{\omega_0}$$

ou ω_0 est la pulsation de cassure à -3dB et aussi la pulsation de coupure vu qu'il s'agit d'un système du première ordre. Voir la figure 1.6 pour voir l'allure de la réponse d'un tel système.

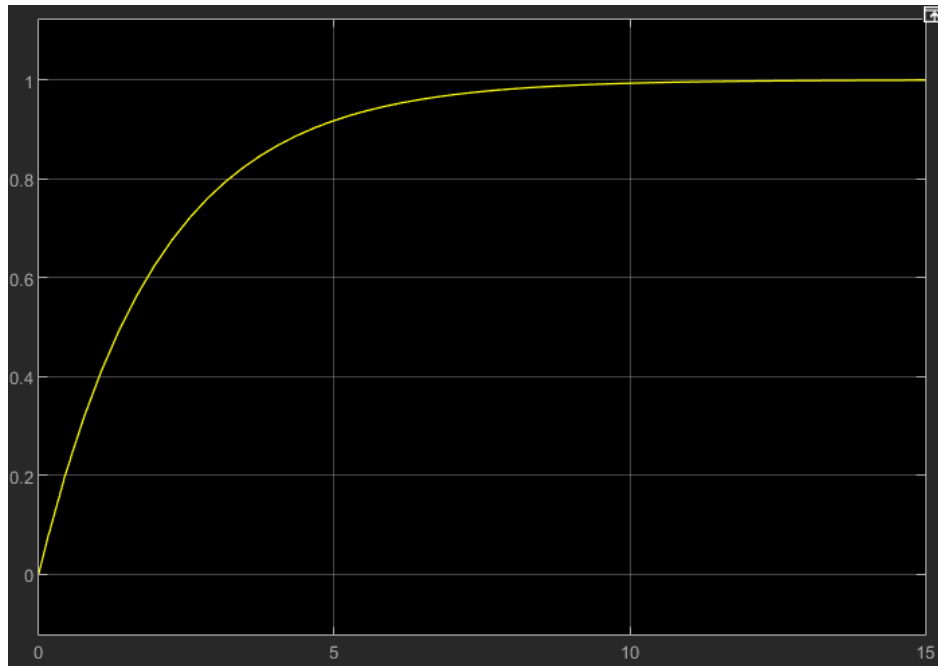


Figure 1.6: Réponse d'un système à première ordre

En appliquant un signal d'entrée constant (en pratique on met un signal carré), on obtient une réponse comme dans la figure

Le système ne présente pas de dépassements et de plus quand le signal d'entrée change de valeur, la pente en la réponse n'est pas nulle, ainsi il est raisonnable de modéliser ce système par un système de première ordre. On est alors capable de mesurer l'amplification (déjà fait, $A = 1.8$) et le temps de réponse afin d'obtenir le constant de temps τ sachant que le temps de réponse à 5% est égale à 3 fois τ . On obtient alors $\tau = 0.021667$, d'où on propose comme modèle:

$$F_1(p) = \frac{1.8}{1 + 0.021667p}$$

On remarque que le système est stable, avec une valeur finale de 1.8 fois l'entrée. En le mesurant pour plusieurs valeurs, on est capable de tracer la caractéristique statique de ce système, en représentant la valeur en régime permanent de la sortie par rapport à la valeur de l'entrée:

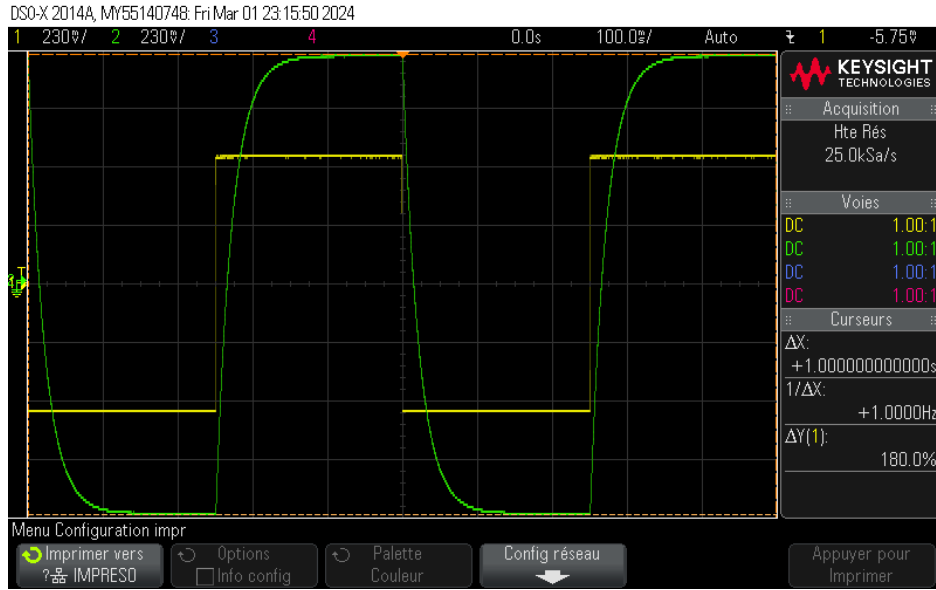


Figure 1.7: Réponse de systeme 1 de la boite

Caracteristique statique, sortie 1

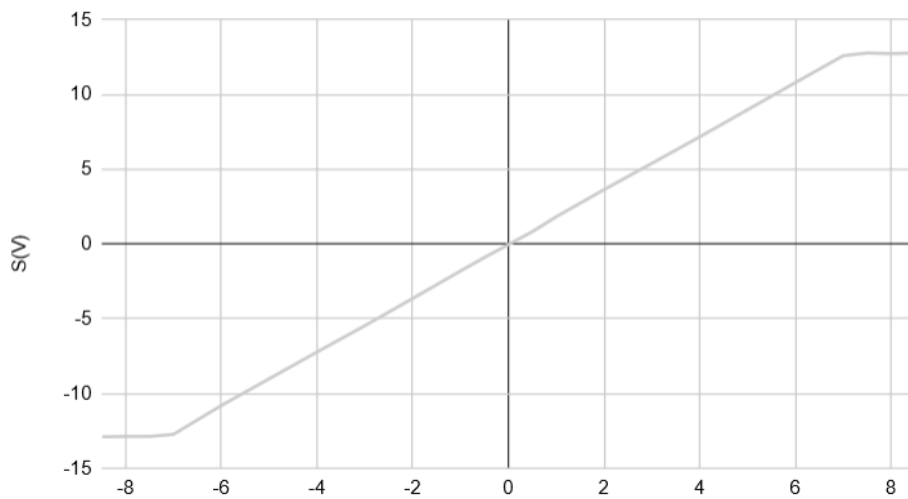


Figure 1.8: Caractéristique statique systeme 1

On en déduit que la zone de linéarité de ce système est entre ± 7 . Avec les valeurs spécifiques on est capable de déterminer la valeur de la pente de la droite dans la zone linéaire, qui est autour de 1.8 pour ce système qui est l'amplification dans la bande passante de notre système.

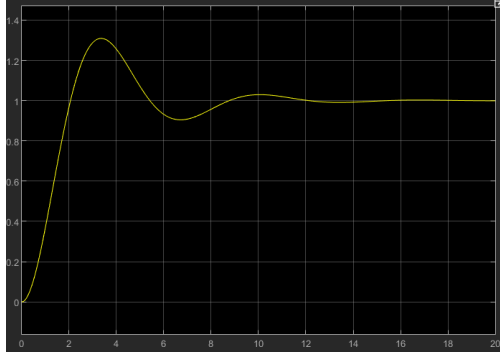
1.2.2 Système du second ordre

Les systèmes du second ordre de type passe-bas peuvent être décrits dans le domaine de Laplace par la fonction

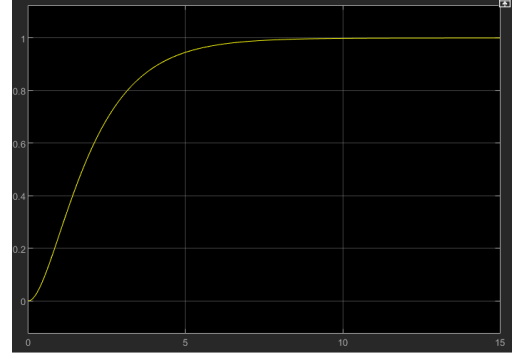
$$F_2(p) = \frac{A}{1 + 2m\frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

où A est l'amplification dans la bande passante (pour les passe bas l'amplification statique aussi), m est le *coefficient d'amortissement* et ω_0 est la pulsation de cassure de la fonction

de transfert. Lorsque le coefficient d'amortissement est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, la réponse du système présente des *dépassements*, c'est à dire que la réponse prend des valeurs supérieures à la valeur en régime permanent.



