2. Interpolation II: Spline Interpolation

Problemstellung (Rekonstruktion)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ unbekannt

$f(x_i) = y_i$ bekannt $\quad i = \overline{0,n}$

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ Knoten / Stützstellen

Finde eine Approximation von f

$f(x) \approx L_n(x)$ für $x \neq x_i$

$f(x_i) = L_n(x_i)$

Approximation / Rekonstruktion durch Lagrange Interpolation (letztes Mal)

Vorteile:

- Polynome sind einfache Fktionen
- Problem hat eindeutige Lösung

Nachteile

- $n \nearrow$ $(n >> 1)$ $\Rightarrow$ starke Oszillationen von $L_n(x)$

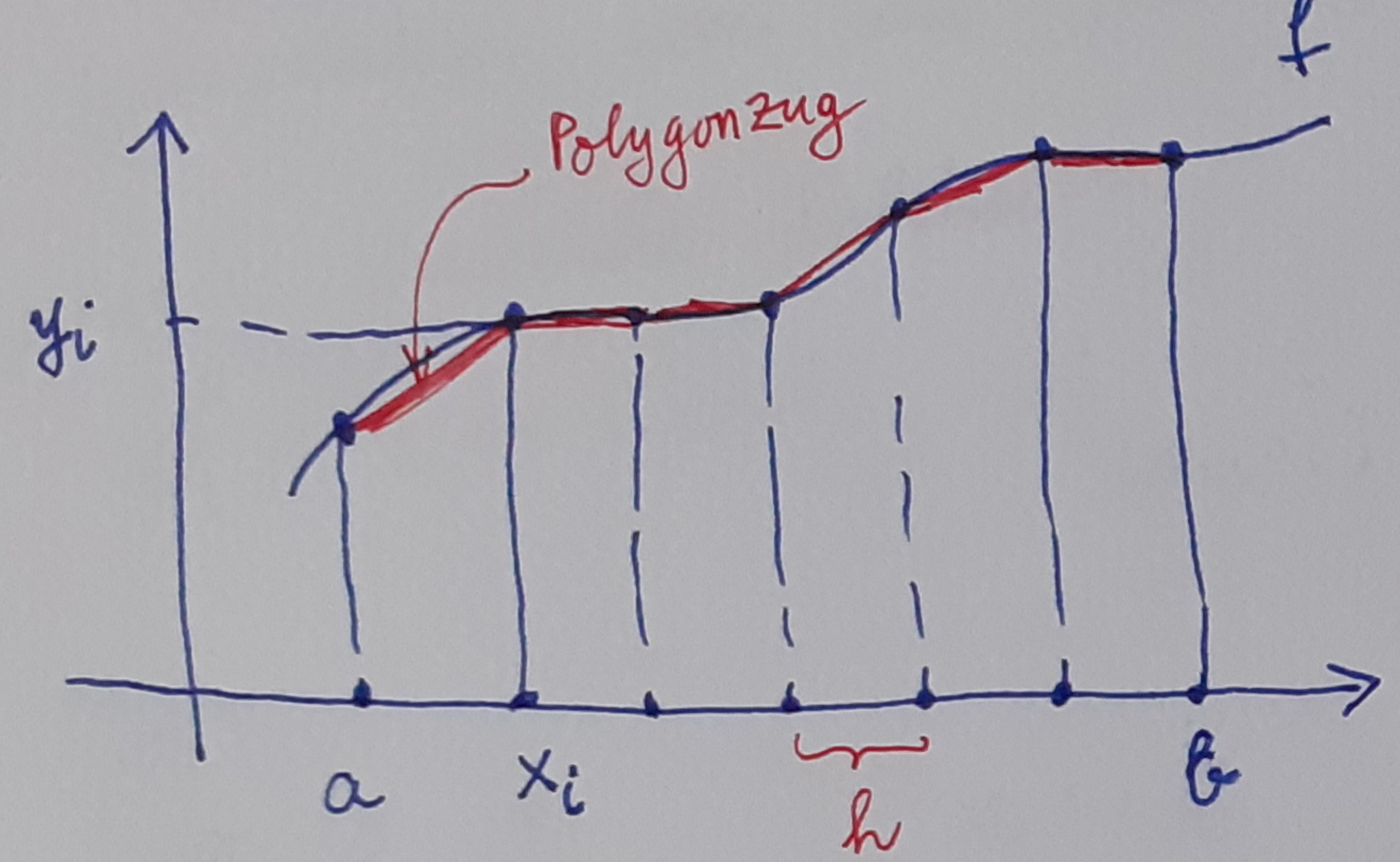
Ziel der Spline Interpolation

- weiterhin Polynome anwenden
- interpolierende Fkt. soll glatt (zwei mal stetig diff-bar) sein
- aber mit Polynome niedrigen Grades

Deshalb: stückweise Interpolation =

= für jedes $[x_{i-1}, x_i]$ mit ein anderes Polynom die "glatt" aneinander "geklebt" werden.

