

Approximations effectuées pour le programme de post-traitement

Rémi LEMAIRE

VOLOKNA - Pôle Expérience/Électronique

Résumé

Pour réaliser le post traitement des données acquises pendant le vol de la fusée Vokna, nous avons besoin de certaines données en entrée de programme (telles que la masse, la poussée et l'angle par rapport à la verticale). Notre seul moyen d'acquisition de ces données est le Stab' Traj' fourni par C'Space, car des instruments supplémentaires dans la fusée sont en dehors de notre capacité.

Ce document sert aussi à introduire toutes les notations que nous allons utiliser dans les calculs que nous allons faire, ainsi que les formules dans lesquels elles sont appliquées. Ceci à aussi pour but de regrouper tous les calculs qui seront au final présents dans le tableaux Excels créés pour pouvoir facilement trouver les potentielles sources d'erreur.

Nous avons donc extrait toutes les informations du Stab' Traj' le plus à jour à disposition pour extraire des colonnes de calcul l'angle par rapport à l'horizon (noté β dans le Stab' Traj'), la poussée fournie par le propulseur (modèle **Barasinga Pro54-5G**) et le débit de masse de ce dernier.

Sommaire

1	Notations	2
1.1	Grandeurs mesurées	2
1.2	Constantes	2
1.3	Grandeurs extraites et modélisées	2
1.4	Grandeurs étudiées	3
2	Modélisation des grandeurs extraites	4
2.1	Poussée	4
2.1.1	Modélisation	5
2.1.2	Courbes obtenues	6
2.1.3	Écart à la référence	7
2.2	Dérivée temporelle de la masse	7
2.2.1	Modélisation	8
2.2.2	Courbes obtenues	9
2.2.3	Écart à la référence	10
2.3	Masse totale	10
2.3.1	Modélisation	12
2.3.2	Courbes obtenues	13
2.3.3	Écart à la référence	13
2.4	Angle par rapport à l'horizon	14
2.4.1	Modélisation	14
2.4.2	Courbes obtenues	15
2.4.3	Écart à la référence	16
3	Formules pour les grandeurs étudiées	17

Chapitre 1

Notations

1.1 Grandeurs mesurées

Ce sont les grandeurs que nous mesurons dans notre fusée, à l'aide du chronomètre interne de la carte, d'un accéléromètre, d'un gyroscope et de jauges de déformations.

- Temps : t (en s)
- Accélération : a_x, a_y, a_z (en m/s^2)
- Vitesse angulaire : $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ (en Deg/s)
- Jauges de déformation : $j1, j2, j3, j4, j5$

1.2 Constantes

Les paramètres suivants sont soit des constantes physiques, soit varient si peu qu'ils sont considérés constant sans impact sur les résultats.

- La masse totale avant décollage : m_0
- La masse au dessus des jauges : m_{sj} (en kg)
- Le module d'Young de l'aluminium : E (en Pa)
- La surface d'un 'U' : S (en m^2)
- Le nombre de poutres : n
- La surface aérodynamique : S_a (en m^2)
- La constante de pesanteur : g (en m/s^2)
- Le coefficient de traînée : C_x
- La masse volumique de l'air : ρ (en kg/m^3)
- Les ensions d'entrée et de référence des jauges : V_{in}, V_{ref}
- Le gain de chaque jauge : G_1, G_2, G_3, G_4, G_5
- Le facteur de jauge : k

1.3 Grandeurs extraites et modélisées

Les grandeurs suivantes sont celles que nous avons extrait du Stab' Traj'.

- La poussée du propulseur : F (en N)
- La masse éjectée par le propulseur : D_m , ce qui nous permet de trouver la dérivée temporelle de la masse : m_p

- La perte de masse : Δm , ce qui nous permet de trouver la masse totale : m
- L'angle de la fusée par rapport à la verticale : α (en Rad)

1.4 Grandeurs étudiées

Les grandeurs suivantes sont celles que nous allons calculer avec toutes les grandeurs précédentes, et que nous allons pouvoir ensuite comparer à nos différentes théories.

- Les contraintes : s
- L'effort normal intérieur : N
- L'accélération normale à la fusée : a
- Les frottements de l'air : f
- Les déformations des jauges : $\epsilon_{exp,1}, \epsilon_{exp,2}, \epsilon_{exp,3}, \epsilon_{exp,4}, \epsilon_{exp,5}$

Chapitre 2

Modélisation des grandeurs extraites

Les données sont fournies par pas de temps de 10 ms dans le Stab' Traj', mais nous souhaitons perdre cette dépendance pour pouvoir utiliser les données sans besoin de synchroniser l'horloge interne de la carte d'acquisition et la feuille de donnée.

Nous allons dans un premier temps présenter la courbe de données extraite du Stab' Traj', et la modélisation que nous avons choisit pour les représenter. Nous pourrons ensuite visualiser les différents courbes formant cette modélisation avant de commenter l'écart relatif entre notre modélisation et les données nous servant de modèle.

2.1 Poussée

Commençons par la courbe de poussée, une des trois courbes indépendante des caractéristique de notre fusée. En effet, seul le modèle de moteur choisi importe, ici le Barasinga Pro54-5G.