(a) $0 < m < 1$



(b) $m > 1$

Figure 1.9: Réponse d'un système a 2nd ordre

Dans le cas ou $m < 1$, afin de mesurer l'amplification dans la bande passante A on peut mesurer la réponse a une échelon en boucle ouverte et comparer le résultat obtenu par rapport a l'entrée. Alors $A = \frac{\Delta S}{\Delta E}$ (ainsi sans unité). Toujours pour une entrée type échelon, on peut mesurer la premiere dépassement, en prenant la valeur en régime permanent en tant que 100% et mesurant le pique de la premiere dépassement. En ce connaissant, on peut déterminer le coefficient d'amortissement m en utilisant les abaqués. On peut également mesurer le temps de réponse a 5% qui est le temps ou l'allure de la réponse entre pour la derniere fois dans la bande de la valeur en régime permanent $\pm 5\%$ et n'en sors plus. En connaissant déjà la valeur du coefficient d'amortissement, on peut utiliser les abaqués pour déterminer ω_0 .

Lorsqu'on prends $F_2(j\omega_0)$ on obtient:

$$\frac{A}{1 + 2mj - 1} = \frac{A}{2mj}$$

d'ou

$$|F_2(j\omega_0)| = \frac{|A|}{|2mj|} = \frac{A}{2m}, \quad Arg(F_2(j\omega_0)) = Arg\left(\frac{A}{2mj}\right) = Arg(A) - Arg(2mj) = -\frac{\pi}{2}$$

Ainsi pour un essai harmonique, lorsqu'on retrouve la fréquence f ou le déphasage est $-\frac{\pi}{2}rad$ on retrouve $\omega_0 = \frac{2\pi}{f}$, En mesurant la réponse (soit v_0 la valeur mesurée) en cette fréquence on peut déduire que $v_0 = \frac{A}{2m} \Rightarrow m = \frac{A}{2v_0}$.

Pour notre systeme on applique un signale type échelon sur l'entrée. On obtient l'allure suivante:

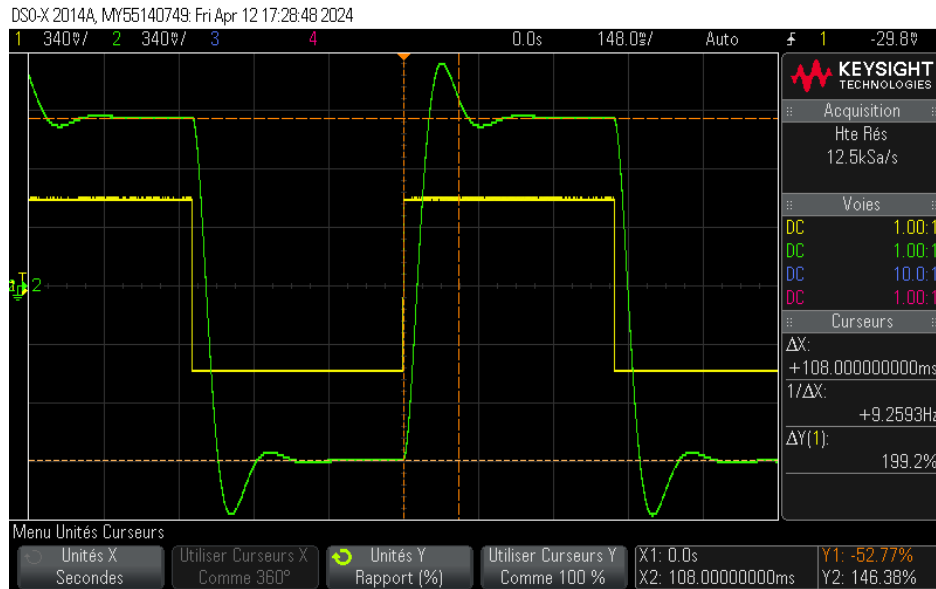


Figure 1.10: Mesure de A second sortie

On peut mesurer la valeur en régime de la réponse par rapport a l'entrée, ici on obtient $A = 2$. En ce faisant pour des valeurs différentes d'entrée on peut, comme pour le premiere systeme, obtenir la caractéristique statique:

Caractéristique statique, sortie 2

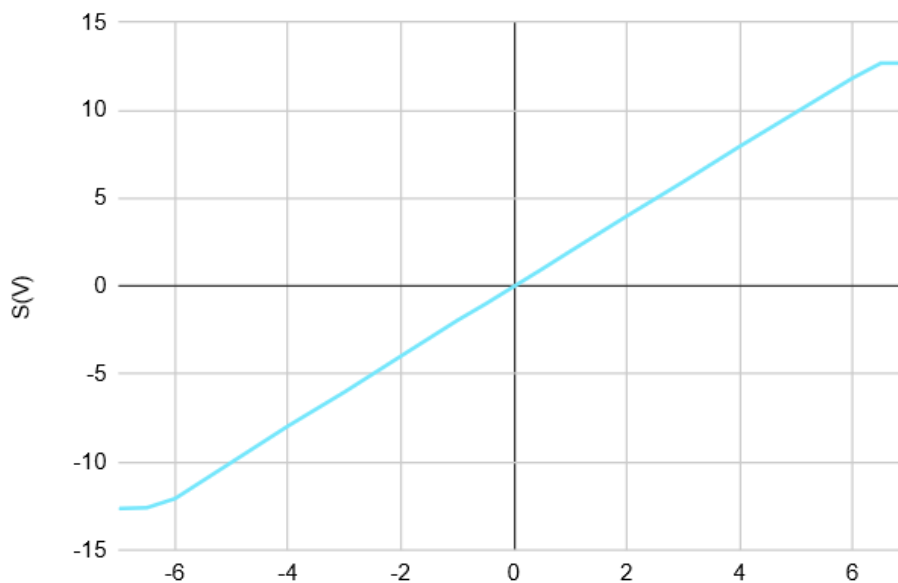


Figure 1.11: Caractéristique statique sortie 2

Cette caractéristique nous donne une pente proche de 2 qui est notre amplification dans la bande passante et on remarque que la zone de linéarité est entre autour $\pm 6.5V$.

Depuis le figure 1.10 on remarque que le systeme présente des dépassement, ainsi excluant la possibilité de modéliser le systeme par un systeme de premiere ordre. On remarque également que la pente n'est pas nulle la ou l'entrée bascule. C'est pour ces raisons la, qu'on propose d'étudier ce systeme comme un systeme de second ordre. On peut alors mesurer ces caractéristiques ($A = 2$ déjà fait). Le systeme soit alors de forme:

$$\frac{A}{1 + 2m\frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

On peut chercher le coefficient d'amortissement m , en mesurant la valeur de la premiere dépassement:

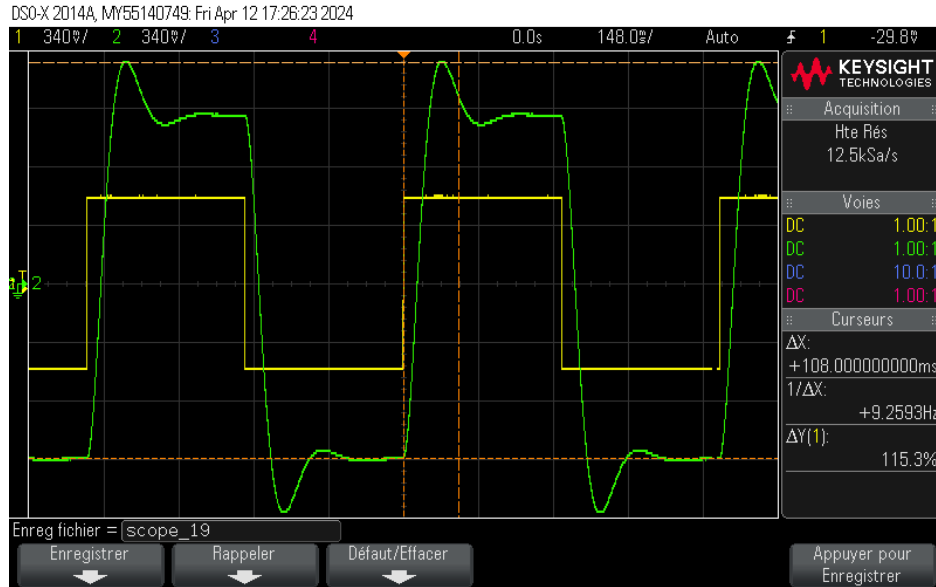


Figure 1.12: Mesure de la premiere dépassement

En connaissant ce valeur (dans notre cas 15%), on peut utiliser les abaqués pour déterminer m . On obtient $m = 0.5$ pour notre système. On peut ensuite mesurer le temps de réponse à 5%:

