

# Résumé des formules et notations pour le programme de post traitement

Rémi LEMAIRE

## Sommaire

<b>1</b>	<b>Notations</b>	<b>2</b>
1.1	Grandeurs mesurées . . . . .	2
1.2	Constantes . . . . .	2
1.3	Grandeurs calculables . . . . .	2
1.4	Grandeurs étudiées . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Modélisation des grandeurs calculables</b>	<b>2</b>
2.1	Modélisations . . . . .	2
2.1.1	Masse . . . . .	2
2.1.2	Dérivée de la masse . . . . .	3
2.1.3	Angle par rapport à la verticale . . . . .	4
2.1.4	Poussée . . . . .	4
2.2	Représentations graphiques et erreurs . . . . .	5
2.2.1	Masse . . . . .	5
2.2.2	Dérivée de la masse . . . . .	7
2.2.3	Angle par rapport à la verticale . . . . .	8
2.2.4	Poussée . . . . .	9
2.3	Remarques . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Formules pour les grandeurs étudiées</b>	<b>10</b>

# 1 Notations

## 1.1 Grandeurs mesurées

- Temps :  $t$  (en  $s$ )
- Accélération :  $a_x, a_y, a_z$  (en  $m/s^2$ )
- Vitesse angulaire :  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  (en  $Deg/s$ )
- Jauges de déformation :  $j1, j2, j3, j4, j5$

## 1.2 Constantes

- La masse au dessus des jauges :  $m_{sj}$  (en  $kg$ )
- Le module d'Young de l'aluminium :  $E$  (en  $Pa$ )
- La surface d'un 'U' :  $S$  (en  $m^2$ )
- Le nombre de poutres :  $n$
- La surface aérodynamique :  $S_a$  (en  $m^2$ )
- La constante de pesanteur :  $g$  (en  $m/s^2$ )
- Le coefficient de traînée :  $C_x$
- La masse volumique de l'air :  $\rho$  (en  $kg/m^3$ )
- Les ensions d'entrée et de référence des jauges :  $V_{in}, V_{ref}$
- Le gain de chaque jauge :  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5$
- Le facteur de jauge :  $k$

## 1.3 Grandeurs calculables

- La poussée du moteur :  $F$  (en  $N$ )
- La masse totale :  $m$  (en  $kg$ )
- La dérivée de la masse totale :  $m_p$
- L'angle de la fusée par rapport à la verticale :  $\alpha$  (en Rad)

## 1.4 Grandeurs étudiées

- Les contraintes :  $s$
- L'effort normal intérieur :  $N$
- L'accélération normale à la fusée :  $a$
- Les frottements de l'air :  $f$
- Les déformations des jauges :  $\epsilon_{exp,1}, \epsilon_{exp,2}, \epsilon_{exp,3}, \epsilon_{exp,4}, \epsilon_{exp,5}$

# 2 Modélisation des grandeurs calculables

## 2.1 Modélisations

Ces formules sont issues du Stab' Traj', qui les calcule par pas de temps. Les valeurs sont importées sur Excel des fonctions sont déduites des courbes (grâce à des courbes de tendance polynomiales). Toutes les fonctions trouvées sont valables pour  $t \in [0 s; 4,69 s]$

### 2.1.1 Masse

$$m : t \mapsto a_{m,6}t^6 + a_{m,5}t^5 + a_{m,4}t^4 + a_{m,3}t^3 + a_{m,2}t^2 + a_{m,1}t + a_{m,0}$$

$$\begin{cases} a_{m,6} &= 1,08353.10^{-3} \\ a_{m,5} &= -1,39664.10^{-2} \\ a_{m,4} &= 6,72714.10^{-2} \\ a_{m,3} &= -1,45763.10^{-1} \\ a_{m,2} &= 1,62182.10^{-1} \\ a_{m,1} &= 5,98339.10^{-1} \\ a_{m,0} &= 9,73180 \end{cases}$$

$$\forall n \in [0, 6], [a_{m,n}] = [kg/s^n]$$

### 2.1.2 Dérivée de la masse

Pour obtenir une fonction représentant la dérivée de la masse totale, nous dérivons d'abord les données de Stab' Traj', puis. modélisons les données obtenues.