2.1.1 Modélisation

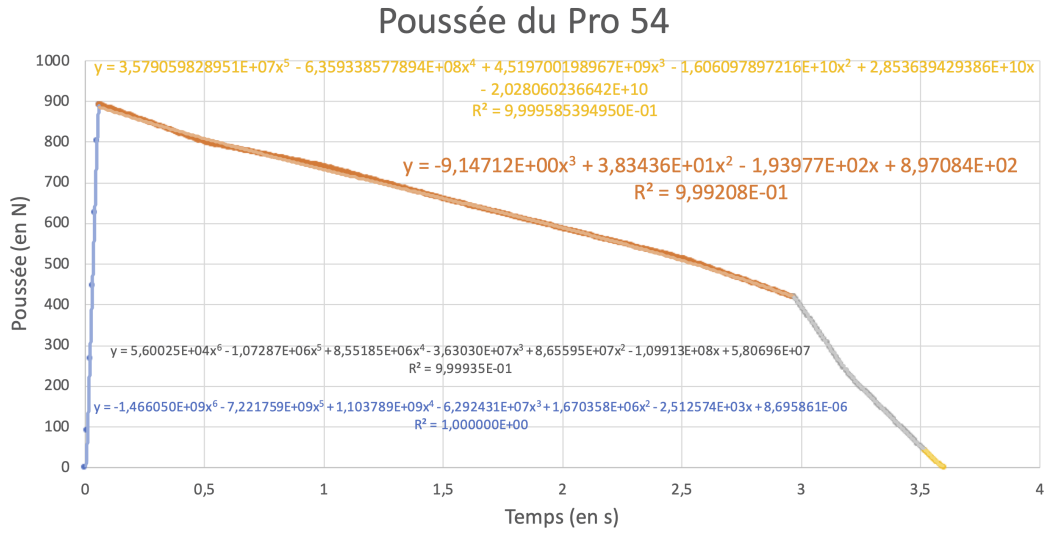


FIGURE 2.1 – Données extraites pour la poussée en fonction du temps, scindées en quatre groupes de données qui seront modélisés indépendamment.

$$F : t \mapsto \begin{cases} \sum_{k=0}^6 a_{F^1,k} t^k & \text{si } t \in [0 \text{ s}; 0,06 \text{ s}] \\ \sum_{k=0}^3 a_{F^2,k} t^k & \text{si } t \in]0,06 \text{ s}; 2,96 \text{ s}] \\ \sum_{k=0}^6 a_{F^3,k} t^k & \text{si } t \in]2,96 \text{ s}; 3,51 \text{ s}] \\ \sum_{k=0}^5 a_{F^4,k} t^k & \text{si } t \in]3,51 \text{ s}; 3,60 \text{ s}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{F^1,6} = -1,466050.10^9 \\ a_{F^1,5} = -7,221759.10^9 \\ a_{F^1,4} = 1,103789.10^9 \\ a_{F^1,3} = -6,292431.10^7 \\ a_{F^1,2} = 1,670358.10^6 \\ a_{F^1,1} = -2,512574.10^3 \\ a_{F^1,0} = 8,695861.10^{-6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{F^2,3} = -9,14712 \\ a_{F^2,2} = 38,3436 \\ a_{F^2,1} = -1,93977.10^2 \\ a_{F^2,0} = 8,97084.10^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{F^3,6} = 5,60025.10^4 \\ a_{F^3,5} = -1,07287.10^6 \\ a_{F^3,4} = 8,55185.10^6 \\ a_{F^3,3} = -3,63030.10^7 \\ a_{F^3,2} = 8,65595.10^7 \\ a_{F^3,1} = -1,09913.10^8 \\ a_{F^3,0} = 5,80696.10^7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{F^4,5} = 3,579059828951.10^7 \\ a_{F^4,4} = -6,359338577894.10^8 \\ a_{F^4,3} = 4,519700198967.10^9 \\ a_{F^4,2} = 1,606097897216.10^{10} \\ a_{F^4,1} = 2,853639429386.10^{10} \\ a_{F^4,0} = -2,028060236642.10^{10} \end{cases}$$

