Kapitel 3 – Kombinatorische Logik

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. Armin Biere

Institut für Informatik
Sommersemester 2024

UNI FREIBURG

Kombinatorische Schaltkreise – zweistufig

- **Ziel:**
  Wir werden zeigen, dass sich jede Boolesche Funktion als ein Polynom, d.h. als eine Disjunktion (ODER-Verknüpfung) von Monomen, die ihrerseits Konjunktionen (UND-Verknüpfungen) von Eingangsvariablen und negierten Eingangsvariablen sind, darstellen lässt.

- Wir werden für solche Darstellungen Kostenkriterien aufstellen und diese optimieren.

- Monome und Polynome sind spezielle Boolesche Ausdrücke.

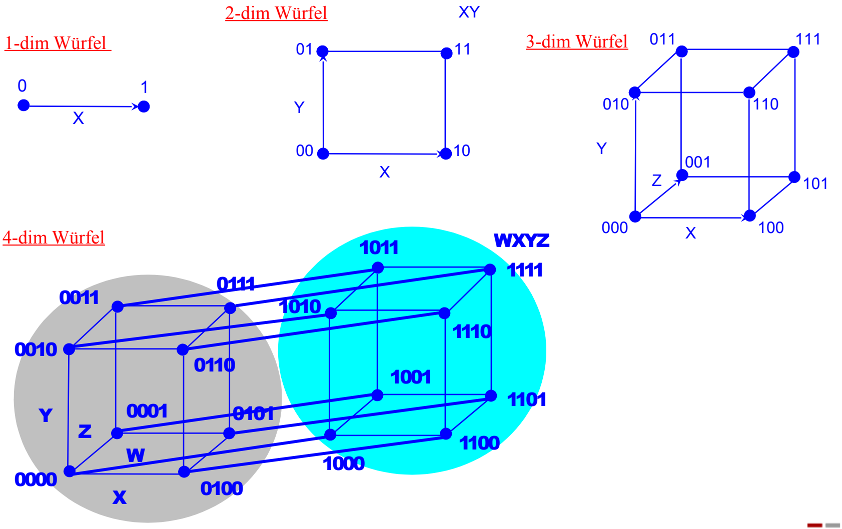
Das Problem der zweistufigen Logikminimierung

- **Gegeben:** Eine Boolesche Funktion $f = (f_1, \ldots, f_m)$ in n Variablen und m Ausgängen in Form einer Tabelle der Dimension $(n+m) \cdot 2^n$ oder einer Menge von m Polynomen $\{q_1, \ldots, q_m\}$ mit $f_i = q_i$.

- **Gesucht:** m Polynome $p_1, \ldots p_m$, so dass p_i für alle i der Funktion f_i entspricht und die Kosten $cost(p_1, \ldots, p_m)$ minimal sind.

- Ab sofort werden nur noch Funktionen mit einem Ausgang betrachtet.

Veranschaulichung von $\{0, 1\}^n$



Veranschaulichung von $\{0, 1\}^4$ durch Karnaugh-Veitch

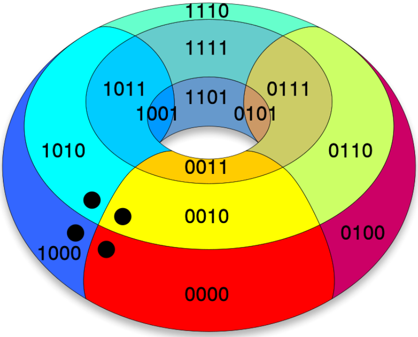
Funktion wird als Tabelle dargestellt.
Gray-Code für die Einträge: nur ein Bit Unterscheidung von einem Wert zum nächster.

	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

4 Variablen

Eigentlich Torus (wikipedia bild)

0000	0100	1100	1000
0001	0101	1101	1001
0011	0111	1111	1011
0010	0110	1110	1010



Ziel: Maximale Bedeckung finden

Bedeckung = $2^k \times 2^\ell$ Viereck, was maximal

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	1	1
10	0	1	0	0

Ziel: Maximale Bedeckung finden

Bedeckung = $2^k \times 2^\ell$ Viereck, was maximal

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	1	1
10	0	1	0	0

Ziel: Maximale Bedeckung finden

Bedeckung = $2^k \times 2^\ell$ Viereck, was maximal

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	1	1
10	0	1	0	0

Ziel: Maximale Bedeckung finden

Bedeckung = $2^k \times 2^\ell$ Viereck, was maximal

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	1	1
10	0	1	0	0

1001 nicht maximal!