$$m_p : t \mapsto \begin{cases} a_{m_p^1,4}t^4 + a_{m_p^1,3}t^3 + a_{m_p^1,2}t^2 + a_{m_p^1,1}t + a_{m_p^1,0} & \text{si } \in ]0 \text{ s}; 0, 11 \text{ s}] \\ a_{m_p^2,1}t + a_{m_p^2,0} & \text{si } \in ]0, 11 \text{ s}; 0, 26 \text{ s}] \\ a_{m_p^3,6}t^6 + a_{m_p^3,5}t^5 + a_{m_p^3,4}t^4 + a_{m_p^3,3}t^3 + a_{m_p^3,2}t^2 + a_{m_p^3,1}t + a_{m_p^3,0} & \text{si } \in ]0, 26 \text{ s}; 4, 09 \text{ s}] \\ a_{m_p^4,6}t^6 + a_{m_p^4,5}t^5 + a_{m_p^4,4}t^4 + a_{m_p^4,3}t^3 + a_{m_p^4,2}t^2 + a_{m_p^4,1}t + a_{m_p^4,0} & \text{si } \in ]4, 09 \text{ s}; 4, 63 \text{ s}] \\ a_{m_p^5,2}t^2 + a_{m_p^5,1}t + a_{m_p^5,0} & \text{si } \in ]4, 63 \text{ s}; 4, 68 \text{ s}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{m_p^1,4} &= 1,34703.10^4 \\ a_{m_p^1,3} &= -3,12272.10^3 \\ a_{m_p^1,2} &= 2,54378.10^2 \\ a_{m_p^1,1} &= -13,4924 \\ a_{m_p^1,0} &= -5,68150.10^{-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{m_p^2,1} &= 7,50278.10^{-1} \\ a_{m_p^2,0} &= -7,18896.10^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{m_p^3,6} &= 9,5,3880.10^{-4} \\ a_{m_p^3,5} &= -1,12233.10^{-2} \\ a_{m_p^3,4} &= 4,83383.10^{-2} \\ a_{m_p^3,3} &= -9,72930.10^{-2} \\ a_{m_p^3,2} &= 1,14703.10^{-1} \\ a_{m_p^3,1} &= -4,8,9874.10^{-2} \\ a_{m_p^3,0} &= -5,13459.10^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{m_p^4,6} &= 2,016844950849 \\ a_{m_p^4,5} &= -35,14109357237 \\ a_{m_p^4,4} &= 1,879788978.10^2 \\ a_{m_p^4,3} &= 54,9264805107 \\ a_{m_p^4,2} &= -3,965269362924.10^3 \\ a_{m_p^4,1} &= 1,355321698300.10^4 \\ a_{m_p^4,0} &= 1,4,68333280448.10^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{m_p^5,2} &= 15,96721582 \\ a_{m_p^5,1} &= -1,481945477.10^2 \\ a_{m_p^5,0} &= 3,438251013.10^2 \end{cases}$$

$$\forall i \in [1, 5], \forall n \in [0, 6], [a_{m_p^i, n}] = [kg/s^{n-1}]$$

### 2.1.3 Angle par rapport à la verticale

$$\alpha : t \mapsto \begin{cases} 1,39626340159546 \text{ Rad} & \text{si } t \in [0 \text{ s}; 0,31 \text{ s}] \\ a_{\alpha,6}t^6 + a_{\alpha,5}t^5 + a_{\alpha,4}t^4 + a_{\alpha,3}t^3 + a_{\alpha,2}t^2 + a_{\alpha,1}t + a_{\alpha,0} & \text{si } t \in [0,31 \text{ s}; 4,69 \text{ s}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{\alpha,6} &= 5,46847.10^{-5} \\ a_{\alpha,5} &= -9,52597.10^{-4} \\ a_{\alpha,4} &= 6,73489.10^{-3} \\ a_{\alpha,3} &= -2,50265.10^{-2} \\ a_{\alpha,2} &= 5,31966.10^{-2} \\ a_{\alpha,1} &= -7,35729.10^{-2} \\ a_{\alpha,0} &= 1,41417 \end{cases}$$