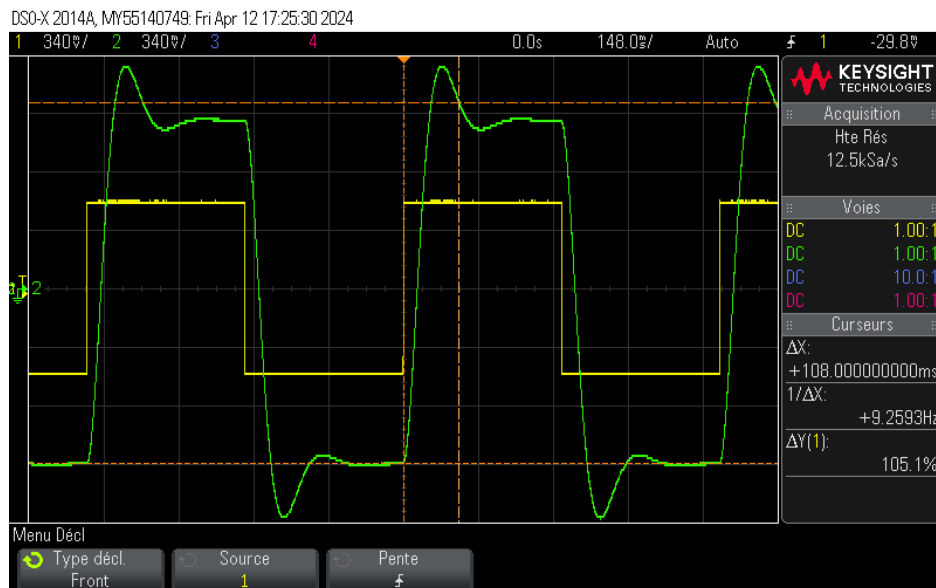


Figure 1.13: Mesure du temps de réponse

En utilisant les abaqués, on obtient $t_{r5\%} \cdot \omega_0 = 5$, d'où $\omega_0 = \frac{5}{0.108} = 46.3 \text{ rad/s}$. Pour la suite, on a pris $\omega_0 = 43.85 \text{ rad/s}$ puisqu'en refaisant la mesure, on a obtenu une valeur

légèrement différente pour le temps de réponse de notre système. De ce qui précède, nous proposons comme modèle pour la seconde sortie de la boîte:

$$F_2(p) = \frac{2}{0.00052p^2 + 0.0228p + 1}$$

1.3 Asservissement des systèmes

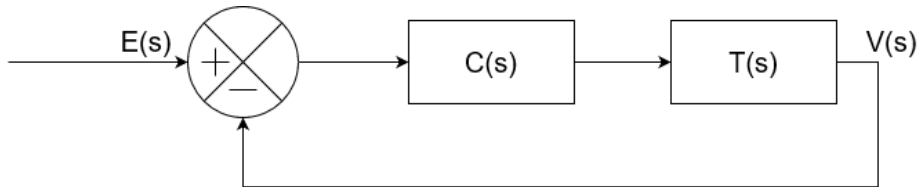


Figure 1.14: Modélisation par schéma-blocs

Dans cette partie on s'intéressera à calculer des correcteurs pour les systèmes qui permettent de les asservir. On utilisera le logiciel MatLab afin de simuler la réponse des systèmes pour pouvoir comparer dans le chapitre prochaine aux systèmes réalisés. Les systèmes asservis peuvent être modélisés par des schéma-blocs comme représenté sur la figure 1.14, où $E(s)$ est le signal d'entrée représenté en domaine de Laplace, $C(s)$ est la fonction qui représente le correcteur utilisé et $T(s)$ est la fonction de transfert de notre système. On peut également représenter sur le schéma, $V(s)$ qui est la sortie du système en domaine de Laplace.

1.3.1 Système 1

Le premier système peut être modélisé par un système de premier ordre:

$$T(s) = F_1(s) = \frac{A}{1 + \tau s}$$

où $A = 1,8$ et $\tau = 21,667\text{ms}$ d'après les mesures effectuées dans la première partie.

Correction avec correcteur proportionnel

Pour un correcteur proportionnel on a $C(s) = K$, $K > 0$. Ainsi la fonction de transfert en boucle fermée est, d'après la formule de Black:

$$FTBF = \frac{FTBO}{1 + FTBO} = F_{p1}(s)$$

$$F_{p1}(s) = \frac{\frac{KA}{1+\tau s}}{1 + \frac{KA}{1+\tau s}} = \frac{KA}{1 + \tau s + KA}$$

$$F_{p1}(s) = \frac{\frac{KA}{1+KA}}{1 + \frac{\tau}{1+KA}s} = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF}s}$$

avec $K_{BF} = \frac{KA}{1+KA}$ et $\tau_{BF} = \frac{\tau}{1+KA}$

Il est alors possible de déterminer l'erreur statique ε_s et le temps de réponse à 5% $t_{r5\%}$ en fonction de K . En effet:

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \varepsilon(s)$$

avec $\frac{\varepsilon(s)}{E(s)} = \frac{1}{1 + \frac{KA}{1+\tau s}}$ d'où $\varepsilon(s) = \frac{E(s)}{1 + \frac{KA}{1+\tau s}}$ or ici, $E(s)$ est un échelon donc

$$\varepsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{E_0}{s}}{1 + \frac{KA}{1+\tau s}} = \frac{E_0}{1 + KA} = \frac{E_0}{1 + K_{BO}}$$

avec $K_{BO} = KA$. On remarque qu'en augmentant K on arrive à diminuer l'erreur statique, mais on n'arrivera jamais à l'annuler.

Vu qu'il s'agit d'un système du premier ordre, on peut exprimer $t_{r5\%1p}$ (temps de réponse à 5% du premier système en boucle fermée avec correcteur proportionnel) avec

$$t_{r5\%1p} = 3\tau_{BF} = 3 \cdot \frac{\tau}{1 + K_{BO}}$$

ainsi on conclue que le temps de réponse à 5% diminue lorsque K augmente, le système devient plus *rapide* et plus *nerveux*.

En faisant l'application numérique avec $K = 1$ on obtient:

$$t_{r5\%1p} = 23,214ms \quad \varepsilon_s = 0,357 = 35,7\%$$

Chercher le K qui convient

Dans un premier temps, on va chercher la valeur de K tels que notre système admette une erreur statique de 10%

$$\varepsilon_{s10\%} = \frac{E_0}{1 + KA} \Rightarrow K = \frac{E_0}{A\varepsilon_{s10\%}} - \frac{1}{A} = 5$$

ensuite, on calcule le temps de réponse à 5%

$$t_{r5\%err10} = \frac{3\tau}{1 + KA} = 6,5ms.$$

Pour retrouver le K où l'erreur statique devient 1% on fait le même calcul:

$$\varepsilon_{s1\%} = \frac{E_0}{1 + KA} \Rightarrow K = \frac{E_0}{A\varepsilon_{s1\%}} - \frac{1}{A} = 55$$

ainsi donnant un temps de réponse $t_{r5\%err1}$

$$t_{r5\%err1} = 0,65ms$$

Dans un second temps, on cherche le K tels que le temps de réponse à 5% soit 5 fois plus petit par rapport à en boucle ouverte.