Ziel: Maximale Bedeckung finden

Bedeckung = $2^k \times 2^\ell$ Viereck, was maximal

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	1	1
10	0	1	0	0

Ziel: Maximale Bedeckung finden

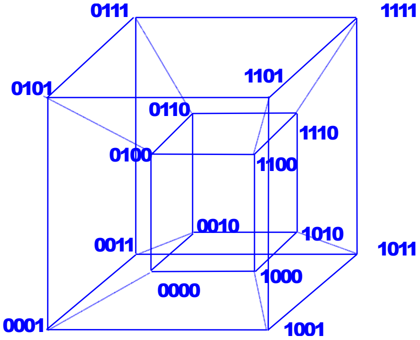
Bedeckung = $2^k \times 2^\ell$ Viereck, was maximal

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	1	1
10	0	1	0	0

Also: $f = x_1x_2 + x_1'x_2'x_3' + x_2x_3'x_4$

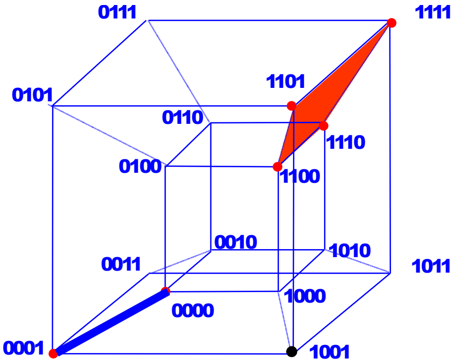
Veranschaulichung durch Würfel

- Jede Boolesche Funktion f in n Variablen und einem Ausgang kann über einen n-dimensionalen Würfel durch Markierung der $ON(f)$-Menge spezifiziert werden.
  - **Beispiel**:
    $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_1' x_2' x_3' + x_1 x_2' x_3' x_4$



Monome und Polynome als Teilwürfel

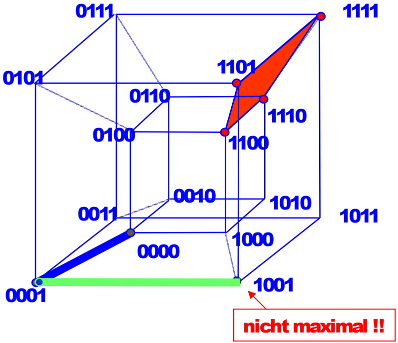
- Monome der Länge k entsprechen $(n-k)$-dimensionalen Teilwürfeln!
- Ein Polynom entspricht einer Vereinigung von Teilwürfeln.
- **Beispiel**:
  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
  $= x_1x_2 + x_1'x_2'x_3'$
  $+ x_1x_2'x_3'x_4$



- **Gegeben**: Boolesche Funktion f in n Variablen und **einem** Ausgang, in Form eines markierten n-dimensionalen Würfels.
- **Gesucht**: Eine minimale Überdeckung der markierten Knoten durch maximale Teilwürfel im n-dimensionalen Würfel.

Entspricht einer Minimallösung:

$x_1x_2 + x_1'x_2'x_3' + x_2'x_3'x_4$



Minimale Kosten

Gegeben ein PLA mit $m > 1$ Ausgängen und jede Funktion ist durch ein Minimalpolynom, also eine Minimallösung, die die Funktion überdeckt wie auf der vorherigen Folie, realisiert. Sind die gesamten Kosten des PLA folglich auch minimal?

a. Ja.
b. Nein.

Implikanten und Primimplikanten

Definition

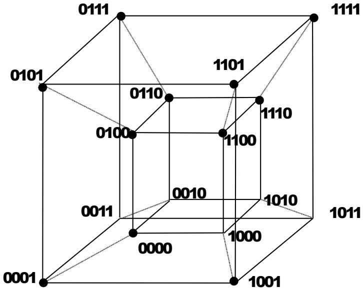
Eine Boolesche Funktion $f \in \mathbb{B}_n$ ist kleiner gleich einer anderen Booleschen Funktion $g \in \mathbb{B}_n$ ($f \leq g$), wenn $\forall \alpha \in \mathbb{B}^n : f(\alpha) \leq g(\alpha)$. (Das heißt, wenn f an einer Stelle 1 ist, dann auch g.)