$$\forall n \in [0, 6], [a_{\alpha, n}] = [Rad/s^n]$$

### 2.1.4 Pousée

$$\frac{dm}{dt} = m_p : t \mapsto \begin{cases} a_{F^1,6}t^6 + a_{F^1,5}t^5 + a_{F^1,4}t^4 + a_{F^1,3}t^3 + a_{F^1,2}t^2 + a_{F^1,1}t + a_{F^1,0} & \text{si } t \in ]0 \text{ s}; 0,11 \text{ s}[ \\ a_{F^2,1}t + a_{F^2,0} & \text{si } t \in [0,11 \text{ s}; 0,27 \text{ s}[ \\ a_{F^3,4}t^4 + a_{F^3,3}t^3 + a_{F^3,2}t^2 + a_{F^3,1}t + a_{F^3,0} & \text{si } t \in [0,27 \text{ s}; 3,67 \text{ s}[ \\ a_{F^4,6}t^6 + a_{F^4,5}t^5 + a_{F^4,4}t^4 + a_{F^4,3}t^3 + a_{F^4,2}t^2 + a_{F^4,1}t + a_{F^4,0} & \text{si } t \in [3,67 \text{ s}; 4,66 \text{ s}[ \\ a_{F^5,2}t^2 + a_{F^5,1}t + a_{F^5,0} & \text{si } t \in [4,66 \text{ s}; 4,69 \text{ s}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{F^1,6} &= -2,38908.10^{10} \\ a_{F^1,5} &= 8,99627.10^9 \\ a_{F^1,4} &= -1,35272/10^9 \\ a_{F^1,3} &= 1,03223.10^8 \\ a_{F^1,2} &= -4,17951.10^6 \\ a_{F^1,1} &= 9,40860.10^4 \\ a_{F^1,0} &= -3,98168.10^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{F^2,1} &= -1,51773.10^3 \\ a_{F^2,0} &= 1,44589.10^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{F^3,4} = 5,227679 \\ a_{F^3,3} = -29,9596 \\ a_{F^3,2} = 18,2021 \\ a_{F^3,1} = -27,3958 \\ a_{F^3,0} = 1,04720.10^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{F^4,6} = -1,2149887146.10^4 \\ a_{F^4,5} = 3,0651741778.10^5 \\ a_{F^4,4} = -3,2135643264.10^6 \\ a_{F^4,3} = 1,7922336703.10^7 \\ a_{F^4,2} = -5,6082367388.10^7 \\ a_{F^4,1} = 9,3365689869.10^7 \\ a_{F^4,0} = 6,4609233988.10^7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{F^5,2} = 1,8375000.10^4 \\ a_{F^5,1} = -1,7418375.10^5 \\ a_{F^5,0} = 4,1274345.10^5 \end{cases}$$

$$\forall m \in [1, 5], \forall n \in [0, 6], [a_{F^m,n}] = [N/s^n]$$

## 2.2 Représentations graphiques et erreurs

### 2.2.1 Masse

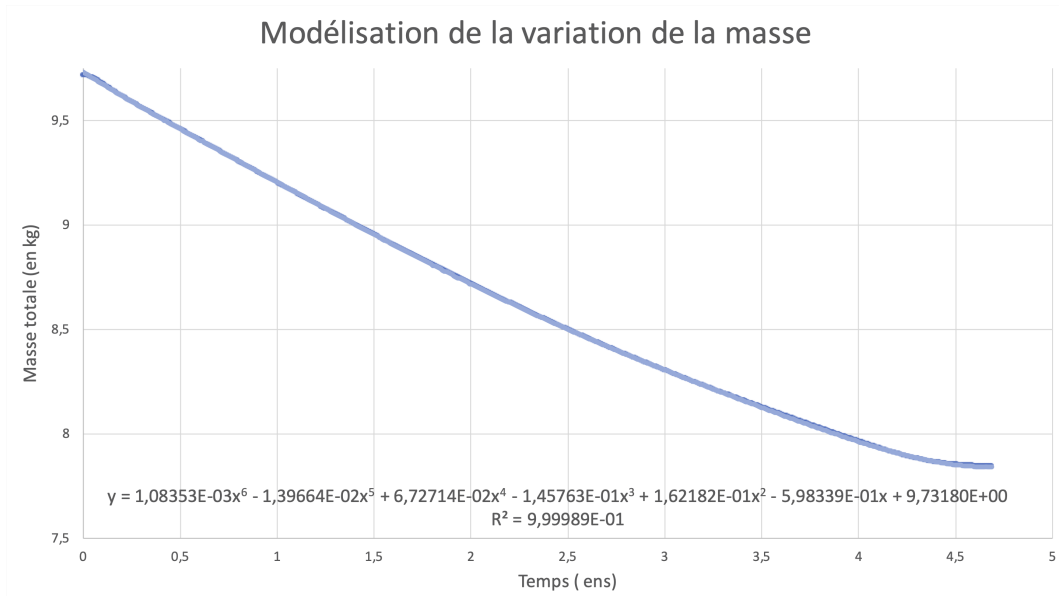


FIGURE 1 – Graphique avec les données extraites du Stab' Traj' et la courbe de tendance polynomiale.