On a donc

$$t_{r5\%5x} = \frac{t_{r5\%}}{5} = \frac{3\tau}{1 + KA} \Rightarrow K = \frac{15\tau}{t_{r5\%}A} - \frac{1}{A} = 2,22$$

ou l'erreur statique est:

$$\varepsilon_{5x} = \frac{E_0}{1 + KA} = 0,20 = 20\%$$

Il est possible de faire les mêmes calculs pour obtenir un temps de réponse 50 fois plus rapide:

$$t_{r5\%50x} = \frac{t_{r5\%}}{50} \Rightarrow K = \frac{150\tau}{t_{r5\%}A} - \frac{1}{A} = 27,22$$

ou l'erreur statique est:

$$\varepsilon_{50x} = \frac{E_0}{1 + KA} = 0,020 = 2\%$$

Correction avec un correcteur intégral

Dans le cas d'un correcteur intégral, on a $C(s) = \frac{1}{T_i s}$ ou T_i représente le constant de temps de l'intégral. Comme dans la partie précédente, il est possible d'exprimer la fonction de transfert en boucle fermée par l'aide du formule de Black:

$$FTBF = \frac{FTBO}{1 + FTBO}$$

$$F_{i1}(s) = \frac{\frac{1}{T_i s} \frac{A}{1+\tau s}}{1 + \frac{1}{T_i s} \frac{A}{1+\tau s}}$$

$$F_{i1}(s) = \frac{A}{T_i s(1 + \tau s) + A} = \frac{A}{A + T_i s + T_i \tau s^2}$$

$$F_{i1}(s) = \frac{1}{1 + \frac{T_i}{A} s + \frac{T_i \tau}{A} s^2}$$

On reconnait la forme d'une fonction de transfert du second ordre.

$$F_{i1}(s) = \frac{A}{1 + 2m \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{A_1}{T_i \tau}}, \quad m = \frac{T_i \omega_0}{2A_1} = \sqrt{\frac{T_i}{4A_1 \tau}}$$

Il est possible de calculer l'erreur statique en utilisant le meme formule que dans la partie correction proportionnel:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \varepsilon_{s2}(s)$$

avec

$$\varepsilon_{s2}(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{T_i}{A_1} s + \frac{T_i \tau}{A_1} s^2}} = \frac{1 + \frac{T_i}{A_1} s + \frac{T_i \tau}{A_1} s^2}{1 + 1 + \frac{T_i}{A_1} s + \frac{T_i \tau}{A_1} s^2}$$

donnant

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{2} = 0$$

L'erreur statique est ainsi égale a 0.

Sachant que

$$m = \sqrt{\frac{T_i}{4A_1 \tau}}$$

on peut conclure que plus T_i augmente, plus le coefficient d'amortissement m augmente. Ainsi lorsque T_i est assez petit, m dépasse la valeur de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou le système va commencer a presenter des dépassements, au meme temps augmentant la rapidité du système. Plus T_i est petit plus le régime transitoire est longue, ainsi devenant pratiquement instable apres un certain valeur. Le systeme ainsi devient moins nerveux pour les valeur plus en plus grandes de T_i .

En utilisant les abaqes on peut chercher T_i pour que la réponse indicielle présente un dépassement de 5%. En effet on cherche $m = 0,7$. Alors

$$0,7 = \sqrt{\frac{T_i}{4A_1 \tau}} \Rightarrow T_i = 0,7^2 \cdot 4A_1 \tau = 0,0764$$

Pour ce T_i le temps de réponse a 5% peut etre retrouvé en utilisant les abaqes:

$$t_{r5\%dep5\%} \cdot \omega_0 = 3 \Rightarrow t_{r5\%dep5\%} = \frac{3}{\omega_0} = 0,09s = 90ms$$

Systeme 1	Calcule
Correcteur proportionnel pour erreur statique de 10%, K = 5	temps de réponse = 6.5ms, erreur statique = 10%
Correcteur proportionnel pour erreur statique de 1%, K = 55	temps de réponse = 0.65ms, erreur statique = 1%
Correcteur proportionnel temps de reponse a 5% 5 fois plus petit par rapport a en boucle ouverte, K = 2.22	temps de réponse = 13ms, erreur statique = 20%
Correcteur proportionnel temps de reponse a 5% 50 fois plus petit par rapport a en boucle ouverte, K = 27.22	temps de réponse = 1.3ms, erreur statique = 2 %
Correcteur intégrale dépassement 5% Ti = 0,0764	temps de réponse = 90ms, erreur statique = 0%, premiere dépassement = 5%

Figure 1.15: Bilan des calculs des correcteurs proportionnels

1.3.2 Système 2

Le second système peut être modélisé par une fonction de transfert du second ordre.

$$F_2(s) = \frac{A_2}{1 + 2m\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $A_2 = 2$, $m = 0,5$ et $\omega_0 = 43,85$

En utilisant un correcteur proportionnel on obtient:

$$F_{p2}(s) = \frac{K_2 \frac{A_2}{1+2m\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}}{1 + K_2 \frac{A_2}{1+2m\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{K_2 A_2}{1 + K_2 A_2 + 2m\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$$

$$F_{p2}(s) = \frac{\frac{K_2 A_2}{1+K_2 A_2}}{1 + \frac{2m}{\omega_0(1+K_2 A_2)}s + \frac{1}{1+K_2 A_2} \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} = \frac{K_{BF2}}{1 + \frac{2m'}{\omega'_0}s + \left(\frac{s}{\omega'_0}\right)^2}$$

avec $K_{BF2} = \frac{K_2 A_2}{1+K_2 A_2}$, $\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 + K_2 A_2}$ et $m' = \frac{m}{\sqrt{1+K_2 A_2}}$ on reconnait un système du second ordre. On peut également écrire, vue que $A = 2$,

$$K_{BF2} = \frac{2K_2}{1 + 2K_2}, \quad \omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 + 2K_2}, \quad m' = \frac{m}{\sqrt{1 + 2K_2}}$$

On remarque que l'effet d'augmenter K_2 est la diminution du coefficient d'amortissement m' qui implique l'augmentation de la nerveusité du système.

On cherche à calculer K pour obtenir une erreur statique de 10%, avec

$$\varepsilon_{s2}(s) = \frac{E(s)}{1 + KF_2(s)} = \frac{\frac{1}{s} \left(1 + \frac{2m'}{\omega'_0}s + \left(\frac{s}{\omega'_0}\right)^2\right)}{1 + KA_2 + \frac{2m'}{\omega'_0}s + \left(\frac{s}{\omega'_0}\right)^2}$$

d'où

$$\lim_{s \rightarrow 0} = s \cdot \frac{\frac{1}{s} \left(1 + \frac{2m'}{\omega'_0}s + \left(\frac{s}{\omega'_0}\right)^2\right)}{1 + KA_2 + \frac{2m'}{\omega'_0}s + \left(\frac{s}{\omega'_0}\right)^2} = \frac{1}{1 + KA_2} = 0,1 \Rightarrow K_{10} = 4.5$$

Il est ainsi possible de déterminer l'amplitude du premier dépassement, en calculant le coefficient d'amortissement de la fonction de transfert du système en boucle fermée, et regardant les abaques. On retrouve $m'_1 = \frac{m}{\sqrt{1+K_{10}A_2}} = 0.158114$ qui nous laisse montrer depuis les abaques que le système présente un premier dépassement de 60%. On également calculer le temps de réponse à 5% une fois qu'on calcule $\omega'_{10} = \omega_0 \sqrt{1 + K_{10}A_2} = 138.665$. Depuis les abaques, pour $m = 0.15$, $t_{r5\%}\omega_0 = 20$, d'où $t_{r5\%} = 0.144s$

De même façon on peut retrouver pour une erreur de 2%

$$\frac{1}{K_{2p}A} = 0.02 \Rightarrow K_{2p} = 24.5$$

pour lequel:

$$m'_2 = 0.0707$$

à partir duquel on déduit un premier dépassement de 80%. On cherche alors $\omega'_2 = \omega_0 \sqrt{1 + K_{2p}A_2} = 310.066$, d'où $t_{r5\%} = \frac{40}{310.0663} = 0.129s$

1.4 Simulation des asservissements

Dans cette partie nous allons simuler la réponse des systèmes en utilisant les valeurs obtenus dans la partie précédente, en utilisant le logiciel l'outil *Simulink* du logiciel *Matlab*, afin de pouvoir les comparer aux résultats de la section précédente.

