4. und 5. Labor

Lineare und nichtlineare kleinste Quadrate

1. Lineare kleinste Quadrate.

a) Man schreibe ein Programm, welches das k. Q. Problem für gegebene Daten und ein (lineares) Modell löst.

b) **Zurückführung auf ein lineares Problem.** In Anwendungen sind oft nichtlineare Modelle zu erwarten, aber diese (und die entsprechenden k. Q. Probleme) lassen sich manchmal auf lineare Modelle zurückführen. Zum Beispiel, erwartet man für den folgenden Daten (CoV19 Fälle in Rumänien in den ersten 18 Tagen)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
y	1	1	3	3	3	3	4	6	6	9	13	15	17	29	47	59	89	123

ein exponentielles Wachstum, aber eine Linearisierung durch $\tilde{y} = \ln y$ ist möglich. Man wende lineare k. Q., mit $f(x, a, b) = ax + b$, auf die $x, \tilde{y}$-Daten und finde dann auch die passende exponentielle Regression $\tilde{f}(x, a, b) = e^{ax+b}$. Stelle die $(x, \tilde{y})$- und (x, y)-Daten dar mit den entsprechenden linearen bzw. exponentiellen Regressionskurven dar.

c) **Extrapolation.** Man finde den Wert welches das (optimale) Modell für $x = 30$ (Tag 30 der CoV19 Epidemie) angibt. So kann man Information aus dem Messbereich auch ausserhalb dessen extrapolieren. Die Anzahl war 1029. Wie gut ist die Vorhersage durch das Modell?

d) **Fehlende Daten.** Man wiederhole a)-c) für den Datensatz mit fehlendend Daten

x	1	4	7	10	13	16
y	1	3	4	9	17	59

Wie gross sind die Unterschiede zwischen den optimalen Parametern des Modells (ohne bzw. mit fehlenden Daten)? Die neue Regressionsgerade bzw. Regressionskurve sollten zu den alten Abbildungen zugefügt werden. Wie gut ist die Vorhersage für $x = 30$ jetzt?

2. Nichtlineare kleinste Quadrate.

Nicht immer können nichtlineare Probleme auf lineare zurückgeführt werden. Das Weibull Modell $W(x, a, b) = abx^{b-1}e^{-ax^b}$ ist ein solches, echt nichtlineares, Beispiel.

a) Man verwende einen Levenberg-Marquardt-Löser um dieses Modell an den Daten

x	0.132	0.511	0.701	0.891	1.081	1.27	1.46	1.65	1.839	2.029	2.219
y	0.1	0.543	0.506	0.606	0.622	0.569	0.453	0.438	0.316	0.29	0.195

anzupassen. Finde a und b mit wenigstens drei genaue Ziffern nach der Komma.

b) **Modellreduktion.** Sind alle Parameter des Modells wesentlich? Man vergleiche die bei a) erhaltene Regressionskurve mit der welche sich durch das reduzierte Modell $W_r(x, a) = 2axe^{-ax^2}$ ergibt.

c) Man schreibe ein eigenes Levenberg-Marquardt-Löser (Programm) für das reduzierte Modell.