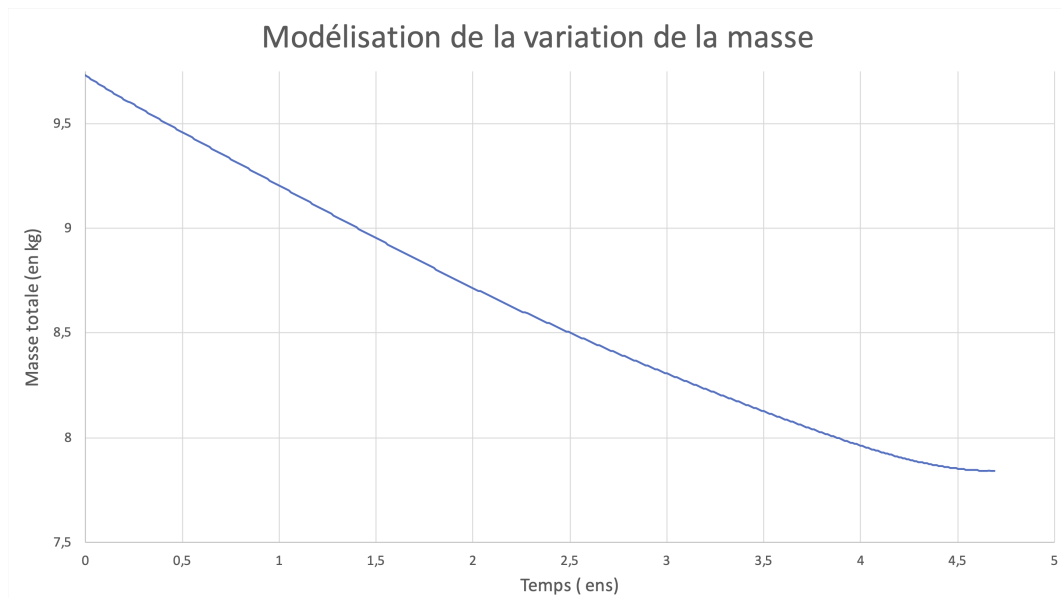


FIGURE 2 – Tracé de la modélisation seule  
Écart entre la modélisation de la masse et les prévisions du  
Stab' Traj'

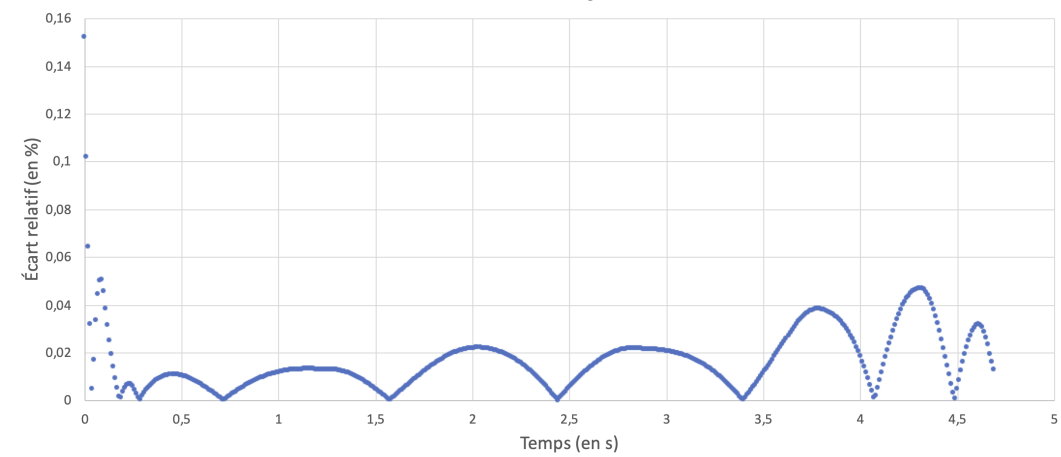


FIGURE 3 – Erreur entre notre modélisation et les données extraites. Nous pouvons remarquer que nous sommes toujours en dessous de 0,2 % d'erreur.

## 2.2.2 Dérivée de la masse

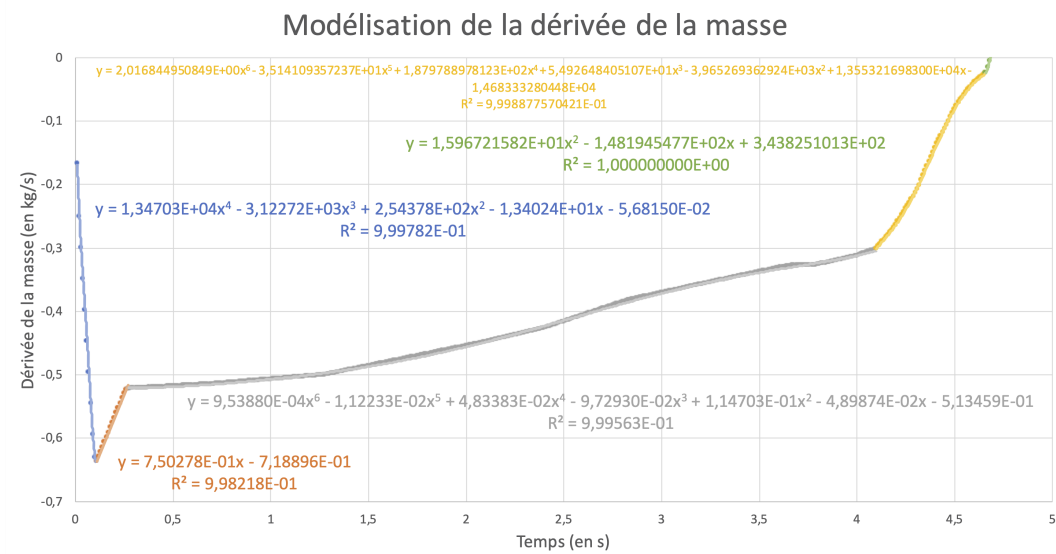


FIGURE 4 – Graphique avec les valeurs de dérivée calculées avec les données du Stab' Traj' et les modélisations polynomiales et linéaire.