1.4.1 Systeme d'ordre 1

Dans un premier temps on prends le systeme décrit par la fonction de transfert

$$F_1(s) = \frac{A}{\tau s + 1}$$

les valeurs sont $A = 1.8$ et $\tau = 0.021667$.

Correcteur proportionnel

Pour les correcteur proportionnel les valeurs obtenus sont

$$K_{sp1.1} = 5 \quad K_{sp1.2} = 55 \quad K_{sp2.1} = 2.22 \quad K_{sp2.2} = 27.22$$

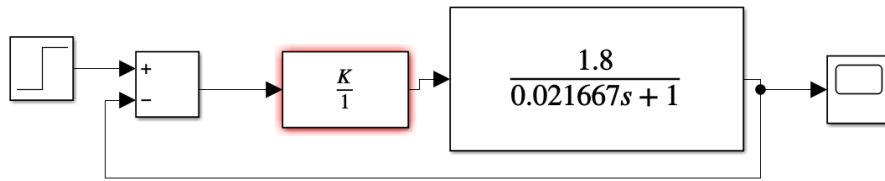
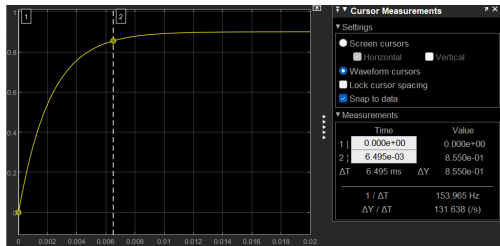


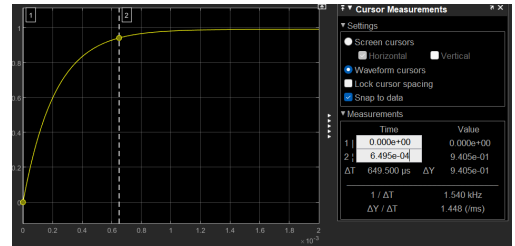
Figure 1.16: Modélisation par schéma-blocks dans Simulink

Dans le logiciel on réalise le schéma de la figure 1.16 en remplaçant K a chaque fois par les valeurs calculées.

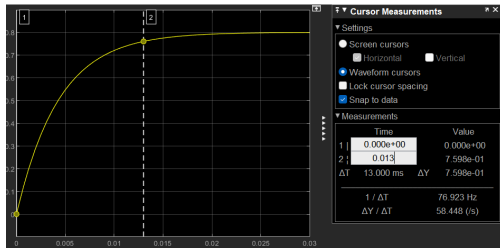
Nos mesures des erreurs statiques sont exactement les que nous avons calculé.



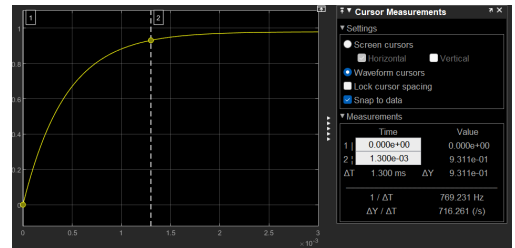
(a) $K_{sp1.1} = 5$



(b) $K_{sp1.2} = 55$



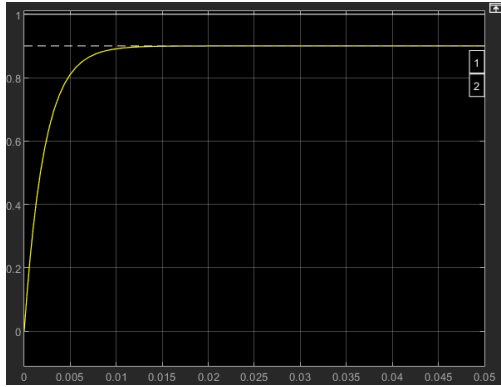
(c) $K_{sp2.1} = 2.22$



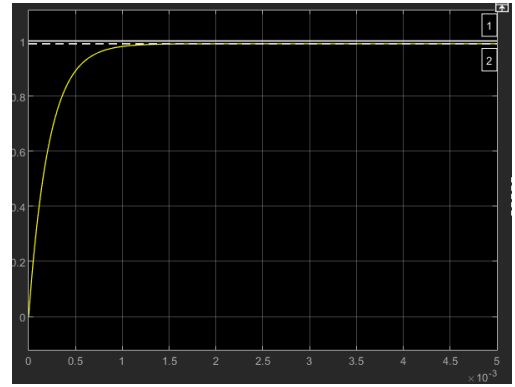
(d) $K_{sp2.2} = 27.22$

Figure 1.18: Réponses simulés, mesure du temps de réponse

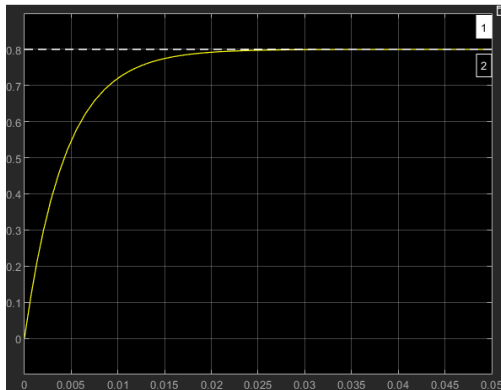
Les valeurs sont, si pas exactement les meme, tres proches des valeurs calculés. On peut alors conclure que les calculs de K sont justes pour vérifier les caractéristiques attendues. On peut également remarquer le fait que, lorsqu'on augmente K , la précision du systeme augmente, c'est a dire que l'erreur statique diminue, et la rapidité du systeme augmente, c'est a dire que la valeur en régime permanent est atteinte dans moins de temps que pour les valeurs plus faibles de K (voir les figures).



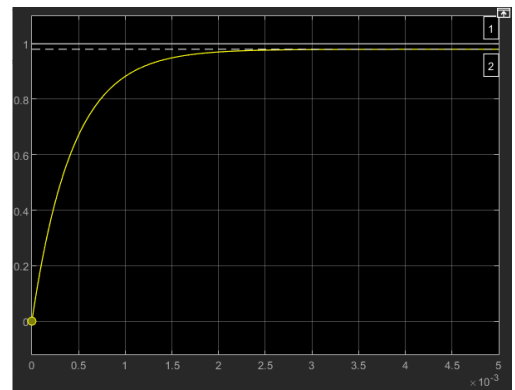
(a) $K_{sp1.1} = 5$



(b) $K_{sp1.2} = 55$



(c) $K_{sp2.1} = 2.22$



(d) $K_{sp2.2} = 27.22$

Figure 1.17: Réponses simulés pour les K différentes, mesure de l'erreur

Correcteur intégral

Pour cette section on va simuler le systeme avec un correcteur proportionnel. On modélisera dans Simulink comme dans la figure 1.19.

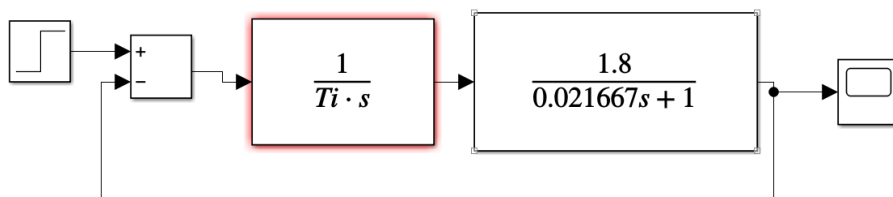
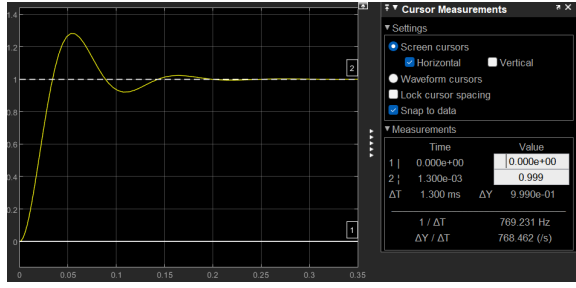


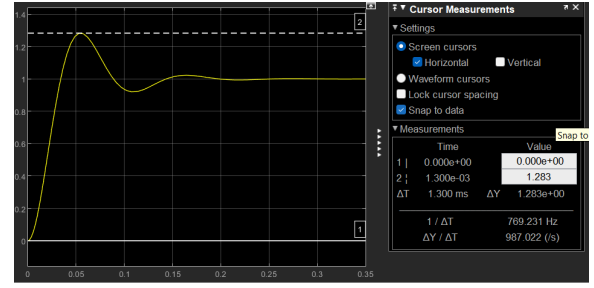
Figure 1.19: Modélisation par schéma-blocks dans Simulink

