Prof. Dr. Armin Biere
Dr. Mathias Fleury

Freiburg, 03.. Mai 2023

Technische Informatik
Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

Konvertieren Sie die Zahlen in Betrag & Vorzeichen, Einerkomplement und Zweierkomplement Darstellung.

-234_8 89_{10} $7CB1_{16}$ -3_{10} -20_{16}

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Beweisen Sie das folgende Lemma aus der Vorlesung:

Lemma: Sei $[a]_2 = [a_{n-1}a_{n-2}\dots a_0]_2$ eine *ganze* Zahl in Zweier-Komplement-Darstellung mit n Vorkommastellen und *keinen* Nachkommastellen. Dann gilt:

$$[a']_2 + 1 + [a]_2 = 0$$

Hierbei sei $[a']_2$ die Zahl im Zweier-Komplement, die aus $[a]_2$ durch Invertieren aller Bits hervorgeht. Verwenden Sie dazu nur die Definition des Zweier-Komplements und die geometrische Summenformel.

Aufgabe 3 (3 + 2 + 2 + 1 Punkte)

Der Wert einer nichtnegativen Festkommazahl $d = d_n d_{n-1} \dots d_0$ mit $n+1$ Vorkommastellen und ohne Nachkommastellen im Dezimalsystem ist gegeben durch

$$\langle d\rangle = \sum_{i=0}^{n} d_i 10^i.$$

Betrachtet man auch negative Festkommazahlen, dann ist es im Dezimalsystem am verbreitetsten, die Darstellung durch Betrag und Vorzeichen zu wählen. Dabei wird die höchstwertige Stelle d_n als "Vorzeichenbit" interpretiert. d_n ist dann auf den Wertebereich $\{0, 1\}$ beschränkt. Wenn $d_n = 0$, dann handelt es sich um eine nichtnegative Zahl. Die Darstellung durch Betrag und Vorzeichen ordnet $d = d_n d_{n-1} \dots d_0$ den folgenden Wert zu:

$$[d_n d_{n-1} \dots d_0]_{BV} = (-1)^{d_n} \sum_{i=0}^{n-1} d_i 10^i.$$

Es gibt aber auch im Dezimalsystem Alternativen zur Betrag- und Vorzeichendarstellung.

Sei $d = d_n d_{n-1} \dots d_0$, mit $d_n \in \{0, 1\}$ und $d_i \in \{0, \dots, 9\}$ für $0 \leq i < n$.

a) Betrachten Sie (analog zur Einer-Komplement-Darstellung im Binärsystem) eine Neuner-Komplement-Darstellung im Dezimalsystem mit dem Wert

$$[d_n d_{n-1} \dots d_0]_9 = \sum_{i=0}^{n-1} d_i 10^i - d_n \cdot x$$

Geben Sie die größte darstellbare Zahl für $n = 4$ und für beliebige $n > 0$ an.

Wählen Sie x so, dass in der Neuner-Komplement-Darstellung der Zahlenbereich symmetrisch ist, d.h. dass die kleinste und die größte darstellbare Zahl den gleichen Betrag haben.

Begründen Sie kurz Ihre Wahl.

b) Überlegen Sie sich nun, wie das Komplementieren der Ziffern in der Neuner-Komplement-Darstellung definiert werden muss, damit das folgende Lemma 1 gilt.

Lemma 1: Sei a eine Festkommazahl im Dezimalsystem, a' die Festkommazahl im Dezimalsystem, die aus a durch Komplementieren aller Ziffern hervorgeht. Dann gilt $[\mathbf{a'}]_\mathbf{9} + [\mathbf{a}]_\mathbf{9} = \mathbf{0}$.

Rechnen Sie nach, dass für die Dezimalzahl 01784_{10} ($n = 4$) mit Ihrer Komplementierung die Aussage von Lemma 1 gilt.

c) Definieren Sie nun (analog zur Zweier-Komplement-Darstellung im Binärsystem) eine Zehner-Komplement-Darstellung im Dezimalsystem mit dem Wert

$$[d_n d_{n-1} \dots d_0]_{10} = \sum_{i=0}^{n-1} d_i 10^i - d_n \cdot y.$$

Wählen Sie y so, dass in der Zehner-Komplement-Darstellung die Zahlendarstellung eindeutig und zusammenhängend ist (d.h. es gibt im Bereich der darstellbaren Zahlen keine Lücke).

Beweisen Sie, dass das von Ihnen gewählte y, zusammen mit Ihrer Komplementierung aus Aufgabenteil b), das folgende Lemma 2 erfüllt

Lemma 2: Sei a eine Festkommazahl im Dezimalsystem, a' die Festkommazahl im Dezimalsystem, die aus a durch Komplementieren aller Ziffern hervorgeht. Dann gilt $[\mathbf{a'}]_\mathbf{10} + [\mathbf{a}]_\mathbf{10} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$.

d) Wie muss das “Komplementieren” einer Ziffer definiert werden, damit Lemmata 1 und 2 für ein Zahlensystem mit der Basis b gelten?

Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabe: 10. Mai 2021, $17^{\underline{00}}$ über das Übungsportal