$$\forall n \in [1, 4], \forall k \in [0, 6], [a_{F^n,k}] = [N/s^k]$$

2.1.2 Courbes obtenues

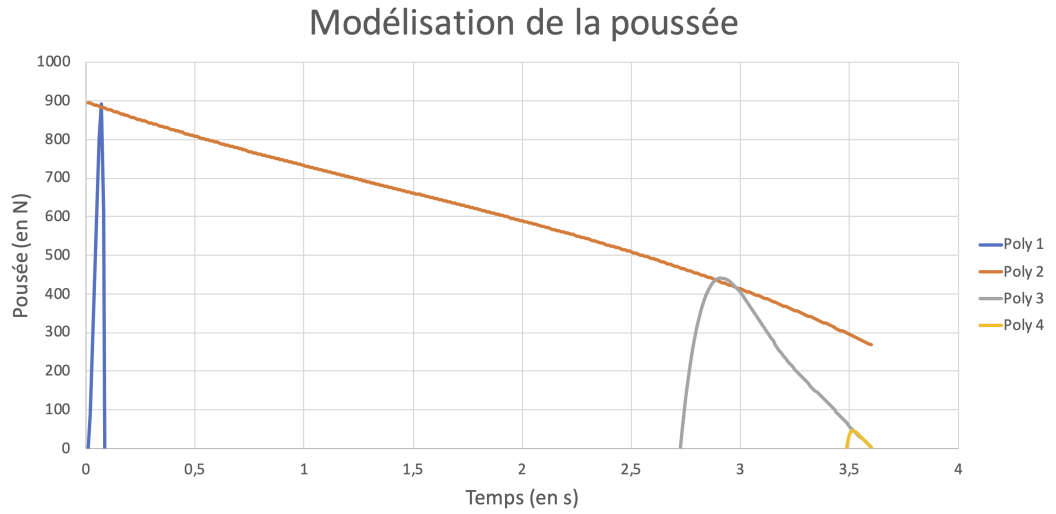


FIGURE 2.2 – Les quatre courbes obtenues avec la modélisation précédente.

2.1.3 Écart à la référence

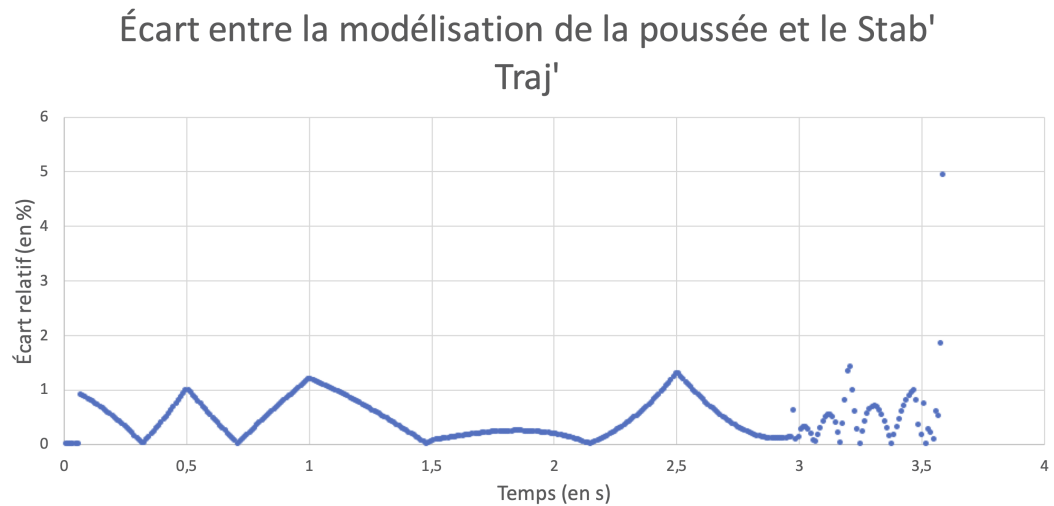


FIGURE 2.3 – Écart relatif entre notre modélisation et les données d'origine.

Deux choses sont notables sur ce graphe. Premièrement, le pic à 5 % d'erreur à 3,59 s présente juste avant l'extinction du propulseur. La poussée s'approchant de 0 à cet instant, le moindre écart au modèle cause de grosses imprécisions relatives. Il est donc très compliqué de supprimer ces erreurs, et le fait que le pic ne dépasse pas 5 % nous permet de considérer notre modèle valide.

La seconde particularité de ce graphe est sa forme en "dents de scie", qui n'est pas commune pour un graphe d'erreur. Cette forme peut être expliquée par la manière dont Excel calcule les polynômes utilisés, qui est similaire à un développement limité : il fait "onduler" le polynôme autour de la courbe cible, de plus en plus près (au fur et à mesure que l'on augmente le degré du polynôme).

Notre modèle est dans son ensemble très satisfaisant, car il permet une incertitude moyenne de moins de 2 % sur la poussée du propulseur lors du vol, tout en levant la discrétisation des données. Nous pourrions donc utiliser cette modélisation dans nos calculs sans la supposer source d'erreur principale.

2.2 Dérivée temporelle de la masse

Passons maintenant à la donnée intimement liée à la poussée : la dérivée temporelle de la masse. En effet, les données sont encore une fois extraites du Stab' Traj' et ne dépendent que des caractéristiques du propulseur choisi.

Pour être précis, les données récupérées correspondent au débit en masse du propulseur mais un bilan de masse simple nous donne la relation liant le débit en masse et la dérivée temporelle de la masse, le propulseur étant le seul élément avec une masse non constante :