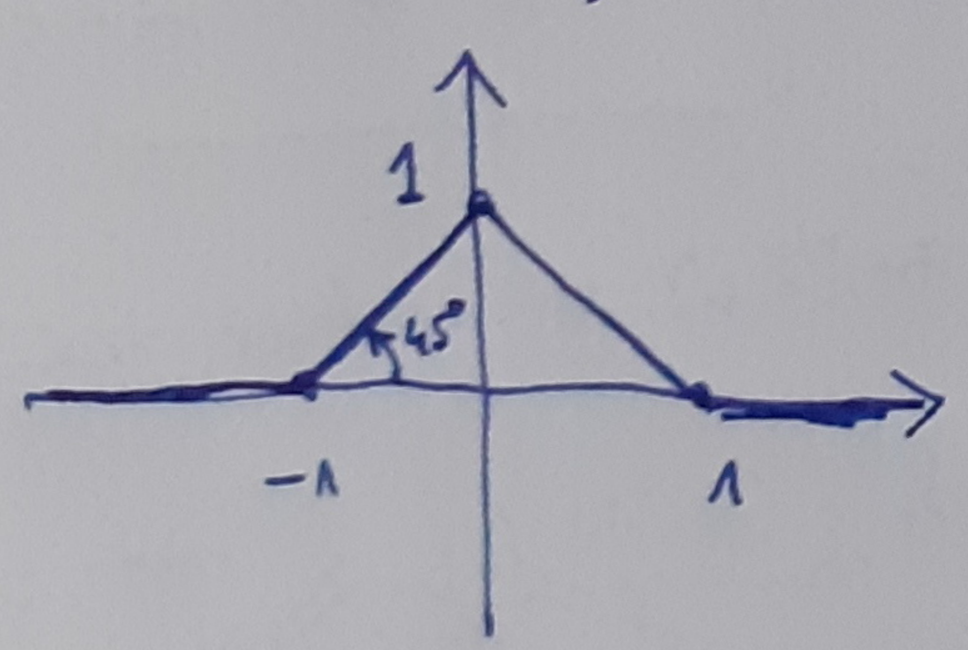
§2.1. Stückweise Interpolation mit Polynome ersten Grades (lineare Spline Interpolation)



Die "Dachfunktion"

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ x+1, & -1 \le x \le 0 \\ 1-x, & 0 < x \le 1 \\ 0, & 1 < x \end{cases}$$

Anwendung FEM Finite Element Method.



x_i äquidistant ($x_i - x_{i-1} = h \quad \forall i = \overline{1,n}$)

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, \varphi\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

$y_i = f(x_i)$

Bemerkung: (Nachteil) ist nicht glatt (aber Interpolation...)

(Vorteil) Einfachheit

T_3 (Fehler der stückweise lin. Interpolation)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$ (2 mal stetig diff.)

$M := \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

weiterhin $\{x_i\}$ äquidistante Zerlegung von $[a,b]$ mit Schritt h, $f(x_i) = y_i$ gegeben. Dann

(i) $\underbrace{\|f - s\|_\infty}_{\overset{\text{Def}}{=} \max_{x \in [a,b]} |f(x) - s(x)|} \le \frac{h^2}{8} M$

(ii) $|f'(x) - s'(x)| \le \frac{h}{2} M \quad x \in [a,b]$, $x \ne x_i$!

$s'(x_i) \nexists$ (nicht stetig)

Ohne Beweis

Wichtig weil:

- mehr Knoten (n größer) $\Rightarrow h = \frac{b-a}{n}$ wird kleiner $\Rightarrow h^2$ noch kleiner
- Approx. auch für die Ableitung.

§ 2.2. Kubische Spline Interpolation

Der einzige Nachteil der lin. Spline Interpolation war die (fehlende) Glattheit.

Jetzt: Kubische Splines

$$\mathcal{S}_3 = \{ s \in C^2[a,b],\ s\big|_{[x_{i-1},x_i]} \text{ Polynom 3. Grades} \}$$

glatt geklebt.

$$s''(x)\big|_{[x_{i-1},x_i]} = a_i x + b_i$$

$$s'''(x)\big|_{[x_{i-1},x_i]} = \text{konst.}$$

$\boxed{\text{Optimalität ?!?}}$

wir suchen $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, $u \in C^2[a,b]$

mit $\underbrace{\int_a^b \underbrace{(u''(x))^2}_{\sim \text{„elastische Energie" in } x} dx}_{\mathcal{E}(u)} \to$ minimal

T 4. Kubische Spline Interpolation ist Optimal und hat eindeutige Lösung.

Bedingungen und Unbek.

- $i=\overline{0,n}$ $\quad s(x_i) = f(x_i) = y_i$ die bekannten Werte der Fkt. f.