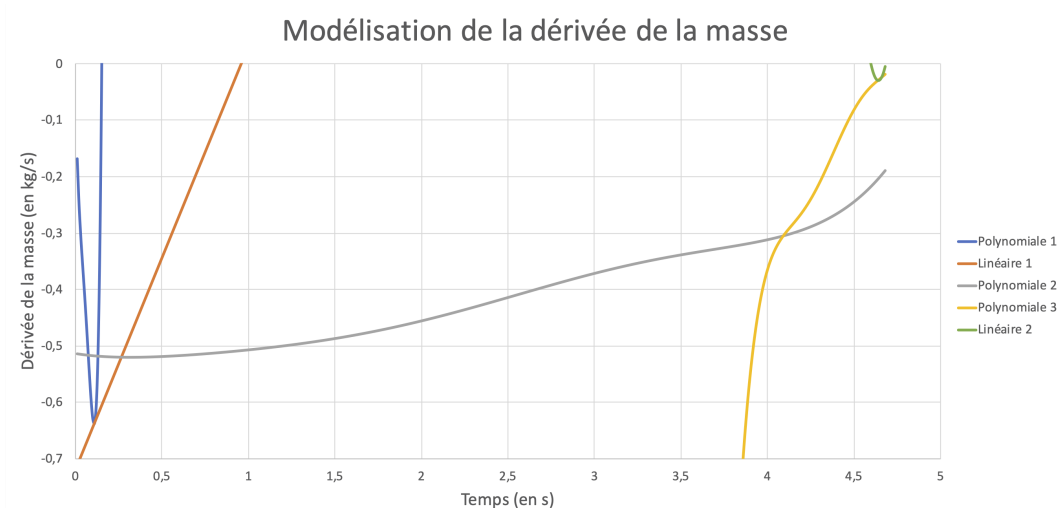


FIGURE 5 – Tracé des différentes courbes qui sont utilisées pour la modélisation de la dérivée de la masse.

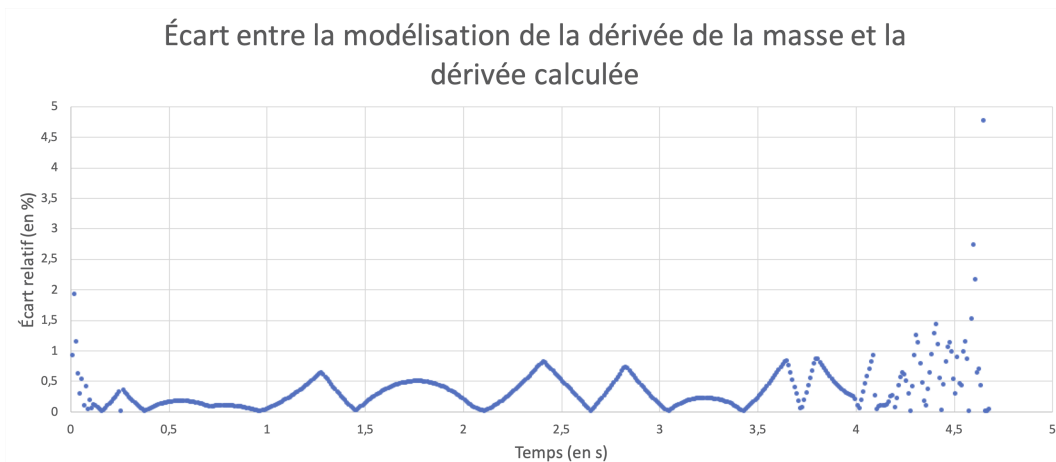


FIGURE 6 – Erreur par rapport aux données calculées, malgré un pic d'erreur vers le début de la courbe verte la majeure partie de la courbe est située en dessous des 1,5 % d'erreur.