Definition

Sei f eine Boolesche Funktion mit einem Ausgang. Ein Implikant von f ist ein Monom q mit $q \leq f$. Ein Primimplikant von f ist ein maximaler Implikant q von f, das heißt es gibt keinen Implikanten s ($s \neq q$) von f mit $q \leq s$.
Implikanten und Primimplikanten können durch n-dimensionale Würfel veranschaulicht werden.

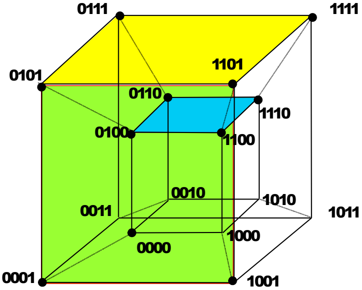
Veranschaulichung durch Würfel

- Ein Implikant von f ist ein Teilwürfel, der nur markierte Knoten enthält.
- Ein Primimplikant von f ist ein maximaler Teilwürfel mit dieser Eigenschaft.



UNI FREIBURG

Illustration für konkrete Funktion



Implikanten

- alle markierten Knoten
- alle Kanten, deren Ecken alle markiert sind
- alle Flächen, deren Ecken alle markiert sind
- alle 3-dimensionalen Würfel, deren Ecken alle markiert sind

Allgemein

- Die Implikanten sind die Teilwürfel, deren Ecken alle markiert sind.

Illustration für konkrete Funktion

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	0	0

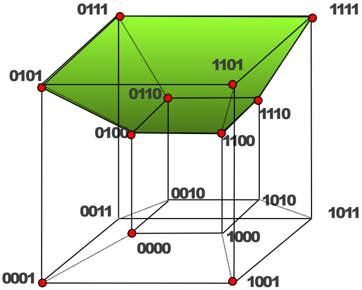
Implikanten

- alle markierten Knoten
- alle Kanten, deren Ecken alle markiert sind
- alle Flächen, deren Ecken alle markiert sind
- alle 3-dimensionalen Würfel, deren Ecken alle markiert sind

Allgemein

- Die Implikanten sind die Teilwürfel, deren Ecken alle markiert sind.

Bestimmung von Primimplikanten



Es gibt 3 Primimplikanten, der durch unseren Würfel definierten Funktion:

- x_2

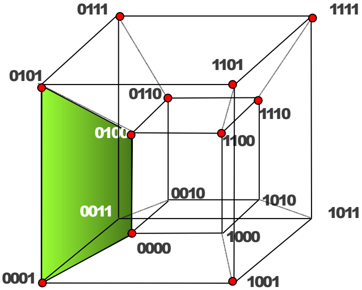
Bestimmung von Primimplikanten

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	0	0

Es gibt 3 Primimplikanten, der durch unseren Würfel definierten Funktion:

- x_2

Bestimmung von Primimplikanten



Es gibt 3 Primimplikanten, der durch unseren Würfel definierten Funktion:

- x_2
- $x_1' x_3'$

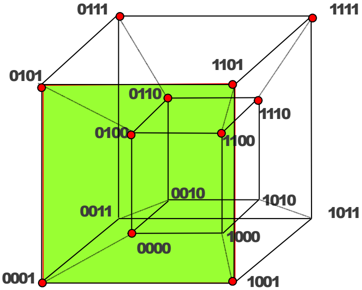
Bestimmung von Primimplikanten

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	0	0

Es gibt 3 Primimplikanten, der durch unseren Würfel definierten Funktion:

- x_2
- $x_1' x_3'$

Bestimmung von Primimplikanten



Es gibt 3 Primimplikanten, der durch unseren Würfel definierten Funktion:

- x_2
- $x_1' x_3'$
- $x_3' x_4$

Bestimmung von Primimplikanten

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	0	0

Es gibt 3 Primimplikanten, der durch unseren Würfel definierten Funktion:

- x_2
- $x_1'x_3'$
- $x_3'x_4$

UNI FREIBURG

Polynome und Implikanten einer Funktion f

Lemma

Die Monome eines Polynoms p von f sind alle Implikanten von f.

Beweis: (durch Widerspruch)

- Annahme:

  Es gibt ein Polynom p von f, das ein Monom m_j enthält, welches nicht Implikant von f ist, d.h. es gilt nicht: $\psi(m_j) \leq f$

- Das heißt es gibt Belegung $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ der Variablen $(x_1, \ldots, x_n)$ mit

  - $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$
  - $\psi(m_j)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$, also auch $\psi(p)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$

Demnach ist $\psi(p) \neq f$, also p kein Polynom von f.

$\Rightarrow$ **Widerspruch!**