$$m_p = -D_m$$

2.2.1 Modélisation

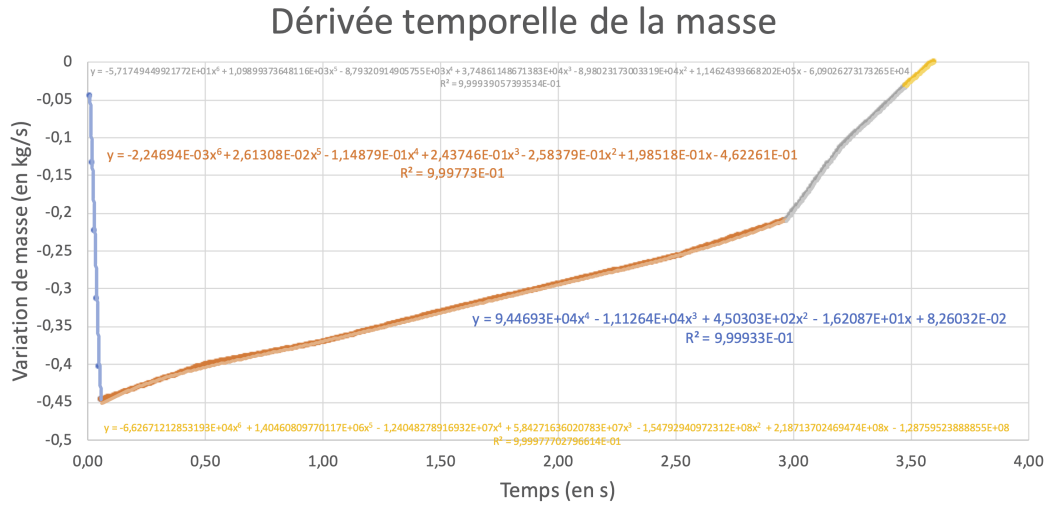


FIGURE 2.4 – Données extraites pour la dérivée temporelle de la masse en fonction du temps, scindées en quatre groupes de données qui seront modélisés indépendamment.

$$m_p : t \mapsto \begin{cases} \sum_{k=0}^4 a_{m_p, k} t^k & \text{si } t \in [0 \text{ s}; 0,60 \text{ s}] \\ \sum_{k=0}^6 a_{m_p, k} t^k & \text{si } t \in]0,60 \text{ s}; 2,98 \text{ s}] \\ \sum_{k=0}^6 a_{m_p, k} t^k & \text{si } t \in]2,98 \text{ s}; 3,47 \text{ s}] \\ \sum_{k=0}^6 a_{m_p, k} t^k & \text{si } t \in]3,47 \text{ s}; 3,60 \text{ s}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{m_p, 4} = 9,44693.10^4 \\ a_{m_p, 3} = -1,11264.10^4 \\ a_{m_p, 2} = 4,50303.10^2 \\ a_{m_p, 1} = -16,2087 \\ a_{m_p, 0} = 8,26032.10^{-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{m_p^2,6} = -2,24694.10^{-3} \\ a_{m_p^2,5} = 2,61308.10^{-2} \\ a_{m_p^2,4} = -1,14879.10^{-1} \\ a_{m_p^2,3} = 2,43746.10^{-1} \\ a_{m_p^2,2} = -2,58379.10^{-1} \\ a_{m_p^2,1} = 1,98518.10^{-1} \\ a_{m_p^2,0} = -4,62261.10^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{m_p^3,6} = -57,1749449921772 \\ a_{m_p^3,5} = 1,09899373648116.10^3 \\ a_{m_p^3,4} = -8,79320914905755.10^3 \\ a_{m_p^3,3} = 3,74861148671383.10^4 \\ a_{m_p^3,2} = -8,98023173003319.10^4 \\ a_{m_p^3,1} = 1,14624393668202.10^5 \\ a_{m_p^3,0} = -6,09026273173265.10^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{m_p^4,6} = -6,62671212853193.10^4 \\ a_{m_p^4,5} = 1,40460809770117.10^6 \\ a_{m_p^4,4} = -1,24048278916932.10^7 \\ a_{m_p^4,3} = 5,84271636020783.10^7 \\ a_{m_p^4,2} = -1,54792940972312.10^8 \\ a_{m_p^4,1} = 2,18713702469474.10^8 \\ a_{m_p^4,0} = -1,28759523888855.10^8 \end{cases}$$

$$\forall n \in [1, 4], \forall k \in [0, 6], [a_{m_p^n, k}] = [kg/s^{k-1}]$$

2.2.2 Courbes obtenues

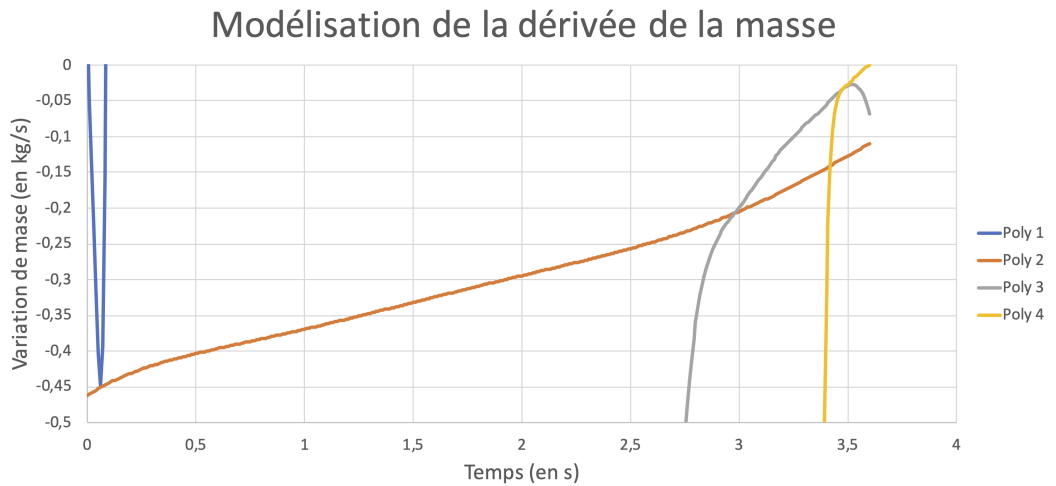


FIGURE 2.5 – Les quatre courbes obtenues avec la modélisation précédente.

