Prof. Dr. Armin Biere
Dr. Mathias Fleury

Freiburg, 19. April 2024

Technische Informatik
Übungsblatt 1

Bemerkung: Der Rest dess aktuellen Übungsblatts hat das Ziel, sich auf mathematische Grundlagen zu verständigen, die für die Vorlesung Technische Informatik benötigt werden. Ein Teil der Grundlagen sollte aus anderen Vorlesungen schon bekannt sein und stellt lediglich eine Wiederholung dar. Für eine ausführlichere Darstellung der benötigten mathematischen Grundlagen ist auf der Vorlesungsseite (bzw. im ILIAS-Kurs) unter den nicht-annotierten Folien ein Kapitel "Mathematische_Grundlagen.pdf" zu finden.

Aufgabe 1

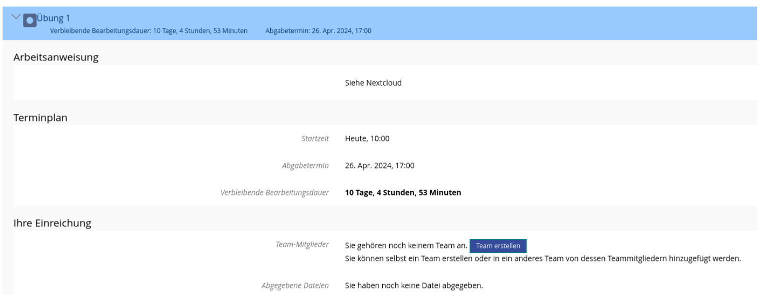
Melden Sie sich auf Ilias in ihrer Tutoren Gruppe an (basierend auf ihrer HISInOne Gruppe). Dort können Sie auch die Übung angeben.

Um abzugeben:

Auf der Tutoren Gruppe clicken, dann auf beitreten drücken (dies ist nur beim ersten mal notwendig)

Um abzugeben, auf "Übungen" drücken, dann "Übung 1"

Dort können Sie ein Team erstellen (genau 2 Leute). Dafür brauchen Sie den RZ Kürzel von dem anderen Mitglied und er muss auch in der Gruppe beigetreten sein.



Danach können Sie dann eine Abgabe machen.

Sie dürfen natürlich das Team wechseln, aber bitte nur innerhalb eines Tutorates.

Aufgabe 2

Die Übungsblätter zur Vorlesung müssen in elektronischer Form als PDF-Dokument erstellt werden. Es gibt mehrere Möglichkeiten, PDF-Dokumente zu erstellen. Dazu gehören:

LaTeX: Ein Text-Satz-System, das sich insbesondere für naturwissenschaftliche Dokumente eignet, da es z.B. eine hervorragende Eingabe mathematische Formeln erlaubt. Informationen zu LaTeX gibt es u.a. auf der folgenden Webseite:
`https://web.archive.org/web/20210122190126/http://www2.informatik.uni-freiburg.de/~frank/latex-kurs/latex-kurs.html`
Vorlagen für Übungsaufgaben sind auf der Ilias-Lernplattform
siehe den "Alle Dokumente" Link auf Ilias unter *Zusatzmaterial* zu finden.

LibreOffice/OpenOffice: LibreOffice und OpenOffice sind Textverarbeitungssysteme vergleichbar mit der Office-Suite von Microsoft. Sie sind kostenlos verfügbar und ermöglichen das Erstellen von PDF-Dokumenten. Weitere Informationen erhalten Sie unter
`http://www.libreoffice.org/` und `https://www.openoffice.org/de/`

Microsoft Office: Seit Microsoft Office 2007 wird auch hier das Erstellen von PDF-Dokumenten unterstützt. Darüber hinaus gibt es verschiedene Konverter, mit deren Hilfe sich auch unter Windows PDFs erzeugen lassen.

