

# **Mathematik I für Studierende der Informatik und der Ingenieurwissenschaften**

---

**Dozentinnen und Dozenten des Instituts für Mathematik  
der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg**

---

## Inhaltsverzeichnis

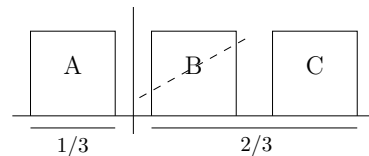
<b>0</b>	<b>Vier mathematische Phänomene</b>	<b>1</b>
0.1	Ein Hütchenspiel	1
0.2	Der wackelnde Tisch	1
0.3	Der Zinseszins-Effekt	2
0.4	Der Satz vom Fußball	2
0.5	Ziele der Mathematik	3
<b>1</b>	<b>Grundlegende Strukturen</b>	<b>4</b>
1.1	Aussagen und Logische Verknüpfungen	4
1.2	Mengen und Aussageformen	5
1.3	Abbildungen	7
1.4	Aussagen in der Mathematik	9
<b>2</b>	<b>Zahlen und Vektoren</b>	<b>10</b>
2.1	Zahlen	10
2.2	Vollständige Induktion	15
2.3	Geometrie im Raum $\mathbb{R}^n$	21
2.4	Die komplexen Zahlen	27
<b>3</b>	<b>Funktionen</b>	<b>30</b>
3.1	Reelle Funktionen	30
3.2	Polynome und rationale Funktionen	31
3.3	Kreisfunktionen	36
<b>4</b>	<b>Grenzwerte und Stetigkeit</b>	<b>41</b>
4.1	Zahlenfolgen und Grenzwerte	41
4.2	Stetigkeit von Funktionen	52
4.3	Rechnen mit Größenordnungen	56
<b>5</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>58</b>
5.1	Die Ableitung: Definition und Regeln	58
5.2	Mittelwertsatz und Anwendungen	64
<b>6</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>69</b>
6.1	Das Riemannsche Integral	69
6.2	Ableitung und Integral	72
<b>7</b>	<b>Die Taylorreihe</b>	<b>81</b>
7.1	Darstellung von Funktionen durch Reihen	81
7.2	Taylorentwicklung	87

## 0 Vier mathematische Phänomene

### 0.1 Ein Hütchenspiel

Bei einem Hütchenspiel versteckt der Moderator einen Gewinn unter einem von drei Hütchen, die mit A, B und C bezeichnet seien. Nachdem der Spieler eins der Hütchen ausgewählt hat, beispielsweise Hütchen A, deckt der Moderator eins der anderen beiden, das eine Niete enthält, auf, beispielsweise Hütchen B, und bietet dem Spieler an, seine Wahl auf das verbleibende Hütchen, also beispielsweise Hütchen C, zu ändern. Kann der Spieler seine Gewinnchance verbessern, indem er die Wechseloption nutzt?

Die erste Wahl A des Spielers hat eine Gewinnwahrscheinlichkeit von  $1/3 \approx 33\%$ , was bedeutet, dass die anderen beiden Hütchen B und C zusammen eine Gewinnwahrscheinlichkeit von  $2/3 \approx 67\%$  haben. Indem der Moderator Hütchen B aufdeckt, ist diese Gewinnwahrscheinlichkeit auf Hütchen C konzentriert und der Spieler verdoppelt seine Gewinnwahrscheinlichkeit, indem er von der Wechseloption Gebrauch macht. Er bekommt gewissermaßen zwei Hütchen zum Preis von einem. Diese Argumentation kann man gut mit einer Tabelle bestätigen, in der die verschiedenen Fälle systematisch beurteilt werden.



**Abbildung 1.** Das ausgewählte Hütchen A hat eine Gewinnwahrscheinlichkeit von ca. 33%, die anderen beiden, wovon eins entfernt wird, zusammen ca. 67%.

### 0.2 Der wackelnde Tisch

Wir betrachten einen quadratischen Tisch mit vier gleichlangen Beinen, der auf einem unebenen Boden steht und wackelt. Genauer bedeutet dies, dass eins der Tischbeine keinen Bodenkontakt hat, während die anderen drei den Boden berühren. Wir nummerieren die Tischbeine im Uhrzeigersinn von 1 bis 4, beginnend mit dem, das den Boden nicht berührt. Die jeweiligen Abstände zum Boden bezeichnen wir mit  $d_1, d_2, d_3$  und  $d_4$ . Es gilt also

$$d_1 > 0, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = 0, \quad d_4 = 0.$$

Damit folgt

$$D = (d_1 + d_3) - (d_2 + d_4) > 0.$$

Wir drehen den Tisch jetzt um 90 Grad im Uhrzeigersinn. Tischbein Nummer 1 ist dann dort, wo zuvor Tischbein 2 war und entsprechend Tischbein 2 dort, wo Bein 3 zuvor war, Tischbein 3 dort, wo Bein 4 zuvor war, und Tischbein 4 dort, wo Bein 1 zuvor war. Für die neuen Abstände gilt somit

$$d'_1 = 0, \quad d'_2 = 0, \quad d'_3 = 0, \quad d'_4 > 0.$$

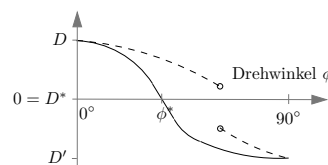
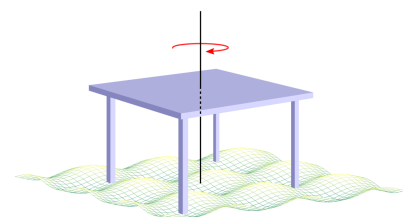
Dieses Mal folgt

$$D' = (d'_1 + d'_3) - (d'_2 + d'_4) < 0.$$

Wenn wir uns die Vierteldrehung als kontinuierlichen Vorgang vorstellen, dann wird der positive Ausdruck  $D$  in einen negativen Ausdruck  $D'$  überführt, wie es in **Abbildung 2** (rechts, durchgezogene Linie) dargestellt ist. Das Bild suggeriert, dass es einen Drehwinkel  $\phi^*$  zwischen 0 und 90 Grad gibt, so dass für die entsprechenden Abstände der Tischbeine zum Boden gilt

$$D^* = (d_1^* + d_3^*) - (d_2^* + d_4^*) = 0.$$

Wir wollen folgern, dass für diesen Drehwinkel alle Beine den Boden berühren und der Tisch folglich nicht wackelt. Angenommen, es gilt  $d_1^* > 0$ . Da  $d_3^* \geq 0$  gilt, muss  $d_2^* > 0$  oder  $d_4^* > 0$  gelten, denn sonst könnte nicht  $D^* = 0$  gelten. Da aber zwei benachbarte Beine nicht gleichzeitig keinen Bodenkontakt haben können, kann der Fall  $d_1^* > 0$  nicht eintreten



**Abbildung 2.** Wackelnder Tisch auf einem unebenen Boden (oben) und Nullstelle einer stetigen Funktion zwischen einem positiven und einem negativen Wert (unten). Hat der Boden Stufen, kann die Funktion springen und muss keine Nullstelle besitzen (gestrichelt).

und es muss  $d_1^* = 0$  gelten. Genauso folgern wir auch, dass  $d_3^* = 0$  gilt. Daraus folgt dann aber auch, dass  $d_2^* = 0$  und  $d_4^* = 0$  gelten, also dass alle Beine den Boden berühren.

Wir haben wesentlich ausgenutzt, dass der Tisch quadratisch ist, und somit nach einer Vierteldrehung dieselbe geometrische Konfiguration einnimmt. Damit die Argumentation mit der Nullstelle funktioniert, darf der Boden keine Stufen haben. Wäre dies der Fall, so könnte der Ausdruck  $D$  abhängig vom Drehwinkel springen, wie es in Abbildung 2 mit der gestrichelten Linie angedeutet ist.

### 0.3 Der Zinseszins-Effekt

Wir nehmen an, dass eine Bank eine Spareinlage  $e$  mit einem Zinssatz von  $z = 10\%$  pro Jahr verzinst. Für eine Einlage von  $g_0 = 100,00$  Euro ergibt sich nach einem Jahr also das Guthaben

$$g_1 = g_0(1 + z) = 110,00 \text{ Euro.}$$

Wir nehmen ferner an, dass die Bank uns die beliebige Entnahme und Wiederanlage des Guthabens erlaubt. Entnehmen wir das Guthaben nach einem halben Jahr, so erhalten wir den Betrag

$$\tilde{g}_2 = g_0(1 + z/2) = 105,00 \text{ Euro.}$$

Dieser Betrag wird direkt wieder bis zum Jahresende angelegt und wir erhalten dann das Guthaben

$$g_2 = \tilde{g}_2(1 + z/2) = g_0(1 + z/2)^2 = 110,25 \text{ Euro.}$$

Der Aufwand hat sich also gelohnt, das heißt wir haben das Guthaben verbessert. Wenn wir das Guthaben monatsweise entnehmen und wiederanlegen, so ergibt sich zum Jahresende der Betrag

$$g_{12} = g_0(1 + z/12)^{12} = 110,47 \text{ Euro.}$$

Wir konnten den Gewinn also nochmal steigern. Wenn wir allgemeiner das Jahr in  $n$  gleiche Zeiträume unterteilen, erhalten wir den Betrag

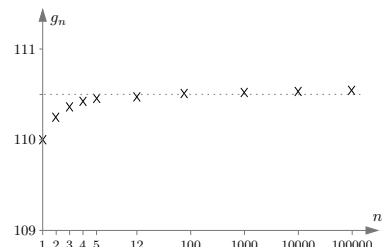
$$g_n = g_0(1 + z/n)^n.$$

Können wir für eine hinreichend feine Unterteilung, beispielsweise in Minuten, Sekunden oder Millisekunden jeden beliebig großen Betrag, beispielsweise  $g_n \geq 200,00$  Euro, erzielen? In Abbildung 3 sind die Guthaben für verschiedene Zahlen  $n$  aufgetragen. Zwar führt ein höheres  $n$  zu einem größeren Guthaben, den Wert von 111,00 Euro scheint man aber nicht erreichen zu können.

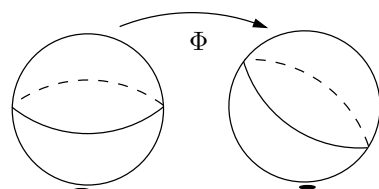
### 0.4 Der Satz vom Fußball

Wie in einem Fußballspiel zu Beginn der beiden Halbzeiten legen wir einen Ball zweimal auf denselben Punkt und bewegen ihn dazwischen beliebig. Gibt es Punkte auf der Oberfläche des Balls, die beim zweiten Hinlegen exakt dort landen, wo sie beim ersten Hinlegen waren?

Wenn wir den Ball mit zwei Fingern an gegenüberliegenden Punkten berühren und dann um die dadurch definierte Rotationsachse drehen, bleiben diese beiden Punkte offensichtlich unverändert. Interessanterweise gilt diese spezielle Situation immer, das heißt die beliebige Bewegung des Balls lässt sich stets als Drehung um eine Achse darstellen. Um diese Achse zu finden, muss man jedoch eine mathematische Gleichung lösen. Hilfreich dafür ist es, eine Abbildung zu betrachten, die uns sagt, an welcher Stelle  $\Phi(x)$  im Raum ein Punkt  $x$  auf dem Ball nach der Bewegung liegt. Punkte, die ihre Position nicht verändern, erfüllen damit die Gleichung  $\Phi(x) = x$ , sie werden also auf sich selbst abgebildet.



**Abbildung 3.** Die  $n$ -malige Wiederanlage führt zu einem verbesserten Guthaben bei größerem  $n$ ; ein höheres Endguthaben als 111,00 Euro erscheint aber unmöglich.



**Abbildung 4.** Das zweimalige Hinlegen eines Balls auf einen Punkt wird durch eine Abbildung  $\Phi$  beschrieben.

Mit Hilfe geometrischer Konzepte kann man wichtige Eigenschaften von  $\Phi$  identifizieren, beispielsweise dass  $\Phi$  Abstände zwischen Punkten nicht verändert.

## **0.5 Ziele der Mathematik**

Die wissenschaftliche Mathematik entwickelt Methoden zur Beschreibung und Analyse komplexer Vorgänge, um diese zu verstehen und beispielsweise optimal für technische Anwendungen zu nutzen.

# 1 Grundlegende Strukturen

## 1.1 Aussagen und Logische Verknüpfungen

Als Aussage  $A$  im Mathematischen Sinne bezeichnen wir ein sprachliches Gebilde, dem entweder der Wahrheitswert wahr ( $w$ ) oder falsch ( $f$ ) zugeordnet werden kann. Mittels einer Wahrheitstabelle lassen sich einfache Zusammenhänge zwischen Aussagen gut darstellen.

	Aussage	wahr/falsch
$A$	„Es sind mehr als 10 Personen im Rundbau“	$w$
$B$	„Es sind weniger als 20 Personen im Rundbau“	$f$

Aus gegebenen Aussagen lassen sich neue Aussagen generieren.  $A, B$  seien Aussagen.

1. Nicht  $A$ , („ $\neg A$ “) ist die Negation von  $A$ .
2.  $A$  oder  $B$  („ $A \vee B$ “) ist wahr genau dann wenn mindestens eine der Aussagen  $A, B$  wahr ist.  $A$  und  $B$  („ $A \wedge B$ “) ist wahr genau dann, wenn beide Aussagen  $A, B$  wahr sind.
3. Die in der Mathematik am häufigsten verwendete logische Verknüpfung ist die Implikation, die durch die Wahrheitstabelle 3 definiert ist.

Zentral ist hier, dass  $B$  immer dann wahr ist, wenn  $A$  dies ist, damit die Aussage „ $A$  impliziert  $B$ “ wahr ist. Wenn  $A$  falsch ist, ist der Wahrheitswert von  $B$  irrelevant für die Korrektheit der Implikation. Beispielsweise ist für die Wahrheit der Implikation „Das Regnen impliziert die Nassheit der Straße“ egal, ob die Straße trocken oder nass ist, wenn es gar nicht regnet.

Etwas zu den Zahlen (und den Aussageformen) vorgreifend, gilt zum Beispiel

$$a < 5 \Rightarrow a < 10.$$

**Bemerkung 1.1.** Um  $A \Rightarrow B$  zu zeigen, kann man annehmen, dass  $A$  wahr ist und muss dann  $B$  folgern. Alternativ kann man auch annehmen, dass  $B$  nicht gilt, und daraus folgern, dass  $A$  auch nicht gilt. Man sagt,  $A$  ist eine hinreichende Bedingung für  $B$ , und  $B$  ist eine notwendige Bedingung für  $A$ . Wieder (weit) vorgreifend kann man sich das merken mit der aus der Schule bekannten Aussage

$$x \text{ ist Minimum von } f \Rightarrow f'(x) = 0.$$

Die Bedingung „ $x$  ist Minimum von  $f$ “ ist hinreichend dafür, dass die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x$  Null ist. Andersherum ist aber das Verschwinden der Ableitung von  $f$  an einem Punkt  $x$  eine notwendige Bedingung dafür, dass  $f$  an diesem Punkt ein Minimum besitzt.

4.  $A$  ist äquivalent zu  $B$  („ $A \Leftrightarrow B$ “) ist wahr, genau dann wenn die Aussage  $A$  die Aussage  $B$  impliziert und die Aussage  $B$  die Aussage  $A$  impliziert.

Mit Hilfe einer Wahrheitstafel lassen sich Aussagen wie  $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$  (der Satz von de Morgan) überprüfen (siehe Tabelle 4).

Wir sehen, dass für alle möglichen Kombinationen der Wahrheitswerte von  $A$  und  $B$  die beiden Aussagen  $\neg(A \vee B)$  und  $(\neg A) \wedge (\neg B)$  übereinstimmen. Damit sind diese äquivalent.

$A$	$\neg A$
$w$	$f$
$f$	$w$

**Tabelle 1.** Wahrheitstabelle zur Negation.

$A$	$B$	$A \vee B$	$A \wedge B$
$w$	$w$	$w$	$w$
$f$	$w$	$w$	$f$
$w$	$f$	$w$	$f$
$f$	$f$	$f$	$f$

**Tabelle 2.** Wahrheitstabelle zu  $A \vee B$  sowie  $A \wedge B$ .

$A$	$B$	$A \Rightarrow B$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$f$
$f$	$w$	$w$
$f$	$f$	$w$

**Tabelle 3.** Wahrheitstabelle zur Implikation.

$A$	$B$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
$w$	$w$	$f$	$f$
$f$	$w$	$f$	$f$
$w$	$f$	$f$	$f$
$f$	$f$	$w$	$w$

**Tabelle 4.** Wahrheitstabelle zu  $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$ .

## 1.2 Mengen und Aussageformen

Die Frage, was eigentlich genau eine Menge ist, ist schwer zu beantworten. Wir begnügen uns damit, die Existenz einiger bestimmter Mengen anzunehmen und daraus neue Mengen zu generieren.

- Die Objekte nennen wir *Elemente der Menge*. Die Notation  $a \in M$  bedeutet, dass  $a$  ein Element der Menge  $M$  ist; andernfalls schreiben wir  $a \notin M$ . Die Entscheidung, ob irgendein Objekt  $a$  Element von  $M$  ist oder nicht, muss mithilfe der Beschreibung von  $M$  immer möglich sein.
- *Endliche Mengen* lassen sich durch Aufzählung ihrer Elemente beschreiben, wir schreiben  $A = \{1, 3, 15, 32\}$ , als die Menge, welche die Zahlen 1, 3, 15 und 32 als Elemente enthält. Wir schreiben  $1 \in A$  für „Die Menge  $A$  enthält das Element 1“.

**Beispiel 1.2.** Das griechische Alphabet ist die Menge

$$M = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega\}$$

Die Elemente sind die einzelnen Buchstaben, und wir haben  $M$  durch *Aufzählen aller Elemente* angegeben. Die Reihenfolge und Wiederholungen von Elementen sind bei Angaben von Mengen irrelevant, beispielsweise gelten folgende Gleichheiten von Mengen:

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 3, 2, 4\} = \{1, 1, 2, 3, 4\}.$$

Oft werden die Elemente nur unvollständig aufgezählt in der Erwartung, dass man sich den Rest denken kann:  $M = \{\alpha, \dots, \omega\}$ .

**Beispiel 1.3.** Die Menge der natürlichen Zahlen ist die (unendliche) Menge  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Mit  $\mathbb{N}_0$  bezeichnen wir die Menge  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Beispiel 1.4.** Eine (erstaunlich) wichtige Menge ist die leere Menge  $\emptyset$ , welche keine Elemente enthält.

- Eine Menge  $M$  heißt *Teilmenge* der Menge  $N$ , wenn jedes Element von  $M$  auch Element von  $N$  ist (Notation:  $M \subset N$ ). Gibt es außerdem mindestens ein Element von  $N$ , das nicht zu  $M$  gehört, so ist  $M$  eine echte Teilmenge von  $N$ . Statt  $M \subset N$  schreiben wir manchmal auch  $N \supset M$ , also  $N$  ist Obermenge von  $M$ .

**Beispiel 1.5.** Unter den Studierenden der Mikrosystemtechnik bilden die männlichen eine echte Teilmenge, das heißt es gibt mindestens eine Studentin.

- Es gilt  $A = B$  (*zwei Mengen sind gleich*), wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Wiederholte Aufzählung von Elementen ändert eine Menge nicht ( $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 3, 1\}$ ).

**Bemerkung 1.6.** Will man zeigen, dass zwei Mengen  $M$  und  $N$  identisch sind, so ist die übliche Vorgehensweise, zunächst zu zeigen, dass gilt  $M \subset N$  und dann zu zeigen, dass gilt  $N \subset M$ . Warum ist dann klar, dass die beiden Mengen gleich sind?

Aus gegebenen Mengen lassen sich neue Mengen erzeugen.  $X$  und  $Y$  seien Mengen.

- Die Vereinigung  $X \cup Y$  ist die Menge der Elemente, welche in  $X$  oder in  $Y$  (oder in beiden) sind.
- Das kartesische Produkt  $X \times Y$  ist die Menge aller Paare  $(x, y)$ , so dass  $x \in X$  und  $y \in Y$ .
- Der Schnitt  $X \cap Y$  ist die Menge der Elemente, welche sowohl in  $X$  als auch in  $Y$  sind.
- Falls  $X \subset Y$ , so ist die Differenzmenge  $Y \setminus X$  die Menge der Elemente, welche in  $Y$  aber nicht in  $X$  enthalten sind.
- Ist  $A$  eine gegebene Grundmenge und  $X \subset A$ , so nennen wir  $X^C = A \setminus X$  das Komplement von  $X$ . Das Komplement hängt von der Grundmenge  $X$  ab: Die Aussage „*ich trinke alles außer Ganter*“ hat verschiedene Bedeutung, je nachdem ob sie sich auf die alle badischen Biere bezieht oder auf alle alkoholischen Getränke.

Es sei nun  $M$  eine Menge und  $E$  eine Eigenschaft, von der für jedes Element in  $M$  überprüft werden kann, ob die Eigenschaft für dieses Element zutrifft. Wir bezeichnen dann  $E$  als „Aussageform“ und schreiben auch  $E(x)$ , um die Abhängigkeit von  $x$  in  $M$  zu unterstreichen.  $E(x)$  ist dann eine Aussage.

Man kann nun aus  $M$  eine Teilmenge mit den Elementen erzeugen, welche die Eigenschaft  $E$  besitzen. Wir schreiben

$$X = \{x \in M : E(x)\},$$

gelesen  $X$  ist die Menge aller  $x$  in  $M$ , so dass gilt  $E(x)$  („dass die Aussage  $E(x)$  wahr ist“). Häufig sieht man auch einen vertikalen Strich statt des Doppelpunktes.

#### Beispiel 1.7.

$$\{1, 2, 3\} = \{x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} : x < 4\}.$$

**Bemerkung 1.8.** Außer der Vereinigungsmenge und dem kartesischen Produkt lassen sich die oben eingeführten abgeleiteten Mengen auch mithilfe von Aussageformen darstellen. So ist beispielsweise

$$X \cap Y = \{x \in X : x \in Y\} = \{x \in Y : x \in X\}.$$

Wir benötigen weiter die sogenannten Quantoren, mit denen sich neue Aussagen generieren lassen:

$$\begin{aligned} \forall a \in A : E(a) & \quad \text{für alle } a \in A \text{ gilt Eigenschaft } E(a), \\ \exists a \in A : E(a) & \quad \text{es gibt ein } a \in A \text{ mit Eigenschaft } E(a). \end{aligned}$$

Typische Mengen-bezogene Aussagen in der Mathematik sind „*Es gilt*  $a \in M$ “ oder „*Sei*  $a \in M$ “, mit denen Eigenschaften eines Elements  $a$  gefolgert beziehungsweise festgelegt werden.

Beispiele für die Verwendung von Quantoren sind die wahren Aussagen:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0 & \quad \text{“Für alle reellen Zahlen } x \text{ ist } x^2 \text{ nichtnegativ.”} \\ \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1 & \quad \text{“Es existiert eine reelle Zahl } x, \text{ sodass } x^2 = 1 \text{ gilt.”} \end{aligned}$$

Die zweite Aussage ist korrekt, da es mindestens ein Element mit dieser Eigenschaft gibt. Dass es sogar zwei Elemente gibt, ist für den Wahrheitswert irrelevant. Die Negationen der



beiden Aussagen sind:

$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$  „Es existiert eine reelle Zahl  $x$ , sodass  $x^2$  negativ ist.“

$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 1$  „Für alle reellen Zahlen  $x$  gilt, dass  $x^2$  ungleich 1 ist.“

Beide Aussagen sind falsch.

Aus Gründen der Lesbarkeit werden wir  $\wedge, \vee, \neg$  nicht verwenden, und  $\forall, \exists$  sowie  $\Leftrightarrow$  eher sparsam. Manchmal sieht man auch  $\nexists$  für „es existiert kein“ und  $\exists!$  für „es existiert genau ein“.

Üblich ist auch eine Notation der Art  $\{2, 3, 4\} = \{n + 1 : n \in 1, 2, 3\}$ .

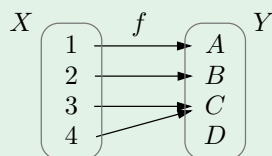
### 1.3 Abbildungen

Seien  $X, Y$  Mengen. Eine Abbildung von  $X$  nach  $Y$  (gleichbedeutend: eine Funktion auf  $X$  mit Werten in  $Y$ ) schreiben wir in der Form

$$f : X \rightarrow Y, x \mapsto f(x).$$

Jedem  $x \in X$  wird genau ein Bildpunkt (Funktionswert)  $f(x) \in Y$  zugeordnet.

**Beispiel 1.9.** Wir definieren eine Abbildung  $f$  von der Menge  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  in die Menge  $Y = \{A, B, C, D\}$  mittels der folgenden Zuordnungen:



Es gilt  $f(X) = \{A, B, C\}$ ,  $f^{-1}(\{C\}) = \{3, 4\}$ ,  $f^{-1}(\{D\}) = \emptyset$ .

- Die Menge  $X$  heißt Definitionsbereich von  $f$ .
- Mit dem Bild von  $f$  meinen wir die Menge der Bildpunkte (Menge der Funktionswerte)

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subset Y.$$

- Das Urbild einer Menge  $B \subset Y$  unter  $f$  ist die Menge

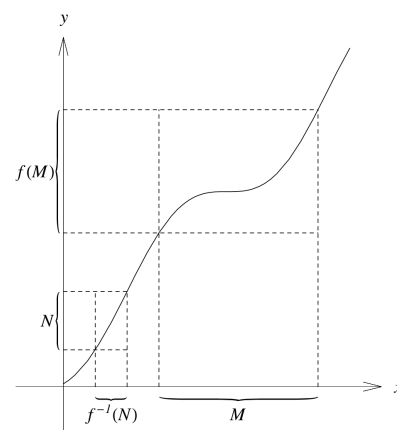
$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

- Verkleinern des Definitionsbereichs ergibt eine Einschränkung von  $f$ . Für  $A \subset X$  ist

$$f|_A : A \rightarrow Y, (f|_A)(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in A.$$

Bild und Urbild von Mengen sind in Abbildung 5 illustriert.

**Beispiel 1.10.** Sei  $X$  die Menge aller Waren in einem Supermarkt und  $Y$  die Menge aller möglichen Preise in Euro. Ordnen wir jeder Ware  $x \in X$  einen Preis  $f(x) \in Y$  zu, so haben wir eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$ . Das Urbild der Menge  $\{0, 99\}$  ist die Menge der Waren, die 0, 99 Euro kosten. Betrachten wir statt aller Waren nur die Menge  $W$  der Wurstwaren, so ergibt sich die Einschränkung  $f|_W$ .



**Abbildung 5.** Bild  $f(M)$  der Menge  $M$  unter der Abbildung  $f$ , und Urbild  $f^{-1}(N)$  der Menge  $N$ .

**Beispiel 1.11.** Eine naheliegende Abbildung ist  $\text{id}_X : X \rightarrow X$ ,  $\text{id}_X(x) = x$ , die Identität oder identische Abbildung auf  $X$ .

Als nächstes drei Begriffe zum Abbildungsverhalten:  $f : X \rightarrow Y$  heißt

*injektiv* wenn gilt: aus  $f(x) = f(x')$  folgt  $x = x'$ ;

*surjektiv* wenn gilt: zu jedem  $y \in Y$  gibt es ein  $x \in X$  mit  $f(x) = y$  (also  $Y = f(X)$ );

*bijektiv* wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist.

**Beispiel 1.12.** •  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 4$ ,  $f(3) = 2$  ist injektiv (wenn beispielsweise  $f(x) = f(x') = 4$ , so muss gelten  $x = x' = 2$ ), aber *nicht* surjektiv (nichts wird auf die 3 abgebildet).

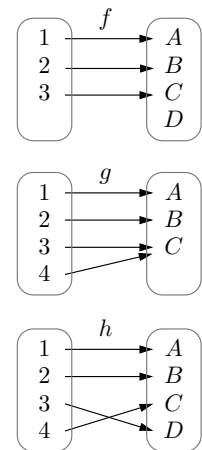
•  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 1$ ,  $f(3) = 2$  ist *nicht* injektiv (wenn beispielsweise  $f(x) = f(x') = 1$  wird erfüllt durch  $x = 1$ ,  $x' = 2$ ), und auch *nicht* surjektiv (nichts wird auf die 3 abgebildet, und nichts wird auf die 4 abgebildet).

•  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2\}$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 1$ ,  $f(3) = 2$  ist *nicht* injektiv (wie oben), aber surjektiv.

•  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2, 4\}$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 4$ ,  $f(3) = 2$  ist bijektiv.

Weitere Beispiele injektiver, surjektiver und bijektiver Abbildung sind in der Grafik 6 gezeigt.

**Beispiel 1.13.** Ordnen wir jedem Kind seine Mutter zu, so erhalten wir eine Abbildung von der Menge  $K$  aller Kinder in die Menge  $F$  aller Frauen. Diese Abbildung ist nicht surjektiv, denn nicht jede Frau ist Mutter. Sie ist auch nicht injektiv, denn es gibt Mütter mit mehr als einem Kind. Andere Alltagsbeispiele für injektive und surjektive Zuordnungen sind Personalausweisnummern sowie Wohnorte von Personen.



**Abbildung 6.** Von oben nach unten zeigt die Abbildung Beispiele für Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Für die Gleichung  $f(x) = y$ , mit  $y \in Y$  gegeben, bedeuten die Begriffe folgendes:

- $f$  injektiv heißt, die Gleichung hat höchstens eine Lösung.
- $f$  surjektiv heißt, es gibt mindestens eine Lösung.
- Ist  $f : X \rightarrow Y$  bijektiv, so hat die Gleichung genau eine Lösung.

Im Fall  $f : X \rightarrow Y$  bijektiv können wir nun eine neue Abbildung erzeugen, indem wir jedem  $y \in Y$  die jeweilige (eindeutige) Lösung  $x \in X$  der Gleichung  $f(x) = y$  zuordnen. Wir erhalten eine Abbildung  $g : Y \rightarrow X$ ,  $y \mapsto g(y)$ , mit

$$f(g(y)) = y \text{ für alle } y \in Y, \text{ also } f \circ g = \text{id}_Y.$$

Wählen wir in der Gleichung als rechte Seite  $y := f(x)$ , so ist  $x$  die Lösung, das heißt

$$g(f(x)) = x, \text{ und damit } g \circ f = \text{id}_X.$$

Die Verkettung (oder Hintereinanderschaltung) von Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  ist

$$g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Es ist leicht zu sehen, dass  $g : Y \rightarrow X$  ebenfalls bijektiv ist. Wir nennen  $g = f^{-1}$  die zu  $f$  inverse Abbildung oder Umkehrfunktion.

**Bemerkung 1.14.** Die Notation ist hier nicht ganz eindeutig. Zu einer Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  bezeichnet man mit  $f^{-1}$  gerne sowohl die Umkehrabbildung  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  (wenn  $f$  bijektiv ist), als auch die Abbildung, welche einer Teilmenge  $A \subset Y$  die Urbildmenge  $f^{-1}(A)$  zuordnet. Das sind beides unterschiedliche Objekte – welches gemeint ist, sollte hier aber immer leicht zu erkennen sein.

Während eine Abbildung zwischen Mengen mit endlich vielen Elementen nur dann bijektiv sein kann, wenn die Anzahl der Elemente in beiden Mengen gleich ist, kann eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen Mengen  $X$  und  $Y$  mit unendlich vielen Elementen auch bijektiv sein, wenn eine der Mengen echt in der anderen enthalten ist, also etwa  $X \subset Y$  aber  $X \neq Y$  gilt. Ein Beispiel ist die in Abbildung 7 gezeigte Tangensfunktion. Diese wird zu einem späteren Zeitpunkt genauer betrachtet.

Eine aus der Schule bekannte Möglichkeit, sich Funktionen bzw. Abbildungen vorzustellen, bietet der Graph. Dazu bilden wir das kartesische Produkt

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Es gilt  $(x, y) = (x', y')$  genau wenn  $x = x'$  und  $y = y'$ . Der Graph von  $f$  ist die Teilmenge

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Für den Graphen der Umkehrfunktion sehen wir, indem wir  $y = f(x)$  substituieren,

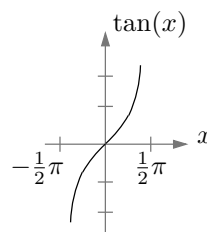
$$G_{f^{-1}} = \{(y, f^{-1}(y)) : y \in Y\} = \{(f(x), x) : x \in X\} \subset Y \times X.$$

Deren Graph ergibt sich also durch „Spiegelung an der Winkelhalbierenden“, siehe Abbildung 8.

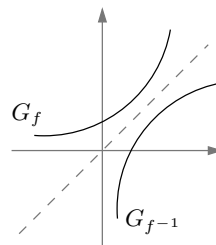
## 1.4 Aussagen in der Mathematik

Im Grunde besteht die Arbeit eines Mathematikers darin, aus einigen fundamentalen Aussagen, welche als wahr angenommen werden (sogenannten Axiomen), möglichst viele weitere, nützliche und wahre Aussagen abzuleiten (und deren Wahrheit durch Aneinanderreihung elementar nachvollziehbarer Schritte zu beweisen). Eine solche bewiesene wahre Aussage bezeichnet man als Satz. Ein Beispiel eines mathematischen Satzes, also einer wichtigen, von den Axiomen abgeleitete Aussage ist der Satz des Pythagoras. Als Lemma oder Proposition bezeichnet man kleinere Sätze, welche zum Beweis eines wichtigen Satzes benötigt werden (im Wesentlichen dient dies nur zur Strukturierung eines Beweises im Sinne eines leichteren Verständnisses).

