

Probeklausur zur Vorlesung
**Mathematik I für Studierende der Informatik und der
Ingenieurwissenschaften**
WS 2023/24

Familienname

Vorname

.....

Note

Matrikelnummer

Unterschrift

1

--	--

2

--	--

3

--	--

4

--	--

5

--	--

6

--	--

Σ

--	--

Bitte beachten Sie:

- Bitte füllen Sie **in jedem Fall** zunächst die Kopfzeilen aus. Nur dann kann Ihre Klausur gewertet werden!
- Überprüfen Sie das Klausurheft, es gibt insgesamt **6 Aufgaben!**
- Bitte beantworten Sie falls möglich alle Fragen auf dem dafür vorgesehenen Platz, das heißt, auf der Seite mit der Aufgabe und der darauf folgenden Seite. Wenn Sie zusätzliche leere Blätter benötigen, melden Sie sich beim Aufsichtspersonal. Zusätzliche Blätter müssen mit Name, Matrikelnummer und Aufgabennummer gekennzeichnet sein.
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- Alle Behauptungen, Berechnungen, Resultate und Ähnliches **müssen begründet werden**, außer es ist explizit anders vermerkt. Sie dürfen die Resultate aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, müssen sie aber klar (mit allen Voraussetzungen) anführen. Bitte geben Sie **alle** Zwischenschritte an, die zum Nachvollziehen Ihrer Ergebnisse notwendig sind.
- Ihre Antworten sollen **eindeutig** sein. Falls Sie erkennen, dass Ihre ursprünglichen Überlegungen falsch waren, kennzeichnen Sie deutlich, was zu berücksichtigen ist.
- Es sind **keine Hilfsmittel** erlaubt. Jeder Versuch, sie zu benutzen, führt zum **automatischen Durchfallen**. Insbesondere müssen alle **Handys, Smartphones, Smartwatches, Tablets etc. ausgeschaltet** sein.
- Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Ihre Klausur nur dann korrigiert und benotet wird, wenn Sie dazu zugelassen und angemeldet sind bzw. der Prüfungsausschuss beim Prüfer schriftlich eine Note anfordert.
- Wir wünschen Ihnen **viel Erfolg!**

Aufgabe 1

Bestimmen Sie, ob die gegebenen Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie dazu auf diesem Blatt in einer Zeile **W** für **WAHR** oder **F** für **FALSCH** an. In dieser Aufgabe ist keine Begründung oder Rechnung benötigt.

Wichtig: Für jeden richtigen Eintrag gibt es 0.5 Punkte, für jeden falschen Eintrag werden 0.5 Punkte abgezogen. Freigelassene Felder ergeben keine Punkte, aber auch keinen Abzug. Insgesamt kann es bei dieser Aufgabe pro Block aber keine negativen Punkte geben.

Block A

- | | W | F |
|--|--------------------------|--------------------------|
| (a) Der Schnitt nicht leerer Mengen ist nicht leer. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (b) Sei $A = \{0, 1\}$ und $B = \{2, 3\}$. Dann gibt es genau zwei injektive Abbildungen von A nach B . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (c) Streng monotone Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} haben mindestens eine Nullstelle. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (d) Für $a = 1 + 2i$ und $b = -2 + 3i$ gilt $\bar{a}b = 4 + 7i$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (e) Jede streng monoton wachsende Folge ist unbeschränkt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (f) Sei C die Menge aller durch 9 teilbaren natürlichen Zahlen. Dann gilt: | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

$$\forall m \in C \exists n \in \mathbb{N} : m = 6n.$$

Block B

- | | W | F |
|---|--------------------------|--------------------------|
| (g) Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ mit $v, w \neq 0$ und $\langle v, w \rangle = 0$. Dann existiert genau ein $u \in \mathbb{R}^3$ mit $ u = v $ und $\langle u, w \rangle = 0$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (h) Für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $q \leq 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (i) Für jede differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (j) Für eine Folge $a_n < 0$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} = 0$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (k) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $ a - b \leq a - b $. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (l) Sind f und g zwei stetige Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} , so sind sowohl $f \circ g$ als auch $g \circ f$ stetig. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
-

Aufgabe 2

Zeigen Sie mithilfe der vollständigen Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{2n(2n-1)(2n+1)}{6}.$$

Aufgabe 3

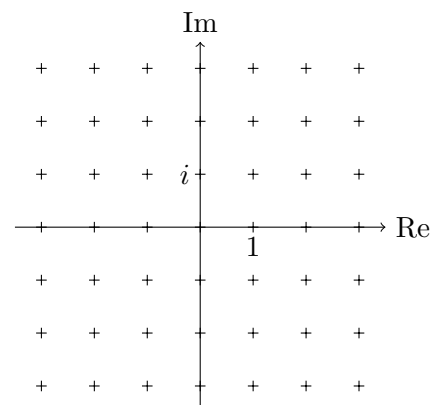
Sei die Funktion $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sin(x)^2$.

- (i) Bestimmen Sie alle Extrema von f im Definitionsbereich.
 - (ii) Ist f auf dem Definitionsbereich konvex? Begründen Sie Ihre Antwort.
-

Aufgabe 4

Es sei $z = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$ gegeben.

- (i) Berechnen Sie \sqrt{z} und stellen Sie das Ergebnis in der Form $a + ib$ dar.
 - (ii) Zeichnen Sie z und \sqrt{z} in der komplexen Ebene ein. Sie dürfen dafür die Skizze unten verwenden.
-



Aufgabe 5

- (i) Leiten Sie die Formel der partiellen Integration her, das heißt die Identität

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Produktregel.

- (ii) Berechnen Sie damit folgendes Integral:

$$\int_1^e x \ln(x) \, dx.$$

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Begründen Sie Ihre Antwort.

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$$

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$