Erstellen Sie ein PDF-Dokument mit einer Software ihrer Wahl, z.B. LaTeX oder OpenOffice. Versuchen Sie, mathematische Formeln einzugeben und fügen Sie Tabellen, Grafiken, usw. ein. Erstellen Sie ein PDF-Dokument.

PDF-Dokumente können Sie am Rechner mit dem kostenlosen Acrobat Reader von Adobe (`http://www.adobe.de/`) betrachten; eine Liste freier PDF-Programme finden Sie unter `http://pdfreaders.org/`.

Reichen Sie nur PDFs die kleiner als 10MB sind!

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Die *vollständige Induktion* ist eine Beweismethode für Aussagen $A(n)$, die *für alle natürlichen Zahlen* $n \in \mathbb{N}$ gelten sollen. Dabei wird folgendermaßen vorgegangen:

- Zuerst wird die Aussage für den *Basisfall* $n = 0$ ("$A(0)$") bewiesen (manchmal auch $n = 1$ oder höher).
- Dann wird unter der Annahme, dass die Aussage für n gilt (*Induktionsvoraussetzung*) im *Induktionsschritt* bewiesen, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt. Daraus folgt die Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen.

In dieser Übungen nehmen wir an, dass es eine partielle Ordnung $\preccurlyeq$ gibt. Das bedeutet, dass es nicht immer gilt, dass $a \preccurlyeq b$ oder $b \preccurlyeq a$, sondern nur wenn a und b vergleichbar sind.

Beweisen Sie die folgende Eigenschaft durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

Für alle Menge von Größe $n \geq 1$, gibt es ein minimales Element.

$\square$

Aufgabe 4 (1 + 3 + 7 Punkte)

a) Das *Prinzip der Dualität* für boolesche Algebren besagt:

> Gilt eine aus den Gesetzen der booleschen Algebra abgeleitete Gleichung p, so gilt auch die zu p duale Gleichung, die aus p durch gleichzeitiges Vertauschen von $+$ und $\cdot$, sowie 0 und 1 hervorgeht.

Warum gilt dieses Prinzip? Begründen Sie das Prinzip zunächst für den Fall, dass die Gleichung p weder 0 noch 1 enthält. Wieso lässt sich das Prinzip auch auf den Fall erweitern, dass p 0 bzw. 1 enthält?

b) Auf $\mathbb{M} := \{1, 2\}$ sei eine boolesche Algebra mit den booleschen Operatoren $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ definiert. Die Symbole $+$ und $-$ bezeichnen hierbei die üblichen Operatoren auf ganzen Zahlen ($\mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} x \vee y &:= \max(x, y) \\ x \wedge y &:= \min(x, y) \\ \neg x &:= 2 - x + 1 \end{aligned}$$

Zeigen Sie formal, dass $(\mathbb{M}, \wedge, \vee, \neg)$ die folgenden in der Vorlesung vorgestellten Axiome einer booleschen Algebra erfüllt

i) Absorption	$x \vee (x \wedge y) = x$	$x \wedge (x \vee y) = x$
ii) Komplementregel	$x \vee (y \wedge \neg y) = x$	$x \wedge (y \vee \neg y) = x$

Benutzen Sie dabei ausschließlich die obigen Operatordefinitionen und Rechenregeln aus $\mathbb{Z}$, gehen Sie formal vor und nicht über Tabellen wie in der Vorlesung.

Hinweise:

- Führen Sie (für jedes Axiom eine) Fallunterscheidung durch.
- Das *Prinzip der Dualität* darf für Aufgabenteil b) **nicht** verwendet werden.

Aufgabe 5 (3 + 3 Punkte)

In der Informatik verwendet man zur Beschreibung des “asymptotischen Wachstumsverhaltens” von Funktionen f über $\mathbb{R}_0^+$ (den nicht-negativen reellen Zahlen) die sogenannte *O-Notation.* Die O-Notation wird verwendet, um die Größe von parametrisierten Objekten, die Laufzeit von Algorithmen (Anzahl von Rechenschritten in Abhängigkeit von der Eingabelänge) usw. *asymptotisch*, d.h. bis auf eine multiplikative Konstante $c \in \mathbb{R}_0^+$, abzuschätzen. Hierbei interessiert man sich nur für die “großen Werte” aus der Definitionsmenge von f, d.h. für gewisse Konstanten $x_0 \in \mathbb{R}_0^+$ interessiert man sich nicht für das Verhalten auf Anfangsbereichen $[0, x_0)$ der Definitionsmenge $\mathbb{R}_0^+$.