Eine noch nicht bewiesene Aussage in der Mathematik, von deren Wahrheit aber viele Mathematiker überzeugt sind, nennt man Vermutung. Ein Beispiel dazu ist die sogenannte Collatz-Vermutung.



**Abbildung 7.** Bijektive Abbildung  $f : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \tan(x)$ .



**Abbildung 8.** Der Graph der Umkehrfunktion  $f^{-1}$  ergibt sich durch Spiegelung des Graphs von  $f$ .

## 2 Zahlen und Vektoren

### 2.1 Zahlen

Aus der Schule kennen wir die Zahlen  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots\} && \text{natürliche Zahlen} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} && \text{ganze Zahlen} \\ \mathbb{Q} &= \left\{\frac{p}{q} : q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}\right\} && \text{rationale Zahlen}\end{aligned}$$

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  fassen wir als Punkte auf der Zahlengeraden auf. Anstatt eine abstrakte Konstruktion von  $\mathbb{R}$  durchzuführen, stellen wir im Folgenden die Regeln (Axiome) in  $\mathbb{R}$  zusammen. Die Gesetze der Addition und Multiplikation lauten wie folgt:

	+	•
<i>Assoziativgesetz:</i>	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
<i>Kommutativgesetz:</i>	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
<i>Neutrales Element:</i>	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
<i>Inverses Element:</i>	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad \text{falls } a \neq 0$
<i>Distributivgesetz:</i>	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$	

Während die Rechenregeln für die rationalen Zahlen elementar nachprüfbar sind, ist dies bei den reellen Zahlen schwieriger und von der konkreten Konstruktion abhängig. Da die Menge hier zunächst nur als kontinuierliche Erweiterung der rationalen Zahlen angesehen wird, werden die Grundrechenregeln als Axiome formuliert. Hilfreich ist, dass nur diese dann überprüft werden müssen und alle weiteren automatisch folgen. Einige wichtige Regeln, die aus den Grundregeln bzw. Axiomen folgen, sind folgende:

- neutrale Elemente sind eindeutig, das heißt, es gibt jeweils nur eines
- inverse Elemente bzgl. Addition und Multiplikation sind eindeutig
- es gilt  $-0 = 0$  und  $1/1 = 1$
- es gilt  $-(-a) = a$  und  $1/(1/a) = a$
- die Gleichung  $a + x = b$  besitzt die eindeutige Lösung  $x = b - a$
- die Gleichung  $a \cdot x = b$  mit  $a \neq 0$  besitzt die eindeutige Lösung  $x = b/a$
- es gilt  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- es gilt  $0 \cdot a = 0$
- es gilt  $a \cdot b = 0 \iff a = 0$  oder  $b = 0$
- es gilt  $-a = (-1) \cdot a$
- es gilt  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Eine grundsätzliche Vereinbarung ist, dass Punkt- vor Strichrechnung ausgeführt wird, der Ausdruck  $a \cdot c + b \cdot c$  steht also für  $(a \cdot c) + (b \cdot c)$ . Der Punkt bei der Multiplikation reeller Zahlen wird meist weggelassen, das heißt wir schreiben meist  $ac + bc$  statt  $(a \cdot c) + (b \cdot c)$ . Es sei betont, dass  $-a$  und  $1/a$  zunächst als Symbole zu verstehen sind, die für das jeweilige additiv und multiplikativ inverse Element stehen. Insbesondere werden mit deren Hilfe Subtraktion und

Division auf Addition und Multiplikation zurückgeführt, das heißt beispielsweise, dass  $a/b$  abkürzend für das Produkt  $a(1/b)$  von  $a$  und dem multiplikativ inversen Element von  $b$  steht.

Eine weitere wichtige Folgerung der Grundregeln sind die binomischen Formeln, also

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\ (a-b)(a+b) &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

Hier stehen  $a^2$  und  $b^2$  abkürzend für  $a \cdot a$  und  $b \cdot b$  sowie  $2ab$  für  $a \cdot b + b \cdot a = (1+1)a \cdot b$ .

**Beispiel 2.1.** Die binomischen Formeln sind für schnelles Kopfrechnen nützlich:

$$\begin{aligned}(17.5)^2 &= (17 + 0.5)^2 = 17^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot 17 + (0.5)^2 = 17^2 + 17 + 0.25 = 306.25, \\ (19.5)^2 &= (20 - 0.5)^2 = 20^2 - 2 \cdot 0.5 \cdot 20 + (0.5)^2 = 20^2 - 20 + 0.25 = 380.25, \\ 13 \cdot 17 &= (15 - 2)(15 + 2) = 15^2 - 4 = 221, \\ 27^2 &= 27^2 - 3^2 + 3^2 = (27 + 3)(27 - 3) + 3^2 = 30 \cdot 24 + 3^2 = 729.\end{aligned}$$

Die Quadratzahlen  $1^2 = 1$ ,  $2^2 = 4$ ,  $\dots$ ,  $24^2 = 576$ ,  $25^2 = 625$  sollte man auswendig kennen.

Wir betrachten das wichtige Gesetz der *Nullteilerfreiheit*:

**Satz 2.2.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt die folgende Aussage.

$$\text{Aus } a \cdot b = 0 \text{ folgt } a = 0 \text{ oder } b = 0.$$

*Beweis.* Angenommen,  $a \neq 0$  (wenn  $a$  ohnehin Null ist, dann sind wir schon fertig). Es folgt

$$b = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot b = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) = \frac{1}{a} \cdot 0 = 0.$$

- Beim ersten Gleichheitszeichen haben wir verwendet, dass  $\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) = 1$  und  $1 \cdot b = b \cdot 1 = b$ .
- Dann verwenden wir das Assoziativgesetz der Multiplikation.
- Danach setzen wir unsere Annahme ein, nämlich dass  $a \cdot b = 0$ .
- Schließlich verwenden wir, dass gilt  $x \cdot 0 = 0$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ . Auch das muss, nachdem es nicht explizit in den obigen Regeln steht, erst bewiesen werden:

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = (x \cdot 0) + (x \cdot 0).$$

Dann addieren wir zu beiden Seiten die Zahl  $-(x \cdot 0)$ , das ändert die Gleichheit nicht und wir bekommen

$$(x \cdot 0) + (-(x \cdot 0)) = (x \cdot 0) + (x \cdot 0) + (x \cdot 0) + (-(x \cdot 0)),$$

also

$$0 = (x \cdot 0) + 0 = x \cdot 0.$$

□

**Bemerkung 2.3.** Die genaue Zuordnung der gerade verwendeten Rechenschritte zu den Axiomen ist eine Übungsaufgabe.

**Bemerkung 2.4.** Natürlich ist das Ganze so zunächst extrem umständlich. Aber: Es gibt auch durchaus einen Nutzen. Allgemein nennt man Mengen mit zwei Verknüpfungen (Addition und Multiplikation), welche den obigen Rechenregeln folgen, Zahlkörper. Dazu gehört auch die Menge der komplexen Zahlen, die wir später kennen lernen werden. Auch  $\mathbb{Q}$  ist ein Zahlkörper. Der Vorteil in dieser Vorgehensweise liegt darin, dass man die üblichen Rechenregeln (wie eben Nullteilerfreiheit) nur einmal abstrakt beweisen muss. Sie gelten dann auf allen Mengen mit Addition und Multiplikation, welche die obigen, leicht zu überprüfenden, Axiome erfüllen.

**Beispiel 2.5.** Ein weiteres Beispiel für einen Zahlkörper ist die Menge  $\{0,1\}$  mit den Rechenregeln

$$0 + 0 = 0, \quad 1 + 0 = 1, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 1 = 0,$$

sowie

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Die Operationen sind tabellarisch in Tabelle 5 dargestellt. Das Überprüfen der obigen Axiome ist sehr einfach. Das Herstellen einer Verbindung zu XOR und AND sei den Informatikern überlassen. Diesen Zahlkörper bezeichnet man üblicherweise mit  $\mathbb{F}_2$ .

+	0	1	•	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1

**Tabelle 5.** Tabellarische Festlegung der Addition und Multiplikation im Zahlenkörper  $\mathbb{F}_2$ .

Für das  $n$ -fache Produkt (mit  $n \in \mathbb{N}$ ) von  $a \in \mathbb{R}$ , also  $a \cdot a \cdot a \cdots a$  ( $n$ -mal) schreiben wir wie üblich  $a^n$ . Für  $a \neq 0$  definieren wir  $a^0 = 1$ . Für  $a = 0$  und  $n = 0$  gibt es keine universelle Übereinkunft, was  $a^n$ , also  $0^0$  sein soll. Wird beispielsweise das Monom  $x^0$  betrachtet, so wird für  $x = 0$  der Wert 1 verwendet, sodass die Funktion  $x \mapsto x^0$  konstant mit Wert 1 ist.

Auch die Regeln der Bruchrechnung lassen sich aus den Körperaxiomen herleiten, wir listen sie hier nur auf. Die verkürzenden Schreibweisen, wie  $\frac{a}{b}$  für  $a \cdot \frac{1}{b}$ , also „die Zahl  $a$  multipliziert mit dem multiplikativen Inversen zur Zahl  $b$ “ sollten klar sein.

**Satz 2.6** (Bruchrechnung). Für  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $c, d \neq 0$  gilt:

- (1)  $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$  (Gleichnamig machen von Brüchen),
- (2)  $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$  (Multiplikation von Brüchen),
- (3)  $\frac{a/c}{b/d} = \frac{ad}{bc}$ , falls zusätzlich  $b \neq 0$  (Division von Brüchen).

**Beispiel 2.7.** Die gelegentlich irritierende Identität  $x/(1/2) = 2x$  lässt sich folgendermaßen erklären: Zählt man auf 10 Torten insgesamt 50 Kirschen, so erwartet man im Schnitt  $50/10 = 5$  Kirschen pro Torte; sind auf einer halben Torte hingegen drei Kirschen, so erwartet man  $3/(1/2) = 2 \cdot 3 = 6$  Kirschen pro Torte. Quotienten sind also normierte, das heißt auf eine (ganze) Einheit bezogene Größen.

Eine spezielle Eigenschaft der reellen Zahlen ist deren Anordnung. Die Ungleichung  $a < b$  bedeutet auf der Zahlengeraden, dass  $a$  links von  $b$  liegt bzw.  $a - b$  links von Null. Offenbar gilt genau eine der Relationen  $a < b$ ,  $a > b$  oder  $a = b$ . Hier einige Regeln.

- (1) Aus  $a, b > 0$  folgt  $a + b > 0$  und  $a \cdot b > 0$ .
- (2) Aus  $a > b$ ,  $b > c$  folgt  $a > c$  (Transitivität).

(3) Aus  $a > b$  und  $c > d$  folgt  $a + c > b + d$  (Addition von Ungleichungen)

(4) Aus  $a > b$  folgt  $\begin{cases} ac > bc & \text{falls } c > 0 \\ ac < bc & \text{falls } c < 0 \end{cases}$  (Multiplikation mit einer Zahl).

Wir wollen diese und weitere Regeln nicht herleiten. Eine wichtige Konsequenz ist: Quadrate in  $\mathbb{R}$  sind nichtnegativ, denn

$$a^2 = \begin{cases} a \cdot a > 0 & \text{im Fall } a > 0, \\ (-a) \cdot (-a) > 0 & \text{im Fall } -a > 0. \end{cases}$$

**Definition 2.8.** Der Betrag einer Zahl  $a \in \mathbb{R}$  ist

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Auf der Zahlengeraden ist  $|a|$  der Abstand zum Nullpunkt. Die Definition des Betrags hat folgende Konsequenz: Wenn Sie ein Betragszeichen beseitigen möchten, müssen Sie eine Fallunterscheidung machen.

**Satz 2.9** (Rechnen mit Beträgen). Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gelten folgende Aussagen:

- (1)  $|-a| = |a|$  und  $a \leq |a|$ .
- (2)  $|a| \geq 0$ ; aus Gleichheit folgt  $a = 0$ .
- (3)  $|ab| = |a| \cdot |b|$ .
- (4)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .
- (5)  $|a - b| \geq ||a| - |b||$ .

*Beweis.* Aus Definition 2.8 folgt

$$|-a| = \begin{cases} -a & \text{falls } -a \geq 0 \\ -(-a) & \text{falls } -a < 0 \end{cases} = \begin{cases} -a & \text{falls } a \leq 0 \\ a & \text{falls } a \geq 0 \end{cases} = |a|.$$

Weiter folgt (2) aus

$$|a| - a = \begin{cases} 0 & \text{falls } a \geq 0, \\ -a - a \geq 0 & \text{falls } a \leq 0. \end{cases}$$

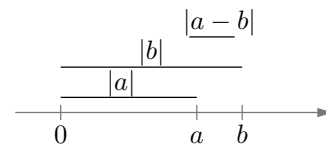
In (3) bleiben die linke und rechte Seite gleich, wenn wir  $a$  durch  $-a$  ersetzen, dasselbe gilt bezüglich  $b$ . Also können wir  $a, b \geq 0$  annehmen, und erhalten  $|ab| = ab = |a| \cdot |b|$  wie verlangt. Für (4) schätzen wir mit (1) wie folgt ab:

$$|a + b| = \pm(a + b) = \pm a + (\pm b) \leq |a| + |b|.$$

Schließlich gilt  $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$  nach (4), also  $|a - b| \geq |a| - |b|$ . Durch Vertauschen von  $a$  und  $b$  folgt (5).  $\square$

**Bemerkung 2.10.** Die Ungleichung  $|a + b| \leq |a| + |b|$  wird häufig als Dreiecksungleichung bezeichnet. Dies wird anschaulich klar, wenn man  $b$  durch  $-b$  ersetzt, also die Ungleichung  $|a - b| \leq |a| + |b|$  betrachtet, die bedeutet, dass der Abstand zwischen  $a$  und  $b$  beschränkt ist durch die Summe der Abstände von  $a$  und  $b$  zum Nullpunkt. Das heißt, man legt einen

längeren (oder gleich langen) Weg zurück, wenn man statt des direkten Weges von  $a$  nach  $b$  einen Umweg über einen dritten Punkt (in diesem Fall der Nullpunkt) macht, siehe Abbildung 9.



**Abbildung 9.** Veranschaulichung der Dreiecksungleichung: der direkte Weg von  $a$  nach  $b$  ist kürzer als der Umweg über den Nullpunkt.

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  definieren wir die Intervalle

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$     offenes Intervall
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$     abgeschlossenes Intervall
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$     rechtsseitig offen, linksseitig abgeschlossen
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$     linksseitig offen, rechtsseitig abgeschlossen
- $|I| = b - a$  für ein Intervall  $I$     Intervalllänge

Es ist praktisch,  $+\infty$  und  $-\infty$  als *offene* Intervallgrenzen zuzulassen, zum Beispiel ist  $(-\infty, 1] = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq 1\}$ . Beachten Sie:  $\pm\infty$  sind keine reellen Zahlen.

**Definition 2.11.** Die Menge  $M \subset \mathbb{R}$  heißt

- nach oben beschränkt  $\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R}$  mit  $x \leq b$  für alle  $x \in M$ ,
- nach unten beschränkt  $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}$  mit  $x \geq a$  für alle  $x \in M$ .

Die Zahl  $b$  heißt dann obere Schranke ( $a$  untere Schranke). Weiter heißt  $M$  beschränkt, wenn  $M$  nach oben und unten beschränkt ist.

**Beispiel 2.12.** Die Menge  $[0, 1)$  ist nach oben beschränkt, eine obere Schranke ist zum Beispiel  $b = 2022$ . Es gibt in  $[0, 1)$  aber kein größtes Element, denn es gilt

$$x \in [0, 1) \Rightarrow \frac{x+1}{2} \in [0, 1), \text{ und } \frac{x+1}{2} > x.$$

Unter den oberen Schranken von  $[0, 1)$  gibt es aber eine kleinste, nämlich die Zahl 1.

Die folgende Eigenschaft ist nun für die reellen Zahlen charakteristisch.

**Vollständigkeitsaxiom** Jede nach oben beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}$  hat eine kleinste obere Schranke.

Die Aussage, dass  $S \in \mathbb{R}$  kleinste obere Schranke von  $M$  ist, bedeutet zwei Dinge:

- (1)  $S$  ist eine obere Schranke von  $M$ , das heißt  $x \leq S$  für alle  $x \in M$ .
- (2)  $S$  ist kleinstmöglich, das heißt für alle  $S' < S$  gibt es ein  $x \in M$  mit  $x > S'$ .

Wir bezeichnen die kleinste obere Schranke mit  $S = \sup M$  (*Supremum von  $M$* ). Ist  $M$  nicht nach oben beschränkt, so definieren wir  $\sup M = +\infty$ . Analog ist das *Infimum*  $\inf M$ , die größte untere Schranke, definiert.

Wie oben erwähnt, gelten die Rechenregeln auch für die rationalen Zahlen. Der Unterschied zu den reellen Zahlen ist genau die Vollständigkeit. Das äußert sich z.B. im „Fehlen“ bestimmter Punkte auf der Zahlengeraden in der Menge  $\mathbb{Q}$ . Hier ein typisches Beispiel für einen indirekten Beweis.

**Beispiel 2.13.** Es gibt kein  $x \in \mathbb{Q}$  mit  $x^2 = 2$ . Angenommen doch: dann können wir  $x > 0$  annehmen (ersetze  $x$  durch  $-x$ ), und weiter nach Kürzen  $x = p/q$  mit  $p, q \in \mathbb{N}$



nicht beide gerade. Aber dann folgt

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p = 2p' \Rightarrow 4(p')^2 = 2q^2 \Rightarrow q = 2q'.$$

Also sind  $p, q$  doch beide gerade, ein Widerspruch. Wir haben benutzt, dass für  $p$  ungerade auch  $p^2$  ungerade ist. Die Quadrate von ungeraden Zahlen haben nur die Endziffern 1, 9, 5.

Vollständigkeit in  $\mathbb{R}$  bedeutet, dass wir beliebige Grenzprozesse durchführen können (mehr dazu später). Zum Beispiel können wir Schritt für Schritt die Ziffern der Dezimalentwicklung von  $\sqrt{2} = 1,4142\dots$  bestimmen: Im ersten Schritt ist  $1^2 < 2$  und  $2^2 > 2$ , also nehmen wir die 1. Im zweiten Schritt ist  $1,4^2 = 1,96$  zu klein,  $1,5^2 = 2,25$  zu groß, also kommt die 4. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge, die die irrationale Zahl  $\sqrt{2}$  approximiert (in welchem Sinne das genau zu verstehen ist, sehen wir später wenn Folgen und Grenzwerte behandelt werden).

Wie liegen nun die rationalen Zahlen in  $\mathbb{R}$  drin? Die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  sind nicht nach oben beschränkt, denn andernfalls haben diese ein Supremum  $S \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $S - 1$  keine obere Schranke, das heißt es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > S - 1$ , oder  $n + 1 > S$ . Damit ist  $S$  keine obere Schranke, das ist ein Widerspruch. Es folgt weiter:

Zu jedem  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x > 0$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{n} < x$ .

Denn sonst wäre  $\mathbb{N}$  durch  $\frac{1}{x}$  nach oben beschränkt. Dies bedeutet weiter, dass in jedem nichtleeren Intervall  $(a, b)$  rationale Zahlen liegen. Dazu wählen wir  $n \in \mathbb{N}$  mit  $1/n < b - a$ . Ein ganzzahliges Vielfaches von  $1/n$  muss dann im Intervall  $(a, b)$  liegen.

Man sagt, die rationalen Zahlen liegen *dicht* in den reellen Zahlen – zu jeder reellen Zahl  $x$  und jedem Abstand  $\epsilon > 0$  kann ich eine rationale Zahl  $q$  finden, so dass  $|x - q| < \epsilon$ , ich kann also jeder reellen Zahl mit rationalen Zahlen beliebig nahe kommen.

**Bemerkung 2.14.** Die Adjektive reell und real können häufig als Synonyme verwendet werden, in einigen Fällen unterscheiden sich jedoch ihre Bedeutungen. Während real für wirklich vorhandene Dinge steht (z.B. reale Kaufkraft), wird reell oft im Sinne von anständig oder ehrlich verwendet (z.B. reelles Angebot). Die reelle, nicht-rationale Zahl  $\sqrt{2}$ , die sich abstrakt als kleinste obere Schranke einer beschränkten Menge charakterisieren lässt, tritt auch ganz real auf, denn man kann mit einfachen Mitteln ein Quadrat mit Flächeninhalt 2 konstruieren, dessen Seiten folglich die Länge  $\sqrt{2}$  haben. Bei anderen reellen Zahlen wie beispielsweise der Euler-Zahl  $e$  ist dieses reale Auftreten weniger klar. Das Wurzelsymbol ist übrigens eine Stilisierung des Buchstabens r, der für Radikal (abgeleitet vom lateinischen Wort radix für Wurzel) steht.

## 2.2 Vollständige Induktion

Baut man eine Reihe von Dominosteinen auf, so sind zwei Bedingungen erforderlich, um die gesamte Reihe zum Umfallen zu bringen: Einerseits muss der erste Stein angestoßen werden und andererseits müssen aufeinanderfolgende Steine eng genug zusammen stehen. Das Prinzip der vollständigen Induktion folgt diesem Muster und erlaubt den simultanen Nachweis von numerierten Aussagen wie beispielsweise “Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $E(n)$ ”. Aus den beiden Nachweisen “Es gilt  $E(1)$ ” sowie “Gilt  $E(n)$ , so auch  $E(n + 1)$ ” folgt wie beim Dominospiel die allgemeine Gültigkeit. Das Dominospiel lässt sich abstrakt beschreiben mit den Aussagen  $E(n) = \text{“Der } n\text{-te Stein ist gefallen”}$ .

**Beispiel 2.15.** Wir definieren

$$s_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1).$$

Alternativ können wir auch eine Rekursionsformel schreiben

$$\begin{aligned}s_1 &= 4, \\ s_n &= s_{n-1} + (2n + 1).\end{aligned}$$

Es ergibt sich damit

$$\begin{aligned}s_1 &= 4, \\ s_2 &= 9, \\ s_3 &= 16, \\ s_4 &= 25, \\ \text{etc.}\end{aligned}$$

Das legt die Vermutung nahe, dass es sich bei den Zahlen  $s_n$  für jedes  $n$  um eine Quadratzahl handelt. In der Tat gilt folgende Formel.

**Satz 2.16.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$s_n = (n + 1)^2.$$

Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion beruht auf folgendem Prinzip:

**Induktionsprinzip 2.17.** Sei  $E(n)$  eine Folge von Aussagen für  $n \in \mathbb{N}$ . Es gelte:

- (1)  $E(1)$  ist wahr.
- (2)  $E(n)$  ist wahr  $\Rightarrow E(n + 1)$  ist wahr.

Dann sind alle Aussagen  $E(n)$  für  $n \in \mathbb{N}$  wahr.

Ein Induktionsbeweis funktioniert immer in zwei Schritten: Erst wird die Aussage  $E(n)$  für den Fall  $n = 1$  verifiziert (Induktionsanfang). Im zweiten Schritt wird *vorausgesetzt*, dass  $E(n)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  richtig ist (Induktionsannahme), und daraus  $E(n + 1)$  gefolgert (Induktionsschluss, d.h. Beweis der Induktionsbehauptung).

Kommen wir zurück zum Beispiel. Der angegebene Satz lässt sich damit wie folgt beweisen.

*Beweis* (von Satz 2.16). Induktionsanfang: Für  $n = 1$  gilt  $s_1 = 4 = 2^2 = (1 + 1)^2$ . Die Aussage ist also für  $n = 1$  offensichtlich korrekt.

Induktionsschritt: Nun gelte die Aussage für  $n \in \mathbb{N}$ , also sei  $s_n = (n + 1)^2$ . Wir müssen

folgern, dass dann auch gilt  $s_{n+1} = (n+1+1)^2$ . Das kann man nachrechnen.

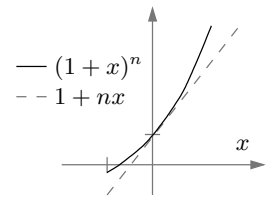
$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + (2(n+1) + 1) \quad (\text{nach der Rekursionsformel oben}) \\ &= (n+1)^2 + (2(n+1) + 1) \quad (\text{dank Induktionsvoraussetzung}) \\ &= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 \\ &= ((n+1) + 1)^2 \\ &= (n+1+1)^2, \end{aligned}$$

womit die Induktionsbehauptung gezeigt ist. Damit ist der Satz nach dem Prinzip der vollständigen Induktion bewiesen.  $\square$

Statt bei  $n = 1$  kann eine Induktion auch bei  $n_0 \in \mathbb{Z}$  starten, die Aussage gilt dann für alle ganzen Zahlen  $n$  so dass  $n \geq n_0$ . Damit zeigen wir folgende nützliche Ungleichung, bei der wir die Festlegung  $0^0 = 1$  verwenden. Die Aussage des Satzes ist in Abbildung 10 illustriert.

**Satz 2.18** (Bernoullische Ungleichung). Für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq -1$ , und  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$



**Abbildung 10.** Grafische Darstellung der Bernoullischen Ungleichung.

*Beweis.* Wir führen Induktion über  $n \in \mathbb{N}_0$  und starten bei  $n = 0$ .

*Induktionsanfang:* Für  $n = 0$  gilt nach Definition  $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$  (es gilt also sogar Gleichheit – wenn  $a = b$  gilt auch  $a \geq b$ ).

*Induktionsschritt:* Wir dürfen im Folgenden die Induktionsannahme  $(1+x)^n \geq 1+nx$  machen. Daraus zu zeigen ist  $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ . Wir berechnen damit und unter Verwendung von  $1+x \geq 0$

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x) \cdot (1+x)^n \\ &\geq (1+x) \cdot (1+nx) \quad (\text{nach Induktionsannahme}) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x, \end{aligned}$$

was der nachzuweisenden Aussage entspricht.  $\square$

**Bemerkung 2.19.** Im obigen Beweis wurden eine Reihe von unseren Regeln zu Ungleichungen verwendet.

Viele weitere Aussagen lassen sich durch vollständige Induktion beweisen.

**Satz 2.20** (Geometrische Summe). Sei  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 1$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$1 + x + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

**Bemerkung 2.21.** Wir haben gerade das Summenzeichen  $\sum$  als praktische, abkürzende Schreibweise eingeführt. Bald sehen wir auch das Produktzeichen  $\prod$ .

*Beweis.* Wir zeigen das wieder durch vollständige Induktion, wobei wir auch hier bei  $n = 0$  beginnen.

Induktionsanfang:

$$\sum_{k=0}^0 x^k = x^0 = 1 = \frac{1 - x^{0+1}}{1 - x}.$$

Induktionsschritt: Jetzt gelte die Formel für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Dann folgt

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \left( \sum_{k=0}^n x^k \right) + x^{n+1} \stackrel{E(n)}{=} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{(n+1)+1}}{1 - x},$$

womit die Behauptung gezeigt ist. Im mit  $E(n)$  markierten Gleichheitszeichen wurde die Induktionsannahme verwendet.  $\square$

Die geometrische Summe lässt sich illustrieren, indem man annimmt, dass ein Gastwirt dem ersten Gast eine ganze, dem zweiten Gast eine halbe, dem dritten eine viertel Flasche Bier und so weiter ausschenkt, insgesamt also bei  $n + 1$  Gästen

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = (1/2)^0 + (1/2)^1 + \cdots + (1/2)^n$$

viele Flaschen benötigt. Interessanterweise reichen bei dem Vorgehen zwei Flaschen, um beliebig vielen Gästen zumindest etwas Bier anbieten zu können. Die geometrische Summe stellt eine einfache Formel bereit, um mit wenig Aufwand zu bestimmen, wie viel Bier nach einer bestimmten Anzahl an Gästen bereits ausgeschenkt worden ist.

Wir wollen als nächstes die Elemente gewisser Mengen zählen. Als erstes zeigen wir, dass man beim Verteilen von 4 Briefen auf 3 Briefkästen in mindestens einen Briefkasten mehr als einen Brief stecken muss.

**Satz 2.22** (Schubfachprinzip). Ist  $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  injektiv mit  $m, n \in \mathbb{N}$ , so folgt  $m \leq n$ .

*Beweis.* Wir führen Induktion nach  $n \in \mathbb{N}$ .

Induktionsanfang: Für  $n = 1$  haben wir  $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1\}$  injektiv, das geht nur für  $m = 1$ .

Induktionsschritt: Sei nun eine injektive Abbildung  $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n + 1\}$  gegeben; wir müssen zeigen dass  $m \leq n + 1$  ist. Hat die Zahl  $n + 1$  kein Urbild, so ist tatsächlich  $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  und nach Induktionsvoraussetzung gilt sogar  $m \leq n$ . Andernfalls hat  $n + 1$  genau ein Urbild. Wenn wir dieses rauswerfen und neu nummerieren, erhalten wir eine Abbildung

$$\tilde{f} : \{1, \dots, m - 1\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \quad \text{injektiv.}$$

Nach Induktion folgt  $m - 1 \leq n$  bzw.  $m \leq n + 1$  wie gewünscht.  $\square$

In den Induktionsbeispielen der Vorlesung führt man Sachverhalte immer auf “kleinere” Sachverhalte zurück. Beim Schubfachprinzip beispielsweise kann man sich den Induktionsschritt veranschaulichen, indem man  $m$  Pferde betrachtet, die auf  $n + 1$  Boxen verteilt werden. Nehmen wir das Pferd heraus, das in der  $(n + 1)$ -ten Box steht, sofern diese nicht leer ist, so werden die restlichen  $m - 1$  Pferde auf  $n$  Boxen verteilt und die Induktionsannahme liefert die Ungleichung  $m - 1 \leq n$  beziehungsweise  $m \leq n + 1$ .

**Definition 2.23** (Mächtigkeit von Mengen). 1. Zwei Mengen  $M$  und  $N$  heißen gleichmächtig, wenn eine bijektive Abbildung zwischen  $M$  und  $N$  existiert.

2. Falls eine Menge  $M$  und die Menge  $\{1, \dots, n\}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  gleichmächtig sind, so heißt  $M$  endlich und  $n = \#M$  ist die Anzahl ihrer Elemente. Die leere Menge ist ebenfalls endlich mit  $\#\emptyset = 0$ .

Dass die Zahl der Elemente eindeutig definiert ist, folgt aus dem Schubfachprinzip. Wir setzen

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \quad (n\text{-Fakultät}).$$

Per Dekret ist  $0! = 1$  (vgl. Vereinbarung zum leeren Produkt  $a^0$ ). Der folgende Satz beantwortet die Frage nach der Anzahl der möglichen Anordnungen (oder Umordnungen oder Permutationen) von  $n$  Dingen.

**Beispiel 2.24.** In der Informatik wird häufig die Frage gestellt, ob ein gegebener Algorithmus für alle Eingabewerte terminiert. Hier ein einfaches Beispiel:

```
def factorial(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return n*factorial(n-1)
```

Die obige Pythonfunktion berechnet die Fakultät des Eingabeparameters  $n$  für natürliche Zahlen  $n$ . Es ist leicht mittels vollständiger Induktion zu sehen, dass der Algorithmus für beliebige  $n \in \mathbb{N}$  terminiert (abgesehen davon, dass man natürlich keine beliebig großen Zahlen am Computer darstellen kann).

**Satz 2.25** (Zahl der Permutationen). Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $S_n$  die Menge der bijektiven Abbildungen  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Dann gilt  $\#S_n = n!$ .

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung durch Induktion, wobei der Induktionsanfang  $n = 1$  offensichtlich ist. Sei  $S_{n+1,k}$  die Menge der Permutationen von  $\{1, \dots, n+1\}$ , die die Nummer  $k$  auf  $n+1$  abbilden. Da die restlichen  $n$  Nummern beliebig bijektiv auf  $\{1, \dots, n\}$  abgebildet werden, hat  $S_{n+1,k}$  genau  $n!$  Elemente nach Induktion. Es folgt durch Summation

$$\#S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \#S_{n+1,k} = (n+1) \cdot n! = (n+1)!.$$

□

Der Begriff *Permutation* kann als Synonym für *Vertauschung* angesehen werden. Den Sachverhalt über die Anzahl der Permutationen macht man sich am besten an einer Personengruppe klar, die einmal beispielsweise alphabetisch von 1 bis  $n$  durchnummeriert wurde, und von dieser Grundnummerierung ausgehend alle Umnummerierungen betrachtet werden. Inklusive der Identität gibt es  $n!$  viele. Die Elemente der Menge  $\{A, B, C\}$  können auf sechs Arten nummeriert werden, die unten angegebene Permutation  $\sigma_3$  der Grundnummerierung ist beispielsweise definiert durch  $\sigma_3(1) = 2$ ,  $\sigma_3(2) = 1$  und  $\sigma_3(3) = 3$ .

Permutation	$A$	$B$	$C$
$\sigma_1$	1	2	3
$\sigma_2$	1	3	2
$\sigma_3$	2	1	3
$\sigma_4$	2	3	1
$\sigma_5$	3	1	2
$\sigma_6$	3	2	1

**Tabelle 6.** Permutationen einer dreielementigen Menge.

**Definition 2.26** (Binomialkoeffizienten). Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}$  setzen wir

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}, \quad \text{sowie} \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Der Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k}$  gibt die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge an. Anschaulich sagt uns das beispielsweise, wie viele Möglichkeiten es gibt,  $k$  Bonbons aus einer Schale mit  $n$  verschiedenen Bonbons auszuwählen. Da die Reihenfolge irrelevant ist, gibt es z.B.  $10 = (5 \cdot 4)/2$  viele Möglichkeiten zwei Bonbons von insgesamt fünf auszuwählen. Genau so viele Möglichkeiten gibt es drei auszuwählen, denn dies entspricht dem Auswählen von zwei Bonbons, die man nicht haben möchte.