2.2.3 Écart à la référence

Écart entre la modélisation de la dérivée de la masse et le Stab' Traj'

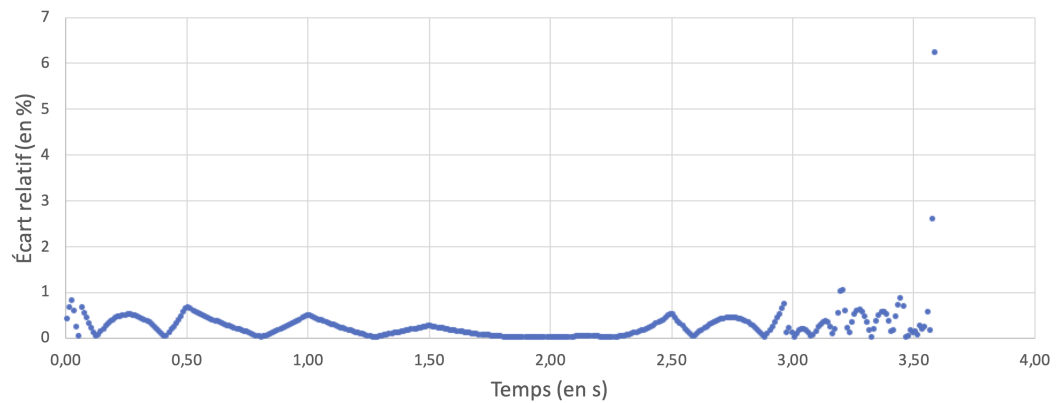


FIGURE 2.6 – Écart relatif entre notre modélisation et les données d'origine.

Les remarques sont similaires à celles faites précédemment. Le pic d'imprécision final est cependant légèrement plus élevé que pour la poussée avec 6,2 %, mais la précision moyenne lors de la phase propulsée est meilleure avec moins de 1 %.

2.3 Masse totale

Pour calculer la masse totale éjectée par le propulseur, il nous suffit d'intégrer la dérivée temporelle de la masse. Pour limiter l'erreur, nous décidons de réaliser une intégration discrète des données du Stab' Traj' avant de modéliser la courbe obtenue.

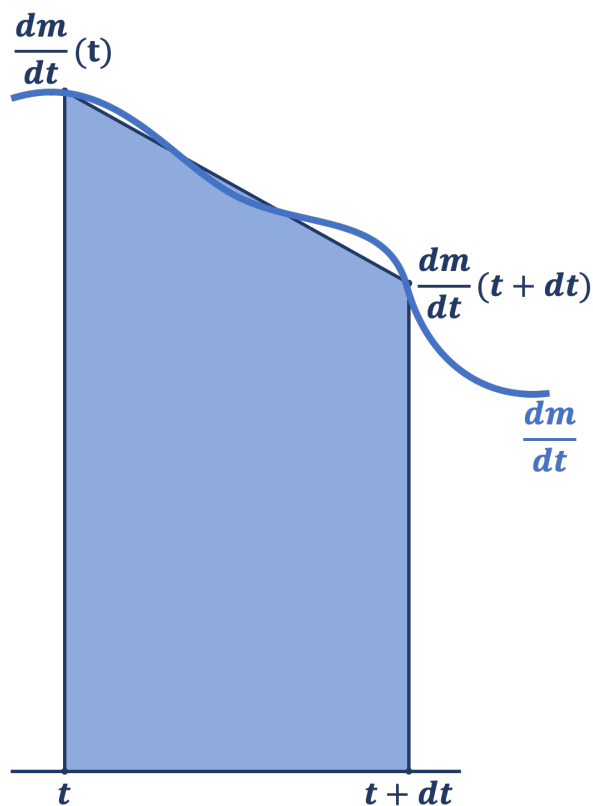


FIGURE 2.7 – Méthode d'intégration utilisée pour obtenir Δm depuis m_p . Nous pouvons voir une courbe possible entre les deux points et la surface qui sera considérée comme égale à l'intégrale.

Pour limiter toujours plus l'erreur, nous réalisons une intégration avec interpolation linéaire entre chaque point. Ceci ne nous permet pas de savoir si nous avons surestimé ou sous-estimé l'intégrale obtenue, mais ce n'est pas une information dont nous avons besoin et cela ne pose donc pas de problèmes.