Die O-Notation ist exakt wie folgt definiert:

Seien $f, g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$. Man schreibt

$$f(x) \in O(g(x))$$

wenn es ein $c \in \mathbb{R}_0^+$ und ein $x_0 \in \mathbb{R}_0^+$ gibt, so dass $f(x) \leq c \cdot g(x)$ für alle $x \geq x_0$ gilt.

Beispiel: $5x + 2 \in O(x^2)$

Beweis: Setze $c = 6, x_0 = 2$.

$$5x + 2 \overset{2<x}{<} 5x + x = 6x \overset{1 \leq x}{\leq} 6 \cdot x^2 \text{ für } x > 2.$$

Anmerkung: Die Notation $f(x) = O(g(x))$ ist weit verbreitet, aber eigentlich falsch, da $O(g(x))$ eine Menge ist. So folgt aus $f(x) = O(g(x))$ und $h(x) = O(g(x))$ keinesfalls $f(x) = h(x)$!

Geben Sie mit Begründung/Berechnung an, für welche der folgenden Paare von Funktionen f, g welche der Eigenschaften $f(n) \in O(g(n))$ und/oder $g(n) \in O(f(n))$ gelten.

a) $f(n) = 100n + \log n, \quad g(n) = n + (\log n)^2$

b) $f(n) = \frac{n^2}{\log n}, \quad g(n) = n(\log n)^2$

Hinweis: Für diese Aufgabe dürfen Sie Folgendes (unbewiesen) verwenden:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq c \quad \Rightarrow \quad f(n) \in O(g(n)) \qquad (c \in \mathbb{N}_0) \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \quad \Rightarrow \quad f(n) \notin O(g(n))) \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(c \cdot n)}{n} = 0 \qquad (c \in \mathbb{N}_{\geq 1}) \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\log n)^c} = \infty \qquad (c \in \mathbb{N}_{\geq 1}) \tag{4}$$

Aufgabe 6 (4 + 3 + 2 Punkte)

In dieser Übung interessieren wir uns mal für die Größe der Transistoren. Aber im Gegensatz zu der Vorlesung trauen wir mal nicht dem Marketing

a) Für die Information in der Tabelle:

Jahr	Prozessor	Anzahl Transistoren	Größe
1979	Intel 8088	29k	20 mm^2
1993	Pentium	3.1M	194 mm^2
2008	Core 2 Duo	731M	83 mm^2
2023	Apple M1 Ultra	114G	840 mm^2

Berechnen Sie die Dichte in transitor pro mm^2.

b) Für den M1 ultra, wie groß ist ein Transistor? 7.368421052631579e-09

c) Offiziell hat der M1 ultra "5nm" Transistoren. Ist das wirklich so? Erklären Sie genau die Annahme die sie machen!

Intel 8088:
- **Dichte** = \(\frac{29,000}{20} \) = **1,450 Transistoren/mm^2**

Pentium:
- **Dichte** = \(\frac{3,100,000}{194} \) = **15,979 Transistoren/mm^2**

Core 2 Duo:
- **Dichte** = \(\frac{731,000,000}{83} \) = **8,807,229 Transistoren/mm^2**

Apple M1 Ultra:
- **Dichte** = \(\frac{114,000,000,000}{840} \) = **135,714,286 Transistoren/mm^2**

Vielleicht benötigt der Transistor auch Platz um sich. Mit 5nm meint Apple den Teil der wirklich Transistor ist.

Abgabe: 26. April 2024, 17$^{\underline{00}}$