On prendra les valeurs

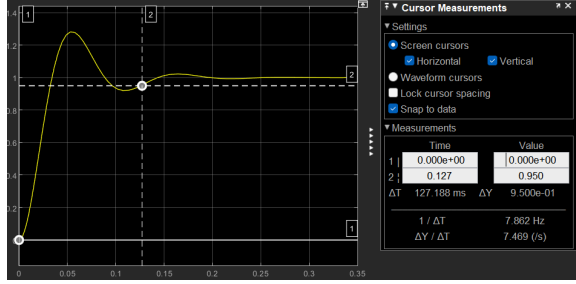
$$T_{i1} = \tau \quad T_{i2} = 5\tau \quad T_{i3} = 10\tau$$



(a) Erreur statique

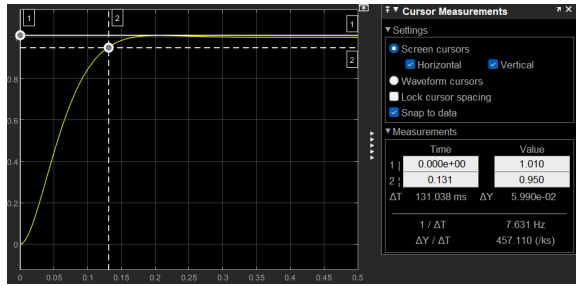


(b) Mesure de premiere dépassement

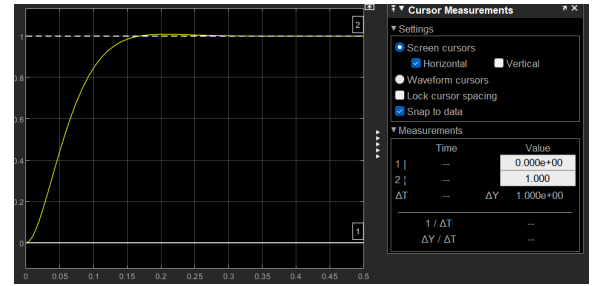


(c) Mesure du temps de réponse

Figure 1.20: Réponses simulés, mesures des caractéristiques pour $T_i = \tau$

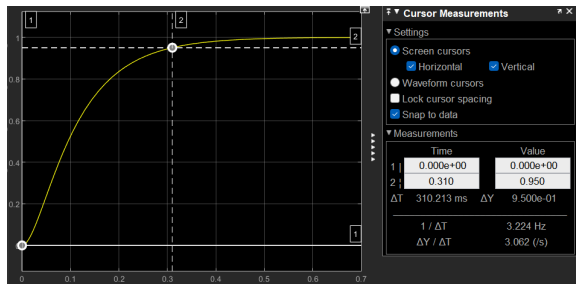


(a) Premiere dépassement, temps de réponse

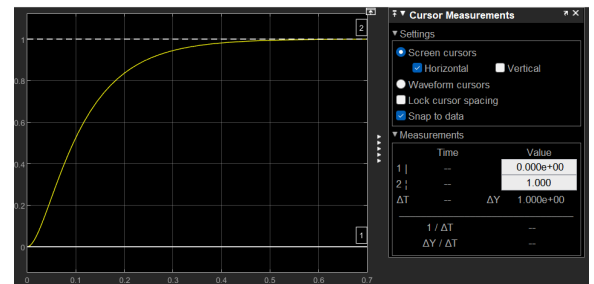


(b) Erreur statique

Figure 1.21: Réponses simulés, mesures des caractéristiques pour $T_i = 5\tau$



(a) Temps de réponse



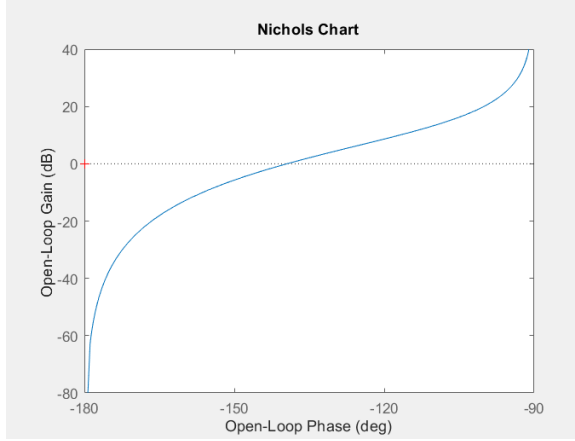
(b) Erreur statique

Figure 1.22: Réponses simulés, mesures des caractéristiques pour $T_i = 10\tau$

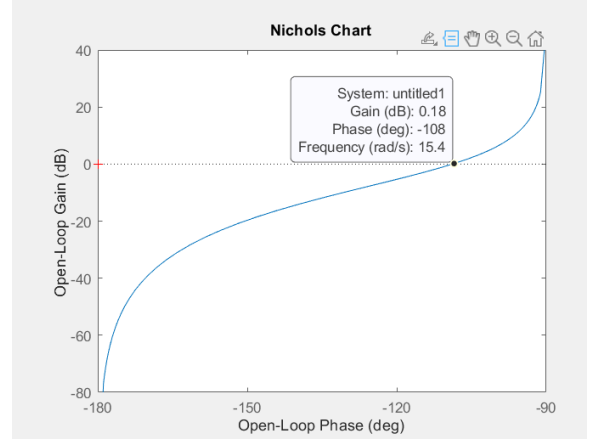
D'après les resultats obtenues (figures 1.20, 1.21 1.22), on remarque que que nos conclusion de la chapitre précédente sur le changement du dynamique du systeme sont cohérentes: plus la valeur de T_i est grande plus le systeme est lant (moins rapide), moins il présente des dépassements. On peut ce conclure grace aux temps de réponses mesurées: pour T_{i1} c'est $127.188ms$, pour T_{i2} c'est 131.038 (presque le meme) et pour T_{i3} c'est $310.213ms$. L'erreur est le meme pour tous les systemes , c'est 0. Pour ce mesurer, on cherche le nombre

$$1 - \frac{\text{valeur mesurée en régime permanent}}{\text{valeur attendu en régime permanent}}$$

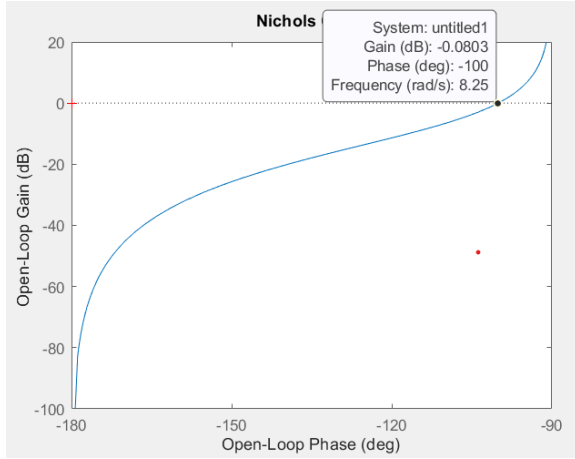
La valeur du premiere dépassement diminue, ainsi d'après tout les éléments présentés on peut conclure que le systeme devient moins nerveux en augmentant T_i .



(a) $T_{i1} = \tau$



(b) $T_{i2} = 5\tau$



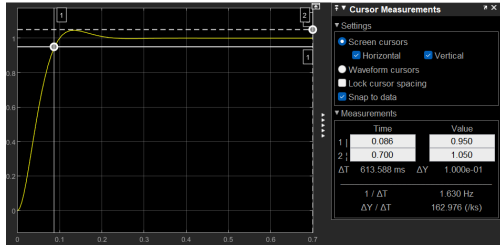
(c) $T_{i3} = 10\tau$

Figure 1.23: Diagrammes de black pour les τ différents

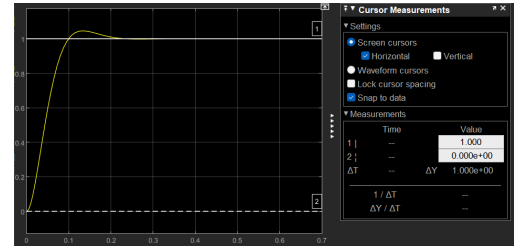
D'après les diagrammes de Black (figures 1.23), on peut calculer la *marge de phase*:

$$\Delta\Phi_1 = 180 - 139 = 41deg \quad \Delta\Phi_2 = 180 - 108 = 72deg \quad \Delta\Phi_3 = 180 - 100 = 80deg$$

On peut en conclure que plus τ augmente, plus T_i augmente, plus la marge de phase est grande, qui implique que la stabilité du systeme augmente si T_i augmente.



