1. Interpolation I: Lagrange Interpolation

§1.1 Lagrange Interpolation

~~§1.1~~ Problemstellung: (x_i, y_i) $i = 0, \dots, n$ Werte

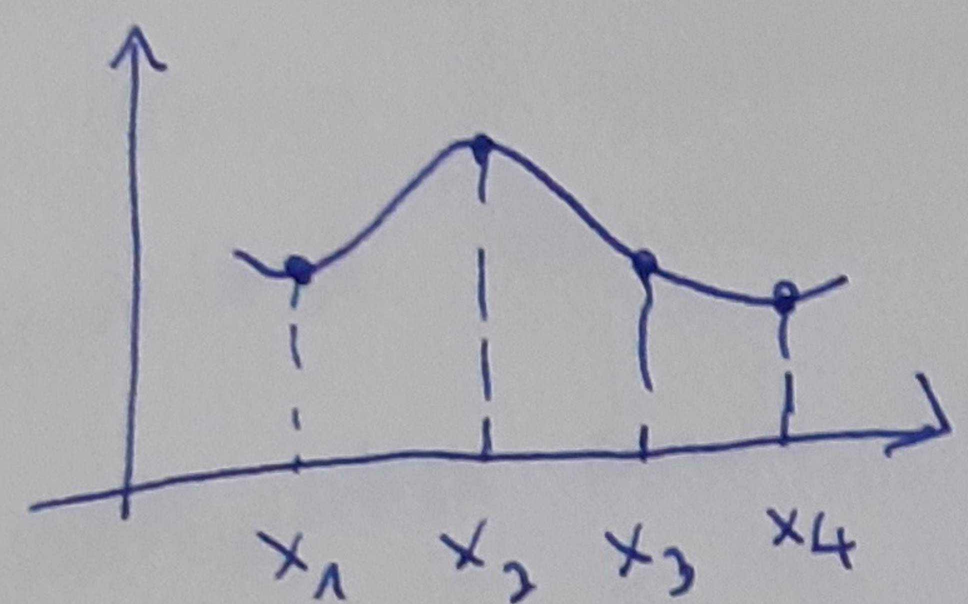
Stützstellen (oder Knoten)

(1)

Finde $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

so dass $P_n(x_i) = y_i$ $\quad i = \overline{0,n}$

grad $P_n = n$



eigentlich sind $a_0, \dots, a_n$ gesucht

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_n x_0^n = y_0$$

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1$$

$$\dots$$

$$a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n$$

$n+1$ Gl. $\quad n+1$ Unbek.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & x_n^n \\ 1 & x_n & \dots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Vandermonde Matrix $V(x_0, x_1, \dots, x_n)$

$$\det V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \neq 0$$

falls $x_i \neq x_j$

S1. Das Interpolationsproblem (1) hat eine eindeutige Lösung (falls $x_i \neq x_j$).

Lagrange: (wir wollen nicht $V(x_0 \dots)^{-1}$ berechnen

aber wir definieren

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \qquad j = \overline{0,n}$$

Kronecker

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

deshalb

$$P_n(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, l_i(x)$$

Lagrange

$$P_n(x_j) = L_n(x_j) = y_j.$$

§1.2. Interpolation als Rekonstruktion von Funktionen

Problemstellung: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ unbek. Fkt.

aber $f(x_i) = y_i$ bekannt

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

Wir wollen f approximieren (insbesondere außerhalb der Stützstellen $f(x) \approx ?$ $x \neq x_i$)

Approximation durch Lagrange Interpolation

$$f(x) \approx L_n(x)$$

Wie "gut" ist diese Approx.?

Wie messen wird den "Abstand"

Umweg 1: Wie messen wir den "Abstand" zw. zwei Funktionen? Antwort: Norm

Def: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig (i.e. $f, g \in C[a,b]$) (Raum stetiger Fkt

$$\|f - g\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

2. (Fehlerabschätzung für die Approx. durch Lagrange Interpolation)

Es sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ $n+1$ mal stetig diff-bar.

Dann gilt:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot \underbrace{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}_{u(x)}$$

für ein bestimmtes $\xi \in (a,b)$.

Also

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|u\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty.$$

hängt von x_i ab.

hängt nicht von Stützstellen ab

Beispiel: Das Runge Phenomön

Mehr Stützstellen $\Rightarrow$ Polynom höheren Grades

$\Downarrow$

mehr Oszillation

$\Downarrow$

größere Fehler

Fehler: $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ kann wenn $n \to \infty$ explodieren

$\|u\|_\infty$ für schlechte x_i immer größer.