**Lemma 2.27** (Additionstheorem für Binomialkoeffizienten). Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}$  erfüllen die Binomialkoeffizienten die Formel

$$\binom{\alpha + 1}{k} = \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k - 1}.$$

*Beweis.* Für  $k = 1$  ist leicht zu sehen, dass die Formel richtig ist. Für  $k \geq 2$  berechnen wir (ohne Induktion...)

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k - 1} &= \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k - 1)} \\ &= \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 2) \cdot (\alpha - k + 1 + k)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \\ &= \frac{(\alpha + 1) \cdot \alpha \cdot \dots \cdot ((\alpha + 1) - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \\ &= \binom{\alpha + 1}{k}. \end{aligned}$$

□

Im Fall  $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$  erlaubt Lemma 2.27 die rekursive Berechnung der Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  nach dem Dreiecksschema von Blaise Pascal (1623-1662), siehe Abbildung 11.

Ebenfalls für  $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$  folgt durch Erweitern der Binomialkoeffizienten mit  $(n - k)!$  die alternative Darstellung

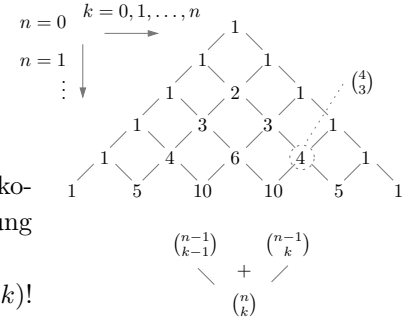
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0, k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad (2.2)$$

und daraus weiter die am Diagramm ersichtliche Symmetrieeigenschaft

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0, k \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (2.3)$$

**Satz 2.28** (Zahl der Kombinationen). Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Dann ist die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$  gleich  $\binom{n}{k}$ .

*Beweis.* Es gilt  $\binom{n}{0} = 1$  nach Definition, und die einzige null-elementige Teilmenge von  $\{0, 1, \dots, n\}$  ist die leere Menge. Also stimmt die Aussage für alle  $n = 0, 1, \dots$  und  $k = 0$ . Die  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n + 1\}$  mit  $k \geq 1$  zerfallen in zwei Klassen:



**Abbildung 11.** Das Pascalsche Dreieck zur Bestimmung von Binomialkoeffizienten: aus den vorgegebenen Werten auf den Seiten lassen sich rekursiv die Werte im Innern des Dreiecks bestimmen.

**Klasse 1:** Die Menge enthält die Nummer  $n + 1$  nicht.

**Klasse 2:** Die Menge enthält die Nummer  $n + 1$ .

Klasse 1 besteht genau aus den  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ , Klasse 2 ergibt sich durch Hinzufügen der Nummer  $n + 1$  zu jeder der  $(k - 1)$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ . Nach Induktion folgt für die Gesamtzahl der Elemente mit Lemma 2.27

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k},$$

womit der Satz bewiesen ist.  $\square$

**Satz 2.29** (Binomische Formel). Für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \quad (2.4)$$

*Beweis.* Ausmultiplizieren des  $n$ -fachen Produkts  $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdot \dots \cdot (a+b)$  mit dem Distributivgesetz und Ordnen nach dem Kommutativgesetz liefert Terme der Form  $a^k b^{n-k}$  für  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Die Häufigkeit eines solchen Terms ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, aus den  $n$  Klammern  $k$  Klammern auszusuchen, in denen  $a$  als Faktor genommen wird; in den restlichen Klammern muss dann der Faktor  $b$  gewählt werden. Nach Satz 2.28 kommt  $a^k b^{n-k}$  also genau  $\binom{n}{k}$  mal vor.  $\square$

Für eine gegebene Menge  $M$  bezeichnen wir mit  $2^M$  die Menge aller Teilmengen von  $M$ .

**Beispiel 2.30.** Sei  $M = \{1, 2, 3\}$ .

Dann ist  $2^M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ .

**Satz 2.31.** Für  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\#M = n$  gilt  $\#2^M = 2^n$ .

*Beweis.* Die Menge aller Teilmengen ist die Vereinigung der Menge der Teilmengen mit 0 Elementen, mit 1 Element, mit 2 Elementen, etc, jeweils mit  $\binom{n}{k}$  Elementen. Die Anzahl folgt durch Summation via

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1 + 1)^n = 2^n.$$

$\square$

## 2.3 Geometrie im Raum $\mathbb{R}^n$

Elemente der Menge  $\mathbb{R}^n$  kann man je nach Verwendung als Punkte oder Richtungen auffassen. Das Element  $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  kann also die Position bezüglich eines Nullpunktes in einem Koordinatensystem angesehen werden (Abbildung 12 oben). Es kann auch als Windrichtung angesehen werden und dann in jedem Punkt als Pfeil eingezeichnet werden (Abbildung 12 unten). In beiden Fällen spricht man von Vektoren; gelegentlich werden Pfeile bei den Variablenamen verwendet. Die Ausrichtung und Beschriftung von Achsen ist bei der Visualisierung des  $\mathbb{R}^n$  nicht einheitlich festgelegt, im Fall von Punkten ist beispielsweise die Verwendung der Achsenbezeichnungen  $x_1$  und  $x_2$  sinnvoll. Ein Vektor in einem höherdimensionalen Raum wie  $x \in \mathbb{R}^{10}$  kann beispielsweise die Zusammensetzung eines Ak-

Portfolio's bezüglich zehn verschiedener Aktien beschreiben. Bei den Einheitsvektoren  $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$  ist zu beachten, dass der Index eine Nummerierung der Vektoren angibt und nicht die entsprechende Koordinate auswählt (wie beispielsweise bei  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ).

Im Folgenden sei  $n \in \mathbb{N}$ , zum Beispiel  $n = 2$  oder  $n = 3$ . Wir bezeichnen mit  $\mathbb{R}^n$  das  $n$ -fache kartesische Produkt  $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ , also die Menge aller  $n$ -Tupel

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir nennen die Elemente von  $\mathbb{R}^n$  auch *Vektoren*. Vektoren werden meist als Spalten geschrieben. Die Umwandlung von einer Zeilen- in eine Spaltendarstellung erfolgt mittels *Transposition*, durch die Angabe  $x = (2, 1)^T$  wird beispielsweise ein (Spalten-) Vektor mit Einträgen 2 und 1 definiert, insbesondere gilt

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Zwei Vektoren  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  sind genau dann gleich, wenn  $x_i = y_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , wenn also alle *Koordinaten* gleich sind. Wir können Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren (also strecken und verkürzen).

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

In diesem Zusammenhang nennt man die Zahl  $\lambda$  auch einen Skalar, und spricht von *Skalarmultiplikation*. Die Standard-Einheitsvektoren sind

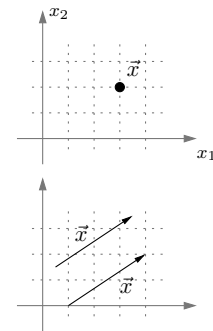
$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Mit ihnen ergibt sich für jeden Vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  die Darstellung

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i.$$

Die Vektoraddition und Skalarmultiplikation erfüllen folgende Regeln, die alle direkt aus den Definitionen folgen:

- (1)  $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- (2)  $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$  für alle  $\vec{x}$ , mit  $\vec{0} = (0, \dots, 0)$  (Nullvektor)
- (3) Es gilt  $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
- (4)  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$



**Abbildung 12.** Auffassung eines Elements als Position bzgl. eines Nullpunkts (oben) und (Wind-) Richtung (unten).



$$(5) \quad (\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$$

$$(6) \quad (\lambda\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x})$$

$$(7) \quad \lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$$

$$(8) \quad 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}.$$

Eine nützliche Größe ist das Skalarprodukt zwischen Vektoren im  $\mathbb{R}^n$ :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{für } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

Statt mit Klammern wird das Skalarprodukt oft in der Form  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  geschrieben, also mit einem Punkt. Wir bleiben aber bei den Klammern. Folgende Regeln ergeben sich direkt aus der Formel, wobei  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle \quad (\text{Symmetrie})$$

$$\langle \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{z} \rangle = \lambda\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \mu\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \quad (\text{Bilinearität})$$

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = |\vec{x}|^2 \geq 0 \quad (\text{Positivität}).$$

Die Bilinearität des Skalarprodukts kann als Verallgemeinerung des Distributivgesetzes angesehen werden.

Im drei-dimensionalen Raum („Anschauungsraum“) kann jede Gerade mit  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ , jede Ebene mit  $\mathbb{R}^2$  und der Raum selbst mit  $\mathbb{R}^3$  identifiziert werden, indem ein *kartesisches Koordinatensystem* gewählt wird. Ein solche Wahl eines Koordinatensystems besteht darin, zunächst einen Ursprung festzulegen, also den Punkt im Raum (bzw. der Ebene, der Gerade), welcher mit dem Nullvektor identifiziert wird. Danach bestimmt man drei/zwei/eine aufeinander senkrecht stehende Richtungen (im Raum/der Ebene/der Gerade (auf der Gerade gibt es natürlich nur zwei Richtungen, die sich nur durch ein Vorzeichen unterscheiden)) und der Punkte im Raum, welche in die jeweilige Richtung den Abstand Eins haben. Ein Vektor im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 3, 2, 1$  identifiziert dann eindeutig einen Punkt  $p$  im Raum-/der Ebene/der Gerade, indem in die jeweiligen Richtungen die Koordinaten abgetragen werden. Abbildung 13 sollte dies veranschaulichen.

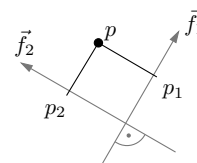
Im Anschauungsraum kennen wir die Begriffe des Abstandes und des Winkels. Diese wollen wir nun auch auf den  $\mathbb{R}^n$  übertragen. Die Euklidische Länge (oder der Betrag) eines Vektors ist definiert durch

$$|\vec{x}| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{für } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

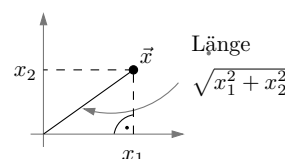
Für  $n = 2$  ist  $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , dies entspricht also dem Satz von Pythagoras (Abbildung 14). Für  $n = 3$  haben wir  $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ . Dies lässt sich ebenfalls mit Pythagoras begründen, indem der Punkt  $(x_1, x_2, 0)$  betrachtet wird. Offenbar gilt für  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$|\vec{x}| \geq 0 \quad (\text{Gleichheit nur für } \vec{x} = \vec{0})$$

$$|\lambda\vec{x}| = |\lambda| |\vec{x}|.$$



**Abbildung 13.** Koordinaten in einer Ebene bezüglich zweier gegebener Richtungen  $\vec{f}_1$  und  $\vec{f}_2$ .



**Abbildung 14.** Länge eines Vektors  $\vec{x}$  im  $\mathbb{R}^2$ .

Der Euklidische Abstand ist nun

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}| \quad \text{für } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere ist der Betrag gleich dem Abstand zum Nullpunkt, also  $|\vec{x}| = \text{dist}(\vec{x}, \vec{0})$ .

Die Größe  $|x|$  gibt den Abstand eines Punktes in  $\mathbb{R}^n$  zum Nullpunkt oder die Länge eines Richtungsvektors an. In der Ebene, das heißt in  $\mathbb{R}^2$  kann man damit eine Kreislinie zum Radius  $r > 0$  um den Mittelpunkt 0 definieren durch

$$K_r(0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x}| = r\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = r^2\}.$$

Um praktisch einen Winkel zwischen zwei geraden Linien mit einem Maßband zu bestimmen, kann man einen Kreisbogen mit Radius 1 um den gemeinsamen Punkt zeichnen und dann die Länge des Bogensegments zwischen den beiden Schnittpunkten messen. Dies ist eine Zahl zwischen 0 und  $\pi$  und definiert den Winkel als Bogenlänge. Eine Winkelangabe in Gradzahlen erhält man, indem man das Verhältnis zu  $\pi$  bestimmt, wobei  $1^\circ$  gerade der Länge  $\pi/180 \approx 0.0175$  entspricht. Misst man also eine Bogenlänge  $\ell = 0,7$  (Meter), so handelt es sich um einen Winkel von  $0,7/(\pi/180) \approx 40,1$  Grad. Der Kosinus dieses Winkels entspricht der ersten Koordinate des Schnittpunkts mit dem Kreis, ist also eine Zahl im Intervall  $[-1, 1]$ . Diese Zahl ist auch durch das Skalarprodukt der Vektoren  $x/|x|$ , das heißt des auf Länge 1 gebrachten Vektors, und des ersten Einheitsvektors  $e_1$  gegeben.

Den Winkel zwischen zwei Vektoren können wir nun über das Skalarprodukt definieren – hierzu benötigen wir allerdings einige Eigenschaften der Kosinusfunktion, die allerdings aus der Schule bekannt sein sollten.

**Definition 2.32** (Winkel zwischen Vektoren). Seien  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ . Dann definieren wir den Winkel  $\phi = \angle(\vec{x}, \vec{y}) \in [0, \pi]$  durch die Gleichung

$$\cos \phi = \left\langle \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|} \right\rangle.$$

**Bemerkung 2.33.** Der wichtige Fall, dass  $\vec{x}, \vec{y}$  zueinander senkrecht (orthogonal) sind, ist gegeben genau wenn  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ .

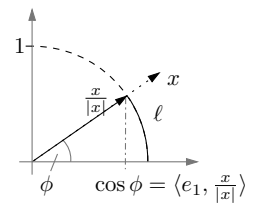
Es ist noch zu begründen, dass die Gleichung in der Definition eine und nur eine Lösung  $\phi$  besitzt. Die Funktion Kosinus auf  $[0, \pi]$  nimmt jeden Wert in  $[-1, 1]$  genau einmal an, siehe Abbildung 16. Das heißt, der Kosinus  $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  ist bijektiv und somit gibt es eine Umkehrfunktion! (Das gilt natürlich nicht mehr, wenn man einen größeren oder kleineren Definitionsbereich verwendet). Wir werden dazu mehr sehen, wenn wir in Kürze reelle Funktionen näher betrachten. Auch setzen wir schon jetzt die grundlegenden Rechenregeln für Sinus und Kosinus voraus, diese werden in Abschnitt 3.3 nochmals erläutert.

Es bleibt also zu zeigen, dass die rechte Seite in der Definition des Winkels immer im Intervall  $[-1, 1]$  liegt. Dies ergibt sich aus folgender Ungleichung.

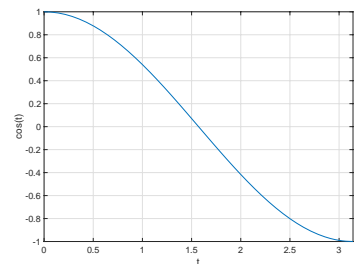
**Satz 2.34** (Ungleichung von Cauchy-Schwarz). Für  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\vec{x}, \vec{y}$  parallel (das heißt, sie zeigen in die gleiche oder in die genau entgegengesetzte Richtung) sind.



**Abbildung 15.** Praktische Bestimmung eines Winkels im Einheitskreis.



**Abbildung 16.** Die Kosinusfunktion auf dem Intervall  $[0, \pi]$ .

*Beweis.* Wir betrachten zunächst den Fall mit  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$  und rechnen.

$$1 \pm \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} \left( |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \right) = \frac{1}{2} |\vec{a} \pm \vec{b}|^2 \geq 0.$$

(Warum folgt hieraus sofort  $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq 1$ ?)

Für  $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$  beliebig (wenn einer der beiden Vektoren Null ist, dann ist ohnehin nichts mehr zu tun) wenden wir dies an mit  $\vec{a} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ ,  $\vec{b} = \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}$ :

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = |\vec{x}| |\vec{y}| |\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|.$$

Bei Gleichheit gilt für die Einheitsvektoren

$$0 = \vec{a} \pm \vec{b} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \pm \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|},$$

das heißt  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  sind parallel.  $\square$

Im Beweis des Satzes von Cauchy und Schwarz wird die Identität  $1 + \langle a, b \rangle = (1/2)|a + b|^2$  für Vektoren  $a, b \in \mathbb{R}^n$  mit Länge 1, also  $|a|^2 = |b|^2 = 1$  verwendet. Diese ergibt sich mit den Eigenschaften des Skalarprodukts sowie  $|x|^2 = \langle x, x \rangle$  folgendermaßen:

$$\begin{aligned} 1 + \langle a, b \rangle &= \frac{1}{2} (|a|^2 + |b|^2 + 2\langle a, b \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle + 2\langle a, b \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle a, a + b \rangle + \langle a + b, b \rangle) \\ &= \frac{1}{2} \langle a + b, a + b \rangle \\ &= \frac{1}{2} |a + b|^2. \end{aligned}$$

Wir haben hier eine Struktur verwendet, die der ersten binomischen Formel entspricht.

Die Definition des Winkels ergibt sofort den *Kosinussatz*: In dem von  $\vec{0}, \vec{x}, \vec{y}$  gebildeten Dreieck folgt nämlich

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{y}).$$

Eine Konsequenz der Cauchy-Schwarz Ungleichung ist folgende Eigenschaft des Betrags.

**Satz 2.35** (Dreiecksungleichung). Für  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  gilt die Ungleichung

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|,$$

mit Gleichheit genau wenn  $\vec{x}, \vec{y}$  gleichsinnig parallel sind.

*Beweis.* Aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + |\vec{y}|^2 \leq |\vec{x}|^2 + 2|\vec{x}||\vec{y}| + |\vec{y}|^2 = (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2.$$

Durch Wurzelziehen folgt  $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$  wie behauptet. Bei Gleichheit müssen  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  parallel sein nach Satz 2.34. Es muss aber auch  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \geq 0$  sein, also sind  $\vec{x}, \vec{y}$  gleichsinnig parallel.  $\square$

Wir kommen nun zu einer speziellen Struktur des drei-dimensionalen Raums. Das Kreuzprodukt (oder Vektorprodukt) ist gegeben durch

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Folgende Regeln ergeben sich direkt aus den Rechenregeln der reellen Zahlen:

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= -\vec{y} \times \vec{x} \quad (\text{Schiefsymmetrie}) \\ (\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) \times \vec{z} &= \lambda \vec{x} \times \vec{z} + \mu \vec{y} \times \vec{z} \quad (\text{Bilinearität}). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt  $\vec{x} \times \vec{x} = 0$ . Für die Standardvektoren sehen wir

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Man nennt die Vertauschungen 123, 231, 312 zyklisch, 213, 321, 132 antizyklisch.

Aber welcher Vektor ist nun  $\vec{x} \times \vec{y}$ ? Als erstes berechnen wir dazu seine Länge (nachprüfen)

$$\begin{aligned} |\vec{x} \times \vec{y}|^2 &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \\ &= |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2 - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2. \end{aligned}$$

Mit  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{y})$  (Definition des Winkel) ergibt sich

$$|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| |\vec{y}| \sqrt{1 - \cos^2 \angle(\vec{x}, \vec{y})} = |\vec{x}| |\vec{y}| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y}).$$

Insbesondere:  $\vec{x} \times \vec{y}$  ist null, wenn  $\angle(\vec{x}, \vec{y}) \in \{0, \pi\}$ , also wenn  $\vec{x}, \vec{y}$  parallel sind (oder null). Sind  $\vec{x}, \vec{y}$  orthogonal, so folgt  $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| |\vec{y}|$ .

Ab jetzt seien  $\vec{x}, \vec{y}$  nicht parallel, also  $\vec{x} \times \vec{y} \neq \vec{0}$ . Wir berechnen

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1 - x_1 y_3 z_2. \quad (2.5)$$

Ist  $\vec{z} = \vec{x}$  oder  $\vec{z} = \vec{y}$ , so ist die rechte Seite Null. Also steht  $\vec{x} \times \vec{y}$  senkrecht auf die von  $\vec{x}, \vec{y}$  aufgespannte Ebene. Da die Länge schon bekannt ist, bleiben nur zwei Vektoren, die sich um den Faktor  $-1$  unterscheiden.

Drei Vektoren  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$  heißen (in der Reihenfolge  $x, y, z$ ) *positiv orientiert*, wenn gilt  $\langle x \times y, z \rangle > 0$ , das heißt die beiden Vektoren  $x \times y$  und  $z$  nehmen einen Winkel ein, der kleiner als  $90^\circ$  ist. Sind  $x$  und  $y$  nicht parallel und von Null verschieden und ist  $z = x \times y$ , so gilt

$$\langle x \times y, x \times y \rangle = |x \times y|^2 > 0,$$

sie sind also positiv orientiert. Die Richtung des Vektors  $x \times y$  ist somit durch die *rechte-Hand-Regel* gegeben, das heißt, wenn  $x$  in Richtung des Daumens und  $y$  in Richtung des

Zeigefingers zeigen, so ist die Richtung von  $x \times y$  durch die Richtung des Mittelfingers gegeben.

Zusammenfassend ist der Vektor  $\vec{x} \times \vec{y}$  gegeben durch den Vektor  $\vec{z}$ , der senkrecht auf der von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  aufgespannten Ebene steht, die Länge  $|\vec{z}| = |\vec{x}||\vec{y}| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y})$  hat, und für den gilt, dass  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  positiv orientiert sind.

**Bemerkung 2.36.** *Im dreidimensionalen Raum wird ein kartesisches Koordinatensystem immer so gewählt, dass die „Rechte-Hand-Regel“ erfüllt ist, also dass zueinander senkrechten Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand in dieser Reihenfolge die Standard-Vektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$  entsprechen. Dann ist das Vektorprodukt im Anschauungsraum (das auch durch die Rechte-Hand-Regel bestimmt wird) konsistent mit dem Vektorprodukt im  $\mathbb{R}^3$ .*

## 2.4 Die komplexen Zahlen

Wir beginnen mit einer anderen Schreibweise für Punkte des  $\mathbb{R}^2$ . Und zwar setzen wir  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i$ , und haben dann die allgemeine Darstellung

$$z = x + iy \quad \text{für alle } z = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

In diesem Zusammenhang heißen die Punkte des  $\mathbb{R}^2$  komplexe Zahlen (Symbol  $\mathbb{C}$ ).

Die komplexen Zahlen definieren eine sinnvolle Multiplikation von Vektoren in der Ebene und erlauben das Wurzelziehen aus negativen reellen Zahlen.

Realteil und Imaginärteil einer komplexen Zahl sind gegeben durch

$$\operatorname{Re} z = x \quad \operatorname{Im} z = y \quad \text{für } z = x + iy.$$

Die Addition in  $\mathbb{C}$  ist die übliche komponentenweise Addition, also

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Für die Multiplikation setzen wir  $i^2 = -1$  und multiplizieren aus:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Wurzeln lassen sich in  $\mathbb{C}$  auch aus komplexen Zahlen ziehen, beispielsweise können wir die Gleichung  $z^2 = i$  mit den Ansatz  $z = x + iy$  folgendermaßen lösen. Zunächst gilt mit  $i^2 = -1$

$$(x + iy)^2 = i \quad \Longleftrightarrow \quad (x^2 - y^2) + i2xy = i.$$

Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn ihre Imaginär- und Realteile gleich sind, also muss

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \text{und} \quad 2xy = 1$$

gelten. Aus der zweiten Gleichung folgt  $x, y \neq 0$  und  $y = 1/(2x)$ . Setzt man dies in der ersten Gleichung ein, erhält man

$$x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad x^4 = \frac{1}{4}.$$

Die letzte Gleichung hat die Lösungen  $x = 1/\sqrt{2}$  und  $x = -1/\sqrt{2}$ . Mit  $2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$  ergeben sich die beiden komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i), \quad z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

als Lösungen der Gleichung  $z^2 = i$ . Diese sind gegenüberliegend auf der Kreislinie mit Radius 1, wobei  $z_1$  den Winkel  $45^\circ$  mit der  $x$ -Achse einnimmt.

Komplexe Zahlen lassen sich gut in Polarkoordinaten darstellen. Zu jedem  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z \neq 0$  gibt es ein  $r > 0$  und ein  $\varphi \in \mathbb{R}$  mit

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Dabei ist  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , und  $\varphi \in \mathbb{R}$  ist der Winkel, den  $z$  mit der positiven  $x$ -Achse einschließt. Da die Funktionen  $\cos, \sin$  die Periode  $2\pi$  haben, ist der Winkel nur bis auf ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  eindeutig bestimmt. Er ist eindeutig, wenn wir  $\varphi \in [0, 2\pi)$  verlangen, siehe Abbildung 17. Insbesondere für die Multiplikation reeller Zahlen ist diese Darstellung nützlich, eine Multiplikation mit  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  entspricht einer Streckung um den Faktor  $r$  und einer Rotation um den Winkel  $\varphi$  in  $\mathbb{R}^2$ . Dass wir zu jeder komplexen Zahl auch ein  $r$  und ein  $\varphi$  finden können, so dass  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  werden wir etwas später sehen.

Für die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  gelten dieselben Rechenregeln wie für die reellen Zahlen. Wie bereits erwähnt bilden auch die komplexen Zahlen einen Zahlkörper (wodurch automatisch alle aus  $\mathbb{R}$  bekannten Rechenregeln gelten!), dies lässt sich leicht überprüfen.

Bezüglich der Addition ist  $0 = 0 + i0$  das neutrale Element, und  $-z = -x - iy$  das zu  $z = x + iy$  inverse Element. Kommutativgesetz und Assoziativgesetz der Addition sind klar, denn diese ist einfach die komponentenweise Addition.

Das neutrale Element der Multiplikation ist  $1 = 1 + i0$ , denn

$$z \cdot 1 = (x + iy)(1 + i0) = x + iy.$$

Wir nennen  $\bar{z} = x - iy$  die zu  $z = x + iy$  konjugiert komplexe Zahl. Wegen  $i^2 = -1$  gilt

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 + i(yx - xy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

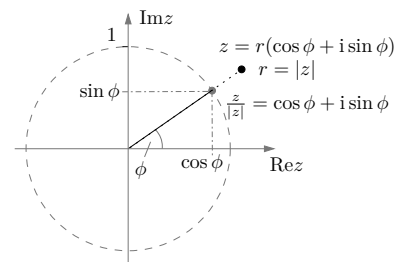
Damit können wir das zu  $z \neq 0$  inverse Element angeben, und zwar ist

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \quad \text{denn } z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1.$$

Kommutativgesetz, Assoziativgesetz der Multiplikation, sowie Distributivgesetz lassen sich durch Nachrechnen überprüfen. Z.B. für das Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} (a + ib)((x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)) &= (a + ib)(x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)) \\ &= a(x_1 + x_2) - b(y_1 + y_2) + i(b(x_1 + x_2) + a(y_1 + y_2)) \\ &= ax_1 - by_1 + i(bx_1 + ay_1) + ax_2 - by_2 + i(bx_2 + ay_2) \\ &= (a + ib)(x_1 + iy_1) + (a + ib)(x_2 + iy_2). \end{aligned}$$

Wir notieren im Vorbeigehen folgende nützliche Formeln, die sich ebenfalls leicht verifizieren lassen. Für die zweite Gleichung in (1) und für (3) kann man die Polardarstellung



**Abbildung 17.** Darstellung der komplexen Zahlen im Einheitskreis und mittels Polarkoordinaten.

von  $z_{1,2}$  verwenden.

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ,  $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$ ,
- Für  $z = x + iy$  ist  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  und  $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ .

Was ist der Gewinn, den wir von den komplexen Zahlen haben? Allgemein gesagt, sind mit den komplexen Zahlen Gleichungen lösbar, die mit reellen Zahlen nicht lösbar sind. Zum Beispiel gibt es keine reelle Lösung von  $x^2 + q = 0$ , wenn  $q > 0$  ist. In  $\mathbb{C}$  haben wir dagegen die beiden Lösungen  $z_{1,2} = \pm i\sqrt{q}$ <sup>1</sup>. Jede Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  mit  $p, q \in \mathbb{R}$  kann auf das Ziehen einer Wurzel reduziert werden, und hat damit ebenfalls Lösungen. Substituiere dazu  $x = y + a$  und berechne

$$0 = (y + a)^2 + p(y + a) + q = y^2 + (2a + p)y + a^2 + pa + q.$$

Durch Wahl von  $a = -p/2$  ergibt sich

$$y^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$$y = \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \text{falls } \frac{p^2}{4} - q > 0 \\ \pm i \sqrt{-(\frac{p^2}{4} - q)} & \text{falls } \frac{p^2}{4} - q < 0 \\ 0 & \text{falls } \frac{p^2}{4} - q = 0. \end{cases}$$

Durch Rückeinsetzen  $x = y - p/2$  ergeben sich die jeweiligen Lösungen für  $x$ .

Komplexe Zahlen traten zuerst in der italienischen Renaissance in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts auf, bei der Lösung von quadratischen und kubischen Gleichungen. Die Bezeichnung  $i = \sqrt{-1}$  stammt von Euler (1777), die Bezeichnung *komplexe Zahl* von Gauß (1831). Er hat auch die Interpretation als Punkte in der Ebene eingeführt.

---

<sup>1</sup>Mit  $\sqrt{x}$  ist stets die nichtnegative Wurzel gemeint

## 3 Funktionen

### 3.1 Reelle Funktionen

Eine reelle Funktion einer Variablen ist eine Abbildung

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \quad \text{wobei } D \subset \mathbb{R}.$$

Der Definitionsbereich  $D$  kann zum Beispiel ganz  $\mathbb{R}$  oder ein Intervall sein. Die Bezeichnung *reelle Funktion* bezieht sich darauf, dass die Werte  $f(x)$  der Funktion reelle Zahlen sind.

Typische Beispiele von Funktionen sind:

$$\text{lineare Funktionen:} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b.$$

$$\text{quadratische Funktionen:} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c.$$

$$\text{Wurzelfunktion:} \quad f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}.$$

Weitere Beispiele reeller Funktionen sind das kubische Polynom  $f(x) = x^3$  mit  $D = \mathbb{R}$  und die Wurzelfunktion  $f(x) = x^{1/2}$  mit  $D = [0, \infty)$ . Die Wurzelfunktion kann für  $x < 0$  nicht als reelle Funktion definiert werden.

Die Rechenoperationen von  $\mathbb{R}$  lassen sich für Funktionen definieren, genauer setzen wir für  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x), \\ (f \cdot g)(x) &= f(x)g(x), \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{falls } g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.1.** Auf der linken Seite steht eine neue Funktion (z.B.  $f + g$ ), ausgewertet an einem Punkt  $x$ ; auf der rechten Seite nutzen wir die Rechenoperationen in den reellen Zahlen, um zu definieren, was z.B.  $f + g$  ausgewertet an dem Punkt  $x$  sein soll.

Sind  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(D) \subset E$ , so ist die Verkettung definiert durch

$$g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Für zwei Funktionen  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  schreiben wir  $f = g$ , falls  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in D$  gilt.

**Bemerkung 3.2.** In der gleichen Weise kann man natürlich auch komplexe Funktionen (von  $D \subset \mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$ ) betrachten. Der Einfachheit halber beschränken wir uns aber hier zunächst auf das Reelle. Die folgenden Überlegungen funktionieren nun auch nur im Reellen, mangels einer Anordnung (größer bzw. kleiner als) in den komplexen Zahlen.

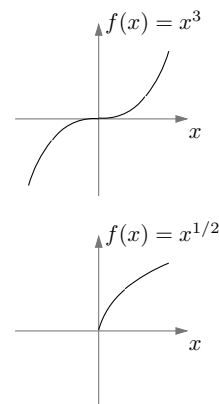
In vielen Anwendungen interessiert man sich dafür, wo die Maxima und Minima der Funktion liegen (Extremwerte), und allgemeiner in welchen Bereichen die Funktion anwächst beziehungsweise fällt. Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

$$\text{monoton wachsend:} \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

$$\text{streng monoton wachsend:} \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

$$\text{monoton fallend:} \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

$$\text{streng monoton fallend:} \quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$



**Abbildung 18.** Beispiele reeller Funktionen.



Zum Beispiel hat die quadratische Funktion  $f(x) = x^2 + px + q$  im Punkt  $x = -p/2$  ein Minimum. Auf dem Intervall  $[-p/2, \infty)$  ist sie streng monoton wachsend, auf  $(-\infty, -p/2]$  streng monoton fallend.

Beispiele streng monoton wachsender Funktionen sind die in Abbildung 18 gezeigten Funktionen  $f(x) = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , und  $f(x) = x^{1/2}$ ,  $x \in [0, \infty)$ .

**Bemerkung 3.3.** Eine streng monotone Funktion ist immer injektiv, siehe auch Definition 2.32. Dort haben wir bereits benutzt, dass  $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  injektiv ist (Surjektivität sehen wir später).

**Bemerkung 3.4.** Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$  ist streng monoton wachsend. Warum?

Ein weiterer Begriff bezieht sich auf die Symmetrie einer Funktion:  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

$$\begin{aligned} \text{gerade:} \quad & f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in D, \\ \text{ungerade:} \quad & f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in D. \end{aligned}$$

Für diese Eigenschaft muss natürlich  $D$  symmetrisch zum Ursprung liegen, zum Beispiel  $D = (-a, a)$ , sonst macht es keinen Sinn. Die quadratische Funktion  $f(x) = x^2 + px + q$  ist genau dann gerade, wenn  $p = 0$  ist, und niemals ungerade. Denn

$$\frac{f(x) - f(-x)}{2} = px \quad \frac{f(x) + f(-x)}{2} = x^2 + q.$$

Weitere Beispiele gerader und ungerader (oder auch symmetrischer und asymmetrischer) Funktionen sind die Kosinus- beziehungsweise die Sinus-Funktion.

