Kapitel 3 – Kombinatorische Logik

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. Armin Biere

Institut für Informatik

Sommersemester 2024

UNI FREIBURG

Überblick

- Boolesche Funktionen kann man durch Schaltkreise darstellen.
- Wir werden uns als nächstes mit Logiksynthese für zweistufige Schaltkreise beschäftigen.
- Bei der Logiksynthese für zweistufige Schaltkreise macht man häufig von einer alternativen Darstellungsform Gebrauch, den Booleschen Ausdrücken.
- Führe daher Boolesche Ausdrücke zunächst sauber ein, vorher aber noch eine etwas genauere Betrachtung von Booleschen Algebren.

Boolesche Algebren - allgemein

- Es sei M eine Menge auf der zwei binäre Operationen $\cdot$ und $+$ und eine unäre Operation $\sim$ definiert sind.
- Das Tupel $(M, \cdot, +, \sim)$ heißt Boolesche Algebra, falls M eine nichtleere Menge ist und für alle $x, y, z \in M$ die folgenden Axiome gelten:

Kommutativität	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoziativität	$x + (y + z) = (x + y) + z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
Absorption	$x + (x \cdot y) = x$	$x \cdot (x + y) = x$
Distributivität	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
Komplement	$x + (y \cdot \sim y) = x$	$x \cdot (y + \sim y) = x$

Beispiele Boolescher Algebren: Boolesche Algebra $(\{0,1\}, \wedge, \vee, \neg)$

Definition

- $\mathbb{B} := \{0,1\}$
- Konjunktion (UND-Verknüpfung) $\wedge : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$
  $0 \wedge 0 = 0, \quad 0 \wedge 1 = 0, \quad 1 \wedge 0 = 0, \quad 1 \wedge 1 = 1$
- Disjunktion (ODER-Verknüpfung) $\vee : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$
  $0 \vee 0 = 0, \quad 0 \vee 1 = 1, \quad 1 \vee 0 = 1, \quad 1 \vee 1 = 1$
- Negation $\neg : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$
  $\neg 0 = 1, \quad \neg 1 = 0$

Beispiele Boolescher Algebren: Boolesche Algebra $(\{0,1\},\wedge,\vee,\neg)$

Konventionen

- Man schreibt auch $\cdot$ statt $\wedge$ und $+$ statt $\vee$.
- Für $\neg x$ sind viele Notationen üblich: $\sim x$, x' oder $\overline{x}$.

Weitere Beispiele Boolescher Algebren

- Boolesche Algebra der Booleschen Funktionen in n Variablen: $(\mathbb{B}_n, \cdot, +, \neg)$

- Boolesche Algebra der Teilmengen einer Menge S: $(Pot(S), \cap, \cup, \neg)$

⇒ **Allgemein**: Lässt sich eine Aussage direkt aus den Axiomen herleiten, dann gilt sie in allen Booleschen Algebren!

  - Man darf beim Beweis der Aussage aber auch wirklich nur die Axiome verwenden und keine Eigenschaften der konkreten Booleschen Algebra.

Boolesche Algebra der Funktionen in n Variablen $(\mathbb{B}_n, \cdot, +, \neg)$

- Menge: $\mathbb{B}_n$ (Menge der Booleschen Funktionen in n Variablen)
- $\cdot$: $\mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$; $(f \cdot g)(\alpha) = f(\alpha) \cdot g(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{B}^n$
- $+$: $\mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$; $(f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{B}^n$
- $\neg$: $\mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$; $(\neg f)(\alpha) = 1 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{B}^n$

Satz

$(\mathbb{B}_n, \cdot, +, \neg)$ ist eine Boolesche Algebra.

- **Beweis**: Nachrechnen, dass alle Axiome gelten.

  Beispiel: Kommutativität
  - Betrachte beliebige $f, g \in \mathbb{B}_n$.
  - Für alle $\alpha \in \mathbb{B}^n$ gilt: $(f+g)(\alpha) = \underbrace{f(\alpha) + g(\alpha)}_{+:\ \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}} = g(\alpha) + f(\alpha) = \underbrace{(g+f)(\alpha)}_{+:\ \mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n}$.
  - Also $f + g = g + f$.