Beweis:

es sei $x \neq x_i$, $x \in [a,b]$

wir def

$$F:[a,b] \to \mathbb{R} \qquad F(t) = \begin{vmatrix} u(t) & R_n(t) \\ u(\underline{x}) & R_n(\underline{x}) \end{vmatrix}$$

hier $u(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) \quad \text{(Rest / Fehler)}$$

$F(t = x_i) = 0$, (wegen $R_n(t = x_i) = 0$ und $u(t = x_i) = 0$) * $F(x) = 0$

$t = x$

Also hat F insgesamt $\underbrace{n+1+1}_{n+2}$ Nullstellen

T Rolle $\Rightarrow$ $F^{(n+1)}$ hat wenigstens eine Nullstelle ξ

Aber $F^{(n+1)}$ kann explizit berechnet werden

$$F^{(n+1)}(\underline{t}) = R_n(x) \cdot (n+1)! - u(x) \big(f^{(n+1)}(\underline{t}) - \underbrace{L_n^{(n+1)}(t)}_{=0} \big)$$

weil grad $L_n = n$

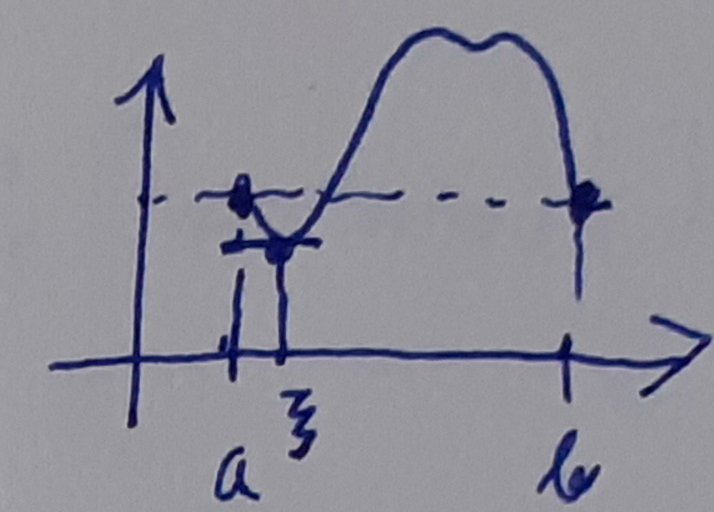
$$0 = F^{(n+1)}(\underline{\xi}) = \underbrace{R_n(x)}_{f(x) - L_n(x)} \cdot (n+1)! - u(x) f^{(n+1)}(\underline{\xi})$$

Umweg 2: Der Satz von Rolle

T (Rolle) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

- $f(a) = f(b)$
- f stetig $[a,b]$
- f diff-bar (a,b)

$\Rightarrow \exists\, \xi$ s.d. $f'(\xi) = 0$



§ 1.3. Dividierte Differenzen

es seien weiterhin x_i, $f(x_i) = y_i$ bekannt

Iterativ können folgende dividierte Diff-zen berechnet werden

$$
\begin{array}{lllll}
f(x_0) & & & & \\
 & \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} =: [x_0, x_1; f] & & & \\
f(x_1) & & [x_0, x_1, x_2; f] & & \\
 & \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} =: [x_1, x_2; f] & & [x_0, x_1, x_2, x_3; f] & \\
f(x_2) & & [x_1, x_2, x_2; f] & & \\
 & \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} =: [x_2, x_3; f] & & & \\
f(x_3) & & & &
\end{array}
$$

$$
[x_0, \dots, x_n; f] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \dots & & & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix}}{\det V(x_0, \dots, x_n)}
$$

Das Lagrange Interpolationspolynom kann mit Hilfe Divid. Diff-zen geschrieben werden

<u>Newton</u>: $L_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)[x_0, x_1; f] + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})[x_0, x_1, \dots, x_n; f]$

Divid. Diff-zen haben die Eigenschaft: $[x_0, \dots, x_n; f] = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

HÜ 1: Beweise dass

$$\det V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Es folgt: Spline Interpolation

"Optimale" Interpolation.

HÜ 2: Es sei

$$F : [a\ b] \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \begin{vmatrix} u(t) & R_n(t) \\ u(x) & R_n(x) \end{vmatrix}$$

wobei $u(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x).$$

Man berechne $F^{(n+1)}(x) = ?$