Une fois que nous avons Δm nous pouvons remonter jusqu'à m grâce à la masse totale avant décollage m_0 , prenant en compte la masse de la fusée et celle de propulseur avant allumage :

$$m = m_0 + \Delta m$$

2.3.1 Modélisation

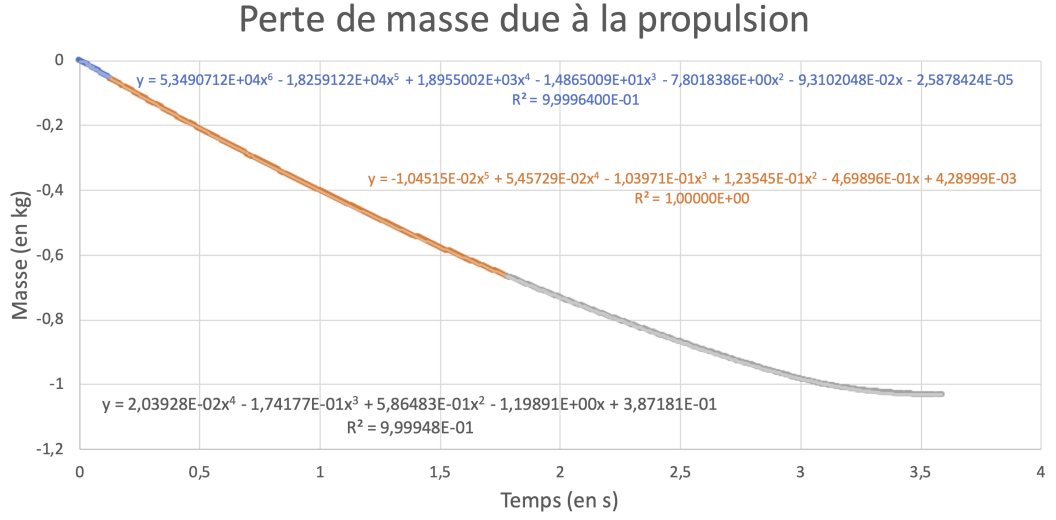


FIGURE 2.8 – Données extraites pour la perte de masse en fonction du temps, scindées en trois groupes de données qui seront modélisés indépendamment.

$$\Delta m : t \mapsto \begin{cases} \sum_{k=0}^6 a_{\Delta m^1, k} t^k & \text{si } t \in [0 \text{ s}; 0,13 \text{ s}] \\ \sum_{k=0}^5 a_{\Delta m^2, k} t^k & \text{si } t \in]0,13 \text{ s}; 1,82 \text{ s}] \\ \sum_{k=0}^4 a_{\Delta m^3, k} t^k & \text{si } t \in]1,82 \text{ s}; 3,60 \text{ s}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{\Delta m^1, 6} = 5,3490712 \cdot 10^4 \\ a_{\Delta m^1, 5} = -1,8259122 \cdot 10^4 \\ a_{\Delta m^1, 4} = 1,8955002 \cdot 10^3 \\ a_{\Delta m^1, 3} = -14,865009 \\ a_{\Delta m^1, 2} = -7,8018386 \\ a_{\Delta m^1, 1} = -9,3102048 \cdot 10^{-2} \\ a_{\Delta m^1, 0} = -2,5878424 \cdot 10^{-5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{\Delta m^2, 4} = -1,04515 \cdot 10^{-2} \\ a_{\Delta m^2, 3} = 5,45729 \cdot 10^{-2} \\ a_{\Delta m^2, 2} = -1,03971 \cdot 10^{-1} \\ a_{\Delta m^2, 1} = 1,23545 \cdot 10^{-1} \\ a_{\Delta m^2, 0} = -4,69896 \cdot 10^{-1} \\ a_{\Delta m^2, 0} = 4,28999 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{\Delta m^3,4} &= 2,03928.10^{-2} \\ a_{\Delta m^3,3} &= -1,74177.10^{-1} \\ a_{\Delta m^3,2} &= 5,86483.10^{-1} \\ a_{\Delta m^3,1} &= -1,19891 \\ a_{\Delta m^3,0} &= 3,87181.10^{-1} \end{cases}$$

$$\forall n \in [1, 4], \forall k \in [0, 6], [a_{\Delta m^n, k}] = [kg/s^k]$$

2.3.2 Courbes obtenues

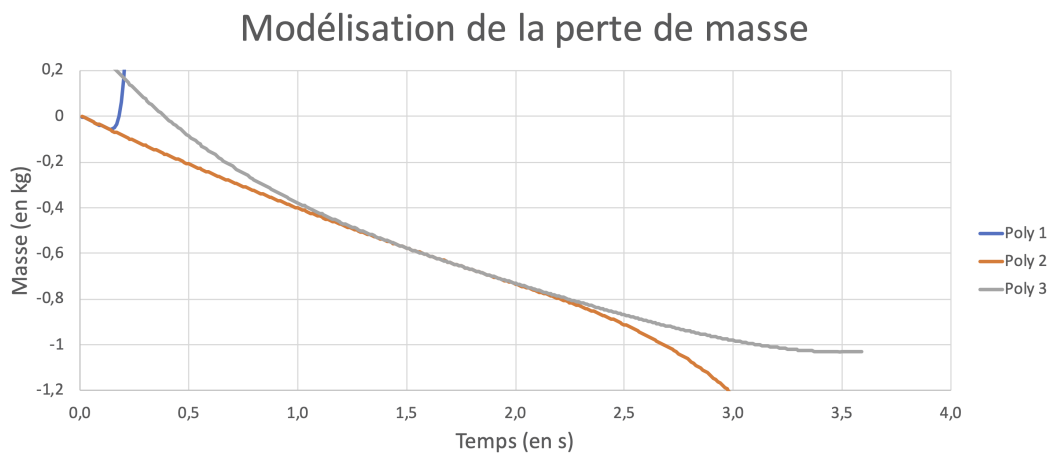


FIGURE 2.9 – Les trois courbes obtenues avec la modélisation précédente.

