Prof. Dr. Armin Biere
Dr. Mathias Fleury

Freiburg, 26. April 2023

Technische Informatik
Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Die Fibonacci-Zahlen sind eine Folge von positiven ganzen Zahlen und wurden um ca. 1200 von Leonardo Fibonacci (Leonardo von Pisa) entdeckt. Ursprünglich dienten sie ihm dazu, das Wachstum einer Kaninchenpopulation zu beschreiben.

Die n-te Fibonacci-Zahl $f(n)$ ist für $n \geq 0$ rekursiv definiert durch:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2) \qquad \text{(für } n \geq 2) \end{aligned}$$

a) Das erste was uns interessiert die Anzahl an Additionen die durchgeführt werden $s(n)$. Definieren Sie $s(n)$ rekursiv – bei Berechnen von $f(n-1) + f(n-2)$ kommen also 1 ('+') und $s(n-1) + s(n-2)$ Additionen. Berechnen Sie die ersten $f(n+1) - 1$ und $s(n)$ bis $n = 6$.

   Was sieht man? Beweisen Sie es!

b) Statt die obiege Definition zu nutzen benutzen wir, weil sie weniger rekursive Aufrufe macht:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \\ f(2) &= 1 \\ f(n) &= 2 \times f(n-2) + f(n-3) \qquad \text{(für } n \geq 3) \end{aligned}$$

   Zeigen Sie dass die Definitionen gleich sind.

c) Schreiben Sie ein Programm für den ReTI-Rechner, das die n-te $s(n)$ berechnet und in $S(33)$ speichert. Gehen Sie davon aus, dass der Wert von n in $S(30)$ abgelegt ist.

   Stellen Sie sicher, dass Ihr Tutor die Abgabe aus Ihrer Einreichung kopieren kann um es mit `https://github.com/sebwalk/reti-emulator` ausführen zu können!

   Hinweis: Kommentieren Sie ihr Programm ausführlich, fehlende Kommentare führen zu Punktabzug. Unverständliche Programme ohne Kommentare gelten nicht als bearbeitet!

Aufgabe 2 $(2 + 4 + 2$ Punkte)

a) Folgender Text hat die angegebene Häufigkeitsverteilung

`HEUTE BESTEHE ICH HEUTE DIESE KLAUSUR T`

Zeichen	E	U	I	S	H	T	B	D	C	A	L	R	K
Häufigkeit	9	4	2	3	4	4	1	1	1	1	1	1	1

Erzeugen Sie für diese Häufigkeitsverteilung einen binären Baum. Gehen Sie dabei analog zur Vorlesung und Übungen vor.

Um die Korrektur zu erleichtern, falls es mehrere Möglichkeiten gibt, arbeiten Sie erst in den Teilen `UE` und `ISHT` und `BDCALRK` separat bis Sie im ganzen Baum arbeiten müssen.

Hinweis: Auf der nächsten Seite ist die Tabelle kopiert. Zeichnen Sie den Baum dort!

Hinweis 2: In Klausuren geben wir gerne die Reihenfolge der Buchstaben vor! Der Code für die Tabelle ist:

```
\usepackage{tikz}
\usepackage{substr}
\newcommand\myTextToEncodeTwo{HEUTE BESTEHE ICH HEUTTE DIESE KLAUSUR T}
\newcommand\myLettersTwo{E,U,I,S,H,T,B,D,C,A,L,R,K}

  \begin{tikzpicture}[scale=1.2]
    \foreach \letter [count=\xi] in \myLettersTwo {
      \node (letter-\xi) at (\xi, 0) {\letter};
      \node (count-\xi) at (\xi, -1) {\CountSubStrings{\letter}\myTextToEncodeTwo};
    }
    \node (question) at (0,0) {b)};

  \draw (4.5,0.5) -- (4.5,-1.5);
  \draw (11.5,0.5) -- (11.5,-1.5);
  \end{tikzpicture}
```

Hinweis 3: Ein Baum ohne 0/1 ist *nicht* eindeutig.

b) Geben Sie den resultierenden Huffman-Code in der folgenden Tabelle. Gehen Sie dabei analog zur Vorlesung vor.

Buchstabe	Huffman-Code
K	
B	
I	
E	

c) Ein anderer Student hat eine *kürzere* Lösung gefunden für das Encoding vom vollständingen Text. Ist dies Möglich? Begründen Sie!

b)

E	U	I	S	H	T	B	D	C	A	L	R	K
9	4	2	3	4	4	1	1	1	1	1	1	1

Aufgabe 3 $(2 + 2 + 3$ Punkte$)$

Sei ein Alphabet $A = a_1, ..., a_m$ mit $m \geq 3$ gegeben. Sei weiterhin eine Häufigkeitsverteilung p gegeben, die jedem Zeichen $a_i \in A$ eine Häufigkeit zuordnet mit $\sum_{i=1}^{m} p(a_i) = 1$. Der zugehörige Huffman-Code sei mit c bezeichnet.

a) Zeigen Sie: Falls es ein $i \in 1, ..., m$ gibt mit $p(a_i) > 0.5$, dann gilt $|c(a_i)| = 1$ (d.h. das Codewort, das a_i zugeordnet wird, hat die Länge 1).

b) Zeigen Sie: Falls es ein $i \in 1, ..., m$ gibt mit $|c(a_i)| = 1$, dann muss $p(a_i) >= 1/3$ gelten. (*Hinweis*: Beweis durch Widerspruch.)

c) Nehmen Sie nun eine Häufigkeitsverteilung an, die für jedes Zeichen des Alphabets den gleichen Wert ergibt, d.h. $P(a_i) = P(a_j)$ für $1 \leq i < j \leq m = 2^i$ (balancierten Baum!). Nehmen Sie an, Sie würden einen Huffman-Code erzeugen. Wie groß wäre nun die mittlere Codelänge? Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabe: 03. Mai 2024, $17^{\underline{00}}$ über das Übungsportal