  ↑ kubisches Spline

  $(n+1)$ Interpolationsbedingungen

- $k = 0,1,2$, $i = \overline{1,n-1}$ $\quad s^{(k)}(x_i - 0) = s^{(k)}(x_i + 0)$ ← innere Knoten

  $\Sigma\ 3(n-1)$ Bedingungen (kleben)

- $s\big|_{[x_{i-1},x_i]}$ ist Polyn. 3. Grades

  $\Rightarrow$ 4 Parameter (Konstanten) $\times$ n-Intervalle

$$\underbrace{4n}_{\text{Unbek.}} - \underbrace{3(n-1) - (n+1)}_{\text{Beding.}} = +2$$

Wir können zwei weitere Bedingungen stellen!

z. B. $s''(\underset{x_0}{a}) = s''(\underset{x_n}{b}) = 0$

natürliche Splines

T 4. (Existenz, Eindeutigkeit, Optimalität)

$f \in C^2[a,b]$ gegeben mit

$f''(x_0=a) = f''(x_n=b) = 0$

$\exists!\ s \in \mathcal{S}_3$ (eine eindeutig kub. Spline existiert) so dass

- $s(x_i) = f(x_i)$
- s ist Optimal (im Sinne der elastischen Energie)

d.h. $\mathcal{E}(s) \leq \mathcal{E}(u)$ $\forall u \in C^2[a,b]$ mit $u(x_i) = f(x_i)$

Bewei's:

$\boxed{\text{1. Minimalität}}$

$u \in C^2[a,b]$, $u(x_i) = f(x_i)$ $i = \overline{0,n}$

$s \in \mathcal{S}_3$ mit $s(x_i) = f(x_i)$ —"—

$$0 \leq \mathcal{E}(u-s) = \int_a^b (u''(x) - s''(x))^2 dx$$

$$= \int (u'')^2 - 2\int u'' s'' + \int (s'')^2$$

Trick

$$= \int (u'')^2 - \underbrace{2\int (u''-s'')s''}_{=0} - \int (s'')^2$$

wichtig: der 2. Term verschwindet

- $$\int_a^b (u''-s'')s''\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u''-s'')s''\,dx \quad (*)$$
- wir wissen $s'''\big|_{[x_{i-1},x_i]}$ = konst (Polyn. 3. Grades)

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (u''-s'')s'' = (u'-s')s''\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u'-s')\underbrace{s'''}_{\text{konst}}$$

- $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (u'-s')(x)\,dx = u(x_i) - s(x_i) - u(x_{i-1}) + s(x_{i-1}) = 0$$

aber wegen $u(x_i) = s(x_i) = f(x_i)$

- zurück in $(*)$

$$\int_a^b (u''-s'')s'' = \sum_{i=1}^n \Big[(u'-s')s''\Big]_{x_{i-1}}^{x_i}$$

teleskopisch

$$= (u'(x_n)-s'(x_n))\underbrace{s''(x_n)}_{=0} - (u'(x_0)-s'(x_0))\underbrace{s''(x_0)}_{=0}$$

natürliche Splines

Also $\underline{0} \leq \mathcal{E}(u-s) \leq \ldots \leq \underline{\mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(s)}$ $(**)$

2. Eindeutigkeit

Falls s und $\tilde{s}$ beide minimal für $\mathcal{E}$ dann setze $u = \tilde{s}$ in (**) einsetzen

$$\mathcal{E}(s) \le \mathcal{E}(\tilde{s})$$

aber auch $\tilde{s}$ an Stelle von s und s an Stelle von u in (**) was

$$\mathcal{E}(\tilde{s}) \le \mathcal{E}(s) \quad \text{ergibt}$$

$$\longrightarrow \mathcal{E}(\tilde{s}) = \mathcal{E}(s)$$

und daher $\tilde{s}''(x) = s''(x) \quad \forall x \in [a, b]$

aber $\tilde{s}, s$ sind Polyn. 3. Grades und beide interpolieren f.

Integration von $\tilde{s}'' = s''$ ergibt

$\tilde{s} = s$.

Die anderen 3 Fälle sind:

Fall 2. vollständige Randbedingungen

Fall 3. periodische Randbedingungen

Fall 4. not-a-knot Bed. [Helzel, Skript]

3. Existenz

4 verschiedene Fälle

Fall 1. natürliche Splines $(\overset{x_0}{s''(a)} = \overset{x_n}{s''(b)} = 0)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad M_0 \qquad M_n$

Notation
$$M_i = s''(x_i)$$
$$h_i = x_i - x_{i-1}$$
$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}$$
$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$$

Wenn man alle Bedingungen betrachtet mit $M_0 = M_n = 0$ (nat. Splines) kommt man auf ein System $(n-1)\times(n-1)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix}}_{\text{Bekannt}} \underbrace{\begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ \\ M_{n-1} \end{bmatrix}}_{\text{Unbek}} = \underbrace{\begin{bmatrix} [x_0, x_1, x_2; f] \\ \vdots \\ \\ [x_{n-2}, x_{n-1}, x_n; f] \end{bmatrix}}_{\text{bekannt}}$$

welches eindeutige Lösung hat.