### 2.2.3 Angle par rapport à la verticale

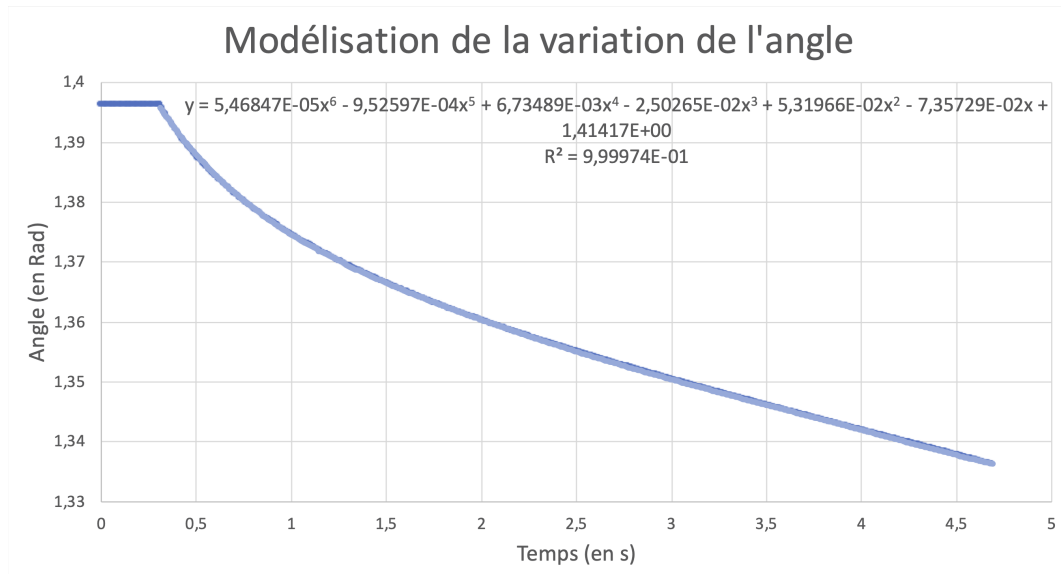


FIGURE 7 – Graphique avec les données extraites du Stab' Traj' et la courbe de tendance polynomiale sur la partie non constante

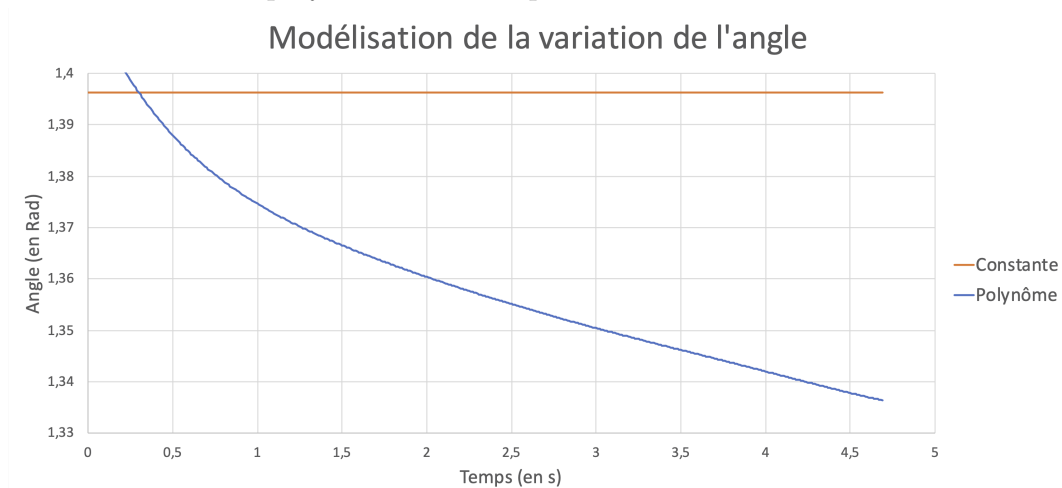


FIGURE 8 – Tracé des deux courbes utilisées pour la modélisation.