## 3.2 Polynome und rationale Funktionen

**Definition 3.5.** Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt (reelles) Polynom vom Grad  $n \in \mathbb{N}_0$ , wenn es  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  gibt mit  $a_n \neq 0$ , so dass

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

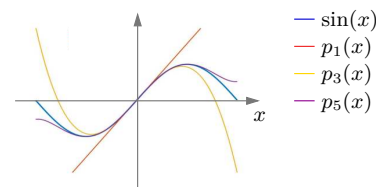
Die  $a_i \in \mathbb{R}$  heißen Koeffizienten des Polynoms, und  $a_n$  heißt Leitkoeffizient. Ein Polynom vom Grad Null ist nach Definition konstant. Das Nullpolynom (also die Nullfunktion, die Funktion, die konstant Null ist) wird separat behandelt<sup>2</sup>. Wenn wir ohne weiteren Zusatz von einem „Polynom“ sprechen, meinen wir immer explizit *nicht* das Nullpolynom.

Polynome sind wichtige mathematische Objekte. Aus praktischer Sicht ermöglichen sie die Approximation komplizierter Funktionen und lassen sich mit effizienten Datenstrukturen darstellen. Um beispielsweise die Sinusfunktion auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  mit Polynomen zu approximieren, kann man Polynome  $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  so konstruieren, dass die Funktionswerte und Ableitungen im Nullpunkt übereinstimmen, das heißt die Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  werden so gewählt, dass

$$p_n(0) = \sin(0), \quad p'_n(0) = \sin'(0), \quad \dots, \quad p_n^{(n)}(0) = \sin^{(n)}(0)$$

gilt. Abbildung 19 zeigt, wie gut Polynome geringen Grades die Sinusfunktion approximieren.

<sup>2</sup>In einigen Situationen wird dem Nullpolynom der Grad -1 zugeordnet, manchmal der Grad  $-\infty$ .



**Abbildung 19.** Approximation der Sinusfunktion mit Polynomen.

**Lemma 3.6** (Abspalten von Linearfaktoren). Hat ein Polynom  $f(x)$  vom Grad  $n \in \mathbb{N}$  eine Nullstelle  $\lambda \in \mathbb{R}$ , also  $f(\lambda) = 0$ , so gibt es ein Polynom  $g(x)$  vom Grad  $n - 1$  mit

$$f(x) = (x - \lambda)g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

*Beweis.* Sei  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  mit  $a_n \neq 0$ . Im Fall  $\lambda = 0$  folgt  $0 = f(0) = a_0$ , und

$$f(x) = x(a_1 + \dots + a_nx^{n-1}) = xg(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Sei nun  $f(\lambda) = 0$  für irgendein  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Betrachte dann

$$\tilde{f}(x) = f(x + \lambda) = a_0 + a_1(x + \lambda) + \dots + a_n(x + \lambda)^n.$$

Durch Auflösen der Klammern und Ordnen nach Potenzen von  $x$  sehen wir, dass  $\tilde{f}(x)$  Polynom vom Grad  $n$  ist mit Leitkoeffizient  $a_n$ . Aber  $\tilde{f}(0) = f(\lambda) = 0$ , und wie gezeigt gibt es ein Polynom  $\tilde{g}$  vom Grad  $n - 1$  mit  $\tilde{f}(x) = x\tilde{g}(x)$ , beziehungsweise

$$f(x) = \tilde{f}(x - \lambda) = (x - \lambda)\tilde{g}(x - \lambda) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Nun ist  $\tilde{g}(x - \lambda)$  ein Polynom vom Grad  $n - 1$ , indem wir wieder Ausmultiplizieren und Umordnen. Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

**Lemma 3.7** (Zahl der Nullstellen). Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Polynom vom Grad  $n \in \mathbb{N}$ . Dann hat  $f$  höchstens  $n$  verschiedene Nullstellen.

*Beweis.* Wir führen Induktion über  $n \in \mathbb{N}_0$ . Für  $n = 0$  ist  $f(x) = a_0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , wobei  $a_0 \neq 0$  (nachdem  $f$  ja nicht das Nullpolynom ist), also hat  $f$  keine Nullstelle. Ist  $f$  Polynom vom Grad  $n \in \mathbb{N}$ , so hat entweder  $f$  keine Nullstelle oder es gilt nach Lemma 3.6  $f(x) = (x - \lambda)g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , mit einem Polynom  $g$  vom Grad  $n - 1$ . Nach Induktion hat  $g$  höchstens  $n - 1$  Nullstellen, also  $f$  höchstens  $n$  Nullstellen.  $\square$

**Lemma 3.8** (Koeffizientenvergleich). Seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Polynome vom Grad  $m$  bzw.  $n$ , das heißt es gilt mit  $a_m, b_n \neq 0$

$$f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Sind  $f(x)$  und  $g(x)$  an mehr als  $\max(m, n)$  Stellen gleich, so ist  $m = n$  und  $a_i = b_i$  für  $i = 0, \dots, n$ .

*Beweis.* Ist  $m \neq n$  oder  $a_i \neq b_i$  für ein  $i$ , so ist  $f - g$  Polynom vom Grad höchstens  $\max(m, n)$ , und hat nach Lemma 3.7 höchstens  $\max(m, n)$  Nullstellen.  $\square$

Die Aussage zum Koeffizientenvergleich impliziert, dass beispielsweise zwei quadratische Polynome, die in mehr als zwei Punkten übereinstimmen, schon in allen Punkten übereinstimmen müssen. Die Graphen von zwei quadratischen Polynomen, die nicht gleich sind, können sich also höchstens in zwei Punkten schneiden.

All das hilft uns nicht weiter, wenn ein Polynom einfach keine Nullstellen hat, zum Beispiel  $f(x) = x^2 + 1$ . Um die Sache wirklich zu verstehen, müssen wir ins Komplexe gehen. Ein komplexes Polynom vom Grad  $n$  hat die Form

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n \quad \text{wobei } a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0.$$

Das Abspalten von Linearfaktoren und der Koeffizientenvergleich gelten in  $\mathbb{C}$  ganz analog, weil nur die gemeinsamen Rechenregeln benutzt wurden. Insbesondere hat auch ein komplexes Polynom höchstens  $n$  Nullstellen. Im Unterschied zum Reellen gilt aber der

**Satz 3.9** (Fundamentalsatz der Algebra). Jedes komplexe Polynom vom Grad  $n \geq 1$  hat mindestens eine Nullstelle  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Bemerkung 3.10.** Der Fundamentalsatz der Algebra ist von Gauß in seiner Doktorarbeit (Helmstedt 1799) bewiesen worden. Trotz des Namens (Algebra) erfordert der Beweis Methoden der zweidimensionalen Analysis oder Topologie. Für Gleichungen fünften oder höheren Grades führen algebraische Auflösungsverfahren nämlich nicht zum Ziel, wie der norwegische Mathematiker Niels Henrik Abel 1825 erkannte.

Es ist offenbar möglich, dass sich ein Linearfaktor mehrfach von einem Polynom  $f(z)$  abspalten lässt. Wir nennen  $\lambda$  eine Nullstelle der Vielfachheit  $k \in \mathbb{N}$ , wenn  $f(z) = (z - \lambda)^k g(z)$  für ein Polynom  $g(z)$  mit  $g(\lambda) \neq 0$ .

**Folgerung 3.11** (Polynomfaktorisierung). Ein Polynom  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  vom Grad  $n \geq 1$  hat eine Zerlegung

$$f(z) = a_n \prod_{k=1}^K (z - \lambda_k)^{n_k} \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Dabei sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_K \in \mathbb{C}$  die Nullstellen mit den zugehörigen Vielfachheiten  $n_k \in \mathbb{N}$ , wobei  $n = n_1 + \dots + n_K$ , und  $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist der Leitkoeffizient von  $f(z)$ .

*Beweis.* Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat  $f(z)$  eine Nullstelle  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ . Durch Abspalten folgt  $f(z) = (z - \lambda_1)f_1(z)$ , wobei  $f_1(z)$  komplexes Polynom vom Grad  $n-1$  ist. Nun hat  $f_1(z)$  wieder eine Nullstelle  $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ , und so weiter. Der Prozess stoppt genau nach  $n$  Schritten, denn dann hat das Restpolynom den Grad Null, ist also konstant.  $\square$

**Beispiel 3.12.** Als Beispiel für die Darstellung eines komplexen Polynoms mit Linearfaktoren betrachten wir

$$f(z) = 2z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 2.$$

Es hat die Nullstelle  $\mathfrak{l}_1 = 1$  mit Vielfachheit  $n_1 = 2$  sowie die komplex konjugierten Nullstellen  $\mathfrak{l}_2 = i$  und  $\mathfrak{l}_3 = -i$  mit Vielfachheiten  $n_2 = n_3 = 1$ . Damit erhalten wir

$$f(z) = 2(z-1)^2(z-i)(z+i) = 2 \prod_{k=1}^3 (z - \mathfrak{l}_k)^{n_k}.$$

Für das reelle Polynom

$$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 2$$

erhält man über den Zwischenschritt ins Komplexe damit die Faktorisierung in lineare und quadratische Faktoren

$$f(x) = 2(x-1)^2(x^2+1).$$

Wir können nun auf  $\mathbb{R}$  zurückkommen. Jedes reelle Polynom  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , das heißt  $a_i \in \mathbb{R}$ , kann nämlich als komplexes Polynom aufgefasst werden, indem wir für  $x$  auch komplexe Zahlen  $z$  einsetzen. Damit wird die reelle Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zu einer komplexen Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  fortgesetzt. Das Endergebnis lautet so.

**Folgerung 3.13** (Polynomfaktorisierung in  $\mathbb{R}$ ). Jedes reelle Polynom  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vom Grad  $n \geq 1$  zerfällt in lineare und quadratische Faktoren. Genauer gilt

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^I (x - \lambda_i)^{\ell_i} \prod_{j=1}^J (x^2 - 2\alpha_j x + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{m_j} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dabei sind die  $\lambda_i$  die Nullstellen in  $\mathbb{R}$  und die  $\alpha_j \pm i\beta_j$  die Nullstellen in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , mit jeweiligen Vielfachheiten  $\ell_i$  bzw.  $m_j$ , also  $n = \ell_1 + \dots + \ell_I + 2(m_1 + \dots + m_J)$ .

*Beweis.* Wir können annehmen, dass  $f(x)$  keine reellen Nullstellen hat, sonst spalten wir die zugehörigen Linearfaktoren ab; diese liefern dann das erste Produkt. Weiter gilt: ist  $\lambda = \alpha + i\beta$  eine nicht-reelle Nullstelle, so ist auch  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  eine Nullstelle. Wegen  $a_i \in \mathbb{R}$  gilt nämlich

$$0 = \overline{f(\lambda)} = \overline{a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n} = a_0 + a_1\bar{\lambda} + \dots + a_n\bar{\lambda}^n = f(\bar{\lambda}).$$

Wir können nun in  $\mathbb{C}$  nacheinander  $z - \lambda$  und  $z - \bar{\lambda}$  als Faktoren abspalten, und erhalten ein Polynom  $g(z)$  vom Grad  $n - 2$  mit

$$f(z) = (z - \lambda)(z - \bar{\lambda})g(z) = (z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2)g(z).$$

Jetzt machen wir mit dem Restpolynom  $g(z)$  weiter und erhalten schließlich die gewünschte Zerlegung in quadratische Faktoren. Ein Detail fehlt: es ist zu begründen, dass  $g(z)$  wieder reelle Koeffizienten hat! Sei

$$g(z) = b_0 + b_1z + \dots + b_{n-2}z^{n-2}, \quad \text{mit zunächst } b_i \in \mathbb{C}.$$

Wir setzen in  $f(z)$  nun  $x \in \mathbb{R}$  als Variable ein und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Im} f(x) \quad (\text{da } f \text{ reelle Koeffizienten hat}) \\ &= \operatorname{Im} \left( (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2) g(x) \right) \\ &= (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2) \operatorname{Im} g(x) \\ &= (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2) \sum_{i=0}^{n-2} (\operatorname{Im} b_i) x^i. \end{aligned}$$

Die linke Klammer ist für  $x \in \mathbb{R}$  niemals Null. Also verschwindet die Summe für alle  $x \in \mathbb{R}$ , und es folgt  $\operatorname{Im} b_i = 0$  für alle  $i = 0, \dots, n - 2$  aus Lemma 3.7.  $\square$

Die Existenz einer Nullstelle ist in  $\mathbb{C}$  durch Satz 3.9 gesichert. Dieser Satz liefert aber keinen Anhaltspunkt, wie die Nullstellen tatsächlich berechnet werden sollen. Mit Substitutionen und Ziehen von  $k$ -ten Wurzeln kommt man ab Grad  $n \geq 5$  im Allgemeinen nicht zum Ziel (Abel 1825). Deshalb spielen numerische Lösungsverfahren eine große Rolle, durch die die Nullstelle approximativ bestimmt wird. Darauf kommen wir zurück, wenn wir die Analysis weiter entwickelt haben.

Eine rationale Funktion  $f$  ist definiert als Quotient zweier Polynome. Seien genauer

$p(x)$  und  $q(x)$  reelle Polynome vom Grad  $m$  bzw.  $n$ , und  $N_q$  sei die endliche Menge der Nullstellen von  $q$ . Dann ist

$$f : \mathbb{R} \setminus N_q \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Es ist praktisch, rationale Funktionen folgendermaßen zu zerlegen.

**Lemma 3.14.** Seien  $p(x) = a_m x^m + \dots + a_0$  und  $q(x) = b_n x^n + \dots + b_0$  Polynome mit  $m \geq n$ . Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome  $g(x)$  und  $r(x)$  mit  $r(x)$  vom Grad  $k < n$ , eventuell  $r(x)$  das Nullpolynom, mit

$$f(x) = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus N_q.$$

*Beweis.* Durch Division mit Rest für Polynome. Wir schreiben

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} + \frac{p_1(x)}{q(x)} \quad \text{mit } p_1(x) = p(x) - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} q(x).$$

Es gilt  $\deg p_1 < m$ . Im Fall  $m = n$  gilt die Behauptung also mit  $r(x) = p_1(x)$ . Für  $m > n$  können wir per Induktion annehmen, dass

$$\frac{p_1(x)}{q(x)} = g_1(x) + \frac{r_1(x)}{q(x)} \quad \text{mit } \deg r_1 < n,$$

eventuell  $r_1 \equiv 0$ . Es folgt die gewünschte Zerlegung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} + g_1(x) + \frac{r_1(x)}{q(x)}.$$

Zur Eindeutigkeit: Angenommen die Zerlegung gilt mit  $g_1, r_1$  und  $g_2, r_2$ . Dann folgt durch Subtraktion und Multiplikation mit  $q(x)$

$$(g_1(x) - g_2(x))q(x) + r_1(x) - r_2(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus N_q.$$

Wäre  $g_1 - g_2$  nicht Null, so ist die linke Seite ein Polynom vom Grad mindestens  $n$ , aber mit unendlich vielen Nullstellen. Das kann nicht sein wegen Lemma 3.7. Analog sehen wir, dass die Polynome  $r_{1,2}$  gleich sind.  $\square$

**Beispiel 3.15.** Hier ein Beispiel für die Polynomdivision:

$$\begin{array}{rcl} x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 : x^2 + 2x & = & x^2 \quad \text{Rest } -3x^3 + x^2 - x + 1 \\ -3x^3 + x^2 - x + 1 : x^2 + 2x & = & -3x \quad \text{Rest } 7x^2 - x + 1 \\ 7x^2 - x + 1 : x^2 + 2x & = & 7 \quad \text{Rest } -15x + 1 \end{array}$$

Also haben wir hier

$$\frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^2 + 2x} = x^2 - 3x + 7 - \frac{15x - 1}{x^2 + 2x}.$$

Die Ausnahmestellen  $\lambda \in N_q$  in der Definition von  $f(x)$  sind natürlich von Interesse. Sei  $\lambda$  eine  $m$ -fache Nullstelle von  $q(x)$  und eine  $k$ -fache Nullstelle von  $p(x)$ . Im Fall  $p(x) \neq 0$

ist  $k = 0$ . Es gibt nun Polynome  $p_1(x), q_1(x)$  mit  $p_1(\lambda), q_1(\lambda) \neq 0$  und

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x - \lambda)^k p_1(x)}{(x - \lambda)^m q_1(x)} = (x - \lambda)^{k-m} \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus N_q.$$

Abhängig von dem Exponenten  $k - m$  sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- (1) Ist  $k \geq m$ , so kann  $f(x)$  auch im Punkt  $\lambda$  sinnvoll definiert werden, und zwar durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{p_1(x)}{q_1(x)} & \text{falls } k = m, \\ 0 & \text{falls } k > m. \end{cases}$$

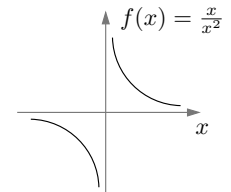
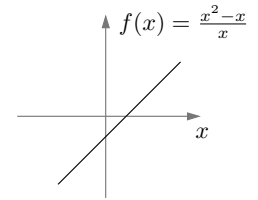
Wir nennen  $\lambda$  eine *hebbare Singularität* von  $f(x)$ .

- (2) Ist  $k < m$ , so nennen wir  $\lambda$  eine *Polstelle* von  $f(x)$ . Das Verhalten von  $|f(x)|$  in der Polstelle wird im wesentlichen durch den Faktor  $|x - \lambda|^{k-m}$  bestimmt, der gegen Unendlich geht.

**Beispiel 3.16.** Beispiele rationaler Funktionen mit einer hebbaren Singularität beziehungsweise einer Polstelle sind die Funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x} = x - 1, \quad f(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Die Bezeichnungen werden unmittelbar aus den Eigenschaften der Graphen verständlich, siehe Abbildung 20.



**Abbildung 20.** Graphen rationaler Funktionen mit hebbarer Singularität (oben) und Polstelle (unten).

### 3.3 Kreisfunktionen

Die Kreisfunktionen (oder trigonometrische Funktionen, Winkelfunktionen) sind bereits mehrfach aufgetreten. Sie sind wichtig z.B. in der Beschreibung von Schwingungen.

Wir definieren sie zunächst anhand des rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenuse  $c$ , Gegenkathete  $a$  und Ankathete  $b$  für Winkel  $\alpha$  zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  (also  $0$  und  $\pi/2$  im Bogenmaß).

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} \\ \tan \alpha &= \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha &= \frac{b}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

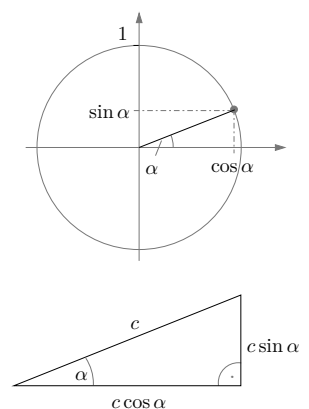
Um Eigenschaften der Kreisfunktionen zu untersuchen, orientiert man sich am besten an deren geometrischen Bedeutungen im Einheitskreis. In einem rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse  $c$  werden die Größen  $\cos \alpha$  und  $\sin \alpha$  entsprechend gestreckt, siehe Abbildung 21. Das Bogenmaß eines Winkels  $\alpha$  ist die Länge desjenigen Bogens, der dem Winkel  $\alpha$  am Einheitskreis entspricht.

Die folgenden Eigenschaften ergeben sich unmittelbar:

Periodizität:

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + n \cdot 2\pi) \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \alpha = \cos(\alpha + n \cdot 2\pi) \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$



**Abbildung 21.** Geometrische Bedeutungen von Kreisfunktionen im Einheitskreis.

Symmetrie:

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha & (\text{ungerade}) \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha & (\text{gerade}).\end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen Sinus und Kosinus:

$$\cos \alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$$

Für die Tangens- und Kotangensfunktion können wir folgende Eigenschaften erkennen:

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & \text{für } \alpha \notin \{(2\mathbb{Z} + 1)\pi/2\} \\ \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} & \text{für } \alpha \notin \{\mathbb{Z}\pi\}.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\tan(-\alpha) &= -\tan(\alpha) & (\text{ungerade}) \\ \cot(-\alpha) &= -\cot(\alpha) & (\text{ungerade}) \\ \tan(\alpha + \pi) &= \tan \alpha & \text{Periode } \pi \\ \cot(\alpha + \pi) &= \cot \alpha & \text{Periode } \pi\end{aligned}$$

Die folgenden Rechenregeln für trigonometrische Funktionen sind wichtig:

$$\begin{aligned}(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \sin(\alpha_1 \pm \alpha_2) &= \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \pm \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_2) \\ \cos(\alpha_1 \pm \alpha_2) &= \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \mp \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2)\end{aligned}$$

Wir kommen an diesem Punkt auf die Polardarstellung komplexer Zahlen zurück. Jeder Zahl  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ , hat eine Darstellung

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{mit } r > 0, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Wir führen folgende Abkürzung ein:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (\text{Eulersche Formel}).$$

Was soll diese Notation? Die aus der Schule bekannte Exponentialfunktion erfüllt folgendes Funktionalgesetz, das in der Schule im Rahmen der Potenzrechnung hergeleitet wird:

$$e^{\lambda(x+y)} = e^{\lambda x + \lambda y} = e^{\lambda x} e^{\lambda y} \quad \text{wobei } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Genau dieses Gesetz gilt auch für  $e^{ix}$ , nur dass  $\lambda \in \mathbb{R}$  durch die komplexe Zahl  $i \in \mathbb{C}$  ersetzt

ist, und zwar folgt es aus den Additionstheoremen:

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i \sin(x+y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= e^{ix} e^{iy}. \end{aligned}$$

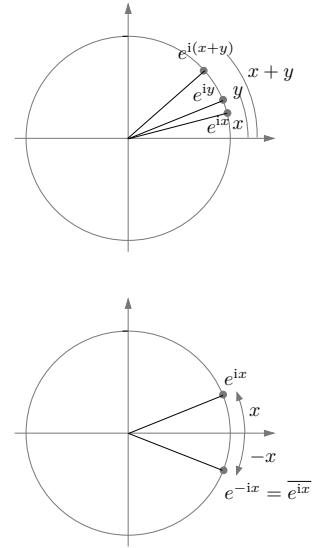
Der Nachweis trigonometrischer Identitäten wie beispielsweise der Additionstheoreme erfolgt am einfachsten mit der Euler-Formel und dem Zusammen- und Auseinanderziehen von Exponenten, das heißt mit den beiden Formeln

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}.$$

Die zweite Formel sowie die Identität  $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$  sind in Abb. 22 geometrisch illustriert.

Umgekehrt lassen sich die Additionstheoreme aus der Regel  $e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$  mühelos herleiten. Damit ist die als Notation eingeführte Eulersche Formel konsistent. Die Polardarstellung hat die endgültige Form

$$z = r e^{i\varphi} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$



**Abbildung 22.** Geometrische Illustration von  $e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$  und  $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$ .

**Satz 3.17** (de Moivre). Für  $x, y \in \mathbb{R}$  gelten die Formeln

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= e^{ix} e^{iy} \quad (\text{Funktionalgleichung}) \\ \overline{e^{ix}} &= e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}} \\ e^{inx} &= (e^{ix})^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Die Funktionalgleichung wurde oben hergeleitet. Die zweite Gleichung gilt wegen

$$\overline{e^{ix}} = \overline{\cos x + i \sin x} = \cos x - i \sin x = e^{-ix} \quad \text{und} \quad e^{ix} e^{-ix} = e^{i0} = 1.$$

Die dritte Formel ist klar für  $n = 1$ , und per Induktion ergibt sich

$$e^{i(n+1)x} = e^{inx+ix} = e^{inx} e^{ix} = (e^{ix})^n e^{ix} = (e^{ix})^{n+1}.$$

□

Zur Berechnung des Winkels zwischen Vektoren sowie der Polardarstellung komplexer Zahlen wurde bereits die Umkehrfunktion des Kosinus gebraucht. Dazu müssen wir ein Intervall auswählen, auf dem der Kosinus injektiv ist, üblicherweise

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1].$$

Die Funktion  $\cos$  ist auf  $[0, \pi]$  streng monoton fallend und damit injektiv (wir erinnern uns, aber hier nochmal tatsächlich nachgerechnet):

$$0 \leq x < y \leq \pi \quad \Rightarrow \quad \cos x > \cos y.$$

Das ist anschaulich am Einheitskreis klar, rigoros rechnen wir

$$e^{iy} - e^{ix} = e^{i \frac{y+x}{2}} \left( e^{i \frac{y-x}{2}} - e^{-i \frac{y-x}{2}} \right) = 2i e^{i \frac{y+x}{2}} \sin \frac{y-x}{2}.$$



Bilden wir die Realteile, so folgt wegen  $\sin t > 0$  für  $t \in (0, \pi)$

$$\cos y - \cos x = -2 \sin \underbrace{\frac{y+x}{2}}_{\in (0, \pi)} \sin \underbrace{\frac{y-x}{2}}_{\in (0, \pi)} < 0.$$

Für Bijektivität benötigen wir nun noch die Surjektivität, von  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ . Das können wir erst im nächsten Abschnitt vernünftig behandeln – nehmen wir also die Surjektivität erst einmal einfach als korrekt an. Wir definieren dann die Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \cos(\arccos t) = t.$$

Natürlich gilt auch  $\arccos(\cos x) = x$  für  $x \in [0, \pi]$ . Damit können wir die Polarkoordinaten von  $z = x + iy \neq 0$  angeben:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{r} & \text{falls } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{r} & \text{falls } y < 0. \end{cases}$$

Die trigonometrischen Funktionen sind von Bedeutung für die Beschreibung von Schwingungen und periodischen Prozessen.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt periodisch mit Periode  $T > 0$ , falls

$$f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Ist  $T > 0$  Periode von  $f$ , so auch alle Zahlen  $kT$  mit  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Wenn man von *der* Periode einer Funktion spricht, so meint man die kleinstmögliche Periode. Eine harmonische Schwingung, abhängig von der Zeit  $t > 0$ , ist von der Form

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = A \cos(\omega t + \alpha).$$

Die Schwingungsdauer, also die Periode der Schwingung, ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Weitere Größen sind die Frequenz  $\nu = \frac{1}{T}$ , die Amplitude  $A > 0$  und der Phasenwinkel  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Die Zahl  $\omega$  bezeichnet man auch als Kreisfrequenz.

Die Überlagerung (Superposition) zweier Schwingungen  $x_1(t), x_2(t)$  ist durch  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  gegeben. Im Allgemeinen ist eine solche Überlagerung nicht periodisch. Ausnahme ist der Fall

$$\frac{T_2}{T_1} \in \mathbb{Q}, \text{ also } \frac{T_2}{T_1} = \frac{n_1}{n_2} \text{ mit } n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$

Dann haben die Funktionen die gemeinsame Periode  $n_1 T_1 = n_2 T_2$ . Für die Frequenzen folgt  $\nu_1/\nu_2 = n_1/n_2$  beziehungsweise  $\omega_1/\omega_2 = n_1/n_2$ .

**Satz 3.18.** Seien  $x_{1,2}(t)$  harmonische Schwingungen mit derselben Schwingungsdauer, also

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Dann ist  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  wieder eine harmonische Schwingung, genauer gilt

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{mit } A e^{i\alpha} = A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 e^{i\alpha_2}.$$

*Beweis.* Es ist praktisch, ins Komplexe zu gehen. Definiere

$$z_1(t) = A_1 e^{i(\omega t + \alpha_1)} \quad z_2(t) = A_2 e^{i(\omega t + \alpha_2)}$$

Wir berechnen

$$z_1(t) + z_2(t) = e^{i\omega t} (A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 e^{i\alpha_2}) = A e^{i\alpha} e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t + \alpha)}.$$

Durch Bilden des Realteils folgt

$$x_1(t) + x_2(t) = \operatorname{Re}(z_1(t) + z_2(t)) = A \cos(\omega t + \alpha).$$

Damit ist die Behauptung schon verifiziert.

□

## 4 Grenzwerte und Stetigkeit

### 4.1 Zahlenfolgen und Grenzwerte

Wir beginnen mit einer Problemstellung. Für viele reelle Funktionen  $f$  kann man nicht einfach eine Nullstelle finden, als Beispiele seien hier Polynome vom Grad  $\geq 5$  oder auch die Kosinusfunktion genannt. Aber hier ist eine Idee zur Annäherung an eine Nullstelle:

**Algorithmus 4.1.** • Angenommen, die Funktion  $f$  ist an einem Punkt  $a$  strikt negativ, also  $f(a) < 0$  und an einem zweiten Punkt  $b > a$  sei die Funktion strikt positiv, also  $f(b) > 0$ . Wir setzen nun  $a_0 = a$  und  $b_0 = b$ ,  $c_0 = \frac{b+a}{2}$  (nehmen also den Mittelpunkt).

- Ist  $f(c_0) \geq 0$  so setzen wir  $a_1 = a_0$  und  $b_1 = c_0$ . Gilt stattdessen  $f(c_0) < 0$ , so setzen wir  $a_1 = c_0$  und  $b_1 = b_0$ .
- Wir setzen  $c_1 = \frac{b_1+a_1}{2}$ .
- Ist  $f(c_1) \geq 0$ , so setzen wir  $a_2 = a_1$  und  $b_2 = c_1$ . Gilt stattdessen  $f(c_1) < 0$ , so setzen wir  $a_2 = c_1$  und  $b_2 = b_1$ .
- Wir setzen  $c_2 = \frac{b_2+a_2}{2}$ .
- usw. . .

Wie man an Abbildung 23 sieht, ist es naheliegend, dass die Mittelpunkte  $c_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  immer näher an die Nullstelle von  $f$  herankommen, in gewisser Weise also eine Lösung von  $f(x) = 0$  darstellen. Dieses Verfahren zum Finden von Nullstellen einer Funktion ist bekannt unter dem Namen Bisektionsverfahren.

Es stellen sich folgende Fragen:

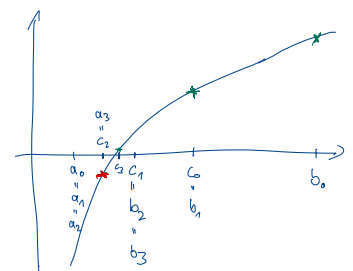
- (1) Wir haben (in jedem Schritt) benutzt, dass – falls gilt  $f(a) \leq 0$  und  $f(b) \geq 0$ , dann gibt es einen Punkt  $\xi \in [a, b]$  für den gilt  $f(\xi) = 0$ . Für welche Funktionen ist es eigentlich richtig?

Die Funktion  $f(x) = -1$  für  $x < 0$  und  $f(x) = +1$  für  $x \geq 0$  erfüllt offensichtlich  $f(-1) < 0$  und  $f(1) > 0$ , es gibt aber *keinen* Punkt  $\xi$  so dass  $f(\xi) = 0$ . Was muss also die Funktion  $f$  erfüllen?

- (2) In welchem Sinn sind die Zahlen (die Folge von Zahlen)  $c_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  eigentlich eine Lösung von  $f(x) = 0$ ? Im Allgemeinen wird kein  $c_n$  die Gleichung exakt lösen (das wäre schon großes Glück), aber für größere und größere  $n$  wird die Approximation der Nullstelle immer genauer.

**Bemerkung 4.2.** Falls wir feststellen, dass die Kosinusfunktion die Bedingung aus (1) erfüllt, haben wir natürlich auch unser altes Problem mit der Surjektivität von  $\cos: [0, \pi] \rightarrow [0, 1]$  gelöst.

Um das Ganze selbst zu versuchen, hier eine Implementierung des Bisektionsverfahrens in Python – wobei natürlich auch der Fall berücksichtigt wurde, dass  $f(a) \geq 0$  und  $f(b) \leq 0$  ist. Das geht natürlich genau so, man muss nur dafür sorgen, dass  $f(a_n)$  und  $f(b_n)$  immer unterschiedliche Vorzeichen haben (oder eines von beiden Null ist). Das ist nichts anderes als  $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ . Für ein numerisches Verfahren können wir natürlich auch nicht für alle Zeiten neue  $c_n$  berechnen, wir müssen irgendwann stoppen – das tun wir, wenn  $b_n - a_n < \epsilon$  ist, für eine gegebene gewünschte Genauigkeit  $\epsilon > 0$ .



**Abbildung 23.** Das Bisektionsverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle.

```

1 from math import *
2 # Nullstelle eines Polynoms fuenften Grades
3 def f(x):
4     return 0.2*x**5 - x**4 + 2.0*x**3 + 0.5*x**2 - 0.1
5
6 a = -1.0
7 b = +1.0
8
9 # Alternativ zum Loesen von cos(x) = 0.3
10 # Das ist natuerlich identisch mit dem
11 # Finden einer Nullstelle von f(x) = cos(x)-0.3
12 #def f(x):
13 #    return cos(x)-0.3
14 #a = 0.0
15 #b = pi;
16
17 if f(a)*f(b) <= 0:
18     print("f(a) und f(b) haben unterschiedliches "\
19           "Vorzeichen, wir koennen starten.")
20 else:
21     print("f(a) und f(b) haben das gleiche Vorzeichen, "\
22           "das wird nicht funktionieren.")
23     exit(1)
24
25 epsilon = 1e-10
26 while b-a > epsilon:
27     c = (b+a)/2.0
28     if f(a)*f(c) <= 0:
29         b=c
30     else:
31         a=c
32
33 c = (b+a)/2.0
34 print("Die gesuchte Nullstelle ist ungefaehr xi = "+str(c))
35 print("Es gilt f(xi) = "+str(f(c)))

```

Abbildung 24. Python-Programm zur approximativen Bestimmung einer Nullstelle.