2.3.3 Écart à la référence

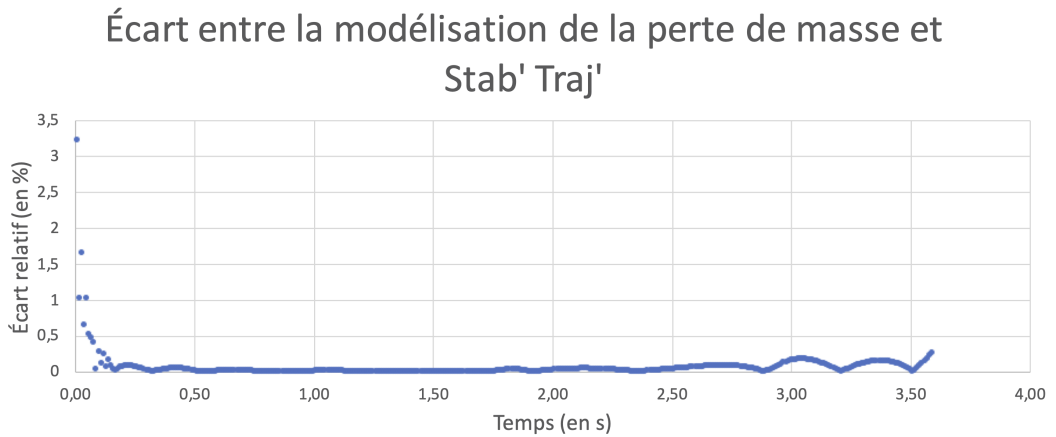


FIGURE 2.10 – Écart relatif entre notre modélisation et les données d'origine.

L'erreur est la plus élevée au début de la phase propulsée, principalement à cause de la forte pente de m_p et de la proximité avec 0. Notre modèle permet

cependant de descendre en dessous de 0,5 % d'erreur pour le reste du vol, ce qui nous suffit amplement.

2.4 Angle par rapport à l'horizon

L'angle par rapport à l'horizon est la donnée qui est vouée à changer si les caractéristiques de la fusée changent. Cette modélisation est issue des calculs prévisionnels du Stab' Traj' et sera comparée aux données récupérées par le gyroscope.

Ces données pourront aussi être utilisées en cas de problème avec le gyroscope, car elle permet de projeter le poids dans les calculs d'efforts.

2.4.1 Modélisation

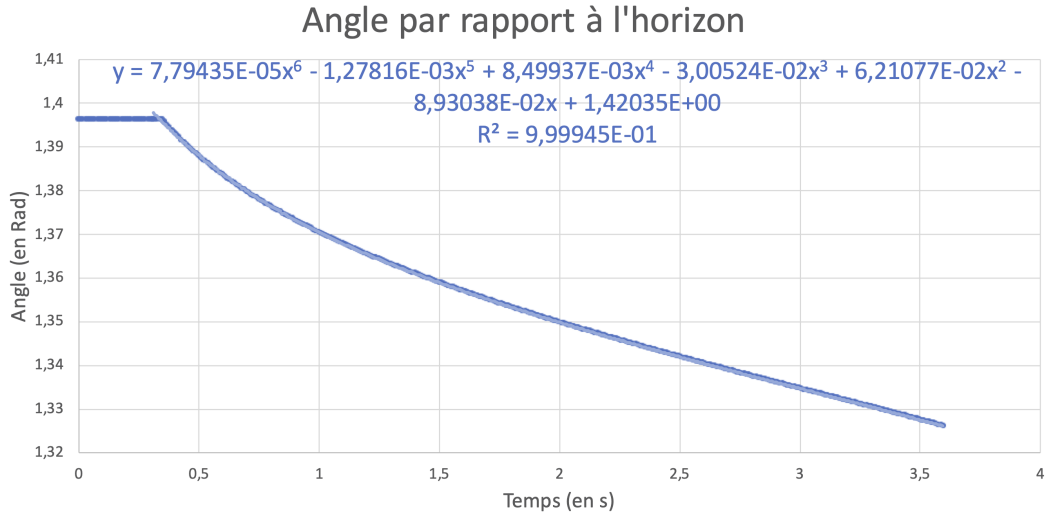


FIGURE 2.11 – Données extraites pour l'angle par rapport à l'horizon en fonction du temps, scindées en deux groupes de données : une constante et un polynôme.