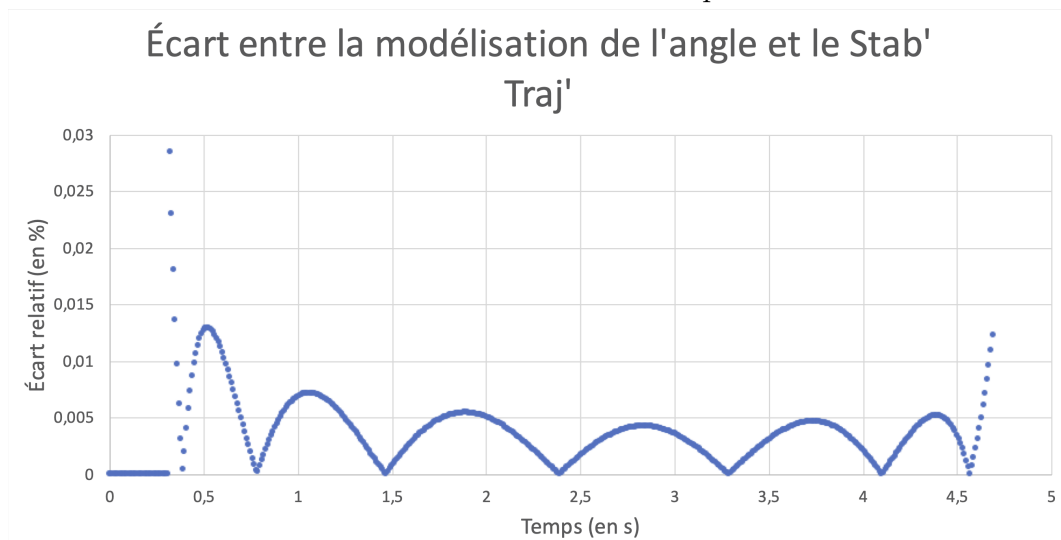


FIGURE 9 – Erreur par rapport aux données extraites. Malgré des pics d'imprécision aux extrémités du polynôme, nous restons toujours en dessous de 0,03 % d'erreur.



## 2.2.4 Poussée

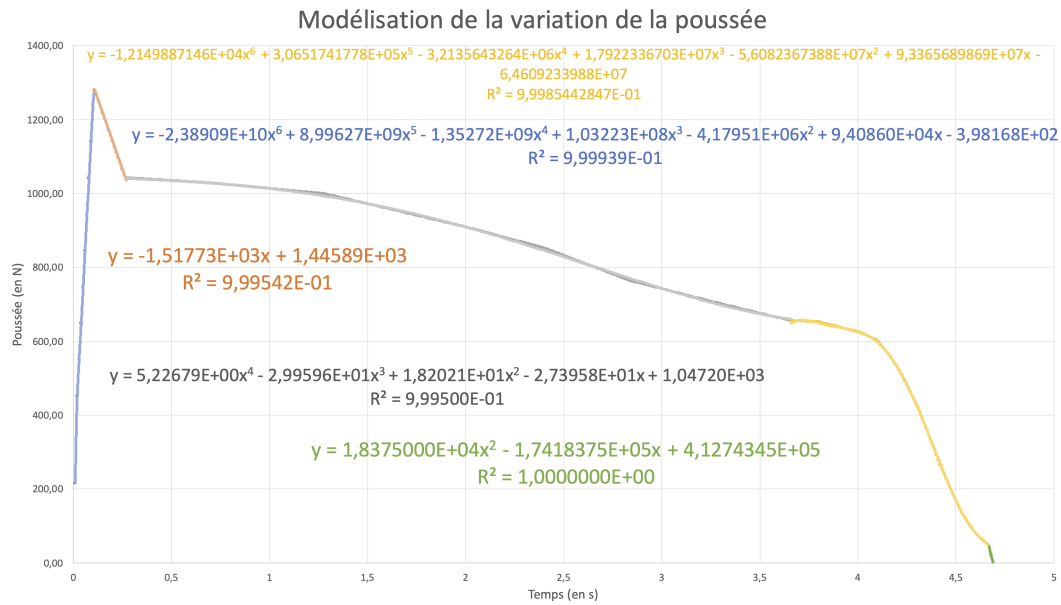


FIGURE 10 – Graphique avec les données extraites du Stab' Traj' et les courbes de tendances polynomiales et linéaires.

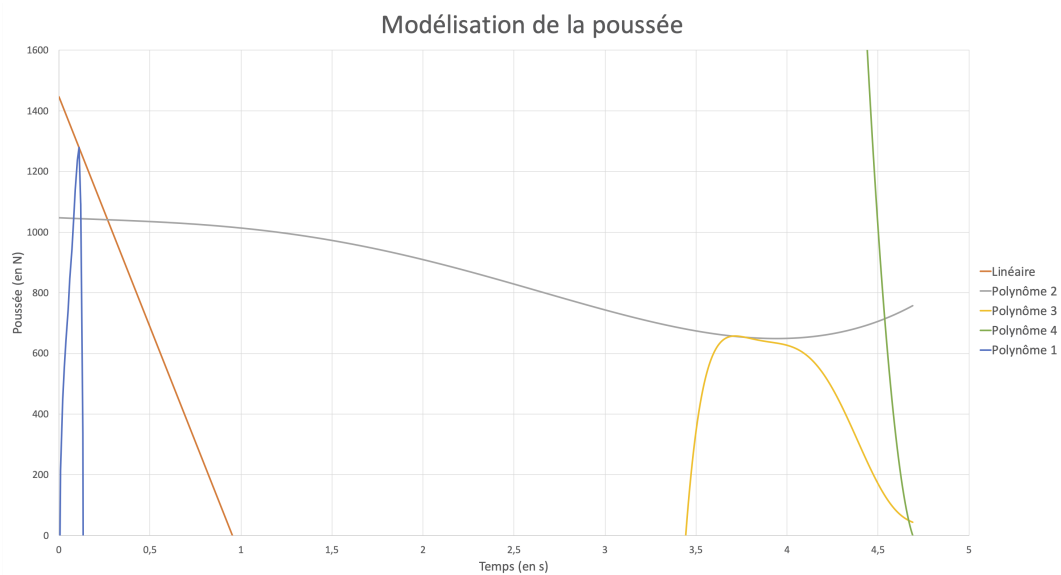


FIGURE 11 – Tracé des différentes courbes qui sont utilisées pour la modélisation de la poussée.