Nun zur mathematischen Behandlung der vorangegangenen Überlegungen. Eine Folge reeller Zahlen  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ist streng genommen eine Abbildung von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{R}$ . Jedem  $n \in \mathbb{N}$  wird das  $n$ -te Folgenglied  $a_n \in \mathbb{R}$  zugeordnet. Um eine Folge zu definieren, kann man entweder die ersten soundsoviel Folgenglieder angeben, oder ein Bildungsgesetz oder eine Rekursionsvorschrift. Zum Beispiel für die Folge der Quadratzahlen:

*erste Folgenglieder:*  $a_n = 1, 4, 9, 16, \dots$

*Bildungsgesetz:*  $a_n = n^2$  für  $n \in \mathbb{N}$

*Rekursionsvorschrift:*  $a_{n+1} = (\sqrt{a_n} + 1)^2$  und  $a_1 = 1$ .

Bei manchen Folgen ist es sinnvoll, die Nummerierung bei  $n = 0$  zu beginnen statt bei  $n = 1$ . Weitere Beispiele von Folgen sind:

- |     |                                   |   |
|-----|-----------------------------------|---|
| (1) | $a_n = a$                         | konstante Folge $a, a, a, \dots$                    |
| (2) | $a_n = n$                         | Folge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$       |
| (3) | $a_n = a_0 + nd, n = 0, 1, \dots$ | arithmetische Folge $a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, \dots$ |
| (4) | $a_n = a_0 q^n, n = 0, 1, \dots$  | geometrische Folge $a_0, a_0 q, a_0 q^2, \dots$     |
| (5) | $a_n = n a_{n-1}, a_0 = 1$        | $1, 1, 2, 6, 24, \dots$ bzw. $a_n = n!$             |

**Definition 4.3** (Konvergenz). Die Folge  $a_n$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$ , falls gilt:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $n > N$  gilt:  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

$a$  heißt Grenzwert der Folge. Wir schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ . Die Folge  $a_n$  heißt konvergent, wenn sie gegen irgendein  $a \in \mathbb{R}$  konvergiert. Divergent bedeutet nicht konvergent.

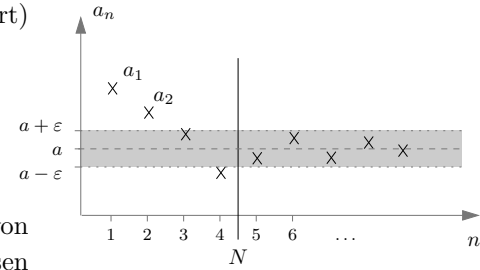
Die Zahl  $\varepsilon > 0$  gibt vor, wie groß der Fehler zwischen  $a_n$  und  $a$  höchstens sein soll. In der Regel werden die ersten Folgenglieder das nicht leisten. Es soll aber – so die Definition der Konvergenz – eine Schranke  $N$  geben, so dass für alle  $n > N$  die verlangte Genauigkeit erfüllt wird. Die Zahl  $N$  lässt sich als Maß des erforderlichen Aufwands interpretieren.

Für ein kleineres  $\varepsilon > 0$  müssen wir  $N$  typischerweise vergrößern, um die  $\varepsilon$ -Genauigkeit zu erreichen, das heißt  $N$  hängt von  $\varepsilon > 0$  ab. Mit den Quantoren  $\forall$  (für alle),  $\exists$  (existiert) und  $\Rightarrow$  (daraus folgt) lässt sich die Definition der Konvergenz auch wie folgt fassen:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} : \quad (n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Diese Bedingung ist in Abbildung 25 illustriert.

Ein konkretes Beispiel ist die schrittweise Konstruktion von  $\sqrt{2}$  durch Hinzufügen von Nachkommastellen: um eine Genauigkeit von  $\varepsilon = 10^{-\ell}$ ,  $\ell \geq 0$  zu garantieren, müssen mindestens  $\ell$  Nachkommastellen konstruiert werden.



**Abbildung 25.** Illustration der Konvergenz einer Folge.

**Beispiel 4.4** (Harmonische Folge). Die Folge  $a_n = 1/n$  konvergiert gegen  $a = 0$ . Denn zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $N = 1/\varepsilon$ . Es folgt für alle  $n > N$

$$|a_n - a| = |1/n - 0| = 1/n < 1/N = \varepsilon.$$

**Beispiel 4.5** (Konstante Folge). Ist  $a_n = a$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Denn für  $\varepsilon > 0$  gilt  $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$  für alle  $n > 0$ , also können wir  $N = 0$  wählen.

**Beispiel 4.6** (Geometrische Folge). Sei  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q| < 1$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ . Um das zu zeigen, können wir  $q \neq 0$  voraussetzen und haben dann  $1/|q| > 1$ , also gilt  $1/|q| = 1 + x$  für ein  $x > 0$ . Es folgt mit der Bernoulli-Ungleichung, Satz 2.18,

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{nx} < \varepsilon$$

für alle  $n > 1/(\varepsilon x)$ . Wir können also  $N = 1/(\varepsilon x)$  wählen.

Stehen die Rechenregeln des Logarithmus  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  zur Verfügung, also dass  $\log(x^n) = n \log(x)$ , dass  $\log(x) < 0$  für  $x < 1$  gilt und dass der Logarithmus monoton wachsend ist, so lässt sich die Konvergenz der Folge  $a_n = q^n$  mit  $-1 < q < 1$  gegen  $a = 0$  etwas leichter nachweisen. Für  $\varepsilon > 0$  gilt

$$|q|^n < \varepsilon \iff n \log(|q|) < \log(\varepsilon) \iff n > \frac{\log(\varepsilon)}{\log(|q|)}.$$

Wählt man also  $N = \frac{\log(\varepsilon)}{\log(|q|)}$ , so gilt  $|a_n - a| = |q|^n < \varepsilon$  für alle  $n > N$  und das Konvergenzkriterium ist erfüllt. Die folgende Tabelle illustriert am Beispiel von  $a = 2$  sowie  $a = 1/2$ , dass  $a^{1/n} \rightarrow 1$  gilt.

$a$	$a^{1/2}$	$a^{1/3}$	$a^{1/4}$	$a^{1/5}$	$a^{1/6}$	$a^{1/7}$	$a^{1/8}$
2	1.4142	1.2599	1.1892	1.1487	1.1225	1.1041	1.0905
1/2	0.7071	0.7937	0.8409	0.8706	0.8909	0.9057	0.9170

**Beispiel 4.7** (Plusminusfolge). Die Folge  $a_n = (-1)^n$  ist nicht konvergent. Denn es gilt für jedes  $a \in \mathbb{R}$

$$2 = |a_n - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a_{n+1} - a| \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die rechte Seite müsste aber für große  $n$  klein sein.

Bei der Wahl von  $N$  kommt es nicht drauf an, dass die Schranke kleinstmöglich ist. Dies ist anders, wenn ein Grenzwert numerisch berechnet werden soll, weil dann die Geschwindigkeit der Konvergenz ein Thema ist. Für den Nachweis der Konvergenz an sich reicht es völlig, irgendeine Schranke zu finden. Ist  $N < N'$  und gilt  $|a_n - a| < \varepsilon$  für  $n > N$ , so erst recht für  $n > N'$ . Wir können also  $N$  stets vergrößern. Zum Beispiel können wir statt  $N$  den nächsten Folgenindex  $n_0 \in (N, N+1]$  wählen.

Der Grenzwert wird anschaulicher, indem wir folgende Teilmengen von  $\mathbb{R}$  einführen.

**Definition 4.8** ( $\varepsilon$ -Umgebung). Die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a \in \mathbb{R}$  ist die Menge

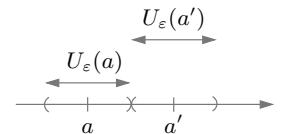
$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}.$$

Eine Folge  $a_n$  konvergiert genau dann gegen  $a \in \mathbb{R}$ , wenn die Folgenglieder ab einer gewissen Nummer in der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  liegen, egal wie klein  $\varepsilon > 0$  gewählt ist.

Manchmal ist diese Beschreibung der Konvergenz praktischer. Zum Beispiel verwenden wir sie, um die Eindeutigkeit des Grenzwerts zu zeigen.

**Satz 4.9** (Eindeutigkeit des Grenzwerts). Ist die Folge  $a_n$  konvergent, so ist ihr Grenzwert eindeutig bestimmt.

*Beweisidee:* Angenommen die Folge  $a_n$  hat zwei Grenzwerte  $a \neq a'$ . Wir wählen  $\varepsilon = |a - a'|/2 > 0$ . Dann sollten ab einem hinreichend großen  $n$  alle Folgenglieder sowohl in dem  $\varepsilon$ -Intervall um  $a$  als auch in dem  $\varepsilon$ -Intervall um  $a'$  sein – deren Schnittmenge ist aber leer, siehe Abbildung 26.



**Abbildung 26.** Disjunkte  $\varepsilon$ -Umgebungen um zwei verschiedene Zahlen  $a$  und  $a'$ .

**Definition 4.10.** Eine reelle Folge  $a_n$  heißt beschränkt, wenn es ein  $K \geq 0$  gibt mit

$$|a_n| \leq K \quad \text{für alle } n.$$

Genauer kann noch wie folgt differenziert werden:

$$a_n \text{ nach unten beschränkt} \Leftrightarrow \exists K_1 \in \mathbb{R} \text{ mit } a_n \geq K_1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$a_n \text{ nach oben beschränkt} \Leftrightarrow \exists K_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } a_n \leq K_2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Die Folge  $a_n$  ist genau dann beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist. Denn aus  $|a_n| \leq K$  folgt  $-K \leq a_n \leq K$ . Umgekehrt folgt aus  $K_1 \leq a_n \leq K_2$ , dass

$$a_n \leq K_2 \leq |K_2| \quad \text{und} \quad -a_n \leq -K_1 \leq |K_1|,$$

also  $|a_n| \leq \max(|K_1|, |K_2|)$ .

**Beispiel 4.11.** Die Folge  $a_n = n$  ist nach unten beschränkt, denn es ist zum Beispiel  $a_n \geq 0$  für alle  $n$ . Sie ist aber nicht nach oben beschränkt.

Überlegen Sie, welche der obigen Folgen (nach oben bzw. unten) beschränkt sind!

**Satz 4.12** (konvergent  $\Rightarrow$  beschränkt). Konvergente Folgen sind beschränkt.

*Beweis.* Sei  $a_n \rightarrow a$  mit  $a \in \mathbb{R}$ . Wähle  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < 1$  für alle  $n > N$ . Dann folgt aus der Dreiecksungleichung  $|a_n| \leq |a| + 1$  für  $n > N$ , also

$$|a_n| \leq \max(|a_1|, \dots, |a_N|, |a| + 1) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

□

Nächstes Ziel:

**Satz 4.13** (Rechenregeln für Grenzwerte). Es gelte  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$  mit  $n \rightarrow \infty$ .

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b$  für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ .
- c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = a/b$ , falls  $b \neq 0$ .

*Beweis.* Wir beginnen mit dem Beweis von b). Nach Satz 4.12 gibt es ein  $K > 0$  mit  $|a_n| \leq K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und außerdem mit  $|b| \leq K$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \\ &\leq K(|a_n - a| + |b_n - b|). \end{aligned}$$

Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es nun ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \varepsilon/(2K)$  sowie  $|b_n - b| < \varepsilon/(2K)$  für  $n > N$ . Also folgt für  $n > N$

$$|a_n b_n - ab| < K \left( \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K} \right) = \varepsilon.$$

Für a) reicht es wegen b), den Fall  $\lambda = \mu = 1$  zu betrachten. Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \varepsilon/2$  und  $|b_n - b| < \varepsilon/2$  für  $n > N$ . Es folgt für  $n > N$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Für c) behandeln wir erst den Fall  $a_n = b = 1$ . Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$|b_n - 1| \leq \frac{1}{2} \min(\varepsilon, 1) \quad \text{für } n > N.$$

Dann folgt  $|b_n| = |1 - (1 - b_n)| \geq 1 - |1 - b_n| \geq \frac{1}{2}$ , und weiter

$$\left| \frac{1}{b_n} - 1 \right| = \frac{|1 - b_n|}{|b_n|} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Für  $a_n$  und  $b \neq 0$  beliebig schließen wir mit  $b'_n = b_n/b \rightarrow 1$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{b} \cdot \frac{1}{b'_n} \rightarrow \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}.$$

□

Hier eine Anwendung der Rechenregeln für Grenzwerte.

**Beispiel 4.14** (geometrische Reihe). Für  $-1 < q < 1$  betrachten wir die Folge

$$a_n = 1 + q + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k.$$

Dann ergibt sich aus Beispiel 2.20, Beispiel 4.6 und Satz 4.13

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Wir schreiben hierfür auch  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1/(1-q)$ . Folgen, deren Folgenglieder Summen sind, heißen Reihen. Sie spielen eine große Rolle in der Analysis und werden in Kürze ausführlicher untersucht.

**Satz 4.15** (Grenzwerte und Ungleichungen). Seien  $a_n$  und  $b_n$  konvergent, mit Grenzwerten  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Dann gelten folgende Aussagen:

- a) Ist  $a_n \leq b_n$  für alle  $n$ , so folgt  $a \leq b$ .
- b) Gilt  $c \leq a_n \leq d$  für alle  $n$  mit  $c, d \in \mathbb{R}$ , so folgt  $c \leq a \leq d$ .
- c) Ist  $a_n \leq c_n \leq b_n$  und gilt  $a = b$ , so konvergiert auch die Folge  $c_n$  gegen  $a = b$ .

*Beweis.* Da  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ , gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{R}$  mit  $a_n > a - \varepsilon$  und  $b_n < b + \varepsilon$  für alle  $n > N$ . In a) folgt

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n < b + \varepsilon \quad \text{für } n > N,$$

also  $a < b + 2\varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$ , das heißt  $a \leq b$ . Aussage b) folgt unmittelbar aus a), indem wir  $c, d$  als konstante Folgen auffassen. Unter den Voraussetzungen in c) gilt für  $n > N$  die Ungleichungskette

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < b + \varepsilon = a + \varepsilon,$$

also  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$  nach Definition des Grenzwerts. □

**Achtung:** Aus  $a_n < b_n$  folgt *nicht*  $a < b$ , sondern nur  $a \leq b$ . Die Striktheit von Ungleichungen geht beim Übergang zu Grenzwerten im Allgemeinen verloren. Zum Beispiel gilt  $1/n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ .

**Beispiel 4.16** ( $n$ -te Wurzel). Sei  $a > 0$ . Wir bezeichnen mit  $a^{1/n}$  oder  $\sqrt[n]{a}$  die positive Lösung der Gleichung  $x^n = a$ . Es gibt nur eine, denn für  $x, y > 0$  mit  $x > y$  gilt auch  $x^n > y^n$ . Zur Konstruktion der Lösung kann das Intervallhalbierungsverfahren



benutzt werden (vgl. Kapitel I, Abschnitt 2). Wir behaupten nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1.$$

Im Fall  $a \geq 1$  ist auch  $a^{1/n} \geq 1$ , also  $a^{1/n} = 1 + x_n$  mit  $x_n \geq 0$ . Die Bernoulli-Ungleichung, Satz 2.18, liefert

$$a = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x_n \leq \frac{a-1}{n} \rightarrow 0.$$

Mit Satz 4.15 c) folgt  $x_n \rightarrow 0$  bzw.  $a^{1/n} \rightarrow 1$ . Für  $0 < a < 1$  folgt wegen  $a^{-1} > 1$

$$a^{1/n} = \frac{1}{(a^{-1})^{1/n}} \rightarrow 1 \quad \text{nach Satz 4.13 c)}.$$

**Definition 4.17** (Uneigentliche Konvergenz). Die Folge  $a_n$  konvergiert uneigentlich (oder divergiert bestimmt) gegen  $+\infty$ , falls gilt:

Zu jedem  $K > 0$  gibt es ein  $N \in \mathbb{R}$ , so dass  $a_n > K$  für alle  $n > N$ .

Wir schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  oder  $a_n \rightarrow +\infty$  mit  $n \rightarrow \infty$ . Uneigentliche Konvergenz gegen  $-\infty$  ist analog definiert.

**Beispiel 4.18** (Grenzwerte rationaler Funktionen). Betrachte die Folge

$$x_n = \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0}{b_\ell n^\ell + b_{\ell-1} n^{\ell-1} + \dots + b_0} \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

wobei  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $a_i, b_j \in \mathbb{R}$  mit  $a_k, b_\ell \neq 0$ . Durch Ausklammern folgt

$$x_n = n^{k-\ell} \frac{a_k + a_{k-1} n^{-1} + \dots + a_0 n^{-k}}{b_\ell + b_{\ell-1} n^{-1} + \dots + b_0 n^{-\ell}} \rightarrow \begin{cases} a_k/b_\ell & \text{falls } k = \ell, \\ 0 & \text{falls } k < \ell \\ \pm\infty & \text{falls } k > \ell, \text{ sign } \frac{a_k}{b_\ell} = \pm 1. \end{cases}$$

Siehe Definition 4.17 für den Begriff der (uneigentlichen) Konvergenz gegen  $\pm\infty$ .

**Beispiel 4.19.** Für  $q > 1$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$ . Denn zu gegebenem  $K > 0$  gibt es nach Beispiel 4.6 ein  $N \in \mathbb{R}$  mit  $(1/q)^n < 1/K$  für  $n > N$ , also  $q^n > K$  für  $n > N$ . Insgesamt haben wir für das Verhalten der Folge  $q^n$  mit  $n \rightarrow \infty$  folgende Tabelle:

$$\begin{aligned} q > 1 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty, \\ q = 1 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1, \\ -1 < q < 1 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \\ q \leq -1 &\Rightarrow \text{nicht konvergent.} \end{aligned}$$

Der Fall  $-1 < q < 1$  wurde in Beispiel 4.6 behandelt. Für  $q \leq -1$  vergleiche Beispiel 4.7.

**Beispiel 4.20** (Harmonische Reihe). Die Folge  $a_n = \sum_{k=1}^n 1/k$  ist bestimmt diver-

gent gegen  $+\infty$ . Dies zeigen wir, indem wir wie folgt Klammern setzen:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{1}\right)}_{\geq 1/2} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}_{\geq 1/2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)}_{\geq 1/2} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15}\right)}_{\geq 1/2} + \dots$$

Die Summe der  $1/k$  mit  $2^m \leq k < 2^{m+1}$  ist größer als  $2^m \cdot 2^{-(m+1)} = 1/2$ .

**Satz 4.21** (Konvergenz von Kehrwerten). Für eine Folge  $a_n$  gilt:

- (1) Aus  $a_n \rightarrow +\infty$  (bzw.  $a_n \rightarrow -\infty$ ) folgt  $1/a_n \rightarrow 0$ .
- (2) Aus  $a_n \rightarrow 0$  und  $a_n > 0$  (bzw.  $a_n < 0$ ) folgt  $1/a_n \rightarrow +\infty$  (bzw.  $1/a_n \rightarrow -\infty$ ).

*Beweis.* Übung. □

Das Ziel der Analysis ist es, neue Objekte – Zahlen, Funktionen, Operationen – durch Grenzprozesse zu konstruieren. Unsere Definition des Grenzwerts setzt voraus, dass wir den Grenzwert  $a$  der Folge bereits kennen, damit können wir noch nichts Neues definieren. Hier kommt das Vollständigkeitsaxiom ins Spiel. Wir brauchen eine leicht abgeänderte Fassung.

**Satz 4.22** (Konvergenz monotoner Folgen). Sei  $a_n$  nach oben beschränkt und monoton wachsend, also  $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ . Dann ist die Folge  $a_n$  konvergent.

*Beweis.* Setze  $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Es gilt  $a \in \mathbb{R}$ , weil die Folge nach oben beschränkt ist. Nach Definition des Supremums gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $a_N > a - \varepsilon$ , also gilt

$$a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a \quad \text{für } n \geq N.$$

Dies bedeutet  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . □

**Satz 4.23** (Definition der Exponentialfunktion). Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert als der Grenzwert

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Insbesondere existiert dieser Grenzwert.

Die Idee des Beweises nutzt aus, dass die Folge  $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$  für  $x > 0$  offensichtlich monoton wachsend ist. Zum Nachweis der Beschränktheit wählt man  $m_x \in \mathbb{N}$  so, dass  $m_x + 1 > 2x$  gilt. Dann folgt mit der Aufteilung und der Abschätzung

$$0 \leq a_n \leq \sum_{k=0}^{m_x} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m_x+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

dass der erste Teil unabhängig von  $n$  und somit beschränkt ist und der zweite Teil wegen  $x^k/k! \leq c_x 2^{m_x+1-k}$  wie eine geometrische Reihe konvergiert und somit eine (endliche) von  $n$  unabhängige Zahl ist.

*Beweis.* Sei  $x \in \mathbb{R}$  fest gegeben. Wir müssen zeigen, dass die Folge der Summen

$$\exp_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

konvergiert. Wähle  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m+1 \geq 2|x|$ . Für die Summanden  $k \geq m+1$  folgt

$$\frac{|x|^k}{k!} \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \frac{|x|^{k-(m+1)}}{(m+1)^{k-(m+1)}} \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \frac{1}{2^{k-(m+1)}}. \quad (4.1)$$

Für  $n \geq m+1$  folgt mit Dreiecksungleichung und Abschätzung der geometrischen Summe

$$\left| \sum_{k=m+1}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{|x|^k}{k!} \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-(m+1)}} \right) \leq \frac{2|x|^{m+1}}{(m+1)!}. \quad (4.2)$$

Es folgt, immer noch für  $m+1 \geq 2|x|$ ,

$$|\exp_n(x) - \exp_m(x)| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{|x|^k}{k!} \leq \frac{2|x|^{m+1}}{(m+1)!} \quad \text{für alle } n \geq m+1. \quad (4.3)$$

Die rechte Seite ist eine Konstante  $K = K(x, m)$ , also unabhängig von  $n$ . Da  $\exp_m(x)$  ebenfalls nicht von  $n$  abhängt, ist die Folge  $\exp_n(x)$  beschränkt. Für  $x \geq 0$  ist sie monoton wachsend, also konvergent nach Satz 4.22. Für  $x < 0$  kann man in gerade und ungerade  $k$  aufspalten, und dann wieder die Monotonie verwenden: es gilt  $E_n(x) = E_n^+(x) + E_n^-(x)$  mit

$$E_n^+(x) = \sum_{k \leq n, k \text{ gerade}} \frac{x^k}{k!} \quad E_n^-(x) = \sum_{k \leq n, k \text{ ungerade}} \frac{x^k}{k!}.$$

Die  $E_n^\pm(x)$  sind monoton wachsend bzw. fallend, konvergieren also wieder nach Satz 4.22.

Aus (4.3) erhalten wir noch mit  $n \rightarrow \infty$  für  $m+1 \geq 2|x|$  die Abschätzung

$$|\exp(x) - \exp_m(x)| \leq \frac{2|x|^{m+1}}{(m+1)!} \quad \text{für } m+1 \geq 2|x|. \quad (4.4)$$

Mit  $m \rightarrow \infty$  geht die rechte Seite gegen Null nach (4.1).  $\square$

Die Exponentialfunktion beschreibt das natürliche Wachstum. Wir erläutern das am (weniger natürlichen) Beispiel der Zinseszinsrechnung. Wird ein Euro für ein Jahr mit einem Zinssatz  $x \in \mathbb{R}$  angelegt, so beträgt die Ausszahlung  $a_1(x) = 1 + x$ . Die Idee des Zinseszinses ist es, den Zeitraum in kürzere Abschnitte zu unterteilen und den Zins anteilig pro Abschnitt anzurechnen mit dem Effekt, dass der schon angerechnete Teil des Zinses seinerseits Zinsen produziert. Zum Beispiel ergibt das bei monatlicher Verzinsung nach einem Monat  $1 + \frac{x}{12}$ , nach zwei Monaten  $(1 + \frac{x}{12})(1 + \frac{x}{12}) = (1 + \frac{x}{12})^2$ , und nach zwölf Monaten  $a_{12}(x) = (1 + \frac{x}{12})^{12}$ . Allgemein ergibt sich nach einem Jahr bei Unterteilung in  $n$  Zeiteinheiten

$$a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \quad (4.5)$$

Es stellt sich ganz natürlich die Frage nach einer kontinuierlichen Verzinsung, also nach dem Grenzwert  $n \rightarrow \infty$ .

**Satz 4.24** (natürliches Wachstum). Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

*Beweis.* Mit der binomischen Formel, siehe Satz 2.29, folgt

$$a_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n}}_{=: c(n,k)} \frac{x^k}{k!}.$$

Es gilt  $c(n, k) \rightarrow 1$  mit  $n \rightarrow \infty$ , also folgt für festes  $m$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^m c(n, k) \frac{x^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} = \exp_m(x).$$

Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $m \in \mathbb{N}$ , so dass gilt:

$$m+1 \geq 2|x| \quad \text{und} \quad \frac{4|x|^{(m+1)}}{(m+1)!} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für  $n \geq m+1$  folgt wegen  $0 < c(n, k) < 1$  mit (4.2) und (4.4)

$$\begin{aligned} |a_n(x) - \exp(x)| &= \left| \sum_{k=0}^m c(n, k) \frac{x^k}{k!} - \exp_m(x) + \sum_{k=m+1}^n c(n, k) \frac{x^k}{k!} + \exp_m(x) - \exp(x) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^m c(n, k) \frac{x^k}{k!} - \exp_m(x) \right| + \frac{2|x|^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{2|x|^{m+1}}{(m+1)!} \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^m c(n, k) \frac{x^k}{k!} - \exp_m(x) \right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Jetzt wähle  $n$  so groß, dass der erste Term kleiner  $\varepsilon/2$  ist. □

**Definition 4.25** (Eulersche Zahl). Die Eulersche Zahl ist

$$e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \approx 2,71828 \dots$$

Die jährliche Verzinsung von 1 Euro mit Zinssatz Eins ergibt nach einem Jahr 2 Euro, eine kontinuierliche Verzinsung dagegen  $e \approx 2,71828 \dots$  Euro. Betrachten wir allgemeiner eine Laufzeit von  $x$  Jahren, wieder mit Zinssatz Eins, so ergibt sich bei kontinuierlicher Verzinsung gerade der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n = \exp(x).$$

Legt man dieses Geld weiter für  $y$  Jahre an, wieder mit Zinssatz Eins, so ist der Kontostand dann  $\exp(x) \exp(y)$ . Andererseits hätte man das Geld genauso gut direkt für  $x + y$  Jahre anlegen können, dann bekommt man den Betrag  $\exp(x + y)$ . Es sollte also gelten

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y) \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

Diese Funktionalgleichung brauchen wir auch im Komplexen, und verallgemeinern dazu die Definition der Exponentialfunktion aus Satz 4.23 wie folgt:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Die Konvergenz (mit gleichen Abschätzungen) folgt wie im reellen Fall, Konvergenz von Folgen komplexer Zahlen ist nichts anderes als Konvergenz sowohl des Real- als auch des Imaginärteils.

**Satz 4.26** (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion). Es gilt

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w) \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$

*Beweis.* Die Binomische Formel, siehe Satz 2.29, ergibt

$$\frac{(z + w)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} = \sum_{k+\ell=n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^\ell}{\ell!}.$$

Wir schätzen nun wie folgt ab:

$$\begin{aligned} |\exp_{2n}(z) \exp_{2n}(w) - \exp_{2n}(z + w)| &= \left| \sum_{k, \ell \leq 2n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^\ell}{\ell!} - \sum_{k+\ell \leq 2n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^\ell}{\ell!} \right| \\ &\leq \sum_{k, \ell \leq 2n, \max(k, \ell) > n} \frac{|z|^k}{k!} \frac{|w|^\ell}{\ell!} \\ &= \exp_{2n}(|z|) \exp_{2n}(|w|) - \exp_n(|z|) \exp_n(|w|). \end{aligned}$$

Die rechte Seite geht mit  $n \rightarrow \infty$  gegen Null nach Satz 4.23, und die Behauptung folgt.  $\square$

Wir stellen jetzt den Anschluss her an die Exponentialfunktion aus der Schule, und zeigen

$$\exp(r) = e^r \quad \text{für alle } r \in \mathbb{Q}. \quad (4.6)$$

Durch Induktion erhalten wir  $\exp(nx) = \exp(x)^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Weiter gilt  $\exp(x) \exp(-x) = \exp(0) = 1$ . Daraus folgt für  $k \in \mathbb{Z}^-$

$$\exp(kx) = \exp(-(-kx)) = \frac{1}{\exp(-kx)} = \frac{1}{\exp(x)^{-k}} = \exp(x)^k.$$

Schließlich gilt für  $r = p/q$  mit  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$

$$(\exp(rx))^q = \exp(q \cdot rx) = \exp(px) = \exp(x)^p,$$

also

$$\exp(rx) = \exp(x)^{\frac{p}{q}} = \exp(x)^r \quad \text{für alle } r \in \mathbb{Q}.$$

Mit  $x = 1$  folgt insbesondere  $\exp(r) = e^r$  für  $r \in \mathbb{Q}$ . Für rationale  $x$  kann  $\exp(x)$  als Potenz definiert werden. Für irrationale  $x$  ist das nicht möglich. Die Notation  $e^x$  statt  $\exp(x)$  ist aber durchaus üblich, einfach weil sie sehr suggestiv ist.

Hier eine weitere Anwendung des Konvergenzkriteriums der Monotonie und Beschränktheit, Satz 4.22.

**Beispiel 4.27** (Dezimalbrüche). Jede Dezimalbruchfolge  $a_n = k_0, k_1 k_2 \dots k_n$  mit  $k_0 \in \mathbb{Z}$  und  $k_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$  konvergiert gegen eine gewisse reelle Zahl. Denn die Folge  $a_n$  ist monoton wachsend und es gilt (geometrische Reihe)

$$a_n \leq k_0 + \sum_{j=1}^n 9 \cdot 10^{-j} \leq k_0 + 1,$$

das heißt  $a_n$  ist nach oben beschränkt. Für eine gegebene Zahl  $a \in \mathbb{R}$  kann man die Ziffern induktiv bestimmen durch  $k_0 = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq a\}$  und

$$k_n = \max\{k \in \mathbb{Z} : a_{n-1} + k \cdot 10^{-n} \leq a\}.$$

Es kann vorkommen, dass zwei Dezimalbrüche dieselbe reelle Zahl liefern – wann?

Wie gesagt ist der Vorteil des Kriteriums der Monotonie und Beschränktheit, dass die Konvergenz ohne a priori Kenntnis des Grenzwerts gezeigt werden kann. Das nachfolgende Kriterium von Augustin Louis Cauchy (1789–1857) ist von derselben Form, braucht aber nicht die Monotonie. Die Idee besteht darin, die Glieder der Folge nicht mit dem unbekannten Grenzwert, sondern *untereinander* zu vergleichen. Aus Zeitgründen verzichten wir auf den Beweis.

**Satz 4.28** (Konvergenz von Cauchyfolgen). Sei  $a_n$  eine Cauchyfolge, das heißt :

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N \in \mathbb{R}$ , so dass  $|a_n - a_m| < \varepsilon$  für alle  $n, m > N$ .

Dann gibt es ein  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a_n \rightarrow a$  mit  $n \rightarrow \infty$ .

Beim Nachweis dieser Eigenschaft reicht es aus, die Zahlen  $n, m > 0$  mit  $n < m$  zu betrachten, denn die Definition ist symmetrisch in  $n$  und  $m$  und für  $n = m$  ist nichts zu tun.

## 4.2 Stetigkeit von Funktionen

Wir übertragen jetzt das Konzept des Grenzwerts auf Funktionen.

**Definition 4.29** (Grenzwert für Funktionen). Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $D \subset \mathbb{R}$ , konvergiert für  $x \rightarrow x_0$  gegen  $a \in \mathbb{R}$ , falls gilt:

$$f(x_n) \rightarrow a \quad \text{für jede Folge } x_n \text{ mit } x_n \neq x_0 \in D \text{ mit } x_n \rightarrow x_0 \text{ in } \mathbb{R}.$$

Hier sind einige Bemerkungen angesagt:

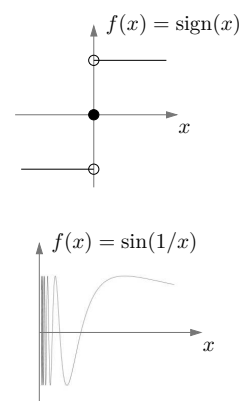
- (1) Für die Existenz und den Wert des Grenzwerts ist es egal, ob  $f(x)$  im Punkt  $x_0$  definiert ist bzw. welchen Funktionswert die Funktion dort hat.
- (2) Der Begriff ist nur sinnvoll, wenn es überhaupt eine solche Folge  $x_n$  gibt.
- (3) Beim rechtsseitigen (linksseitigen) Grenzwert betrachtet man nur Folgen  $x_n \rightarrow x_0$  mit  $x_n > x_0$  (bzw.  $x_n < x_0$ ). *Notation:*  $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$  bzw.  $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ .
- (4) Die Definition gilt sinngemäß für die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**Beispiel 4.30.** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(1/x)$ , hat in  $x_0 = 0$  keinen rechtsseitigen Grenzwert. Denn es gilt für  $n \in \mathbb{N}$

$$f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \sin n\pi = 0 \quad \text{aber} \quad f\left(\frac{1}{2n\pi + \pi/2}\right) = \sin(2n\pi + \pi/2) = 1.$$

Für die Funktion  $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$  ist dagegen  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , denn es gilt

$$|g(x_n)| \leq |x_n| \rightarrow 0 \quad \text{für } x_n \rightarrow 0, x_n \neq 0.$$



**Abbildung 27.** Beispiele von Funktionen, die im Punkt  $x_0 = 0$  keinen Grenzwert besitzen.

**Beispiel 4.31.** Die Signumfunktion

$$\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

hat die einseitigen Grenzwerte  $\lim_{x \searrow 0} \text{sign}(x) = +1$  und  $\lim_{x \nearrow 0} \text{sign}(x) = -1$ , während der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sign}(x)$  nicht existiert.