$$\alpha : t \mapsto \begin{cases} \alpha_0 & \text{si } t \in [0 \text{ s}; 0,31 \text{ s}] \\ \sum_{k=0}^6 a_{\alpha,k} t^k & \text{si } t \in [0,31 \text{ s}; 4,69 \text{ s}] \end{cases}$$

$$\alpha_0 = 1,39626340159546 \text{ Rad}$$

$$\begin{cases} a_{\alpha,6} = 5,46847.10^{-5} \\ a_{\alpha,5} = -9,52597.10^{-4} \\ a_{\alpha,4} = 6,73489.10^{-3} \\ a_{\alpha,3} = -2,50265.10^{-2} \\ a_{\alpha,2} = 5,31966.10^{-2} \\ a_{\alpha,1} = -7,35729.10^{-2} \\ a_{\alpha,0} = 1,41417 \end{cases}$$

$$\forall k \in [0, 6], [a_{\alpha,k}] = [Rad/s^k]$$

2.4.2 Courbes obtenues

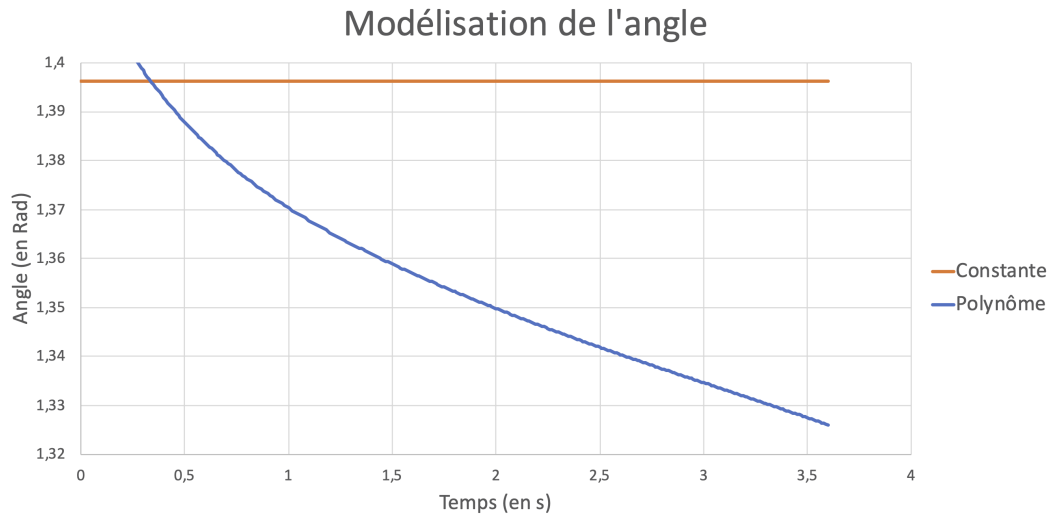


FIGURE 2.12 – La constante et le polynôme obtenu avec la modélisation

2.4.3 Écart à la référence

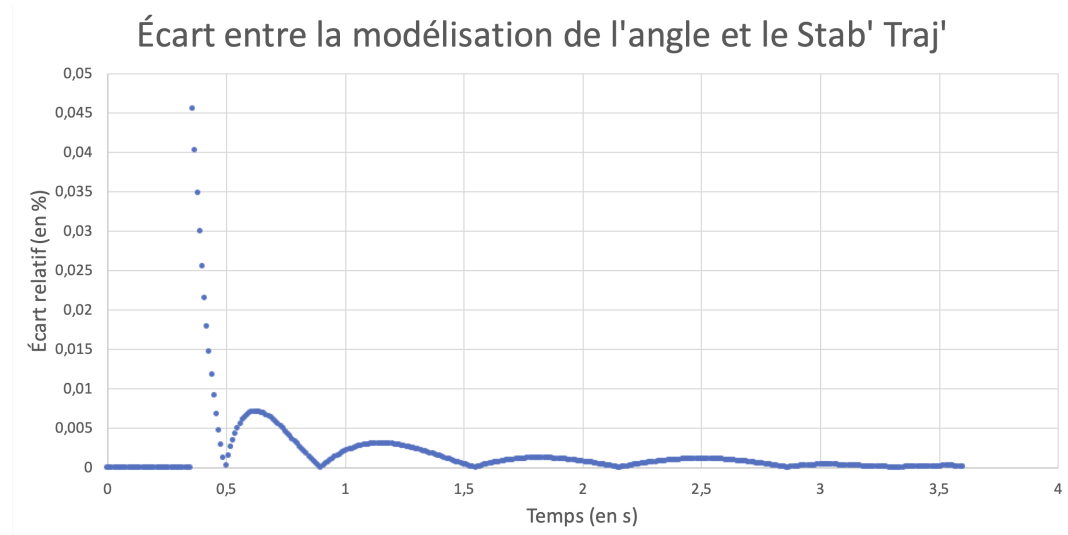


FIGURE 2.13 – Écart relatif entre notre modélisation et les données d'origine.

Malgré ce qui ressemble à un pic d'erreur, l'écart est négligeable pour toute la modélisation tellement il est faible.

Chapitre 3

Formules pour les grandeurs étudiées

Ci-dessous sont les formules extraites du rapport sur les calculs théoriques, ce sont ces formules qui seront utilisées pour la création du fichier Excel de post traitement.

$$\epsilon = \frac{s}{E}$$

$$s = \frac{N(t)}{Sn}$$

$$N(t) = m_{sj} * a(t)$$

$$a(t) = \frac{-\text{sgn}(v_x(t))f + F(t) - g \cos(\alpha)m(t) - m_p(t)v_x(t)}{m(t)}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\rho S_a v_x(t)^2 C_x$$

$$V_{lue,i}(t) = G_i V_{in} \epsilon_{exp,i} \frac{k}{4} \cdot 10^6 + V_{ref}$$

$$\epsilon_{exp,i} = \frac{4(V_{lue,1}(t) - V_{ref})}{G_i V_{in} k \cdot 10^6}$$