Lab 1

Tuesday, March 17, 2020 5:53 PM

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

a) 1. $x \in \{-1,1\}; y \in \{-1;1\}$

Allgemein: $f \searrow$ auf $(-\infty, 0\}$ und
$f \nearrow$ auf $\{0, +\infty)$

Der minimale Punkt auf $\mathbb{R}$ ist $x=0$ mit $f(0)=0$

Beweis: $f'(x) = \frac{(x^2)'(x^2+1) - x^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$f'(-1) < 0 \Rightarrow f \searrow$
$f'(1) > 0 \Rightarrow f \nearrow$
$\Rightarrow x = 0$ einziger min Punkt

Also für $x \in [-1,1\}$: $y_{max} = f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$, $y_{min} = f(0) = 0$

Für $x \in [-100, 100\}$: $y_{max} = f(100) = f(-100) = f\left(\frac{10^4}{10^4+1}\right)$, $y_{min} = f(0) = 0$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = 1$

(das gleiche für $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$)

$\Rightarrow y = 1$ ist horizontale Asymptote nach $\pm\infty$ für f

c) $f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ $\quad f'(0) = 0$

$f''(x) = \frac{2(x^2+1)^2 - 2x(x^4+2x^2+1)'}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^4+2x^2+1) - 2x(4x^3+4x)}{(x^2+1)^4} =$

$= \frac{2x^4+4x^2+2-(8x^4+8x^4)}{(x^2+1)^4} = \frac{2-4x^4-4x^2}{(x^2+1)^4}$

$f''(0) = \frac{2}{1^2} = 2$

$(T_2 f)(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a)$

für $a = 0 \Rightarrow (T_2 f)(x) = 0 + \frac{x-0}{1!} \cdot 0 + \frac{(x-0)^2}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (T_2 f)(x) = x^2$

Also ist $T(x) = x^2$