Folgende Regeln ergeben sich aus den Aussagen für Folgen, siehe Satz 4.13 und Satz 4.15.

**Satz 4.32** (Rechenregeln für Grenzwerte). Es gelten folgende Aussagen:

(1) Aus  $f(x) \rightarrow a$ ,  $g(x) \rightarrow b$  für  $x \rightarrow x_0$ , wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , folgt

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \rightarrow \alpha a + \beta b \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}),$$

$$f(x)g(x) \rightarrow ab,$$

$$f(x)/g(x) \rightarrow a/b, \quad \text{falls } b \neq 0.$$

(2) Sei  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  nahe bei  $x_0$ . Falls  $f(x), h(x) \rightarrow a$  mit  $x \rightarrow x_0$ , so folgt auch  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ .

**Definition 4.33** (Stetigkeit). Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig in  $x_0 \in D$ , falls gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Die Stetigkeit einer Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in einem Punkt  $x_0 \in D$  fordert, dass konvergente Folgen  $x_n \rightarrow x_0$  auf konvergente Folgen  $f(x_n)$  mit Grenzwert  $f(x_0)$  abgebildet werden, siehe Abbildung 28. Dadurch wird das Auftreten von Sprungstellen wie bei  $f(x) = \text{sign}(x)$  im Punkt  $x_0 = 0$  ausgeschlossen.

Ist  $x_0 \notin D$ , aber konvergiert die Funktion  $f$  für  $x \rightarrow x_0$  gegen einen Wert  $a \in \mathbb{R}$ , so lässt sich die Funktion stetig in den Punkt  $x_0$  mit Wert  $a$  fortsetzen. Dies ist beispielsweise bei hebbaren Singularitäten rationaler Funktionen der Fall, nicht jedoch bei der Funktion  $f(x) = \sin(1/x)$ ,  $x \in D = (0, \infty)$  im Punkt  $x_0 = 0$ .

Unsere Definition beruht sich auf den Konvergenzbegriff für Folgen. Viele Bücher verwenden eine Formulierung, die nicht auf Folgen zurückgreift, die sogenannte  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition der Stetigkeit: für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass gilt:

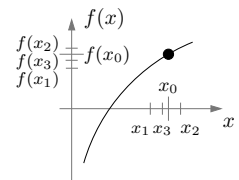
$$x \in D, |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Die beiden Formulierungen sind aber äquivalent, und unsere Definition der Konvergenz für Folgen war ja nach demselben Muster gebaut. Die Regeln für Grenzwerte implizieren direkt folgende Regeln zur Bildung stetiger Funktionen.

**Satz 4.34** (Stetigkeitsregeln). Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0 \in D$ . Dann gilt:

(1) Für beliebige  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist die Funktion  $\alpha f + \beta g$  stetig in  $x_0$ .

(2) Die Funktion  $fg$  ist stetig in  $x_0$ .



**Abbildung 28.** Illustration einer im Punkt  $x_0$  stetigen Funktion.

(3) Ist  $g(x_0) \neq 0$ , so ist die Funktion  $f/g : D \cap U_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  für  $\delta > 0$  hinreichend klein definiert und stetig in  $x_0$ .

In (3) muss man auf eine Umgebung  $U_\delta(x_0)$  gehen, da sonst  $g(x)$  Nullstellen haben kann.

**Beispiel 4.35.** Konstante Funktionen  $f(x) = c$  sind stetig auf  $\mathbb{R}$ , denn für sie ist

$$x_n \rightarrow x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) = c = f(x_0).$$

**Beispiel 4.36.** Die Funktion  $f(x) = x$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$ , denn es gilt

$$x_n \rightarrow x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) = x_n \rightarrow x_0 = f(x_0).$$

**Beispiel 4.37.** Betrachte für Polynome  $p(x)$  und  $q(x)$  die rationale Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus N_q \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{wobei } N_q = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}.$$

Mit den vorangehenden Beispielen und Satz 4.34 folgt, dass  $f(x)$  stetig ist auf  $\mathbb{R} \setminus N_q$ . Sei nun  $\lambda \in N_q$   $m$ -fache Nullstelle von  $q(x)$  und  $k$ -fache Nullstelle von  $p(x)$  (mit  $k = 0$  im Fall  $p(x) \neq 0$ ). Dann gibt es Polynome  $p_1(x)$  und  $q_1(x)$  mit  $p_1(\lambda), q_1(\lambda) \neq 0$ , so dass gilt:

$$f(x) = (x - \lambda)^{k-m} \frac{p_1(x)}{q_1(x)} =: f_1(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus N_q.$$

Im Fall  $k \geq m$  ist  $f_1 : \mathbb{R} \setminus N_{q_1} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig im Punkt  $\lambda$  mit Funktionswert

$$f_1(\lambda) := \begin{cases} \frac{p_1(\lambda)}{q_1(\lambda)} & \text{falls } k = m, \\ 0 & \text{falls } k > m. \end{cases}$$

Damit ist  $f_1$  stetige Fortsetzung von  $f$  auf  $\mathbb{R} \setminus N_q \cup \{\lambda\}$ . Dies erklärt die Bezeichnung *hebbare Singularität* aus Kapitel 2.2. Im Fall  $k < m$  kann es keine stetige Fortsetzung geben, da  $f(x_n) \rightarrow \pm\infty$  für jede Folge  $x_n \rightarrow x_0$ .

**Beispiel 4.38.** Die charakteristische Funktion von  $\mathbb{Q}$  (oder Dirichlet-Funktion)

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist nirgends stetig, denn  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sind beide dicht in  $\mathbb{R}$  (vgl. Kapitel 1.2). Ist zum Beispiel  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , so gibt es eine Folge  $x_n \in \mathbb{Q}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ , also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{\mathbb{Q}}(x_n) = 1 \neq 0 = \chi_{\mathbb{Q}}(x_0)$ .

**Satz 4.39** (Verkettung stetiger Funktionen). Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(D) \subset E \subset \mathbb{R}$ . Ist  $f$  stetig in  $x_0$  und  $g$  stetig in  $y_0 = f(x_0)$ , so ist  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ .

*Beweis.* Ist  $x_n \in D$  eine beliebige Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , so folgt  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  aus der Stetigkeit von  $f$  in  $x_0$ , und weiter  $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$  wegen der Stetigkeit



von  $g$  in  $y_0 = f(x_0)$ . □

**Beispiel 4.40.** Die Betragsfunktion ist stetig auf  $\mathbb{R}$ , denn es gilt

$$x_n \rightarrow x_0 \quad \Rightarrow \quad ||x_n| - |x_0|| \leq |x_n - x_0| \rightarrow 0.$$

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so auch  $|f| : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Satz 4.41** (Intervallschachtelungsprinzip). Seien  $I_n = [a_n, b_n]$  Intervalle mit  $I_1 \supset I_2 \supset \dots$  und  $b_n - a_n \rightarrow 0$  mit  $n \rightarrow \infty$ . Dann gibt es genau ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \in I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und zwar gilt  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

**Satz 4.42** (Zwischenwertsatz). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es zu jedem  $y_0$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  ein  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = y_0$ .

**Bemerkung 4.43.** Die Gleichung  $f(x) = y_0$  kann mehrere Lösungen in  $[a, b]$  besitzen, das heißt  $x_0$  ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Wir können annehmen, dass  $y_0 = 0$ , sonst betrachte  $f(x) - y_0$ . Setze  $[a_0, b_0] = [a, b]$ , und konstruiere eine Intervallschachtelung  $[a_n, b_n]$  so dass  $f(a_n)$  und  $f(b_n)$  nicht dasselbe Vorzeichen haben, also  $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ . Nun hat  $f(\frac{a_n+b_n}{2})$  höchstens mit einer der Zahlen  $f(a_n)$  und  $f(b_n)$  gleiches Vorzeichen, also können wir als Folgeintervall eines der Intervalle  $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$  oder  $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$  wählen. Der durch die Intervallschachtelung definierte Punkt  $x \in [a, b]$  ist eine Nullstelle, denn  $f(x)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0$ . □

**Satz 4.44** (Monotonie und Umkehrfunktion). Sei  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton wachsend und stetig. Dann gilt:

- (1)  $f(I) = [f(a), f(b)]$ .
- (2) Die Umkehrfunktion  $g : [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton wachsend und stetig.

*Beweis.* Aus der Monotonie folgt  $f(I) \subset [f(a), f(b)]$ , Gleichheit liefert der Zwischenwertsatz. Wäre  $g$  nicht streng monoton wachsend, so gibt es  $y_1, y_2 \in f(I)$  mit  $y_1 < y_2$ , aber  $g(y_2) \leq g(y_1)$ . Aus der Monotonie von  $f$  folgt aber

$$y_2 = f(g(y_2)) \leq f(g(y_1)) = y_1, \quad \text{Widerspruch.}$$

Wir zeigen die linksseitige Stetigkeit von  $g$  in einem Punkt  $y_0 \in (f(a), f(b)]$ , also  $y_0 = f(x_0)$  mit  $x_0 \in (a, b]$ . Da  $f$  streng monoton ist, gilt  $f(x_0 - \varepsilon) < y_0$  für alle  $\varepsilon > 0$  mit  $x_0 - \varepsilon \geq a$ . Für jede Folge  $y_n \rightarrow y_0$ ,  $y_n < y_0$ , gibt es dann ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$f(x_0 - \varepsilon) < y_n < y_0 \quad \text{für } n > N.$$

Da  $g$  streng monoton, folgt weiter

$$g(y_0) - \varepsilon = x_0 - \varepsilon < g(y_n) < g(y_0) \quad \text{für } n > N.$$

Also gilt  $\lim_{y \nearrow y_0} g(y) = g(y_0)$ . Die rechtsseitige Stetigkeit folgt analog.  $\square$

Der Satz gilt sinngemäß auch auf offenen oder halboffenen Intervallen.

**Beispiel 4.45** (Definition des natürlichen Logarithmus).  $\exp : (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv, und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty. \quad (4.7)$$

Die Umkehrfunktion  $\ln : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$  heißt (natürlicher) Logarithmus. Die Funktion ist ebenfalls streng monoton wachsend, stetig und bijektiv, und es gilt

$$\lim_{y \searrow 0} \ln(y) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \ln(y) = \infty. \quad (4.8)$$

Weiter ist  $\ln(1) = 0$  und  $\ln(e) = 1$ , und  $\ln$  erfüllt die Funktionalgleichung

$$\ln(y_1 y_2) = \ln(y_1) + \ln(y_2) \quad \text{für alle } y_1, y_2 > 0. \quad (4.9)$$

**Definition 4.46** (Potenz mit reellen Exponenten). Für  $a > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir

$$a^x = \exp(x \ln(a)).$$

Oft wird der Logarithmus bezüglich der Basis  $b = 10$  oder  $b = 2$  betrachtet, das heißt,  $\log_b x$  ist die Zahl  $y$  mit  $b^y = x$ , also beispielsweise  $\log_{10} 1000 = 3$  und  $\log_2 16 = 4$ . Das Umrechnen bezüglich unterschiedlicher Basen erfolgt mittels der Formel

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b},$$

die sich aus  $r \log_a(b) = \log_a b^r$  mit  $r = \log_b x$  ergibt. Der natürliche Logarithmus besitzt die Basis  $b = e$ .

**Beispiel 4.47.** Erdbeben werden in der Richterskala angegeben, die für eine gemessene Amplitude  $A$  den Wert  $M_L = \log_{10}(A/A_0)$  mit einer Bezugsgröße  $A_0$  angibt. Ein Unterschied der Werte um einen Punkt bedeutet damit eine zehnmal größere Amplitude.

### 4.3 Rechnen mit Größenordnungen

Die sich aus der Definition  $a^x = \exp(x \ln(a))$  ergebenden Rechenregeln für  $a, b \geq 0$  und  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$(a^x)^y = a^{xy}, \quad a^x a^y = a^{x+y}, \quad (ab)^x = a^x b^x,$$

erlauben das Rechnen mit Größenordnungen, was besonders nützlich ist, wenn nur approximative Ergebnisse benötigt werden, um beispielsweise zu beurteilen, ob sich eher eintausend oder eine Million Liter Wasser in einem Aquarium befinden. Um das Volumen des Freiburger Münsters grob zu schätzen, kann man die Länge  $\ell \approx 100$  m, die Breite  $b \approx 20$  m und die Höhe  $h = 40$  m ansetzen und errechnet

$$V = \ell h b \approx 1 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^1 \cdot 4 \cdot 10^1 \text{ m}^3 = 8 \cdot 10^4 \text{ m}^3.$$

Da ein Kubikmeter dem Volumen von eintausend also  $10^3$  Litern entspricht, ergibt sich eine Schätzung von 80 Millionen Liter. In Wikipedia findet man die vermutlich präziser

berechnete Angabe  $80,3 \cdot 10^6$  Liter. Ein Taschenbuch mit 200 Seiten der ungefähren Größe  $20 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$  hat eine beschreibbare Fläche von

$$A = 2 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-1} \cdot 1,5 \cdot 10^{-1} \text{ m}^2 = 6 \text{ m}^2.$$

Es lassen sich auch Quadratwurzeln großer Zahlen gut schätzen:

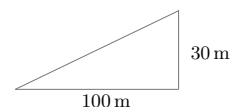
$$\sqrt{50.000.000} = (50 \cdot 10^6)^{1/2} = (50)^{1/2} (10^6)^{1/2} \approx 7,07 \cdot 10^3,$$

die Quadratwurzel aus 50 Millionen ist also etwa Siebentausend. Mit der Näherung  $2^{3,3} \approx 10$  lassen sich Potenzen der Zahl 10 in solche der Zahl 2 umrechnen und umgekehrt. Vereinbarung beispielsweise ein sechsjähriges Kind mit seinen Eltern ein monatliches Taschengeld von einem Cent bei halbjährlicher Verdopplung, so hätte das Kind im Alter von 16 Jahren Anspruch auf monatlich  $10^{-2} \cdot 2^{20} \approx 10^{-2} \cdot 10^6 = 10.000$  Euro. Das Taschengeld wächst exponentiell mit der Anzahl der Halbjahre.

## 5 Differentialrechnung

### 5.1 Die Ableitung: Definition und Regeln

Mit zwei Funktionswerten lässt sich die Steigung einer Sekante einer Funktion definieren. Um eine Steigung in einem einzelnen Punkt anzugeben, wird der Grenzwert von Sekantensteigungen betrachtet, wenn die beteiligten Punkte der Sekanten beliebig nah zusammen kommen und somit eine Tangente approximieren. Damit lässt sich beispielsweise die Steigung eines Berges in einem Punkt angeben, die sich als relative Angabe ergibt, das heißt eine Steigung  $s = 0.3$  beziehungsweise  $s = 30\%$  beschreibt eine Höhenveränderung von 30 Metern pro 100 Meter Distanz in horizontaler Richtung, siehe Abbildung 29. Gibt andererseits eine Funktion eine zurückgelegte Strecke zu einem Zeitpunkt  $t$  an, so ist die Ableitung die Änderung der zurückgelegten Strecke pro Zeiteinheit, also die aktuelle Geschwindigkeit der Bewegung.



**Abbildung 29.** Eine vertikale Höhenänderung um 30 Meter auf eine horizontale Entfernung von 100 Metern entspricht einer Steigung von 30% beziehungsweise 0.3.

**Definition 5.1** (Ableitung). Sei  $I$  ein offenes Intervall. Die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  hat im Punkt  $x_0 \in I$  die Ableitung  $a \in \mathbb{R}$  (Notation:  $f'(x_0) = a$  oder  $\frac{df}{dx}(x_0) = a$ ), falls gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a. \quad (5.1)$$

Wir nennen  $f$  differenzierbar in  $x_0$ , falls es ein  $a \in \mathbb{R}$  mit (5.1) gibt, falls also der in (5.1) betrachtete Grenzwert existiert.

Beispiele nicht-differenzierbarer Funktionen sind unstetige Funktionen und Funktionen mit Knicken.

Eine alternative Formulierung ergibt sich durch die Substitution  $x = x_0 + h$ :

$$f'(x_0) = a \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a.$$

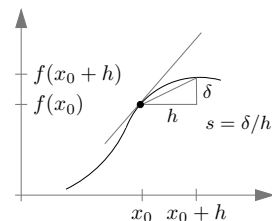
Leibniz interessierte sich im 17. Jahrhundert für die Definition der Ableitung im Zusammenhang mit dem Problem, die Tangente an eine ebene Kurve in einem gegebenen Punkt zu definieren. Nehmen wir dazu an, dass die Kurve als Graph einer Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist, und dass die Tangente im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  gesucht ist. Der Differenzenquotient  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  ( $x_0, x \in I, x \neq x_0$ ) ist geometrisch die Steigung der Sekante durch die Punkte  $(x_0, f(x_0))$  und  $(x, f(x))$ . Die Existenz der Ableitung bedeutet, dass die Sekantensteigungen für  $x \rightarrow x_0$  gegen den Wert  $f'(x_0)$  konvergieren. Die Tangente wird nun definiert als die Gerade, die durch den Punkt  $(x_0, f(x_0))$  geht und die Steigung  $f'(x_0)$  hat. Daraus ergibt sich ihre Gleichung

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Newton entwickelte den Differentialkalkül (Englisch: Calculus) unter anderem um die Keplerschen Gesetze für die Planetenbewegung zu begründen, genauer konnte er diese Gesetze alle aus dem Gravitationsgesetz ableiten. Dazu wird die Bewegung eines Planeten durch seinen Ortsvektor

$$\vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

beschrieben, also durch dessen Koordinaten zur Zeit  $t \in I$  bezüglich eines Euklidischen



**Abbildung 30.** Differenzenquotient.

Koordinatensystems. Erstes Ziel ist dann die Definition der Momentangeschwindigkeit als Vektor in  $\mathbb{R}^3$ . Die vektorielle Durchschnittsgeschwindigkeit auf dem Zeitintervall  $[t_0, t]$  ist der Quotient von Weg und Zeit, also gleich

$$\frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^3.$$

Die Momentangeschwindigkeit  $\vec{v}(t_0)$  zum Zeitpunkt  $t = t_0$  ist deshalb als vektorielle Ableitung zu definieren, wobei Newton einen Punkt statt eines Strichs benutzt hat:

$$\vec{v}(t_0) = \dot{\vec{f}}(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

**Definition 5.2** (Ableitungsfunktion). Die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt differenzierbar, falls  $f$  in jedem  $x_0 \in I$  differenzierbar ist. Die hierdurch gegebene Funktion

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \mapsto f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

heißt Ableitungsfunktion oder schlicht Ableitung von  $f$ .

**Beispiel 5.3.** Für eine konstante Funktion  $f(x) = c$  gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0 \text{ bzw. } f' = 0.$$

**Beispiel 5.4.** Für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ , gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \quad \text{für alle } x \neq x_0,$$

also folgt  $f'(x_0) = 1$  bzw.  $f' = 1$ .

**Beispiel 5.5.** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ , ist nicht differenzierbar in  $x_0 = 0$ :

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1.$$

Die rechts- und linksseitige Ableitung existieren in  $x_0 = 0$ , sie sind aber verschieden.

**Beispiel 5.6.** Für die Funktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $\exp' = \exp$ . Wir verwenden dazu die Abschätzung (4.4) im Fall  $m = 1$ :

$$|\exp(x) - (1 + x)| \leq |x|^2 \quad \text{für } |x| \leq 1.$$

Damit folgt  $\exp'(0) = 1$ , denn

$$\left| \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} - 1 \right| = \frac{|\exp(x) - (1 + x)|}{|x|} \leq |x| \rightarrow 0 \quad \text{mit } x \rightarrow 0.$$

Für  $x \neq 0$  schließen wir weiter mit der Funktionalgleichung

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h} \rightarrow \exp(x) \quad \text{mit } h \rightarrow 0.$$

Dass die Ableitung der Exponentialfunktion die Funktion selbst ist, sieht man auch, indem man die darstellende Reihe wie ein Polynom ableitet, das heißt

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots\right)' \\ &= \left(0 + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + k \frac{x^{k-1}}{k!} + \cdots\right) = \exp(x). \end{aligned}$$

In dieser Rechnung tritt die Vertauschung von Grenzwerten auf, nämlich der Konvergenz der Reihe und der Konvergenz der Sekantensteigungen, was einer Rechtfertigung bedarf. Im Allgemeinen kann dies falsch sein, was man am Beispiel  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} y/x$  sieht.

Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit (aber nicht umgekehrt):

**Satz 5.7.** Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in I$ , so ist  $f$  auch stetig in  $x_0$ .

*Beweis.* Es gilt mit  $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \rightarrow f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0).$$

□

**Satz 5.8** (Differentiationsregeln). Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in I$ . Dann sind auch die Funktionen  $\alpha f + \beta g$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ),  $fg$  und  $f/g$  (im Fall  $g(x_0) \neq 0$ ) in  $x_0$  differenzierbar mit folgenden Ableitungen:

(1) Linearität:

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

(2) Produktregel:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(3) Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

*Beweis.* Wir müssen jeweils für  $x \neq x_0$  die Differenzenquotienten bilden und zeigen, dass diese mit  $x \rightarrow x_0$  gegen das gewünschte konvergieren. Für (1) haben wir

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0} &= \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\rightarrow \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0). \end{aligned}$$

Die Produktregel folgt durch „Mischen der Terme“:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\rightarrow f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),\end{aligned}$$

wobei die Stetigkeit von  $g$  in  $x_0$  benutzt wurde (Satz 5.7). Für die Quotientenregel reicht es, die Funktion  $1/g$  zu betrachten, also  $f \equiv 1$ .

$$\frac{1}{x - x_0} \left( \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} \right) = -\frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \rightarrow -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

□

**Beispiel 5.9.** Für  $f_n(x) = x^n$  folgt aus Beispiel 5.4, also  $f'_1 = 1$ , und der Produktregel

$$f'_n(x) = (f_1 f_{n-1})'(x) = f'_1(x) f_{n-1}(x) + f_1(x) f'_{n-1}(x) = x^{n-1} + x f'_{n-1}(x),$$

und damit per Induktion  $f'_n(x) = nx^{n-1}$ . Allgemeiner ergibt sich mit Satz 5.8(1) für Polynome  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  die Formel

$$p'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} x^j.$$

**Beispiel 5.10.** Für  $f(x) = x^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gilt  $f'(x) = -nx^{-n-1}$  nach der Quotientenregel:

$$f'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1}.$$

**Satz 5.11** (Kettenregel). Seien  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(I) \subset J$ . Ist  $f$  in  $x_0$  sowie  $g$  in  $y_0 = f(x_0)$  differenzierbar, so ist auch  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

*Beweis.* Zur besseren Übersichtlichkeit verwenden wir  $y = f(x)$  und  $y_0 = f(x_0)$  und nutzen aus, dass aus der Stetigkeit von  $f$  folgt, dass nach Satz 5.7  $y \rightarrow y_0$  für  $x \rightarrow x_0$  gilt. Wir betrachten für  $x \neq x_0$  den zugehörigen Differenzenquotienten und führen den Grenzübergang  $x \rightarrow x_0$  durch:

$$\begin{aligned}\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\rightarrow g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).\end{aligned}$$

Ein technisches Problem gibt es, wenn  $f(x) = f(x_0)$  für  $x$  nahe  $x_0$ , aber das wollen wir hier nicht behandeln. □

**Beispiel 5.12.** Die Kettenregel lässt sich als Umparametrisierung interpretieren, wenn man zum Beispiel eine Geschwindigkeit nicht pro Stunde sondern pro Sekunde angeben möchte. Beträgt die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs zehn Stundenkilometer

also  $10^4$  Meter pro Stunde, so ist die zurückgelegte Strecke in Metern gegeben durch

$$f(t) = 10^4 \cdot t,$$

wobei  $t$  in Stunden angegeben wird. Um die gefahrene Strecke nach einem in Sekunden angegebenen Zeitintervall zu bestimmen, müssen die Sekunden in Stunden umgerechnet werden, also  $g(s) = s/3.600$  und  $f \circ g$  gibt die gefahrene Strecke an. Die Ableitung gemäß Kettenregel

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g' = 10.000/3.600 \approx 2,8$$

liefert die Geschwindigkeit von etwa 2,8 Meter pro Sekunde.

**Satz 5.13** (Ableitung der Umkehrfunktion). Die Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  sei streng monoton und stetig. Ist  $f'(x_0) \neq 0$ , so ist die Umkehrfunktion  $g = f^{-1}$  differenzierbar in  $y_0 = f(x_0)$  mit Ableitung

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

*Beweis.*  $g$  existiert und ist stetig nach Satz 4.44. Wir berechnen für  $y \rightarrow y_0$ , also  $g(y) \rightarrow g(y_0)$ ,

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))} = \frac{1}{\frac{f(g(y)) - f(g(y_0))}{g(y) - g(y_0)}} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Die Formel für die Ableitung folgt auch aus der Kettenregel:

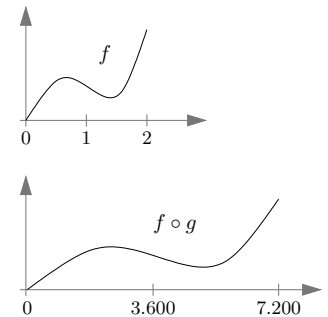
$$f(g(y)) = y \quad \Rightarrow \quad f'(g(y_0))g'(y_0) = 1.$$

Wir sehen: damit die Umkehrfunktion im Punkt  $y_0 = f(x_0)$  differenzierbar ist, muss  $f'(x_0) \neq 0$  gelten. Zum Beispiel kann die Umkehrfunktion von  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ , im Nullpunkt nicht differenzierbar sein.

Die beiden vorangegangenen Regeln sind in der von Leibniz eingeführten Notation besonders suggestiv. Leibniz schreibt Funktionen in der Form  $y = y(x)$  und bezeichnet die Ableitung mit dem Symbol  $\frac{dy}{dx}$ , das auch als *Differentialquotient* bezeichnet wird. Formal ergeben sich die Kettenregel und die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion dann aus der Bruchrechnung:

$$\begin{aligned} y = y(x), z = z(y) &\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}, \\ y = y(x), x = x(y) &\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Bei der Anwendung dieser saloppen Notation ist jedoch darauf zu achten, an welchen Stellen die jeweiligen Funktionen auszuwerten sind.



**Abbildung 31.** Umparametrisierung einer Funktion.



**Beispiel 5.14.** Die Funktion  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar mit Ableitung

$$\ln'(y) = \frac{1}{y}.$$

Dies folgt aus Beispiel 5.6 und Satz 5.13, genauer ist

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}.$$

**Beispiel 5.15.** Die Potenzfunktion  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^\alpha$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist Verkettung der Funktionen  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \alpha \ln x$ . Mit der Kettenregel berechnen wir

$$f'(x) = \exp(\alpha \ln x) \frac{\alpha}{x} = \alpha \exp(\alpha \ln x) \exp(-\ln x) = \alpha \exp((\alpha - 1) \ln x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

**Beispiel 5.16.** Die Exponentialfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a^x$  mit  $a > 0$ , ist Verkettung von  $\exp$  und  $h(x) = (\ln a)x$ , deshalb folgt

$$f'(x) = \exp((\ln a)x) \ln a = (\ln a)a^x.$$

Wir wollen nun die Ableitungen der Funktionen  $\cos x$  und  $\sin x$  in Angriff nehmen.

**Beispiel 5.17** (Ableitung von Kosinus/Sinus). Wir benutzen die bereits bekannten Identitäten

$$\sin(t) = \frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2i} \quad \cos(t) = \frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2}.$$

Die Differentiation der Exponentialfunktion mit imaginärem Argument folgt wieder den selben Regeln wie im Reellen, also

$$\exp'(it) = i \exp(it).$$

Für alle  $t \in \mathbb{R}$  berechnen wir folglich

$$\cos'(t) = -\sin t, \quad \sin'(t) = \cos t.$$

**Beispiel 5.18.** Die Differenzierbarkeit der Arcusfunktionen auf dem offenen Intervall  $(-1, 1)$  folgt aus Beispiel 5.17 und Satz 5.13. Beachtet man  $\cos^2 + \sin^2 = 1$  sowie  $\arccos x \in (0, \pi)$  bzw.  $\arcsin x \in (-\pi/2, \pi/2)$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \arccos'(x) &= \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

**Beispiel 5.19.** Die Funktionen  $\cosh, \sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind gegeben durch

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{bzw.} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Die Funktion  $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine streng monoton wachsende Umkehrfunktion  $\operatorname{Arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Da  $\sinh' x = \cosh x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , ist die Funktion  $\operatorname{Arsinh}$  differenzierbar und hat die Umkehrfunktion

$$\operatorname{Arsinh}'(y) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{Arsinh}(y))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{Arsinh}(y))}.$$

Um dies umzuformen, beachte

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = 1.$$

Also gilt  $\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$  und es folgt

$$\operatorname{Arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

**Satz 5.20.** (Regel von L'Hôpital) Angenommen  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  sind differenzierbare Funktionen. Falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

und  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$ , und der Limes  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Beweis.*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}.$$

Im Zähler und Nenner können wir nun den Limes  $x \rightarrow x_0$  bilden und erhalten den Quotienten der Ableitungen.  $\square$

Ein Beispiel für die Verwendung der Regel von L'Hôpital ist der Grenzwert des Quotienten  $\ln(x)/(1-x)$  für  $x \rightarrow 1$ . Da  $\ln(x) \rightarrow 0$  und  $1-x \rightarrow 0$  liefert die Regel, dass

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{-1} = -1.$$

## 5.2 Mittelwertsatz und Anwendungen

Die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  hat in  $x_0 \in I$  ein Minimum (bzw. ein Maximum), wenn gilt:  $f(x_0) \leq f(x)$  für alle  $x \in I$  (bzw.  $f(x_0) \geq f(x)$  für alle  $x \in I$ ). Man nennt dann  $x_0$  eine Minimalstelle bzw. Maximalstelle. Der folgende Satz garantiert die Existenz solcher Stellen unter geeigneten Voraussetzungen.

**Satz 5.21** (Extremalstellen). Sei  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es  $x_0, x_1 \in I$  mit

$$f(x_0) = \inf_{x \in I} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_1) = \sup_{x \in I} f(x).$$

Insbesondere ist  $f$  beschränkt.

*Beweis.* Für  $I = I' \cup I''$  sieht man leicht  $\inf_I f = \min(\inf_{I'} f, \inf_{I''} f)$ . Setze  $\lambda = \inf_I f \in [-\infty, \infty)$  und bestimme durch fortgesetzte Halbierung  $I_k = [a_k, b_k]$  mit

$I_0 = I$  und

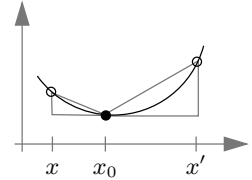
$$\inf_{I_k} f = \lambda \quad \text{für } k = 0, 1, \dots$$

Sei  $x \in I_k$  für alle  $k$ . Wäre  $f(x) > \lambda$ , so gibt es ein  $\lambda' > \lambda$  und ein  $\delta > 0$  mit

$$f(y) \geq \lambda' \quad \text{für alle } y \in (x - \delta, x + \delta) \cap I.$$

Dies folgt aus der Stetigkeit von  $f$ . Da  $I_k \subset (x - \delta, x + \delta) \cap I$  für  $k$  hinreichend groß, folgt  $\inf_{I_k} f \geq \lambda' > \lambda$ , ein Widerspruch. Also gilt  $f(x) = \lambda$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Satz 5.22** (notwendige Bedingung für Extrema I). Die Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  habe in  $x_0 \in (a, b)$  ein Extremum. Ist  $f$  in  $x_0$  differenzierbar, so gilt  $f'(x_0) = 0$ .



**Abbildung 32.** In einem Minimum sind linksseitige Differenzenquotienten negativ und rechtsseitige positiv (bzw. genauer  $\leq 0$  und  $\geq 0$ ).

*Beweis.* Im Fall eines Minimums in  $x_0$  haben wir

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 & \text{für } x > x_0, \\ \leq 0 & \text{für } x < x_0. \end{cases}$$

Mit  $x \searrow x_0$  folgt  $f'(x_0) \geq 0$ , mit  $x \nearrow x_0$  folgt  $f'(x_0) \leq 0$ .  $\square$

Die Funktion  $f(x) = x^3$  erfüllt  $f'(0) = 0$ , aber in  $x = 0$  liegt kein Extremum vor. Die Bedingung  $f'(x_0) = 0$  ist notwendig für eine Extremalstelle einer differenzierbaren Funktion, aber sie ist nicht hinreichend.