(a) Mesure première dépassement, temps de réponse



(b) Mesure erreur statique

Figure 1.24: Simulation avec $T_i = 0.0764$

Lorsqu'on applique le T_i trouvé dans la partie précédente pour avoir un premier dépassement de 5% ($T_i = 0.0764$) on mesure un premier dépassement de 5%, un temps de réponse de 86ms et une erreur statique nulle (figure 1.24). Dans nos calculs de la section précédente, on a trouvé un temps de réponse de 90ms donc nos résultats sont cohérents.

On peut ainsi comparer les résultats des correcteurs proportionnel et intégral. D'une part, le correcteur proportionnel ne présente jamais des dépassements en corrigeant un système de première ordre, qui garantit que nos composants ne seront pas surchargés. Lorsqu'on augmente la valeur de K pour le correcteur proportionnel on augmente, et lorsqu'on augmente T_i du correcteur intégral, on diminue la nervosité du système. Le correcteur proportionnel présente une erreur statique tandis que l'intégral n'en a pas (pour les entrées type échelon).

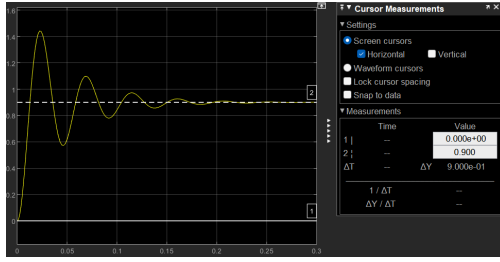
Systeme 1	Calcule	Simulation
Correcteur proportionnel pour erreur statique de 10%, $K = 5$	temps de réponse = 6.5ms, erreur statique = 10%	temps de réponse = 6.495ms, erreur statique = 10%
Correcteur proportionnel pour erreur statique de 1%, $K = 55$	temps de réponse = 0.65ms, erreur statique = 1%	temps de réponse = 0.6495ms erreur statique = 1 %
Correcteur proportionnel temps de reponse a 5% 5 fois plus petit par rapport a en boucle ouverte, $K = 2.22$	temps de réponse = 13ms, erreur statique = 20%	temps de réponse = 13ms, erreur statique = 20%
Correcteur proportionnel temps de reponse a 5% 50 fois plus petit par rapport a en boucle ouverte, $K = 27.22$	temps de réponse = 1.3ms, erreur statique = 2 %	temps de réponse = 1.3ms, erreur statique = 2 %
Correcteur intégrale dépassement 5% $T_i = 0,0764$	temps de réponse = 90ms, erreur statique = 0%, premiere dépassement = 5%	temps de réponse = 86ms, erreur statique = 0%, premiere dépassement = 5%
Correcteur intégrale $T_i = \tau$	-	temps de réponse = 127ms, erreur statique = 0%, premiere dépassement = 28%
Correcteur intégrale $T_i = 5 \tau$		temps de réponse = 131ms, erreur statique = 0%, premiere dépassement = 1%
Correcteur intégrale $T_i = 10 \tau$		temps de réponse = 310ms, erreur statique = 0 %

Figure 1.25: Bilan apres simulation

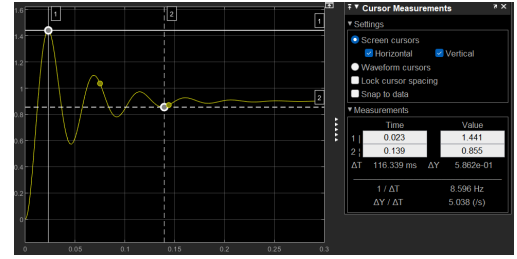
1.4.2 Systeme d'ordre 2

Correcteur proportionnel

Dans un premier temps, on va simuler le systeme 2, modelisé par une fonction de transfert d'ordre 2, avec un correcteur proportionnel. On prendra les valeurs de K trouvés précédemment: $K_{2,1} = 4.5$, $K_{2,2} = 24.5$.



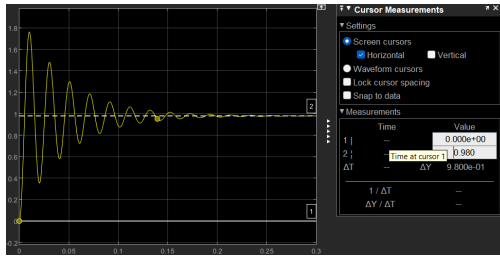
(a) Erreur statique



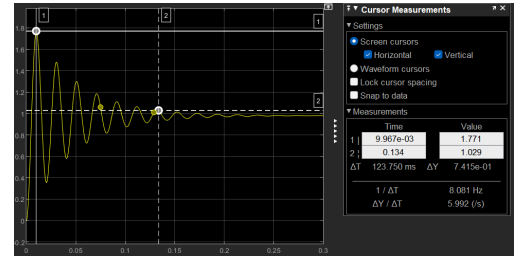
(b) Mesure premiere dépassement, temps de réponse

Figure 1.26: Simulation avec $K = 4.5$

Pour $K_{2,1} = 4.5$ on trouve une erreur statique de 10%, une premiere dépassement de 44.1% et un temps de réponse a 5% de 0.139s ce qui sont cohérentes avec les résultats précédentes (sauf le dépassement [on a trouvé 60% mais mesuré 44.1%], la lecture des abaques peut entrainer des erreurs).



(a) Erreur statique



(b) Mesure premiere dépassement, temps de réponse

Figure 1.27: Simulation avec $K = 24.5$

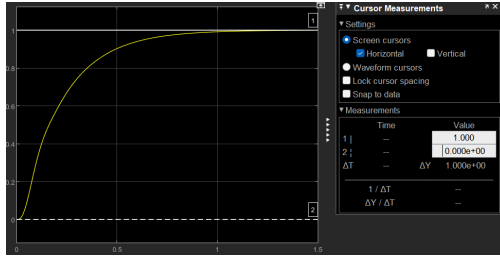
Pour $K_{2,2} = 24.5$ on retrouve une erreur statique de 2%, et on mesure une premiere dépassement de 77.1% et un temps de réponse de 0.134s. Ici les résultats sont plus cohérentes avec celles calculées.

On peut conclure que plus K augmente, plus le système devient nerveux: les premières dépassements sont de plus en plus importantes, mais l'erreur statique diminue. Une premiere dépassement de presque 80% dans le cas de $K_{2,2}$ peut être considéré comme trop grand dans certains applications, ainsi, augmenter la valeur de K afin de diminuer l'erreur statique n'est peut être pas la meilleure solution.

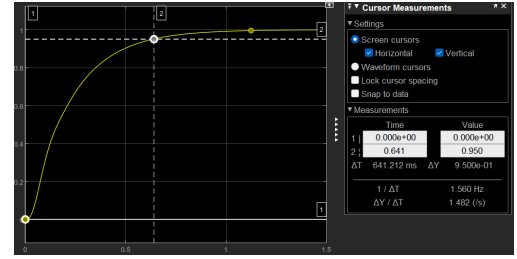
Correcteur intégral

On peut dans un second temps regarder l'influence d'un correcteur intégrale sur la correction du système. On prendra les valeurs définies dans le TP:

$$T_{i1} = 0.456 \quad T_{i2} = 0.22805 \quad T_{i3} = 0.114025 \quad T_{i4} = 0.022805$$



(a) Erreur statique

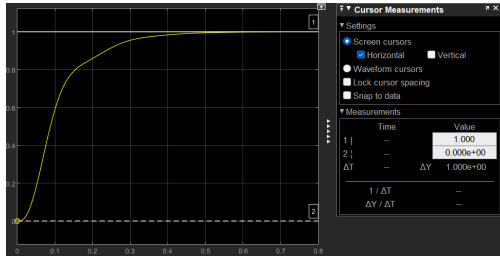


(b) Temps de réponse

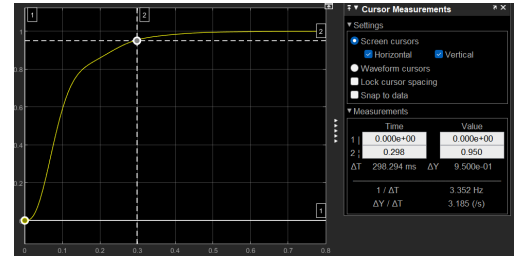
Figure 1.28: Simulation avec $T_i = 0.456$

$$t_{r5\%T_{i1}} = 0.641s$$

Pour le premiere $T_i = 0.456$ on retrouve une erreur statique nulle, un temps de réponse de $0.641s$ et il n'y a pas de dépassement.