Boolesche Algebra der Teilmengen von S $(Pot(S), \cap, \cup, \neg)$

- Menge: Potenzmenge von S
- $\cdot$: $Pot(S) \times Pot(S) \to Pot(S);\ (M_1, M_2) \mapsto M_1 \cap M_2$
- $+$: $Pot(S) \times Pot(S) \to Pot(S);\ (M_1, M_2) \mapsto M_1 \cup M_2$
- $\neg$: $Pot(S) \to Pot(S);\ M \mapsto \neg M :=\ S \setminus M$

Satz

$(Pot(S), \cap, \cup, \neg)$ ist eine Boolesche Algebra.

- **Beweis**: Nachrechnen, dass alle Axiome gelten.

  Beispiel: Absorption
  - Betrachte beliebige $M_1, M_2 \in Pot(S)$.
  - Dann ist $(M_1 + (M_1 \cdot M_2)) = (M_1 \cup (M_1 \cap M_2)) = M_1$
    und $(M_1 \cdot (M_1 + M_2)) = (M_1 \cap (M_1 \cup M_2)) = M_1$.

Zusammenhang zwischen $(\mathbb{B}_n, \cdot, +, \neg)$ und $(Pot(\mathbb{B}^n), \cap, \cup, \neg)$

- Eine Funktion $f \in \mathbb{B}_n$ entspricht umkehrbar eindeutig der folgenden Teilmenge von $\mathbb{B}^n$:

$$ON(f) = \{\alpha \in \mathbb{B}^n \mid f(\alpha) = 1\}$$

- Die Operationen in $(\mathbb{B}_n, \cdot, +, \sim)$ übertragen sich auf $(Pot(\mathbb{B}^n), \cap, \cup, \neg)$:
  - $ON(f \cdot g) = ON(f) \cap ON(g)$
  - $ON(f + g) = ON(f) \cup ON(g)$
  - $ON(\neg f) = \neg ON(f)$

Weitere, aus den Axiomen ableitbare Regeln:

- Existenz und Eindeutigkeit neutraler Elemente:
  $\exists \mathbf{0} \in M : x + \mathbf{0} = x \ \forall x \in M, \quad \exists \mathbf{1} \in M : x \cdot \mathbf{1} = x \ \forall x \in M$ und außerdem sind die Elemente 0 und 1 $\in M$ mit der angegebenen Eigenschaft eindeutig.
- $\forall x \in M : x \cdot \neg x = \mathbf{0} \quad \forall x \in M : x + \neg x = \mathbf{1}$
- $\forall x \in M : x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \forall x \in M : x + \mathbf{1} = \mathbf{1}$
- Doppeltes Komplement:
  $\forall x \in M : (\sim (\sim x)) = x$
- Eindeutigkeit des Komplements:
  $\forall x, y \in M : (x \cdot y = \mathbf{0} \text{ und } x + y = \mathbf{1}) \Rightarrow y = (\sim x)$
- Idempotenz:
  $\forall x \in M : x + x = x \quad x \cdot x = x$
- de Morgan-Regel:
  $\forall x, y, z \in M : \sim (x + y) = (\sim x) \cdot (\sim y) \quad \sim (x \cdot y) = (\sim x) + (\sim y)$
- Consensus-Regel:
  $\forall x, y, z \in M : (x \cdot y) + ((\sim x) \cdot z) = (x \cdot y) + ((\sim x) \cdot z) + (y \cdot z)$
  $\forall x, y, z \in M : (x + y) \cdot ((\sim x) + z) = (x + y) \cdot ((\sim x) + z) \cdot (y + z)$
- Diese Regeln gelten in allen Booleschen Algebren!

Dualitätsprinzip bei Booleschen Algebren

Prinzip der Dualität

Gilt eine aus den Axiomen der Booleschen Algebra abgeleitete Gleichung p, so gilt auch die zu p duale Gleichung, die aus p hervorgeht durch gleichzeitiges Vertauschen von $+$ und $\cdot$, sowie **0** und **1**.

- **Beispiel**:
  - $(x \cdot y) + ((\sim x) \cdot z) + (y \cdot z) = (x \cdot y) + ((\sim x) \cdot z)$
  - $(x + y) \cdot ((\sim x) + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot ((\sim x) + z)$