

# Algorithmen und Datenstrukturen

## Sommersemester 2024

### Übungsblatt 5

Albert-Ludwigs-Universität  
Institut für Informatik

Abgabe: Dienstag, 28. Mai, 2024, 10:00 Uhr

## Aufgabe 1: Ungeeignete Hashfunktionen (10 Punkte)

Sei  $m$  die Größe einer Hashtabelle und  $M \gg m$  der größte mögliche Schlüssel der Datenelemente, die wir in dieser Hashtabelle speichern möchten. Die folgenden “Hashfunktionen” sind aus unterschiedlichen Gründen schlecht gewählt. Erläutern Sie für jede Funktion warum das so ist.

- (a)  $h : x \mapsto \lfloor \frac{x}{m} \rfloor \bmod m$  (1,5 Punkte)

Diese Hashfunktion ist schlecht, weil sie den Wertebereich der Schlüssel nicht gleichmäßig auf die Hash-Tabelle verteilt. Wenn  $x$  nur ein wenig größer wird, ändert sich der Hash-Wert, was zu Clustern in der Hash-Tabelle führt.

- (b)  $h : x \mapsto (2x + 1) \bmod m$  für ein gerades  $m$ . (1,5 Punkte)

Diese Hashfunktion ist schlecht, weil sie für Werte von  $m$  nur ungerade Hashwerte liefert. Dies bedeutet, dass die Hälfte der möglichen Hashwerte niemals genutzt wird, was zu einer schlechten Ausnutzung der Hashtabelle führt.

- (c)  $h : x \mapsto (x \bmod m) + \lfloor \frac{m}{x+1} \rfloor$  (1,5 Punkte)

Diese Hashfunktion ist schlecht, weil sie sehr unvorhersehbare und ungleichmäßige Hashwerte erzeugt. Der Ausdruck  $\lfloor \frac{m}{x+1} \rfloor$  ändert sich stark und fügt zusätzliche Komplexität hinzu, was die Gleichverteilung der Schlüssel schlechter macht.

- (d) Bei jeder Berechnung des Hashwerts von  $x$  wählt man für  $h(x)$  eine gleichverteilt zufällige Zahl aus  $\{0, \dots, m-1\}$  (1,5 Punkte)

Diese Hashfunktion ist schlecht, weil sie keine Konsistenz bietet. Derselbe Schlüssel  $x$  wird bei jeder Hash-Berechnung auf einen anderen Wert abgebildet, was nicht zu Hashing passt.

- (e)  $h : x \mapsto \left\lfloor \frac{M}{x \cdot p \bmod M} \right\rfloor \bmod m$ , wobei  $p$  prim und  $\frac{M}{2} < p < M$  (2 Punkte)

Diese Hashfunktion ist schlecht, weil sie durch die komplexe Berechnung von  $\left\lfloor \frac{M}{x \cdot p \bmod M} \right\rfloor$  die Berechnungszeit. Auch ist schlecht dass die Hashwerte gleichmäßig verteilt sind. Dies führt zu einer ineffizienten Nutzung der Hashtabelle.

-

## Aufgabe 2: (Keine) Familien Universeller Hashfunktionen (10 Punkte)

- (a) Sei  $S = \{0, \dots, M-1\}$ . Wir definieren  $H_1 := \{h : x \mapsto a \cdot x^2 \bmod m \mid a \in S\}$ . Zeigen Sie, dass  $H_1$  nicht  $c$ -universell ist, für konst.  $c \geq 1$  (d.h.,  $c$  ist fest und unabhängig von  $m$ ). (4 Punkte)

**Lösung:**  $H_1$  ist nicht  $c$ -universell, da die Quadratische Funktion  $a \cdot x^2 \bmod m$  keine gleichmäßige Verteilung der Hashwerte gibt. Besonders für kleine Werte von  $a$  und  $m$  gibt es Unterschiede in der Wahrscheinlichkeit, dass zwei verschiedene Schlüssel denselben Hashwert haben.