(a) Erreur statique

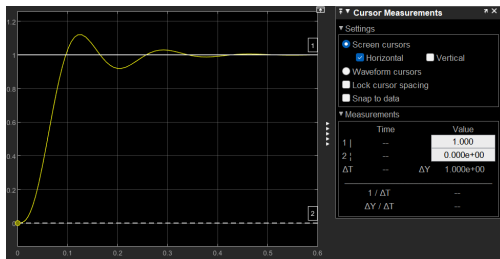


(b) Temps de réponse

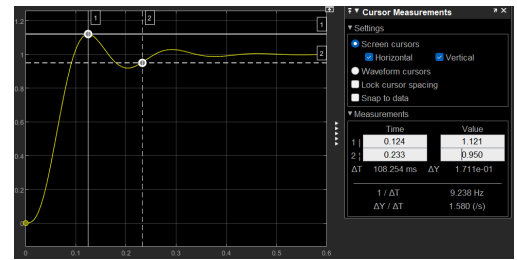
Figure 1.29: Simulation avec $T_i = 0.22805$

$$t_{r5\%T_{i2}} = 0.298s$$

Pour $T_i = 0.22805$ on retrouve une erreur statique nulle, un temps de réponse de $0.298s$ et il n'y a pas de dépassement. La rapidité du systeme a augmenté en diminuant la valeur de T_i



(a) Erreur statique

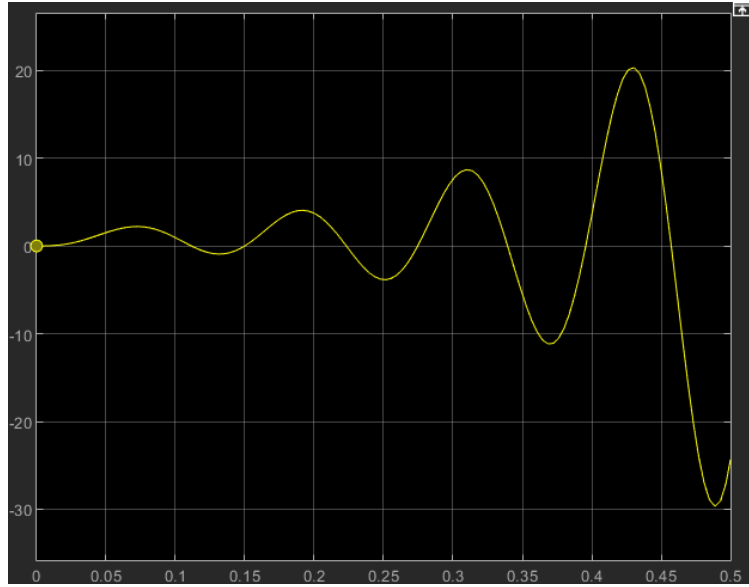


(b) Temps de réponse, premiere dépassement

Figure 1.30: Simulation avec $T_i = 0.114025$

$$t_{r5\%T_{i3}} = 0.233s$$

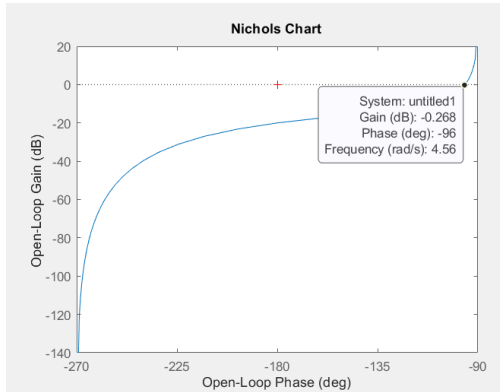
Pour $T_i = 0.114025$ on retrouve une erreur statique nulle, un temps de réponse de $0.233s$ et une premiere dépassement de 12.1% . On remarque que c'est la nervosité du systeme qui augmente en diminuant T_i , puisqu'avant il n'y avait pas de dépassement.



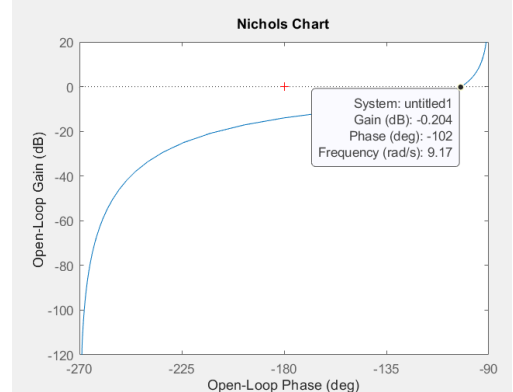
(a) Systeme instable

Figure 1.31: Simulation avec $T_i = 0.215982$

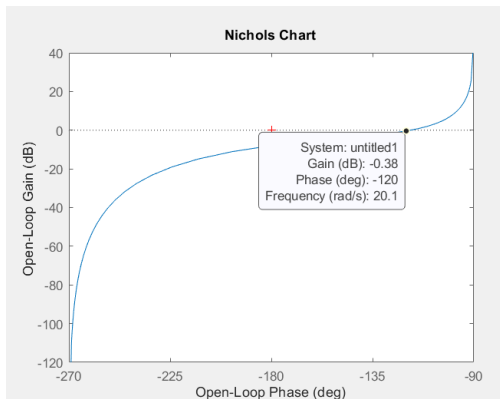
Pour $T_i = 0.022805$ on trouve que le systeme devient instable. En effet le systeme n'a pas l'aire de converger vers une valeur spécifique, le régime transitoire n'a pas l'aire de se finir.



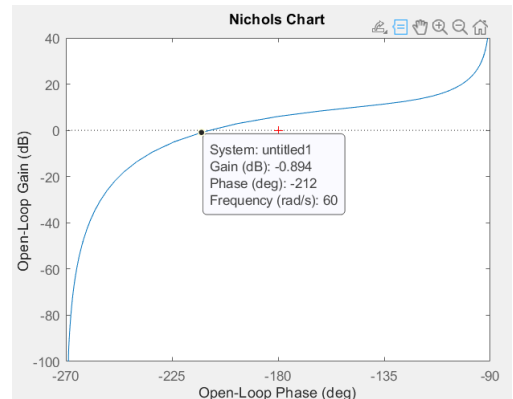
(a) $T_i = 0.456$



(b) $T_i = 0.22805$



(c) $T_i = 0.114025$



(d) $T_i = 0.022805$

Figure 1.32: Diagrammes de Black

On remarque sur les diagrammes de Black, que plus T_i est grand, plus le systeme est

stable puisque la marge de phase augmente, mais pour $T_i = 0.022805$ la marge de phase devient négatif, ainsi le système n'est pas stable.

Système 2	Calculé	Simulation
Correcteur proportionnel pour erreur statique de 10%, $K = 4.5$	temps de réponse = 144ms, première dépassement = 60%, erreur statique de 10%,	temps de réponse = 139 ms, première dépassement = 44.1%, erreur statique = 10%
Correcteur proportionnel pour erreur statique de 2%, $K = 24.5$	temps de réponse = 129ms, première dépassement = 80%	temps de réponse = 134ms, première dépassement = 77.1%, erreur statique = 2%
Correcteur intégrale $T_i = 20/w_0$	-	temps de réponse = 641ms, erreur statique = 0%
Correcteur intégrale $T_i = 10/w_0$	-	temps de réponse = 289ms, erreur statique = 0%
Correcteur intégrale $T_i = 5/w_0$	-	temps de réponse = 233ms, erreur statique = 0%, premier dépassement = 12.1%
Correcteur intégrale $T_i = 1/w_0$	-	système instable

Figure 1.33: Bilan après simulation