**Satz 5.23** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Dann gibt es ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung zuerst im Fall  $f(a) = f(b) = 0$  (Satz von Rolle). Wir brauchen dann ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f'(\xi) = 0$ . Nach Satz 5.21 gibt es  $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$  mit mit

$$f(\xi_1) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{und} \quad f(\xi_2) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Ist  $\xi_1 \in (a, b)$ , so folgt  $f'(\xi_1) = 0$  nach Satz 5.22 und wir können  $\xi = \xi_1$  wählen. Analog, wenn  $\xi_2 \in (a, b)$ . Im verbleibenden Fall  $\xi_1, \xi_2 \in \{a, b\}$  folgt  $\inf f = \sup f = 0$  bzw.  $f(x) = 0$  für alle  $x \in [a, b]$ , und damit auch  $f'(x) = 0$  für alle  $x$ . Seien nun  $f(a), f(b)$  beliebig. Definiere  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch Abziehen der Sekante:

$$h(x) = f(x) - \left( f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Es gilt  $h(a) = h(b) = 0$ . Also existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$

Der Mittelwertsatz besagt, dass jede Sekantensteigung zwischen den beteiligten Punkten als Tangentensteigung auftritt. Im Beweis des Satzes wird die Sekante mittels einer linearen Funktion dargestellt. Allgemein ist eine lineare Funktion mit Steigung  $s$  und Funk-

tionswert  $w_r$  in einem gegebenen Referenzpunkt  $x_r$  gegeben durch

$$\ell(x) = w_r + s(x - x_r).$$

Die Formel für die Tangente einer Funktion im Punkt  $f(z)$  ergibt sich damit als  $T_z(x) = f(z) + f'(z)(x - z)$ .

**Folgerung 5.24** (Monotoniekriterium). Sei  $f$  differenzierbar auf  $(a, b)$ , stetig auf  $[a, b]$ . Dann gelten folgende Aussagen:

$$f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in (a, b) \Rightarrow f \text{ ist wachsend auf } [a, b]$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in (a, b) \Rightarrow f \text{ ist fallend auf } [a, b]$$

$$f'(x) = 0 \text{ für alle } x \in (a, b) \Rightarrow f \text{ ist konstant.}$$

Bei strikter Ungleichung folgt strenge Monotonie auf  $[a, b]$ .

*Beweis.* Sei  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ . Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein  $\xi \in (x_1, x_2)$ , so dass gilt:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \begin{cases} \geq 0 & \text{wenn } f'(\xi) \geq 0 \\ > 0 & \text{wenn } f'(\xi) > 0 \\ \leq 0 & \text{wenn } f'(\xi) \leq 0 \\ < 0 & \text{wenn } f'(\xi) < 0 \\ = 0 & \text{wenn } f'(\xi) = 0 \end{cases}.$$

□

Wir kommen jetzt zu höheren Ableitungen.

**Definition 5.25.** Die  $k$ -te Ableitung von  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  ist induktiv definiert durch

$$f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)})'(x_0).$$

Damit  $f^{(k)}(x_0)$  definiert ist, müssen also die Ableitungen bis Ordnung  $k - 1$  in einer Umgebung von  $x_0$  definiert sein, und  $f^{(k-1)}$  muss in  $x_0$  differenzierbar sein.

Natürlich schreiben wir  $f'$  und  $f''$  statt  $f^{(1)}$  bzw.  $f^{(2)}$ . Mit der zweiten Ableitung gewinnen wir genauere Informationen über lokale Extrema.

**Satz 5.26** (notwendige Bedingung für Extrema II). Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, mit einem Minimum in  $x_0$ . Falls  $f''(x_0)$  existiert, so gilt

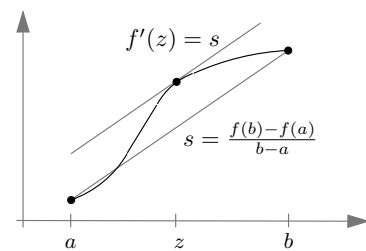
$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \geq 0.$$

Für Maxima gilt analog  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \leq 0$ .

*Beweis.*  $f'(x_0) = 0$  wurde in Satz 5.22 bewiesen. Es folgt

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Wäre  $f''(x_0) < 0$ , so wäre  $f'(x) > 0$  links von  $x_0$  und  $f'(x) < 0$  rechts von  $x_0$ , jeweils nahe bei  $x_0$ . Nach Folgerung 5.24 ist  $f$  dann streng monoton wachsend links



**Abbildung 33.** Illustration des Mittelwertsatzes.

von  $x_0$  und streng monoton fallend rechts von  $x_0$ , hat also in  $x_0$  ein striktes, lokales Maximum im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

Die Funktion  $f(x) = x^4$  zeigt, dass in einem Minimum  $f''(x_0) = 0$  gelten kann. Wir haben nun notwendige Bedingungen für Extrema, aber was ist mit hinreichenden Bedingungen? Offensichtlich kann man aus Eigenschaften im Punkt  $x_0$  höchstens lokale Konsequenzen ziehen, unser Interesse gilt aber globalen Extremaleigenschaften. Dafür spielt folgender Begriff eine Rolle.

**Definition 5.27.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine zweimal differenzierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt konvex (bzw. konkav), wenn  $f'' \geq 0$  auf  $I$  (bzw.  $f'' \leq 0$  auf  $I$ ).

Fährt man auf dem Graph von  $f$  in Richtung der positiven  $x$ -Achse, so bedeutet Konvexität eine Linkskurve, Konkavität eine Rechtskurve. Der Begriff der Konvexität stellt durch die Bedingung, dass die Funktion oberhalb jeder ihrer Tangenten liegt, das heißt

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z)$$

für alle  $x, z \in I$ , globale Beziehungen zwischen Punkten her, vergleiche Abbildung 34. Ist insbesondere  $f'(x_0) = 0$ , so folgt mit  $z = x_0$ , dass  $f(x) \geq f(x_0)$  für alle  $x \in I$  gilt folglich hat  $f$  im Punkt  $x_0$  ein Minimum. Durch die Konvexität wird die notwendige Bedingung  $f'(x_0) = 0$  also zu einer hinreichenden Bedingung für die Charakterisierung eines Minimums.

**Satz 5.28 (Konvexität).** Ist  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar, so sind äquivalent:

- (1)  $f$  ist konvex.
- (2) Der Graph von  $f$  liegt oberhalb jeder Tangente:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{für alle } x_0, x \in (a, b).$$

*Beweis.* Für  $g(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$  gilt  $g''(x) = f''(x)$ . Sei nun  $f$  und damit  $g$  konvex. Dann ist  $g'$  monoton wachsend nach Folgerung 5.24. Wegen  $g'(x_0) = 0$  folgt

$$g'(x) \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x < x_0 \\ \geq 0 & \text{für } x > x_0. \end{cases}$$

Wieder mit Folgerung 5.24 ist  $g$  fallend für  $x < x_0$  und wachsend für  $x > x_0$ . Da  $g(x_0) = 0$ , folgt  $g(x) \geq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , das heißt es gilt (2). Umgekehrt folgt aus (2), dass  $g$  ein Minimum bei  $x_0$  hat, und Satz 5.26 liefert

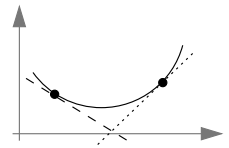
$$0 \leq g''(x_0) = f''(x_0).$$

Da  $x_0 \in (a, b)$  beliebig, folgt  $f$  konvex.  $\square$

**Definition 5.29.** Die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt ein lokales Minimum im Punkt  $x_0 \in I$ , falls es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass gilt

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.$$

Das Minimum heißt striktes lokales Minimum, falls die Ungleichung strikt ist. Die



**Abbildung 34.** Konvexe Funktion und Tangenten.

analoge Definition gilt für lokale Maxima.

**Folgerung 5.30.** Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar,  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x) \geq 0$  für  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ . Dann besitzt  $f$  im Punkt  $x_0$  ein lokales Minimum (strikt im Fall  $f'' > 0$ ).

**Definition 5.31.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Wir bezeichnen mit  $C^k(I)$  die Menge der  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , das heißt

$$C^k(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} : f^{(i)}: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ sind definiert und stetig für } i = 0, 1, \dots, k\}.$$

Weiter sei  $C^\infty(I)$  die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen, also

$$C^\infty(I) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(I).$$

Der Umgang mit  $C^\infty$ -Funktionen ist besonders angenehm, weil die Klasse im Gegensatz zu  $C^k(I)$  unter der Bildung von Ableitungen abgeschlossen ist. Es ist klar, dass Polynome unendlich oft differenzierbar sind, ebenso die Exponentialfunktion sowie Kosinus und Sinus. Man kann auch eine Funktion  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  basteln, die für  $x \in (-1, 1)$  positiv ist und sonst Null.

**Bemerkung 5.32.** Sei  $f \in C^2(I)$ . Es gelte  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) > 0$  für ein  $x_0 \in I$ . Mit Folgerung 5.30 und der Stetigkeit der zweiten Ableitung folgt, dass  $f$  im Punkt  $x_0$  ein striktes lokales Minimum besitzt.

## 6 Integralrechnung

### 6.1 Das Riemannsche Integral

Das Integral einer nichtnegativen Funktion  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist anschaulich der Flächeninhalt des Gebiets  $\{(x, y) : x \in I, 0 < y < f(x)\}$ . Falls  $f$  das Vorzeichen wechselt, sind die Gebiete unterhalb der  $x$ -Achse negativ zu zählen. Allerdings haben wir den Flächeninhalt von Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$  noch gar nicht definiert. Deshalb approximieren wir das Integral durch Rechtecksummen.

Eine Zerlegung  $Z$  eines Intervalls  $[a, b]$  ist gegeben durch Punkte  $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N = b$ . Wir setzen  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$  und  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  für  $k = 1, \dots, N$ . Die Feinheit von  $Z$  ist

$$\Delta(Z) = \max_{1 \leq k \leq N} \Delta x_k. \quad (6.1)$$

**Definition 6.1** (Riemannsche Summe). Sei  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine Riemannsche Summe zur Zerlegung  $Z$  ist

$$S_Z(f) = \sum_{k=1}^N f(\xi_k) \Delta x_k \in \mathbb{R}.$$

Die Punkte  $\xi_k \in I_k$  heißen Stützstellen.

Die Riemannsche Summe ist in Abbildung 36 illustriert und definiert einen Näherungswert für das Integral. Eine konkrete Wahl der Zerlegung und der Stützstellen, zum Beispiel die äquidistante Zerlegung mit Intervallmittelpunkten als Stützstellen, führt auf ein numerisches Verfahren zur Approximation des Integrals. Wir wollen aber beliebige Zerlegungen zulassen.

**Satz 6.2** (Integral stetiger Funktionen). Sei  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es ein  $S \in \mathbb{R}$ , das Integral von  $f$ , so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f) = S$  für jede Folge von Zerlegungen  $Z_n$  mit  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f) = S =: \int_a^b f(x) dx \quad \text{falls } \Delta(Z_n) \rightarrow 0.$$

Die Integrationsvariable ist analog zu einem Summationsindex, sie kann beliebig umbenannt werden. In Anwendungen ist es aber manchmal hilfreich, den Namen richtig zu wählen.

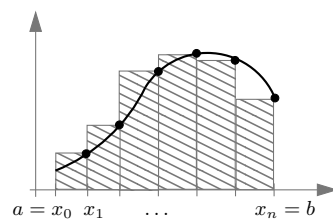
**Beispiel 6.3.** Die konstante Funktion  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = c$ , ist integrierbar mit

$$\int_a^b f(x) dx = c(b - a).$$

Denn für jede Zerlegung  $Z$  und jede Wahl der  $\xi_k \in I_k$  gilt

$$S_Z(f) = \sum_{k=1}^N c \Delta x_k = c \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) = c(b - a).$$

Bei der Berechnung des Integrals konstanter Funktionen tritt der sogenannte *Tele-*



**Abbildung 35.** Approximation des Integrals einer Funktion mit Hilfe einer Treppenfunktionen.

skopeffekt

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

auf.

**Beispiel 6.4.** Für  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$  wähle die Unterteilungspunkte  $x_k = a + k \frac{b-a}{N}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , und die Stützstellen  $\xi_k = x_k$  mit  $k \geq 1$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} S_Z(f) &= \sum_{k=1}^N \left( a + k \frac{b-a}{N} \right) \frac{b-a}{N} \\ &= a(b-a) + (b-a)^2 \frac{N(N+1)}{2N^2} \\ &\rightarrow \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \quad \text{mit } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Es folgt mit Satz 6.2

$$\int_a^b x \, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stückweise stetig, wenn es eine Zerlegung  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  gibt, so dass  $f$  auf jedem Intervall  $[x_{k-1}, x_k]$  stetig ist nach eventueller Abänderung in den Endpunkten  $x_{k-1}, x_k$ . Dies ist gleichbedeutend damit, dass die links- und rechtsseitigen Grenzwerte in den Punkten  $x_k$  existieren. Es ist plausibel, dass Satz 6.2 auch für stückweise stetige Funktionen gilt, das heißt alle Folgen von Riemannschen Summen  $S_{Z_n}(f)$  mit  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  haben einen gemeinsamen Grenzwert. Damit ist das Integral definiert, und es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \, dx. \quad (6.2)$$

Der einfachste Fall sind die (Riemannschen) Treppenfunktionen: für diese ist  $f$  auf  $(x_{k-1}, x_k)$  konstant gleich  $c_k \in \mathbb{R}$ , und es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{k=1}^N c_k (x_k - x_{k-1}).$$

Das Integral einer stückweise stetigen Funktion ist definiert als Grenzwert der Flächeninhalte unter approximierenden Treppenfunktionen. Die Konstruktion zeigt, dass für jeden Punkt  $c \in [a, b]$  die Zerlegung

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

gilt.

Im Allgemeinen ist die Berechnung des Integrals als Grenzwert von Riemannschen Summen unpraktisch. Es ist viel effektiver, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung einzusetzen. Bevor wir diese Methode behandeln, sammeln wir einige Eigenschaften des Integrals.



**Satz 6.5** (Linearität des Integrals). Für  $f, g : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

*Beweis.* Für jede Zerlegung  $Z$  mit Stützstellen  $\xi_k$  gilt

$$\begin{aligned} S_Z(\alpha f + \beta g) &= \sum_{k=1}^N (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)) \Delta x_k \\ &= \alpha \sum_{k=1}^N f(\xi_k) \Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^N g(\xi_k) \Delta x_k \\ &= \alpha S_Z(f) + \beta S_Z(g). \end{aligned}$$

Wählen wir eine Folge  $Z_n$  mit  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ , so folgt die Behauptung mit Satz 6.2.  $\square$

**Satz 6.6** (Monotonie des Integrals). Seien  $f, g : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann folgt:

$$f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in I \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

*Beweis.* Für jede Zerlegung  $Z$  mit Stützstellen  $\xi_k$  gilt

$$S_Z(f) = \sum_{k=1}^N f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^N g(\xi_k) \Delta x_k = S_Z(g).$$

Wähle wieder eine Folge  $Z_n$  mit  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  mit  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Satz 6.7.** Für  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig gelten die Ungleichungen

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a) \sup_I |f|.$$

*Beweis.* Für jede Zerlegung  $Z$  mit Stützstellen  $\xi_k$  gilt mit der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \sum_{k=1}^N |f(\xi_k)| \Delta x_k \leq \sup_I |f| \sum_{k=1}^N \Delta x_k = (b-a) \sup_I |f|.$$

Mit anderen Worten

$$|S_Z(f)| \leq S_Z(|f|) \leq (b-a) \sup_I |f|.$$

Die Abschätzungen folgen nun durch Wahl von  $Z_n$  wie oben.  $\square$

Aus der Monotonie des Integrals folgt mit dem Zwischenwertsatz der

**Satz 6.8** (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Seien  $f, \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und es sei  $\varphi \geq 0$ . Dann gibt es ein  $\xi \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Im Spezialfall  $\varphi = 1$  folgt  $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$ .

*Beweis.* Wir können annehmen, dass  $\int_a^b \varphi(x) dx = 1$ . Setze  $m = \min_{x \in I} f(x)$  und  $M = \max_{x \in I} f(x)$ . Dann gilt  $m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi$ , also

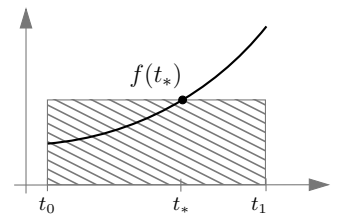
$$m = \int_a^b m\varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x) dx \leq \int_a^b M\varphi(x) dx = M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein  $\xi \in [a, b]$  mit  $f(\xi) = \int_a^b f(x)\varphi(x) dx$ .  $\square$

**Beispiel 6.9.** Gibt eine Funktion  $f(t)$  die Geschwindigkeit eines Objekts zum Zeitpunkt  $t$  an, so entspricht ihr Integral über ein Zeitintervall der zurückgelegten Strecke. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung liefert in diesem Fall eine Durchschnittsgeschwindigkeit  $f(t_*)$ , mit der man im selben Zeitraum bei konstanter Geschwindigkeit dieselbe Strecke zurücklegt, das heißt es gilt

$$(t_1 - t_0)f(t_*) = \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt$$

und diese spezielle Geschwindigkeit tritt mindestens einmal auf.



**Abbildung 36.** Geometrische Interpretation des Mittelwertsatzes.

## 6.2 Ableitung und Integral

Wir kommen nun zu dem zentralen, von Newton und Leibniz studierten Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration. Im Folgenden bezeichnet  $I$  ein Intervall.

**Definition 6.10.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine differenzierbare Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Stammfunktion von  $f$ , wenn gilt:

$$F' = f \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

**Satz 6.11.** Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  auf  $I$ , so ist jede Stammfunktion von  $f$  auf  $I$  von der Form  $F + c$ , für eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Sei  $G$  auch Stammfunktion von  $f$  auf  $I$ . Es folgt

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0.$$

Nach Folgerung 5.24 in Kapitel 4 gibt es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  mit  $G - F = c$ , also  $G = F + c$ .  $\square$

Folgerung 6.11 sagt aus, dass eine Lösung  $F$  der Gleichung  $F' = f$  bis auf eine additive Konstante  $c \in \mathbb{R}$  eindeutig bestimmt ist. Es schließt sich hier unmittelbar die Frage nach der Existenz an:

*Für welche  $f$  ist die Gleichung  $F' = f$  auf dem Intervall  $I$  lösbar?*

Um das zu beantworten, verallgemeinern wir die Definition des Integrals noch auf den Fall von Integrationsgrenzen  $b \leq a$ . Wir setzen

$$\int_a^b f(x) dx := - \int_b^a f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Es folgt dann für beliebige  $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx. \quad (6.3)$$

Für  $a \leq b \leq c$  gilt dies nach dem Beispiel zu stückweise stetigen Funktionen, und allgemein folgt (6.3) dann durch Vertauschung von  $a, b$  und  $c$ .

**Satz 6.12** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist für jedes  $x_0 \in I$  die Funktion

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$$

eine Stammfunktion von  $f$ , das heißt es gilt  $F'(x) = f(x)$  für alle  $x \in I$ .

*Beweis.* Die Funktion  $F$  ist wohldefiniert nach Satz 6.2. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x+h} f(\xi) d\xi - \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi - hf(x) \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} (f(\xi) - f(x)) d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} |h| \sup_{|\xi-x| \leq |h|} |f(\xi) - f(x)| \quad (\text{Satz 6.7}). \end{aligned}$$

Da  $f$  im Punkt  $x$  stetig ist, geht die rechte Seite mit  $h \rightarrow 0$  gegen Null.  $\square$

**Folgerung 6.13.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt für jedes  $x_0 \in I$

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi \quad \text{für alle } x \in I. \quad (6.4)$$

*Beweis.* Nach Satz 6.11 und Satz 6.12 gibt es ein  $c \in \mathbb{R}$  mit

$$F(x) = c + \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi \quad \text{für alle } x \in I.$$

Setze  $x = x_0$  und erhalte  $c = F(x_0)$ .  $\square$

**Folgerung 6.14** (Berechnung von bestimmten Integralen mit einer Stammfunktion). Sei  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_{x=a}^{x=b}$$

*Beweis.* Folgt aus (6.4) mit  $x_0 = a, x = b$ .  $\square$

Die Folgerung eröffnet die Möglichkeit, viele Integrale durch Kenntnis von Stammfunktionen (bzw. Ableitungsregeln) auszurechnen. Das Bilden einer Stammfunktion wird

gelegentlich auch als *Aufleiten* bezeichnet im Gegensatz zum *Ableiten*.

$f(x)$	$F(x)$	Bemerkungen
$x^k$	$\frac{1}{k+1} x^{k+1}$	$k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ , $x \neq 0$ für $k < 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$x \in (0, \infty)$
$x^\alpha$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , $x \in (0, \infty)$
$e^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$	$\lambda \neq 0$
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$x \notin (2\mathbb{Z} + 1)\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$x \notin \mathbb{Z}\pi$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x \in (-1, 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos x$	$x \in (-1, 1)$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{Arsinh} x$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Arcosh} x$	$x \in (1, \infty)$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{Artanh} x$	$x \in (-1, 1)$

Weiter können wir mit dem Hauptsatz bzw. Folgerung 6.14 aus den Differentiationsregeln von Kapitel 4.1 Integrationsregeln herleiten. Dies wird im Folgenden durchgeführt.

**Satz 6.15** (Partielle Integration). Seien  $f, g \in C^1(I)$  mit  $I = [a, b]$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

*Beweis.* Es gilt nach der Produktregel

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{auf } I = [a, b].$$

Folgerung 6.14 liefert die Behauptung.  $\square$

**Satz 6.16** (Substitutions- oder Transformationsregel). Sei  $I = [a, b]$ ,  $I^* = [\alpha, \beta]$  und  $\varphi \in C^1(I)$  mit  $\varphi(I) \subset I^*$ . Dann gilt für  $f \in C^0(I^*)$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx.$$

*Beweis.* Wähle nach Satz 6.12 eine Stammfunktion  $F \in C^1(I^*)$  von  $f$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy &= [F(y)]_{y=\varphi(a)}^{y=\varphi(b)} \quad (\text{Folgerung 6.14}) \\ &= [F(\varphi(x))]_{x=a}^{x=b} \\ &= \int_a^b (F \circ \varphi)'(x) dx \quad (\text{Folgerung 6.14}) \\ &= \int_a^b F'(\varphi(x)) \varphi'(x) dx \quad (\text{Kettenregel}) \\ &= \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

□

Hilfreich zum Merken der Regel ist die symbolische oder formale, das heißt von den präzisen Festlegungen der Bedeutungen der Objekte gelöste, Umformung

$$y = \phi(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \phi'(x) \quad \Rightarrow \quad dy = \phi'(x) dx.$$

Der Faktor  $\phi'(x)$  korrigiert dabei die von  $\phi$  verursachten Längenänderungen im Integrationsintervall, was besonders im Fall einer konstanten Funktion  $f$  deutlich wird.

Für die Anwendung der Substitutionsregel ist folgendes *Kochrezept* nützlich: Bei einem gegebenen Integral  $\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy$  möchten wir  $y = y(x)$  substituieren. Dazu berechnen wir

$$y = y(x) \quad \Rightarrow \quad dy = y'(x) dx.$$

Für die Intervallgrenzen bestimmen wir durch Auflösen nach  $x$  die Umkehrfunktion

$$x = x(y) \quad \Rightarrow \quad a = x(\alpha), b = x(\beta).$$

Damit gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_a^b f(y(x)) y'(x) dx.$$

Es folgen einige Anwendungen der Regeln. Ein Beispiel für die partielle Integration:

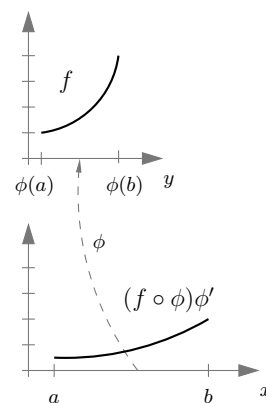
#### Beispiel 6.17.

$$\int_1^x \ln u du = \int_1^x 1 \cdot \ln u du = [u \ln u]_{u=1}^{u=x} - \int_1^x u \frac{1}{u} du = x \ln x - (x - 1).$$

Eine schöne Anwendung von Satz 6.15 ist wie folgt.

**Beispiel 6.18.** Wir berechnen  $A_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ . Zunächst gilt

$$A_0 = \pi/2 \quad \text{und} \quad A_1 = [-\cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} = 1.$$



**Abbildung 37.** Grafische Darstellung der Substitutionsregel.

Für  $n \geq 1$  erhalten wir durch partielle Integration

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin x \sin^n x \, dx \\ &= \underbrace{\left[ -\cos x \sin^n x \right]_{x=0}^{x=\pi/2}}_{=0} + n \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-1} x \, dx \\ &= n \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \, dx - n \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x \, dx, \end{aligned}$$

wobei wir  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  benutzt haben. Es folgt

$$A_{n+1} = \frac{n}{n+1} A_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Durch Induktion erhalten wir

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot A_0 = \left( \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right) \frac{\pi}{2}, \\ A_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot A_1 = \left( \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \right) 1. \end{aligned}$$

Als nächstes Beispiele zur Substitutionsregel.

**Beispiel 6.19** (Lineare Parameterwechsel). Im Integral  $\int_{\alpha}^{\beta} f(y) \, dy$  substituieren wir

$$y = \frac{x - x_0}{\lambda} \quad \text{für } x_0 \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

Es ist  $dy = 1/\lambda \, dx$  und  $x = x_0 + \lambda y$ . Also folgt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) \, dy = \frac{1}{\lambda} \int_{x_0+\lambda\alpha}^{x_0+\lambda\beta} f\left(\frac{x-x_0}{\lambda}\right) \, dx.$$

**Beispiel 6.20** (Integration von Ableitungen).

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx &= \int_a^b (\ln f)'(x) \, dx = [\ln f(x)]_{x=a}^{x=b} \quad (f > 0), \\ \int_a^b u \sqrt{1+u^2} \, du &= \frac{1}{3} \int_a^b ((1+u^2)^{\frac{3}{2}})' \, du = \left[ \frac{1}{3} (1+u^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{u=a}^{u=b}, \\ \int_a^b F'(f(x)) f'(x) \, dx &= [F(f(x))]_{x=a}^{x=b}. \end{aligned}$$

**Beispiel 6.21** (Flächeninhalt unter Hyperbel). Zu berechnen ist das Integral

$$A(x) = \int_1^x \sqrt{u^2 - 1} \, du \quad \text{für } x \geq 1.$$

Wir substituieren  $u = \cosh t$  und erhalten  $du = \sinh t \, dt$ ,  $t = \operatorname{Arcosh} u$ , also mit

$\operatorname{Arcosh} 1 = 0$

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \int_0^{\operatorname{Arcosh} x} \sinh^2 t \, dt \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{\operatorname{Arcosh} x} (e^{2t} + e^{-2t} - 2) \, dt \\
 &= \left[ \frac{1}{8} (e^{2t} - e^{-2t}) \right]_{t=0}^{t=\operatorname{Arcosh} x} - \frac{1}{2} \operatorname{Arcosh} x \\
 &= \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{e^t + e^{-t}}{2} \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right]_{t=0}^{t=\operatorname{Arcosh} x} - \operatorname{Arcosh} x \right) \\
 &= \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{Arcosh} x).
 \end{aligned}$$

Für rationale Funktionen, also Quotienten von Polynomen, hat man ein spezielles Integrationsverfahren, die Partialbruchzerlegung, die wir hier nur an einem Beispiel vorführen:

**Beispiel 6.22** (Partialbruchzerlegung). Um das Integral  $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$  zu berechnen, machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{(A-B)x + (A+B)}{1-x^2}.$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt  $A = B = 1/2$ , also folgt

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2} = \int_{-1/2}^{1/2} \left( \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x} \right) dx = \frac{1}{2} \left[ \ln \frac{1+x}{1-x} \right]_{x=-1/2}^{x=1/2} = \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 1/3) = \ln 3.$$

Mit der Idee der Partialbruchzerlegung lassen sich allgemein rationale Funktionen  $r = p/q$  darstellen durch

$$r(x) = s(x) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}}{(x-x_i)^j}$$

mit einem Polynom  $s$ , den (hier ausschließlich reellen) Nullstellen  $x_i$  von  $q$  mit Vielfachheiten  $r_i$  und geeigneten Koeffizienten  $a_{ij}$ . Die Darstellung ermöglicht die Berechnung von Integralen von  $r$ .

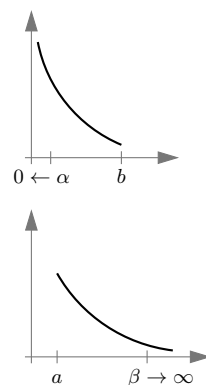
Wir wollen auch Integrale über unendliche Intervalle berechnen, sowie Integrale mit Ausnahmestellen, wo die Funktion  $f(x)$  rechts- oder linksseitig nicht stetig ist. Wir fangen mit der Situation an, wo die Problemstelle die rechte (oder linke, analog) Intervallgrenze ist.

**Definition 6.23** (uneigentliches Integral). Sei  $-\infty < a < b \leq \infty$ . Für eine stetige Funktion  $f : I = [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  setzen wir

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta f(x) \, dx,$$

falls der rechte Grenzwert existiert. Andernfalls heißt das Integral divergent.

Uneigentliche Integrale dienen dazu, Integrale auf unbeschränkten oder halboffenen Intervallen durch Integrale auf abgeschlossenen Intervallen mit Hilfe von Grenzübergängen zu approximieren, beispielsweise wenn eine Funktion an einem Intervallende singulär ist.



**Abbildung 38.** Uneigentliche Integrale auf einem halboffenen Intervall (oben) und einem unbeschränkten Intervall (unten).

**Beispiel 6.24.**

$$\int_1^\infty x^\alpha dx = \begin{cases} \lim_{R \nearrow \infty} \left[ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{x=1}^{x=R} = -\frac{1}{\alpha+1} & \text{für } \alpha < -1, \\ \text{divergent} & \text{für } \alpha \geq -1. \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{x=\varepsilon}^{x=1} = \frac{1}{\alpha+1} & \text{für } \alpha > -1, \\ \text{divergent} & \text{für } \alpha \leq -1. \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b \nearrow 1} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b \nearrow 1} \arcsin b = \pi/2.$$

Als nächstes betrachten wir eine Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , für die sowohl die linke als auch die rechte Intervallgrenze problematisch ist, zum Beispiel  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ . Wir wählen dann einen Zwischenpunkt  $c \in (a, b)$  und setzen

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^c f(x) dx + \lim_{\beta \nearrow b} \int_c^\beta f(x) dx,$$

sofern die beiden Grenzwerte bzw. uneigentliche Integrale rechts existieren. Diese Definition hängt nicht von der Wahl von  $c$  ab, denn es folgt zum Beispiel für  $c' > c$

$$\int_\alpha^{c'} f(x) dx = \int_\alpha^c f(x) dx + \int_c^{c'} f(x) dx \xrightarrow{\alpha \searrow a} \int_a^c f(x) dx + \int_c^{c'} f(x) dx,$$

$$\int_{c'}^\beta f(x) dx = \int_c^\beta f(x) dx - \int_c^{c'} f(x) dx \xrightarrow{\beta \nearrow b} \int_c^b f(x) dx - \int_c^{c'} f(x) dx.$$

Also bleibt die Summe der Integrale gleich.

**Beispiel 6.25.**

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} [\arctan x]_{x=-R}^{x=0} + \lim_{R \rightarrow \infty} [\arctan x]_{x=0}^{x=R} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Ganz analog ist die Situation im Fall einer stetigen Funktion  $f : [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a < c < b$ , also mit einer Singularität im Innern des Intervalls. Wir definieren

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

wobei wieder beide uneigentlichen Integrale rechts existieren müssen.

**Beispiel 6.26.** Für  $\alpha > -1$  berechnen wir

$$\int_{-1}^1 |x|^\alpha dx = \int_{-1}^0 (-x)^\alpha dx + \int_0^1 x^\alpha dx = 2 \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{2}{\alpha+1}.$$



**Beispiel 6.27.** Für die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  ist das uneigentliche Integral auf dem Intervall  $[-1, 1]$  nicht definiert, denn die einzelnen Integrale gehen gegen  $\pm\infty$ :

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} &= [\ln x]_{x=\varepsilon}^1 = -\ln \varepsilon \rightarrow \infty, \\ \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} &= [\ln(-x)]_{x=-1}^{x=-\varepsilon} = \ln \varepsilon \rightarrow -\infty.\end{aligned}$$

Allerdings existiert immer noch der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (\ln \varepsilon - \ln \varepsilon) = 0.$$

Diesen Wert nennt man dann den Cauchy-Hauptwert des Integrals (Englisch: principal value). Solche Hauptwerte sind mit Vorsicht zu genießen, wir wollen sie nicht weiter betrachten.

Es stellt sich die Frage nach Kriterien zur Existenz uneigentlicher Integrale.

**Satz 6.28** (Vergleichstest). Sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Es gebe  $\alpha > 1$  und  $R > 0$  mit

$$|f(x)| \leq \frac{C}{x^\alpha} \quad \text{für alle } x \geq R,$$

wobei  $C < \infty$  Konstante. Dann konvergiert das unbestimmte Integral  $\int_0^\infty f(x) dx$ .

