Professur für Betriebssysteme

Prof. Dr. Armin Biere
Dr. Mathias Fleury

Freiburg, 31. Mai 2022

Technische Informatik
Übungsblatt 6 (v1)

Achtung 1: Bis auf den Schaltkreis, *muss* diese Abgabe mit dem Computer geschrieben worden sein. Handgeschriebene Antworten werden *nicht* benotet.

Aufgabe 1 (3 + 1 + 2 Punkte)

Betrachten Sie das PLA in Abbildung 2, der die beiden Funktionen $f_1, f_2 \in \mathbb{B}_4$ realisiert. Inverter sind in dieser Abbildung als schwarze Punkte dargestellt.

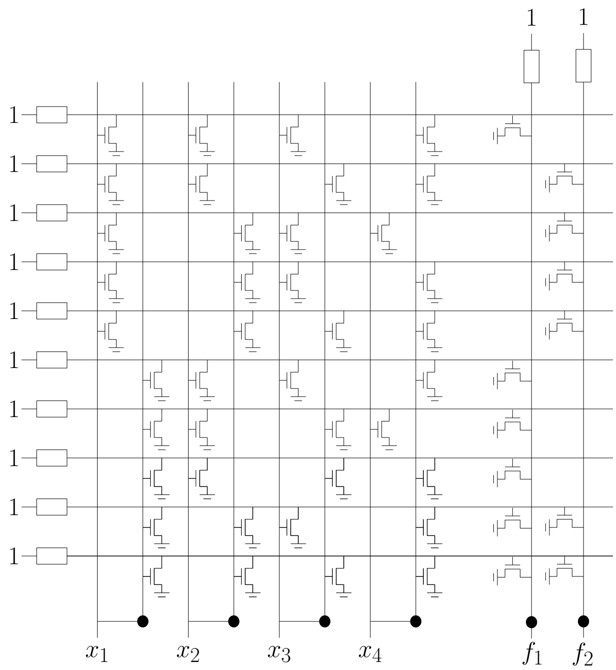

Abbildung 1: Ein PLA.

a) Geben Sie die Polynome $f_1, f_2 \in \mathbb{B}_4$ an (Sie sollten Disjunktionen von Mintermen erhalten).

b) Geben Sie die Kosten $cost(f_1, f_2) = (cost_1(f_1, f_2), cost_2(f_1, f_2))$ an.

c) Zeichnen Sie für f_1 und f_2 jeweils einen 4-dimensionalen Würfel (Hypercube), in dem $ON(f_1)$ bzw. $ON(f_2)$ markiert ist.

Eine Hypercube-Vorlage im PNG- und PDF-Format finden Sie bei den Vorlesungsmaterialien unter "Zusatzmaterial" (Zugang über Ilias oder die Vorlesungsseiten).

d) Geben Sie das Karnaugh-Veitch-Diagramm

Aufgabe 2 $(13 + 1 + 2$ Punkte)

Sei $\mathcal{B} = (M, \wedge, \vee, \neg)$ eine Boolesche Algebra.

Zeigen Sie ausschließlich durch Anwendung der Axiome (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Komplementregel), der in der Vorlesung beweisenenen Existenz und Eindeutigkeit der Neutralen Elemente (inklusive Korrolar), der Eindeutigkeit des Komplements und der De Morgan-Regel[1]. In jedem Schritt, geben explizit an welche Regeln angewändet werden.

a) Wir definieren plus, der inverse, und mal als:

$$a \boxplus b = (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a)$$
$$-a = a$$
$$a \cdot b = a \wedge b$$

Achtung: $\boxplus$ ist hier *nicht* die Disjunktion wenn $\mathcal{B} = \mathbb{B}$!

Zeigen Sie dass $(R, \boxplus, -, \times, 1, 0)$ ein Boolscher kommutativer Ring ist, d.h.:

a. Assoziativität von $\boxplus$

$$a \boxplus (b \boxplus c) = (a \boxplus b) \boxplus c$$

b. Kommutativität von $\boxplus$

$$a \boxplus b = b \boxplus a$$

c. 0 ist das neutrale Element, also

$$a \boxplus 0 = a$$

d. Zu jedem a, gibt es ein inverse b sodass

$$a \boxplus b = 0$$

[1]Dieser kann auch abgeleitet werden, aber das wird hier angenommen

e. Assoziativität von $\cdot$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

f. Kommutativität von $\cdot$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

g. Distributivität

$$a \cdot (b \boxplus c) = (a \cdot b) \boxplus (a \cdot c)$$

b) Wie heißt der $\boxplus$ standardmäßig für $\mathbb{B}$?

c) $(\mathcal{P}(A), \cup, -, \cap)$ (mit $\varnothing$ als 0 und A als 1) ist auch eine Boolescher Algebra. Ist $(\mathcal{P}(A), \boxplus, -, \cap, A, \varnothing)$ ein Ring? Was ist der $\boxplus$ in diesem Fall?

Es ist übrigens immer möglich von dem Booleschen Ring zurück zu der Booleschen Algebra zu gehen:

$$\begin{aligned} x \wedge y &= xy \\ x \vee y &= x \boxplus y \boxplus xy \\ \neg x &= 1 \boxplus x \end{aligned}$$

Abgabe: 7. Juni 2022, 17$^{\underline{00}}$