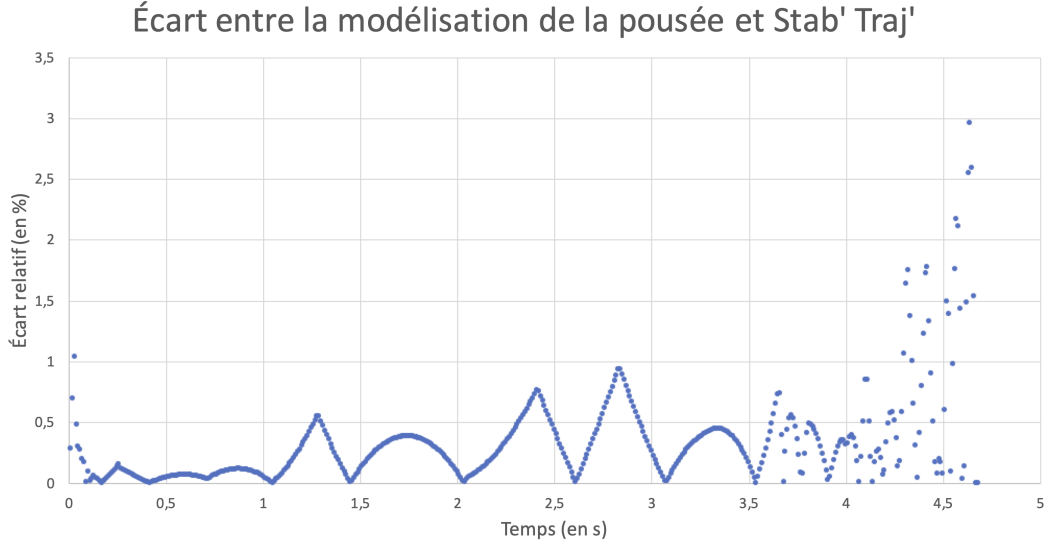


FIGURE 12 – Erreur par rapport aux données extraites. Le pic d'erreur est situé à la fin de la courbe jaune et atteint les 3 % d'erreur, mais la majeure partie de notre modèle est à moins de 1 %

### 2.3 Remarques

Les erreurs relatives pour la modélisation de la masse et de  $\alpha$  sont extrêmement faibles. Ceci n'est pas requis, mais la facilité d'obtention de ce résultat nous permet de pouvoir utiliser cette modélisation sans le moindre doute sur l'erreur qu'elles apportent (ceci est surtout valable pour la masse, car la variation de masse est entièrement due à celle du moteur).

La forme de toutes les courbes d'erreur est causée par la manière dont les courbes de tendance sont calculées. En effet le polynôme "ondule" autour de la courbe de donnée originale, avec une amplitude nulle pour une modélisation parfaite.

Les erreurs sont beaucoup plus grandes pour la courbe de poussée, mais elle reste dans le domaine de l'acceptable. Cependant si cette modélisation nous cause des problèmes, il est toujours possible d'en réaliser une plus poussée en utilisant encore plus de courbes indépendantes.

Il est à noter que la courbe est très fidèle pour l'extinction du moteur (courbe verte finale) car elle rejoint 0 N. On ne peut cependant pas dire la même chose de l'allumage du moteur, en effet la modélisation donne  $-398\text{ N}$  à  $t = 0\text{ s}$  où nous attendons 0 N. Cependant nous avons gardé cette modélisation car elle offre une bonne fidélité dès le premier point de référence du Stab' Traj' à  $t = 0,01\text{ s}$ .

Des similarités sont notables entre les courbes de poussée de dérivée de masse, ce qui est logique car le moteur expulse de la masse pour propulser notre fusée. Les écarts aux données sont semblables de par la forme des courbes.

## 3 Formules pour les grandeurs étudiées

$$s = \frac{EN(t)}{Sn}$$

$$N(t) = m_{sj} * a(t)$$

$$a(t) = \frac{-\text{sgn}(v_x(t))f + F(t) - g \cos(\alpha)m(t) - m_p(t)v_x(t)}{m(t)}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\rho S_a v_x(t)^2 C_x$$

$$V_{lue,i}(t) = G_i V_{in} \epsilon_{exp,i} \frac{k}{4} \cdot 10^6 + V_{ref}$$

$$\epsilon_{exp,i} = \frac{4(V_{lue,1}(t) - V_{ref})}{G_i V_{in} k \cdot 10^6}$$