*Beweis.* Sei zunächst  $f \geq 0$ . Dann gilt für alle  $b \in [R, \infty)$

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_0^b f(x) dx \\ &\leq \int_0^R f(x) dx + \int_R^b \frac{C}{x^\alpha} dx \\ &\leq \int_0^R f(x) dx + C \int_R^\infty \frac{dx}{x^\alpha} < \infty.\end{aligned}$$

Die Funktion  $F(b) = \int_0^b f(x) dx$  ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, also konvergiert das Integral mit  $b \rightarrow \infty$ . Hat  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  kein Vorzeichen, so betrachten wir

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad \text{und} \quad f^-(x) = -\min(f(x), 0).$$

Die Funktionen  $f^\pm$  sind stetig und erfüllen die Abschätzung

$$0 \leq f^\pm(x) \leq |f(x)| \leq \frac{C}{x^\alpha} \quad \text{für alle } x \geq R.$$

Also existieren die uneigentlichen Integrale von  $f^\pm$ . Aber  $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ , somit

$$\int_0^b f(x) dx = \int_0^b f^+(x) dx - \int_0^b f^-(x) dx,$$

und die gewünschte Konvergenz für  $b \rightarrow \infty$  folgt.  $\square$

Hinreichend für die Konvergenz eines uneigentlichen Integrals einer Funktion  $f$  auf dem unbeschränkten Intervall  $[a, \infty)$  ist, dass  $f$  für  $x \rightarrow \infty$  schneller fällt als  $1/x$  beziehungsweise

ungsweise, dass  $|f(x)| \leq c|x|^{-\gamma}$  für alle  $x \geq R_*$  mit Zahlen  $c, R_*$  und  $\gamma > 1$  gilt.

**Beispiel 6.29.** Als letztes Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f : \left[\frac{\pi}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Wir können Satz 6.28 nicht direkt anwenden, denn es gilt nur  $|f(x)| \leq 1/x$ , wir brauchen aber eine Potenz größer als Eins. Der Trick ist, die Konvergenz durch partielle Integration zu verbessern: Es gilt

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^b \sin x \frac{1}{x} dx = \left[ (-\cos x) \frac{1}{x} \right]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=b} - \int_{\frac{\pi}{2}}^b (-\cos x) \left( -\frac{1}{x^2} \right) dx.$$

Das rechte Integral erfüllt die Abschätzung aus Satz 6.28 mit  $\alpha = 2 > 1$ , also konvergiert es für  $b \rightarrow \infty$ . Wir erhalten

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^b \frac{\sin x}{x} dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \in \mathbb{R}.$$

Meistens wird das Integral von  $\frac{\sin x}{x}$  auf  $[0, \infty)$  genommen. Im Nullpunkt gibt es aber kein Problem, denn dort konvergiert die Funktion gegen Eins. Für die Frage der Konvergenz des Integrals spielt der Anfangspunkt also keine Rolle.

## 7 Die Taylorreihe

### 7.1 Darstellung von Funktionen durch Reihen

Viele Funktionen in der Analysis können als unendliche Reihen definiert beziehungsweise dargestellt werden. Darum ist es wichtig, die Konvergenzfrage für Reihen zu untersuchen. Wichtige Beispiele sind die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen.

**Definition 7.1.** Seien  $a_n \in \mathbb{R}$  für  $n \in \mathbb{N}_0$ . Die Reihe mit den Gliedern  $a_n$  ist die Folge  $S_0 = a_0$ ,  $S_1 = a_0 + a_1$ ,  $S_2 = a_0 + a_1 + a_2$ ,  $\dots$ , bzw. allgemein

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Reihe heißt konvergent mit Wert  $S \in \mathbb{R}$ , wenn  $S_n$  gegen  $S$  konvergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Die Zahl  $S_n$  heißt  $n$ -te Partialsumme der Reihe. Oft wird die Reihe in der Form  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$  angegeben. Leider ist es auch üblich, die Reihe selbst - unabhängig von der Frage der Konvergenz - mit dem Symbol  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  zu bezeichnen.

**Beispiel 7.2.** Für die Reihe  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$  bzw.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$  gilt

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}, \quad S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}, \dots$$

Durch Induktion folgt  $S_n = \frac{n}{n+1}$ . Also ist die Reihe konvergent mit Wert  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ .

Für konvergente Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ist auch  $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$  konvergent, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Dies ergibt sich aus dem entsprechenden Satz für Folgen. Durch Abändern, Hinzufügen oder Weglassen von endlich vielen Gliedern ändert sich nichts an der Konvergenz oder Divergenz, sondern nur der Wert der Reihe. Zum Beispiel haben wir

$$\sum_{k=n}^m a_k = \sum_{k=0}^m a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k. \quad (7.1)$$

Wie bei Folgen kann der Anfangsindex einer Reihe statt  $k = 0$  auch eine andere Zahl sein.

**Beispiel 7.3** (Geometrische Reihe). Die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  konvergiert genau für  $|x| < 1$ . Die Formel für die geometrische Summe, siehe Beispiel (2.20),

ergibt

$$S_n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \rightarrow \frac{1}{1-x} \quad \text{falls } |x| < 1.$$

Ist dagegen  $|x| \geq 1$ , so folgt  $|S_{n+1} - S_n| = |x|^{n+1} \geq 1$ , und  $S_n$  kann nicht konvergieren.

Im Allgemeinen kann eine Reihe nicht einfach ausgerechnet werden. Stattdessen gibt es Tests, mit denen die Konvergenz gezeigt oder widerlegt werden kann, abhängig von den Summanden  $a_n$ . Die folgende Aussage ist vom zweiten Typ.

**Satz 7.4** (Nullfolgentest). Ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent, so folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist die Folge der Partialsummen  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$  konvergent mit Grenzwert  $S$ , also folgt  $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0$ .  $\square$

**Beispiel 7.5** (Harmonische Reihe). Die Bedingung  $a_k \rightarrow 0$  ist *nicht hinreichend* für die Konvergenz der Reihe, zum Beispiel ist  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$ , siehe Kapitel 2, Beispiel 4.20. Für jedes  $m \in \mathbb{N}_0$  ist die Summe der Summanden  $1/k$  mit  $2^m \leq k < 2^{m+1}$  mindestens  $1/2$ , sodass die Partialsummen  $S_n$  für  $n \rightarrow \infty$  unbeschränkt sind.

Wir wollen nun hinreichende Kriterien für die Konvergenz von Reihen angeben, und beginnen mit einem einfachen Fall.

**Satz 7.6** (Reihen mit nichtnegativen Gliedern). Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  mit  $a_k \geq 0$  konvergiert genau dann, wenn die Partialsummen  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$  nach oben beschränkt sind.

*Beweis.*  $S_n$  ist monoton wachsend, die Behauptung folgt aus Satz 4.22.  $\square$

Ein effektives Kriterium ist der Vergleich von Reihen und uneigentlichen Integralen, siehe Abbildung 39.

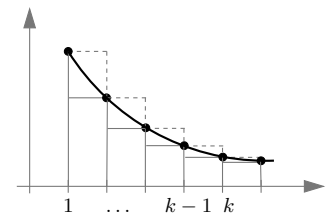
**Satz 7.7** (Integralvergleichstest). Sei  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton fallend und nichtnegativ. Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  genau dann, wenn  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  konvergiert.

*Beweis.* Für  $x \in [k-1, k]$  gilt  $f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$ , wobei  $k \geq 2$ . Durch Integration folgt

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Konvergiert das Integral, so sind die Partialsummen  $S_n$  nach oben beschränkt und die Reihe konvergiert nach Satz 7.6. Ist die Reihe konvergent, so ist das Integral eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Funktion der oberen Grenze, also konvergent.  $\square$

Beim Vergleichsprinzip für die Konvergenz von Reihen und uneigentlichen Integralen wird die Reihe als approximierende Treppenfunktion mit den Punkten  $1, 2, \dots$  und fester Zerlegungsfeinheit  $\Delta(Z) = 1$  angesehen; basierend auf der aus der Monotonie von  $f$  resultierenden Ungleichungen  $f(k-1) \geq f(x) \geq f(k)$  für  $k-1 \leq x \leq k$  einmal oberhalb und einmal unterhalb von  $f$ .



**Abbildung 39.** Vergleich zwischen Reihe und Integral.

**Beispiel 7.8** (Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}$ ). Für  $\alpha < 0$  ist die Funktion  $f(x) = x^{\alpha}$  nichtnegativ und fallend auf  $[1, \infty)$ . Das Integral  $\int_1^{\infty} x^{\alpha} dx$  konvergiert genau für  $\alpha < -1$ , siehe Beispiel 6.24. Somit konvergieren auch die Reihen genau für  $\alpha < -1$ .

**Satz 7.9** (absolut konvergent  $\Rightarrow$  konvergent). Falls  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergiert, so konvergiert auch die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und es gilt die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|. \quad (7.2)$$

Eine Reihe mit  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$  heißt absolut konvergent.

*Beweis.* Für  $a_k^+ = \max(a_k, 0)$  und  $a_k^- = -\min(a_k, 0)$  folgt

$$\sum_{k=0}^n a_k^+ + \sum_{k=0}^n a_k^- = \sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

Nach Satz 7.6 sind  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^-$  konvergent. Wegen  $a_k = a_k^+ - a_k^-$  ist dann auch  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent, und es folgt

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

□

**Satz 7.10** (Majorantentest). Es gelte  $|a_k| \leq c_k$  wobei  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty$ . Dann ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent.

*Beweis.* Die Summen  $\sum_{k=0}^n |a_k|$  sind durch  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty$  beschränkt, also ist  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergent nach Satz 7.6. □

Man kann zeigen, dass die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}/k = 1 - 1/2 + 1/3 - + \dots$  konvergiert, obwohl die entsprechende Reihe mit positiven Vorzeichen – die harmonische Reihe – divergiert. Also ist absolute Konvergenz hinreichend, aber nicht notwendig für Konvergenz. Aber für unsere Zwecke ist absolute Konvergenz meistens passend. Es gibt eine Reihe weiterer Tests für absolute Konvergenz, zum Beispiel das Quotientenkriterium oder das Wurzelkriterium, für die wir aus Zeitgründen auf die Literatur verweisen.

Die einfachsten Funktionen, die wir kennen, sind natürlich die Polynome. Es ist naheliegend, neue Funktionen als Grenzwerte von Folgen bzw. Reihen von Polynomen zu suchen. Dies führt auf den Begriff der Potenzreihe.

**Definition 7.11** (Potenzreihen). Eine reelle Potenzreihe ist eine Reihe der Form

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{mit } a_k \in \mathbb{R}.$$

Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  haben wir eine Reihe von reellen Zahlen. Die Frage ist, für welche  $x$  die Reihe konvergiert. Es ist  $P(0) = a_0$ ; schlimmstenfalls divergiert die Reihe für alle  $x \neq 0$ , dann ist sie natürlich nicht von Interesse. Ein Beispiel ist  $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$  (verwende

den Nullfolgentest). Als anderes Extrem kann die Reihe für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergent sein, wie bei  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ . In diesem Fall liefert die Potenzreihe eine interessante Funktion, die Exponentialfunktion, an genau so was sind wir interessiert. Ein anderes Beispiel ist die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ , die genau für  $x \in (-1, 1)$  konvergiert. Allgemein kann die Menge der  $x$ , für die eine Potenzreihe konvergiert und damit eine Funktion definiert, wie folgt charakterisiert werden.

**Satz 7.12** (Konvergenzradius). Zu jeder Potenzreihe  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  gibt es genau ein  $R \in [0, \infty]$ , den Konvergenzradius, mit folgender Eigenschaft:

$$P(x) \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{für } |x| < R, \\ \text{divergent} & \text{für } |x| > R. \end{cases}$$

**Bemerkung 7.13.** • Für  $|x| = R$  ist keine allgemeine Aussage möglich.

- Der Begriff des Konvergenzradius ist eine Folge des wichtigen Sachverhalts, dass wenn eine Potenzreihe

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

für ein  $\tilde{x} \in \mathbb{R}$  konvergiert, sie dann für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $|x| < |\tilde{x}|$  absolut konvergiert. Dies folgt aus der Beschränktheit der Nullfolge  $|a_k||\tilde{x}|^k$  und der daraus resultierenden Abschätzung

$$|a_k x^k| = |a_k \tilde{x}|^k |x/\tilde{x}|^k \leq M q^k$$

mit  $q = |x/\tilde{x}| < 1$  und  $|a_k||\tilde{x}|^k \leq M$ . Nach dem Majorantenkriterium konvergiert  $P(x)$  also absolut.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit von  $R$  ist klar. Zur Existenz definieren wir

$$R = \sup\{|x| : P(x) \text{ konvergiert}\} \in [0, \infty].$$

Für  $|x| > R$  ist dann offensichtlich  $P(x)$  divergent. Sei nun  $|x| < R$ , also  $P(x_0)$  konvergent für ein  $x_0$  mit  $|x| < |x_0|$ , also  $q := |x|/|x_0| < 1$ . Nach Satz 7.4 geht  $|a_k||x_0|^k$  gegen Null, also gibt es ein  $M \in [0, \infty)$  mit  $|a_k||x_0|^k \leq M$  für alle  $k$ . Es folgt

$$|a_k| |x|^k = |a_k| |x_0|^k \left( \frac{|x|}{|x_0|} \right)^k \leq M q^k. \quad (7.3)$$

Die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  konvergiert, also folgt absolute Konvergenz aus dem Majorantenkriterium.  $\square$

Auf dem Konvergenzintervall  $(-R, R)$  definiert eine Potenzreihe  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  eine Funktion. Es stellt sich die Frage, ob  $P(x)$  differenzierbar ist und wenn ja, ob wir  $P'(x)$  durch gliedweise Differentiation berechnen können. Unter welchen Voraussetzungen gilt also die Identität

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} ?$$

Allgemeiner betrachten wir eine Folge  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  von Funktionen, die punktweise (d.h. an

jeder Stelle  $x \in I$ ) gegen eine Grenzfunktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  konvergieren:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{für jedes } x \in I. \quad (7.4)$$

Wir interessieren uns dafür, ob wir Integral und Ableitung mit dem Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  vertauschen können. Dies ist ein grundlegendes Problem, das in der Analysis immer wieder auftritt. Im Allgemeinen ist die punktweise Konvergenz nicht einmal ausreichend für die Stetigkeit der Grenzfunktion – hier ein Beispiel.

**Beispiel 7.14.** (i) Die Folge  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \arctan(nx)$ , konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{für } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(ii) Die Folge  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 4nx & \text{für } 0 \leq x \leq 1/(4n), \\ 1 - 4n(x - 1/(4n)) & \text{für } 1/(4n) < x \leq 1/(2n), \\ 0 & \text{für } 1/(2n) < x \leq 1, \end{cases}$$

konvergiert punktweise gegen die konstant Funktion  $f$  mit Wert Null.

In den nachfolgenden Vertauschungssätzen müssen wir also von  $f_n \rightarrow f$  mehr verlangen als nur die punktweise Konvergenz. Das Zauberwort ist hier gleichmäßige Konvergenz.

**Definition 7.15.** Sei  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge von Funktionen,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Wir sagen

$$f_n \rightarrow f \quad \text{gleichmäßig auf } I$$

wenn gilt

$$\|f_n - f\|_I = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{mit } n \rightarrow \infty. \quad (7.5)$$

Wir nennen  $\|f\|_I = \sup_{x \in I} |f(x)|$  die Supremumsnorm von  $f$  auf dem Intervall  $I$ .

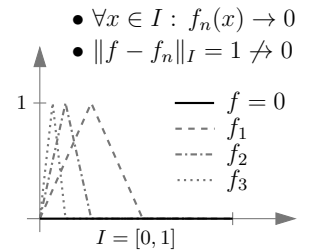
**Satz 7.16** (Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit). Seien  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Falls die  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  konvergieren, so ist  $f$  ebenfalls stetig auf  $I$ .

*Beweis.* Sei  $x_k \rightarrow x_0 \in I$  gegeben, zu zeigen ist  $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$ . Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\|f_n - f\|_I < \varepsilon/3$ . Dann folgt mit der Dreiecksungleichung

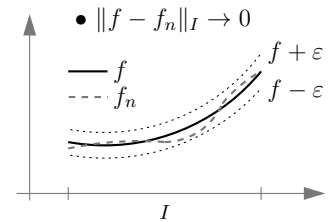
$$\begin{aligned} |f(x_k) - f(x_0)| &\leq |f(x_k) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f_n(x_k) - f_n(x_0)| + 2\varepsilon/3. \end{aligned}$$

Da  $f_n$  stetig, gilt  $|f_n(x_k) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$  für  $k$  hinreichend groß, und damit  $|f(x_k) - f(x_0)| < \varepsilon$ .  $\square$

Die gleichmäßige Konvergenz  $\|f - f_n\| \rightarrow 0$  einer Funktionenfolge  $f_n$  gegen eine Funktion  $f$  auf einem Intervall  $I$  fordert, dass für jede vorgegebene Toleranz  $\epsilon > 0$  eine Zahl  $N$  existiert, sodass die Abschätzung  $|f(x) - f_n(x)| \leq \|f - f_n\| < \epsilon$  gleichzeitig für alle  $n \geq N$  und alle  $x \in I$  gilt. Der schwächere Begriff der punktweisen Konvergenz fordert lediglich



**Abbildung 40.** Beispiel einer punktweise (aber nicht gleichmäßig) konvergenten Funktionenfolge.



**Abbildung 41.** Illustration des Konzepts der gleichmäßigen Konvergenz.

die unabhängige Konvergenz  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  in den einzelnen Punkten.

Die Funktionenfolge  $f_n(x) = g(x) + (1/n) \sin(x)$  konvergiert beispielsweise gleichmäßig gegen  $f(x) = g(x)$ , denn es gilt

$$\|f - f_n\| = \max_{x \in I} |f(x) - f_n(x)| = \max_{x \in I} |(1/n) \sin(x)| \leq 1/n$$

und  $1/n$  konvergiert gegen Null.

**Satz 7.17** (Vertauschung von Konvergenz und Integral). Seien  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Falls die  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergieren, so ist  $f$  stetig und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

*Beweis.* Die Stetigkeit von  $f$  wurde im vorigen Satz gezeigt. Die Standardabschätzung des Integrals, siehe Satz 6.7, liefert

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \|f_n - f\|_I (b - a) \rightarrow 0.$$

□

**Satz 7.18** (Vertauschung von Konvergenz und Ableitung). Seien  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und es gelte  $f_n \rightarrow f$  punktweise auf  $I$ . Falls die Folge  $f'_n$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $g$  konvergiert, so ist  $f$  stetig differenzierbar mit  $f' = g$ .

*Beweis.* Für  $x_0 \in I$  gilt nach Satz 6.12, dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(\xi) d\xi \quad \text{für alle } x \in I.$$

Da  $f'_n$  gleichmäßig gegen  $g$  konvergiert, folgt nach Satz 7.17 mit  $n \rightarrow \infty$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi \quad \text{für alle } x \in I.$$

Die Funktion  $g$  ist stetig nach Satz 7.16, also folgt wieder mit dem Hauptsatz  $f' = g$ .

□

Wir kommen jetzt auf die Potenzreihen zurück. Bevor wir die Sätze anwenden können, müssen wir die Frage der Gleichmäßigkeit der Konvergenz klären. Sei  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ . Es gilt

$$P(x) - P_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \quad \text{mit } P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Wir schätzen wie in Satz 7.12 ab. Für  $\varrho < R$  wähle  $r \in (\varrho, R)$ , also  $q := \varrho/r < 1$ . Da  $P(r)$  konvergiert, gilt  $|a_k| r^k \leq M$  für alle  $k$ . Es folgt für  $n \rightarrow \infty$

$$\|P - P_n\|_{[-\varrho, \varrho]} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \varrho^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k \left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \leq M \sum_{k=n+1}^{\infty} q^k = \frac{M q^{n+1}}{1 - q} \rightarrow 0.$$



**Satz 7.19.** Eine Potenzreihe  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  konvergiert auf jedem Teilintervall  $[-\varrho, \varrho]$  mit  $\varrho < R$  gleichmäßig, und  $P(x)$  ist stetig auf  $(-R, R)$ .

*Beweis.* Gleichmäßige Konvergenz wurde soeben gezeigt, Stetigkeit folgt mit Satz 7.16.  $\square$

Um die Ableitung einer Potenzreihe zu bilden, brauchen wir eine Hilfsaussage.

**Lemma 7.20.** Sei  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R \in [0, \infty]$ . Dann hat die formal differenzierte Reihe

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

denselben Konvergenzradius  $R$ .

*Beweis.* Da  $|a_k x^k| \leq |k a_k x^{k-1}| \cdot |x|$  für  $k \geq 1$ , hat  $Q(x)$  höchstens den Konvergenzradius  $R$ . Zu  $r \in (0, R)$  gibt es ein  $M \in [0, \infty)$  mit  $|a_k| r^k \leq M$ , da  $P(r)$  konvergiert. Es folgt für  $0 < |x| < r$ , also  $q = |x|/r \in (0, 1)$ ,

$$k |a_k| |x|^{k-1} = \frac{|a_k| r^k}{|x|} k \left( \frac{|x|}{r} \right)^k \leq \frac{M}{|x|} k q^k.$$

Da  $\ln q < 0$ , konvergiert das Integral der Funktion  $f(s) = s q^s = s e^{s \ln q}$  auf  $[0, \infty)$  (verwende partielle Integration). Also ist die rechte Reihe konvergent nach Satz 7.7, und  $Q(x)$  ist absolut konvergent für  $|x| < R$ .  $\square$

**Satz 7.21** (Differenzierbarkeit von Potenzreihen). Eine Potenzreihe  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  mit Konvergenzradius  $R > 0$  ist auf dem Intervall  $(-R, R)$  differenzierbar, und die Ableitung kann gliedweise berechnet werden:

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad \text{für alle } x \in (-R, R). \quad (7.6)$$

*Beweis.* Die Funktionen  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  konvergieren auf  $(-R, R)$  punktweise gegen  $P(x)$ , und nach Lemma 7.20 und Satz 7.19 konvergieren die  $P'_n$  gleichmäßig auf jedem Teilintervall  $[-\varrho, \varrho] \subset (-R, R)$  gegen die stetige Funktion  $Q : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ . Die Behauptung folgt aus Satz 7.18.  $\square$

## 7.2 Taylorentwicklung

Sei  $f \in C^k(I)$ , das heißt  $f$  hat stetige Ableitungen bis zur Ordnung  $k$ . Die Idee der Taylorentwicklung ist es, die Funktion  $f(x)$  mit einem Polynom zu vergleichen, das mit  $f(x)$  an einer festen Stelle  $x_0$  „von höherer Ordnung“ übereinstimmt. Genauer betrachten wir das  $k$ -te Taylorpolynom

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j. \quad (7.7)$$

Dies hat offenbar die Eigenschaft  $P^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$  für  $j = 0, 1, \dots, k$ . Es sollte dann auch nahe bei  $x_0$  die Funktion gut approximieren, und das soll quantifiziert werden. Die

## Fehlerfunktion

$$R_k : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad R_k(x) = f(x) - P_k(x) \quad (7.8)$$

heißt Restglied  $k$ -ter Ordnung der Taylorentwicklung in  $x_0$ . Knackpunkt bei der Taylorentwicklung ist die Abschätzung dieses Restglieds und damit eine Aussage darüber, wie gut die Funktion durch das Taylorpolynom approximiert wird. Hierfür gibt es verschiedene mögliche Darstellungen von  $R_k$ .

**Satz 7.22** (Taylorentwicklung). Sei  $f \in C^{k+1}(I)$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $x_0 \in I$ . Dann gilt

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + R_k(x) \quad \text{für } x \in I, \quad (7.9)$$

wobei das Restglied  $R_k(x)$  folgende Darstellungen besitzt:

$$R_k(x) = \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x (x - y)^k f^{(k+1)}(y) dy \quad (\text{Cauchy}) \quad (7.10)$$

$$= \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1} \quad \text{für ein } \xi \in [x_0, x] \quad (\text{Lagrange}). \quad (7.11)$$

*Beweis.* Wir zeigen erst (7.10) durch Induktion über  $k \in \mathbb{N}_0$ . Der Fall  $k = 0$  folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$R_0(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(y) dy.$$

Der Induktionsschritt beruht auf partieller Integration, und zwar gilt für  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} R_k(x) &= R_{k-1}(x) - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_0}^x (x - y)^{k-1} f^{(k)}(y) dy - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \left[ -\frac{(x - y)^k}{k} f^{(k)}(y) \right]_{y=x_0}^{y=x} + \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x (x - y)^k f^{(k+1)}(y) dy - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x (x - y)^k f^{(k+1)}(y) dy. \end{aligned}$$

Die Lagrangedarstellung folgt hieraus mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung, Satz 6.8. Sei zum Beispiel  $x \geq x_0$ , dann gilt für ein  $\xi \in [x_0, x]$

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!} \int_{x_0}^x (x - y)^k dy = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}.$$

□

**Beispiel 7.23.** Betrachte für  $x \in (-1, 1)$  die Funktion  $f(x) = (1 - x)^{-1/2}$ , mit Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - x)^{-3/2} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{3}{4}(1 - x)^{-5/2}.$$

Es gilt  $f(0) = 1$  und  $f'(0) = 1/2$ , also lautet das Taylorpolynom der Ordnung Eins

in  $x_0 = 0$

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + \frac{1}{2}x,$$

mit der Lagrange-Restglieddarstellung

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}x^2 = \frac{3}{8}(1-\xi)^{-5/2}x^2 \quad \text{für ein } \xi \in [0, x].$$

Als Anwendung erhalten wir für die relativistische Energie eines Teilchens mit Ruhemasse  $m_0$  und Geschwindigkeit  $v$ , wenn wir  $\beta = v/c$  setzen,

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{f''(\xi)}{2}\beta^4 \right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2 + \Delta E.$$

Dabei ist der erste Term die Ruheenergie und der zweite die klassische kinetische Energie. Für den relativistischen Korrekturterm ergibt sich aus der Restglieddarstellung die Abschätzung

$$\frac{\Delta E}{E_{kin}} = f''(\xi)\beta^2 \leq f''(\beta^2)\beta^2 < 0,008 \quad \text{für } \beta \leq 0,1.$$

Bei Geschwindigkeiten  $v \leq \frac{1}{10}c$  beträgt die relativistische Korrektur weniger als ein Prozent der klassischen kinetischen Energie.

**Definition 7.24.** Für  $f \in C^\infty(I)$  und  $x_0 \in I$  heißt die Reihe

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

Taylorreihe von  $f$  mit Zentrum  $x_0$ .

Die Taylorreihe ist eine Potenzreihe, wenngleich mit Zentrum  $x_0$  statt dem Nullpunkt. Wir können aber alle Aussagen zur Konvergenz anwenden. Nach Satz 7.12 gibt es ein  $R \in [0, \infty]$ , den Konvergenzradius, so dass die Reihe für  $|x - x_0| < R$  absolut konvergiert, für  $|x - x_0| > R$  dagegen divergiert. Es ist nun naheliegend zu vermuten, dass die Reihe auf  $(x_0 - R, x_0 + R)$  gegen  $f(x)$  konvergiert. Das ist im Allgemeinen aber falsch: Zum Beispiel kann man zeigen, dass folgende Funktion in  $C^\infty(\mathbb{R})$  ist:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Offenbar ist  $f^{(j)}(0) = 0$  für alle  $j$ , und somit sind alle Taylorpolynome Null, die Taylorreihe liefert die Nullfunktion und nicht die Funktion  $f(x)$ .

**Satz 7.25** (Darstellbarkeit durch die Taylorreihe). Sei  $f \in C^\infty(I)$ , und  $P(x)$  sei die Taylorreihe von  $f(x)$  mit Zentrum  $x_0 \in I$ . Für jedes  $x \in I$  gilt dann

$$f(x) = P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} R_k(x) = 0.$$

*Beweis.* Wegen  $f(x) - P_k(x) = R_k(x)$  ist die Aussage trivial.  $\square$

Wird die Funktion  $f(x)$  auf  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  durch eine Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$  dargestellt,

so hat diese Reihe Konvergenzradius mindestens  $\delta > 0$  und kann auf  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  gliedweise differenziert werden nach Satz 7.21. Somit ist  $f(x)$  auf  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  unendlich oft differenzierbar, und es folgt

$$f^{(k)}(x_0) = \frac{d^k}{dx^k} \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j \Big|_{x=x_0} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k} a_j (x - x_0)^j \Big|_{x=x_0} = k! a_k.$$

Die darstellende Reihe muss also die Taylorreihe sein. Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , die in der Nähe jedes Punkts  $x_0 \in I$  durch ihre Taylorreihe dargestellt werden, nennt man (reell-) analytisch.

Mit der Taylorreihe leiten wir nun einige wichtige Reihenentwicklungen ab.

**Beispiel 7.26.** Dass sich die Sinusfunktion gut durch Polynome approximieren lässt, wurde im Abschnitt über Polynome bereits diskutiert. Eine Darstellung als Potenzreihe erhält man aus der Definition  $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$  und der Reihendarstellung der Exponentialfunktion mit  $i^0 = 1$ ,  $i^1 = i$ ,  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$  usw., das heißt

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \dots$$

und folglich

$$\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots,$$

was mit der Taylor-Reihe der Sinusfunktion bezüglich  $x_0 = 0$  übereinstimmt. Der maximale Fehler bei der Approximation einer Funktion  $f$  durch ein Taylor-Polynom  $P_k$  ist als Folge der Restglied-Darstellung nach Lagrange beschränkt durch

$$\|f - P_k\| \leq \frac{\max_{\xi \in I} |f^{(k+1)}(\xi)|}{(k+1)!} \max_{x \in I} |x - x_0|^{k+1}.$$

Die Approximation der Sinusfunktion im Intervall  $I = [-\pi/4, \pi/4]$  mit dem Zentrum  $x_0 = 0$  und dem Taylor-Polynom  $P_5(x) = x - x^3/6 + x^5/120$  führt also auf einen maximalen Fehler

$$\|\sin - P_5\| \leq \frac{1}{6!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^6 \approx 0,0003.$$

Werte der Sinusfunktion außerhalb des Intervalls lassen sich dann mit Hilfe der Formel  $\sin(y) = \cos(y - \pi/2) = \pm(1 - \sin^2(y - \pi/2))^{1/2}$  approximieren.

Für die Funktionen  $\cos x$  und  $\sin x$  gilt

$$\cos^{(j)}(0) = \begin{cases} (-1)^k & \text{für } j = 2k \\ 0 & \text{für } j = 2k + 1 \end{cases} \quad \sin^{(j)}(0) = \begin{cases} (-1)^k & \text{für } j = 2k + 1 \\ 0 & \text{für } j = 2k. \end{cases}$$

Daraus folgen die Taylorentwicklungen, für geeignete  $\xi \in [0, x]$ ,

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \cos^{(2n+2)}(\xi) \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \\ \sin x &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \sin^{(2n+3)}(\xi) \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}. \end{aligned}$$

Da  $x^k/k! \rightarrow 0$  mit  $k \rightarrow \infty$ , gehen die Restglieder mit  $n \rightarrow \infty$  gegen Null. Also folgen

die Reihendarstellungen

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} \pm \dots \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \quad (7.12)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} \pm \dots \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (7.13)$$

Weiter bekommen wir

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \exp(ix).$$

Die Glieder der rechten Reihe sind komplexe Zahlen. Unsere Resultate zur Konvergenz von Reihen gelten aber ganz entsprechend (wie auch bei Folgen). Mit der anschaulichen Definition von  $\cos x$  und  $\sin x$  ist schwierig zu argumentieren, die Begründung der Additionstheoreme und der Ableitungen von  $\cos x$  und  $\sin x$  erforderte nicht offensichtliche, geometrische Überlegungen. Mit den Reihenentwicklungen haben wir jetzt (endlich) eine analytische Formel.

**Beispiel 7.27.** Wir betrachten für  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Funktion  $f(x) = (1+x)^\alpha$ . Im Fall  $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$  gilt nach dem Binomischen Lehrsatz

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Ab jetzt sei  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ . Dann gilt  $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \neq 0$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ , also ist die Taylorreihe von  $f(x)$  mit Zentrum  $x_0 = 0$  die Binomialreihe

$$B_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$$

Um den Konvergenzradius der Reihe zu bestimmen, berechnen wir für die Glieder  $a_k = \binom{\alpha}{k} x^k$

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|\alpha - k|}{k+1} |x| \rightarrow |x| \quad \text{mit } k \rightarrow \infty.$$

Im Fall  $|x| > 1$  sind die Glieder dem Betrag nach wachsend für große  $k$ , die Reihe kann also nicht konvergieren nach Satz 7.4. Für  $|x| < 1$  fallen die Glieder der Reihe dagegen mit geometrischer Rate, und zwar gilt für jedes  $q \in (|x|, 1)$

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q < 1 \quad \text{für hinreichend große } k.$$

Die geometrische Reihe  $q^k$  liefert also eine Majorante, der Konvergenzradius ist  $R = 1$ . Die Frage ist nun, ob die Funktion  $f(x)$  auf dem Intervall  $(-1, 1)$  durch die Reihe dargestellt wird. Da die Abschätzung des Restglieds etwas kompliziert ist, vor allem im Fall  $x < 0$ , gehen wir anders vor und berechnen auf  $(-1, 1)$  mit Satz 7.21 die Ableitung

$$B'_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\alpha-k}{k+1} \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha B_\alpha(x) - x B'_\alpha(x),$$

das heißt  $B'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{1+x} B_\alpha(x)$ . Es folgt mit  $g(x) = (1+x)^{-\alpha}$

$$(gB_\alpha)'(x) = g'(x)B_\alpha(x) + g(x)B'_\alpha(x) = g(x)B_\alpha(x) \left( -\frac{\alpha}{1+x} + \frac{\alpha}{1+x} \right) = 0.$$

Wegen  $B_\alpha(0) = 1 = f(0)$  ergibt sich die folgende Darstellung (Newton 1665)

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{für alle } x \in (-1, 1). \quad (7.14)$$

Oft wird die Näherung  $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$  für  $|x| \ll 1$  benutzt, siehe das Beispiel zur Relativität oben.